

МЕТОДИКИ ЗОНДОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Н.А.АБДУЛЛАЕВ

*Институт физики НАН Азербайджана
AZ-1143, г. Баку, пр. Джавида, 33*

Приведены различные зондовые методики исследования электропроводности анизотропных материалов. Обсуждены недостатки и достоинства каждого из них. Показан способ перехода от анизотропного образца к модели эквивалентного изотропного образца конкретно для каждой методики.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, исследования электропроводности кристаллов очень важны не только для получения информации о типе носителей заряда, их подвижности, концентрации и т.д., но и для выяснения характера энергетических состояний вблизи уровня Ферми. Знание вида температурной зависимости проводимости (“металлического” типа или активационного) позволяет сделать предположения о том, по каким состояниям (протяженным или локализованным) осуществляется перенос заряда. Поэтому представляется очень важным корректное определение величин удельных сопротивлений. Поскольку для вычисления удельного сопротивления необходимо знание площади токопроводящего сечения, то обычно контакты к образцу наносят по всей площади плоскопараллельных поверхностей образца. Сам образец оказывается при этом между двумя металлическими пластинками, поэтому подобный метод исследования электропроводности называется сэндвич-методом. Этот метод оказывается неприемлемым в случае исследования образцов анизотропных кристаллов, поскольку требуется произвести измерения, по крайней мере, в двух взаимноперпендикулярных плоскостях. Для корректного определения анизотропии проводимости измерения необходимо проводить на одном и том же образце, но “стирание” старых контактов и нанесение новых неизбежно приводит к нанесению ущерба качеству образца и, как следствие, к неверному определению анизотропии проводимости. Кроме того, для проведения измерений в анизотропных кристаллах требуется наличие монокристаллов значительных размеров в направлениях измерений, что зачастую бывает затруднительным.

В настоящее время исследователи пользуются преимущественно различными зондовыми методиками, при которых на поверхность образца наносится несколько точечных контактов. Зная геометрические размеры образца, расположение контактов, а также различные комбинации токов, пропущенных через одни контакты, и напряжений, снятых с других контактов, можно вычислить удельные сопротивления образцов не только изотропных, но и анизотропных кристаллов. Ниже подробно обсуждаются основные зондовые методики, применяемые при исследовании электропроводности анизотропных кристаллов.

ОБЩИЙ ПОДХОД ПРИ ЗОНДОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Для зондовых методов силовые линии напряжённости электрического поля непараллельны и распределены неоднородно по сечению образца, в связи с чем сначала необходимо теоретически рассчитывать распределение электрического потенциала в образце, а затем находить взаимосвязь между удельным сопротивлением и экспериментально измеряемыми величинами – током и

напряжением [1]. Как правило, для этого вначале решается стандартная задача - уравнение Лапласа для заряженного зонда, опущенного в изотропное электропроводящее полупространство с удельным сопротивлением ρ с заданными граничными условиями. Полученное решение представляется в виде бесконечных сходящихся рядов, легко просчитываемых на персональных компьютерах. Усечение числа членов ряда производится в соответствии с точностью определения абсолютной величины удельного сопротивления.

Особо важным является переход от изотропного образца к эквивалентному анизотропному образцу. Анизотропную среду посредством соответствующего преобразования координат точек можно перевести в изотропную среду, и тогда можно будет использовать теоретические расчёты для изотропной среды.

Пусть в системе (x, y, z) имеется изотропный образец в виде небольшого параллелепипеда, ориентированного вдоль координатных осей, с удельным сопротивлением по всем направлениям ρ_0 . И пусть в системе (x', y', z') имеется образец из анизотропного материала, также приготовленного в виде небольшого параллелепипеда, ориентированного вдоль координатных осей, с удельными сопротивлениями по оси x' - ρ_x , по оси y' - ρ_y , а по оси z' - ρ_z .

Перейдём с помощью линейного преобразования координат к системе (x', y', z') с учётом следующих условий:

- 1). В системе (x, y, z) образец должен быть изотропным с удельным сопротивлением ρ_0 .
- 2). Потенциалы в "соответственных" точках (x, y, z) и (x', y', z') не должны измениться.
- 3). Токи через "соответственные" площадки протекают одинаковые.

