AZƏRBAYCAN MİLLİ ELMLƏR AKADEMİYASININ XƏBƏRLƏRİ
Fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası, fizika və astronomiya 2006 №2

УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА РАЗЛОЖЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ НАМБУ – ИОНА-ЛАЗИНИО

Р.Г. ДЖАФАРОВ

Бакинский Государственный Университет
AZ 1148 Баку, З. Халилова, 23

В рамках формализма билокального источника кварков для модели Намбу – Иона-Лазинио для третьего порядка разложения среднего поля получены уравнения для многокварковых функций Грина.

Модел Намбу – Иона-Лазинио (НИЛ) [1] является одной из наиболее успешных эффективных моделей квантовой хромодинамики легких адронов в непертурбативной области. В большинстве приложений модель НИЛ применяется в приближении среднего поля. Главное приближение и первый порядок разложения среднего поля включают в себя уравнения для пропагатора кварка и двухчастичной функции, а также уравнение для поправки первого порядка к пропагатору кварка. Рассматрением этих уравнений обычно и ограничиваются в исследованиях модели НИЛ [1-4]. Во втором порядке разложения среднего поля появляются уравнения для четырехчастичной и трехчастичной функций [5]. В настоящей работе мы приводим уравнения третьего порядка разложения среднего поля, где появляются уравнения для шестикварковой и пятикварковой функций Грина.

Мы рассматриваем модель Намбу – Иона-Лазинио с лагранжианом [1-4]

$$L = \bar{\psi}\left(i\hat{\partial} - m_0\right)\psi + \frac{g}{2}\left[\left(\bar{\psi}\psi\right)^2 + \left(\bar{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi\right)^2\right], \tag{1}$$

здесь $g > 0$ – константа связи с размерностью квадрата обратной массы. Лагранжиан (1) инвариантен относительно преобразований киральной группы $SU(2)_V \times SU(2)_A$ $\psi \equiv \psi^\alpha(x)_j^c$ и $\alpha = 1,...,4$; $c = 1,...,n_c$; $j = 1,2$. τ_{jk}^α – генераторы группы $SU(2)$ (матрицы Паули).

Производящий функционал функций Грина (вакуумных ожиданий T - произведений полей) может быть представлен в виде функционального интеграла с билокальным источником [2-4]:

$$G(\eta) = \int D(\psi,\bar{\psi})\exp i\left[\int dxL - \int dxdy\bar{\psi}^\beta(y)\eta^{\beta\alpha}(y,x)\psi^\alpha(x)\right], \tag{2}$$

где $\eta^{\beta\alpha}(y,x)$ есть билокальный источник спинорного поля(α и β - спинорные индексы). Вставка билинейной формы $\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x)$ под знаком функционального интеграла эквивалентна дифференцированию исходного интеграла по $\eta(y,x)$

$$\bar{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x) \to \frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}.$$

Функциональная производная G по источнику η есть одночастичная (двухточечная) функция грина (пропагатор поля ψ)

$$\left.\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}\right|_{\eta=0} = i\left\langle 0\left|T\left\{\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y)\right\}\right|0\right\rangle \equiv S^{\alpha\beta}(x-y), \tag{3}$$

n -ая функциональная производная G по источнику η есть n -частичная ($2n$ - точечная) функция Грина

$$\left.\frac{\delta^n G}{\delta\eta(y_1,x_1)\cdots\delta\eta(y_n,x_n)}\right|_{\eta=0} = \langle 0|T\{\psi(x_1)\overline{\psi}(y_1)\cdots\psi(x_n)\overline{\psi}(y_n)\}|0\rangle \equiv S\begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Эвристический вывод уравнений Швингера-Дайсона (ШД) для производящего функционала G основан на соотношении [2,3, 6]:

$$0 = \int D(\psi,\overline{\psi})\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(y)\exp i\left[\int dx' L(x') - \int dx'dy'\overline{\psi}^{\beta}(y')\eta^{\beta''\alpha'}(y',x')\psi^{\alpha'}(x')\right]. \qquad (5)$$

Уравнение ШД для производящего функционала G функций Грина имеет вид

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)G + \left(i\hat{\partial}_x - m^0\right)^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} +$$
$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}tr\left[\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1'}(y,x)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} = \qquad (6)$$
$$= \int dx_1\eta^{\alpha\alpha_1}(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)}.$$

Решение этого уравнения будем искать методом, предложенным в работах [2-4], которое является для рассматриваемой нами модели НИЛ одним из способов построения разложения среднего поля. Уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (6) с нулевой правой частью:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)G^{(0)} + \left(i\hat{\partial}_x - m^0\right)^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} +$$
$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}tr\left[\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1'}(y,x)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} = 0. \qquad (7)$$

Решением уравнения ШД (7) является функционал

$$G^{(0)} = \exp Tr\left(\eta * S^{(0)}\right), \qquad (8)$$

здесь Tr означает след в операторном смысле, а $*$ - операторное умножение.

