AZƏRBAYCAN ELMLƏR AKADEMİYASININ XƏBƏRLƏRİ
FİZİKA-RİYAZİYYAT VƏ TEXNİKA ELMLƏRİ SERİYASI, 2000 №2

УДК 532. 135: 538. 4

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Х.Г. ГАСАНОВ

АзНИПИнефть,
370033, г. Баку, ул. Ага – Нейматула, 39

Проведено теоретическое исследование влияния постоянного магнитного поля на жидкость, движущуюся в цилиндрической трубе. Решена обратная задача гидродинамики. На основе решений получены соответствующие: профиль скоростей, изменения вязкости и расхода. Установлено, что характер изменения жидкости зависит от ее магнитных характеристик.

§1. Введение

Одной из фундаментальных характеристик жидкости является ее вязкость. При проектировании, расчете и проведении различных технологических процессов нередко возникает необходимость "подгона" величины вязкости конкретного теплоносителя или рабочего тела под определенную величину. Вязкость, как физический параметр, является функцией многих факторов, в том числе различных физических полей. Возможность управления реологическими свойствами (вязкостью) жидкостей посредством внешнего магнитного поля делает последние перспективными с точки зрения промышленной реализации. Однако результаты экспериментальных исследований различных авторов о влиянии магнитного поля на свойства жидкостей зачастую противоречат друг другу. Причина этого заключается в некорректном учете факторов, обусловливающих конечный результат. В связи с вышеизложенным представляет интерес теоретическое исследование с целью установления общей закономерности влияния магнитногот поля на вязкость жидкости при ее нестационарном движении.

§2. Уравнение движения

Дифференциальное уравнение изотермического движения вязкой непроводящей жидкости в горизонтальной трубе имеет вид:

$$\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\eta\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right)+\frac{\Delta P}{L}+f; \qquad (1)$$

перепад давлений $\Delta p/l$ по длине трубы для простоты считаем постоянным, f - сила, действующая на жидкость со стороны магнитного поля (в данной работе рассматривается постоянное магнитное поле). Выражение для f должно учитывать радиальную зависимость действующей силы. В [1] дается подобное выражение

$$f=\mathrm{M}\cdot\nabla\mathrm{H}, \qquad (2)$$

где M - магнитный момент единицы объема жидкости, ∇H - градиент напряженности магнитного поля. Если магнитное поле поперечное, то линии магнитной индукции, направленные от полюса N к S, проходят по сечению трубы. Поскольку линии магнитной индукции сгущаются в областях близких к полюсам (как N, так и S) и расходятся посередине между ними, то магнитное поле нельзя считать однородным, и зависимость магнитной индукции от координаты r внутри цилиндрической трубы можно представить в виде некоторого степенного ряда

$$B(r) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i r^i = B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \dots ,$$

Где B_i – некоторые постоянные величины, характеризующие магнит и, естественно, меняющиеся в зависимости от конструкции и типа магнита, формы полюсов, расстояния между последними и т.д.; B_0 – значение индукции в геометрической середине между полюсами. Для большинства постоянных магнитов зависимость B(r) хорошо описывается следующим образом

$$B(r) = B_0 + B_2 r^2$$

Поэтому в дальнейшем, не нарушая обшности рассуждений, будем использовать указанную зависимость B(r).

Тогда, применяя (2) для данного случая, получим

$$f = M\frac{\partial H}{\partial r} = M\frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{M}{\mu\mu_0}\cdot 2B_2 r ;$$