Линейное преобразование имеет вид

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \beta y \\ z' = \gamma z \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta x' = \alpha \Delta x \\ \Delta y' = \beta \Delta y \\ \Delta z' = \gamma \Delta z \end{cases} \quad (1)$$

Пусть ΔU - напряжение между гранями, перпендикулярными оси z , а ΔI - ток вдоль оси z , тогда, учитывая вышеприведённые условия, имеем

$$\Delta U' = \Delta I * R = \Delta I * \rho_z \frac{\Delta z'}{\Delta x' \cdot \Delta y'} = \Delta I * \rho_z \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta} \frac{\Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y} = \Delta U = \Delta I * \rho_0 \frac{\Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y},$$

отсюда следует

$$\rho_0 = \rho_z \frac{\gamma}{\alpha \cdot \beta}. \quad (2)$$

Теперь пусть ΔU напряжение между гранями, перпендикулярными оси x , а ΔI ток вдоль оси x , тогда, учитывая те же вышеперечисленные три условия, имеем

$$\Delta U' = \Delta I * R = \Delta I * \rho_x \frac{\Delta x'}{\Delta z' \cdot \Delta y'} = \Delta I * \rho_x \frac{\alpha}{\gamma \cdot \beta} \frac{\Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y} = \Delta U = \Delta I * \rho_0 \frac{\Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y},$$

отсюда

$$\rho_0 = \rho_x \frac{\alpha}{\gamma \cdot \beta}. \quad (3)$$

Аналогично для тока, текущего вдоль оси y

$$\Delta U' = \Delta I * R = \Delta I * \rho_y \frac{\Delta y'}{\Delta x' \cdot \Delta z'} = \Delta I * \rho_y \frac{\beta}{\alpha \cdot \gamma} \frac{\Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y} = \Delta U = \Delta I * \rho_0 \frac{\Delta z}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

и
$$\rho_0 = \rho_y \frac{\beta}{\alpha \cdot \gamma}. \quad (4)$$

Поскольку элементарный объём при преобразовании координат сохраняется, то $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta x' \Delta y' \Delta z' = \alpha \beta \gamma \Delta x \Delta y \Delta z$, т.е.

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1. \quad (5)$$

Тогда из (2-4) следует, что

$$\rho_0^3 = \rho_x \cdot \rho_y \cdot \rho_z. \quad (6)$$

Если умножить (2) на (4) с учётом (6), получим

$$\rho_0^2 = \frac{\rho_0^3}{\rho_0} = \frac{\rho_x \cdot \rho_y \cdot \rho_z}{\rho_0} = \rho_y \cdot \rho_z \frac{1}{\alpha^2},$$

отсюда
$$\alpha = \left(\frac{\rho_0}{\rho_x} \right)^{1/2}$$

Таким образом, в общем случае линейное преобразование (1) имеет вид

$$x'_i = \left(\frac{\rho_0}{\rho_i} \right)^{1/2} \cdot x_i. \quad (7)$$

МЕТОД ЧЕТЫРЕХ ЗОНДОВ

Этот метод является одним из первых попыток получения достоверных данных о величине удельного сопротивления образца путём нанесения четырёх точечных контактов. При этом не требуется наличия для измерений образцов монокристаллов значительных размеров. Достаточно иметь образцы, размеры которых лишь несколько раз превышают расстояния между зондами. Вначале этот метод был разработан для изотропных материалов, в частности для германия [2]. В этом методе все четыре зонда располагаются вдоль одной прямой, например, на оси x , как показано на Рис.1.

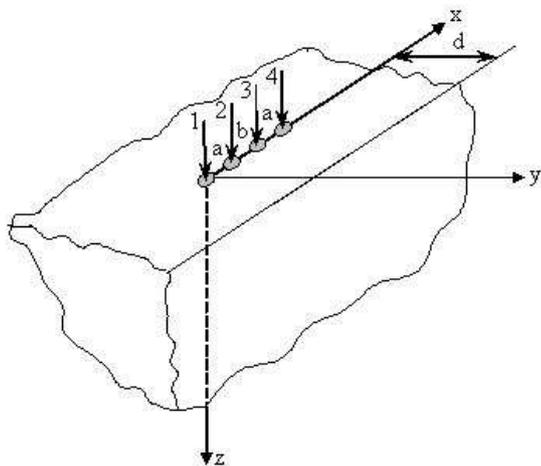


Рис.1.

Способ нанесения контактов вдоль одной линии (в данном случае вдоль оси x) на одной поверхности образца по методу четырёх зондов.

