УДК. 62-50

К АНАЛИЗУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДИСКРЕТНЫМИ МЕТОДАМИ

МАМЕДОВ А.И., АЛИЕВ Я.А.

Азербайджанский НИИ Энергетики и Энергопроектирования

Разработан комплекс эффективных алгоритмов для численного определения переходных процессов в системах с сосредоточенными параметрами, пользуясь формулой Симпсона.

Многочисленные объекты различных областей техники представляют собой сложную систему с сосредоточенными параметрами. В первую очередь к ним относятся системы автоматического управления газосборных коллекторов, сепарационных установок [1,2], электрические цепи [3], газопроводы [4] с сосредоточенными параметрами, электроприводы промышленных роботов, включающие многомассовые системы [5] и т.д.

Решение проблемы динамики в указанных системах имеет важное научное и практическое значение с целью выбора эффективных систем автоматического управления, удовлетворяющих заданным техническим требованиям, а также обеспечения рациональных режимов работ в процессе их эксплуатации.

Переходные процессы, протекающие в сложных системах с сосредоточенными параметрами, описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями высокого порядка [1-5].

Аналитическое решение проблемы динамики в упомянутых системах, методом операционного исчисления вызывает большие математическое трудности, в связи с высокими порядками характеристических уравнений передаточных функций исследуемых систем [1-5].

Поэтому для решения проблемы динамики с применением компьютерной техники, а также для осуществления цифрового управления технологическими процессами на базе микро-ЭВМ [6-8], наиболее перспективным является использование численных методов [6-12].

Группа эффективных численных методов для решения проблемы динамики в системах с сосредоточенными параметрами основана на получении эквивалентной дискретной системы, соответствующей исследуемой непрерывной системы [7-12,15].

При этом в качестве математического аппарата используется обычное и дискретное преобразование Лапласа.

Эта группа методов, также как частотных, не требует знания корней характеристического уравнения исследуемой системы, что значительно расширяет круг решаемых практических задач.

Однако, общим недостатком большинства методов этой группы является большой объем математических выкладок для получения дискретных передаточных функций.

Одним из эффективных методов такого рода является метод, предложенный в работах [11,12] для расчета переходных процессов в системах с сосредоточенными параметрами.

Сущность этого метода основывается на использовании основе дискретного аналога интегрального уравнения свертки, при этом заменяя операции непрерывного интегрирования суммированием по формуле трапеций. Такой подход исключает из решения процедуру получения сложных передаточных функций, что значительно упрощает математические выкладки.

Однако, особенностью метода [11,12] является то, что в зависимости от условия постановки задачи, вызывается необходимость об определении соответствующего рекуррентного соотношения для проведения анализа динамики в указанных системах.

Это обстоятельство затрудняет применение метода [11,12] для решения различных практических задач в области расчета переходных процессов в системах с сосредоточенными параметрами.

Помимо этого, применение формулы трапеции для численного определения переходных процессов в объектах с сосредоточенными параметрами в отдельных случаях, в частности, при резких изменениях параметров объекта управления [13], может привести к заметным погрешностям.

Как показывает проведенный анализ, для численного определения переходных процессов в объектах с сосредоточенными параметрами с большой точностью расчета весьма эффективным является применение формулы Симпсона [9,13].

Между тем, эффективность работы компьютера зависит от качества используемых алгоритмов, а повышение этих качеств может идти по пути усовершенствования алгоритмов расчетов.

В данной статье дается дальнейшее развитие метода [11,12] для численного определения переходных процессов в объектах с сосредоточенными параметрами при замене операции непрерывного интегрирования суммированием, пользуясь формулой Симпсона [11,13].

Согласно предложенному подходу, расчет переходных процессов в указанных системах состоит из двух этапов:

1) определение решетчатой функции с помощью передаточной функции непрерывной системы;
2) вычисление переходного процесса в дискретных точках с помощью рекуррентных соотношений.

Рассмотрим переходный процесс в линейной системе с сосредоточенными параметрами.

Переходные процессы, протекающие в данной системе, описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$a_0 \frac{d^{n_1} y(t)}{dt} + a_1 \frac{d^{n_1-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_{n_1-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_{n_1} y(t) =$$
$$= b_0 \frac{d^{m_1} x(t)}{dt} + b_1 \frac{d^{m_1-1} x(t)}{dt} + \cdots + b_{m_1-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_{m_1} x(t), \qquad (1)$$

где $y(t)$ – выходная величена, $m_1 \le n_1$

$x(t)$ – произвольное входное воздействие.

Предположим начальные условия нулевые.

