Н.Н.Моисеев

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКИ

Предисловие 7

Глава I. Некоторые вопросы вспомогательного характера 11

§ 1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний 11

§ 2. Дальнейшее изучение уравнения Дюффинга 19

§ 3. Примеры колебаний систем с переменными параметрами 25

§ 4. О некоторых достаточных условиях ограниченности колебаний 30

§ 5. Теорема Пуанкаре 35

Глава II. Метод Ляпунова—Пуанкаре 41

§ 1. Система Ляпунова—случай одной степени свободы 41

§ 2. Условия существования периодических решений 49

§ 3 Метод Ляпунова 58

§ 4 Система Ляпунова. Случай произвольного числа степеней свободы 67

§ 5. Автоколебания 79

§ 6. Метод Г. В. Каменкова 96

§ 7. Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре 103

§ 8. Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. Метод Малкина 121

§ 9. Заключительные замечания 138

Глава III. Асимптотические методы разделения движений 140

Введение 140

§ 1. Метод Ван-дер-Поля 141

§ 2. Метод Ван-дер-Поля в системах, близких к консервативным 157

§ 3. Системы с медленным временем 166

§ 4. Описание алгоритма асимптотического интегрирования для случая одной быстрой переменной 175

§ 5. Алгоритм асимптотического интегрирования. Случаи не скольких быстрых переменных 191

§ 6. Исследование стационарных точек и устойчивости 211

§ 7. Вращательные движения маятника 217

§ 8. Приложения к задачам динамики орбитальных аппаратов 241

§ 9. Асимптотические методы усреднения в задачах теории оптимального управления 273

Глава IV. Асимптотические методы в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр 279

§ 1. Одно уравнение второго порядка 281

§ 2. Однородные системы второго порядка. Случай простых корней 290

§ 3. Однородные системы второго порядка. Случай кратных корней 303

§ 4. Неоднородные уравнения 317

§ 5. Общий случай линейной системы произвольного порядка 324

§ 6. Задача о движении гироскопа под действием момента, изменяющегося во времени 329
§ 7. Особые случаи (асимптотика и окрестности точек возврата) 343
§ 8. О некоторых способах построения асимптотических представлений в случае кратных элементарных делителей характеристической матрицы 351
§ 9. Асимптотические методы большого параметра и теория оптимальной коррекции 365
Предметный указатель 378

Предметный указатель

Автоколебания 79, 82, 93
Алгоритм Ляпунова 58
Аппарат космический 366
- - малой тяги 249
- - орбитальный 241
- - под действием трансверсальной тяги 277
Гироскоп в поле перменной напряженности 335
- в спящем положении 333
- его элементарная теория 334
- осесимметричный 329
- под действием момента, изменяющегося во времени 329
Делители инвариантного множителя элементарные 306
Демпфирование нелинейных колебаний 161
Задача Лагранжа—Пуассона 329
Замораживание коэффициентов 26
Изохронность 15
Инварианты адиабатические 168, 170
Интеграл действия 169
Квазилинеаризация 119, 120
Колебания вдали от резонанса 105
- главные 79
- квазилинейные 142
- резонансные 108
Координаты главные 77
Коррекция оптимальная 365
Линеаризация эквивалентная 153, 155
Матрица Грина 39
- характеристическая 304
Маятник 31, 81, 147, 192, 217
- в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости 152
Маятник, возвращающая сила которого разрывна 225
- гармонический 149
- математический 18
- - в поле переменной гравитации 228
- - его вращательные движения 228, 294
- - точка подвеса которого колеблется по периодическому закону 30
- на который действует диссипативная сила 27
- под действием возвращающей силы, обратно пропорциональной квадрату времени 26
- - - ограниченной возвращающей силы 26
- при наличии малого вязкого трения 151
- пружинный 146
- - жесткость которого изменяется во времени 26
- с переменной возвращающей силой 227
- сферический 303
Метод Ван-дер-Поля 141
- - в системах, близких к консервативным 157
- Волосова 143
- - в теории вращательных движений 238
- Каменкова 96, 98

- Ляпунова 58, 71, 77
- Малкина 121
- малого параметра 135
- осреднения 140
- последовательных приближений 188
- Пуанкаре 103
- разделения переменных 140
- Фурье 193
- WBKJ 280
Множители матрицы инвариантные 306
Орбиты кеплеровы, их возмущения 242
Осциллятор гармонический 12, 149
- квазилинейный 205
- линейный 15, 103
- нелинейный 149, 192
Переменные Ван-дер-Поля 142, 145
Плоскость фазовая 12
Приближение Ван-дер-Поля 102
Принцип замораживания коэффициентов 26
- максимума Понтрягина 176
Ракета оперенная 28, 32
Расстройка 197
Резонанс 25, 117, 126, 131
- главный 117, 197, 201
- комбинационный 197, 202
- кратный 207
- n-го рода 119
Резонансная ситуация 197
Резонансный случай 105
Решение асимптотическое по параметру \lambda 284
Сепаратриса 15
Сила аэродинамическая 258, 259
- диссипативная 80
Система автоколебательная 152
- Гамильтона 180
- диссипативная 150, 315
- жесткая 146, 147
- линейная 12
- Ляпунова 67, 80
- - ее каноническая форма 70
- мягкая 146, 170
- с вращающейся фазой 175, 190
- с вращающимся звеном 226, 232
- с двумя вращающимися фазами 192, 194, 267
- с медленным временем 166
- с переменными параметрами 25
- стандартного вида 190
Снаряд артиллерийский 329, 337
- оперенный 309
Сопротивление аэродинамическое 254
Спутник искусственный 253, 259, 267
Теорема Каменкова 100
- Ляпунова 70
- Малкина 131
- Пуанкаре 37, 40
- Сильвестра 214
Точка возврата 343
- изображающая 12
- особая 14
- - неустойчивая 15
- - типа седло 14
- - - фокус 80
- - - центр 14
- - устойчивая 14
- стационарная 212
Траектория фазовая 12
Управление оптимальное 274, 365
Уравнение Ван-дер-Поля 92, 112, 144
- - в случае двух быстрых переменных 196
- вековое 76
- Дюффинга 16, 17, 19, 21, 25, 64, 131, 145, 206
- квазилинейное 141
- Матье 30
- порождающее 36, 42
Уравнения в вариациях 38
- укороченные 134, 160
- Эйри 349
Форма жорданова нормальная 305
Функции Эйри 349

Цикл предельный 82
Частота мгновенная 26
Частоты собственные 77
Элементы оскулирующие 248, 249
Ящик жорданов 305

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга возникла из лекций, которые автор читал студентам Московского физико-технического института. Заглавие книги совпадает с названием соответствующего курса, обязательного для студентов, специализирующихся в области прикладной математики.

Стандартный курс дифференциальных уравнений знакомит студента лишь с основами этой теории. В то же время практическая деятельность математика, занимающегося прикладными задачами, обычно требует знания целого ряда вопросов, далеко выходящих за рамки программы. К их числу относятся прежде всего разнообразные вопросы асимптотического поведения решений. Поэтому, когда стала очевидной необходимость чтения курса дополнительных глав обыкновенных дифференциальных уравнений, то было решено основное внимание сосредоточить на изложении методов асимптотического анализа. Любые исследования имеют дело с моделями реальных процессов. Это значит, что уравнения, оказывающиеся в распоряжении математика, дают лишь приближенное описание явлений, которые представляют собой объект изучения... Исследователь всегда «упрощает задачу», отбрасывая слагаемые и понижая порядок системы. Возможность такого упрощения обычно оправдывается малостью того или другого параметра. Однако не всякую малую величину можно отбросить, не искажая смысла задачи. Поэтому математик, который занимается подобными вопросами, должен владеть методами, позволяющими изучать зависимость решений от параметров задачи и прежде всего асимптотическое поведение решений при их малых значениях. С подобными вопросами математику приходится сталкиваться независимо от того, в какой области он применяет математические методы исследования. Они в равной степени актуальны в физике и в баллистике, теории колебаний и экономике и т. д.

Значение асимптотических методов возросло в последние десятилетия в связи с развитием вычислительных машин. Очень часто высказывается мысль, что благодаря развитию вычислительной техники и методов вычислительной математики

уменьшается значение аналитических методов. Автор этой книги является категорическим противником подобной точки зрения и убежден, что эффективные вычислительные методы решения той или иной задачи, экономные с точки зрения затраты машинного времени, всегда должны использовать информацию об аналитической природе задачи. Приведем один пример. Пусть речь идет о задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если нам известно заранее, что решение представляет собой медленно меняющуюся функцию, то любой численный метод решения задачи Коши, например метод Рунге — Кутта, оказывается удовлетворительным. Предположим теперь, что решение — быстроколеблющаяся функция. Для ее отыскания формально может быть применен любой численный метод. Однако шаг разностной схемы для обеспечения заданной точности должен быть выбран очень малым, т. е. для обеспечения заданной точности мы должны разбить изучаемый интервал независимого переменного на очень большое число шагов. В то же время большое количество шагов в свою очередь приводит к накоплению ошибки и, следовательно, понижает точность окончательного результата. Кроме того, дробление шага значительно увеличивает машинное время, затрачиваемое на решение задачи. Выход из этого положения состоит в использовании асимптотических методов. Они позволяют произвести предварительную обработку уравнений, отбросить некоторые «малые слагаемые» и ввести новые переменные. Эти переменные будут уже медленно изменяющимися функциями и могут быть точно и быстро вычислены на машине.

Исследования асимптотических решений обыкновенных дифференциальных уравнений представляют собой обширное и развитое направление этой теории. Поэтому при разработке курса асимптотических методов стал вопрос об отборе материала. Здесь возможен целый ряд решений, и окончательный вариант, вероятно, носит достаточно субъективный характер.

Прежде всего представлялось необходимым познакомить студента, специализирующегося в области прикладной математики, с основами теории малого параметра Ляпунова — Пуанкаре. Эта теория лежит в основе целого ряда методов в астрономии, теории колебаний и т. д. Ее значение состоит не только в том, что она дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений. Для целого ряда задач, которые решаются в рамках этой теории, сейчас имеются более эффективные методы, пригодные, кроме того, для более широкого класса уравнений. Дело заключается в другом: эта теория дает очень много для понимания того, как должны строиться методы исследования новых задач. Изучение генезиса целого ряда современных

исследований может показать, что у их истоков находятся идеи и методы, впервые сформулированные в теории Ляпунова — Пуанкаре. Эффективным подтверждением этой мысли является метод Лайтхилла — Го в газовой динамике. Теории Ляпунова — Пуанкаре посвящена вторая глава предлагаемой книги.

В третьей главе содержится изложение «асимптотических методов разделения движений». В начале двадцатых годов этого века голландский инженер Ван-дер-Поль открыл качественно новый подход к изучению колебательных движений и положил начало новой и важной области в теории колебаний. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов сумели посмотреть на весь предмет с совершенно новой точки зрения. Это позволило им разработать асимптотический метод, который в качестве первого слагаемого давал решение, которое можно было получить методом Ван-дер-Поля, носившим эвристический характер. Эти работы положили начало новому большому направлению в теории асимптотических методов. Оно глубоко проникло в различные области теоретической физики, в прикладную астрономию, динамику космических аппаратов и т. д. В последнее время стала очевидной его связь с теорией адиабатических инвариантов, которая развивалась независимо.

Последняя глава книги содержит изложение теории большого параметра — классической теории, ведущей свое начало от работы Лиувилля 1837 г. После работ Биргхоффа и Я. Д. Тамаркина проблема асимптотического поведения интегралов систем линейных уравнений, содержащих большой параметр, превратилась в обширную математическую теорию, широко используемую в различных приложениях. Метод WBKJ является одним из ее небольших разделов. Эта теория позволяет проводить эффективное изучение линейных систем с медленно меняющимися коэффициентами.

Перечисленные вопросы составляют основное содержание книги. Им предпосылается небольшая глава, содержащая вопросы вспомогательного или вводного характера: метод фазовой плоскости, примеры нелинейных уравнений, теорема Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметров и некоторые теоремы об ограниченности решений линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Перечисленные вопросы совершенно не исчерпывают содержания предмета, стоящего в заголовке книги. Целый ряд важных вопросов, к сожалению, не нашел своего места. К их числу относится прежде всего проблема параметрического резонанса, теория уравнений типа Хилла и теория решений типа пограничного слоя. Ограниченный объем книги исключал саму мысль о возможности придать ей энциклопедический характер.

Как это видно из приведенного перечисления, предлагаемая книга посвящена дополнительным главам обыкновенных дифференциальных уравнений. Тем не менее в ее заглавии стоят слова «нелинейная механика». Для этого есть несколько причин. Первая из них состоит в том, что формально значительная часть изучаемых вопросов совпадает с традиционным понятием «нелинейная механика». Далее (и это более важно), книга рассчитана на лиц, которые прилагают свои усилия в прикладной сфере. Поэтому все изложение ведется на языке нелинейной механики и иллюстрируется примерами из механики. И, наконец, последнее. В книге используется «Физический уровень строгости». Приводится доказательство только небольшого числа самых простых теорем. Основное внимание уделяется структуре вычислительного алгоритма. Вопросы сходимости или оценок только упоминаются. По каждому из разделов этой книги написано много первоклассных исследований, содержащих обстоятельное изложение трудных вопросов математического характера. К ним автор и отсылает читателя, у которого возникнет желание более глубоко изучить излагаемые вопросы.

Однако данная книга значительно отличается от известных курсов нелинейной механики. Прежде всего она содержит целый ряд вопросов, обычно не включаемых в курсы. Это вопросы асимптотики большого параметра, приложение к вариационным задачам и некоторые другие. Основное же отличие, как нам кажется, состоит в самом духе изложения. Автор избегает большого числа примеров и не тратит времени на их детальный анализ. Не задачи теории нелинейных колебаний, а методы являются объектом анализа.

Настоящая книга по замыслу автора должна служить учебным руководством, которое с небольшой затратой времени позволит ввести читателя в круг изучаемых вопросов и показать возможности излагаемых методов.

Думая о читателях, автор прежде всего имел в виду своих слушателей — студентов Физико-технического института и специалистов аналогичного профиля, которые занимаются применением математических методов в естествознании, технике и экономике. Автор надеется, что предлагаемая книга может быть полезна инженерам и физикам, поскольку чисто математические вопросы в ней находятся на втором плане и изложение вполне элементарно.

Автор искренне благодарен Владимиру Марковичу Волосову, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему много замечаний, которые позволили устранить ряд неточностей и усовершенствовать изложение.

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ХАРАКТЕРА

В этой главе, носящей вводный характер, рассматриваются несколько примеров, иллюстрирующих богатство возможных форм движения, описываемых нелинейными уравнениями и уравнениями с переменными коэффициентами. Некоторые из них нам будут служить в дальнейшем в качестве примеров, на которых мы будем демонстрировать эффективность изучаемых методов.

Одновременно на этих примерах мы излагаем метод фазовой плоскости — метод, имеющий большое прикладное значение.

В этой книге он будет иметь вспомогательный характер главным образом для пояснений полученных результатов.

Несколько примеров из теории линейных колебаний систем с переменными параметрами имеет своей целью показать читателю, начинающему изучать предмет, новые качественные особенности движения систем, возникающие в тех случаях, когда ее параметры становятся функциями времени.

Последний параграф вводной главы содержит изложение теоремы Пуанкаре об аналитической зависимости решения от параметра. Этот фундаментальный результат аналитической теории дифференциальных уравнений будет много раз использоваться в книге.

§ 1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний

1. Фазовые траектории. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right)=0. \tag{1.1}$$

Обозначим $\dot{x}=y$ и вычислим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,y.$$

Тогда уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\Phi\left(x;\ y;\ \frac{dy}{dx}\ y\right)=0$$

или

$$\Phi^*\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\Psi(x,\ y,\ C)=0 \tag{1.2}$$

описывает в плоскости $(x,\ y)$ некоторое однопараметрическое семейство кривых

$$y=\varphi(x,\ C).$$

Плоскость $(x,\ y)$ будем называть фазовой плоскостью уравнения (1.1), а кривую $y=\varphi(x,\ C)$ — фазовой траекторией этого уравнения. Решение уравнения (1.1) — точка $\{x(t);\ y(t)\}$ — будет называться изображающей точкой. Если уравнение (1.1) трактовать как уравнение, описывающее движение материальной точки, то изображающая точка определяет в каждый момент времени t положение и скорость этой точки. При изменении аргумента t изображающая точка будет двигаться вдоль фазовой траектории (рис. 1).

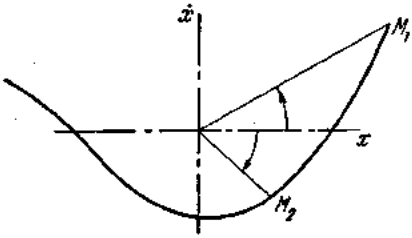

Рис. 1.

Так как в верхней полуплоскости $dx/dt=\dot{x}>0$, то изображающая точка в верхней полуплоскости перемещается в сторону возрастающих значений x, а в нижней полуплоскости $(\dot{x}<0)$ — в сторону убывающих значений x. Следовательно, радиус-вектор изображающей точки в случае фазовой траектории, показанной на рис. 1, в первом квадранте вращается против часовой стрелки, а в четвертом — по часовой стрелке.

Если движение, описываемое уравнением (1.1), периодическое, то соответствующая ему фазовая траектория будет замкнутой. Придавая параметру C в формуле (1.2) всевозможные действительные значения, мы получим всю совокупность возможных движений, описываемых уравнением (1.1).

2. Линейные системы. Напомним теперь некоторые свойства линейных уравнений второго порядка. Рассмотрим сначала уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x}+\omega^2x=0. \tag{1.3}$$

Выпишем для него интеграл (1.2), который будем называть интегралом энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\omega^2x^2}{2}=C. \tag{1.4}$$

Здесь C носит название постоянной энергии.

Так как уравнение (1.3) допускает группу преобразований сдвига $t'=t+h$, то без ограничений общности можно принять, что либо $x(0)=0$, либо $\dot{x}(0)=0$ *). Поэтому в качестве постоянной энергии будем принимать либо начальное значение кинетической энергии $C=T(0)=\frac{1}{2}\dot{x}^2(0)$, либо начальное значение потенциальной энергии $C=\Pi(0)=\frac{\omega^2x^2(0)}{2}$. Разрешая (1.4), относительно $\dot{x}$, получим

$$\dot{x}=\pm\sqrt{2C-F(x)}, \tag{1.4'}$$

где

$$F(x)=2\int\omega^2x\,dx=\omega^2x^2.$$

Рассмотрим фазовую плоскость уравнения (1.3). Фазовые траектории этого уравнения определяются из интеграла энергии. Как уже указывалось, они образуют некоторое однопараметрическое семейство кривых, зависящих от постоянной C. В плоскости (F, x) начертим сначала кривую $F=F(x)$. Проведем затем прямую $F=2C$, разность $2C-F(x)$ будет равна $\dot{x}^2$. Порядок построения этих кривых ясен из рис. 2. Легко убедиться в том, что фазовые траектории целиком заполняют плоскость $(x, y=\dot{x})$ — каждой паре значений x и y отвечает единственное значение постоянной энергии C.

Рис. 2.

Мы видим, что все фазовые траектории — замкнутые кривые. Это значит, что все решения уравнения (1.3) периодические. Поясним еще раз это обстоятельство. Двигаясь вдоль фазовой траектории, изображающая точка через некоторое время снова вернется в исходное состояние $x=x_0$, $\dot{x}=y_0$. Поскольку уравнение (1.3) не содержит времени, то условия $x=x_0$, $\dot{x}=y_0$ будут порождать то же движение, которое только что закончилось в этой точке. Так как изображающая точка в верхней

*) Последнее означает, что любое движение с заданной энергией C, описываемое уравнением (1.3), можно получить из найденного простой заменой $t\to t+h$, где h — некоторая постоянная.

полуплоскости движется (при изменении t) в сторону возрастающих значений переменного x, а в нижней — в сторону убывающих x, то вдоль фазовой траектории изображающая точка движется в направлении, указанном стрелкой (см. рис. 2).

Для данного значения постоянной энергии C действительные ветви кривой (1.4) существуют только для тех x, для которых $F(x)>2C$. Точка $x=\dot{x}=0$ определяет положение равновесия. В самом деле, поскольку при $x=0$ ускорение $\ddot{x}=0$ также равно нулю, то точка, имеющая скорость, равную нулю, и занимающая в некоторый момент положение $x=0$, будет оставаться всегда в этом положении.

Точка $x=\dot{x}=0$ будет особой точкой для уравнения (1.3), поскольку в ней не определено значение касательной к фазовой траектории

$$\frac{d\dot{x}}{dx}=-\frac{\omega^2 x}{\dot{x}}.$$

Особая точка, в любой достаточно малой окрестности которой все фазовые траектории замкнуты, называется центром, следовательно, точка $x=\dot{x}=0$ является особой точкой типа центр.

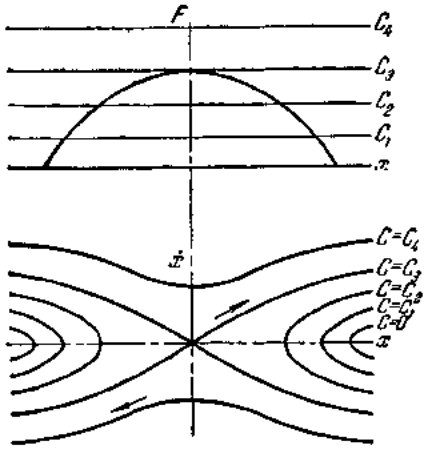

Рис. 3.

Из определения следует, что всегда можно задать начальное положение изображающей точки (не совпадающей с центром) так, чтобы в любой момент времени эта точка осталась бы в заданной окрестности центра. Поэтому центр является устойчивой особой точкой.

Если в уравнении (1.3) мы изменим знак перед вторым членом, то это приведет к изменению знака функции $F(x)$. Фазовая плоскость для этого случая изображена на рис. 3. Мы видим, что все траектории будут незамкнутыми, т. е. соответствующие им движения — апериодические. Точка $x=\dot{x}=0$ также будет особой точкой уравнения (1.3) и будет определять положение равновесия. Особая точка, в окрестности которой фазовые траектории ведут себя подобно тому, как это показано на рис. 3, называется седлом. Фазовые траектории, отвечающие значению $C=C_3$, проходят через начало координат (через сед-

ловую точку). Они образуют кривую, называемую сепаратрисой (от французского слова séparer — разделять). Ветви сепаратрисы отделяют фазовые траектории, пересекающие ось абсцисс, от области, занятой фазовыми траекториями, которые ось абсцисс не пересекают. Изображающая точка, не лежащая на сепаратрисе и начальное положение которой сколь угодно близко к особой точке типа седла, за достаточно большой промежуток времени всегда выйдет из любой окрестности этой точки. Поэтому седло является неустойчивой особой точкой. Итак, в зависимости от знака перед $\omega^2 x$ уравнение

$$\ddot{x} \pm \omega^2 x = 0 \tag{1.5}$$

имеет либо замкнутые фазовые траектории (либрационные или периодические движения), либо неограниченные (апериодические).

Разумеется, этот результат можно получить непосредственно, поскольку решение уравнения (1.5) выписывается в явном виде

$$x = A \cos(\omega t + h)$$

в случае, если перед вторым слагаемым стоит знак плюс, или

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

в случае знака минус. Отсюда для колебательных движений период $T = 2\pi/\omega$, т. е. он определяется только интенсивностью возвращающей силы ω и не зависит от энергии системы.

Таким образом, амплитуда — максимальное отклонение от положения равновесия и период колебаний в линейных системах друг от друга не зависит. Как следует из (1.4), максимальное отклонение от положения равновесия определяется только постоянной энергии (при заданном ω). В самом деле, максимальное отклонение изображающей точки от положения равновесия будет при $\dot{x} = 0$. Следовательно,

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2C}{\omega^2}}.$$

Таким образом, период колебаний T и максимальное отклонение (амплитуда) не связаны между собой. Такое свойство линейных колебательных систем (независимость периода от энергии) называется изохронностью.

Напомним еще о характере вынужденных колебаний линейного осциллятора. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu \cos \sigma t, \tag{1.6}$$

общее решение которого имеет вид

$$x = \frac{\mu}{\omega^2 - \sigma^2} \cos \sigma t + A \cos(\omega t + h). \tag{1.6'}$$

Отсюда следует, что при $\sigma \to \omega$ для любого фиксированного значения времени t стационарное решение (1.6′) стремится к бесконечности. Это значит, что при $\sigma=\omega$ решений вида (1.6′) уравнение (1.6) не допускает. Известно, что в этом случае решение уравнения (1.6) содержит слагаемое

$$\tilde{x} = \frac{\mu t}{2\sigma} \sin \sigma t$$

и, следовательно, будет неограниченно возрастать при $t \to \infty$.

3. Фазовая плоскость уравнения Дюффинга. Рассмотрим теперь простейшее нелинейное уравнение — так называемое уравнение Дюффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0. \qquad (1.7)$$

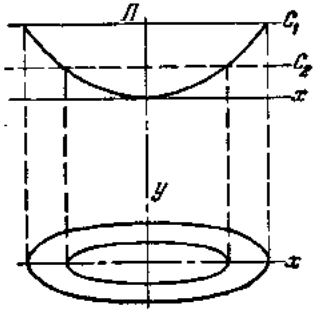

Рис. 4.