здесь заранее принимается, что жидкость пара или ферромагнитная, поскольку M>0; μ - магнитная проницаемость жидкости, μ_0 - магнитная постоянная. По своей физической природе сила f продольна [2], т.е. направлена вдоль оси трубы и в случае жидкостей с M>0 совпадает с направлением движения жидкости в поле тяжести. Однако, вследствие большей подвижности электронов жидкости по сравнению с ионами указанная сила приведет к торможению жидкости, причем, как следует из выражения для f, эффект имеет существенно пограничный характер, т.е. растет от оси трубы к ее стенкам. Как следствие, должно наблюдаться увеличение вязкости жидкости. При подстановке f в уравнение (1) необходимо учесть "электронный" характер реакции жидкости, поэтому для жидкостей с M>0 уравнение движения имеет вид

$$\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) - \frac{M}{\mu\mu_0}\cdot 2B_2 r + \frac{\Delta P}{L} \tag{3а}$$

Если исследуемая жидкость диамагнитна, то M<0, и принимая во внимание вышеуказанное, для уравнения движения такой жидкости при прочих неизменных условиях получим

$$\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \eta\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right) + \frac{M}{\mu\mu_0}\cdot 2B_2 r + \frac{\Delta P}{L} \tag{3б}$$

Начальные и граничные условия в обоих случаях выглядят следующим образом

$$\upsilon(r,0) = 0; \quad \upsilon(R,t) = 0; \quad \upsilon(r, t=\infty) = g(r) \tag{4}$$

Где R - радиус цилиндрической трубы, g(r) - некоторая равновесная функция, не зависящая от времени. Прежде чем решить уравнение (3а) или (3б) произведем замену

$$\upsilon = W - \frac{\Delta P}{L}\frac{r^2}{4\eta}$$

С учетом этой замены уравнения движения превратятся соответственно в (5а и 5б):

$$\rho\frac{\partial W}{\partial t}=\eta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)-\frac{M}{\mu\mu_0}\cdot 2B_2 r \qquad (M>0) \qquad (5а)$$

и

$$\rho\frac{\partial W}{\partial t}=\eta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{M}{\mu\mu_0}\cdot 2B_2 r \qquad (M<0) \qquad (5б)$$

Начальные и граничные условия при этом также изменятся

$$W(r,0)=0\,;\quad W(R,t)=\frac{\Delta P}{L}\frac{R^2}{4\eta}\,;\quad W(r,t=\infty)=U(r)$$

$U(r)$ – другая равновесная функция, отличающаяся от $g(r)$ на величину $\Delta P\cdot r^2/4L\eta$. Теперь применим к (5а) преобразование Лапласа по времени. Тогда

$$\rho S\,W^*=\eta\left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W^*}{\partial r}\right)-\frac{M}{\mu\mu_0}\cdot\frac{2B_2 r}{S},$$

где W^* есть изображение функции $W(r,t)$

$$W^*=W^*(r,s)=\int_0^\infty W(r,t)\cdot e^{-St}\,dt\,.$$

После простых преобразований получаем

$$r^2\frac{d^2W^*}{dr^2}+r\frac{dW^*}{dr}-\frac{\rho S}{\eta}r^2W^*-\frac{2B_2M}{\mu\mu_0\eta S}\cdot r^3=0, \qquad (6)$$

которое является неоднородным уравнением Беселя нулевого порядка; его решение, как известно, равно сумме решений соответствующего однородного уравнения и частного рншения неоднородного.

§3. Решение однородного уравнения

Сначала решаем однородное уравнение

$$r^2\frac{d^2W^*}{dr^2}+r\frac{dW^*}{dr}-\frac{\rho S}{\eta}r^2W^*=0.$$

Решение его будем искать в видс

$$W^*=C_1I_0\left(\sqrt{\frac{\rho S}{\eta}}r\right)+C_2K_0\left(\sqrt{\frac{\rho S}{\eta}}r\right),$$

