УДК 697(075.8)

КОНСТРУИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ДЛЯ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ ТЕПЛОПОТЕРЬ ПОМЕЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ИНФИЛЬТРАЦИИ НАРУЖНОГО ВОЗДУХА

ЗЕЙНАЛОВ Т.Р.

Азербайджанский Архитектурно – Строительный Университет.

Получена математическая модель, связывающая теплопотери помещения с температурой наружного воздуха. Данная модель позволяет определять тепловую нагрузку системы отопления при ее эксплуатации с учетом инфильтрации наружного воздуха и колебании его температуры. Это позволяет при использовании соответствующей автоматики для качественно – количественного регулирования параметрами теплоносителя достичь существенной экономии топливно–энергетических затрат при эксплуатации системы отопления.

При проектировании системы водяного отопления перед инженерами стоит проблема с достаточной точностью определить теплопотери помещения при непрерывных изменениях температуры наружного воздуха. В этом случае при подсчете теплопотерь через массивные ограждающие конструкции необходимо учитывать инфильтрацию наружного холодного воздуха в зимний период года. Задачей определения теплопотерь является решение уравнения теплопроводности при квазистационарной теплопередаче с соответствующими граничными и начальными условиями. Решению вышеуказанной задачи были посвящены работы [1,2]. Но полученные модели имели достаточно громоздкий вид и даже при подсчете их на ЭВМ необходимо много времени для составления соответствующих программ. Ясно, что для инженерных расчетов они непригодны. Известно, что теплопотерями является тепловой поток, проходящий через внутреннюю поверхность стены за единицу времени. Поэтому для поставленной задачи необходимо построить математическую модель, связывающую тепловой поток на внутренней поверхности с наружной температурой. Классическое уравнение теплопроводности при нестационарной теплопередаче с учетом инфильтрации наружного воздуха имеет вид.

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} - c_в w \frac{\partial T}{\partial X} \qquad (1)$$

Разделим уравнение (1) на λ и введем следующие обозначения:

$a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности;

$б = \dfrac{\lambda}{c_в w}$ - , с учетом этих замен, получим:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} - \frac{1}{б}\frac{\partial T}{\partial X} \qquad (2)$$

Для уравнения (2) составим граничные условия III рода.

$$\begin{cases} -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X=0} = \alpha_2\ (t\,(0,\tau\,) - \mathrm{t_в}\ ) \\ \lambda \dfrac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X=\delta} = \alpha_1\ (\ t\,(\delta,\tau\,) - t_н\ (\tau)) \end{cases} \qquad (3)$$

Где $\alpha_1,\alpha_2 -$ коэффициенты теплоотдачи, соответственно, от внутренней и наружной поверхностей с учетом инфильтрации воздуха, которые определяются по известным формулам Власова:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_н - c_в w \\ \alpha_2 = \alpha_в + c_в w \end{cases} \qquad (\ 4\ )$$

Проинтегрируем уравнение (2) от 0 до ∞ и применим интеграл Лапласа:

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial \tau} e^{-s\tau}\ d\tau = \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{X}^2} e^{-s\tau}\ d\tau - \frac{1}{б}\int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial X} e^{-s\tau} d\tau \qquad (5)$$

Проинтегрировав данное выражение, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2T}{dX^2} - \frac{1}{б}\frac{dT}{dX} = \frac{1}{a}s \qquad (6)$$

Характеристическое уравнение данного выражения имеет вид.

$$r^2 - \frac{1}{б}r = \frac{1}{a}s \qquad (7)$$

Решив данное уравнение, найдем корни характеристического уравнения.

$$r_{1,2} = \frac{1}{2б} \pm \sqrt{\frac{1}{4б^2} + \frac{S}{a}} \qquad (8)$$

С учетом уравнения (8) решение уравнения (2) будем искать в виде уравнения Эйлера.

$$t\,(x,s\,) = e^{\frac{x}{2b}}\ (\ d_1 chkx + d_2 shkx\,) \qquad (9)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{1}{4b^2} + \dfrac{S}{a}}$

Продифференцировав уравнение (9) по х, получим выражение для определения градиента температуры.

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{1}{2b} e^{\frac{x}{2b}}\ (\ d_1 chkx + d_2 shkx\,) + ke^{\frac{x}{2b}}\ (\ d_1 shkx + d_2 chkx) \qquad (10)$$

Тогда тепловой поток, проходящий за единицу времени через внутреннюю поверхность стеновой конструкции, определится по формуле:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial X}\Big|_{X=0} = -\frac{\lambda}{2b} d_1 - \lambda k d_2 \qquad (11)$$

Найдя неопределенные коэффициенты d_1, d_2 из граничных условий (3) и подставив их в выражение (11), получим формулу для определения теплопотерь помещений при квазистационарной теплопередаче в изображении Лапласа.