Изучим структуру его фазовой плоскости. Интеграл энергии для уравнения (1.7) имеет вид

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \Pi = C,$$

где П — потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\mu x^4}{4}.$$

Следовательно,

$$x = \pm \sqrt{2(C - \Pi)}.$$

Таким образом, фазовая траектория уравнения (1.7) состоит из двух ветвей, причем действительные участки ветвей будут существовать только для тех значений x, для которых $\Pi < C$. Пусть $\mu > 0$ и $\omega^2 > 0$. Для этого случая фазовая плоскость изображена на рис. 4. Графическое построение нам показывает, что все фазовые траектории замкнуты, т. е. все решения уравнения (1.7) периодические. Таким образом, фазовая плоскость (1.7) будет идентична фазовой плоскости линейного осциллятора. Однако, как мы увидим ниже, колебания, описываемые уравнением (1.7), обладают одним свойством, качественно отличающим эти движения от линейных колебаний: период движений, изображенных на рис. 4, зависит от амплитуды.

Если $\mu < 0$, то фазовая плоскость перестает быть похожей на фазовую плоскость линейного осциллятора. Она изображена на рис. 5. Мы видим, что малым энергиям системы соответствуют периодические движения в окрестности положения равновесия и движение в этом случае качественно напоминает гармонические колебания. Этого можно было ожидать заранее, поскольку для малых отклонений роль слагаемого μx^3 мала.

При увеличении начальной энергии системы, замкнутая кривая в фазовой плоскости все больше будет отличаться от эллипса. Существует критическое значение энергии C^* такое, что для любой начальной энергии $C>C^*$ в системе, которая описывается уравнением (1.7), не могут существовать периодические движения. Значение C^* нетрудно вычислить. Оно равно максимуму П. Этот максимум достигается при $x=\pm\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ и равен $C^*=\frac{\omega^4}{4|\mu|}$. Если $C>C^*$, то движения становятся неограниченными: $|x|\to\infty$ при $t\to\infty$. Как это видно из чертежа, неограниченные движения могут существовать также и при значениях C, меньших критического. В самом деле, для любого $C<C^*$ можно указать такое x, что разность $C-\Pi(x)$ будет положительной. Но этим движениям при $\dot{x}=0$ соответствуют большие начальные отклонения x_0, т. е. поле, напряженность которого равна $\omega^2x-|\mu|x^3$, выталкивает точку, если она находится достаточно далеко от начала координат.

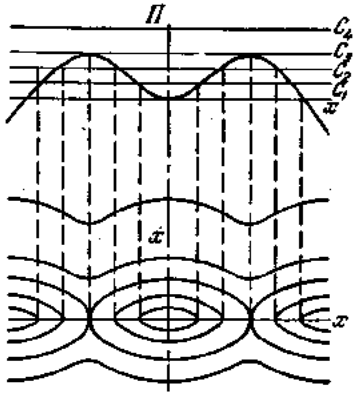

Рис. 5.

Значению $C=C^*$ соответствует фазовая траектория, которая является сепаратрисой. Сепаратриса, в частности, отделяет область начальных состояний, которым соответствуют периодические движения, от области начальных условий, которым соответствуют неограниченные движения.

Сепаратриса пересекает ось Ox, точка пересечения сепаратрисы с осью абсцисс также является положением равновесия ($\dot{x}=0$ и $\ddot{x}=0$). Как это видно из чертежа, эта точка является седлом, т. е. в ее окрестности система, описываемая нелинейным уравнением (1.7), ведет себя, как линейный осциллятор, у которого изменен знак внешней силы.

Рассмотрим еще одно видоизменение уравнения Дюффинга

$$\ddot{x}-\omega^2x+\mu x^3=0, \tag{1.8}$$

где $\mu>0$, а ω^2 по-прежнему положительно. Фазовая плоскость этого уравнения изображена на рис. 6.

Мы видим, что в этом случае фазовая плоскость содержит два положения устойчивого равновесия — это точки $O_1\left(-\frac{\omega}{\sqrt{\mu}},0\right)$

и $O_2\left(\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}, 0\right)$, в окрестности которых фазовые траектории имеют форму, близкую к эллипсу. Кроме того, на фазовой плоскости есть еще одно положение равновесия. Это начало координат. Точка O определяет неустойчивое положение равновесия. Действительно, изображающая точка, которая в начальный момент находится сколь угодно близко к началу координат, с течением времени удалится от начала координат на конечное расстояние. Пусть, например, изображающая точка в начальный момент имеет координаты $(0, \delta)$. Эта точка будет двигаться вдоль фазовой траектории, и ее расстояние до начала координат будет превосходить в отдельные отрезки времени число $\sqrt{\frac{2\omega}{\mu}}$, как бы мало δ ни было. Очевидно, что такое движение неустойчиво. Фазовая траектория, которая проходит через начало координат является сепаратрисой. В этом случае она отделяет одну область периодических движений от другой области движений, также периодических, так как система (1.8) допускает только периодические движения.

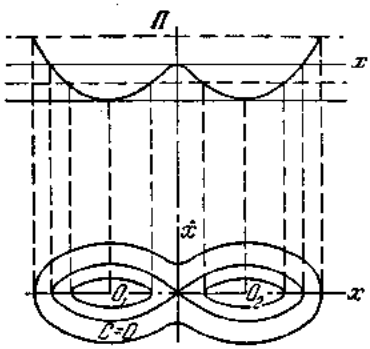

Рис. 6.

4. Пример периодической фазовой плоскости. В заключение рассмотрим еще один пример

$$\ddot{x}+\sin x=0. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) описывает движение математического маятника. Интеграл энергии уравнения (1.9) можно записать так:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2=C-\Pi,$$

где

$$\Pi=1-\cos x.$$

Фазовая плоскость уравнения (1.9), изображенная на рис. 7, в этом случае будет иметь периодическую структуру. В окрестностях точек $x_j=2\pi j$ $(j=0\pm1, \pm2, \ldots)$ движения будут периодическими. Через точки $x_k=k\pi$ $(k=\pm1, \pm3, \ldots)$ проходит сепаратриса, которая отделяет области периодических движений от областей неограниченных движений.

Фазовой плоскостью рассмотренного типа будет, очевидно, обладать любая колебательная система, которая описывается

уравнением вида

$$\ddot{x}+f(x)=0,$$

где $f(x)$ — периодическая функция x периода T и такая, что

$$\bar{f}=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=0.$$

Рассмотренных примеров достаточно, чтобы убедиться в огромном разнообразии возможных типов движений, описываемых нелинейными уравнениями.

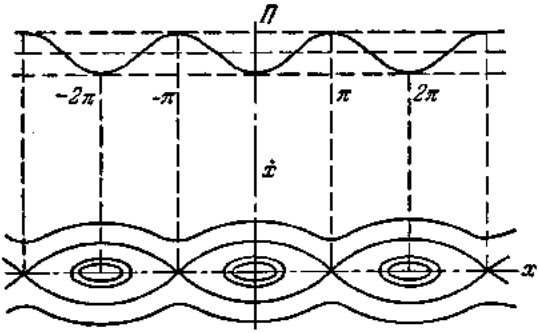

Рис. 7.

Примечание. Мы рассмотрели метод фазовой плоскости на примерах линейного уравнения и уравнения Дюффинга. Этот метод применим при исследовании широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка, включая уравнения с разрывными правыми частями. В самом деле, все рассуждения этого параграфа могут быть проведены для уравнения

$$\ddot{x}+f(x)=0$$

при единственном условии существования интеграла

$$\Pi=\int_0^x f(x)\,dx.$$

§ 2. Дальнейшее изучение уравнения Дюффинга

В этом параграфе мы продолжим изучение уравнения Дюффинга. Запишем его в виде

$$\ddot{x}+\omega^2x-\mu x^3=0. \tag{2.1}$$

В отличие от предыдущего параграфа, где изучение проводилось качественными методами, в этом параграфе установим некоторые количественные закономерности. Мы воспользуемся при этом тем обстоятельством, что интеграл уравнения (2.1) можно записать в эллиптических функциях.

1. Некоторые сведения из теории эллиптических функций. Выпишем некоторые вспомогательные формулы из теории эллиптических функций Якоби.

а) Функция $z=\operatorname{sn}(u, k)$ (эллиптический синус) определяется так:

$$z=\operatorname{sn}(u, k)=\sin\varphi(k)=\sin\operatorname{am}u,$$

где амплитуда $\varphi=\operatorname{am}u$ определяется как обращение эллиптического интеграла

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}. \tag{2.2}$$

Здесь k — число, которое называется модулем эллиптической функции, $\sin\varphi$ — периодическая функция периода 2π. При изменении φ на 2π величина u изменяется на $T_u=\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$ и обратно: при изменении u на T_u амплитуда φ изменяется на 2π. Следовательно, $\operatorname{sn}(u, k)$ — периодическая функция u периода T_u. Величина

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} \tag{2.3}$$

называется полным эллиптическим интегралом первого рода. Так как

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}=\ldots,$$

то

$$T_u=4K(k). \tag{2.4}$$

б) Функция $z=\operatorname{cn}(u, k)$ — эллиптический косинус, определяется равенством

$$z=\operatorname{cn}(u, k)=\cos\varphi=\cos\operatorname{am}u.$$

в) Функция дельта амплитуды

$$z=\operatorname{dn}(u, k)=\Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\sqrt{1-k^2\sin\operatorname{am}u}.$$

Эллиптический синус, косинус и дельта амплитуды называются эллиптическими функциями Якоби.

г) Связь между функциями Якоби

$$\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{cn}^2 u=1, \quad \operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn}^2 u=1. \tag{2.5}$$

д) Формулы дифференцирования

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{du}\operatorname{sn} u=\operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u, \quad \frac{d}{du}\operatorname{dn} u=-k^2\operatorname{sn} u\operatorname{cn} u,\\ &\frac{d}{du}\operatorname{cn} u=-\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

2. Выражение общего интеграла уравнения Дюффинга. Используя выписанные формулы, покажем, что общий интеграл уравнения (2.1) можно представить в виде

$$x=C\operatorname{sn}[\sigma(t+h), \ k]. \tag{2.7}$$

В это выражение входят четыре постоянные C, σ, h и k. Одна из постоянных, которая входит в общий интеграл этого уравнения, должна быть аддитивной. В самом деле, если функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению, то, каково бы ни было число g, функция $x(t+g)$ также является решением. В выражении (2.7) аддитивную постоянную мы обозначили буквой h. Три другие постоянные определяются двумя числами ω и μ. Это значит, что они должны быть связаны двумя соотношениями. Следовательно, в их определении имеется еще один произвол. Итак, в выражении (2.7) имеются лишь две постоянные, которые могут быть выбраны по произволу, причем одна из них аддитивная постоянная h.

Вычислим теперь $\dot{x}$ и $\ddot{x}$:

$$\frac{dx}{dt}=C\sigma\operatorname{cn} u\operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-C\sigma^2(\operatorname{sn} u\operatorname{dn}^2 u+k^2\operatorname{sn} u\operatorname{cn}^2 u).$$

Используя (2.5), преобразуем полученное выражение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-C\sigma^2[(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)\operatorname{sn} u+k^2(1-\operatorname{sn}^2 u)\operatorname{sn} u]=$$
$$=-C\sigma^2(1+k^2)\operatorname{sn} u+2C\sigma^2k^2\operatorname{sn}^3 u.$$

Наконец, вспоминая, что

$$C\operatorname{sn} u=x,$$

получим окончательно

$$\frac{d^2x^2}{dt^2}+\sigma^2(1+k^2)x-\frac{2\sigma^2k^2}{C^2}x^3=0. \tag{2.8}$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (2.1), мы видим, что его решение можно представить в форме (2.7), если параметры σ, C и k подчинить двум условиям

$$\sigma^2(1+k^2)=\omega^2, \tag{2.9}$$

$$\frac{2\sigma^2k^2}{C^2}=\mu. \tag{2.10}$$

Таким образом, мы показали, что общий интеграл уравнения (2.1) имеет форму (2.7), если только параметры C, σ и k удовлетворяют соотношениям (2.9) и (2.10).

Постоянная h занимает особое место среди произвольных постоянных. В самом деле, предположим, что мы нашли некоторое частное решение уравнения (2.1), зависящее от одной произвольной постоянной

$$x=X(C,\ t);$$

тогда мы сразу можем выписать общее решение этого уравнения

$$x=X(C,\ t+h).$$

Таким образом, в случае систем, параметры которых не зависят от времени, нам достаточно изучить только некоторый однопараметрический класс частных решений. Пользуясь этим обстоятельством, рассмотрим решение уравнения (2.1) вида

$$x=C\,\mathrm{sn}(\sigma t,\ k).$$

По аналогии с линейными системами числа C и σ будем называть «амплитудой» и «частотой». Так как $\sigma t=u$, то при $t=0$, $u=0$ и, следовательно,

$$x(0)=0.$$

Обозначим $\dot{x}(0)=\lambda$, где λ — произвольное число. И так как

$$\mathrm{cn}(0)=\mathrm{dn}(0)=1,$$

то получим

$$\dot{x}(0)=\lambda=\sigma C. \tag{2.11}$$

Соотношение (2.11) устанавливает зависимость «амплитуды» C и «частоты» σ от начальной энергии $T=\dot{x}_0^2/2$. Соотношения (2.9), (2.10) и (2.11) позволяют определить параметры σ, k и C.

3. Формула для периода. Для того чтобы нагляднее представить физический смысл изучаемого явления и роль различных параметров, удобно перейти к безразмерным переменным. Для этого надо прежде всего выбрать определяющие масштабы. В качестве таких величин можно выбрать, например, начальную энергию и отклонение от положения равновесия. Тогда весь

процесс будет определяться только характеристиками силового поля, т. е. числами ω и μ. Однако такой выбор масштабов неудобен, так как, варьируя параметры ω и μ, мы будем все время получать различные фазовые плоскости. Поэтому в качестве определяющих масштабов удобнее выбрать сами величины ω и μ. Пусть безразмерное отклонение ξ и безразмерное время τ определяется равенствами

$$x = \frac{\omega}{\sqrt{\mu}}\xi, \qquad t = \frac{\tau}{\omega}.$$

В этих переменных уравнение (2.1) будет иметь вид

$$\ddot{\xi} + \xi - \xi^3 = 0. \tag{2.12}$$

Уравнения для определения σ, k и C будут теперь такими:

$$\sigma^2(1 + k^2) = 1, \tag{2.13}$$

$$2\frac{\sigma^2 k^2}{C^2} = 1, \tag{2.14}$$

$$\sigma C = l, \tag{2.15}$$

где $l = \frac{\lambda\sqrt{\mu}}{\omega^2}$. Отсюда видно, что характер процесса определяется только одной безразмерной величиной — безразмерной энергией l^2. Найдем зависимость периода колебаний T от этой величины. Модуль эллиптической функции k также определяется только числом l. Сначала найдем эту связь. Из (2.14) и (2.15) находим

$$k^2 = \frac{l^2}{2\sigma^4}.$$

Подставляя это значение k в (2.13), находим

$$\sigma^4 - \sigma^2 + \frac{l^2}{2} = 0,$$

откуда

$$\sigma^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2l^2}}{2}.$$

В этом выражении следует выбирать определенным образом знак перед корнем. Выбираем знак $+$, поскольку при $l \to 0$ (т. е. $\dot{x}(0) \to 0$ или $\mu \to 0$, или $\omega \to \infty$) задача должна переходить в линейную *), т. е.

$$\lim_{l \to 0} \sigma(l) = 1.$$

*) Используя периодичность эллиптических функций, нетрудно показать, что решение, которое соответствует тому случаю, когда перед корнем взят знак — (минус), получается из исследуемого сдвигом на период T_u.

Подставляя это значение σ в выражение для k^2, окончательно получаем

$$k^2 = \frac{2l^2}{(1+\sqrt{1-2l^2})^2}. \tag{2.16}$$

Теперь мы можем определить зависимость периода от начальной энергии. На основании формулы (2.3) получим

$$T_u = 4\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{2l^2}{(1+\sqrt{1-2l^2})}\sin^2\varphi}}. \tag{2.17}$$

Из формулы (2.17) легко найти период по времени T_t, так как в нашем случае $u=\sigma t$, т. е. $T_t = \frac{1}{\sigma}T_u$:

$$T_t = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-2l^2}}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{2l^2\sin^2\varphi}{(1+\sqrt{1-2l^2})^2}}}.$$

Формула (2.18) содержит основной результат данного параграфа — она в явном виде дает зависимость периода колебаний от начальной энергии l^2, т. е. дает количественное выражение одному из основных свойств нелинейных колебаний — его неизохронности. Зависимость $T_t(l)$ приведена на рис. 8. При $\mu=0$ мы имеем линейную задачу и безразмерный период колебаний равен 2π. Таким образом,

$$\lim_{l\to 0} T = 2\pi.$$

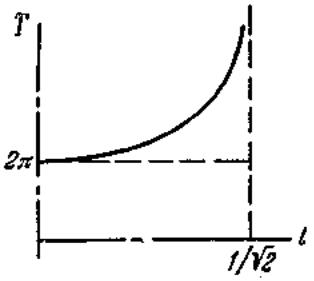

Рис. 8.

При $l \to 1/\sqrt{2}$ период T_t стремится к бесконечности. Маятник, который описывается уравнением (2.12), обладает тем свойством, что при некотором значении начальной энергии движение изображающей точки в фазовой плоскости происходит по сепаратрисе. Как было показано в предыдущем параграфе, это критическое значение энергии достигается для уравнения (1.7) при $x = \pm\omega/\sqrt{\mu}$ и равно $\omega^4/4|\mu|$. В нашем случае $\omega=1$, $\mu=-1$ и критическое значение энергии $C=l^2/2$. Отсюда $l=1/\sqrt{2}$. Таким образом, попутно мы установили, что движение по сепаратрисе, если его рассматривать как колебательное, имеет бесконечный период.

В предыдущем параграфе качественными методами мы установили, что уравнение Дюффинга, помимо периодических решений, допускает также решения апериодические. Характер колебаний определяется только начальной энергией. Если начальная энергия меньше C^*, то процесс, описываемый уравнением, носит колебательный характер, в противном случае — апериодический. Таким образом, уже качественное рассмотрение позволило нам установить отсутствие изохронности колебательного процесса, описываемого уравнением Дюффинга. Теперь мы установили характер этой закономерности и до конца решили вопрос об этом важном свойстве нелинейных колебаний, описываемых уравнением Дюффинга.

Мы видим, что существуют такие нелинейные системы, у которых характер движения очень напоминает гармонические колебания. Однако эти колебания оказались неизохронными: с изменением амплитуды изменилась и частота. Мы обнаружили также, что существуют движения и качественно непохожие на линейные колебания.

Существует и еще целый ряд явлений, в которых проявляется качественное различие линейных и нелинейных колебаний. Например, поведение при резонансе. Даже само понятие резонанса в нелинейных системах, строго говоря, не имеет смысла. В самом деле, в линейных системах резонансом называют явления, возникающие в линейной системе под действием внешней периодической силы, частота которой совпадает с частотой свободных колебаний системы. В условиях резонанса амплитуда колебаний линейной системы непрерывно возрастает. Таким образом, внешняя возбуждающая сила в этих условиях непрерывно вносит энергию в линейную систему. В нелинейной системе с изменением амплитуды немедленно изменяется частота собственных колебаний. Следовательно, «резонансная» ситуация, если она имела место, немедленно разрушится. Эти рассуждения наводят на мысль о том, что могут существовать нелинейные системы, у которых для любых частот возмущающих воздействий могут существовать установившиеся колебательные режимы конечной амплитуды. Уже в следующей главе мы убедимся в справедливости подобного прогноза и изучим методы, позволяющие определить резонансные режимы в нелинейных системах.

§ 3. Примеры колебаний систем с переменными параметрами

1. Предварительные замечания. Рассмотрим теперь несколько примеров колебаний систем, параметры которых меняются со временем. Мы будем рассматривать только простейший случай колебаний системы одной степени свободы, которые описываются

линейным уравнением вида

$$\ddot{x}+f(t)x=0, \tag{3.1}$$

где $f(t)$ — некоторая заданная функция времени. Можно говорить, что уравнение (3.1) описывает малые колебания пружинного маятника, жесткость которого изменяется со временем.

Пусть $f(t) \geqslant 0$ для любого $t>0$; тогда, рассуждая по аналогии с линейными колебаниями, можно было бы ввести понятие мгновенной частоты

$$\omega(t)=\sqrt{f(t)} \tag{3.2}$$

и утверждать, что колебания нашего маятника представляют собой в каждый момент времени гармонические колебания и происходят с мгновенной частотой (3.2). Такого типа рассуждения иногда встречаются при решении инженерных задач. Можно указать целый ряд задач, когда такой упрощенный подход, именуемый иногда принципом замораживания коэффициентов, дает результаты, точность которых вполне удовлетворительна с практической точки зрения. Однако в общем случае судить о свойствах системы с переменными параметрами по свойствам системы с замороженными коэффициентами нельзя. Это может привести не только к количественным, но и к грубым качественным ошибкам.

2. Случай, когда возвращающая сила стремится к нулю. Рассмотрим маятник, колеблющийся под действием возвращающей силы, обратно пропорциональной квадрату времени

$$\ddot{x}+\frac{x}{t^2}=0. \tag{3.3}$$

Разыскивая решение в виде $x=t^{\lambda}$ и подставляя это выражение в (3.3), получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2-\lambda+1=0,$$

откуда

$$\lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Таким образом, линейно независимые решения уравнения (3.3) имеют вид

$$x_1=C_1\exp\left\{\ln t\left[\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right]\right\},$$
$$x_2=C_2\exp\left\{\ln t\left[\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right]\right\}$$

или, переходя к действительным величинам, получим

$$\left.\begin{aligned} x_1^* &= A_1\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right), \\ x_2^* &= A_2\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln t\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

где A_1, A_2 и C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, колебательный процесс, описываемый уравнением (3.3), можно представить как суперпозицию двух колебательных процессов, определяемых формулами (3.4). Характер колебательного процесса, который описывается уравнением (3.3), изображен на рис. 9.

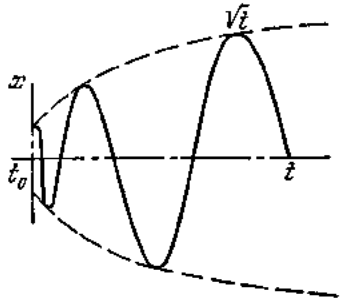

Рис. 9.

Этот пример наглядно показывает, насколько далеко от истины нас может увести рассуждение «по аналогии с системами, имеющими постоянные параметры». Несмотря на то, что возвращающая сила маятника всегда отрицательна, т. е. всегда направлена против отклонения x в сторону положения равновесия, амплитуда колебаний маятника (величина, пропорциональная $\sqrt{t}$) неограниченно возрастает.

Если мы введем понятие мгновенной частоты

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\ln t}{2t}, \tag{3.5}$$

то увидим, что частота ω с течением времени уменьшается и стремится к нулю при $t \to \infty$, а амплитуда неограниченно увеличивается.

3. Колебания с диссипативными силами. Предположим теперь, что на маятник (3.3) действует диссипативная сила, пропорциональная $1/t$. Уравнение, описывающее движение маятника будет теперь таким:

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \frac{x}{t^2} = 0. \tag{3.6}$$

Разыскивая его решение снова в виде $x = t^\lambda$, найдем, что λ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

Таким образом, общее решение уравнения (3.6) можно представить в виде

$$x = A_1 \cos \ln t + A \sin \ln t. \tag{3.7}$$

Характер колебательного процесса для этого случая изображен на рис. 10. Мы видим, что, несмотря на действие диссипативных сил, колебание маятника происходит с постоянной амплитудой, а не затухает, как было бы в том случае, если бы параметры системы были бы постоянны. «Мгновенная» частота колебаний (3.7), точно так же как и в предыдущем случае, стремится к нулю при неограниченном возрастании времени.

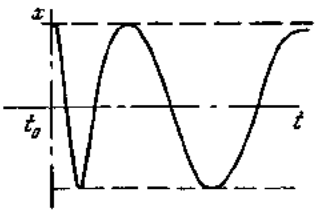

Рис. 10.

Можно привести примеры систем, колебательное движение которых происходит при наличии диссипативных сил и тем не менее амплитуда колебаний неограниченно растет со временем. К числу таких примеров относятся колебания неуправляемой оперенной ракеты, движущейся вертикально вверх с постоянной скоростью. Наличие оперения создает возвращающий аэродинамический момент. Таким образом, такая ракета, как говорят в динамике полета, имеет запас статической устойчивости. Кроме восстанавливающего аэродинамического момента, на ракету действует демпфирующий аэродинамический момент. Несмотря на эти обстоятельства, движение такой ракеты неустойчиво: амплитуда колебаний неограниченно возрастает со временем. Причина состоит в том, что с увеличением высоты полета плотность воздуха ρ экспоненциально убывает, а следовательно, неограниченно убывают и оба момента аэродинамических сил. Разумеется, в подобной задаче метод «замораживания» коэффициентов никакой полезной информации о поведении ракеты дать не может.

В следующем параграфе мы приведем некоторые условия, которые надо наложить на параметры системы, достаточные для того, чтобы амплитуда колебаний маятника, параметры которого изменяются со временем, были ограничены во все моменты времени.

4. Случай, когда возвращающая сила ограничена. Мы рассмотрели колебания маятника, у которого возвращающая сила с течением времени стремится к нулю, и установили, что это обстоятельство может служить причиной неустойчивости (неограниченного возрастания амплитуды). Однако неограниченное возрастание амплитуды может иметь место и для колебаний такого

маятника, у которого интенсивность возвращающей силы ограничена снизу для любого момента времени.

