УДК 532.70

РЕЛАКСАЦИЯ СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

ГАСАНОВ Х. Г. , АЛИЕВ А. А*.

*АзНИПИнефть, Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия**

В статье рассматривается релаксация жидкости под действием переменного электрического поля. Установлено, что различные по сечению трубы точки релаксируют по-разному. Вводится критерий, разграничивающий области релаксации жидкости. Выявлены основные закономерности поведения времени релаксации в зависимости от характеристик приложенного поля.

С увеличением технических приложений гидродинамики растет число жидкостей, используемых в качестве рабочих тел. В этой связи возникает вопрос о более полном исследовании различных электрофизических параметров изучаемой среды. К числу важных свойств жидкости, недостаточно освещенных к настоящему времени, относится такая характеристика, как релаксация жидкости под действием приложенного переменного электрического поля. В [1] был получен профиль скорости вязкой жидкости под действием электрического поля. Примечательным фактом для данного профиля является то, что скорость жидкости оказывается зависящей от частоты приложенного электрического поля, более того, производная $\frac{\partial v}{\partial \omega}$, как показывают расчеты, есть величина отрицательная при любых параметрах жидкости и поля. Другими словами, с увеличением частоты переменного электрического поля скорость течения жидкости уменьшается. Вообще говоря, ничего удивительного в этом нет, поскольку имеющиеся в литературе данные [2,3] свидетельствуют об изменении вязкости жидкости по мере роста частоты электрического поля. Дальнейший анализ формул, полученных в [1], приводит к следующему выводу: профиль скорости при неизменной частоте поля зависит также от времени действия переменного поля. Действительно, если по результатам [1] найти величину $\frac{\partial v}{\partial \omega}$, то она окажется равной

$$\frac{\partial v}{\partial \omega} = -f_1(\omega) - i\,t\,f_2(\omega), \tag{1}$$

где $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ есть некоторые функции частоты электрического поля.

Следовательно, при одной и той же частоте поля ω или, что то же самое, при постоянных функциях $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ значение скорости уменьшается по мере увеличении времени действия поля. В связи с этим возникает вопрос о релаксации профиля скорости вязкой жидкости под действием электрического поля при перманентной частоте самого поля. Так как характеристики электрического поля в данной задаче не меняются, то будем искать релаксацию профиля скорости при постоянных реологических коэффициентах жидкости. Уравнение движения при сделанных выше предположениях запишется в виде

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \tau_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\Delta P}{L} + f_0 e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где τ_0 - время релаксации скорости жидкости под действием поля, остальные обозначения - общепринятые. Задача должна решаться при нулевых начальных и граничных условиях, выбираемых в соответствии с сущностью рассматриваемого процесса

$$\begin{aligned} &v(r,t=0)=0 \;,\; \frac{\partial v(r,t=0)}{\partial t}=0\,; \\ &v(r=R,t)=0 \;,\; \frac{\partial v(r=0,t)}{\partial r}=0. \end{aligned} \qquad (3)$$

При начальных условиях (3) задачу удобнее всего решить операционным методом. После применения преобразования Лапласа получим следующее изображающее уравнение

$$(1+s\,\tau_0)\,s\,\rho\,v^*=\eta\left(\frac{d^2v^*}{d\,r^2}+\frac{1}{r}\frac{d\,v^*}{d\,r}\right)+\frac{\Delta P}{L\,s}+\frac{f_0}{s+i\,\omega}\,, \qquad (4)$$

которое посредством замены

$$v^*=w^*+\frac{\Delta P}{\rho\,L\,s^2(1+s\,\tau_0)}+\frac{f_0}{\rho\;s\,(s+i\,\omega)\,(1+s\,\tau_0)} \qquad (5)$$

можно привести к однородному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2v^*}{d\,r^2}+\frac{1}{r}\frac{d\,v^*}{d\,r}-\frac{(1+s\,\tau_0)s\,\rho}{\eta}v^*=0. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) очевидно. Оно выражается через модифицированные функции Бесселя и имеет вид

$$w^*=C_1I_0\left(\sqrt{\frac{\rho\,s\,(1+s\,\tau_0)}{\eta}}\;r\right)+C_2K_0\left(\sqrt{\frac{\rho\,s\,(1+s\,\tau_0)}{\eta}}\;r\right) \qquad (7)$$