Получим формулу расчёта удельного сопротивления ρ . Предполагается, что измерения проводятся на плоской поверхности однородного изотропного образца полубесконечного объёма, и инжекция носителей заряда в объём образца отсутствует. Если через контакты 1 и 4 проходит ток I , то в точке, удалённой от контакта на расстояние r , плотность тока j , напряжённость электрического поля E и соответственно потенциал φ равны

$$j = \frac{I}{2\pi r^2}; \quad E = j \cdot \rho \quad \varphi = -\frac{I \cdot \rho}{2\pi \cdot r} + A, \quad (8)$$

где A - постоянная. Знак потенциала определяется направлением тока. Потенциалы второго и третьего зондов (Рис.1), определяемые суперпозицией потенциалов, создаваемых током каждого из зондов 1 и 4, равны

$$\varphi_2 = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} \right) + A \quad (9)$$

$$\varphi_3 = \frac{I \cdot \rho}{2\pi} \left(-\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a} \right) + A.$$

Таким образом, разность потенциалов определится как

$$U = \varphi_3 - \varphi_2 = \frac{I \cdot \rho}{\pi} \frac{b}{a(a+b)}, \quad (10)$$

а удельное сопротивление

$$\rho = \frac{\pi a(a+b)}{b} \cdot \frac{U}{I}. \quad (11)$$

Необходимо отметить, что при использовании этого метода для получения необходимой точности измерений достаточно иметь образцы, размеры которых лишь в два-три раза превышают расстояния между зондами 1-4 (Рис.1).

Авторы [3] развили этот метод для исследования анизотропных материалов. Пусть оси x, y, z совпадают с главными осями тензора электропроводности. Если плоскость x, y является одной из поверхностей образца, то на этой поверхности можно произвести два измерения разности потенциалов U . Расположим контакты вначале вдоль оси x , как показано на Рис.1, и измерим U_x . Затем все четыре зонда наносим на той же плоскости, но вдоль оси y и определяем U_y . После этого подготавливается для измерений ещё одна поверхность образца параллельная либо плоскости x, z , либо y, z . Теперь четыре зонда наносятся на этой поверхности параллельно оси z и измеряется величина U_z . Тогда, согласно авторам [3], главные значения тензора удельного сопротивления определяются как

$$\rho_x = \frac{\pi a(a+b)}{b} \frac{U_y \cdot U_z}{I \cdot U_x}, \quad (12)$$

$$\rho_y = \frac{\pi a(a+b)}{b} \frac{U_x \cdot U_z}{I \cdot U_y}, \quad (13)$$

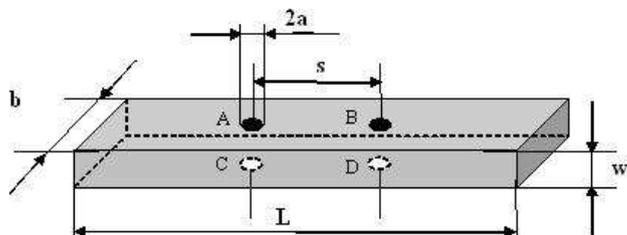
$$\rho_z = \frac{\pi a(a+b)}{b} \frac{U_x \cdot U_y}{I \cdot U_z}. \quad (14)$$

Основным недостатком метода является наличие для измерений двух взаимно перпендикулярных поверхностей и необходимость нанесения большого количества контактов, что приводит к повреждению образца, ухудшению его качества и, в конечном счёте, к искажению полученных данных.

ЧЕТЫРЕХЗОНДОВЫЙ КОМБИНАЦИОННЫЙ МЕТОД ШНАБЕЛЯ

В 1967 году P.Schnabel [4] предложил усовершенствованный комбинированный четырёхзондовый метод для изучения анизотропии электропроводности образцов, приготовленных в виде тонких пластинок. Такие пластинки легко получить из слоистых материалов путём их естественного скола в плоскости параллельной слоям. Сущность данного метода заключается в том, что четыре контакта А, В, С, D попарно наносятся на противоположные поверхности изучаемого образца в прямоугольной геометрии (Рис.2).

Сначала от внешнего источника питания ток I_{AC} направляется через контакты А и С, а напряжение U_{BD} снимается с контактов В и Д ($\Gamma^{яя}$ геометрия Шнабеля). Затем ток I_{AB} направляется через контакты А и В, а напряжение U_{CD} снимается с контактов С и Д ($\Pi^{яя}$ геометрия Шнабеля). Таким образом определяются сопротивления $R_1 = \frac{U_{BD}}{I_{AC}}$ и $R_2 = \frac{U_{CD}}{I_{AB}}$, являющиеся параметрами



исходной задачи. Подробно методика измерений и вычислений удельных сопротивлений $\rho_{||}$ и ρ_{\perp} приведена в работе авторов [7].

Рис.2.

Геометрия нанесения контактов на поверхность образца по методике Шнабеля.

Основными преимуществами этого метода также являются:

1. отсутствие требований к размерам и форме исследуемых образцов;
2. не требуется знание токопроводящей площади образцов;
3. наличие возможности одновременного определения удельных сопротивлений на одном и том же образце.