постоянные C_1 и C_2 должны определяться из граничных условий. Для получения физически осмысленных решений при рассмотрении процессов в цилиндрической трубе необходимо положить $C_2=0$ (из за свойств функции $K_0(r)$ при $r\to0$). Тогда имеем

$$W^*=C_1I_0\left(\sqrt{\frac{\rho S}{\eta}}r\right)$$

Рассмотрим решение в пределе достаточно больших времен, т.е. $t\to\infty$ (это соответствует $S\to 0$); этот случай представляет практический интерес, т.к. описывает практически установившийся режим течения. Тогда, разлагая $I_0(r)$ в ряд и пренебрегая слагаемыми высших порядков, получим

$$I_0(S<<1) = 1+\frac{1}{4}\frac{\rho S}{\eta}r^2$$

или окончательно

$$W^* = C_1\left(1+\frac{1}{4}\frac{\rho S}{\eta}r^2\right)$$

При переходе к оригиналу $W(r,t)$ необходимо воспользоваться основными формулами операционного исчисления. Первое слагаемое дает [3]

$$C_1 t^{1/2}\int_0^\infty \frac{J_1(2\sqrt{t\theta})}{\theta^{1/2}}\theta d\theta$$

Если здесь произвести замену переменной $\theta=\tau^2$, то получим

$$2C_1 t^{1/2}\int_0^\infty J_1(2\sqrt{t}\tau)\tau^2 d\tau$$

Произведем еще одну замену $2\sqrt{t}\tau=\varphi$; тогда после вычислений имеем

$$\frac{C_1}{4t}\int_0^\infty J_1(\varphi)\varphi^2 d\varphi$$

которое в соответствии с [4] даст

$$\frac{3C_1}{4t}\,{}_2F_1(2\,;-1/2\,;2\,;1),$$

где функция типа ${}_2F_1$ является гипергеометрической функцией Гаусса. Для второго слагаемого получим (приводим сразу конечный результат)

$$\frac{15C_1}{8t^2}\frac{\rho r^2}{\eta}\,{}_2F_1(3\,;-3/2\,;2\,;1).$$

Окончательно для скорости $W(r,t)$ в оригинале получим

$$W(r,t)=C_1\left\{\frac{3}{4t}\,{}_2F_1(2\,;-1/2\,;2\,;1)+\frac{15}{t^2}\frac{\rho r^2}{\eta}\,{}_2F_1(3\,;-3/2\,;2\,;1)\right\}. \qquad (7)$$

Анализ (7) показывает, что полученное решение является все таки нестационарным, поскольку при больших t имеем $W(r,t\to\infty)=0$. Такой результат вполне естественен, тогда как для стационарного решения $\upsilon(r,t\to\infty)$ должно получаться хорошо известное

$$\upsilon(r,t\to\infty)=-\frac{\Delta P}{L}\frac{r^2}{4\eta}.$$

Стационарное же решение уравнения (6) надо искать из решения неоднородного уравнения.

§4. Решение неоднородного уравнения

Правая часть уравнения (6) представляет собой степенную функцию. В этом случае частное решение выражается через функцию Ломмеля. Для нашей задачи оно имеет вид [4, стр. 66]

$$W_{\text{част}}=2B_2\frac{M}{\mu\mu_0\eta}S_{2,0}(r)+C_3; \qquad (8)$$

(8) записано сразу в оригинале, C_3 - постоянная, подлежащая определению из граничных условий. Тогда стационарное значение скорости $\upsilon(r)$ определится как

$$\upsilon(r)=2B_2\frac{M}{\mu\mu_0\eta}S_{2,0}(r)-\frac{\Delta P}{L}\frac{r^2}{4\eta}+C_3.$$

C_3 можно определить из условия $\upsilon(R,t)=0$. Имеем

$$2B_2\frac{M}{\mu\mu_0\eta}S_{2,0}(R)-\frac{\Delta P}{L}\frac{R^2}{4\eta}+C_3=0,$$

откуда

$$C3=\frac{\Delta P}{L}\frac{R^2}{4\eta}-2B_2\frac{M}{\mu\mu_0\eta}S_{2,0}(R).$$

или окончательно

$$\upsilon(r)=\frac{\Delta P}{L}\frac{1}{4\eta}(R^2-r^2)-2B_2\frac{M}{\mu\mu_0\eta}\left\{S_{2,0}(R)-S_{2,0}(r)\right\}. \qquad (9)$$