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$(a_0 p^{n_1} + a_1 p^{n_1-1} + \cdots + a_{n_1-1} p + a_{n_1}) y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m_1-1} + \cdots + b_{m_1-1} p + b_{m_1}) x(p), \qquad (2)$$

где p – оператор обычного преобразования Лапласа.

$y(p), x(p)$ – соответственно Лапласовы изображения выходной величины и входного воздействия.

Выражение (2) можно представить в виде:

$$a_0 y(p) + y(p) W_1(p) = W_2(p) x(p), \qquad (3)$$

где

$$W_1(p) = a_1 \frac{1}{p} + \cdots + a_{n_1-1} \frac{1}{p^{n_1-1}} + a_{n_1} \frac{1}{p^{n_1}}$$

$$W_2(p) = b_0 \frac{1}{p^{n_1-m_1}} + b_1 \frac{1}{p^{n_1-m_1+1}} + \cdots + b_{m_1-1} \frac{1}{p^{n_1-1}} + b_{m_1} \frac{1}{p^{n_1}}$$

На основе теоремы свертывания, переходя от уравнения (3) в область оригиналов, получим:

$$a_0 y(t) + \int_0^t y(t-\tau) W_1(\tau) d\tau = \int_0^t W_2(\tau) x(t-\tau) d\tau, \qquad (4)$$

где

$$W_1(t) = a_1 + \cdots + a_{n_1-1} \frac{t^{n_1-2}}{(n_1-2)!} + a_{n_1} \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!},$$

$$W_2(t) = b_0 \frac{t^{n_1-m_1-1}}{(n_1-m_1-1)!} + b_1 \frac{t^{n_1-m_1}}{(n_1-m_1)!} + \cdots + b_{m_1-1} \frac{t^{n_1-2}}{(n_1-2)!} + b_{m_1} \frac{t^{n_1-1}}{(n_1-1)!}.$$

Интегральное уравнение (4) может быть решено численно, если заменить интегралы суммами.

В связи с этим, используя связь между непрерывным временем t и дискретным n в виде $t = nT$, (где $T -$период повторения решетчатой функции, $n = 0,1,2,...$) согласно подходу [14], производим дискретизацию уравнения (4) при выбранном интервале T, заменяя операцию непрерывного интегрирования суммированием, в общем случае по формуле Симпсона.

В рассматриваемом случае процесс вычисления интеграла в решетчатой форме представляется в виде [9,13]:

$$\int_{(m-2)T}^{mT} f(\tau) d\tau = \frac{T}{6} \sum_{m=0}^{n} (f[m] + 4f[m-1] + f[m-2]), \qquad (5)$$

При этом вместо (4) получим:

$$a_0 y[n] + \frac{T}{6} \sum_{m=0}^{n} (y[n-m] W_1[m] + 4W_1[n-m+1] y[m-1] + W_1[n-m+2] y[m-2]) =$$

$$= \frac{T}{6} \sum_{m=0}^{n} (W_2[m] x[n-m] + 4W_2[n-m+1] x[m-1] + W_2[n-m+2] x[m-2]), \qquad (6)$$

где $y[n], x[n], W_1[n], W_2[n] -$ решетчатые функции, полученные из соответствующих непрерывных функций времени $y(t), W_1(t), W_2(t)$ заменой t на nT;

$$W_1[n] = a_1 + \cdots + a_{n_1-1} \frac{(nT)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} + a_{n_1} \frac{(nT)^{n_1-1}}{(n_1-1)!},$$

$$W_2[n] = b_0 \frac{(nT)^{n_1-m_1-1}}{(n_1-m_1-1)!} + b_1 \frac{(nT)^{n_1-m_1}}{(n_1-m_1)!} + \cdots + b_{m_1-1} \frac{(nT)^{n_1-2}}{(n_1-2)!} + b_{m_1} \frac{(nT)^{n_1-1}}{(n_1-1)!}.$$

Здесь учитывая, что при $m < 1 \quad y[m-1] = 0$, при $m < 2 \quad y[m-2] = 0$, можно представить:

$$\sum_{m=0}^{n} \left(W_1[m] y[n-m] + 4W_1[n-m+1] y[m-1] + W_1[n-m+2] y[m-2] \right) = W_1[o] y[n] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} \left(y[n-m] W_1[m] + 4w_1[n-m+1] y[m-1] + W_2[n-m+2] y[m-2] \right), \qquad (7)$$