Рассмотрим пример маятника, колебание которого описывается уравнением

$$\ddot{x}+(1+\varphi(t))x=0. \tag{3.8}$$

Поставим вопрос о том, какие условия надо наложить на функцию $\varphi(t)$, чтобы решение уравнения (3.8) было ограничено.

Кажется, что для этого достаточно, например, потребовать, чтобы

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0. \tag{3.9}$$

Однако это предположение неверно. Более того, если одновременно с условием (3.9) выполнено еще условие

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d^k\varphi}{dt^k}=0 \qquad (k\geqslant 1), \tag{3.10}$$

то и это не является гарантией ограниченности решения уравнения (3.8).

Предположим, что $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi=3g\sin t-\dot{g}\cos t-g^2\cos^2 t, \tag{3.11}$$

где $g(t)$ — произвольная функция. Нетрудно убедиться прямым вычислением, что функция

$$x=\exp\left\{\int_0^t g(\tau)\cos\tau\,d\tau\right\}\cos t \tag{3.12}$$

является решением уравнения (3.8), если φ имеет вид (3.11). Колебательный процесс (3.12) можно записать в виде

$$x=A(t)\cos t,$$

где

$$A=\exp\int_0^t g(\tau)\cos\tau\,d\tau.$$

Величину $A(t)$ будем называть амплитудой.

Примем теперь, что

$$g(t)=\frac{\cos t}{t}.$$

Тогда амплитуда имеет вид

$$A=\exp\int_0^t\frac{\cos^2\tau}{\tau}\,d\tau, \tag{3.13}$$

Но величина интеграла в выражении (3.13) неограниченно растет вместе с верхним пределом.

Примечание. Заметим, что в рассмотренном примере не только сама функция $\varphi \to 0$ при $t \to \infty$, но и любая ее производная стремится к нулю при неограниченном возрастании времени.

Можно привести еще целый ряд подобных примеров. Особенно интересен пример математического маятника, у которого точка подвеса колеблется по периодическому закону. Движение этого маятника описывается уравнением

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \cos pt)x = 0, \tag{3.14}$$

где $\omega = \text{const}$, p — частота, а ε — амплитуда колебаний точки подвеса маятника.

Уравнение (3.14) называется уравнением Матье. Его теория значительно сложнее теории тех уравнений, которые были рассмотрены в этом параграфе. Здесь мы не можем рассмотреть уравнение Матье и за всеми подробностями отсылаем читателя к тем руководствам, где изложена теория этого уравнения *). Здесь мы укажем только на одно из замечательных свойств колебаний этого маятника.

При определенных соотношениях между величинами ε, p и ω колебания маятника (3.14) устойчивы. Они происходят с ограниченной амплитудой. Однако при фиксированном ω существует счетное число областей в плоскости (ε, p), каждая точка которых определяет такое соотношение параметров маятника, при котором его колебания неустойчивы, т. е. происходят с неограниченно возрастающей амплитудой.

§ 4. О некоторых достаточных условиях ограниченности колебаний

1. Критерий устойчивости для случая, когда возвращающая сила изменяется монотонно. В предыдущем параграфе мы рассмотрели два примера неустойчивых колебаний маятников. Проблема устойчивости колебательных движений систем с переменными параметрами в общем случае очень сложна. До сих пор не существует условий, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения — необходимые и достаточные для устойчивости его нулевого решения. Результаты, которые здесь существуют, относятся только к некоторым специальным классам уравнений. Мы приведем два простых критерия, соответствую-

*) См., например, Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, Москва, 1952.

щих обоим типам уравнений, рассмотренным в предыдущем параграфе. Они являются только достаточными критериями. Несмотря на это, они представляются полезными с прикладной точки зрения.

Рассмотрим маятник, описываемый уравнением

$$\ddot{x}+g(t)\dot{x}+\omega^2(t)x=0, \tag{4.1}$$

и предположим, что функция $\omega(t)$ положительная и монотонно изменяющаяся.

В уравнении (4.1) сделаем замену независимого переменного

$$\tau=\int_0^t \omega(s)\,ds. \tag{4.2}$$

После замены (4.2) уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\left(\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{d\tau}+\frac{g}{\omega}\right)\frac{dx}{d\tau}+x=0. \tag{4.3}$$

Обозначим через

$$E=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+x^2\right]$$

энергию колебательного движения маятника (4.3) и вычислим ее производную в силу уравнения (4.3)

$$\frac{dE}{d\tau}=\frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}+x\frac{dx}{d\tau}=-\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\left[\frac{d\omega}{d\tau}+g\right]\frac{1}{\omega}. \tag{4.4}$$

Из равенства (4.4) видно, что для того, чтобы величина E не возрастала, достаточно, чтобы квадратная скобка в выражении (4.4) была не отрицательна, или

$$\frac{d\ln\omega}{d\tau}+\frac{g}{\omega}\geqslant 0. \tag{4.5}$$

Если величина E остается ограниченной, то и каждая из величин $dx/d\tau$ и $|x|$ остается ограниченной при $\tau\to\infty$. Так как τ — монотонная функция t, то это утверждение сохраняет силу и относительно переменной t.

Итак, возвращаясь к переменному t, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Для ограниченности решений уравнения* (4.1) *достаточно, чтобы для любого момента времени коэффициенты уравнения* (4.1) *удовлетворяли неравенству*

$$\frac{d\ln\omega}{dt}+g\geqslant 0. \tag{4.6}$$

Легко проверить, что коэффициенты уравнения (3.6) удовлетворяют этому условию. В самом деле, величины ω и g в этом уравнении такие:

$$g(t)=\frac{1}{t}; \qquad \omega(t)=\frac{1}{t}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\ln\omega}{dt}+g=0.$$

Точно так же легко показать, что колебательное движение оперенной ракеты, взлетающей вертикально вверх с постоянной скоростью, не удовлетворяет условию устойчивости (4.6).

2. Устойчивость колебаний ракеты. Плоские колебания оперенной ракеты около своего центра тяжести с определенной степенью точности можно схематизировать как колебание маятника, происходящее под действием двух аэродинамических моментов: восстанавливающего M_1 и демпфирующего M_2 (рис. 11). Момент M_1 всегда направлен так, что создаваемое им ускорение стремится вернуть ракету в положение равновесия, при котором ее ось симметрии совпадает с направлением скорости центра тяжести v:

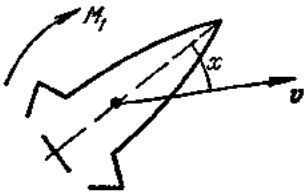

Рис. 11.

$$M_1=-k_1x. \tag{4.7}$$

Действие демпфирующего момента M_2 уменьшает скорость колебательного движения

$$M_2=-k_2\dot{x}. \tag{4.8}$$

Таким образом, малые колебания ракеты, центр тяжести которой движется прямолинейно, можно описать уравнением

$$J\ddot{x}=-k_2\dot{x}-k_1x. \tag{4.9}$$

Величина x в выражениях (4.7) и (4.9), характеризующая отклонение ракеты от ее положения равновесия, называется углом атаки. Коэффициенты k_1 и k_2 зависят от конструктивных параметров ракеты, ее скорости движения и линейным образом от плотности атмосферы ρ. (Заметим, что гипотеза прямолинейного движения центра тяжести ракеты оказывается справедливой в случае вертикального взлета ракеты.)

Условимся, кроме того, считать, что центр тяжести ракеты движется с постоянной скоростью. Тогда все параметры, кроме плотности атмосферы, оказываются постоянными, а плотность — экспоненциальной функцией высоты (а следовательно, и времени, поскольку скорость вертикального взлета постоянна). На

этом основании формулы (4.7) и (4.9) можно переписать в следующем виде:

$$M_1 = -Jb^2e^{-\alpha t}x, \qquad M_2 = -Jae^{-\alpha t}\dot{x},$$

где размерные величины a и b^2 считаются постоянными, J — момент инерции ракеты — также условимся считать величиной постоянной. Итак, в простейшей схематизации колебательного движения оперенной ракеты мы пришли к исследованию следующего дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + ae^{-\alpha t}\dot{x} + b^2e^{-\alpha t}x = 0.$$

Так как в данном случае

$$\omega = be^{-\frac{1}{2}\alpha t}, \qquad g = ae^{-\alpha t},$$

то левая часть неравенства (4.6) имеет в рассматриваемом случае следующий вид:

$$-\frac{1}{2}\alpha + ae^{-\alpha t}. \tag{4.10}$$

Начиная с некоторого момента времени $t^* = -\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha}{2a}$ выражение (4.10) всегда становится отрицательным. Таким образом, в этом случае достаточное условие устойчивости оказывается невыполненным.

3. Основная лемма. Рассмотрим теперь уравнение (3.8) и поставим вопрос о том, какие условия следует наложить на функцию $\varphi(t)$ для того, чтобы гарантировать ограниченность колебаний, описываемых этим уравнением. Докажем сначала для этого одну вспомогательную лемму, которая нам понадобится еще и в дальнейшем.

Лемма. *Пусть u и v — неотрицательные функции, а C — положительная постоянная, причем для любого $t \geqslant 0$ выполняется неравенство*

$$u \leqslant C + \int_0^t uv\,dt. \tag{4.11}$$

Тогда

$$u \leqslant C \exp \int_0^t v\,dt. \tag{4.12}$$

Для доказательства умножим неравенство (4.11) на v и перепишем его в следующем виде:

$$\frac{uv}{c + \int_0^t uv\,dt} \leqslant v$$

или

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(C+\int\limits_0^t uv\,dt\right)}{C+\int\limits_0^t uv\,dt}\leqslant v. \tag{4.13}$$

Умножая (4.13) на dt и интегрируя, получим

$$\ln\left(C+\int\limits_0^t uv\,dt\right)-\ln C\leqslant\int\limits_0^t v\,dt,$$

откуда

$$C+\int\limits_0^t uv\,dt\leqslant C\exp\left\{\int\limits_0^t v\,dt\right\}. \tag{4.14}$$

Согласно (4.11) мы только усилим неравенство (4.14), если его левую часть заменим функцией u. Итак, справедливость неравенства (4.12) доказана.

4. Критерий устойчивости для уравнения (3.8). Вернемся теперь к уравнению (3.8), считая $|\varphi|<1$. Умножим его на $\dot{x}$ и перепишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\dot{x}^2+x^2}{2}=-\varphi x\dot{x}. \tag{4.15}$$

Проинтегрируем уравнение (4.15):

$$\left.\frac{\dot{x}^2+x^2}{2}\right|_0^t=-\left.\frac{\varphi x^2}{2}\right|_0^t+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\dot{\varphi}x^2\,dt$$

или

$$\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}(1+\varphi)=C+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\dot{\varphi}x^2\,dt, \tag{4.16}$$

где

$$C=\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{x^2}{2}(1+\varphi)\right)_{t=0}>0.$$

Так как величина $\dot{x}^2$ всегда неотрицательна, то из (4.16) следует, что

$$\frac{x^2}{2}(1+\varphi)\leqslant C+\frac{1}{2}\int\limits_0^t|\dot{\varphi}|\,x^2\,dt. \tag{4.17}$$

Предположим, что $\varphi(t)\to 0$ при $t\to\infty$, тогда для достаточно большого значения t будет иметь место неравенство

$$1+\varphi\geqslant\frac{1}{2}.$$

Следовательно, мы только усилим неравенство (4.17), если перепишем его так:

$$\frac{x^2}{4} \leqslant C + \frac{4}{2} \int_0^t |\dot{\varphi}| \frac{x^2}{4}\, dt. \tag{4.18}$$

Если в неравенстве (4.18) мы положим $x^2/4 = u$, $2|\dot{\varphi}| = v$, то окажемся в условиях, когда может быть применена доказанная нами лемма, что дает

$$\frac{x^2}{4} \leqslant C \exp \int_0^t 2|\dot{\varphi}|\, dt.$$

Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема. *Для ограниченности решения уравнения* (3.8) *достаточно, чтобы интеграл*

$$\int_0^t |\dot{\varphi}|\, dt$$

сходился.

§ 5. Теорема Пуанкаре

1. Формулировка. Теорема Пуанкаре относится к числу основных результатов аналитической теории дифференциальных уравнений. Одновременно она имеет большое значение и для приложений, поскольку выясняет основные свойства уравнений в вариациях. В отдельных случаях она сама может являться источником эффективных вычислительных алгоритмов.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x,\ t,\ \varepsilon), \tag{5.1}$$

где x — вектор размерности n, t — скалярный аргумент — время, а ε — малый параметр. Предполагается, что функция f является аналитической функцией переменной x и параметра ε.

Для системы (5.1) поставим задачу Коши: определить функцию $x(t, \varepsilon)$, удовлетворяющую системе (5.1) и начальным условиям

$$x(t_0) = x_0. \tag{5.2}$$

Для того чтобы задача (5.2) для уравнения (5.1) имела смысл, нам нет необходимости требовать аналитичности по переменной t. Будем предполагать, что правая часть уравнения (5.1) удовлетворяет условиям, гарантирующим существование решения локальной задачи Коши. Например, пусть $f(x,\ t,\ \varepsilon)$ будет

удовлетворять условию Липшица по переменному x. Наряду с уравнением (5.1) будем рассматривать уравнение

$$\dot{z} = f(z, t, 0). \tag{5.3}$$

Уравнение (5.3) условимся называть порождающим. Для обоих уравнений будем рассматривать одну и ту же задачу Коши (5.2).

В уравнении (5.1) сделаем замену переменных

$$x = z + y.$$

Вектор y будет удовлетворять уравнению

$$\dot{y} = f(z+y,\ t,\ \varepsilon) - f(z,\ t,\ 0) \tag{5.4}$$

и нулевым начальным условиям

$$y(0) = 0. \tag{5.5}$$

Так как правая часть уравнения (5.4) — аналитическая функция переменных y и ε, то мы можем ее разложить в ряд Тейлора по этим переменным, считая их достаточно малыми по абсолютной величине. Это позволит нам переписать уравнение (5.4) в следующем виде:

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0 + B(y,\ \varepsilon,\ t). \tag{5.6}$$

Здесь $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ — квадратная матрица первых частных производных

$$A = \left\| \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_0 \right\|,$$

f^i и x^i — i-я компонента векторов f и x соответственно, $\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0$ — вектор (матрица-столбец) с компонентами $\left(\frac{\partial f^i}{\partial \varepsilon}\right)_0$, $B(y,\ \varepsilon,\ t)$ — совокупность членов более высокого порядка: разложение функции $B(y,\ \varepsilon,\ t)$ начинается со вторых степеней ее аргументов, $(F)_0$ обозначает, что значения функции $F(x,\ \varepsilon)$ вычислены при условии $x = z$, $\varepsilon = 0$.

Будем считать, что решение задачи Коши для порождающего уравнения известно. Тогда A и $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$ будут известными функциями времени.

Будем искать решение уравнения (5.6) в виде ряда

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \varepsilon^i. \tag{5.7}$$

Подставляя ряд (5.7) в уравнение (5.6) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим следующую систему уравнений для определения неизвестных функций y_i:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Ay_1 + D_1, \\ \dot{y}_2 &= Ay_2 + D_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_k &= Ay_k + D_k, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

В этих уравнениях $D_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0$ — известная функция времени. Функция D_2 содержит квадратичные члены разложения функции $B(y, \varepsilon, t)$ по y и ε, т. е. в нее входит только функция y_1 и не входят функции y_i для $i>1$. В самом деле, функцию $B(y, \varepsilon, t)$ можно представить в виде

$$B(y, \varepsilon, t) = B_{00}y^2 + B_{01}y\varepsilon + B_{11}\varepsilon^2 + \ldots$$

Подставляя в это выражение ряд (5.7), приведем его к виду

$$B(y, \varepsilon, t) = \varepsilon^2(B_{00}y_1^2 + B_{01}y_1 + B_{11}) + \varepsilon^3(\ldots) + \ldots$$

Очевидно, что и любая функция D_k зависит только от тех функций y_i, для которых $i<k$.

Таким образом, если решать последовательно уравнения (5.8), то функции D_k следует считать известными функциями времени. Функции y_i удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$y_i(t_0) = 0. \tag{5.9}$$

Таким образом, определение коэффициентов разложения решения $y(t)$, т. е. функций $y_i(t)$, сводится к последовательному решению задач Коши для системы (5.8).

Теперь мы можем сформулировать теорему Пуанкаре. Она состоит из двух утверждений:

I. *Если общий интеграл порождающей системы* (5.3) *известен, то решение системы* (5.8) *может быть найдено при помощи операций дифференцирования и взятия квадратур.*

II. *Решение уравнения* (5.1) — *аналитическая функция параметра* ε, *т. е. ряды* (5.7) *сходятся при достаточно малых по абсолютной величине значениях* ε *и, следовательно, представляют собой интегралы уравнения* (5.1), *разложенные по степеням параметра* ε.

Будем называть некоторый ряд формальным решением, если он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений. Этот ряд будем называть решением, если он сходится в некоторой

области значений параметра. Таким образом, первая часть теоремы формулирует некоторые суждения о структуре алгоритма построения формального решения. Вторая часть теоремы утверждает, что формальное решение (5.7) является решением.

2. Доказательство утверждения I. Докажем только первое из этих утверждений. Доказательство второго утверждения приводить не будем, так как оно достаточно громоздко *).

Пусть

$$z = F(t, C), \tag{5.9}$$

где C — произвольная постоянная (вектор размерности n) есть общий интеграл порождающего уравнения (5.3). Это значит, что функция F удовлетворяет уравнению (5.3)

$$\frac{dF}{dt} = f[F(t, C), t, 0] \tag{5.10}$$

при любом значении постоянной C. Через ξ_i обозначим вектор

$$\xi_i = \frac{\partial F(t, C)}{\partial C^i}, \tag{5.11}$$

где C^i — i-я компонента вектора C. Вычислим

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial C^i} = \frac{\partial}{\partial C^i}\frac{dF}{dt}.$$

Используем тождество (5.10)

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial C^i}\{f(F(t, C), t, 0)\} = \frac{\partial f}{\partial F}\frac{\partial F}{\partial C^i} = \frac{\partial f}{\partial F}\xi_i.$$

Здесь $\partial f/\partial F$ — квадратная матрица, причем очевидно, что

$$\frac{\partial f}{\partial F} = A.$$

Таким образом, вектор-функция ξ_i удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_i = A\xi_i.$$

Система уравнений

$$\dot{u} = Au \tag{5.12}$$

называется уравнениями в вариациях для системы (5.1) и представляет собой систему линейных уравнений с переменными коэффициентами. Никаких общих рецептов интегрирования таких уравнений нет. Однако уравнения в вариациях обладают одним

*) См., например, В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, изд. 2, Москва, 1950.

замечательным свойством, которое мы только что доказали. Это свойство можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма. *Если общий интеграл порождающего уравнения известен, то частные решения уравнений в вариациях могут быть выписаны в явном виде при помощи одной операции дифференцирования в соответствии с формулами* (5.11).

Итак, формулы (5.11) определяют систему фундаментальных решений уравнений в вариациях. Теперь решение задачи Коши (5.9) для системы уравнений (5.8) можно получить в квадратурах, используя метод вариации произвольных постоянных. Приведем эти вычисления. Система уравнений (5.8) имеет вид

$$\dot{y} = Ay + D, \tag{5.13}$$

где D — известная функция времени. Решение уравнения (5.13) будем искать в виде

$$y = Y\alpha, \tag{5.14}$$

где α — некоторый неизвестный вектор, а Y — матрица фундаментальных решений уравнений в вариациях

$$Y = \{\xi_i^j\},$$

где ξ_i^j — компонента вектора ξ_i, номер которой равен j. Таким образом,

$$\frac{dY}{dt} = AY. \tag{5.15}$$

Дифференцируя (5.14) и подставляя в (5.13), получим

$$Y\dot{\alpha} = D. \tag{5.16}$$

При выводе (5.16) мы использовали (5.15). Итак,

$$\dot{\alpha} = Y^{-1}D,$$

откуда окончательно получим

$$y = Y(t)\left\{\int_0^t Y^{-1}(\tau)\,D(\tau)\,d\tau + C^*\right\}.$$

Для того чтобы удовлетворить начальным условиям (5.9), произвольную постоянную C^* следует принять равной нулю. Итак,

$$y = \int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,D(\tau)\,d\tau. \tag{5.17}$$

Матрица $Y(t)Y^{-1}(\tau)$ называется матрицей Грина. Первая часть теоремы Пуанкаре доказана полностью, поскольку выражение (5.17) получено путем дифференцирования и взятия квадратур.

3. Замечание об аналитичности правых частей. Во всех рассуждениях, которые были приведены, основным предположением было предположение об аналитичности правых частей уравнения (5.1) по параметру ε и функции x.

Последнее предположение очень существенно. Теорема Пуанкаре перестает быть верной для уравнений (5.1), если параметр ε входит в ее правую часть неаналитически. Покажем это обстоятельство на примере. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}\dot{x} - \frac{x}{\varepsilon}$$

или

$$\varepsilon\ddot{x} = (\varepsilon + 1)\dot{x} - x. \tag{5.18}$$

Порождающее уравнение будет таким:

$$\dot{z} = z,$$

а его общий интеграл имеет вид

$$z = Ce^t. \tag{5.19}$$

Общий интеграл уравнения (5.18) легко выписать в явном виде

$$x = C_1 e^{t/\varepsilon} + C_2 e^t. \tag{5.20}$$

Мы видим, что функция (5.20) не может быть разложена в ряд по положительным степеням параметра ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Более того, решение (5.20) при $\varepsilon \to 0$ вообще не стремится к решению порождающего уравнения ни для каких t, отличных от нуля.

ГЛАВА II

МЕТОД ЛЯПУНОВА—ПУАНКАРЕ

Настоящая глава посвящена изложению основ классической теории периодических решений дифференциальных уравнений, правые части которых являются аналитическими функциями своих переменных. Эта теория возникла из работ Ляпунова и Пуанкаре в конце прошлого века и в последующие десятилетия получила дальнейшее развитие. В ней появились новые точки зрения, расширился круг изучаемых вопросов. Наряду с исследованиями теоретического характера продолжалась дальнейшая разработка методов эффективного построения периодических решений.

Начиная с двадцатых годов теория Ляпунова — Пуанкаре благодаря работам Андронова и Мандельштама находит широкое применение в теории колебаний. Большой вклад в дальнейшее развитие классической теории периодических решений сделали наши соотечественники. Здесь прежде всего следует назвать имена И. Г. Малкина и Г. В. Каменкова.

В настоящей главе мы рассматриваем только некоторые избранные вопросы, которые, как нам кажется, представляют наибольший интерес для приложений, причем основное внимание сосредоточено на изложении самих алгоритмов построения периодических решений.

§ 1. Система Ляпунова — случай одной степени свободы

1. Консервативные системы. В предыдущей главе мы рассмотрели несколько примеров консервативных систем с одной степенью свободы и убедились, что при известных условиях фазовые траектории в окрестности положения равновесия представляют собой замкнутые кривые, т. е. движения, которые они описывают, являются периодическими. Несмотря на то, что этот факт был продемонстрирован на частных примерах, он имеет вполне общий характер.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{z}+f(z)=0,$$

где функция $f(z)$ такова, что $f(0)=0$, а потенциальная энергия

$$\Pi = \int f(z)\,dz$$

в точке $z=0$ имеет изолированный минимум. Тогда из интеграла энергии мы находим

$$\dot{z} = \sqrt{2(C-\Pi)},$$

где C — постоянная энергии. Применяя метод фазовой плоскости, сразу убеждаемся, что траектории этой системы в достаточно малой окрестности положения равновесия замкнутые. В самом деле, функция $\Pi(z)$ имеет в окрестности точки $z=0$ вид, изображенный на рис. 12, где показана также структура фазовой плоскости этого уравнения. Таким образом, все решения в окрестности минимума потенциальной энергии периодические. Этот факт был получен при весьма общих предположениях о функции $f(z)$: она должна быть интегрируемой.

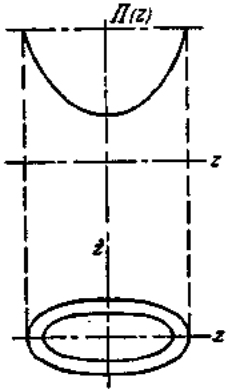

Рис. 12.

2. Система Ляпунова. В этом параграфе будет изучен класс систем, называемых системами Ляпунова. Они обладают многими свойствами консервативных систем, которые являются их весьма частным случаем. Так же как и консервативные системы, в окрестности положения равновесия при известных условиях они описывают периодические движения.

Для этих систем А. М. Ляпуновым разработан эффективный аналитический метод отыскания периодических движений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + X^*(\xi, \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + Y^*(\xi, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

где $X^*(\xi, \eta)$ и $Y^*(\xi, \eta)$ — аналитические функции своих переменных в окрестности точки $\xi=\eta=0$ и такие, что их разложение по степеням ξ и η начинается с членов, порядок которых не ниже второго:

$$\left.\begin{aligned} X^*(\xi, \eta) &= b_{20}\xi^2 + b_{02}\eta^2 + b_{11}\xi\eta + b_{30}\xi^3 + \ldots, \\ Y^*(\xi, \eta) &= d_{20}\xi^2 + d_{02}\eta^2 + d_{11}\xi\eta + d_{30}\xi^3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Систему (1.1) будем называть системой Ляпунова, если выполнены следующие два условия:

а) уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\gamma & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\gamma \end{vmatrix} = 0 \tag{1.3}$$

имеет чисто мнимые корни $\pm i\lambda$;

б) система (1.1) допускает аналитический первый интеграл

$$H(\xi, \eta) = \text{const}, \tag{1.4}$$

разложение которого по степеням переменных ξ и η начинается с членов второго порядка малости, т. е. функция H в окрестности точки $\xi=\eta=0$ является аналитической функцией своих переменных и представима в следующем виде:

$$H = a_0^* + a_{20}^*\xi^2 + a_{02}^*\eta^2 + a_{11}^*\xi\eta + \ldots$$

Система Ляпунова как частный случай содержит консервативные системы. Например, уравнение

$$\ddot{z} + f(z) = 0,$$

где $f(z) = \omega^2 z + a_2 z^2 + \ldots$ заменой $\xi = -\omega\eta$, $z = \xi$ приводится к виду (1.1)

$$\dot{\xi} = -\omega\eta,$$

$$\dot{\eta} = \omega\xi + \frac{a_2}{\omega}\xi^2 + \ldots$$

Если функция $f(z)$ аналитическая, то интеграл энергии и будет аналитическим интегралом (1.4).