ЧЕТЫРЕХЗОНДОВЫЙ КОМБИНАЦИОННЫЙ МЕТОД МОНТГОМЕРИ

При исследовании анизотропии проводимости по методике Монтгомери также наносятся четыре контакта, но в отличие от методики Шнабеля все четыре точечных контакта наносятся на одну поверхность образца, располагаясь на углах поверхности прямоугольной формы (рис.3) [8]. Ещё одним важным отличием является наличие анизотропии удельных сопротивлений в самой плоскости нанесения контактов.

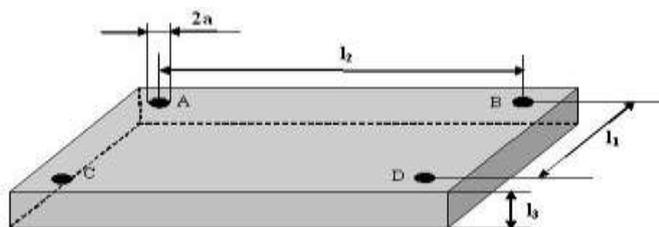


Рис.3.

Геометрия нанесения контактов на поверхность образца по методике Монтгомери.

Рассмотрим сначала образец из изотропного материала удельным сопротивлением ρ в виде прямоугольной призмы со сторонами l_1, l_2, l_3 , как показано на Рис.3. В этом случае величину удельного сопротивления ρ можно определить следующим образом [8]

$$\rho = H \cdot E \cdot R_1, \quad (15)$$

здесь сопротивление $R_1 = \frac{U_{BD}}{I_{AC}}$ является одним из параметров задачи, а H и E

функции геометрических размеров образца, графики и табулированные значения которых приведены в [8]. Аналитически вид функций H и E можно получить, решив уравнение Лапласа для потенциала с соответствующими граничными условиями [5]. Функция H является функцией отношения размеров образца в плоскости измерений l_2/l_1 , а функция E - это так называемая эффективная толщина, которая численно равна l_3 при $l_3 \ll (l_1 \cdot l_2)^{1/2}$, но никогда не превышает

величину $(l_1 \cdot l_2)^{1/2}$. Величину удельного сопротивления ρ можно определить также из (15), изменив геометрию измерений поворотом на 90° токовых и потенциальных контактов и вычислив $R_2 = \frac{U_{CD}}{I_{AB}}$. При этом необходимо пользоваться новыми значениями функции H , зависящей теперь от отношения l_1/l_2 . В [8] также приводятся графики зависимости $R_2/R_1(l_2/l_1)$.

Рассмотрим теперь образец из анизотропного материала аксиальной симметрии, который полностью характеризуется двумя компонентами удельного сопротивления, т.е. $\rho_1 = \rho_3$ и ρ_2 . К таким кристаллам, например, относятся кристаллы тригональной, тетрагональной и гексагональной систем. В этом случае достаточно приготовить для измерений образец с одной плоской поверхностью - одной стороной, параллельной оси симметрии, другой - в произвольном направлении, перпендикулярном оси симметрии.

Выше было показано, что соответствующим преобразованием системы координат (x, y, z) анизотропный материал размерами l'_1, l'_2, l'_3 и удельными сопротивлениями ρ_1, ρ_2, ρ_3 можно перевести в эквивалентный изотропный материал размерами l_1, l_2, l_3 и удельным сопротивлением ρ . Эквивалентность означает, что если сопротивление R_1 было получено при расположении потенциальных контактов (U_{BD}) вдоль стороны l'_1 , а R_2 (U_{CD}) - стороны l'_2 , то в эквивалентном изотропном материале будем иметь те же значения R_1 вдоль стороны l_1 и R_2 вдоль стороны l_2 . Тогда из (7) следует

$$l_i = l'_i (\rho_i / \rho)^{1/2}. \quad (16)$$

Из (16) получается

$$(\rho_2 / \rho_1)^{1/2} = (l_2 / l_1) \times (l'_1 / l'_2), \quad (17)$$

где l_2/l_1 определяется из зависимости $R_2/R_1(l_2/l_1)$ [8].

1. В случае образца в виде тонкой пластинки такой, чтоб выполнялось условие $l_3 \ll (l_1 \cdot l_2)^{1/2}$, из соотношений (15-17) имеем

$$(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2} = H \cdot l'_3 \cdot R_1, \quad (18)$$

отметим, что (18) не зависит от значения ρ_3 . Таким образом, из (17) и (18) можно определить ρ_1 и ρ_2 . Величину ρ_3 можно определить, подготовив образец с поверхностью, содержащей сторону l_3 .