Выражение (6) с учетом (7) будет:

$$y[n]\left(a_0+\frac{T}{6}W_1[o]\right)+\frac{T}{6}\sum_{m=1}^{n}\big(y[n-m]W_1[m]+4W_1[n-m+1]y[m-1]+W_1[n-m+2]y[m-2]\big)=$$

$$=\frac{T}{6}\sum_{m=0}^{n}\big(W_2[m]x[n-m]+4W_2[n-m+1]x[m-1]+W_2[n-m+2]x[m-2]\big), \qquad (8)$$

где при $m<1 \quad x[m-1]=0,\ m<2 \quad x[m-2]=0.$

Отсюда находим следующее рекуррентное соотношение, позволяющее последовательно вычислить функции $y[n]$:

$$y[n]=\eta\left\{\sum_{m=0}^{n}\big(W_2[m]x[n-m]+4W_2[n-m+1]x[m-1]+W_2[n-m+2]x[m-2]\big)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{n}\big(W_1[m]y[n-m]+4W_1[n-m+1]y[m-1]+W_1[n-m+2]y[m-2]\big)\right\}, \qquad (9)$$

$$\eta=\frac{\frac{T}{6}}{a_0+\frac{T}{6}W_1[o]}\cdot$$

Полученное рекуррентное соотношение (9) позволяет вычислить переходные процессы в объекте с сосредоточенными параметрами с большой точностью расчета.

Рекуррентное соотношение (9) весьма удобно для проведения анализа влияния параметров исходной системы на возникающие переходные процессы и легко реализуется на компьютере.

При таком подходе, если интегралы заменяются суммами по формуле трапеций:

$$\int_{(m-1)T}^{mT} f(\tau)d\tau=\frac{T}{2}\sum_{m=0}^{n}(f[m]+f[m-1]),$$

то вместе рекуррентного соотношения (9) получаем:

$$y[n]=\eta_1\left\{\sum_{m=0}^{n}\big(W_2[m]x[n-m]+W_2[n-m+1]x[m-1]\big)-\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{n}\big(y[n-m]W_1[m]+W_1[n-m+1]y[m-1]\right\}, \qquad (10)$$

где

$$\eta_1=\frac{\frac{T}{2}}{a_0+\frac{T}{2}W_1(o)}\cdot$$

Погрешность расчетов связана с величиной T. Чем меньше выбрано число T, тем в меньшей мере характеристики непрерывной функции отличаются от соответствующих характеристик решетчатых.

Преимуществом предложенного численного метода является то, что он обеспечивает единый подход к анализу переходных процессов в системах с сосредоточенными параметрами, поскольку полученные рекуррентные соотношения являются весьма универсальными и при этом не требуется в зависимости от условия постановки задачи получить соотвействующее рекуррентное соотношение для проведения анализа динамики в указынных системах, что значительно уменьшает математические выкладки и расширяет круг решаемых практических задач.

Предложенной численный метод также позволяет оценить погрешности численного расчета переходных процессов в объектах с сосредоточенными параметрами, пользуясь формулами прямоугольников, трапеций [11-13,15] и т.п.

Пример 1. Требуется найти переходные процессы в системе автоматического регулирования, пользуясь формулой трапеции, при скачкообразном изменении входной величины $x(t) = 1(t)$

Передаточная функция данной системы имеет следующий вид [11]:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}, \qquad (п.1)$$

где

$$x(p) = \frac{1}{p}\cdot$$

Выражение $(п.1)$ с помощью предложенного метода, пользуясь формулой трапеций в области оригиналов в решетчатой форме, можно представить в виде:

$$y[n] = \frac{1}{1 + \frac{T}{2}W[0]}\left\{ f[n] - \frac{T}{2}\sum_{m=1}^{n}(W[m]y[n-m] + W[n-m+1]y[m-1]) \right\}, \qquad (п.2)$$

где

$$f[n] = \frac{(nT)^3}{6},$$

$$W[n] = 3 + 3nT + \frac{(nT)^2}{2}\cdot$$

Расчет был произведен при $T = 0{,}5 \quad c$. Результаты расчета, полученные с помощью рекуррентного соотношения $(п.2)$, приведены в табл. 1. Там же, для сравнения приведены результаты упомянутого примера, полученные на основе аналитического решения данной задачи [11].

Время $t = nT\ (c)$	Приближенные значения $y(t)$ при $T = 0{,}5 \quad c$	Точные значения $y(t)$
0	0	0
0,5	0,0119	0,0144
1,0	0,0795	0,0803
1,5	0,1943	0,1911
2,0	0,3283	0,3233
2,5	0,4598	0,4562
3,0	0,5792	0,5768
3,5	0,6787	0,6791
4,0	0,7599	0,7619
4,5	0,8234	0,8269
5,0	0,8724	0,8753
5,5	0,9090	0,9116

Как следует из сопоставления полученных приближенных и точных результатов, предложенная методика позволяет с достаточной точностью рассчитать переходные процессы в системе с сосредоточенными параметрами.