Однако к числу систем Ляпунова относятся также многие встречающиеся в технике и физике неконсервативные системы. В одном из следующих параграфов мы рассмотрим пример системы Ляпунова, не являющейся консервативной.

3. Приведение к каноническому виду. Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= a_{11}\xi + a_{12}\eta, \\ \dot{\eta} &= a_{21}\xi + a_{22}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Система (1.5) описывает колебание с постоянной амплитудой, поскольку ее характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней.

Исключая из уравнения (1.5) переменную η, получим

$$\ddot{\xi} - \dot{\xi}(a_{11}+a_{22}) + \xi(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = 0. \tag{1.6}$$

Для того чтобы удовлетворить условию а), коэффициент при ξ должен быть равен нулю, т. е. должно быть $a_{11}=-a_{22}$ и, кроме того, должно иметь место неравенство

$$\lambda^2=a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}>0.$$

Сделаем замену

$$\xi=x, \qquad \dot{x}=-\lambda y, \tag{1.7}$$

где λ — арифметическое значение корня $\sqrt{a_{22}a_{11}-a_{21}a_{12}}$. При помощи замены (1.7) уравнение (1.6) сводится к эквивалентной системе двух уравнений

$$\dot{x}=-\lambda y, \qquad \dot{y}=\lambda x.$$

Поэтому, если в исходной системе (1.1) сделать замену (1.7), то эта система будет приведена к виду

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\lambda y+X(x, y),\\ \dot{y}&=\lambda x+Y(x, y),\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

где X и Y — аналитические функции своих переменных, разложения которых начинаются с членов второго порядка малости. Таким образом, вместо системы (1.1) нам достаточно рассмотреть систему (1.8).

4. Преобразование интеграла H. Остановимся еще на выражении интеграла H. Согласно предположению б) его представление имеет вид

$$H\equiv Ax^2+By^2+Cxy+\ldots=\tilde{\mu},$$

где $\tilde{\mu}$ — некоторая постоянная. Так как H — первый интеграл, то в силу уравнений (1.8) $\frac{dH}{dt}=0$, что позволяет вычислить коэффициенты A, B, C и т. д. Найдем

$$\frac{dH}{dt}=(2Ax+Cy+\ldots)(-\lambda y+X(x, y))+$$
$$+(2By+Cx+\ldots)(\lambda x+Y(x, y)).$$

Сравнивая коэффициенты при x^2, y^2 и xy, получим

$$C\lambda=0, \qquad -2A\lambda+2B\lambda=0.$$

Отсюда $A=B$, $C=0$. Не нарушая общности, можно принять

$$A=B=1.$$

Итак, интеграл H можно представить в виде

$$H\equiv x^2+y^2+W(x, y)=\mu^2, \tag{1.9}$$

где W — аналитическая функция своих переменных, разложение которой начинается с членов не ниже третьего порядка

малости, μ^2 — некоторая постоянная, которую всегда мы можем считать положительной для достаточно малых $|x|$ и $|y|$.

5. Периодичность решений системы Ляпунова. Докажем теперь, что решения системы (1.8) для достаточно малых значений μ — периодические функции t. Для этого достаточно доказать, что фазовые траектории в плоскости (x, y) замкнутые и θ сохранят знак.

Введем полярные координаты

$$x=\rho\cos\theta; \qquad y=\rho\sin\theta$$

и заметим, что любая замкнутая траектория $\rho(\theta)$ должна быть периодической функцией аргумента θ. Составим выражение для H:

$$H \equiv \rho^2\left(1+\frac{1}{\rho^2}W(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\right)=\mu^2. \tag{1.10}$$

Здесь W — аналитическая функция ρ, разложение которой имеет вид

$$\begin{aligned} W(x,\ y) &= \alpha_{30}x^3+\alpha_{21}x^2y+\ \ldots\ +\alpha_{nm}x^ny^m+\ \ldots\ = \\ &= \rho^3(\alpha_{30}\cos^3\theta+\alpha_{21}\cos^2\theta\sin\theta+\alpha_{12}\cos\theta\sin^2\theta+\alpha_{03}\sin^3\theta)+\ \ldots \\ &\quad \ldots+\rho^{n+m}(\alpha_{n+m,\,0}\cos^{n+m}\theta+\ \ldots\ +\alpha_{0,\,n+m}\sin^{n+m}\theta)+\ \ldots \end{aligned}$$

Следовательно, в формуле (1.10) функция $\frac{1}{\rho^2}W(\rho,\ \theta)$ может быть представлена в виде ряда

$$\frac{1}{\rho^2}W(\rho,\ \theta)=\rho a_1(\theta)+\rho^2a_2(\theta)+\ \ldots,$$

причем все коэффициенты $a_i(\theta)$ — полиномы от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, т. е. периодические функции θ. Таким образом, выражение (1.10) можно переписать так:

$$\rho(1+\rho a_1(\theta)+\ \ldots)^{1/2}=\mu.$$

Это равенство мы можем рассматривать как уравнение для определения $\rho(\theta)$. Используя аналитичность функций, которые в него входят, будем функцию ρ разыскивать в виде ряда

$$\rho=\mu+b_2(\theta)\mu^2+b_3(\theta)\mu^3+\ldots \tag{1.11}$$

Прямым вычислением убеждаемся в том, что коэффициенты в разложении (1.11) являются полиномами от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Так, например,

$$b_2=-\frac{1}{2}a_1, \qquad b_3=a_1^2-\frac{1}{2}a_2,\ \ldots$$

Таким образом, коэффициенты b_i — степенные функции коэффициентов a_i, а последние в свою очередь являются полиномами от $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Вследствие такой структуры коэффициентов ряд (1.11) определяет периодическую функцию θ периода 2π, т. е. при изменении θ на 2π величина ρ возвращается к своему исходному значению. Если при этом окажется, что $\dot\theta$ сохраняет знак, то это и будет означать, что фазовая траектория замкнутая. Ниже мы в этом убедимся (см. формулу (1.16)).

Таким образом, решения системы (1.8) — функции $x(t)$ и $y(t)$ — будут периодическими функциями времени.

Функции $x(t)$ и $y(t)$ являются аналитическими по параметру μ. В самом деле, в силу аналитичности правых частей системы (1.8) ее решения будут аналитическими функциями начальных значений

$$x(0)=c, \qquad y(0)=b.$$

Постоянная μ также определяется этими значениями

$$\mu^2=c^2+b^2+W(c,\ b). \tag{1.12}$$

Так как правые части системы (1.8) не зависят от времени, то без ограничений общности начальные условия можно принять в виде

$$x(0)=c, \qquad y(0)=0. \tag{1.13}$$

Отсюда видно, что решения системы (1.8) представляют собой аналитические функции c, а также и μ, поскольку из (1.12) следует, что μ — аналитическая функция c:

$$\mu=c+\mu_2c^2+\ldots \tag{1.14}$$

6. Вычисление периода. Для вычисления периода составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют переменные ρ и θ. Вычислим

$$\dot x=\dot\rho\cos\theta-\rho\dot\theta\sin\theta, \quad \dot y=\dot\rho\sin\theta+\rho\dot\theta\cos\theta. \tag{1.15}$$

Заменяя в системе (1.15) производные $\dot x$ и $\dot y$ их выражениями из уравнений (1.8) и разрешая полученную систему относительно производных $\dot x$ и $\dot y$, найдем искомые уравнения

$$\frac{d\rho}{dt}=X(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta+Y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta, \tag{1.16}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\lambda+\frac{1}{\rho}\{Y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta\}.$$

Из второго уравнения определим t:

$$t=\int_0^\theta\frac{\rho\,d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta}+t_0. \tag{1.17}$$

Для того чтобы удовлетворить условиям (1.13), необходимо константу в (1.17) принять равной нулю. Используем теперь тот факт, что ρ — аналитическая функция μ (см. представление μ в виде ряда (1.11)). Это позволит разложить подынтегральную функцию в выражении (1.17) в ряд по степеням μ

$$t=\frac{1}{\lambda}\left\{\theta+\int_0^\theta[\mu\vartheta_1(\theta)+\mu^2\vartheta_2(\theta)+\ \ldots]\,d\theta\right\}, \qquad (1.17')$$

где $\vartheta_i(\theta)$ — периодические функции θ периода 2π. Следовательно, подынтегральная функция в (1.17′) также периодическая функция θ периода 2π. Следовательно, интеграл

$$I=\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}[\mu\vartheta_1(\theta)+\mu^2\vartheta_2(\theta)+\ \ldots]\,d\theta$$

не зависит от θ_0 и его можно записать в виде

$$I=2\pi(\mu h_1+\mu^2h_2+\ \ldots),$$

где h_i — вполне определенные числа. Таким образом, при изменении θ на 2π время t получает приращение T

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+\mu h_1+\mu^2h_2+\ \ldots), \qquad (1.18)$$

не зависящее от θ_0. Пусть теперь $\Phi(\theta)$ — некоторая периодическая функция θ периода 2π, тогда

$$\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta). \qquad (1.19)$$

Рассматривая ее как функцию t, будем иметь

$$\Phi(t+T)=\Phi(t). \qquad (1.20)$$

Равенство (1.19) справедливо для любых θ, следовательно, и равенство (1.20) справедливо для любых t, т. е. $\Phi(t)$ — периодическая функция t. Значит, величина T, определенная формулой (1.18) как функция μ, и есть период решения.

Используя (1.17), мы можем записать его в следующем виде:

$$T(\mu,\ \theta_0)=\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\frac{\rho\,d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta}; \qquad (1.17'')$$

при $\mu\to 0$ период T стремится к периоду линейных колебаний $2\pi/\lambda$, т. е. к периоду колебаний в системе (1.8) при $X\equiv 0$, $Y\equiv 0$.

7. Одно свойство периода. Покажем теперь, что T — четная функция μ. Вернемся снова к интегралу (1.10). Рассматривая его как уравнение относительно ρ, мы получаем в окрестности точки $\rho=0$ два решения. Одно из них дается рядом (1.11)

$$\rho=\mu+b_2(\theta)\mu^2+b_3(\theta)\mu^3+\ldots;$$

к другому решению приходим, если в (1.11) заменить μ на $-\mu$:

$$\rho=-\mu+b_2(\theta)\mu^2-b_3(\theta)\mu^3+\ldots \tag{1.21}$$

Теперь заметим, что левая часть уравнения (1.10) не изменится, если заменим ρ на $-\rho$ и θ на $\theta+\pi$. Следовательно, на основании (1.11) будем иметь

$$-\rho=\mu+b_2(\theta+\pi)\mu^2+b_3(\theta+\pi)\mu^3+\ldots \tag{1.22}$$

Значение ρ, определенное рядом (1.22), будет корнем уравнения (1.10), не совпадающим с (1.11) (хотя бы потому, что для малых ρ из (1.11) следует $\rho=\mu+O(\mu^2)$, а из (1.22) $\rho=-\mu+O(\mu^2)$. Следовательно, оно будет определяться рядом (1.21). Сравнивая (1.21) и (1.22), получаем

$$b_2(\theta)=-b_2(\theta+\pi), \qquad b_3(\theta)=b_3(\theta+\pi)$$

и т. д.

Отсюда следует, что если в выражении (1.11) заменить μ на $-\mu$, а θ на $\theta+\pi$, то величина ρ примет свое значение с обратным знаком:

$$\rho(-\mu,\ \theta+\pi)=-\rho(\mu,\ \theta).$$

Выпишем теперь выражение для периода T. На основании (1.17) имеем

$$T(\mu,\ 0)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho\,d\theta}{\lambda\rho+Y(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\cos\theta-X(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\sin\theta}. \tag{1.23}$$

Сделаем в (1.23) замену μ на $-\mu$, а θ на $\theta+\pi$. Тогда получим величину

$$T(-\mu,\ \pi)=\int\limits_{\pi}^{\pi+2\pi}\frac{\rho(-\mu,\ \theta+\pi)\,d\theta}{\lambda\rho(-\mu,\ \theta+\pi)+Y\cos(\theta+\pi)-X\sin(\theta+\pi)}.$$

Согласно доказанному величины $\rho\cos\theta$ и $\rho\sin\theta$ сохраняют свои значения. Следовательно, то же самое можно сказать и о функциях X и Y. В то же время ρ, $\cos\theta$ и $\sin\theta$ изменят свои знаки. Следовательно, знаменатель изменит знак на обратный, но и числитель изменит знак на обратный. Следовательно,

$$T(\mu,\ 0)=T(-\mu,\ \pi).$$

Но подынтегральная функция в выражении (1.23) — периодическая функция переменной θ периода 2π, и, следовательно,

$$T(-\mu, \pi) = T(-\mu, 0).$$

Итак,

$$T(-\mu, 0) = T(\mu, 0),$$

т. е. период — четная функция величины μ.

8. Формулировка теоремы Ляпунова. Мы доказали следующую теорему.

Теорема Ляпунова. *Если постоянная μ достаточно мала, то все решения системы уравнения* (1.8) — *периодические функции t, причем период — четная функция величины μ и при $\mu \to 0$ стремится к $2\pi/\lambda$. Решения системы* (1.8) *являются аналитическими функциями величины c — начального отклонения переменной x.*

Имея в виду формулу (1.14), выражение периода (1.18) можно переписать в следующем виде:

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + c^2 h_2 + c^3 h_3 + \ldots). \tag{1.24}$$

§ 2. Условия существования периодических решений

1. Предмет исследования. Все рассуждения этой главы будут так или иначе связаны с умением решать вопрос о существовании периодических решений в системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + F_1(t), \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + F_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

где a_{ij} и F_i — некоторые периодические функции времени периода 2π. В этом параграфе мы рассмотрим условия, которые должны быть наложены на функции F_1 и F_2, необходимые и достаточные для того, чтобы система уравнений (2.1) допускала периодические решения периода 2π. Особое внимание при этом мы уделим тому специальному случаю, когда уравнения

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

представляют собой систему уравнений в вариациях для системы Ляпунова, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Вопросы, которые рассматриваются в этом параграфе, носят вспомогательный характер, однако они имеют и самостоятельный интерес. Поэтому мы их рассмотрим несколько подробнее, нежели это необходимо для дальнейшего изложения.

2. Необходимые и достаточные условия периодичности. Рассмотрим систему (2.1), не делая сначала никаких предположений о природе коэффициентов $a_{ij}(t)$, кроме предположения об их периодичности по t.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — решение системы (2.1), удовлетворяющее следующим данным Коши:

$$x(0)=x_0, \qquad y(0)=y_0.$$

Для того чтобы это решение было периодическим с периодом 2π, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

$$x(2\pi)=x_0, \qquad y(2\pi)=y_0. \tag{2.3}$$

Очевидно, что условия (2.3) необходимы, так как функция называется периодической, если она удовлетворяет условиям

$$x(t_0+2\pi)=x(t_0), \qquad y(t_0+2\pi)=y(t_0), \tag{2.3'}$$

каково бы не было t_0. Условия (2.3) являются частным случаем (2.3′) при $t_0=0$. Эти условия являются также и достаточными. В самом деле, правые части системы (2.1) — периодические функции времени периода 2π и, следовательно, они инвариантны относительно замены переменного $t \to t'+2\pi$, тогда в силу (2.3) по t и t' мы будем иметь одну и ту же задачу Коши и, следовательно,

$$x(t')=x(t); \qquad y(t')=y(t)$$

или

$$x(t'+2\pi)=x(t'); \qquad y(t'+2\pi)=y(t').$$

Так как это равенство справедливо для любых t', то оно совпадает с (2.3′) и, следовательно, функции $x(t)$ и $y(t)$ — периодические.

Предположим далее, что система фундаментальных решений системы (2.2) нам известна. Обозначим эти функции через x_1, x_2, y_1 и y_2 и решение системы (2.1) будем искать методом вариации произвольных постоянных, полагая

$$x=Ax_1+Bx_2, \qquad y=Ay_1+By_2, \tag{2.4}$$

где A и B — некоторые функции времени, подлежащие определению.

Подставим выражения (2.4) в (2.1). Принимая во внимание, что функции x_1, x_2, y_1 и y_2 удовлетворяют системе (2.2), мы получим следующие уравнения для определения функций A и B;

$$\dot{A}x_1+\dot{B}x_2=F_1, \qquad \dot{A}y_1+\dot{B}y_2=F_2,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} A &= \int_0^t \frac{F_1 y_2 - F_2 x_2}{\Delta}\, dt + C, \\ B &= \int_0^t \frac{F_2 x_1 - F_1 y_1}{\Delta}\, dt + D, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

где C и D — новые произвольные постоянные, а Δ — определитель Вронского

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Постоянные C и D определяются из начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$ при $t = 0$. Так как интегральные слагаемые в выражениях (2.5) при $t = 0$ обращаются в нуль, то постоянные C и D определяются из уравнений

$$\left.\begin{aligned} Cx_1(0) + Dx_2(0) &= x_0, \\ Cy_1(0) + Dy_2(0) &= y_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Используя полученные выражения, выпишем теперь условия периодичности (2.3)

$$\left.\begin{aligned} x_1(2\pi) \int_0^{2\pi} \frac{F_1 y_2 - F_2 x_2}{\Delta}\, dt + x_2(2\pi) \int_0^{2\pi} \frac{F_2 x_1 - F_1 y_1}{\Delta}\, dt + \\ + Cx_1(2\pi) + Dx_2(2\pi) = x_0, \\ y_1(2\pi) \int_0^{2\pi} \frac{F_1 y_2 - F_2 x_2}{\Delta}\, dt + y_2(2\pi) \int_0^{2\pi} \frac{F_2 x_1 - F_1 y_1}{\Delta}\, dt + \\ + Cy_1(2\pi) + Dy_2(2\pi) = y_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Для того чтобы система (2.1) допускала периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы функции F_1 и F_2 удовлетворяли условиям (2.7).

Изучим теперь эти условия для некоторых специальных случаев.

3. Случай, когда фундаментальные решения уравнения (2.2) — периодические функции времени. Рассмотрим сначала тот частный случай, когда фундаментальные решения $x_2(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — периодические функции. Заметим, что уравнения в вариациях, отвечающие изохронным системам, т. е.

системам, период колебаний которых не зависит от начальных условий, всегда имеют периодические решения.

Так как C и D — постоянные числа, то в силу периодичности функций x_i и y_i из (2.6), мы получаем следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} Cx_1(2\pi) + Dx_2(2\pi) = x_0, \\ Cy_1(2\pi) + Dy_2(2\pi) = y_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.6'}$$

Равенства (2.6′) позволяют упростить систему (2.7), которую можно теперь рассматривать как систему однородных алгебраических уравнений относительно интегралов

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{F_1 y_2 - F_2 x_2}{\Delta}\, dt, \qquad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{F_2 x_1 - F_1 y_1}{\Delta}\, dt.$$

Перепишем эту систему в следующем виде:

$$x_1 I_1 + x_2 I_2 = 0, \qquad y_1 I_1 + y_2 I_2 = 0. \tag{2.8}$$

Определитель системы (2.8) есть определитель Вронского для функций x_1, x_2, y_1 и y_2. В силу независимости этих функций он отличен от нуля. Таким образом, система (2.8) имеет только тривиальное решение. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{F_1 y_2 - F_2 x_2}{\Delta}\, dt = 0, \\ I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{F_2 x_1 - F_1 y_1}{\Delta}\, dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Итак, мы пришли к следующему результату: если фундаментальное решение системы (2.2) выражается периодическими функциями, то для того, чтобы любое решение системы (2.1) было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы функции F_1 и F_2 удовлетворяли условиям (2.9).

4. Пример. Рассмотрим тот частный случай, когда система (2.1) имеет вид

$$\dot{x} = -y + F_1(t), \qquad \dot{y} = x + F_2(t). \tag{2.10}$$

Система (2.10) сводится к уравнению колебаний математического маятника под действием периодической внешней силы

$$\ddot{x} + x = F^*(t),$$

где

$$F^* = \dot{F}_1 + F_2.$$

Линейно независимые решения системы (2.10) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos t, \quad & x_2 &= \sin t, \\ y_1 &= \sin t, \quad & y_2 &= -\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Вронскиан этих функций равен единице, поэтому условия (2.9) будут приведены к такому виду:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (F_1 \cos t + F_2 \sin t)\, dt = 0, \\ &\int_0^{2\pi} (F_2 \cos t - F_1 \sin t)\, dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Условие (2.12) будет играть в дальнейшем изложении особую роль.

5. Одно уравнение второго порядка. Предположим, что мы рассматриваем одно уравнение второго порядка вида

$$\ddot{x} + \varphi(t) x = F(t), \tag{2.13}$$

где $\varphi(t)$, $F(t)$ — периодические функции периода 2π и $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\ddot{x} + \varphi(t) x = 0. \tag{2.14}$$

Решение системы (2.13) будем снова искать методом вариации произвольных постоянных. Для этого положим

$$x = Ax_1 + Bx_2, \qquad \dot{x} = A\dot{x}_1 + B\dot{x}_2. \tag{2.15}$$

Дифференцируя первое из условий (2.15) и приравнивая второму, получаем условие совместности формул (2.15)

$$\dot{A}x_1 + \dot{B}x_2 = 0. \tag{2.16}$$

Подставляя второе из условий в (2.13) и учитывая (2.14), получаем

$$\dot{A}\dot{x}_1 + \dot{B}\dot{x}_2 = F(t). \tag{2.17}$$

Заметим, что в данном случае определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$$

есть величина постоянная, что является следствием известной теоремы Лиувилля и того факта, что уравнение (2.13) не

содержит первой производной. Из системы уравнений (2.16), (2.17) находим

$$A = -\frac{1}{\Delta}\int_0^t Fx_2\,dt + C_1, \quad B = \frac{1}{\Delta}\int_0^t Fx_1\,dt + C_2.$$

Таким образом, в окончательной форме решение системы (2.13) запишем так:

$$x = \frac{1}{\Delta}\left\{-x_1\int_0^t Fx_2\,dt + x_2\int_0^t Fx_1\,dt + C_1x_1 + C_2x_2\right\}. \tag{2.18}$$

Так как, согласно второй из формул (2.15),

$$\dot{x} = \dot{x}_1\left\{-\frac{1}{\Delta}\int_0^t Fx_2\,dt + C_1\right\} + \dot{x}_2\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^t Fx_1\,dt + C_2\right\},$$

то необходимые и достаточные условия периодичности

$$x(2\pi) = x(0), \qquad \dot{x}(2\pi) = \dot{x}(0)$$

могут быть записаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1(2\pi)\left\{-\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fx_2\,dt + C_1\right\} + x_2(2\pi)\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fx_1\,dt + C_2\right\} = x_0, \\ \dot{x}_1(2\pi)\left\{-\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fx_2\,dt + C_1\right\} + \dot{x}_2(2\pi)\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fx_1\,dt + C_2\right\} = \dot{x}_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 имеем следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} x_1(0)\,C_1 + x_2(0)\,C_2 = x_0, \\ \dot{x}_1(0)\,C_1 + \dot{x}_2(0)\,C_2 = \dot{x}_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Условия, которые надо наложить на функцию F для того, чтобы решения уравнения (2.13) были периодическими функциями времени, существенно зависят от того, являются или нет фундаментальные решения x_1 и x_2 периодическими функциями. Если x_1 и x_2 — периодические функции, то, согласно (2.20),

$$x_1(2\pi)\,C_1 + x_2(2\pi)\,C_2 = x_0,$$
$$\dot{x}_1(2\pi)\,C_1 + \dot{x}_2(2\pi)\,C_2 = \dot{x}_0$$

и уравнения (2.19) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} -x_1(2\pi)\int_0^{2\pi} Fx_2\,dt + x_2(2\pi)\int_0^{2\pi} Fx_1\,dt = 0,\\ -\dot{x}_1(2\pi)\int_0^{2\pi} Fx_2\,dt + \dot{x}_2(2\pi)\int_0^{2\pi} Fx_1\,dt = 0.\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Система (2.21) может рассматриваться как система однородных уравнений относительно двух неизвестных

$$-\int_0^{2\pi} Fx_2\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} Fx_1\,dt.$$

Ее определитель — это детерминант Вронского функций x_1 и x_2, отличный от нуля. Следовательно, система (2.21) имеет только нулевые решения. Итак, если фундаментальные решения уравнения (2.14) — периодические функции, то для существования периодических решений уравнения (2.13) необходимо и достаточно, чтобы функция F удовлетворяла следующим соотношениям:

$$\int_0^{2\pi} Fx_1\,dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} Fx_2\,dt = 0, \tag{2.22}$$

т. е. чтобы функция, стоящая в правой части уравнения (2.13) была ортогональна частным решениям системы (2.14).

6. Одно уравнение второго порядка. Случай непериодических фундаментальных решений. В теории колебаний неизохронных систем мы обычно сталкиваемся с гораздо более сложным случаем, когда одно из фундаментальных решений уравнения в вариациях не является периодической функцией времени. В этом случае условия разрешимости будут выглядеть совсем иначе.