2. В случае если толщиной образца нельзя пренебречь и исследуется кристалл аксиальной симметрии ($\rho_1 = \rho_3$), то из (16), (17) вычисляем

$$l_3 / (l_1 \cdot l_2)^{1/2} = (\rho_1 / \rho_2)^{1/4} \cdot l'_3 / (l'_1 \cdot l'_2)^{1/2}. \quad (19)$$

По графику в [8] получаем $E / (l_1 \cdot l_2)^{1/2}$ соответствующее $l_3 / (l_1 \cdot l_2)^{1/2}$ и определяем

$$E' / (l'_1 \cdot l'_2)^{1/2} = (\rho_2 / \rho_1)^{1/4} \cdot E / (l_1 \cdot l_2)^{1/2}. \quad (20)$$

Таким образом, может быть вычислено $(\rho_1 \cdot \rho_2)^{1/2}$ из (18), где l'_3 заменена на E' , а затем, учитывая (17), в отдельности ρ_1 и ρ_2 .

В общем случае если не прибегать к помощи таблиц и графиков, приведенных в [8], можно численным методом, подобно методу Шнабеля,

определить значения удельных сопротивлений для образцов произвольных размеров [9]. При этом, чтоб следовать обозначениям [9], допустим $l_1 = a$, $l_2 = b$ и $l_3 = c$, а соотношение (15) перепишем как

$$\rho = (\pi/4) \cdot [a/(aM)] \cdot (V/I), \quad (21)$$

для тонкого образца

$$\rho = (\pi/4) \cdot [c/(cM)_0] \cdot (V/I). \quad (22)$$

Из сравнения (18) и (22) следует

$$H = (\pi/4) \cdot [(cM)_0]^{-1}, \quad (23)$$

а из (15) и (21) с учётом (23) следует

$$E = a(cM)_0 / (aM), \quad (24)$$

здесь функция

$$aM = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\left[(2l+1) \frac{c}{a} \right]^2 + n^2} \cdot \text{sh} \left(\pi \sqrt{\left[(2l+1) \frac{b}{a} \right]^2 + n^2 \left(\frac{b}{c} \right)^2} \right)}, \quad (25)$$

где $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_n = 2$ при $n > 0$.

Ряд (25) является сходящимся (т.е. убывающим), и при расчёте оставляются члены, необходимые для получения заданной точности.

Основным достоинством метода Монтгомери является, как подчёркивал сам автор [8], возможность проводить измерения на образцах малых размеров (площадью поверхности до $\sim 1 \text{ мм}^2$). Кроме того, этот метод нанесения контактов очень удобен для изучения анизотропии электропроводности кристаллов с цепочечной структурой кристаллического строения, имеющих два различных компонента тензора удельного сопротивления – вдоль оси цепочек (ось c) и перпендикулярно оси. В этом случае цепочки ориентированы вдоль одной из сторон поверхности, на которую нанесены рабочие контакты.

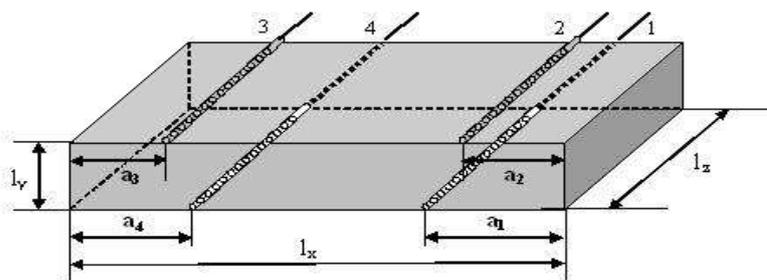
МЕТОД КОНФОРМНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Данный метод расчёта анизотропии удельного сопротивления образцов, предложенный Л.И.Буравовым [10], также является четырёхзондовым, однако существуют значительные отличия схемы монтажа от применяемой в методике Монтгомери [8]. Во-первых, контакты располагаются на некотором расстоянии a_i ($i = 1, 2, 3, 4$) от краёв сторон образца, приготовленного в виде прямоугольного бруска, а, во-вторых, контакты не точечные, а линейные и наносятся попарно по всей длине противоположных граней (Рис.4). Предполагается, что оси бруска совпадают с главными осями тензора проводимости. При таком расположении контактов, как это показано на Рис.4, при пропускании тока через контакты 2, 3 или 3, 4 распределение потенциала в образце не зависит от координаты z . Поэтому

может быть использован метод конформного преобразования на плоскости.

Рис.4.

Геометрия нанесения линейных (по всей длине l_z) контактов на поверхность образца по методике конформного преобразования.



Прежде всего для решения этой задачи для удобства, как было описано в предыдущих методиках, необходимо перейти к эквивалентной изотропной модели.

