# О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИГНЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

**Ш.М.НАГИЕВ, Г.Г.КУЛИЕВА**

*Институт Физики НАН Азербайжана*
*AZ 1143, г.Баку, пр. Г.Джавида, 33*

Построено вигнеровское представление для релятивистского линейного осциллятора во внешнем поле. Найдена функция распределения Вигнера как для стационарных состояний, так и для состояний термодинамического равновесия.

## ВВЕДЕНИЕ

1. Функция Вигнера $W(p,x;t)$ [1], являющаяся в известной мере аналогом классической функции распределения в фазовом пространсве $\rho(p,x)$, находит широкое применение в нерелятивиской квантовой механике [2-4]. Имеет место соотношение $\lim\limits_{\hbar\to 0} W(p,x;t)=\rho(p,x)$ и, следовательно, при помощи вигнеровского представления квантовой механики можно найти квантовые поправки к классическим результатам. Напомним, что самым первым применением функции Вигнера было вычисление квантовых поправок к классической равновесной функции распределения системы частиц в произвольном потенциальном поле. Функция Вигнера является функцией импульса $p$ и координаты $x$, а также, в общем случае, времени $t$. Ее можно получить из волновых функций в координатном $\psi(x)$ или в импульсном $\phi(p)$ представлениях с помощью известных преобразований

$$W(p,x;t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(x+\frac{1}{2}x',t\right)e^{ipx'/\hbar}\psi\left(x-\frac{1}{2}x',t\right)dx', \tag{1a}$$

$$W(p,x;t)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi^*\left(p+\frac{1}{2}p',t\right)e^{-ixp'/\hbar}\phi\left(p-\frac{1}{2}p',t\right)dp'. \tag{1b}$$

Функция (1) удовлетворяет следующим уравнениям

$$\int W(p,x;t)dp=\left|\psi(x,t)\right|^2=W(x,t), \tag{2a}$$

$$\int W(p,x;t)dx=\left|\phi(p,t)\right|^2=W(p,t), \tag{2b}$$

здесь $W(x,t)$ выражает вероятность обнаружения частицы в точке $x$ в момент времени $t$. Аналогично $W(p,t)$ выражает вероятность обнаружения частицы в импульсном пространстве со значением импулса $p$ в момент времени $t$.

Несмотря на то что функция Вигнера $W(p,x;t)$ удовлетворяет уравнениям (2), ее нельзя рассматривать как вероятность найти частицу с импульсом $p$ в точке $x$, так как функция $W(p,x;t)$ при некторых значениях $p$ и $x$ может становиться отрицательной.

С помощью функции Вигнера можно вычислять среднее значение любой физической величины $f(p,x)$ по формуле

$$\bar{f}=\int f(p,x)W(p,x\cdot t)dpdx. \tag{3}$$

В работах [2-7] для ряда нерелятивистских квантовомеханических задач был найден явный вид функции Вигнера.

В работе [8] построено вигнеровское представление для релятивистской модели линейного гармонического осциллятора, описываемой конечно-разностным уравнением [10]. В работе [9] рассмотрено фазовое представление для нелокальной релятивистской модели линейного осциллятора.

Цель настояшей работы - найти явный вид функции Вигнера для релятивистской модели линейного осцилятора во внешнем поле [11].

2. Сначала рассмотрим нерелятивистской случай. В нерелятивистской квантовой механике гамильтониан линейного осциллятора во внешнем поле

$$H_N^g = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + gx \tag{4}$$

имеет следующие собственные функции

$$\psi_{Nn}^g(x) = c_{Nn} H_n\left( (x + x_0)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+x_0)^2}, \tag{5}$$

соответствующие собственным значениям энергии

$$E_{Nn}^g = \hbar\omega\left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{m\omega^2}{2} x_0^2, \tag{6}$$

где $x_0 = g/m\omega^2$. Функции (5) удовлетворяют соотнощению ортонормированности

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{Nn}^{g*}(x)\psi_{Nm}^g(x)dx = \delta_{nm}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$c_{Nn} = \frac{c_{N0}}{\sqrt{2^n n!}}, \quad c_{N0} = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}.$$

Волновые функции $\psi_{Nn}^g(x)$ (5) получаются простой трансляцией из волновых функций $\psi_{Nn}^0(x)$ линейного нерелятивистского осциллятора при $g = 0$, т.е.

$$\psi_{Nn}^g(x) = e^{-i\hbar x_0 \frac{\partial}{\partial x}} \psi_{Nn}^o(x) = \psi_n^0(x + x_0).$$