Итак, рассмотрим уравнение (2.13) и предположим, что оно является уравнением в вариациях для уравнения

$$\ddot{z} + f(z) = 0. \tag{2.23}$$

Общий интеграл уравнения (2.23), согласно теореме предыдущего параграфа, для достаточно малых энергий, является периодической функцией времени некоторого периода $T = 2\pi/\omega(c)$ и аналитической функцией величины $c = x(0) = x_0$:

$$z = c\varphi_1(\psi) + c^2\varphi_2(\psi) + \ldots, \tag{2.24}$$

где

$$\psi = \omega(c)(t + t_0),$$

$\omega(c)$ называется частотой. Эта функция определяется таким образом, что функции $\varphi_i(\psi)$ оказываются периодическими функциями аргумента ψ с периодом, равным 2π.

Согласно лемме, доказанной в последнем параграфе главы I, частные решения уравнения (2.13) имеют вид

$$x_1^* = \frac{\partial z}{\partial t_0} = \omega(c)\frac{\partial z}{\partial \psi},$$

$$x_2^* = \frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\widetilde{\partial z}}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial \omega}{dc}t,$$

где $\widetilde{\partial z}/\partial c$ означает дифференцирование по явно входящему аргументу c. Эта функция будет периодической функцией времени. Так как функция $\partial z/\partial\psi$ — периодическая функция, то и $x_1^*(t)$ — также периодическая функция периода 2π по аргументу ψ. Что касается функции $x_2^*(t)$, то она будет периодической функцией тогда и только тогда, когда $d\omega/dc = \omega' \equiv 0$. Введем обозначения

$$u = \frac{1}{\omega}x_1^*, \qquad v = \frac{1}{\omega'}\frac{\widetilde{\partial z}}{\partial c}$$

и введем новую систему линейно независимых решений уравнения (2.13) в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\omega}x_1^* = u, \\ x_2 &= \frac{1}{\omega'}x_2^* = v + ut, \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

где u и v — периодические функции времени. Перепишем теперь условия периодичности (2.19)

$$\left.\begin{aligned} &u(2\pi)\left\{-\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} F(v+ut)\,dt + C_1\right\} + \\ &\qquad + (v(2\pi) + 2\pi u(2\pi))\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fu\,dt + C_2\right\} = x_0, \\ &\dot u(2\pi)\left\{-\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} F(v+ut)\,dt + C_1\right\} + \\ &\qquad + (\dot v(2\pi) + 2\pi\dot u(2\pi) + u(2\pi))\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fu\,dt + C_2\right\} = \dot x_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.19'}$$

Выпишем еще условия (2.20)

$$\left.\begin{aligned} &u(0)\,C_1 + v(0)\,C_2 = x_0, \\ &\dot u(0)\,C_1 + (\dot v(0) + u(0))\,C_2 = \dot x_0. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Так как функции u и v периодические, то условия (2.26) сохраняют свою силу при изменении аргумента на 2π

$$\begin{aligned} &u(2\pi)\,C_1 + v(2\pi)\,C_2 = x_0, \\ &\dot u(2\pi)\,C_1 + (\dot v(2\pi) + u(2\pi))\,C_2 = \dot x_0. \end{aligned}$$

Это позволяет упростить условия (2.19)

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{u(2\pi)}{\Delta}\int_0^{2\pi} F(v+ut)\,dt + \frac{v(2\pi)+2\pi u(2\pi)}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fu\,dt = \\ &\qquad\qquad = -C_2 2\pi u(2\pi), \\ &-\frac{\dot u(2\pi)}{\Delta}\int_0^{2\pi} F(v+ut)\,dt + \\ &\qquad + \frac{\dot v(2\pi)+u(2\pi)+2\pi\dot u(2\pi)}{\Delta}\int_0^{2\pi} Fu\,dt = -C_2\dot u(2\pi)\cdot 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

Разрешим систему уравнений (2.27) относительно интегралов, которые входят в ее левую часть. Принимая во внимание, что Δ — вронскиан функций $x_1 = u$ и $x_2 = v + ut$ есть величина постоянная, находим

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F(t)\,(v(t) + tu(t))\,dt = 2\pi\Delta C_2, \\ &\int_0^{2\pi} F(t)\,u(t)\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Таким образом, функция F, так же как и в предыдущем случае, должна быть ортогональной тому фундаментальному решению, которое является периодической функцией времени.

Величина C_2, так же как и Δ, определяется начальными значениями функций u и v и начальными значениями x_0 и $\dot x_0$. Из уравнений (2.20) находим

$$C_2 = \frac{\dot x_0 x_1(0) - x_0 \dot x_1(0)}{\Delta}.$$

Итак, окончательно условия (2.28) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F(t)\,u(t)\,dt = 0, \\ &\int_0^{2\pi} F(t)\{v(t) + tu(t)\}\,dt = 2\pi(\dot{x}_0 u(0) + x_0 \dot{u}(0)). \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

§ 3. Метод Ляпунова

1. Пример. В § 1 этой главы мы установили ряд общих результатов, относящихся к системам Ляпунова. Мы установили, в частности, что для достаточно малых значений постоянной c решения системы (1.8) — периодические функции t. Однако пока еще мы ничего не говорили о методах построения этих периодических решений. Ляпунов предложил простой и очень эффективный алгоритм построения этих решений. Алгоритм Ляпунова использует аналитичность искомых решений по параметру c и дает правило построения решений в форме рядов специального вида, расположенных по степеням этого параметра.

Итак, на основании теоремы, доказанной в § 1, решение системы уравнений (1.8) можно искать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t), \qquad y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_k(t). \tag{3.1}$$

По доказанному для достаточно малых значений $|c|$ ряды (3.1) сходятся и определяют решение системы (1.8). Однако использовать решения в форме (3.1) оказывается неудобным. Поясним это обстоятельство.

Как уже было установлено для достаточно малых значений μ (или, что то же самое, для достаточно малых значений $|c|$), все решения системы (1.8) — периодические периода $T(c)$. Следовательно, функции, определенные рядами (3.1), удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} x(t+T) &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t+T) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x_k(t) = x(t), \\ y(t+T) &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_k(t+T) = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y_k(t) = y(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Равенства (3.2) справедливы для любых (но достаточно малых) значений $|c|$. Однако из этого нельзя сделать заключения,

что функции $x_i(t)$ и $y_i(t)$ периодические, т. е. что

$$x_i(t+T)=x_i(t), \quad y_i(t+T)=y_i(t).$$

В самом деле, период T в общем случае также является функцией параметра c. Следовательно, хотя представление (3.1) и определяет периодическую функцию, члены этих рядов периодическими функциями в общем случае не являются.

Для пояснения рассмотрим пример системы

$$\dot{x}=-y, \quad \dot{y}=x+x^3. \tag{3.3}$$

Подставляя в эту систему ряды (3.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c, получаем следующие системы уравнений для определения функций x_i и y_i:

$$\dot{x}_1=-y_1, \quad \dot{y}_1=x_1; \tag{3.4}$$

$$\dot{x}_2=-y_2, \quad \dot{y}_2=x_2; \tag{3.5}$$

$$\dot{x}_3=-y_3, \quad \dot{y}_3=x_3+x_1^3 \tag{3.6}$$

и т. д.

Начальными условиями для системы (3.3) будут условия (1.13). На этом основании начальные условия для системы (3.4), (3.5), (3.6) мы можем принять в виде

$$\left.\begin{aligned} t=0: \quad & x_1=1, \quad y_1=0, \\ & x_i=0, \quad y_i=0 \quad (i=2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Условия (3.7) единственным образом определяют функции x_1, x_2, y_1 и y_2

$$x_1=\cos t, \ y_1=\sin t, \ x_2=0, \ y_2=0. \tag{3.8}$$

Перепишем теперь систему (3.6) с учетом (3.8)

$$\dot{x}_3=-y_3, \quad \dot{y}_3=x_3+\cos^3 t. \tag{3.9}$$

Исключая из (3.9) функцию y_3, мы придем к следующему уравнению второго порядка:

$$\ddot{x}_3+x_3=\cos^3 t$$

или, заменяя $\cos^3 t$ его разложением по косинусам кратных дуг,

$$\ddot{x}_3+x_3=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t. \tag{3.10}$$

Общее решение системы (3.10) будет

$$x_3=A\cos t+B\sin t+\frac{3}{8}t\sin t-\frac{1}{9}\cos 3t. \tag{3.11}$$

Здесь постоянные A и B должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить условиям (3.7).

Итак, мы видим, что функция x_3 содержит вековое слагаемое $t\sin t$ и, следовательно, не является периодической. Легко

убедиться, что и последующие члены рядов (3.1) будут также содержать члены вида $t^n \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} t$.

Таким образом, построение решения в форме рядов (3.1) приводит к тому, что периодические функции $x(t)$ и $y(t)$ представляются в виде рядов по непериодическим функциям. Такое представление неудобно во многих отношениях и не может быть использовано в прикладных целях. В самом деле, на практике мы не имеем возможности оперировать с бесконечными рядами и вынуждены заменять их конечными отрезками. Но эти конечные отрезки не будут периодическими функциями и, следовательно, даже приближенно не будут содержать необходимой информации, такой, например, как зависимость периода T от «амплитуды» c.

2. **Обсуждение алгоритма.** Мы уже видели, что причина неудачи, которая нас постигла при попытке разыскать периодические решения в форме рядов (3.1), состояла в том, что период решения T зависел от c. Поэтому, естественно, возникает вопрос: нельзя ли видоизменить масштаб времени так, чтобы решения полученной системы имели фиксированный период, не зависящий от c (например, равный 2π).

Обратим внимание на формулу (1.24). Она показывает, что если сделать замену

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + c^2h_2 + c^3h_3 + \ldots), \tag{3.12}$$

то период колебаний по переменной τ будет равен 2π. Сделав в системе уравнений (1.8) замену (3.12), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= [-\lambda y + X(x, y)]\,\frac{1 + c^2h_2 + c^3h_3 + \ldots}{\lambda}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= [\lambda x + Y(x, y)]\,\frac{1 + c^2h_2 + c^3h_3 + \ldots}{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Так как правые части системы (3.13) мы умножили на аналитические функции параметра c, то решения этой системы, так же как и системы (1.8), аналитические по c и для любого достаточно малого $|c|$ периодические по τ. Но период по независимой переменной теперь уже фиксирован, он равен 2π.

Периодические решения системы (3.13) будем искать в виде рядов

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}(\tau), \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}(\tau). \tag{3.14}$$

Подставим ряды (3.14) в систему уравнений (3.13) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях параметра c. Функции

$x^{(1)}(\tau)$ и $y^{(1)}(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = -y^{(1)}(\tau), \qquad \frac{dy^{(1)}}{d\tau} = x^{(1)}(\tau). \tag{3.15}$$

В самом деле, функции X и Y, будучи аналитическими функциями своих переменных, таковы, что их разложение начинается с членов второго порядка малости. Следовательно, при подстановке в эти функции рядов (3.14) функции X и Y не будут содержать членов, линейных относительно c. Начальные значения для системы (3.13) определены равенствами (1.13)

$$t=0:\ x=c, \qquad y=0.$$

Следовательно, функции $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ будут соответствовать следующим начальным условиям:

$$\tau=0:\ x^{(1)}=1, \qquad y^{(1)}=0. \tag{3.16}$$

Функции $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$ будут удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(2)}}{d\tau} &= -y^{(2)} + \frac{1}{\lambda} X^{(2)}, \\ \frac{dy^{(2)}}{d\tau} &= x^{(2)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(2)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

где $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ — квадратичные члены разложения функций X и Y по степеням параметра c. Так как X и Y — аналитические функции переменных x и y, причем их разложение начинается с квадратичных членов, то $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ являются квадратичными формами переменных $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$.

Точно так же каждая пара функций $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$, входящая в разложение (3.14), определяется системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(k)}}{d\tau} &= -y^{(k)} + \frac{1}{\lambda} X^{(k)} - h_{k-1} y^{(1)}, \\ \frac{dy^{(k)}}{d\tau} &= x^{(k)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(k)} + h_{k-1} x^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

причем функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ будут содержать величины $x^{(j)}$ и $y^{(j)}$ только тех номеров j, которые меньше чем k.

Кроме того, функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ будут содержать величины h_j, причем $j=2, 3, \ldots, k-2$. Заметим, что величины h входят в правые части (3.18) только уравнений относительно $x^{(s)}$ и $y^{(s)}$, для которых $s \geqslant 3$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx^{(3)}}{d\tau} &= -y^{(3)} + \frac{1}{\lambda} X^{(3)} - h_2 y^{(1)}, \\ \frac{dy^{(3)}}{d\tau} &= x^{(3)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(3)} + h_2 x^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

и т. д

Из условий (1.13) следует, что функции $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ при $k>1$ удовлетворяют начальным условиям

$$x^{(k)}(0)=0, \qquad y^{(k)}(0)=0. \tag{3.20}$$

Вернемся снова к уравнениям (3.13). Хотя числа h_i нам неизвестны заранее, но они на основании теоремы Ляпунова (п. 8 § 1 этой главы) определяются однозначно для данной системы и не зависят ни от параметра c, ни от начальных условий.

Далее члены рядов (3.14) также определяются однозначно, причем $x^{(k)}(\tau)$ и $y^{(k)}(\tau)$ — периодические функции переменного τ периода 2π. В самом деле, $x(\tau)$ и $y(\tau)$ — периодические функции, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \sum c^k x^{(k)}(\tau+2\pi) \equiv x(\tau+2\pi)=x(\tau) \equiv \sum c^k x^{(k)}(\tau), \\ \sum c^k y^{(k)}(\tau+2\pi) \equiv y(\tau+2\pi)=y(\tau) \equiv \sum c^k y^{(k)}(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Так как функции $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ не зависят от параметра c, а равенства (3.21) справедливы для любого малого c, то

$$x^{(k)}(\tau+2\pi)=x^{(k)}(\tau), \quad y^{(k)}(\tau+2\pi)=y^{(k)}(\tau).$$

Таким образом, мы можем утверждать заранее, что функции $x^{(k)}(\tau)$ и $y^{(k)}(\tau)$, которые определяются как решение задачи Коши (3.20) для системы уравнений (3.18), будут периодическими функциями времени периода 2π. С другой стороны, уравнения (3.18) относятся к виду (2.10), где

$$F_1=\frac{1}{\lambda}X^{(k)}-h_{k-1}y^{(1)}, \qquad F_2=\frac{1}{\lambda}Y^{(k)}+h_{k-1}x^{(1)}$$

являются периодическими функциями времени, поскольку они определяются периодическими функциями $x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)}$, $y^{(1)}, \ldots, y^{(k-1)}$. Мы установили, что система вида (2.10) имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда функции F_i удовлетворяют условиям (2.12). На этом основании можно сформулировать следующее вспомогательное утверждение: функции $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$ и числа h_{k-1} всегда удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_1\cos t\,dt+\int_0^{2\pi} F_2\sin t\,dt \equiv \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\{(X^{(k)}-\lambda h_{k-1}y^{(1)})\cos t+ \\ +(Y^{(k)}+\lambda h_{k-1}x^{(1)})\sin t\}\,dt=0, \\ \int_0^{2\pi} F_2\cos t\,dt-\int_0^{2\pi} F_1\sin t\,dt \equiv \frac{1}{\lambda}\int_0^{2\pi}\{(Y^{(k)}+\lambda h_{k-1}x^{(1)})\cos t- \\ -(X^{(k)}-\lambda h_{k-1}y^{(1)})\sin t\}\,dt=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

3. Расчет приближенного решения. Рассмотрим теперь подробнее процедуру расчета коэффициентов разложения рядов (3.14). Условия (3.16) выделяют единственное решение уравнений (3.15)

$$x^{(1)}=\cos\tau, \qquad y^{(1)}=\sin\tau. \tag{3.23}$$

Далее рассмотрим систему уравнений (3.17). Функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ будут квадратичными формами от $\sin\tau$ и $\cos\tau$. На основании предыдущего эта система имеет периодическое решение, которое может быть построено одним из известных способов или, например, методом вариации произвольных постоянных или представлением решения в виде отрезка ряда Фурье

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= A\cos\tau + B\sin\tau + \varphi_1, \\ y^{(2)} &= A\sin\tau - B\cos\tau + \varphi_2, \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

где функции φ_1 и φ_2 имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{11}\cos 2\tau + \alpha_{12}\sin 2\tau, \\ \varphi_2 &= \alpha_{20} + \alpha_{21}\cos 2\tau + \alpha_{22}\sin 2\tau. \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

В самом деле, так как функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ содержат только вторые степени функций $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, то разложение $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ в ряд Фурье не будет содержать первых гармоник. Коэффициенты α_{ij} в разложении (3.25) однозначно определяются коэффициентами разложения функций $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$. Числа A и B в выражениях (3.24) определяются начальными условиями (3.20). Аналогично вычисляются и остальные члены разложения (3.14).

Рассмотрим теперь более подробно условия (3.22). Принимая во внимание выражения (3.23) для $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, можно эти условия переписать так:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \{X^{(k)}(t)\cos t + Y^{(k)}(t)\sin t\}\,dt = 0, \\ &h_{k-1} = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} \{X^{(k)}(t)\sin t - Y^{(k)}(t)\cos t\}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Второе из этих равенств позволяет вычислить поправку на частоту h_{k-1}. Изложенная процедура расчета показывает, что для определения первой поправки на частоту необходимо провести вычисления первых трех приближений.

Примечание. В предыдущем пункте было установлено, что функции $X^{(k)}$ и $Y^{(k)}$ таковы, что они всегда удовлетворяют условиям существования периодических решений. Этот факт

легко проверить, непосредственно пользуясь структурой этих функций. Так, например, функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ имеют представления типа (3.25). Подставляя подобное выражение в (3.26), убеждаемся в том, что оно удовлетворяется тождественно по α_{ij}.

Мы показали, что ряды (3.14) являются формальным решением системы уравнений (3.13), но, согласно теореме Ляпунова, решение этой системы является аналитической функцией параметра c в окрестности точки $c=0$. Это значит, что для достаточно малых значений $|c|$ ряды (3.14) сходятся и дают решение.

Итак, метод Ляпунова позволяет построить решение в виде рядов (3.14). Возвращаясь к переменному t, получим

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cos\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^2x^{(2)}\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^3(\ldots)+\ldots,\\ y &= c\sin\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^2y^{(2)}\left(\frac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}\right)+c^3(\ldots)+\ldots,\end{aligned}\right\} \quad (3.27)$$

где $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$ — периодические функции своего аргумента $\dfrac{\lambda(t+t_0)}{1+h_2c^2+\ldots}$ периода 2π.

Любой отрезок, состоящий из конечного числа членов рядов (3.27), мы можем использовать для приближенного описания колебательного процесса. Заметим одновременно, что, поскольку частоту мы всегда определяем с некоторой погрешностью, то с увеличением времени t ошибка в вычислении фазы будет все время накапливаться. Метод Ляпунова не дает, таким образом, возможности получить равномерное приближение по фазе на всем бесконечном интервале времени.

Выражение (3.27) дает общий интеграл системы Ляпунова, поскольку правые части (3.27) содержат две произвольные постоянные: амплитуду c и аддитивную постоянную t_0. Следовательно, метод Ляпунова позволяет исследовать эти системы в окрестности положения равновесия с исчерпывающей полнотой.

В заключение рассмотрим два примера.

4. Уравнение Дюффинга. В безразмерных координатах уравнение Дюффинга имеет вид

$$\ddot{x}+x-x^3=0. \quad (3.28)$$

Это уравнение изучалось в главе I; тогда мы построили его точное решение в эллиптических функциях. Метод Ляпунова позволяет легко найти его приближенное решение в тригонометрических функциях.

Начальные условия зададим в виде

$$t=0: \quad x=c, \quad y=0. \quad (3.28')$$

Уравнение Дюффинга описывает колебание некоторой консервативной системы, а поскольку последняя является частным случаем системы Ляпунова, то для ее исследования можно использовать метод Ляпунова.

При решении задач, сводящихся к одному уравнению второго порядка, нет необходимости переходить к системе уравнений первого порядка.

В уравнении (3.28) сделаем замену (3.12), после чего оно примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=(x^3-x)(1+2h_2c^2+\ldots).$$

Положим

$$x=cx^{(1)}+c^2x^{(2)}+\ldots$$

Функции $x^{(i)}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}=-x^{(1)},\quad \frac{d^2x^{(2)}}{d\tau^2}=-x^{(2)},\\&\frac{d^2x^{(3)}}{d\tau^2}=-x^{(3)}-2h_2x^{(1)}+x^{(1)^3}\end{aligned}\right\}\tag{3.29}$$

и т. д.

Начальные условия для этих систем определяются так:

$$t=0:\quad x^{(1)}=1,\quad \dot{x}^{(1)}=x^{(2)}=\dot{x}^{(2)}=\ldots=0.\tag{3.30}$$

Первое и второе уравнения системы (3.21) с учетом начальных условий (3.30) нам дадут

$$x^{(1)}=\cos\tau,\quad x^{(2)}\equiv 0.$$

Тогда третье уравнение системы (3.29) примет вид

$$\frac{d^2x^{(3)}}{d\tau^2}=-x^{(3)}-2h_2\cos\tau+\cos^3\tau.$$

Так как

$$\cos^3\tau=\frac{3}{4}\cos\tau+\frac{1}{4}\cos 3\tau,$$

то

$$\frac{d^2x^{(3)}}{d\tau^2}=-x^{(3)}-\cos\tau\left(2h_2-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\cos 3\tau.\tag{3.31}$$

Для того чтобы уравнение (3.31) имело периодическое решение периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы в правой части этого уравнения не было слагаемых, содержащих $\cos\tau$ или $\sin\tau$. Отсюда

$$h_2=\frac{3}{8}.$$

Итак,

$$\frac{d^2x^{(3)}}{d\tau^2}=-x^{(3)}-\frac{1}{4}\cos 3\tau.\tag{3.32}$$

Периодическим решением уравнения (3.32), удовлетворяющим начальным условиям (3.30), будет функция

$$x^{(3)} = \frac{1}{32}\cos\tau - \frac{1}{32}\cos 3\tau.$$

Собирая полученные результаты, общее решение уравнения Дюффинга мы можем записать в форме

$$x = c\cos\left(\frac{t+t_0}{1+\frac{3}{8}c^2+\ldots}\right) + c^3\left\{\frac{1}{32}\cos\left(\frac{t+t_0}{1+\frac{3}{8}c^2+\ldots}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{32}\cos\left(\frac{3(t+t_0)}{1+\frac{3}{8}c^2+\ldots}\right)\right\} + c^5\{\ldots\} + \ldots \quad (3.33)$$

5. Пример неконсервативной системы. Класс систем Ляпунова значительно шире класса консервативных систем, и в прикладных задачах подобные системы встречаются довольно часто. Рассмотрим уравнение, которое встречается в теории волн, возникающих на поверхности тяжелой вязкой жидкости, стекающей по наклонному лотку,

$$\ddot{x} - \beta x\dot{x} + \lambda^2 x = 0. \quad (3.34)$$

Точка $x=\dot{x}=0$ является положением равновесия. Убедимся, что уравнение (3.34) относится к числу систем Ляпунова. Для этого нам надо проверить два условия: первое — корни характеристического уравнения линеаризованной системы должны быть чисто мнимыми; второе — система (3.34) должна иметь первый интеграл, аналитический в окрестности положения равновесия.

Первое из этих условий очевидно. Для выяснения второго обозначим

$$\dot{x} = y$$

и перепишем уравнение (3.34) в следующем виде:

$$y\frac{dy}{dx} = (\beta y - \lambda^2)x. \quad (3.35)$$

В этом уравнении переменные разделяются, и после интегрирования мы получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2}\ln(\beta y - \lambda^2) = x^2 + C_1, \qquad y > \frac{\lambda^2}{\beta}, \\ &\frac{2y}{\beta} + \frac{2\lambda^2}{\beta^2}\ln(\lambda^2 - \beta y) = x^2 + C_2, \qquad y < \frac{\lambda^2}{\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (3.36)$$

Выражения (3.36) показывают, что первый интеграл, который допускает уравнение (3.34), будет аналитическим в окрест-

ности точки $x=y=0$. Итак, уравнение (3.34), согласно теореме Ляпунова, имеет в окрестности положения равновесия периодические решения. В этом можно убедиться также и анализируя фазовую плоскость. Обозначая

$$U(y)=\begin{cases}\dfrac{2y}{\beta}+\dfrac{2\lambda^2}{\beta^2}\ln(\beta y-\lambda^2) & \text{для } y>\dfrac{\lambda^2}{\beta},\\[2ex] \dfrac{2y}{\beta}+\dfrac{2\lambda^2}{\beta^2}\ln(\lambda^2-\beta y) & \text{для } y<\dfrac{\lambda^2}{\beta},\end{cases}$$

мы можем записать первый интеграл в виде

$$x=\pm\sqrt{U(y)-C}. \qquad (3.37)$$

Выражение (3.37) нам позволяет построить обычными способами фазовую плоскость уравнения (3.34). Рис. 13 показывает, что полуплоскость $y<\frac{\lambda^2}{\beta}$ заполнена замкнутыми траекториями, которые расположены несимметрично относительно оси Ox. Для нахождения этих решений может быть использован метод Ляпунова. Вычисления проведем, следуя той же схеме, которую мы использовали при построении решений уравнений Дюффинга.