Постоянную C_2 следует принять равной нулю, ввиду свойств бесселевых функций при $r\to 0$, которые противоречат второму граничному условию (3). Поэтому окончательно получаем решение в виде

$$\begin{aligned} &w^*=C_1I_0\left(\sqrt{a_1+a_2}\right); \\ &a_1=\frac{\rho\,s^2\tau_0}{\eta}r^2 \;,\; a_2=\frac{\rho\,s}{\eta}r^2 \end{aligned} \qquad (8)$$

Функцию Бесселя от аргумента под знаком радикала типа $I_0\left(\sqrt{a_1+a_2}\right)$, являющуюся аналитической функцией аргумента (a_1+a_2) при всех его значениях, можно разложить в бесконечный ряд по степеням a_2, воспользовавшись для вычислений формулами дифференцирования для бесселевых функций [4]

$$\begin{aligned} I_0\left(\sqrt{a_1+a_2}\right)&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_2^j}{j\,!}\frac{d^j}{d\,a_1^j}\left[I_0\left(\sqrt{a_1}\right)\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-a_2/2)^j}{j\,!}a_1^{-j/2}I_j\left(\sqrt{a_1}\right)= \\ &=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\rho\,s}{2\,\eta}r^2\right)^j}{j\,!}\left(\frac{\rho\,s^2\tau_0}{\eta}r^2\right)^{-j/2}I_j\left(\sqrt{\frac{\rho\,s^2\tau_0}{\eta}}\;r\right)= \\ &=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j\,!}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\,\tau_0}\right)^{-j}I_j\left(\sqrt{\frac{\rho\,\tau_0}{\eta}}\,s\,r\right) \end{aligned} \qquad (9)$$

Единственная отличная от нуля постоянная C_1, определенная из граничного условия в изображениях $v(r=R,s)=0$, представляется как

$$C_1=-\frac{\dfrac{\Delta P}{\rho L s^2(1+s\tau_0)}+\dfrac{f_0}{\rho s(s+i\omega)(1+s\tau_0)}}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{j!}\left(\sqrt{\dfrac{\rho}{\eta}}\dfrac{R}{2\tau_0}\right)^{-j} I_j\left(\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sR\right)},$$

с учетом чего для профиля скорости получим в конечном счете выражение

$$v^*(r,s)=D\left[1-\frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{j!}\left(\sqrt{\dfrac{\rho}{\eta}}\dfrac{r}{2\tau_0}\right)^{-j} I_j\left(\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^j}{j!}\left(\sqrt{\dfrac{\rho}{\eta}}\dfrac{R}{2\tau_0}\right)^{-j} I_j\left(\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sR\right)}\right]; \qquad (10)$$

$$D=\frac{\Delta P}{\rho L s^2(1+s\tau_0)}+\frac{f_0}{\rho s(s+i\omega)(1+s\tau_0)}$$

Практический интерес для нас имеют случаи очень больших значений аргумента бесселевой функции, соответствующие началу процесса релаксации не сильно вязкой жидкости под действием электрического поля с достаточно большим временем релаксации. В указанном пределе, пользуясь асимптотическим разложением функций $I_j\left(\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)$, которые в первом приближении выражаются почти одинаково для всех индексов суммирования j (в этих разложениях мы отбрасываем все слагаемые пропорциональные обратной степени аргумента), а именно

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0}\right)^{-j} I_j\left(\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)=$$

$$=I_0\left(\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0}I_1\left(\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)+\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0}\right]^2 I_2\left(\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)+\cdots\approx,$$

$$\approx\frac{\exp\left(\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr\right)}{\sqrt{2\pi\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sr}}\left[1-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0}+\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0}\right]^2+\cdots\right]$$

и аналогично для второй суммы

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\left(\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{R}{2\tau_0}\right)^{-j} I_j\left(\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sR\right)\approx$$

$$\approx\frac{\exp\left(\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sR\right)}{\sqrt{2\pi\sqrt{\dfrac{\rho\tau_0}{\eta}}\,sR}}\left[1-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{R}{2\tau_0}+\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{R}{2\tau_0}\right]^2+\cdots\right],$$

получим для профиля скоростей жидкости в изображениях следующую формулу

$$v^*(r,s)=D\left[1-\sqrt{\frac{R}{r}}\,e^{-\delta s}\,\frac{g(r)}{g(R)}\right]; \qquad (11)$$