Условие равенства сопротивлений элементов объёма в изотропной и анизотропной среде с учётом (1), (3) и $\gamma = 1$ приводит к соотношениям

$$\rho_x = \rho \frac{\beta}{\alpha} = \rho \frac{l_x l'_y}{l_y l'_x}, \quad \rho_y = \rho \frac{\alpha}{\beta} = \rho \frac{l_y l'_x}{l_x l'_y}, \quad (26)$$

где $l'_x, l'_y, \rho_x, \rho_y$ - размеры и удельное сопротивление анизотропного образца в направлении x и y (Рис.4), а l_x, l_y, ρ - размеры и удельное сопротивление для эквивалентной изотропной модели.

Для нахождения аналитических выражений величин напряжений в эквивалентной изотропной модели используем конформное преобразование прямоугольника в полуплоскость с помощью эллиптической функции $sn(t)$ [11], учитывая, что прямоугольником является любое сечение образца, перпендикулярное проводам 1, 2, 3 и 4 (Рис.4)

$$w = \xi + i\eta = sn \left(\frac{2K}{l_x} x + i \frac{K'}{l_y} y \right), \quad (27)$$

где $K = \pi/2 \cdot (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)$, $K' = 2K \cdot l_y / l_x$, $q = \exp(-2\pi l_y / l_x)$, за начало координат в плоскости (x, y) взята середина ребра l_x .

Как известно [10,11], при таком преобразовании граница прямоугольника отображается на ось ξ , а внутренняя часть прямоугольника – на верхнюю полуплоскость (ξ, η) , при этом положение контактов 1, 2, 3 и 4 (Рис.4) переходит на ось ξ в точки

$$\begin{aligned} \xi_1 &= sn[K(1-2\Delta_1)] \\ \xi_2 &= sn[K(1-2\Delta_2) + iK'] = k^{-1} sn^{-1}[K(1-2\Delta_2)] \\ \xi_3 &= -k^{-1} sn^{-1}[K(1-2\Delta_3)] \\ \xi_4 &= -sn[K(1-2\Delta_4)], \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Delta_i = a_i / l_x < 0,5$, $k = 4\sqrt{q} \cdot (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots)^2 / (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2$, причём $\xi_3 < \xi_4 < \xi_1 < \xi_2$.

Распределение потенциала в верхней полуплоскости (ξ, η) описывается по аналогии с распределением потенциала для двух параллельных заряженных проводов в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = A \cdot \ln(r_1 / r_2), \quad (29)$$

здесь r_1, r_2 - расстояния в этой полуплоскости от точки наблюдения до центров проводов, $A = -(I\rho / \pi l_z)$.

Из (29) следует, что для тока, текущего по проводам 1 и 4, потенциал равен

$$U_x = \varphi(2) - \varphi(3) = A \frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_4)(\xi_1 - \xi_3)}. \quad (30)$$

Из (29) также следует, что для тока, текущего по проводам 1 и 2, потенциал равен

$$U_y = \varphi(3) - \varphi(4) = A \frac{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)}. \quad (31)$$

Аналогично [8] отношение U_y / U_x не зависит от ρ

$$U_y / U_x = \Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4). \quad (32)$$

Таким образом, определив U_x, U_y, Δ_i и решая численно на ЭВМ (32), можно найти l_y/l_x для эквивалентной модели, после чего анизотропия сопротивления согласно (26) равна

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \left(\frac{l_y \cdot l'_x}{l_x \cdot l'_y} \right)^2. \quad (33)$$

Из (30) и (31) с учётом (26) получаем расчётные формулы для вычисления удельных сопротивлений ρ_x и ρ_y

$$\rho_x = -\frac{U_x}{I} \pi d_z \left[\ln \frac{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} \right]^{-1} \frac{l_x l'_y}{l_y l'_x}, \quad (34)$$

$$\rho_y = -\frac{U_y}{I} \pi d_z \left[\ln \frac{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} \right]^{-1} \frac{l_y l'_x}{l_x l'_y}. \quad (35)$$

МЕТОД ТРАНСФОРМАЦИИ ПОТОКА

В отличие от метода Монгмери, где диаметры токовых и потенциальных контактов предполагались малыми по сравнению с характерными размерами, в методе трансформации потока также используются малые образцы, но с контактами, покрывающими уже значительную поверхность образца. На Рис.5 приведена геометрия образца и конфигурация токовых и потенциальных контактов, используемых в методе трансформации потока [12,13]. На эксперименте ток I_{14} пропускается через контакты 1 и 4, при этом разность потенциалов снимается с контактов, расположенных на противоположных поверхностях образца

$$U_{top} = U_{23} \text{ (с контактов 2 и 3) и } U_{bot} = U_{67} \text{ (с контактов 6 и 7).}$$