Пример 2. Требуется найти переходные процессы в линейной системе с сосредоточенными параметрами, пользуясь формулами трапеций и Симпсона, при скачкообразном изменении входной величины $x(t) = 1(t)$.

Передаточная функция данной системы имеет следующий вид [15]:

$$W(p)=\frac{y(p)}{x(p)}=\frac{9{,}4}{p^3+4{,}3\,p^2+6\,p+2{,}7}, \qquad (п.3)$$

$$x(p)=\frac{1}{p}$$

В рассматриваемом случае выражение $(п.3)$ с помощью предложенного метода, пользуясь формулой Симпсона в решетчатой форме, можно представить в виде:

$$y[n]=\frac{1}{1+\frac{T}{6}W[o]}\left\{f[n]-\frac{T}{6}\sum_{m=1}^{n}(W[m]y[n-m]+4W[n-m+1]y[m-1]+\right.$$

$$\left.+W[n-m+2]y[m-2])\right\}, \qquad (п.4)$$

где

$$f[n]=9.4\frac{(nT)^3}{6},$$

$$W[n]=4.3+6nT+2.7\frac{(nT)^2}{2}.$$

Расчет был произведен при $T=0{,}2\,c$. При использовании формулы трапеции в данном примере расчеты производятся с помощью рекуррентного соотношения $(п.2)$.

Результаты расчета приведены в табл. 2.

Табл. 2

Время $t=nT$ (c)	Значения $y[n]$ при использовании формулы трапеции	Значения $y[n]$ при использовании формулы Симпсона
0	0	0
1	0,0088	0,0109
2	0,063	0,079
3	0,18	0,218
4	0,35	0,411
5	0,57	0,635
6	0,81	0,884
7	1,06	1,096

Как видно из табл. 2, в данном примере формула трапеции относительно формулы Симпсона дает заниженные значения переходного процесса.

---

1. *Водяник П.Ф.* Автоматизация управления процессами добычи газа. – М.: Недра , 1974.
2. *Тараненко Б.Ф. , Герман В.Т.* Автоматическое управление газопромысловыми объектами. –М.: Недра, 1976.
3. *Левинштейн М.Л.* Операционное исчисление в задачах электротехники - М.: Энергия, 1972
4. *Баясанов Д.Б.* Автоматическое управление магистральными газопроводами –М.: Недра , 1964
5. *Киселев Н.Н. Мядзель В.Н., Рассудов Л.Н.* Электроприводы с распределенными параметрами.– Л.-1985
6. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами –М. Мир., 1983
7. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. –М.: Мир, 1984
8. *Бесекерский В.А. ИзранцевВ.В.* Системы автоматического управления с микро ЭВМ-М.: Физматгиз, 1984

9. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. - М. Физматгиз, 1977
10. *I Ragazzini, Bergen A. A* mathematical technique for the analysis of linear systems. // Proc. IRE, Vol 42, November, 1954
11. *Наумов Б.Н.* Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. -М.: Госэнергоиздат, 1960
12. *Наумов Б.Н.* Теория нелинейных автоматических систем.-М.: Физматгиз, 1972
13. *Караев Р.И.* Переходные процессы в линиях большой протяженности. -М: Энергия,1978
14. *Мамедов А.И. и др.* К численному методу расчета переходных процессов в магистральных нефтепроводах. // Ученые записки АГНА.-1994.-№4.
15. *Кулик В.Т.* Принципы алгоритмизации и построения управляющих машин.- Гостехиздат УССР, 1963

DİSKRET METODLARLA TOPLU PARAMETRLİ SİSTEMLƏRDƏ BAŞ VERƏN KEÇİD PROSESLƏRİNİN HESABLANMASINA DAİR

MƏMMƏDOV A.İ., ƏLİYEV Y.A.

Məqalədə toplu parametrli sistemlərdə baş verən keçid proseslərinin hesablanması üçün diskret metod təklif edilmişdir. Təklif edilən üsul əsasında əldə edilmiş rekurrent asılılıq qarşıya qoyulan məsələnin kompyüterdə həllini xeyli asanlaşdırır.

TO ANALYSIS OF TRANSIENT PROCESSES IN SYSTEMS WITH CONCENTRATED PARAMETERS BY THE DISCONTINUOUS METHODS

MAMEDOV A.I., ALIYEV Y.A.

A numerical method for calculation of transient processes in systems with concentrated parameters is given.