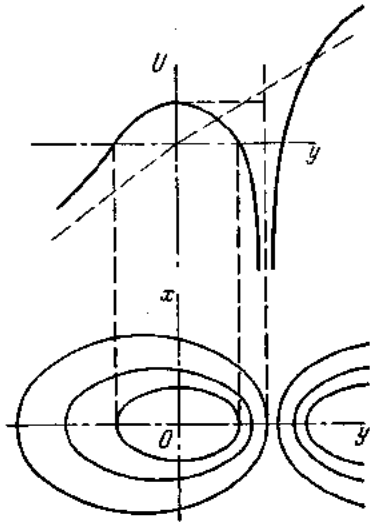

Рис. 13.

§ 4. Система Ляпунова. Случай произвольного числа степеней свободы

В предыдущих параграфах рассматривались некоторые свойства обобщенных консервативных систем, или, как мы их назвали, систем Ляпунова. При этом мы ограничились изучением только систем второго порядка. Однако изложенные методы позволяют изучить некоторые свойства систем произвольного порядка. В частности, метод Ляпунова может быть распространен и на общий случай систем Ляпунова. Однако его возможности при этом становятся более ограниченными. В случае систем второго порядка метод Ляпунова позволяет получить исчерпывающую информацию о поведении системы. Как мы это увидим ниже, в случае систем произвольного порядка этот метод позволяет отыскивать только определенный класс

периодических решений. Несмотря на ограниченный характер, метод Ляпунова в ряде случаев является едва ли не единственным способом, который имеется в руках исследователя для эффективного построения периодических решений нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы.

1. Определение. Систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}}_i = F_i(\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{4.1}$$

будем называть системой Ляпунова, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) Функции F_i — аналитические функции своих аргументов в окрестности точки $\tilde{x}_i=0$

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j + F_i^*(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n), \tag{4.2}$$

здесь a_{ij} — постоянные числа, F_i^* — аналитические функции, разложение которых начинается с членов второго порядка

$$F_i^* = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_n=2}^{\infty} a_i^{(s_1, s_2, \ldots, s_n)}\tilde{x}_1^{s_1}\tilde{x}_2^{s_2}, \ldots, \tilde{x}_n^{s_n}.$$

б) Уравнение

$$D(\lambda) \equiv |a_{ij} - \lambda^*\delta_i^j| = 0 \tag{4.3}$$

имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$, величина δ_i^j — символ Кронекера; $\delta_i^j = 1$, если $i=j$ и $\delta_i^j = 0$, если $i \neq j$.

в) Корни $\pm i\lambda$ простые и, кроме того, среди корней уравнения (4.3) нет корней вида $\pm ip\lambda$, где p — произвольное целое число.

г) Система (4.1) имеет аналитический первый интеграл

$$H(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) = \text{const}. \tag{4.4}$$

2. Приведение к каноническому виду. Впредь вместо системы (4.1) мы будем рассматривать систему следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X(x, y, z_1, \ldots, z_m), \\ \dot{y} &= \lambda x + Y(x, y, z_1, \ldots, z_m), \\ \dot{z}_s &= \sum_{j=1}^{m} b_{sj}z_j + Z_s(x, y, z_1, \ldots, z_m) \\ &(s=1, 2, \ldots, m;\ m=n-2). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Рассмотрение системы (4.5) вместо (4.1) не нарушает общности, так как система (4.1) может быть всегда приведена

к виду (4.5) линейным преобразованием переменных. Для того чтобы это показать, рассмотрим систему уравнений

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \tag{4.6}$$

и введем новую переменную

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} A_i\xi_i; \tag{4.7}$$

здесь A_i — некоторые числа, выбранные таким образом, чтобы для любых ξ_i имело место равенство

$$\sum_i A_i\xi_i = \frac{1}{\mu}\sum_{ij} A_i a_{ij}\xi_j, \tag{4.8}$$

где μ — некоторое, специальным образом подобранное число. Следовательно, величины A_i удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\mu\delta_i^j - a_{ij}) = 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{4.9}$$

где δ_i^j — символ Кронекера. Для того чтобы система (4.9) допускала нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы μ было корнем уравнения (4.3).

Вычислим теперь производную $\dot\eta$ в силу уравнений (4.6)

$$\dot\eta = \sum_{i,\ j=1}^{n} A_i a_{ij}\xi_j.$$

Используя (4.8), находим

$$\dot\eta = \mu\sum_i A_i\xi_i = \mu\eta.$$

Таким образом, каждому из чисто мнимых корней уравнения (4.3) можно поставить в соответствие функции η_1 и η_2, удовлетворяющие уравнениям

$$\dot\eta_1 = i\lambda\eta_1, \qquad \dot\eta_2 = -i\lambda\eta_2,$$

причем величины η_1 и η_2 определяются равенствами

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(1)}\xi_i, \qquad \eta_2 = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(2)}\xi_i,$$

где числа $A_i^{(1)}$ и $A_i^{(2)}$ определены из уравнений (4.9) при $\mu = i\lambda$ и $\mu = -i\lambda$ соответственно. Вместо переменных η_1 и η_2, которые

удовлетворяют уравнениям с мнимыми коэффициентами, удобно ввести другие переменные

$$x=\eta_1+\eta_2, \qquad y=i(\eta_2-\eta_1).$$

Эти величины удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{x}=-\lambda y, \qquad \dot{y}=\lambda x.$$

Если теперь в системе уравнений (4.1) сделать замену переменных

$$x=\sum_{i=1}^{n}(A_i^{(1)}+A_i^{(2)})\tilde{x}_i,$$

$$y=i\sum_{i=1}^{n}(A_i^{(2)}-A_i^{(1)})\tilde{x}_i,$$

$$z_j=\tilde{x}_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2),$$

то она будет приведена к виду (4.5).

Форму уравнений (4.5) мы будем называть канонической формой систем Ляпунова.

Первый интеграл (4.4) в этих переменных может быть приведен к виду

$$x^2+y^2+W(z_1,\ \ldots,\ z_n)+S(x,\ y,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)=\mu^2, \qquad (4.10)$$

где W — квадратичная форма своих переменных, а S — аналитическая функция, разложение которой начинается с членов третьего порядка малости.

3. **Теорема Ляпунова.** Пусть точка $x=y=z_1=\ldots=z_m=0$ является положением равновесия. Повторяя дословно рассуждения, приведенные в § 1 этой главы, приходим к следующей теореме.

Система (4.5) *допускает в окрестности начала координат* $x=y=z_1=\ldots=z_m=0$ *периодическое решение, аналитически зависящее от одного параметра. В качестве такого параметра может быть принято начальное значение величины* x: $x(0)=c$. *Начальное значение величины* y *может считаться при этом равным нулю. Начальные значения величин* z_j *определяются однозначно и являются также аналитическими функциями параметра* c. *Период решения* T — *тоже аналитическая функция этой величины, причем функция* T *имеет вид*

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots) \qquad (4.11)$$

и, следовательно,

$$\lim_{c\to 0} T = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Само периодическое решение является аналитической функцией параметра c и обращается в тривиальное при $c=0$.

Таким образом, система Ляпунова произвольного числа степеней свободы также обладает периодическими решениями в окрестности начала координат. Однако в случае системы с одной степенью свободы они исчерпывают все возможные движения, которые описывает система Ляпунова. В случае произвольного числа степеней свободы они выделяют только однопараметрическое семейство таких решений. Полный набор решений должен зависеть от $n-1$ параметра (поскольку одна из постоянных аддитивна), но свойства остальных решений зависят уже от других точек спектра матрицы $\|a_{ij}\|$.

Примечание. Пусть мы определили однопараметрическое семейство периодических решений

$$x(t, c), \quad y(t), \quad z_1(t, c), \ldots, z_m(t, c).$$

Очевидно, что решением будет также и такая система функций

$$x(t+h, c), \; y(t+h, c), \; z_1(t+h, c), \ldots, z_m(t+h, c)$$

для любого h. Таким образом, метод Ляпунова позволяет выделить двупараметрическое семейство периодических решений.

4. Метод Ляпунова. Метод, использованный для построения периодических решений системы (1.8), может быть использован и для решения более сложной задачи — отыскания периодических решений системы (4.1). Сделаем сначала стандартную замену независимой переменной (3.12)

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_2c^2 + h_3c^3 + \ldots),$$

где h_i — числа, подлежащие определению.

Система (4.1) тогда заменится следующей:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau} &= [-\lambda y + X(x, y, z_1, \ldots, z_m)]\,\frac{1+h_2c^2+\ldots}{\lambda},\\
\frac{dy}{d\tau} &= [\lambda x + Y(x, y, z_1, \ldots, z_m)]\,\frac{1+h_2c^2+\ldots}{\lambda},\\
\frac{dz_s}{d\tau} &= \left[\sum_{j=1}^{m} b_{sj}z_j + Z_s(x, y, z_1, \ldots, z_m)\right]\frac{1+h_2c^2+\ldots}{\lambda}\\
&\qquad (s = 1, 2, \ldots, m).
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

Периодические решения системы (4.12) будем искать в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k x^{(k)}(\tau), \\ y &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k y^{(k)}(\tau), \\ z_s &= \sum_{k=1}^{\infty} c^k z_s^{(k)}(\tau) \\ &(s = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Подставим ряды (4.13) в систему (4.12) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях параметра c. Функции $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ и $z_s^{(1)}$ будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = -y^{(1)}, \qquad \frac{dy^{(1)}}{d\tau} = x^{(1)}, \\ &\frac{dz_s^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_j^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Для функции $x^{(2)}$, $y^{(2)}$ и $z_s^{(2)}$ получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx^{(2)}}{d\tau} = -y^{(2)} + \frac{1}{\lambda} X^{(1)}\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z_s^{(1)}\right), \\ &\frac{dy^{(2)}}{d\tau} = x^{(2)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(1)}\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z_s^{(1)}\right), \\ &\frac{dz_s^{(2)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_j^{(2)} + \frac{1}{\lambda} Z_s^{(1)}\left(x^{(1)}, y^{(1)}, z_s^{(1)}\right) \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Выпишем еще систему уравнений третьего приближения

$$\begin{aligned} &\frac{dx^{(3)}}{d\tau} = -y^{(3)} + \frac{1}{\lambda} X^{(2)}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, y^{(1)}, y^{(2)}, z_s^{(1)}, z_s^{(2)}\right) - h_2 y^{(1)}, \\ &\frac{dy^{(3)}}{d\tau} = x^{(3)} + \frac{1}{\lambda} Y^{(2)}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, y^{(1)}, y^{(2)}, z_s^{(1)}, z_s^{(2)}\right) + h_2 x^{(1)}, \\ &\frac{dz_s^{(3)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_j^{(3)} + \frac{1}{\lambda} Z_s^{(2)}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, y^{(1)}, y^{(2)}, z_s^{(1)}, z_s^{(2)}\right) + \\ &\qquad + \frac{h_2}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_s^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \tag{4.16}$$

В качестве начальных значений для определения функций $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$ примем

$$x^{(1)} = 1, \quad y^{(1)} = x^{(k)} = y^{(k)} = 0 \qquad (k \neq 1). \tag{4.17}$$

Первые два уравнения системы (4.14) и начальные условия (4.17) единственным образом определяют функции $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$

$$x^{(1)} = \cos\tau \qquad y^{(1)} = \sin\tau. \tag{4.18}$$

Начальные условия для $z_s^{(1)}$ не заданы. Мы должны их подобрать так, чтобы функции $z_s^{(1)}$ были периодическими функциями τ периода 2π. Так как, по предположению, среди собственных чисел матрицы $\|b_{ij}\|$ нет кратных λ, то среди нетривиальных решений системы

$$\frac{dz_s^{(1)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj} z_j^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.19}$$

нет периодических искомого периода. В самом деле, периодические решения системы (4.19) периода 2π должны иметь вид

$$x_s^{(1)} = e^{it} r_s$$

и, следовательно, (4.19) сводится к следующей алгебраической системе:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{sj} r_j = i\lambda r_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m). \tag{4.20}$$

Но равенство (4.20) возможно тогда и только тогда, когда $i\lambda$ — собственное число матрицы $\|b_{ij}\|$.

Таким образом,

$$z_j^{(1)} = 0.$$

Следовательно, разложения функций z_s по степеням параметра c начинается с членов второго порядка малости.

Перейдем теперь к системе (4.15). Ее правые части, если в них подставить решения (4.18) и положить $z_s^{(1)} \equiv 0$, будут некоторыми известными периодическими функциями τ.

Рассмотрим первые два уравнения этой системы. Они имеют форму уравнений (3.17) и, следовательно, для существования периодических решений $x^{(2)}(\tau)$ и $y^{(2)}(\tau)$ необходимо и достаточно выполнения условий (3.22). Однако в силу теоремы о существовании периодических решений эти условия должны

выполняться автоматически. Поэтому искомое периодическое решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x^{(2)} &= A\cos\tau + B\sin\tau + \varphi_1(\tau), \\ y^{(2)} &= A\sin\tau - B\cos\tau + \varphi_2(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

где φ_1 и φ_2 — частные решения системы (4.15), которые строятся известным способом, а числа A и B выбираются так, чтобы функции $x^{(2)}$ и $y^{(2)}$ удовлетворяли нулевым начальным условиям.

Рассмотрим ту часть системы (4.15), которая описывает изменение функции $z_s^{(2)}$

$$\frac{dz_s^{(2)}}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{m} b_{sj}x_j^{(2)} + \frac{1}{\lambda}Z_s^{(1)}(\tau) \qquad (s = 1, 2, \ldots, m), \tag{4.22}$$

где $Z_s^{(1)}$ — известные периодические функции τ периода 2π. Так как среди собственных чисел матрицы $\|b_{ij}\|$ нет кратных λ, то у системы (4.22) существует единственное периодическое решение периода 2π. Это решение строится известными методами (например, методом неопределенных коэффициентов), причем для начальных значений $z_s^{(2)}$ получаются вполне определенные значения.

После того как мы построили решение $x^{(2)}$, $y^{(2)}$ и $z_s^{(2)}$, в первых двух уравнениях системы (4.16) функции $X^{(2)}$ и $Y^{(2)}$ будут известными периодическими функциями периода 2π. Условия (3.22) существования периодических решений запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} X^{(2)}\cos\tau\,d\tau + \int_0^{2\pi} Y^{(2)}\sin\tau\,d\tau = 0, \\ &-h_2 + \frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} X^{(2)}\sin\tau\,d\tau - \frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} Y^{(2)}\cos\tau\,d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

Первое из этих условий должно выполняться автоматически. Второе из условий (4.23) позволяет вычислить число h_2. Если число h_2 выбрано надлежащим образом, первые два уравнения системы (4.16) допускают периодические решения типа (4.21). Что касается функций $z_s^{(3)}$, то они удовлетворяют системе уравнений типа (4.22), которая в свою очередь допускает единственное периодическое решение $z_s^{(3)}(\tau)$, причем начальные значения этих функций получаются вполне определенными. Легко видеть, что процесс может быть неограниченно продолжен и любые члены рядов (4.13) могут быть вычислены. Заметим, что на

каждом шаге нам приходится определять число h_k. Так как уравнение для определения h_k линейное, то h_k определятся и притом однозначно.

Итак, изложенный метод позволяет построить периодические решения системы Ляпунова произвольного порядка. В случае систем второго порядка этот метод дает возможность построить общий интеграл системы, т. е. для достаточно малых значений c позволяет проводить исчерпывающее исследование задачи.

В случае систем n-го порядка метод Ляпунова дает возможность построить только семейство частных решений, зависящих от двух произвольных постоянных: параметра c и аддитивной постоянной h. Несмотря на то, что метод Ляпунова позволяет в случае систем произвольного порядка получить на первый взгляд результат очень ограниченный, тем не менее его значение для теории колебаний весьма велико. Для пояснения сказанного рассмотрим консервативные системы.

5. Консервативные системы произвольного числа степеней свободы. Рассмотрим колебания консервативной системы около положения равновесия. Предположим, что положением равновесия является начало координат. В этом случае кинетическая и потенциальная энергия могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} T &= \sum_{i,j} a_{ij}\dot{\tilde{x}}_i\dot{\tilde{x}}_j, \\ \Pi &= \sum_{i,j} b_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j + \Psi(\tilde{x}_i, \ldots, \tilde{x}_n), \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

где $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$ и разложение функции Ψ начинается с величин третьего порядка малости. (Мы рассматриваем задачи только с аналитическими функциями.) Уравнения движения этой системы могут быть записаны в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\tilde{x}}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \tag{4.25}$$

или в раскрытом виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ddot{\tilde{x}}_j + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\tilde{x}_j + \psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.26}$$

где ψ_i — компоненты вектора $\nabla\Psi$

$$\psi_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{x}_i}$$

являются нелинейными функциями своих аргументов, разложение которых начинается с членов второго порядка малости.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ корни уравнения

$$|-\lambda a_{ij} + b_{ij}| = 0. \tag{4.27}$$

Уравнение (4.27) называется *вековым*. Так как квадратичная форма $\sum_{i,j} a_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ положительно определенная, то, согласно известной теореме, корни векового уравнения действительны. Числа λ_i могут быть как положительными, так и отрицательными. Повторим теперь рассуждения, которые нас привели к системе (4.5).

Введем новые переменные

$$x_k = \sum_{i,j} A_i^{(k)} a_{ij}\tilde{x}_j, \tag{4.28}$$

где числа $A_i^{(k)}$ определяются так, чтобы равенство

$$\sum_{i,j} A_i^{(k)} a_{ij}\tilde{x}_j = \frac{1}{\lambda_k}\sum_{i,j} b_{ij}A_i^{(k)}\tilde{x}_j$$

имело место для любых $\tilde{x}_j$, т. е. чтобы $A_i^{(k)}$ удовлетворяли системе однородных уравнений

$$\lambda_k \sum_i A_i^{(k)} a_{ij} = \sum_i A_i^{(k)} b_{ij} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.29}$$

Система уравнений (4.29) разрешима, так как λ_k — корень уравнения (4.27).

Итак, для каждого корня λ_k мы определяем систему чисел $A_i^{(k)}$ и новую переменную x_k. Рассматривая равенства (4.28) как систему уравнений относительно $\tilde{x}_j$, получим

$$\tilde{x}_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.30}$$

Можно показать, что системы (4.28) — (4.30) невырожденные. Составим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют новые переменные

$$\dot{\tilde{x}}_k = \sum_{i,j} A_i^{(k)} a_{ij}\dot{\tilde{x}}_j = -\sum_{i,j}{}^{(k)} A_i^{(k)} b_{ij}\tilde{x}_j + \tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n),$$

где $\tilde{\varphi}_k = -\sum_i A_i^{(k)}\psi_i$.

Используя определения чисел $A_i^{(k)}$ и делая замену (4.30), получим

$$\dot{x}_k + \lambda_k x_k = \varphi_k \qquad (x_1, \ldots, x_n), \tag{4.31}$$

где

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{\varphi}_k(\tilde{x}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \tilde{x}_n(x_1, \ldots, x_n))$$

представляют собой аналитические функции своих переменных, разложение которых начинается с членов второго порядка малости.

Функции $x_k(t)$ называются главными координатами системы (4.26), а числа $\omega_k=\sqrt{\lambda_k}$ (для $\lambda_k>0$) — собственными (или главными) частотами. Если ограничиться линейными членами, то система (4.31) примет вид

$$\ddot{x}_k+\lambda_k x_k=0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.32}$$

Форма системы (4.32) показывает, что линейные колебания консервативных систем можно представить как суперпозицию колебаний математических маятников (4.32).

Кинетическая и потенциальная энергия системы (4.32) имеет вид

$$T=\sum_k \dot{x}_k^2, \qquad \Pi=\sum_k \lambda_k x_k^2. \tag{4.33}$$

Таким образом, при помощи преобразования (4.30) формы

$$T=\sum_{i,j} a_{ij}\dot{\tilde{x}}_i\dot{\tilde{x}}_j \quad \text{и} \quad \Pi=\sum_{i,j} b_{ij}\tilde{x}_i\tilde{x}_j$$

приведены одновременно к диагональному виду.

Выражение для энергий (4.33) показывает, что энергия каждого из маятников (4.32) остается все время постоянной. Никакого обмена энергии между главными колебаниями линейных систем не существует. В нелинейных системах (4.31) ситуация значительно более сложная.

6. Метод Ляпунова в нелинейных консервативных системах. Этот метод позволяет определить колебания системы, близкие к главным колебаниям. Повторим рассуждения п. 3 этого параграфа для случая консервативных систем.

Фиксируем некоторое число k, для которого $\lambda_k>0$, и сделаем замену независимой переменной (3.12)

$$t=\frac{\tau}{\sqrt{\lambda_k}}(1+c^2h_2+c^3h_3+\ldots),$$

где c — это значение $x_k(0)$.

Система (4.31) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2x_k}{d\tau^2}+x_k(1+c^2h_2+\ldots)^2=\varphi_k(x_1,\ \ldots,\ x_n)\frac{(1+c^2h_2+\ldots)^2}{\lambda_k},\\&\frac{d^2x_s}{d\tau^2}+\frac{\lambda_s}{\lambda_k}x_s(1+c^2h_2+\ldots)^2=\varphi_s(x_1,\ \ldots,\ x_n)\frac{(1+c^2h_2+\ldots)^2}{\lambda_k}\\&\qquad\qquad (s\neq k).\end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Решение ищем в виде рядов

$$x_i=\sum_{r=1}^{\infty} c^r x_i^{(r)}(\tau) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4.35}$$

Подставляя ряды (4.35) в уравнения (4.34), получаем уравнения для $x_i^{(r)}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(1)}}{d\tau^2}+x_i^{(1)}=0, \quad \text{если} \quad i=k,\\ &\frac{d^2x_i^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}x_i^{(1)}=0, \quad \text{если} \quad i\neq k,\end{aligned}\right\} \tag{4.36}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(2)}}{d\tau^2}+x_i^{(2)}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_i^{(1)}\left(x_i^{(1)}\right), \quad \text{если} \quad i=k,\\ &\frac{d^2x_i^{(2)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}x_i^{(2)}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_i^{(1)}\left(x_i^{(1)}\right), \quad \text{если} \quad i\neq k,\end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_i^{(3)}}{d\tau^2}+x_i^{(3)}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_i^{(2)}\left(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}\right)-2h_2x_i^{(1)}, \quad \text{если} \quad i=k,\\ &\frac{d^2x_i^{(3)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_i}{\lambda_k}x_i^{(3)}=\frac{1}{\lambda_k}\varphi_i^{(2)}\left(x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}\right)-2h_2x_i^{(1)}, \quad \text{если} \quad i\neq k,\end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

и т. д. Здесь $\varphi_i^{(m)}$ — коэффициенты разложения функции φ_i в ряды.

Начальные условия для $x_k^{(s)}$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &x_k^{(1)}(0)=1, \quad \dot{x}_k^{(1)}(0)=0,\\ &x_k^{(r)}(0)=\dot{x}_k^{(r)}(0)=0,\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

если $r>1$.

Начальные условия для x_i^s $(i\neq k)$ должны быть надлежащим образом подобраны.

Условимся рассматривать случай отсутствия кратных корней, т. е. будем предполагать, что $\lambda_s\neq\lambda_k$, если $k\neq s$. Тогда единственным периодическим решением периода 2π системы (4.36), удовлетворяющей условиям (4.39), будет

$$\left.\begin{aligned} &x_k^{(1)}=\cos\tau,\\ &x_s^{(1)}=0\end{aligned}\right\} \quad (s\neq k). \tag{4.40}$$

Подставляя формулы (4.40) в правые части системы (4.37) и разлагая функции $\varphi_i^{(1)}$ в ряд Фурье, получаем при $s\neq k$

$$\frac{d^2x_k^{(2)}}{d\tau^2}+x_k^{(2)}=\alpha_{k0}+\alpha_{k2}\cos 2\tau,$$

$$\frac{d^2x_s^{(2)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_s}{\lambda_k}x_s^{(2)}=\alpha_{s0}+\alpha_{s2}\cos 2\tau.$$

Периодические решения этой системы, удовлетворяющие усло-

виям (4.39), определяются однозначно. Они имеют при $s \neq k$ вид

$$x_k^{(2)} = \alpha_{k0} - \left(\alpha_{k0} - \frac{\alpha_{k2}}{3}\right)\cos\tau - \frac{\alpha_{k2}}{3}\cos 2\tau,$$

$$x_s^{(2)} = \frac{\alpha_{s0}\lambda_k}{\lambda_s} - \frac{\lambda_k}{4\lambda_k - \lambda_s}\cos 2\tau.$$

Первое из уравнений системы (4.38) может быть представлено в форме

$$\frac{d^2 x_k^{(3)}}{d\tau^2} + x_k^{(3)} = \beta_{k0} + \beta_{k1}\cos\tau + \beta_{k2}\cos 2\tau + \beta_{k3}\cos 3\tau - 2h_2\cos\tau.$$

Для того чтобы это уравнение имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы постоянная h_2 определялась равенством

$$h_2 = \frac{1}{2}\beta_{k1} = \frac{1}{4\lambda_k\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_k^{(3)}(t)\cos(t)\,dt. \tag{4.41}$$

Продолжая аналогичные выкладки, мы сможем вычислить любой член в разложениях (4.35).

Таким образом, метод Ляпунова дает возможность разыскивать периодические решения, близкие к главным колебаниям линейной системы. Эти колебания нелинейных систем естественно по аналогии с линейными колебаниями также называть главными колебаниями.