Первое слагаемое есть скорость при отсутствии магнитного поля, поэтому, как легко заметить, при действии магнитного поля жидкость с $M>0$ замедляет свое движение

$$\upsilon(r)=\upsilon_{H=0}(r)-2B_2\frac{M}{\mu\mu_0\eta}\left\{S_{2,0}(R)-S_{2,0}(r)\right\},$$

здесь принято

$$\upsilon_{H=0}(r)=\frac{\Delta P}{L}\frac{1}{4\eta}(R^2-r^2).$$

Соответственно уменьшится и расход по сечению цилиндрической трубы, определяемый по

$$Q=\int_0^R 2\pi r\upsilon(r)dr$$

Учитывая формулу (9), для расхода в магнитном поле получим

$$Q_H=Q_{H=0}-2\alpha_1\int_0^R r\left\{S_{2,0}(R)-S_{2,0}(r)\right\}dr,$$

где $Q_{H=0}$ - есть расход в отсутствии поля. Для вычисления последнего интеграла его надо разбить на две части. Первый интеграл даст

$$2\alpha_1\int_0^R r\cdot S_{2,0}(R)dr=\alpha_1\cdot S_{2,0}(R)\cdot R^2,$$

где

$$\alpha_1 = 2\pi B_2 \frac{M}{\mu\mu_0\eta}$$

Для вычисления второго воспользуемся свойствами функций Ломмеля

$$S_{2,0}(r)=r - S_{0,0}(r)$$

Тогда получим

$$2\alpha_1 \int_0^R r \cdot S_{2,0}(R)dr = \alpha_1 R^2 - 2\alpha_1 \int_0^R r \cdot S_{0,0}(r) \cdot dr$$

Далее воспользуемся явным видом функции $S_{0,0}(r)$

$$S_{0,0}(r) = \frac{1}{r}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}r\right)^{2m+2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\right]^2}$$

Вычисления дадут

$$2\alpha_1 \int_0^R r \cdot S_{0,0}(r)dr = 2\alpha_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}}{\left[\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\right]^2} \cdot \int_0^R r^{2m+2}dr = 2\alpha_1 \pi R^2 G(R)$$

где

$$G(R) = \frac{1}{R}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}R\right)^{2m+2}}{(2m+3)\left[\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)\right]^2};$$

здесь принято во внимание $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Окончательно для расхода в магнитном поле получим

$$Q_H=Q_{H=0}-\alpha_1 R^2 \left\{S_{2,0}(R) + 2\pi G(R) - 1\right\} \quad (10)$$

Из последнего выражения видно, что расход под действием магнитного поля уменьшился, причем величина изменения

$$\Delta Q=\alpha_1 R^2 \left\{S_{2,0}(R) + 2\pi G(R) - 1\right\}$$

прямо пропорциональна значению магнитного поля. Вязкость при этом возрастает. Методом разностей можно определить, насколько изменится вязкость при заданном изменении расхода ΔQ. Расчеты дают

$$\Delta\eta = \frac{\eta_0^2}{\alpha_2 - \eta_0 \cdot \Delta Q}, \quad (11)$$

где η_0 - вязкость в отсутствии магнитного поля, $\alpha_2=\pi R^4 \Delta P/8L$. Анализируя (11), можно установить некоторые закономерности поведения жидкостей с $M>0$ в магнитном поле: 1) чем больше перепад давления, тем меньше эффект, поскольку

$$\frac{\partial(\Delta\eta)}{\partial(\Delta P/L)}<0\,;$$

2) чем больше внешнее магнитное поле, тем существеннее изменение вязкости, ибо

$$\frac{\partial(\Delta\eta)}{\partial B_2}=\frac{\eta_0^3}{\left(\alpha_2-\eta_0\cdot\Delta Q\right)^2}>0.$$