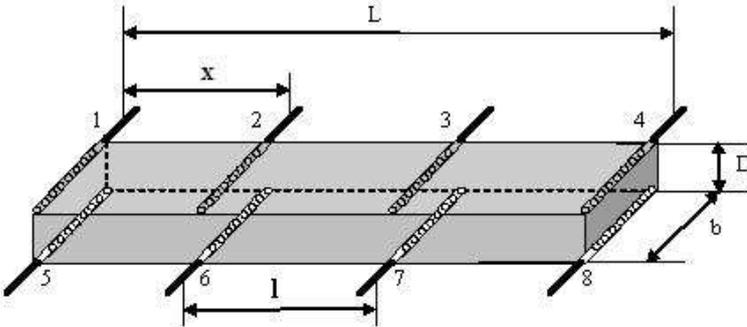


Рис.5. Геометрия образца и конфигурация токовых и потенциальных контактов в методе трансформации потока.

Если линейные контакты расположить на плоскости (x, y) параллельно оси y , а начало координат на середине ребра L нижней поверхности образца (x, y) , то в омическом режиме распределение потенциала $U(x, z)$ внутри образца можно определить, решив уравнение Лапласа с соответствующими граничными условиями

$$\frac{1}{\rho_{ab}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=\pm L/2} = 0. \quad (36)$$

Как и в случае метода конформного преобразования распределение потенциала в образце не зависит от одной координаты, в данном случае y .

Решение для потенциала $U(x, z)$ в (36) ищем в виде [5]

$$U(x, z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} U_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \cosh\left(\xi \frac{\pi n z}{L}\right), \quad (37)$$

где $\xi = (\rho_c / \rho_{ab})^{1/2}$, а U_n согласно [12,13] определяется как

$$U_n = (-1)^{(n-1)/2} \cdot \frac{4I(\rho_c \rho_{ab})^{1/2}}{\pi n \cdot \sin(\xi \pi D / L)}. \quad (38)$$

Тогда распределение потенциала на верхней поверхности образца ($z = D$)

$$U_{top}(x) = 4I(\rho_c \rho_{ab})^{1/2} \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)x/L]}{\pi(2k+1)} \coth\left(\xi \frac{\pi(2k+1)D}{L}\right). \quad (39)$$

Соответственно на нижней поверхности образца ($z = 0$)

$$U_{bot}(x) = 4I(\rho_c \rho_{ab})^{1/2} \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)x/L]}{\pi(2k+1)} \frac{1}{\sinh[\xi \pi(2k+1)D/L]}. \quad (40)$$

Необходимо отметить, что в то время как $U_{bot}(x)$ является быстро сходящимся рядом, ряд в $U_{top}(x)$ сходится очень медленно. Чтоб решить эту проблему авторы [12,13] разделили медленно сходящийся ряд $U_{top}(x)$ на медленно и быстро сходящиеся части таким образом, чтоб это позволило вычислить суммирование по медленно сходящейся части $P(x)$ точно. Для примера (39) можно переписать как

$$U_{top}(x) = \frac{4I(\rho_c \rho_{ab})^{1/2}}{\pi} [P(x) + S(\xi, x)], \quad (41)$$

где

$$P(x) = \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)x/L]}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{2L}\right), \quad (42)$$

$$S(\xi, x) = \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)x/L]}{2k+1} \left[\coth\left(\xi \frac{\pi(2k+1)D}{L}\right) - 1 \right]. \quad (43)$$

Как видно из (42), $P(x)$ является функцией только геометрических размеров и не зависит от величины удельного сопротивления, а $S(\xi, x)$ является быстро (экспоненциально) сходящимся рядом и легко усекается оставлением доминирующих членов.

На эксперименте определяются разности потенциалов $U_{top} = U_{top}(x_3) - U_{top}(x_2)$ и $U_{bot} = U_{bot}(x_6) - U_{bot}(x_5)$. Если ещё и контакты расположить симметрично ($x_3 = x_6 = -x_2 = -x_5 = l/2$), то (39) и (40) будут выглядеть окончательно как

$$U_{top} = \frac{8I(\rho_c \rho_{ab})^{1/2}}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{4L}\right) + S(\xi) \right], \quad (44)$$

где $S(\xi) = \sum_{k=0,1,2,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)l/2L]}{2k+1} \left[\coth\left(\xi \frac{\pi(2k+1)D}{L}\right) - 1 \right],$

$$U_{bot}(x) = \frac{8I(\rho_c \rho_{ab})^{1/2}}{\pi} \sum_{k=0,1,\dots}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin[\pi(2k+1)l/2L]}{2k+1} \frac{1}{\sinh[\xi \pi(2k+1)D/L]}. \quad (45)$$

