УДК 621.315.61

МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

МАМЕДОВ Т.М.

Азербайджанский Технический Университет

В статье предлагается простой, с точки зрения реализации на компьютере, метод дифференциального преобразования при расчете сложных электрических цепей со сосредоточенными параметрами, не требующего нахождения корней характеристического уравнения.

Степенной ряд

$$f(t)=C_0+C_1(t-a)+C_2(t-a)^2+...+C_n(t-a)^n+... \qquad (1)$$

(здесь n принимает все целочисленные значения $n=0,1,2,3,...,n-1$) сходится в круге радиуса R и может быть почленно дифференцируем внутри круга его сходимости.

Так, например,

$$f'(t)=C_1+2C_2(t-a)+3C_3(t-a)^2+...+nC_n(t-a)^{n-1} \qquad (2)$$

Последний ряд (2) имеет тот же радиус сходимости и, следовательно, может быть продифференцирован снова и так до бесконечности. Здесь принято обычное обозначение производных в виде штрихов и цифр римского алфавита.

Таким образом, действительная функция $f(t)$ имеет в интервале $a \le t < b$ n–ую производную $f^{(n)}(t)$, то есть:

$$f^{(n)}(t)=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot nC_n+2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n(n+1)C_{n+1}(t-a)+... \qquad (3)$$

В соотношениях (1), (2) и (3) используется равенство $t=a$.

Тогда $C_0=f(a)$; $C_1=f'(a)$; $C_2=\frac{1}{2!}f''(a)$; $C_3=\frac{1}{3!}f'''(a)$;…; $C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$ (4)

Замена в равенстве (1) неопределенных коэффициентов $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ найденными значениями (4), дает ряд

$$f(t)=f(a)+\frac{1}{1!}(t-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(t-a)^2f''(a)+...+\frac{1}{n!}(t-a)^nf^{(n)}(a)+... \qquad (5)$$

Ряд (5), сходящийся в правой части, называется рядом Тейлора.

Если в ряде Тейлора положить $a=0$, то получится частный случай ряда Тейлора, который называют рядом Маклорена.

$$f(t)=f(0)+\frac{t}{1!}f'(0)+\frac{t^2}{2!}f''(0)+...+\frac{t^n}{n!}f^{(n)}(0)+... \qquad (6)$$

Из последнего выражения следует, что если известно начальное значение функции $f(0)$ и ее производных $f^{(n)}(0)$, можно определить функцию $f(t)$ в виде степенного ряда.

Напомним, что здесь *t*–независимая переменная и при *t<1* быстро убывает и ряд (6) сходится довольно быстро. Все это вполне справедливо при изучении переходного процесса в цепях постоянного тока.

Намного сложнее обстоит дело с цепями переменного тока. При воздействии на цепь синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ производные от этого напряжения содержат $\omega, \omega^2, \omega^3, ..., \omega^n$ (при промышленной частоте *f*=50Hz, $\omega = 314 \frac{rad}{s}$), величина которого на определенном этапе может стать соизмеримой с величиной *n!* (здесь U_m – амплитуда приложенного напряжения(V), ω – круговая частота$\left(\frac{rad}{s}\right)$, φ – начальная фаза приложенного напряжения (rad)). Одним из выходов из создавшегося положения является использование относительных единиц, где за базисные может быть взята стандартная частота ($\omega_{баз}$) и активное сопротивление ($R_{баз}$). Остальные базисные электрические величины являются следствием выбранных двух величин. Так, например, величина $\frac{t^n}{n!}$ при достаточно больших значениях времени (*t*>1) может привести к переполнению компьютера. В особенности это относится к *n!*, которое при больших *n* приводит к переполнению последнего. Однако здесь возможно использование искусственных путей.

Первое. В числителе время меньше единицы, тогда t^n будет небольшим при достаточно большом *n*. Последнего нельзя сказать о *n!*, которое может привести к переполнению компьютера. Однако этого можно избежать, если до переполнения к числу *n!* применить искусственный прием умножения его на 10^{-a}, где а выбирается так, чтобы у значения *n!* осталось два знака (возможно разумное округление) и отбрасываются знаки после запятой после третьего (например, 32,417). Итак проделывается столько раз, какой нам надо отрезок времени существования кривой и каждого переполнения компьютера.

Второе. Числитель и знаменатель относительно близки по величине. В этом случае и числитель и знаменатель умножается на одну и ту же величину. Например:

$$\frac{числитель 371248956173 \cdot 10^{-10}}{знаменатель 563425617381 \cdot 10^{-10}} = \frac{37.124}{56.342} \approx 0.66$$

Причем, остальной остаток от деления отбрасывается. Как видим, отношение $\frac{t^n}{n!}$ будет иметь конечную величину, доступную для вычислений компьютера.

Тем не менее, на наш взгляд, наиболее удобным является использование относительных единиц.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1.