Главное приближение генерирует линейную итерационную схему

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \cdots G^{(n)} + \cdots,$$

где функционал n-го шага $G^{(n)}$ есть решение уравнения

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x)G^{(n)} + \left(i\hat{\partial}_x - m^0\right)^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} +$$
$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}tr\left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1'}(y,x)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} = \eta\frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta}. \qquad (9)$$

Решением уравнения (9) является функционал

$$G^{(n)} = P^{(n)}G^{(0)},$$

где $P^{(n)}$ – полином степени $2n$ по источнику η.

Решение уравнения (9) будем искать в виде

$$G^{(3)}[\eta] = \left\{\frac{1}{6!}Tr\left(S_6^{(3)} * \eta^6\right) + \frac{1}{5!}Tr\left(S_5^{(3)} * \eta^5\right) + \frac{1}{4!}Tr\left(S_4^{(3)} * \eta^4\right) +\right.$$
$$\left.\frac{1}{3!}Tr\left(S_3^{(3)} * \eta^3\right) + \frac{1}{2}Tr\left(S_2^{(3)} * \eta^2\right) + Tr\left(S^{(3)} * \eta\right)\right\}G^{(0)}.$$

Проводя соответствующую процедуру (см. [3-5]), получим уравнения для третьего порядка разложения среднего поля модели НИЛ.

Уравнение для шестикварковой функции:

$$S_6^{(3)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} = -S^{(0)}(x-y')S^{(0)}(x'-y)S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} -$$

$$-S^{(0)}(x-y'')S^{(0)}(x''-y)S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y''')S^{(0)}(x'''-y)S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} -$$

$$-S^{(0)}(x-y^{IV})S^{(0)}(x^{IV}-y)S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y^{V})S^{(0)}(x^{V}-y)S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} +$$

$$+ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\left\{ S^{(0)}(x_1-y)S_6^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} - \gamma_5\tau^a S^{(0)}(x_1-y)S_6^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a \right\}. \quad (10)$$

Уравнение для пятикварковой функции

$$S_5^{(3)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} = -S^{(0)}(x-y')S^{(0)}(x'-y)S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y')S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} -$$

$$-S^{(0)}(x-y'')S^{(0)}(x''-y)S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y'')S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} -$$

$$-S^{(0)}(x-y''')S^{(0)}(x'''-y)S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}-S^{(0)}(x-y''')S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x''' & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}-$$

$$-S^{(0)}\left(x-y^{IV}\right)S^{(0)}\left(x^{IV}-y\right)S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}-S^{(0)}\left(x-y^{IV}\right)S_4^{(2)}\begin{pmatrix} x^{IV} & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}+$$

$$+ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\left\{S_6^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}-\gamma_5\tau^a S_6^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a+\right.$$

$$\left.+S^{(0)}(x_1-y)S_5^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}-\gamma_5\tau^a S^{(0)}(x_1-y)S_5^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a\right\}. \qquad (11)$$

Уравнения (10) и (11) в данной итерационной схеме являются новыми (графически они приведены на Рис.1 и 2), а уравнения для 4-х кварковой $S_4^{(3)}$, 3-х кварковой $S_3^{(3)}$, 2-х кварковой функции $S_2^{(3)}$ и пропагатора кварка $S^{(3)}$ имеют тот же вид, что и уравнения второго шага (см. [5]), за исключением неоднородных членов.

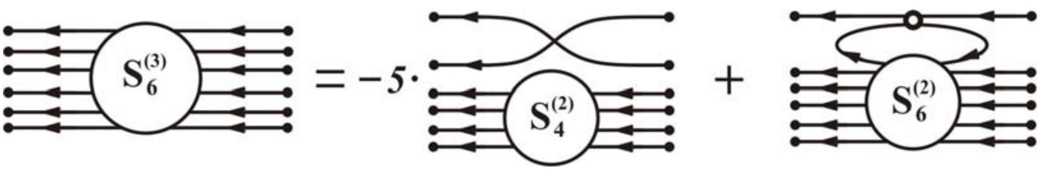

Рис.1.
Уравнение для шестикварковой функции.

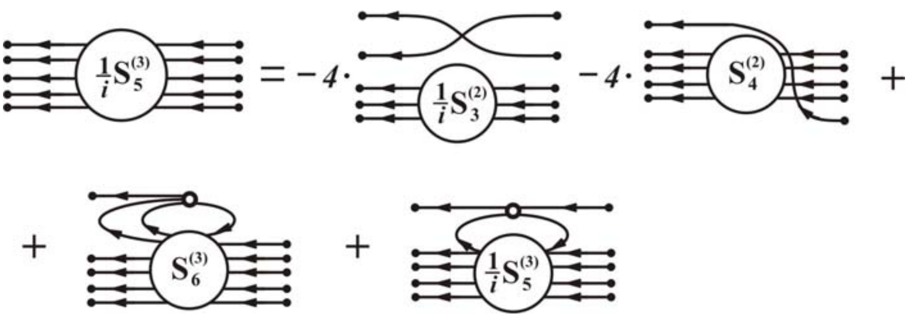

Рис.2.
Уравнение для пятикварковой функции.