$$q(0,S)=\Theta\frac{Ke^{\frac{\delta}{2b}}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{\frac{1}{\lambda}shk\delta+\frac{1}{\alpha_2}ke^{\frac{\delta}{2b}}}{Kchk\delta-\frac{1}{2b}shk\delta}} \qquad (12)$$

где $\Theta=(t_в-t_н)$

Разделив выражение (12) на $k\delta$, получим:

$$q(0,S)=\Theta\frac{\frac{e^{\frac{\delta}{2b}}}{\delta}}{\frac{\frac{1}{\lambda}\frac{shk\delta}{k\delta}+\frac{1}{\alpha_2}\frac{e^{\frac{\delta}{2b}}}{\delta}}{\frac{shk\delta}{\delta}-\frac{1}{2b}\frac{shk\delta}{k\delta}}} \qquad (13)$$

Сделав элементарные преобразования и приведя к общему знаменателю, получим:

$$q(0,S)=\Theta\frac{e^{\frac{\delta}{2b}}\left(\frac{\alpha_1}{\delta}chk\delta-\frac{\alpha_1}{2b}\frac{shk\delta}{k\delta}\right)}{chk\delta-\frac{\delta}{2b}\frac{shk\delta}{k\delta}+\frac{\alpha_1\delta}{\lambda}\frac{shk\delta}{k\delta}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\frac{\delta}{2b}}} \qquad (14)$$

Аппроксимируем выражение (14), разложив его в ряды Маклорена. Ясно, что для инженерных расчетов не стоит цель достижения малой погрешности при расчетах. Поэтому при допущении погрешности одного знака после запятой, можем ограничиться одним или максимум двумя членами многочлена.

$$\begin{aligned} &chk\delta=1+\frac{1}{2}k^2\delta^2\\ &shk\delta=k\delta+\frac{1}{6}k^3\delta^3\Rightarrow\frac{shk\delta}{k\delta}=1+\frac{1}{6}k^2\delta^2 \end{aligned} \qquad (15)$$

Подставив (15) в (14) и сделав несколько элементарных преобразований, получим:

$$\begin{aligned} &\left(1+\frac{1}{2}k^2\delta^2-\frac{\delta}{2b}\left(1+\frac{1}{6}k^2\delta^2\right)+\frac{\alpha_1\delta}{\lambda}\left(1+\frac{1}{6}k^2\delta^2\right)+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\frac{\delta}{2b}}\right)q\left(0,S\right)=\\ &=\Theta e^{\frac{\delta}{2b}}\left(\frac{\alpha_1}{\delta}\left(1+\frac{1}{2}k^2\delta^2\right)-\frac{\alpha_1}{2b}\left(1+\frac{1}{6}k^2\delta^2\right)\right) \end{aligned} \qquad (16)$$

Подставив выражение для $k=\sqrt{\frac{1}{4b^2}+\frac{S}{a}}$ в (16), раскрыв скобки и сгруппировав члены многочленов, получим окончательный вид передаточных функций:

$$\left(\frac{\delta^2}{2a}-\frac{\delta^3}{12ba}+\frac{\alpha_1\delta^3}{6\lambda a}\right)Sq(0,S)+\left(1+\frac{\delta^2}{8b^2}-\frac{\delta}{2b}-\frac{\delta^3}{48b^3}+\frac{\alpha_1\delta}{\lambda}+\frac{\alpha_1\delta^3}{24\lambda b^2}+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\frac{\delta}{2b}}\right)q(0,S)=$$

$$=e^{\frac{\delta}{2b}}\left(\frac{\alpha_1}{2a}-\frac{\alpha_1\delta^2}{12ba}\right)S\Theta(S)+e^{\frac{\delta}{2b}}\left(\frac{\alpha_1}{\delta}+\frac{\alpha_1\delta}{8b^2}-\frac{\alpha_1}{2b}-\frac{\alpha_1\delta^2}{48b^3}\right)\Theta(S) \tag{17}$$

Используя таблицы преобразования Лапласа от функций в пространстве Лапласа, перейдем к оригиналу. Для построения математической модели, связывающей тепловой поток на внутренней поверхности ограждающей конструкции с наружной температурой в оригинале, из выражения (17) получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Для упрощения данного выражения введем следующие обозначения

$$K_1=\frac{\delta^2}{2a}\left(1-\frac{\delta}{6b}+\frac{\alpha_1\delta}{3\lambda}\right)$$

$$K_2=1+\frac{\delta^2}{8b^2}+\delta\left(\frac{\alpha_1}{\lambda}-\frac{1}{2b}\right)\left(1+\frac{\delta^2}{24b^2}\right)+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}e^{\frac{\delta}{2b}}$$

$$K_3=e^{\frac{\delta}{2b}}\frac{\alpha_1}{2a}\left(1-\frac{\delta^2}{6b}\right) \tag{18}$$

$$K_4=e^{\frac{\delta}{2b}}\left(\alpha_1\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2b}\right)+\frac{\alpha_1\delta}{8b^2}\left(1-\frac{\delta}{6b}\right)\right)$$