здесь введены следующие обозначения

$$g(r) = 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{r}{2\tau_0}\right]^2 + \cdots,$$

$$g(R) = 1 - \sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{R}{2\tau_0} + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\rho}{\eta}}\frac{R}{2\tau_0}\right]^2 + \cdots,$$

$$\delta = (R - r)\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}$$

Профиль скоростей в оригинале расщепляется на два возможных варианта: для времен $t \prec t_0 = (R - r)\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}$ и, соответственно, $t \succ t_0 = (R - r)\sqrt{\frac{\rho\tau_0}{\eta}}$. В первом случае для точек r, до которых воздействие поля еще не дошло, профиль определяется выражением, не зависящим от координаты r точек жидкости

$$v(r,t) = \frac{\Delta P}{\rho L}\tau_0\left[\frac{t}{\tau_0} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\right] + \\ + \frac{f_0}{i\rho\omega\left(\frac{1}{\tau_0} - i\omega\right)}\left[\left(\frac{1}{\tau_0} - i\omega\right) + i\omega\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\tau_0}\exp(-i\omega t)\right] \tag{12}$$

Во втором случае по истечении времени t_0 профиль описывается уже совершенно другой формулой

$$v(r,t) = \left\{\frac{\Delta P}{\rho L}\tau_0\left[\frac{t}{\tau_0} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\right] + \frac{f_0}{i\rho\omega\left(\frac{1}{\tau_0} - i\omega\right)}\left[\left(\frac{1}{\tau_0} - i\omega\right) + \right.\right. \\ \left.\left. + i\omega\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) - \frac{1}{\tau_0}\exp(-i\omega t)\right]\right\} \times \left[1 - \sqrt{\frac{R}{r}}\frac{g(r)}{g(R)}\right] \tag{13}$$

Физический смысл времени t_0 очевиден. Этот параметр характеризует время, за которое воздействие достигает точек трубы с координатой *r*. Отсюда следует, что различные (на одном сечении) точки жидкости релаксируют по-разному. Например, для областей, расположенных вблизи стенок трубы ($r \to R$), указанное время стремится к нулю, и поэтому профиль жидкости практически с самого начала процесса описывается выражением (13). В те же самые моменты времени для областей, близких к оси трубы ($r \to 0$), скорость жидкости определяется формулой (12). Следовательно, при экспериментальном исследовании процесса релаксации под действием электрического поля следует иметь ввиду, что сама релаксация зависит от областей измерения, о чем свидетельствуют наши расчеты.

Исследуем формулу (12) более подробно. При малых временах от начала процесса (именно в этом пределе указанная формула справедлива) ее можно упростить, принимая во внимание, что экспоненциальные множители стремятся к единице. Тогда после несложных вычислений можно записать для профиля скоростей

$$v(t) = \frac{f_0}{\tau_0\rho}\frac{1 - e^{-i\omega t}}{\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau_0}} \tag{14}$$

Как и следовало ожидать, скорость жидкости оказалась комплексным потенциалом вида

$$v = \varphi + i\,\psi\,, \tag{15}$$

где функции φ и ψ находятся как

$$\varphi = \frac{f_0}{\tau_0 \rho} \frac{1 - Cos\,\omega t + \frac{1}{\omega \tau_0} Sin\,\omega t}{\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}} \quad , \quad \psi = \frac{f_0}{\tau_0 \rho} \frac{Sin\,\omega t - \frac{1}{\omega \tau_0}(1 - Cos\,\omega t)}{\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}}$$

Вычислим модуль скорости. Очевидно, что

$$|\,v\,| = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} \tag{16}$$

Непосредственные расчеты дают нам следующие соотношения для компонентов скорости

$$\varphi^2 = \left(\frac{f_0}{\tau_0 \rho}\right)^2 \frac{(1 - Cos\,\omega t)^2}{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)^2} \quad , \quad \psi^2 = \left(\frac{f_0}{\tau_0 \rho}\right)^2 \frac{(\,Sin\,\omega t)^2}{\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)^2} \quad ,$$

с учетом которых для искомого модуля скорости имеем

$$|\,v\,| = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} = \frac{f_0}{\tau_0 \rho \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)} \sqrt{(1 - Cos\,\omega t)^2 + Sin^2 \omega t} =$$

$$= \frac{f_0}{\tau_0 \rho \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)} \sqrt{1 - Cos\,\omega t} \approx \frac{f_0 \omega t}{\tau_0 \rho \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)} \tag{17}$$