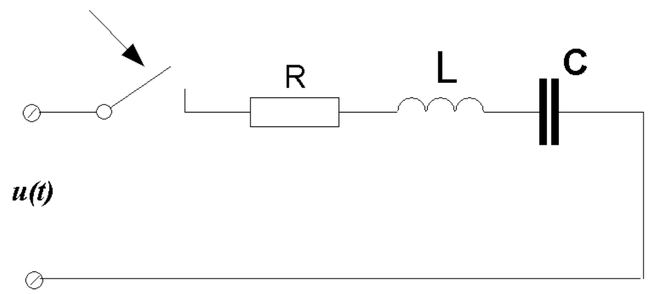

Рис. 1

Для простоты примем за базисные величины круговую частоту и активное сопротивление. Примем $\omega_{баз} = 314 \frac{rad}{s}$; $R_{баз} = 314\Omega$. Тогда $\overset{*}{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{баз}} = 1$ и $\overset{*}{R} = \frac{R}{R_{баз}} = 1$.

Допустим $x_L = 500\Omega$. Тогда $\overset{*}{x}_L = \dfrac{x_L}{x_{баз}} = \dfrac{500}{314} = 1.59$, и при $\omega_{баз} = 314\dfrac{rad}{s}$ $\overset{*}{L} = \overset{*}{x}_L = 1.59$.

С другой стороны $x_c = \dfrac{1}{\omega C}$ и если принять $x_c = 100\Omega$, то $\overset{*}{x}_c = \dfrac{x_c}{x_{cбаз}} = \dfrac{100}{314} = 0.318$ и соответствующая емкость в относительных единицах будет $\overset{*}{C} = \dfrac{1}{\overset{*}{\omega} \cdot \overset{*}{x}_c} = \dfrac{1}{1 \cdot 0.318} = 3.14$

Уравнение цепи, соответствующей рис.1, будет:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_c = u(t)$$

Так как начальные условия нулевые (они могут быть и не нулевыми), то *i(0)=0* и $U_c(0)=0$ (по законам коммутации).

Тогда $L\dfrac{di}{dt} = u(t)$ (для простоты принято $\varphi = 0$).

Итак $Li'(0) = u(0)$, откуда $i' = 0$.

Последующее дифференцирование дает: $Ri' + Li'' + \dfrac{1}{C}i = u'(0)$ и $i'' = \dfrac{1}{L}\left[u'(0) - Ri'\right]$

Затем $Ri'' + Li''' + \dfrac{1}{C}i' = u''(0)$ или $i''' = \dfrac{1}{L}\left[u''(0) - Ri'' - \dfrac{1}{C}i'\right]$

В общем виде: $i^{(n)} = \dfrac{1}{L}\left[u^{(n-1)} - Ri^{(n-1)} - \dfrac{1}{C}i^{(n-2)}\right]$. Здесь $n=3,4,5,\ldots,\infty$.

По этому уравнению составлена программа расчета на компьютере (Программа1), где принято $\overset{*}{R} = 1$, $\overset{*}{\omega} = 1$, $\overset{*}{U}_m = 5$, $\overset{*}{L} = 1.59$, $\overset{*}{C} = 3.14$, $\varphi = 0$. По приведенным данным построена переходная кривая *i(t)*, представленная на рис.2.