В импульсном представлении эта трансляция имеет вид

$$\phi_{Nn}^g(p) = e^{\frac{ix_0 p}{\hbar}} \phi_{Nn}^0(p).$$

После подстановки (5) в формулу (1a) и выполнения интегрирования в ней находим функцию Вигнера для стационарных состояний нерелятивистского линейного осциллятора во внешнем поле (4):

$$W_{Nn}^g(p,x) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\left(\eta^2 + (\xi+\xi_0)^2\right)} L_n\left(2\eta^2 + 2(\xi+\xi_0)^2\right), \tag{8}$$

где $\eta = \frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}$, $\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $\xi_0 = x_0\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \frac{g}{\omega}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ - безразмерные величины, а $L_n(x)$ - полиномы Лагерра. Функция Вигнера (8) нормирована условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{Nn}^g(p,x)dpdx = 1,$$

из которого получаем следующую формулу суммирования

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(n-m+1/2)}{n!(n-m)!} = \pi. \tag{9}$$

Другая формула суммирования получается из условия (2a) для функций (8)

$$\sum_{m=0}^{n} 2^m (2m-1)!! C_n^m H_{2n-2m}\left(x\sqrt{2}\right) = 2^n H_n^2(x). \tag{10}$$

Равновесная функция Вигнера для системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия при температуре $T$ определяется формулой

$$W_N^g(p,x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{Nn}^g W_{Nn}^g(p,x), \tag{11}$$

где

$$w_{Nn}^g = \frac{e^{-\beta E_{Nn}^g}}{Z_N^g(\beta)} = 2\sinh(\beta\hbar\omega/2) e^{-\beta E_{Nn}^0} = w_{Nn}^0 . \tag{12}$$

В этом случае ряд (11) можно просуммировать и получить

$$W_N^g(p,x) = \frac{\tanh(\beta\hbar\omega/2)}{\pi\hbar} \exp\left[-\left(\eta^2 + (\xi+\xi_0)^2\right)\tanh(\beta\hbar\omega/2)\right] . \tag{3}$$

3. Релятивистская модель линейного осциллятора во внешнем поле описывается, конечно, разностным гамильтонианом [11]

$$H^g(x) = mc^2 \cosh i\lambda\partial_x + \frac{m\omega^2}{2} x(x+i\lambda) e^{i\lambda\partial_x} + gx, \tag{14}$$

где $\lambda = \hbar/mc$ - комптоновская длина волны частицы с массой $m$, $c$ - скорость света. Собственные функции гамильтониана $H^g(x)$ имеют следующий вид [11]

$$\psi_n^g(x) = c_n^g \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^{ix/\lambda} \Gamma(\nu + ix/\lambda) P_n^\nu\left(\frac{x}{\lambda};\varphi\right) e^{(\varphi-2\pi)x/\lambda}, \tag{15}$$

где

$$c_n^g = e^{in(\pi/2-\varphi)}(1-e^{-2i\varphi})^\nu \sqrt{\frac{n!}{2\pi\lambda\Gamma(n+2\nu)}}, \quad \nu = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}, \tag{16}$$

а $P_n^\nu(x;\varphi)$ - полиномы Мейкснера-Поллачека. Эти функции нормированы условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^{g*}(x)\psi_m^g(x)dx = \delta_{nm} .$$

Уровни энергии для модели (14) имеют вид

$$E_n^g = \hbar\omega\delta(n+\nu), \; n = 0,1,2,3,\dots, \tag{17}$$

где в случае дискретного спектра $|g| < mc\omega$ угол $0 < \varphi < \pi$ определяется соотношением $\cos\varphi = g/mc\omega$, а $\delta = \sin\varphi$.

Волновые функции $\phi_n^g(p)$ системы в импульсном представлении получаются из (15) релятивистским преобразованием Фурье

$$\phi_n^g(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^*(p,x)\psi_n^g(x)dx, \tag{18}$$

где функции

$$\xi(p,x) = \left(\frac{p_0+p}{mc}\right)^{ix/\lambda} = e^{ix\chi/\lambda} \tag{19}$$

являются релятивистскими плоскими волнами [10,11], а $\chi = \ln((p_0+p)/mc)$ - быстрота. В результате находим, что импульсные волновые функции выражаются через полиномы Лагерра

$$\phi_n^g(p) = c_n{}' \zeta^\nu e^{a\zeta} L_n^{2\nu-1}(2\delta\zeta)$$

$$c_n{}' = i^n (2\delta)^\nu \sqrt{\frac{n!}{mc\Gamma(n+2\nu)}}, \quad \zeta = \frac{c(p_0+p)}{\hbar\omega} = \frac{mc^2}{\hbar\omega} e^\chi, \quad a = ie^{i\varphi}. \tag{20}$$

4. Построим теперь представление Вигнера для релятивистского линейного осциллятора во внешнем поле.