При выводе формулы (17), были использованы приближения, естественные для рассматриваемого предела $t \to 0$,

$$\frac{1}{\omega \tau_0} Sin\,\omega t \prec\prec Cos\,\omega t \ , \ Sin\,\omega t \succ\succ \frac{1}{\omega \tau_0}(1 - Cos\,\omega t) \ , \ Sin\,\frac{\omega t}{2} \approx \frac{\omega t}{2}$$

Теперь определим расход жидкости по сечению трубы в начальный момент времени. Принимая во внимание (17), имеем следующее выражение для расхода

$$Q\,(\,t\,) = \pi R^2 \frac{f_0 \omega t}{\tau_0 \rho \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)} \tag{18}$$

Из формулы (18) можно определить время релаксации τ_0. График $Q\,(\,t\,)$, как это ясно из (18), представляет собой прямую линию с угловым коэффициентом γ, равным

$$\gamma = \pi R^2 \frac{f_0 \omega}{\tau_0 \rho \left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_0^2}\right)}$$

Приравнивая эти коэффициенты, после некоторых вычислений окончательно получаем

$$\tau_0 = \pi R^2 \frac{f_0}{\gamma \rho \omega} \ , \tag{19}$$

представляющую собой искомую зависимость времени релаксации τ_0 от характеристик приложенного электрического поля при вполне оправданном условии для решаемой задачи $\omega^2 \succ\succ \frac{1}{\tau_0^2}$.

Анализируя выражение (19), можно сделать выводы об основных чертах поведения времени релаксации в зависимости от характеристик поля:

1) время релаксации τ_0 всегда уменьшается с ростом интенсивности приложенного электрического поля,
2) чем меньше частота переменного электрического поля ω , тем больше время релаксации скорости, поскольку для всех частот имеет место равенство

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial \omega} \prec 0 \tag{20}$$

Последний эффект, очевидно, тесно связан с упоминавшимся в [3] эффектом уменьшения влияния частоты переменного электрического поля на вязкость жидкости. При малых частотах изменения, произошедшие за полупериод колебаний, не успевают компенсироваться колебаниями, совершаемыми в противофазе, и поэтому время релаксации существенно, равно, как и изменение вязкости. При больших частотах поля колебания настолько часто меняются, что исследуемая жидкость просто не успевает релаксировать, вследствие чего величина τ_0 уменьшается.

---

1. *Hassanov H. G.,* Possibility of practical using of electric field in transportation systems, Journal of Mathematical & Computational Application, 2002, vol. 7, № 2, pp. 113 - 121
2. *Зарипов Р. Х., Савиных Б. В, Усманов А. Г.,* Исследование влияние электрических полей на коэффициент динамической вязкости диэлектрических жидкостей, Казань, 1981, 17стр., Депонировано в ОНИИТЕХиМ, г.Черкассы.
3. *Савиных Б. В., Зарипов Р. Х.* и др., Влияние высокочастотных электрических полей на динамическую вязкость органических соединений, Тепло-и массообмен, Межвузовский сборник, Казань, 1982, стр. 7 – 11
4. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций, Москва, Наука, 1971, 287 стр.

MAYENİN SÜRƏTİNİN ELEKTRİK SAHƏSİ ALTINDA RELAKSASİYASI

HƏSƏNOV H. Q. , ƏLİYEV Ə. Ə.

Məqalədə dəyişən elektrik sahəsi altında mayenin relaksasiyası baxılır. Borunun en kəsiyinə görə müxtəlif nöqtələrinin fərqli relaksasiya etməsi müəyyən olunub. Mayenin relaksasiya zonalarını ayıran meyar əsaslandırılıb. Tətbiq olunan elektrik sahəsinin xassələrindən asılı olaraq relaksasiya zamanının dəyişməsinin əsas qanunları aşkar olunub.

RELAXATION OF FLUID VELOCITY UNDER ELECTRIC FIELD ACTION

HASSANOV H. G., ALIYEV A. A.

Relaxation of fluid under alternating electric field action is considered. It is established, that various points of fluid cross – section relax differently. It is introduced the criteria discriminating relaxation areas of fluid. It is found the basic laws of relaxation time behaviour in dependence on applied field characteristics.