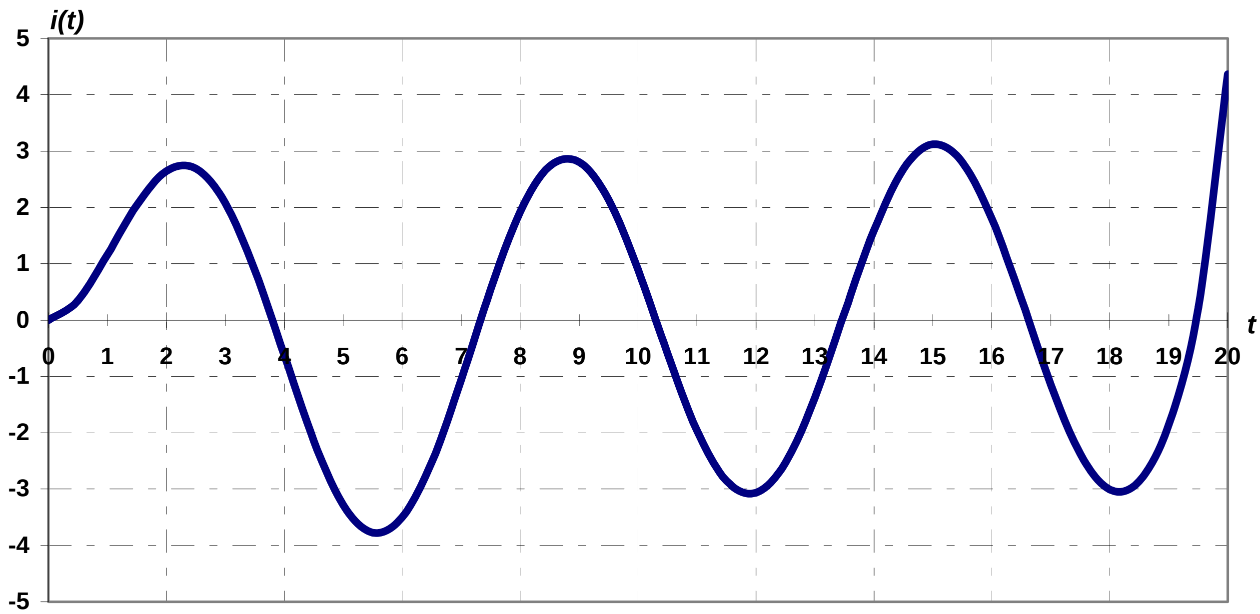

Рис.2

Программа 1

```
Sub RLC_for_article()
'######################################################################
'######                    Ввод исходных данных                  ######
'######################################################################
'###### Вводимые данные :                                        ######
'###### R - сопротивление (Ω)                                    ######
'###### L  - индуктивность  (H)                                  ######
'###### C  - ёмкость  (F)                                        ######
'###### Um - напряжение (V)                                      ######
'###### tbeg - начальное значение интервала времени              ######
'###### tkon - конечное  значение интервала времени              ######
'###### tstep - шаг интервала времени                            ######
'###### N - количество итераций при вычислении                   ######
'###### ω – стандартная угловая частота                          ######
'###### φ - начальная фаза                                       ######
'###### Значения для перечисленных переменных следует            ######
'###### разместить в следующих ячейках листа :                   ######
'###### R – ячейка A2                                            ######
'###### L  - ячейка B2                                           ######
'###### C  - ячейка C2                                           ######
'###### Um - ячейка D2                                           ######
'###### φ - ячейка E2                                            ######
'###### N - ячейка F2                                            ######
'###### ω - ячейка G2                                            ######
'###### tbeg - ячейка A5                                         ######
'###### tkon - ячейка B5                                         ######
'###### tstep - ячейка C5                                        ######
'######################################################################
Dim L, C, Pi, R
Dim tbeg, tkon, tstep
Dim N As Integer
Dim F(1000) As Double
Dim U0(1000) As Double
Dim Ic As Double
Dim I(1000) As Double
Pi = 3.1415
R = Range("A2").Value
L = Range("B2").Value
C = Range("C2").Value
Um = Range("D2").Value
N = Range("F2").Value
w = Range("G2").Value
Fi = Range("E2").Value
frad = Fi * Pi / 180
tbeg = Range("A5").Value
tkon = Range("B5").Value
tstep = Range("C5").Value

t = 0
k = 4
```

```
For j = 0 To N
  If k = 1 Then
      sincos = Cos(w * t) * Cos(frad) - Sin(w * t) * Sin(frad)
  End If
  If k = 2 Then
       sincos = -Sin(w * t) * Cos(frad) + Sin(w * t) * Sin(frad)
  End If
  If k = 3 Then
       sincos = -Cos(w * t) * Cos(frad) - Sin(w * t) * Sin(frad)
  End If
  If k = 4 Then
       sincos = Sin(w * t) * Cos(frad) + Cos(w * t) * Sin(frad)
  End If
  k = k + 1
  If k = 5 Then
    k = 1
  End If
  U0(j) = Um * w ^ j * sincos
Next
I(0) = 0
Uc0 = 0
I(1) = 0
For k = 2 To N
 I(k) = 1 / L * (U0(k - 1) - R * I(k - 1) - 1 / C * I(k - 2))
Next
For k = 0 To N
 F(k) = (1 / fact(k)) * I(k)
Next
mycell = 10
For t = tbeg To tkon Step tstep
  Ic = 0
  For j = 0 To N
   Ic = Ic + t ^ j * F(j)
  Next
 Range("A" & mycell).Select
 ActiveCell.FormulaR1C1 = t
 Range("B" & mycell).Select
 ActiveCell.FormulaR1C1 = Ic
  mycell = mycell + 1
Next
End Sub
Function fact(x)
'----------------------------------------------------------
'----------  Функция вычисления факториала
'----------------------------------------------------------
fact = 1
For d= 1 To x
 fact = fact * d
Next
End Function
```

ELEKTRİK DÜVRƏLƏRİNDƏ KEÇİD PROSESLƏRİNİN DİFERENSİAL ÇEVİRMƏ ÜSULU İLƏ HESABLANMASI

MƏMMƏDOV T.M.

Məqalədə kompüterdə sadə reallaşdırma olan nöqteyi-nəzərdən toplu parametrli mürəkkəb elektrik dövrələrində keçid proseslərini təyin etmək üçün yeni diferensial çevirməsi metodu təklif edilir. Bu metodda xarakteristik tənliyin köklərini təyin etmək lazım deyil.

METHOD OF DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS AT CALCULATION OF TRANSIENTS IN ELECTRIC CIRCUITS

MAMEDOV T.M.

In this article is offered a method of differential transformation at calculation of complex electric circuits with the concentrated parameters that not demanding in finding of roots of the characteristic equation. This method is very suitable for realization a calculation on a computer.