а) Функцию Вигнера стационарных состояний в релятивистском случае определим следующим образом [8]

$$W_n^g(p,x) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n^{g*}\left(\chi + \frac{1}{2}\chi'\right)\phi_n^g\left(\chi - \frac{1}{2}\chi'\right)e^{-ix\chi'/\lambda}d\chi', \tag{21}$$

где $\phi_n^g(p) \equiv \phi_n^g(\chi)$. Подставляя (20) в (21) и учитивая соотношение

$$e^{\pm\frac{i\lambda}{2}\partial_x}e^{-\frac{2ix\chi'}{\lambda}} = e^{\pm\chi'}e^{-\frac{2ix\chi'}{\lambda}},$$

получим

$$W_n^g(p,x) = \frac{n!}{(2\nu)_n}L_n^{2\nu-1}(2\delta\zeta e^{\frac{i\lambda}{2}\partial_x})L_n^{2\nu-1}\left(2\delta\zeta e^{\frac{-i\lambda}{2}\partial_x}\right)W_0\left(p,x\right). \tag{22}$$

Здесь для функции Вигнера основного состояния осциллятора во внешнем поле (14) имеем выражение

$$W_0^g\left(p,x\right) = \frac{(2\delta\zeta)^{2\nu}}{\pi\hbar\Gamma(2\nu)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{az+a^*/z}z^{\frac{2ix}{\lambda}-1}dz,$$

которое с помощью интегральной формулы [13]

$$\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-px-q/x}dx = 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2}K_\alpha\left(2\sqrt{pq}\right) \quad , \operatorname{Re} p > 0$$

может быть выражено через функции Макдональда

$$W_0^g(p,x) = \frac{2\left(2\delta\zeta\right)^{2\nu}}{\pi\hbar\Gamma\left(2\nu\right)}e^{(2\varphi-\pi)x/\lambda}K_{2ix/\lambda}\left(2\zeta\right). \tag{23}$$

Для функции Вигнера возбужденных состояний аналогичным образом получаем, что

$$W_n^g(p,x) = \frac{n!}{\left(2\nu\right)_n}L_n^{2\nu-1}(2\delta\zeta e^{\frac{i\lambda}{2}\partial_x})L_n^{2\nu-1}\left(2\delta\zeta e^{-\frac{i\lambda}{2}\partial_x}\right)W_0(p,x) = \tag{24}$$

$$= \frac{2(2\delta\zeta)^{2\nu}n!}{\pi\hbar\Gamma\left(n+2\nu\right)}e^{(2\varphi-\pi)x/\lambda}\sum_{k,j=0}^{n}\binom{n+2\nu-1}{n-k}\binom{n+2\nu-1}{n-j}\frac{\left(-2\delta\zeta\right)^{k+j}}{k!\,j!}e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)(k-j)}K_{2ix/\lambda+j-k}(2\zeta).$$

В (24) $\left(a\right)_n = \dfrac{\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a\right)}$ - символ Похгаммера, $\dbinom{a}{n} = \dfrac{\Gamma\left(a+1\right)}{n!\Gamma\left(a+1-n\right)}$ - биномиальные коэффициенты, и мы воспользовались явным видом полиномов Лагерра

$$L_n^a(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^m}{m!}\binom{n+a}{n-m}x^m. \tag{25}$$

b) Как и в случае релятивистского линейного осциллятора при отсутствии поля [8] мы можем определить равновесную функцию распределения Вигнера для релятивистского линейного осциллятора во внешнем поле по формуле (11) с коэффицентами

$$w_n^g = e^{-\beta E_n^g}/Z^g(\beta), \qquad \beta = 1/kT, \tag{26}$$

где $E_n^g$ -уровни энергии осциллятора (14), а статистическая сумма имеет вид

$$Z^g(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta E_n^g} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega\delta\nu}}{1-e^{-\beta\hbar\omega\delta\nu}}. \tag{27}$$