Предположим теперь, что все $\lambda_k > 0$, тогда мы можем разыскивать все главные колебания изучаемой нелинейной системы. Если бы речь шла о линейных колебаниях, то решение задачи о главных колебаниях исчерпало бы всю проблему, поскольку любое движение линейной системы можно получить суперпозицией главных колебаний. В нелинейных колебаниях принцип суперпозиции отсутствует. Поэтому, несмотря на то, что мы умеем строить n однопараметрических семейств частных решений, мы еще очень далеки от полного решения задачи. Например, в рамках теории Ляпунова мы не можем ответить на вопрос о том, существуют ли, кроме рассмотренных, другие периодические решения данной консервативной системы, и находить решение задачи Коши с фиксированными начальными данными.

§ 5. Автоколебания

1. Пример автоколебаний. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{5.1}$$

в котором функция f удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} > 0.$$

Уравнение (5.1) описывает движение некоторой консервативной системы с одной степенью свободы. В малой окрестности положения равновесия ($x=\dot{x}=0$) уравнение (5.1) определяет колебательные движения, которые происходят с постоянной амплитудой. Фазовая плоскость этого уравнения в окрестности этой точки целиком заполнена замкнутыми кривыми. Будем называть некоторую силу $\varphi(\dot{x})$, зависящую только от скорости, диссипативной, если для любого $\dot{x}\neq 0$ она удовлетворяет условию

$$\varphi(\dot{x})\dot{x}<0. \tag{5.2}$$

Предположим теперь, что колебания маятника происходят под действием консервативной силы $-f(x)$ и диссипативной силы $\varepsilon\varphi(\dot{x})$, где ε — некоторый малый параметр

$$\ddot{x}+f(x)=\varepsilon\varphi(\dot{x}). \tag{5.3}$$

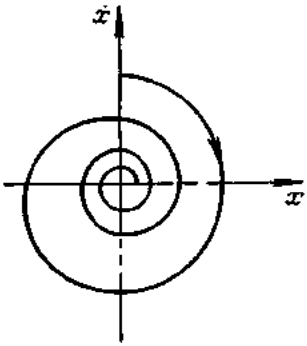

Рис. 14.

Если теперь умножить (5.3) на $\dot{x}$, то оно примет вид

$$\frac{dE}{dt}=\varepsilon\varphi(\dot{x})\dot{x},$$

где E — полная энергия маятника

$$E=\frac{\dot{x}^2}{2}+\int f(x)\,dx.$$

Так как имеет место неравенство (5.2), то в любой момент времени

$$\frac{dE}{dt}\leqslant 0,$$

причем равенство имеет место только для тех значений t, для которых $\dot{x}=0$. Таким образом, колебания, происходящие под действием консервативной и диссипативной силы затухают. Рассмотрим фазовую плоскость уравнения (5.3).

Пусть в некоторый момент времени $t=t_0$ система находится в состоянии $x=0$, $\dot{x}=\dot{x}_0>0$. Начальное значение энергии будет $E_0=\dot{x}_0^2/2$. По прошествии некоторого времени изображающая точка, двигаясь вдоль фазовой траектории, совершит полный оборот вокруг начала координат и снова пересечет ось ординат в некоторой точке $\dot{x}_1$, причем $E_1<E_0$. Следовательно, $\dot{x}_1<\dot{x}_0$. Заметим еще, что две фазовые траектории не могут пересекаться — через каждую точку фазовой плоскости, которая не является особой, проходит только одна фазовая траектория. Система (5.3) имеет только одну особую точку — начало координат. Таким образом, фазовый портрет уравнения (5.3) имеет вид, изображенный на рис. 14. Начало координат является особой точкой типа фокус. Изображающая точка движется в направлении,

указанном стрелкой. Фазовые траектории наматываются на фокус. Следовательно, в рассматриваемом случае фокус будет устойчивой особой точкой.

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример. Условимся дополнительно, что $|\varphi(\dot{x})|$ — монотонно возрастающая функция (рис. 15), и предположим, что на точку действует некоторая активная сила $\psi(x, \dot{x})$, причем $\psi(0, 0)=0$. Пусть эта сила обладает тем свойством, что за каждый период колебаний она вносит в систему некоторую порцию энергии. Таким образом, при отсутствии диссипативной силы энергия в системе все

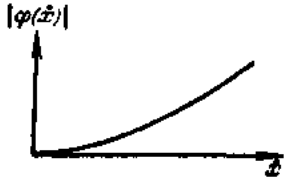

Рис. 15.

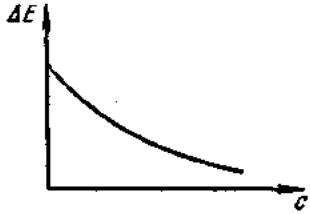

Рис. 16.

время возрастала бы и, следовательно, никакие стационарные режимы, кроме состояния покоя, в ней были бы невозможны.

Попробуем теперь представить себе характер колебаний в такой системе:

$$\ddot{x}+f(x)=\varepsilon[\varphi(\dot{x})+\psi(x, \dot{x})], \tag{5.4}$$

предполагая, что сила ψ тем сильнее «раскачивает» маятник, чем ближе его состояние к положению равновесия, т. е. чем меньше амплитуда x. На рис. 16 изображена зависимость порции энергии ΔE, поступающей в систему за один период, от амплитуды колебаний.

Таким образом, колебание происходит под действием сил, одна из которых является консервативной, вторая диссипативная — она рассеивает энергии за один период тем больше, чем больше амплитуда, и третья, которая вносит тем больше энергии в систему, чем меньше амплитуда.

Положение равновесия этой системы находится в точке $(\dot{x}^*, 0)$, где x^* — корень уравнения,

$$f(x^*)=\varepsilon\psi(x^*, 0),$$

и пусть вначале изображающая точка находится вблизи положения равновесия. В этом случае энергия, которая рассеивается за один оборот, будет меньше энергии, которая поступает в систему. Следовательно, в непосредственной близости положения равновесия амплитуда колебаний c будет увеличиваться.

Предположим теперь, что в начальный момент изображающая точка находится достаточно далеко от начала координат. Тогда за один оборот будет рассеиваться энергии больше, чем поступать в систему. В этом случае амплитуда c будет уменьшаться.

Таким образом, если начальная амплитуда колебаний большая, то колебания затухают, т. е. амплитуда убывает, а если величина амплитуды малая, то она с течением времени возрастает. Это дает основание думать, что в системе может установиться такой режим колебаний (с такой постоянной амплитудой c^*), при котором энергия, поступившая в систему за одно колебание, будет равна энергии, которая за это же время рассеивается диссипативной силой. Этот режим называется автоколебательным. На фазовой плоскости ему соответствует некоторая замкнутая кривая, называемая *предельным циклом*. Фазовая плоскость автоколебательной системы (5.4) изображена на рис. 17. Стрелка показывает направление движения изображающей точки. Положение равновесия будет неустойчивым фокусом. Фазовые траектории будут сматываться с фокуса и наматываться изнутри на предельный цикл. Траектории, которые находятся вне предельного цикла, также будут наматываться (извне) на предельный цикл. Таким образом, автоколебательный режим в рассматриваемом случае будет устойчивым.

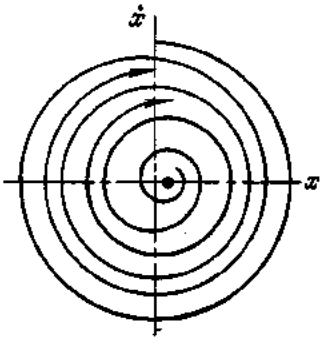

Рис. 17.

2. Формулировка математической задачи. Рассматриваемый пример является очень частным случаем автоколебательных систем, имеющих одно положение равновесия и один определенный цикл. Существуют системы, значительно более сложные, например такие, которые имеют бесчисленное множество предельных циклов.

Математическая задача построения автоколебательных режимов в системах с одной степенью свободы сводится к отысканию возможных периодических решений уравнения

$$\ddot{x}+f(x)=\varepsilon F(x,\ \dot{x}), \tag{5.5}$$

где ε — параметр. Функции F и f будем считать аналитическими функциями своих переменных. В этой книге мы ограничимся изучением только тех периодических решений, которые при $\varepsilon=0$ переходят в периодические решения порождающего уравнения (5.1).

Если энергия системы достаточно мала, то, как мы знаем, любое решение системы (5.1) является периодическим. Но пример, рассмотренный в начале параграфа, показывает, что не всякое решение порождающего уравнения является «порождающим». В общем случае существуют только исключительные решения уравнения (5.1), которые являются пределом (при $\varepsilon=0$) периодических решений уравнения (5.5). Их то мы и будем называть порождающими. В рассмотренном примере существовало только единственное решение порождающего уравнения (5.1), характеризуемое параметром c^*, в окрестности которого существовали периодические решения уравнения (5.5).

Таким образом, задача, которая рассматривается в этом параграфе, состоит в том, что мы должны одновременно разыскать периодические решения уравнения (5.5) как функции времени и параметра ε и те из периодических решений уравнения (5.1), в которые переходят периодические решения уравнения (5.5) при $\varepsilon \to 0$. Существует много методов решения этой задачи. В настоящем параграфе мы будем изучать метод, предложенный Пуанкаре. С некоторыми из других методов мы познакомимся позднее.

3. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае квазилинейных систем (метод Пуанкаре). Начнем изучение эффективных методов построения автоколебательных режимов с исследования квазилинейных уравнения вида

$$\ddot{x}+\lambda^2 x=\varepsilon F(x,\ \dot{x}). \tag{5.6}$$

Следует ожидать, что период автоколебательного режима зависит от параметра ε:

$$T=T(\varepsilon)=\frac{2\pi}{\omega(\varepsilon)},$$

причем $\omega(\varepsilon)$ условимся называть частотой. Будем искать режимы, частота которых обладает следующим свойством:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(\varepsilon)=\lambda.$$

На этом основании положим

$$\omega(\varepsilon)=\frac{\lambda}{1+g_1\varepsilon+g_2\varepsilon^2+\ldots} \tag{5.7}$$

и сделаем замену независимого переменного

$$t=\frac{\tau}{\lambda}(1+g_1\varepsilon+g_2\varepsilon^2+\ldots). \tag{5.8}$$

Значению $t=T$ отвечает значение $\tau=2\pi$, т. е. период искомого решения относительно новой переменной теперь снова фиксирован — он равен 2π. Числа g_i должны быть определены в процессе построения решения. Перепишем уравнение (5.6), сделав в нем замену (5.7):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x(1+g_1\varepsilon+\ldots)^2=\varepsilon F\left(x,\ \frac{dx}{d\tau}\frac{\lambda}{1+g_1\varepsilon+\ldots}\right)\frac{(1+g_1\varepsilon+\ldots)^2}{\lambda^2}. \tag{5.9}$$

Поскольку уравнения (5.6) и (5.9) не содержат времени и уравнение (5.9) инвариантно относительно преобразования $t\to t+h$, нам достаточно рассмотреть следующую задачу Коши:

$$t=0:\qquad x=x_0(\varepsilon),\qquad \frac{dx}{d\tau}=0. \tag{5.10}$$

Заметим, что величина $x_0(\varepsilon)$ также заранее неизвестна. Итак, мы пришли к задаче отыскания числа $x_0(\varepsilon)$ и периодического решения уравнения (5.9) периода 2π, которое определяется этим числом. Решение такой задачи будем искать в виде ряда, расположенного по степеням параметра ε,

$$x=x^{(0)}+\varepsilon x^{(1)}(\tau)+\varepsilon^2x^{(2)}(\tau)+\ldots \tag{5.11}$$

Функции $x^{(i)}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{d^2x^{(0)}}{d\tau^2}+x^{(0)}=0, \tag{5.12}$$

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}+x^{(1)}=F\left(x^{(0)},\ \frac{dx^{(0)}}{d\tau}\lambda\right)-2g_1x^{(0)}. \tag{5.13}$$

. . . . . .

Выпишем общее решение уравнения (5.12)

$$x^{(0)}=c\cos\tau+d\sin\tau,$$

но в силу (5.10) $d=0$, т. е.

$$x^{(0)}=c\cos\tau. \tag{5.14}$$

Величина c — амплитуда порождающего решения — нам неизвестна На этом шаге алгоритма она остается неопределенной. Рассмотрим теперь уравнение (5.13). Его можно переписать в виде

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}+x^{(1)}=F^{(1)}-2g_1c\cos\tau, \tag{5.15}$$

где

$$F^{(1)}=\frac{1}{\lambda^2}F(c\cos\tau,\ -\lambda c\sin\tau)$$

является некоторой периодической функцией τ периода 2π. Для того чтобы уравнение (5.15) допускало периодические решения,

необходима и достаточна ортогональность правой части этого уравнения функциям $\sin\tau$ и $\cos\tau$:

$$I(c)\equiv\int_0^{2\pi} F(c\cos\tau,\ -\lambda c\sin\tau)\sin\tau\,d\tau=0, \tag{5.16}$$

$$g_1(c)=\frac{1}{2\pi c\lambda^2}\int_0^{2\pi} F(c\cos\tau,\ -\lambda c\sin\tau)\cos\tau\,dt. \tag{5.17}$$

Первое из этих уравнений представляет собой некоторое трансцендентное уравнение для определения c — амплитуды порождающего решения. Уравнение (5.16) может вообще не иметь решений. Это будет в том случае, когда система (5.5) не допускает автоколебательных режимов, например в том случае, когда сила F является диссипативной. Уравнение (5.16) может иметь конечное число решений, как это было в примере, рассмотренном в п. 1 этого параграфа. Уравнение (5.16) может оказаться тождеством, справедливым для любого значения c. Такая ситуация имеет место всякий раз, когда «возмущающая» функция F является консервативной. В самом деле, пусть $F=F(x)$; тогда

$$I(c)=\int_0^{2\pi} F(c\cos\tau)\sin\tau\,d\tau.$$

Функция $F(c\cos\tau)$ — четная периодическая функция τ периода 2π. Следовательно, она разлагается в ряд Фурье, содержащий только $\cos k\tau$ и, следовательно, в силу ортогональности $\sin\tau$ и $\cos k\tau$ для любого k

$$I(c)\equiv 0.$$

Условимся в дальнейшем считать, что c — это отличный от нуля корень уравнения (5.16) кратности единицы *). Тогда уравнение (5.17) определяет единственное значение $g_1(c)$. Таким образом, на этом шаге алгоритм позволяет определить амплитуду порождающего решения и первую поправку на частоту, т. е. полностью рассчитать нулевое приближение. Если ограничиться нулевым приближением, то мы получим приближенное решение в виде

$$x^{(0)}=c\cos\frac{\lambda t}{1+g_1\varepsilon}. \tag{5.18}$$

*) Могут быть рассмотрены и более общие случаи. Однако при этом может оказаться, что решение нельзя представить в виде рядов (5.11): функция $x(c)$ должна быть представлена в виде ряда, расположенного по дробным степеням параметра c.

Вернемся теперь снова к уравнению (5.13). Определив c и g_1 из уравнений (5.16) и (5.17), мы пришли к уравнению, в котором правая часть — это периодическая функция времени. Эта функция обладает тем свойством, что она не содержит первых членов разложения в ряд Фурье. Уравнение (5.13) теперь можно переписать в виде

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}+x^{(1)}=F_{00}+F_{02}\cos 2\tau+F_{12}\sin 2\tau+F_{13}\cos 3\tau+\ldots,$$

где F_{ij} — некоторые известные числа.

Его решение имеет вид

$$x^{(1)}=\varphi_1(\tau)+M_1\cos\tau+N_1\sin\tau, \tag{5.19}$$

где $\varphi_1(\tau)$ — периодическая функция, разложение которой не содержит $\sin\tau$ и $\cos\tau$;

$$\varphi_1^{(\tau)}=F_{00}-\frac{F_{02}}{3}\cos 2\tau-\frac{F_{12}}{3}\sin 2\tau-\ldots-\frac{F_{0n}}{n^2-1}\cos n\tau-$$
$$-\frac{F_{1n}}{n^2-1}\sin n\tau-\ldots$$

Функция $x^{(1)}$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{dx^{(1)}}{d\tau}\right)_{\tau=0}=0,$$

которое позволяет вычислить постоянную N

$$N_1=\frac{2}{3}F_{12}+\frac{3}{8}F_{13}+\ldots+\frac{n}{n-1}F_{1n}+\ldots \tag{5.20}$$

Постоянная M_1 в этом приближении определена быть не может. Следовательно, для того чтобы определить решение с точностью до членов, содержащих ε^2, необходимо рассмотреть второе приближение.

Уравнение для $x^{(2)}$ имеет вид

$$\frac{d^2x^{(2)}}{d\tau^2}+x^{(2)}=F^{(2)}-2g_2\cos\tau, \tag{5.21}$$

где

$$F^{(2)}=-2g_1x^{(1)}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial F}{\partial x}x^{(1)}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{dx^{(1)}}{d\tau}+F_*^{(2)},$$

причем $F_*^{(2)}$ — функция, не содержащая величин g_2 и $x^{(1)}$

$$F_*^{(2)}=-x^0g_1^2-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x'}g_1\frac{\partial x^{(0)}}{\partial\tau}+\frac{1}{\lambda^2}F2g_1.$$

Здесь x' означает производную по аргументу τ. Функции F, $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial x'$ вычислены при $x=x^{(0)}$.

Преобразуем уравнение (5.21), заменив в нем величины $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$ их выражениями (5.14) и (5.19):

$$\frac{d^2x^{(2)}}{d\tau^2}+x^{(2)}=-2g_2c\cos\tau-2g_1M_1\cos\tau-2g_1N_1\sin\tau+$$
$$+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial F}{\partial x}(M_1\cos\tau+N_1\sin\tau)+$$
$$+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial F}{\partial x'}(-M_1\sin\tau+N_1\cos\tau)+F_{**}^{(2)}, \qquad (5.22)$$

где

$$F_{**}^{(2)}=F_2^{(*)}-2g_1\varphi_1+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial F}{\partial x}\varphi_1+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}$$

является известной функцией времени. Заметим, что величина N_1, входящая в уравнение (5.22), также известна; она определяется формулой (5.20).

Выпишем теперь условия существования периодических решений. Их можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-2g_2-2g_1M_1+\frac{M_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\tau-\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\sin\tau\right)\cos\tau\,d\tau+\\
&\quad+\frac{N_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin\tau+\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\cos\tau\right)\cos\tau\,d\tau+\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_{**}^{(2)}\cos\tau\,d\tau=0,\\
&-2g_1N_1+\frac{M_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\tau-\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\sin\tau\right)\sin\tau\,d\tau+\\
&\quad+\frac{N_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin\tau+\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\cos\tau\right)\sin\tau\,d\tau+\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_{**}^{(2)}\sin\tau\,d\tau=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(5.23)$$

Преобразуем уравнения (5.23). Сначала рассмотрим второй интеграл, входящий в первое из этих уравнений, и проинтегрируем

его по частям:

$$\frac{N_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\sin\tau+\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\cos\tau\right)\cos\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{N_1}{\pi\lambda^2 c}\int_0^{2\pi}\frac{dF(c\cos\tau,\ -\lambda c\sin\tau)}{d\tau}\cos\tau\,d\tau=$$

$$=-\frac{N_1}{\pi\lambda^2 c}\int_0^{2\pi}F(c\cos\tau,\ -\lambda c\sin\tau)\sin\tau\,d\tau=0,$$

поскольку амплитуда c является корнем уравнения (5.16). Преобразуем теперь первый из интегралов, входящих в это уравнение:

$$I_1=\frac{M_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\tau-\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\sin\tau\right)\cos\tau\,d\tau.$$

Для этого заметим сначала, что

$$\frac{\partial F(c\cos\tau,\ -\lambda c\sin\tau)}{\partial c}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos\tau-\lambda\frac{\partial F}{\partial x'}\sin\tau,$$

т. е. выражение I_1 можно переписать так:

$$I_1=\frac{M_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial c}\cos\tau\,d\tau.$$

Рассмотрим теперь равенство (5.17) и перепишем его в следующей форме:

$$\frac{M_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}F\cos\tau\,d\tau=2g_1cM_1.$$

Дифференцируя это выражение по c, получим

$$I_1=2g_1M_1+2cM_1\frac{dg_1}{dc}.$$

Таким образом, первое из уравнений (5.23) в окончательном виде будет иметь следующую форму:

$$g_2=M_1\frac{dg_1}{dc}+\frac{1}{2\pi c}\int_0^{2\pi}F_{**}^{(2)}\cos\tau\,d\tau. \tag{5.24}$$

Преобразуем теперь второе уравнение (5.23). Прежде всего перепишем его в виде

$$-2g_1N_1+\frac{M_1}{\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial c}\sin\tau\,d\tau-\frac{N_1}{c\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial\tau}\sin\tau\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_{**}^{(2)}\sin\tau\,d\tau=0.$$

Используя (5.16), получим

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial c}\sin\tau\,d\tau=\frac{dI}{dc}.$$

Далее

$$\frac{1}{c\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial\tau}\sin\tau\,d\tau=\frac{-1}{c\pi\lambda^2}\int_0^{2\pi}F\cos\tau\,d\tau=-2g_1.$$

Таким образом, в окончательном виде это уравнение будет иметь следующий вид:

$$M_1\frac{1}{\lambda^2}\frac{dI}{dc}=-\int_0^{2\pi}F_{**}^{(2)}\sin\tau\,d\tau. \tag{5.25}$$

Так как c — простой нуль функции $I(c)$, то $dI/dc\neq0$, и уравнение (5.21) определяет единственное значение M_1. После определения M_1 величина g_2 определяется также единственным образом по формуле (5.24).

Определив M_1 и g_2 согласно (5.24) и (5.25), мы обеспечим разрешимость уравнения (5.21):

$$x^{(2)}=\varphi_2(\tau)+M_2\cos\tau+N_2\sin\tau,$$

где $\varphi_2(\tau)$ — некоторая периодическая функция τ периода 2π. Постоянная N_2 определяется из условия

$$\left(\frac{dx^{(2)}}{d\tau}\right)_{\tau=0}=0.$$

Постоянная M_2 в этом приближении остается неопределенной. Если мы хотим построить решение, учитывающее второе приближение, то нужно рассмотреть также и третье приближение и т. д.

Легко видеть, что этот процесс можно неограниченно продолжить и вычислить любой член разложения (5.11). Заметим, что только на первом шаге нам приходится решать нелинейное

уравнение $I(c)=0$, которое имеет, вообще говоря, произвольное количество решений. Но определив амплитуду порождающего решения, мы в дальнейшем имеем дело только с линейными уравнениями и все остальные искомые величины определятся однозначно. Заметим еще, что найденное решение удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\frac{dx}{dt}=0, \quad x(0)=c+\varepsilon(\varphi_1(0)+M_1)+\varepsilon^2(\varphi_2(0)+M_2)+\ldots,$$

где c — это корень уравнения $I(c)=0$. Это решение при $\varepsilon=0$ переходит в решение уравнения

$$\ddot{x}+\lambda^2 x=0, \tag{5.6'}$$

определенное начальными условиями

$$\dot{x}_0=0, \qquad x_0=c,$$

т. е. в решение

$$x=c\cos\lambda t.$$

Ряды (5.11), как это показал Пуанкаре, сходятся для достаточно малых значений параметра ε.

4. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае систем, близких к консервативным. Рассмотрим теперь общий случай уравнения (5.5). Период искомого решения будет снова функцией малого параметра ε. Кроме того, он будет зависеть от того, какой окажется амплитуда порождающего решения c, т. е. $T=T(c,\varepsilon)$. Период и частота этого колебания будут аналитическими функциями этих параметров. Положим

$$\omega(c,\varepsilon)=\frac{\lambda(c)}{1+\varepsilon g_1(c)+\varepsilon^2 g_2(c)+\ldots},$$

где $\lambda(c)$ — частота колебаний «порождающего» решения. Сделаем далее замену независимого переменного

$$t=\frac{\tau}{\lambda(c)}(1+g_1\varepsilon+\ldots).$$

Уравнение (5.5) примет теперь вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{(1+g_1\varepsilon+\ldots)^2}{\lambda^2(c)}f(x)=\varepsilon F\left(x;\ \frac{dx}{d\tau}\frac{\lambda(c)}{1+g_1\varepsilon+\ldots}\right)\frac{(1+g_1\varepsilon+\ldots)^2}{\lambda^2(c)}. \tag{5.26}$$

При $\varepsilon=0$ уравнение (5.26) переходит в следующее:

$$\frac{d^2x^{(0)}}{d\tau^2}+\frac{f(x^{(0)})}{\lambda^2(c)}=0. \tag{5.27}$$

Заметим, что для достаточно малых значений c все решения уравнения (5.27) периодические, причем период этих решений

равен 2π и не зависит от амплитуды c. Согласно результатам § 3 этой главы решение уравнения (5.27) можно представить в виде

$$x^{(0)}=c\cos\tau+c^2\psi_2(\tau)+\ldots, \tag{5.28}$$

где $\psi_i(\tau)$ — периодические функции τ периода 2π. Обе производные

$$\left.\begin{aligned}\psi^{(1)}(c,\ \tau)&=\frac{\partial x^{(0)}}{\partial c}=\cos\tau+2c\psi_2(\tau)+3c^2\psi_3(\tau)+\ldots,\\ \psi^{(2)}(c,\ \tau)&=\frac{\partial x^{(0)}}{\partial\tau}=-c\sin\tau+c^2\frac{d\psi_2(\tau)}{d\tau}+\ldots\end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

будут периодическими функциями τ периода 2π. Используя это обстоятельство, мы можем построить алгоритм вычисления периодических решений, следуя схеме, которая была использована в предыдущем пункте этого параграфа.