В случае сильной анизотропии величина U_{bot} может быть очень малой $U_{bot} \ll U_{top}$, определяемой с большой ошибкой. В этом случае можно воспользоваться другой конфигурацией контактов [13]. Ток I направляется через контакты 1 и 5, а разность потенциалов обозначается как U_c и определяется с контактов 2 и 6 (U_{26}), а также 3 и 7 (U_{37}) (Рис.5), которые по величине уже различаются не так сильно. Решение уравнения Лапласа даёт

$$U_c(x) = \frac{I\rho_c D}{bL} \left[1 + \frac{4}{\eta} \ln \frac{1}{2 \sin(\pi x/2L)} - \frac{4}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[\pi n x/L]}{n} \left(1 - \tanh\left(\frac{\eta n}{2}\right) \right) \right], \quad (46)$$

здесь $\eta = \xi\pi D/L$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, суммируя вышеизложенное, можно сделать следующие конкретные рекомендации для применения приведенных зондовых методик измерения абсолютных значений удельных сопротивлений:

1. Метод четырёх зондов хорош для измерений удельного сопротивления изотропных кристаллов, при которых достаточно иметь одну полированную поверхность.
2. Четырёхзондовый метод Шнабеля пригоден для исследований величин удельных сопротивлений слоистых кристаллов в плоскости слоёв и в направлении перпендикулярном слоям. Плоскопараллельная пластинка образца для измерений легко получается простым скалыванием монокристаллов. Необходимо помнить, что для упрощения вычислений расстояние между контактами должно хотя бы в 4 раза быть меньшим, чем стороны пластинки. Поэтому для проведения измерений желательно иметь образцы с площадью поверхности большей, чем $4 \times 4 \text{ мм}^2$.
3. Метод Монгмери пригоден для исследований величин удельных сопротивлений цепочечных кристаллов в направлении цепочек и в направлении перпендикулярном им. При приготовлении образца необходимо, чтобы цепочки были ориентированы вдоль одной из сторон поверхности, на которую нанесены рабочие контакты. Для измерений пригодны образцы и малых размеров поверхности, вплоть до 1 мм^2 .
4. Использование методов конформного преобразования и трансформации потока для исследований величин удельных сопротивлений слоистых кристаллов в плоскости слоёв и в направлении, перпендикулярном слоям, предпочтительно только в случае малых размеров образца из-за невозможности нанесения точечных контактов. Однако в этом случае усложнится система обработки полученных результатов из-за сложности вычислений.

1. Л.П.Павлов, *Методы измерения параметров полупроводниковых материалов*. М.: Высшая школа, (1987) 238.
2. L.B.Valdes, *Proc. Inst. Radio Eng.*, **42** (1954) 420.
3. М.С.Брекслер, *ФТТ*, **1** (1959) 152.
4. P.Schnabel, *Zeits. Angew. Phys.*, **22** (1967) 136.
5. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, *Уравнения математической физики*. М.: Наука, (1972) 736.
6. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, *Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Физматгиз, (1963) 1100.

7. Ф.Н.Абдуллаев, Т.Г.Керимова, Н.А.Абдуллаев, *Transactions of Azerbaijan Academy of Sciences, Series of Physical-mathematical and Technical sciences, Physics and Astronomy*, **XXV** №5 (2005) 83.
8. H.C.Montgomery, *J. Appl. Phys.*, **42** (1971) 2971.
9. V.F.Logan, S.O.Rice and R.F.Wick, *J. Appl. Phys.*, **42** (1971) 2975.
10. Л.И.Буравов, *Журнал технической физики*, **59** (1989) 138.
11. А.Г.Свешников, А.Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной*. М.: Наука, (1974) 320.
12. G.A.Levin, *J. Appl. Phys.*, **81** (1997) 714.
13. G.A.Levin, T.Stein, C.N.Jiang, C.C.Almasan et al., *J. Physica, C* **282-287** (1997) 1147.

ANİZOTROP KRİSTALLARDA ELEKTRİK KEÇİRİCİLİYİN ÖLÇÜLMƏ METODİKALARI

N.A.ABDULLAYEV

Anizotrop materiallarda elektrikkeçiriciliyin tədqiqi üçün müxtəlif zond metodlar göstərilmişdir. Hər bir metodun müsbət və mənfi tərəfləri təhlil edilmişdir. Eləcə də hər bir metod üçün anizotrop nümunədən ekvivalent izotrop nümunə modelinə keçid üsulu göstərilmişdir.

PROBE MEASUREMENT METHODS OF ELECTROCONDUCTIVITY IN ANIZOTROPY CRYSTALS

N.A.ABDULLAYEV

Different probe methods of electroconduction investigation of anisotropy materials have been shown. Advantage and deficiency of both of them have been discussed. The method of transition from anisotropic sample to the model of equivalent isotropic sample for each methods has been shown.

Редактор: Г.Аждаров