Представим равновесную релятивистскую функцию распределения Вигнера в виде

$$W(p,x)=\frac{1}{Z^g(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta E_n^g}W_n^g(p,x)=$$

$$=\frac{1-e^{-\beta\hbar\omega\delta}}{\pi\hbar}(2\delta\zeta)^{2\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!e^{\beta\hbar\omega\delta n}}{\Gamma(n+2\nu)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{a\zeta e^y+a^*\zeta e^{-y}}L_n^{2\nu-1}\left(2\delta\zeta e^y\right)L_n^{2\nu-1}\left(2\delta\zeta e^{-y}\right)e^{2ixy/\lambda}dy. \qquad (28)$$

Воспользовавшись теперь в (28) билинейной производящей функцией для полиномов Лагерра [14]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!Z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(y)=\frac{(xyz)^{-\alpha/2}}{1-z}I_\mu\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\right)\exp\left(-\frac{z(x+y)}{1-z}\right) \qquad (29)$$

и изменив порядок интегрирования и суммирования, для функции $W^g(p,x)$ (28) получаем выражение

$$W^g(p,x)=\frac{4\delta\zeta}{\pi\hbar}e^{-2\phi x/\lambda}e^{\beta\hbar\omega\delta(\nu-1/2)}I_{2\nu-1}\left(\frac{2\delta\zeta}{\sinh\frac{\beta\hbar\omega\delta}{2}}\right)K_{2ix/\lambda}\left(2\zeta\sqrt{\rho^2+\delta^2\coth^2\frac{\beta\hbar\omega\delta}{2}}\right), \qquad (30)$$

где $\phi=\arg b$, $b=i\rho-\delta\cdot\coth\frac{\beta\hbar\omega\delta}{2}$, $\rho=\cos\varphi$.

Очевидно, что полученные здесь формулы для релятивистского линейного осциллятора во внешнем поле при $g=0$ (т.е. при $\delta=1$, $\rho=0$) переходят в соответствующие формулы для релятивистского линейного осциллятора [8].


1. E.P.Wigner, *Phys. Rev.*, **40** (1932) 749.
2. H.W.Lee, *Phys. Rep.*, **259** (1995) 147.
3. M.R.Hillery, O'Connell, M.O.Scully, E.P.Wigner, *Phys. Rep.*, **106** (1984) 121
4. В.И.Татарский, *УФН*, **139** (1983) 587
5. Ю.Л.Климонтович, *ДАН СССР*, 1**08** (1956) 1033
6. R.W.Davies, K.T.R.Davies, Ann. Phys., **89** (1975) 261.
7. E.A.Akhundova, V.V.Dodonov, V.I.Manko, *Physica A*, **115** (1982) 215.
8. Н.М.Атакишиев, Ш.М.Нагиев, К.Б.Вольф, *ТМФ*, **114** (1998) 410.
9. Sh.M.Nagiyev, E.I.Jafarov, Fizika, **4** №1 (1998) 50.
10. Н. М.Атакишиев, Р.М.Мир-Касимов, Ш.М.Нагиев, *ТМФ*, **44** (1980) 47.
11. И.С.Шапиро, *ДАН СССР*, **1** (1956) 91.
12. Р.М.Мир-Касимов, Ш.М.Нагиев, Е.Д.Каграманов, *Препринт ИФАН Аз СССР №214, Баку* (1987).
13. А.П.Прудников, Ю.А.Брычков , О.Н.Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции, М.: Наука*, (1981).
14. Г.Бейтмен, А.Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции, М.: Наука*, **2** (1974).


**XARICI SAHƏDƏ RELYATIVISTIK XƏTTI OSSILYATOR ÜÇÜN VIQNER PAYLANMA FUNKSIYASI**

**Ş.M. NAĞIYEV, G.H. QULIYEVA**

Xarici sahədə relyativistik xətti ossilyator üçün Viqner təsviri qurulmuşdur. Həm stsionar hallar üçün, həm də termodinamik tarazlıq halı üçün Viqner paylanma funksiyası tapılmışdır.

**WIGNER DISTRIBUTION FUNCTION FOR A RELATIVISTIC LINEAR OSCILLATOR IN AN EXTERNAL FIELD**

**Sh.M. NAGIYEV, G.H. GULIYEVA**

The Wigner representation for the relativistic linear oscillator in an external field has been constructed. Wigner distribution functions for both the stationary states and the equilibrium Wigner distribution function have been found.

Редактор:И.Наджафов