Уравнение для четырехчастичной функции третьего шага

$$S_4^{(3)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} = -S^{(0)}(x-y')S^{(0)}(x'-y)S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y')S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} -$$

$$-S^{(0)}(x-y'')S^{(0)}(x''-y)S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y'')S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} -$$

$$-S^{(0)}(x-y''')S^{(0)}(x'''-y)S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y''')S_3^{(2)}\begin{pmatrix} x''' & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} +$$

$$+ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\left\{ S_5^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} - \gamma_5\tau^a S_5^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a + \right.$$

$$\left. + S^{(0)}(x_1-y)S_4^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix} - \gamma_5\tau^a S^{(0)}(x_1-y)S_4^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a \right\}. \qquad (12)$$

Уравнение для трехчастичной функции третьего шага

$$S_3^{(3)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = -S^{(0)'}(x-y')S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix} - S^{(0)}(x-y')S^{(0)}(x'-y)S^{(2)}(x''-y'') -$$

$$-S^{(0)}(x-y'')S^{(0)}(x''-y)S^{(2)}(x'-y') - S^{(0)}(x-y'')S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix} +$$

$$+ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\left\{ S_4^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} - \gamma_5\tau^a S_4^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\gamma_5\tau_k^a + \right.$$

$$\left. + S^{(0)}(x_1-y)S_3^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} - -\gamma_5\tau^a S^{(0)}(x_1-y)S_3^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a \right\}. \qquad (13)$$

Уравнение для двухчастичной функции третьего шага

$$S_2^{(3)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = -S^{(0)}(x-y')S^{(2)}(x'-y) +$$

$$+ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\left\{ S_3^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} - \gamma_5\tau^a S_3^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a + \right.$$

$$\left. + S^{(0)}(x_1-y)S_2^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} - \gamma_5\tau^a S^{(0)}(x_1-y)S_2^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a \right\}. \qquad (14)$$

Уравнение для поправки к пропагатору кварка третьего порядка

$$S^{(0)}(x-y) =$$

$$= ig\int dx_1 S^{(0)}(x-x_1)\left\{ S_2^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix} - \gamma_5\tau_1^a S_2^{(3)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}\gamma_5\tau^a + S^{(0)}(x_1-y)trS^{(3)}(0) \right\}.$$

Предложенный метод, основанный на аппроксимации системы уравнений ШД для производящего функционала функции Грина с точно решаемым уравнением , которое генерирует линейную итерационную схему, каждый шаг которой описывается замкнутой системой интегро-дифференциальных уравнений, является одним из способов разложения среднего поля в формализме с билокальным источником модели НИЛ.

Уравнение (12) для четырехкварковой функции дает принципиальную возможность решить задачу $\pi\pi-$рассеяния, а уравнение (11) для пятикварковой функции может быть применено для описания пентакварковых связанных состояний. Уравнение (13) дает возможность рассмотреть распад $\sigma \to \pi\pi$. Также возможно описать нуклоны как связанные состояния в трехкварковой функции.

1. S.P.Klevansky, *Rev. Mod. Phys.*, **64** (1992) 649.
2. Р.Г.Джафаров, *Вестник БГУ*, **№1** (2005) 166.
3. R.G.Jafarov, V.E.Rochev, *Central Europian Journal of Physics*, **N 2** (2004) 367.
4. Р.Г.Джафаров, В.Е.Рочев, *Препринт ИФВЭ* 04-27, 15 (Preprint hep-ph/0406333, 15)
5. R.Q. Cəfərov, Naxçıvan Dövlət Universitetinin Xəbərləri, **H15** (2004) 60.
6. А.Н.Васильев, Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л: ЛГУ, (1976) 294.

NAMBU – İONA-LAZİNİO MODELİNDƏ ORTA SAHƏ AYRILIŞININ ÜÇÜNCÜ TƏRTİB TƏNLİKLƏRİ

R.Q. CƏFƏROV

Bilokal kvark mənbəsi formalizmi çərçivəsində üçüncü tərtib orta sahə ayrılışı üçün Nambu – İona-Lazinio modelində çoxkvarklı Qrin funksiyaları üçün tənliklər alınmışdır.

THIRD ORDER EXPANSION EQUATIONS of MEAN-FIELD in NAMBU – IONA-LASINIO MODEL

R.G. JAFAROV

The multiquark Green functions equations was otained in the framework of the bilocal quark source formalism in Nambu – Iona-Lasinio model.

Редактор:Ш.Нагиев