Отмеченные особенности находятся в качественном согласии с экспериментальными результатами, полученными в [5] для ферромагнитных жидкостей. Совершенно противоположные результаты будут для диамагнитных жидкостей, когда $M<0$. Решив уравнение (5б), получим для стационарного значения скорости при прочих низменных условиях

$$\upsilon(r)=\upsilon_{H=0}(r)+2B_2\frac{M}{2\,\mu\mu_0\eta}\left\{S_{2,0}(R)-S_{2,0}(r)\right\}$$

и расхода

$$Q_H=Q_{H=0}+\alpha_1 R^2\left\{S_{2,0}(R)+2\pi G(R)-1\right\} \tag{12}$$

и соответствующие ему уменьшение вязкости

$$\Delta\eta=\frac{\eta_0^2}{\alpha_2-\eta_0\cdot\Delta Q}\,; \tag{13}$$

в формулах (12) и (13) обозначения те же, что и выше.

§5. Заключение

Зависимость характера изменения вязкости жидкости в магнитном поле от их магнитных характеристик, установленная в настоящей работе, дает возможность дифференцировать имеющиеся в литературе противоречивые экспериментальные факты. Действительно, полученные опытные результаты не совпадают не из–за принципиальных ошибок эксперимента различных исследователей, а вследствие того различия в магнитной восприимчивости, которой жидкости обладают. Например, хорошо известно уменьшение вязкости воды и некоторых нефтей под действием магнитного поля, которое уже можно связать с диамагнитными свойствами последних [6]. Вообще говоря, для нефтей нет универсального характера изменения вязкости в магнитном поле, что связывается нами с их химической (а точнее, магнитной) разнородностью. В этой смысле формулы (11) и (13) могут быть использованы для магнитной идентификации существующих нефтей. Было бы целесообразно проводить измерения вязкости нефтей под действием магнитного поля одновременно с измерениями по ямр на них; по крайней мере, при такой постановке вопроса можно точно определить, какое наблюдаемое изменение вязкости присуще самой нефти, а какое – неизбежно присутствующим в ней различным примесям.

1. М.И. Шлиомис, *Успехи физических наук,* **112** (1974) 440.

2. Л.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов, *Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, Москва, Наука,* (1978) 75.
3. В.А. Диткин, А.П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление, Москва, Физматгиз,* (1961) 355.
4. Б.Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций, Москва, Наука,* (1971) 98.
5. З.П.Шульман, В.И.Кордонский, *Магнито – реологический эффект. Минск, Наука и техника,* (1982) 82.
6. Ю.В.Ертин, К.С.Яруллин, *Магнитные свойства нефтей, Москва, Наука,* (1979) 25.

ÖZLÜ MAYENİN SİLİNDRİK BORUDA MAQNİT SAHƏSİ ALTINDA HƏRƏKƏTİ

H.Q. HƏSƏNOV

Silindrik boruda hərəkət edən mayenin üzərinə sabit maqnit sahəsinin tə'siri nəzəri öyrənilib. Hidrodinamikanın tərs məsələsi həll olunub. Alınmış həllər əsasında müvafiq sür'ətlər profili, özlülüyün və sərfin dəyişməsi tapılıb. İlk alaraq, maqnit sahəsi altında mayenin dəyişməsinin xarakteri və mayenin maqnit xassələrinin arasında əlaqə tapılıb.

MOTION OF VISCOUS LIQUID IN CYLINDRICAL PIPE UNDER MAGNETIC FIELD

H.G. HASANOV

Influence of permanent magnetic field on liquid moving in cylindrical pipe is theoretically investigated. Reverse problem of hydrodynamics is resolved. On the base of solutions ones give appropriate: velocity profiles, viscosity and flowrate changes. It is firstly established, character of liquid changes depend on its magnetic properties.