Учтя (18) в выражении (17), получим обыкновенное дифференциальное уравнение Лагранжа с правой частью:

$$K_1\frac{dq\ (0,\tau)}{d\tau}+K_2\,q\ (0,\tau)=K_3\frac{d\Theta}{d\tau}+K_4\Theta \tag{19}$$

С учетом того, что в зимний период года в помещении системой отопления поддерживается постоянная температура $t_в(\tau)=const$, а температура наружного воздуха изменяется с гармоникой $t_н(\tau)=t_н^{ср}+A_{tn}\cos w(\tau-z)$, уравнение (19) примет вид.

$$\frac{dq\ (0,\tau)}{d\tau}+\frac{K_2}{K_1}q\ (0,\tau)=\frac{K_4}{K_1}\left(t_в\ (\tau)-\left(t_н^{ср}+A_{tn}\cos\omega(\tau-z)\right)\right) \tag{20}$$

Решение данного уравнения будет иметь вид:.

$$q(0,\tau)=e^{-\int\frac{K_2}{K_1}d\tau}\left(q_{в.п}\big|_{\tau=0}+\int\left(\frac{K_4}{K_1}(t_в\ (\tau)-(t_н^{ср}+A_{tn}\cos\omega(\tau-z))\right)e^{\int\frac{K_2}{K_1}d\tau}d\tau\right) \tag{21}$$

где $q_{в.п}\big|_{\tau=0}$ - тепловой поток на внутренней поверхности стеновой конструкции в начальный момент времени [2].Она определяется по формуле:

$$q_{в.п}^{и}\big|_{\tau=0}=\frac{C_PW(t_в-t_н)\left(1-\frac{C_PW}{\alpha_1}\right)}{e^{C_PWR_{об}}-1+\frac{C_PW}{\alpha_2}e^{C_PWR_{об}}+\frac{C_PW}{\alpha_1}}+C_PW(t_в-t_н) \tag{22}$$

Решив уравнение (21), получим окончательный вид решения уравнения (20)

$$q(0,\tau) = e^{-\frac{K_2}{K_1}\tau}\left(q_{\text{в.п}}\Big|_{\tau=0} + \frac{K_4}{K_1} t_{\text{в}}(\tau) e^{\frac{K_2}{K_1}\tau} - \frac{K_4}{K_1} t_{\text{н}}^{\text{ср}} e^{\frac{K_2}{K_1}\tau} + \frac{K_4}{K_1} A_{t\text{н}} \frac{e^{\frac{K_2}{K_1}\tau}\left(\frac{K_2}{K_1\omega}\frac{\cos\omega(\tau - \mathrm{Z})}{\omega} + \frac{\sin\omega(\tau - \mathrm{Z})}{\omega} \right)}{\left(\frac{K_2}{K_1\omega}\right)^2 + 1} \right) \tag{23}$$

Полученное уравнение позволяет регулировать тепловую нагрузку, падающую на систему отопления при изменении температуры наружного воздуха.

---

1. *Деч. Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z – преобразований М. Наука 1976г.

2 *Гусейнов Н.А.* Влияние фильтрации воздуха на теплозащиту пористой стены в нестационарных условиях. Ученые записки АзПИ, ;№16, 1972г.

3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям М. Наука 1976г.

4. *Ушков Ф.В.* Теплопередача ограждающих конструкций при фильтрации воздуха М. Стройиздат. 1969г.

XARİCİ HAVANIN İNFİLTRASİYASINI NƏZƏRƏ ALMAQLA OTAQLARIN İSTİLİK İTKİLƏRİNİN MÜHƏNDİS HESABATI ÜCÜN KVAZİSTASİONAR İSTİLİKÖTÜRMƏNİN RİYAZI MODELİNİN QURULMASI

ZEYNALOV T.R.

Məqalədə xarici havanın temperaturu ilə otaqların istilik itkilərini əlaqələndirən riyazi model alınmışdır. Alınan riyazi azılılıq xarici havanın temperaturunun dövri olaraq dəyişməsi zaman isitmə sistemlərinin istilik yukünü təyin etməyə imkan verir. Nətəcədə istilik daşıyıcısının parametrlərini keyfiyyət və kəmiyyətcə tənzimləmək və bununla da isitmə sisteminin istismarına sərf olunan enerji məsləflərini azaltmaq mümkün olur.

DESIGNING THE MATHEMATICAL MODEL OF THE GUASI – STATIONARY HEAT TRANSFER FOR ROOM HEAT LOSSES ENGINEER CALCULATIONS SUBJECT TO INLEAKAGE OF OUTDOOR AIR

ZEYNALOV T.R

The mathematical model connected room heat losses with outdoor air temperature are obtained. This model allows determining the heating system’s heat demand during its use with taking into account variation. This permits to effect during use of heating system operation a essential saving provided suitable automatic equipment utilization for heat – transfer agent quantitative and qualitative control.