Периодическое решение системы (5.26) будем искать в виде ряда (5.11). Положим

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i x^{(i)}.$$

Для функций $x^{(i)}$ будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{d^2x^{(0)}}{d\tau^2}=-\frac{1}{\lambda^2(c)}f(x^{(0)}), \tag{5.27'}$$

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda^2(c)}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x^0}x^{(1)}=\frac{1}{\lambda^2}F\left(x^{(0)};\ \frac{dx^{(0)}}{d\tau}\lambda\right)-\frac{1}{\lambda^2}g_1(c)f(x^{(0)}) \tag{5.30}$$

и т. д.

Функции $x^{(i)}$ удовлетворяют условиям (5.10). Периодическое решение уравнения (5.27) периода 2π, удовлетворяющее условию (5.10), обозначим через

$$x^{(0)}=Q(c,\ \tau),$$

где постоянная c в этом приближении остается неопределенной.

Рассмотрим теперь уравнение (5.30). Так как функция $Q(c,\tau)$ является периодической функцией τ периода 2π, то правая часть этого уравнения и функция $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x^0}$ также являются периодическими функциями τ периода 2π.

Уравнение

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x^0}x^{(1)}=0$$

является уравнением в вариациях для уравнения (5.27), и его фундаментальные решения — функции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ — известны.

Они определяются формулами (5.29) и являются периодическими функциями τ периода 2π.

Для того чтобы уравнение (5.30) имело периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы правая часть этого уравнения была ортогональна функциям $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$, т. е. чтобы она удовлетворяла условиям (2.22)

$$\left.\begin{aligned} g_1(c)\int_0^{2\pi} f(Q)\,\psi^{(1)}(\tau)\,d\tau &= \int_0^{2\pi} F\left(Q,\ \lambda\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right)\psi^{(1)}(\tau)\,d\tau,\\ g_1(c)\int_0^{2\pi} f(Q)\,\psi^{(2)}(\tau)\,d\tau &= \int_0^{2\pi} F\left(Q,\ \lambda\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right)\psi^{(2)}(\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Получена система двух трансцендентных уравнений (5.31) относительно двух искомых величин: «амплитуды» c и «поправки на частоту» g_1. Определив эти величины, мы можем найти решение нашей задачи в нулевом приближении

$$x = Q\left(c,\ \frac{\lambda(c)\,t}{1+\varepsilon g_1(c)}\right). \tag{5.32}$$

Для того чтобы получить функцию (5.32), мы должны были решить систему двух уравнений, в которые g_1 входит линейно. Исключив эту величину, мы приходим к некоторому трансцендентному уравнению. Каждому корню этого уравнения отвечает одно вполне определенное значение поправки на частоту $g_1(\varepsilon)$.

Процедура построения последующих приближений совершенно ясна, она является почти дословным повторением процедуры, рассмотренной в предыдущем пункте этого параграфа. Если c является простым и отличным от нуля корнем уравнения (5.31), то расчет каждого последующего приближения сводится к решению линейных уравнений и эти уравнения всегда разрешимы.

Примечание. Условие, что c является простым корнем, существенно. Отказ от этого условия резко усложняет теорию и делает изложенную схему расчета в общем случае просто неверной. Разложения типа (5.11) перестают быть справедливыми. Решения представимы в этих случаях в виде рядов, расположенных по дробным степеням параметра ε. Изложение подобных теорий далеко выходит за рамки элементарного учебника, каким является эта книга.

5. Пример. В качестве примера для приложений методов данного параграфа рассмотрим известное уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}+\lambda^2 x=\varepsilon(1-ax^2)\dot{x} \tag{5.33}$$

и построим его возможные периодические режимы в нулевом приближении. После преобразования (5.7) уравнение (5.33) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1 + 2g_1\varepsilon + \ldots) = \varepsilon(1 - ax^2)\frac{dx}{d\tau}\frac{1 + g_1\varepsilon + \ldots}{\lambda}. \qquad (5.34)$$

Разыскивая решение в виде ряда (5.11), где функции $x^{(i)}$ удовлетворяют условиям (5.10), мы найдем, что

$$x^{(0)} = c\cos\tau,$$

а $x^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2} + x^{(1)} = -\frac{1}{\lambda}(1 - ac^2\cos^2\tau)\,c\sin\tau - 2g_1c\cos\tau. \qquad (5.34')$$

Раскладывая правую часть уравнения (5.34′) в ряд Фурье, получим

$$\frac{d^2x^{(1)}}{d\tau^2} + x^{(1)} = -\frac{c}{\lambda}\left\{\sin\tau\left(1 - \frac{ac^2}{4}\right) - \sin 3\tau\,\frac{ac^2}{4}\right\} - 2g_1c\cos\tau. \qquad (5.35)$$

Для того чтобы уравнение (5.35) имело периодические решения периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы разложение правой части в ряд Фурье не содержало первых гармоник, т. е. чтобы коэффициенты при $\sin\tau$ и $\cos\tau$ были равны нулю. Это дает два уравнения для определения c и g_1, откуда

$$g_1 = 0, \qquad c = \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = \dfrac{2}{\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (5.35) имеет два стационарных режима

$$x_1 \equiv 0, \qquad x_2 = \frac{2}{\sqrt{a}}\cos\tau. \qquad (5.36)$$

Первый из стационарных режимов — это состояние покоя. Второй стационарный режим — это режим автоколебаний.

Мы видим, что уравнение (5.33) допускает автоколебательный режим только в том случае, когда a положительно.

6. Автоколебания в квазилинейных системах со многими степенями свободы. Исследование автоколебаний в системах большого числа степеней свободы сталкивается с целым рядом трудностей. Прежде всего, эта теория очень громоздка. Кроме

того, достаточно общее изложение такой теории требует предварительного изучения ряда вопросов теории линейных уравнений. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением одной частной задачи этой теории — задачи об автоколебаниях квазилинейной системы в том случае, когда порождающая система консервативна.

Использование канонических переменных позволяет ограничиться рассмотрением следующей системы уравнений:

$$\ddot{x}_i + \lambda_i^2 x_i = \varepsilon F_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.37}$$

При $\varepsilon = 0$ в этой системе существуют периодические решения — главные колебания с частотами λ_i, поэтому в рамках теории малого параметра имеет смысл следующая задача: определить возможные периодические решения системы (5.37), которые при $\varepsilon \to 0$ переходят в одно из главных колебаний системы

$$\ddot{x}_i + \lambda_i^2 x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.38}$$

Для определенности условимся разыскивать периодическое решение системы (5.37), переходящее в первое главное колебание системы (5.38). Условимся при этом, что все λ_i взаимно простые.

Сделаем замену независимого переменного (5.8):

$$t = \frac{\tau}{\lambda_1}(1 + g_1\varepsilon + g_2\varepsilon^2 + \ldots).$$

После этой замены система уравнений (5.37) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1(1 + 2g_1\varepsilon + \ldots) = \\ &\qquad = \varepsilon F_1\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{d\tau}\cdot\frac{\lambda_1}{1 + g_1\varepsilon + \ldots}, \ldots\right. \\ &\qquad\qquad \left.\ldots, \frac{dx_n}{d\tau}\,\frac{\lambda_1}{1 + g_1\varepsilon + \ldots}\right)\frac{1 + 2g_1\varepsilon + \ldots}{\lambda_1^2}, \\ &\frac{d^2x_s}{d\tau^2} + \frac{\lambda_s^2}{\lambda_1^2}x_s = \varepsilon F_s\cdot\frac{1 + 2g_1\varepsilon + \ldots}{\lambda_1^2} \qquad (s = 2, 3, 4, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

Решение системы (5.39) будем искать в виде рядов

$$x_i = x_i^{(0)} + \varepsilon x_i^{(1)} + \varepsilon^2 x_i^{(2)} + \ldots \tag{5.40}$$

Функции $x_i^{(k)}$ удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_1^{(0)}}{d\tau^2}+x_1^{(0)}=0,\\ &\frac{d^2x_s^{(0)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_s^2}{\lambda_1^2}x_s^{(0)}=0; \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_1^{(1)}}{d\tau^2}+x_1^{(1)}=\frac{1}{\lambda_1^2}F_1\left(x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)},\ \frac{dx_1^{(0)}}{d\tau}\lambda_1,\ \ldots\right.\\ &\qquad\qquad\left.\ldots,\ \frac{dx_n^{(0)}}{d\tau}\lambda_1\right)-2g_1x_1^{(0)},\\ &\frac{d^2x_s^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_s^2}{\lambda_1^2}x_s^{(1)}=\frac{1}{\lambda_1^2}F_s\left(x_1^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)},\ \frac{dx_1^{(0)}}{d\tau}\lambda_1,\ \ldots\right.\\ &\qquad\qquad\left.\ldots,\ \frac{dx_n^{(0)}}{d\tau}\lambda_1\right)-2g_1x_s^{(0)}\qquad(s=2,\ 3,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

и т. д.

Начальные условия для функций x_i мы должны надлежащим образом подобрать. Однако, используя тот факт, что правые части системы (5.39) не зависят от времени, мы можем потребовать, чтобы при $\tau=0$

$$\frac{dx_1}{d\tau}=0.$$

Отсюда находим, что при $\tau=0$

$$\frac{dx_1^{(k)}}{d\tau}=0\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.43}$$

Периодическое решение системы (5.41), удовлетворяющее начальным условиям (5.43), единственно и имеет вид

$$x_1^{(0)}=c\cos\tau,\quad x_s^{(0)}=0\qquad(s=2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{5.44}$$

где c — произвольная постоянная, которая определяется в следующем приближении.

Система (5.42) с учетом (5.44) может быть переписана в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x_1^{(1)}}{d\tau^2}+x_1^{(1)}=\frac{1}{\lambda_1^2}F_1(c\cos\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0,\\ &\qquad\qquad-c\lambda_1\sin\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0)-2g_1c\cos\tau,\\ &\frac{d^2x_s^{(1)}}{d\tau^2}+\frac{\lambda_s^2}{\lambda_1^2}x_s^{(1)}=\frac{1}{\lambda_1^2}F_s(c\cos\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0,\\ &\qquad\qquad-c\lambda_1\sin\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0)\qquad(s=2,\ 3,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{5.45}$$

Для того чтобы система (5.45) имела периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} F_1(c\cos\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ -c\lambda_1\sin\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0)\sin\tau\,d\tau = 0,\\ &g_1 = \frac{1}{2\pi c\lambda_1^2}\int_0^{2\pi} F_1(c\cos\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0,\\ &\qquad\qquad -c\lambda_1\sin\tau,\ 0,\ \ldots,\ 0)\cos\tau\,d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (5.46)$$

Первое из этих уравнений служит для определения амплитуды порождающего главного колебания, второе определяет первую поправку на частоту. Определив эти величины, мы находим функцию $x_1^{(1)}$ в виде (5.19), причем N_1 может быть определена, так как эта функция должна удовлетворять условию (5.43). Итак,

$$x_1^{(1)} = \varphi_1(\tau) + M_1\cos\tau + N_1\sin\tau,$$

где функция φ_1 — некоторая вполне определенная периодическая функция, M_1 — постоянная, которая определяется из следующего приближения.

Решение уравнения для $x_s^{(1)}$ имеет вид

$$x_s^{(1)} = \varphi_s(\tau),$$

где $\varphi_s(\tau)$ — вполне определенные периодические функции периода 2π. Аналогично вычисляются и остальные члены разложения рядов (5.40).

Примечание. Для построения периодических решений мы использовали каноническое представление порождающей системы. В такой форме все вычисления значительно упрощаются. Разумеется при решении конкретных задач в процедуре предварительного выбора канонических переменных необходимости нет.

§ 6. Метод Г. В. Каменкова

В предыдущих параграфах были изложены методы отыскания периодических решений, использующие разложение в ряды специального вида, расположенные по степеням малого параметра. Эти методы были разработаны в конце прошлого века Ляпуновым и Пуанкаре и послужили источником многочисленных исследований. Иной подход к решению этих же задач был предложен совсем недавно Г. В. Каменковым. Этот метод обладает высокой эффективностью. Его возможности, по-видимому,

не исчерпываются теми задачами, для которых он был создан. Для иллюстрации метода Г. В. Каменкова рассмотрим две простейшие задачи отыскания периодических решений, ограничиваясь при этом изложением только формальной стороны вопроса.

1. Квазилинейная теория. Теорема Г. В. Каменкова. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + \mu X_1(x, y) + \mu^2 X_2(x, y) + \ldots, \\ \dot{y} &= \lambda x + \mu Y_1(x, y) + \mu^2 Y_2(x, y) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где μ — малый параметр, X_i и Y_i — однородные полиномы относительно переменных x и y.

Пусть $x=0$ и $y=0$ — единственная особая точка системы (6.1) для достаточно малых значений параметра μ.

Введем полярные координаты

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{6.2}$$

и составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют новые независимые переменные r и θ. Дифференцируя (6.2) и используя (6.1), получим

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= -\lambda r\sin\theta + \mu X_1(r\cos\theta, r\sin\theta) + \\ &\quad + \mu^2 X_2(r\cos\theta, r\sin\theta) + \ldots, \\ \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= \lambda r\cos\theta + \mu Y_1(r\cos\theta, r\sin\theta) + \\ &\quad + \mu^2 Y_2(r\cos\theta, r\sin\theta) + \ldots. \end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$, мы придем к системе уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{r} &= \mu R_1(r, \theta) + \mu^2 R_2(r, \theta) + \ldots, \\ \dot{\theta} &= \lambda + \mu F_1(r, \theta) + \mu^2 F_2(r, \theta) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где

$$R_k = X_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Y_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta,$$

$$F_k = \frac{1}{r}\left[Y_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - X_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right],$$

функции R_k и F_k — полиномы от r некоторой степени m_k

$$\left.\begin{aligned} R_k &= rR_k^{(1)}(\theta) + r^2 R_k^{(2)}(\theta) + \ldots + r^{m_k} R_k^{(m_k)}(\theta), \\ F_k &= F_k^{(0)}(\theta) + rF_k^{(1)}(\theta) + \ldots + r^{m_k-1} F_k^{(m_k-1)}(\theta). \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Здесь функции $R_k^{(j)}$ и $F_k^{(j)}$ — некоторые полиномы относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Определим функцию $V(r, \theta)$ при помощи равенства

$$r = V + \mu\left(VU_1^{(1)} + V^2U_1^{(2)} + \ldots + V^{m_1}U_1^{(m_1)}\right) + \\ + \mu^2\left(VU_2^{(1)} + V^2U_2^{(2)} + \ldots + V^{m_2}U_2^{(m_2)}\right) + \ldots, \qquad (6.5)$$

где $U_i^{(j)}$ — некоторые полиномы относительно $\sin\theta$ и $\cos\theta$, которыми мы будем распоряжаться в процессе решения задачи.

Заметим, что для достаточно малых μ функция V, определенная при помощи равенства (6.5), будет определенно положительной функцией r, каково бы ни было θ.

Разрешив уравнение (6.5) относительно V, получим

$$V = r + \mu V_1(r, \theta) + \mu^2 V_2(r, \theta) + \ldots \qquad (6.5')$$

Так как U_i — полиномы от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, то и функции V_i — также полиномы от тех же величин. В этом легко убедиться непосредственной проверкой, рассматривая (6.5) как уравнение относительно V и разыскивая его решения в форме ряда (6.5′). Таким образом, функция $V(r, \theta)$ в общем случае будет периодической функцией θ периода 2π.

Вернемся теперь к выражению (6.5) и положим в нем $V = c$, где c — заданная постоянная, тогда мы получим

$$r = \Phi(c, \mu, \theta) = c + \mu\left(cU_1^{(1)} + \ldots + c^{m_1}U_1^{(m_1)}\right) + \mu^2(\quad) + \ldots, \qquad (6.6)$$

где Φ — периодическая функция θ периода 2π. Уравнение (6.6) определяет в этом случае в фазовой плоскости некоторую замкнутую кривую — цикл. Таким образом, для данной конкретной системы функций $U_i^{(j)}$ каждому значению c формула (6.6) ставит в соответствие в фазовой плоскости некоторую замкнутую траекторию. На основании замечания, которое мы сделали при выводе (6.5′), мы можем утверждать, что для достаточно малых μ, двум различным значениям постоянной c отвечают два непересекающихся цикла, причем цикл, который отвечает меньшему значению постоянной, лежит внутри другого цикла.

Идея, лежащая в основе метода Г. В. Каменкова, состоит в следующем. Предположим, что нам удалось подобрать периодические функции $U_i^{(j)}(\theta)$ таким образом, что производная dV/dt, вычисленная в силу уравнений (6.3), будет равна 0, т. е. V будет интегралом движения. Тогда кривая, заданная уравнением (6.5), будет искомым периодическим решением.

Продифференцируем (6.5) в силу уравнений (6.3)

$$\mu\left[rR_1^{(1)}(\theta)+\ldots+r^{m_1}R_1^{(m_1)}(\theta)\right]+\mu^2\left[rR_2^{(1)}(\theta)+\ldots+r^{m_2}R_2^{(m_2)}(\theta)\right]+$$
$$+\ldots=\frac{dV}{dt}H+\mu\left[V\lambda\frac{dU_1^{(1)}}{d\theta}+V^2\lambda\frac{dU_1^{(2)}}{d\theta}+\ldots+V^{m_1}\lambda\frac{dU^{(m_1)}}{d\theta}\right]+$$
$$+\mu^2\left[V\frac{dU_1^{(1)}}{d\theta}F_1+\ldots+V^{m_1}\frac{dU^{(m_1)}}{d\theta}F_1+V\lambda\frac{dU_2^{(1)}}{d\theta}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+V^{m_2}\lambda\frac{dU_2^{(m_2)}}{d\theta}\right]+\mu^3[\ldots]+\ldots, \qquad (6.7)$$

где

$$H=1+\mu\left(U_1^{(1)}+2VU_1^{(2)},\ \ldots,\ m_1V^{m_1-1}U_1^{(m_1)}\right)+$$
$$+\mu^2\left(U_2^{(1)}+\ldots+m_2V^{m_2-1}U_2^{(m_2)}\right)+\mu^3(\ldots)+\ldots \qquad (6.8)$$

Заметим, что для достаточно малых μ величина H строго больше нуля. Заменим в равенстве (6.7) величину r при помощи (6.5); тогда (6.7) можно привести к следующему виду:

$$H\frac{dV}{dt}=\mu\left\{V\left[R_1^{(1)}(\theta)-\lambda\frac{dU_1^{(1)}}{d\theta}\right]+V^2\left[R_1^{(2)}(\theta)-\lambda\frac{dU_1^{(2)}}{d\theta}\right]+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+V^m\left[R_1^{(m_1)}(\theta)-\lambda\frac{dU_1^{(m_1)}}{d\theta}\right]\right\}+\mu^2\left\{V\left[R_2^{(1)}(\theta)-\lambda\frac{dU_2^{(1)}}{d\theta}\right]+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+V^{m_2}\left[R_2^{(m_2)}(\theta)-\lambda\frac{dU_2^{(m_2)}}{d\theta}\right]\right\}+\ldots \qquad (6.9)$$

Используем теперь произвол функций $U_i^{(j)}$ и распорядимся ими так, чтобы выражения, стоящие в квадратных скобках, были некоторыми постоянными числами. Это значит, что функции $U_i^{(j)}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\lambda\frac{dU_i^{(j)}}{d\theta}=R_i^{(j)}(\theta)-g_i^{(j)}, \qquad (6.10)$$

где $g_i^{(j)}$ — некоторые постоянные, которые должны быть нами определены так, чтобы функции $U_i^{(j)}$ были периодическими. Для функций $V_k^{(j)}$ $(k>1)$ мы имеем уравнения, аналогичные (6.10), где вместо периодической функции $R_i^{(j)}$ стоит некоторая сумма функции $R_k^{(j)}(\theta)$ и некоторой другой периодической функции, которая может быть вычислена.

Функции $U_i^{(j)}$ должны удовлетворять уравнениям (6.10). Но с другой стороны, они должны быть периодическими, а для этого необходимо и достаточно, чтобы среднее значение правой

части за период 2π было равно нулю. Это условие единственным образом определяет постоянную $g_1^{(j)}$ в виде

$$g_1^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1^{(j)}(\theta)\, d\theta. \tag{6.11}$$

Из аналогичных соображений вычисляются и другие постоянные $g_k^{(j)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Функции $U_1^{(j)}$ определяются теперь квадратурой

$$U_1^{(j)} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\theta} \left[R_1^{(j)}(\theta) - g_1^{(j)}\right] d\theta + c_1^{(j)}, \tag{6.12}$$

где постоянные $c_1^{(j)}$ произвольны. Не ограничивая общности, мы можем положить их равными нулю. Это будет означать, что все $U_1^{(j)}(0) = 0$. Итак, для производной функции dV/dt мы получаем следующее выражение:

$$H\frac{dV}{dt} = \mu L_1(V) + \mu^2 L_2(V) + \ldots, \tag{6.13}$$

где

$$L_1(V) = Vg_1^{(1)} + V^2 g_1^{(2)} + \ldots + V^{m_1} g_1^{(m_1)},$$

$$L_2(V) = Vg_2^{(1)} + \ldots + V^{m_2} g_2^{(m_2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Рассмотрим уравнение

$$L_1(V) = 0. \tag{6.14}$$

Г. В. Каменковым доказана следующая теорема *).

Если система уравнений (6.1) *такова, что уравнение* (6.14) *имеет k положительных корней нечетной кратности, то каждому из этих корней будет соответствовать по крайней мере одно периодическое решение системы* (6.1).

Итак, существование периодических решений в случае корней нечетной кратности уравнения (6.14) определяется исключительно свойствами полинома $L_1(V)$ и не зависит от структуры полиномов L_i $(i > 1)$. Если же корни уравнения (6.14) имеют четную кратность, то, как показал Г. В. Каменков, для решения вопроса о существовании циклов необходима более полная информация о природе правой части уравнения (6.13).

---

*) См. Г. В. Каменков. Исследование нелинейных колебаний с помощью функций Ляпунова. Труды Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, т. XV, 1966, стр. 3—35.

2. Квазилинейная теория. Расчет периодических решений. Метод Г. В. Каменкова позволяет не только исследовать вопрос о существовании периодических решений, но и дает способ эффективного построения периодических решений. Покажем, как это можно сделать в простейшем случае простых корней уравнения (6.14).

Обозначим через V^* корень уравнения (6.14) и корень уравнения

$$L_1(V)+\mu L_2(V)+\ldots=0 \tag{6.15}$$

будем искать в виде ряда

$$V=V^*+\mu V_1+\mu^2 V_2+\ldots$$

Тогда V_1 будет удовлетворять линейному алгебраическому уравнению

$$V_1\frac{dL_1}{dV}=L_2(V^*). \tag{6.16}$$

Производная в уравнении (6.16) вычислена для значения $V=V^*$. Так как V^*, по предположению, простой корень уравнения (6.14), то $dL_1/dV\neq 0$ и уравнение (6.16) однозначно разрешимо.

Легко убедиться в том, что и остальные слагаемые V_i удовлетворяют уравнению типа (6.16)

$$V_i\frac{dL_1}{dV}=\tilde{L}_i,$$

где $\tilde{L}_i$ — некоторое известное число, зависящее от величин $V^*, V_1, \ldots, V_{i-1}$.

Итак, пусть с некоторой точностью мы определили корень уравнения (6.15). Обозначим его через V^{**}

$$V^{**}=V^*+\sum_{i=1}^{n}V_i\mu^i. \tag{6.17}$$

Подставляя теперь выражение (6.17) в уравнения (6.5), мы получим с определенной точностью искомое периодическое решение

$$r=V^*+\mu\left(V_1+V^*U_1^{(1)}+V^{*2}U_1^{(2)}+\ldots\right)+\mu^2(\ldots)+\ldots,$$

где коэффициенты $U_i^{(j)}(\theta)$ определяются формулами (6.12).

В заключение заметим, что уравнению (6.14) можно придать несколько иной вид. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_0^{\theta}[X_1(V\cos\theta,\ V\sin\theta)\cos\theta+Y_1(V\cos\theta,\ V\sin\theta)\sin\theta]\,dt.$$

Согласно обозначениям, введенным в уравнениях (6.3), этот интеграл мы можем переписать в виде

$$I=\int_0^{2\pi} R_1(V,\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left\{VR_1^{(1)}(\theta)+V^2R_1^{(2)}(\theta)+\ldots+V^{m_1}R_1^{(m_1)}(\theta)\right\}d\theta$$

или, принимая во внимание равенство (6.11),

$$I=2\pi\left(V_1g_1^{(1)}+V_2g_1^{(2)}+\ldots+V^{m_1}g_1^{(m_1)}\right)=2\pi L_1(V).$$

Таким образом, уравнение (6.14) эквивалентно следующему:

$$\int_0^{2\pi}\left[X_1(V\cos\theta,V\sin\theta)\cos\theta+Y_1(V\cos\theta,V\sin\theta)\sin\theta\right]d\theta=0. \quad (6.18)$$

В следующей главе мы установим, что уравнение (6.15) нам даст значение стационарной амплитуды, если ее определять методом осреднения и ограничиться при этом первым приближением (приближением Ван-дер-Поля).

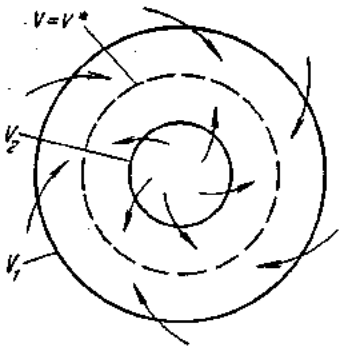

Рис. 18.

Идея метода Г. В. Каменкова имеет простой геометрический смысл. Мы уже знаем, что каждому постоянному значению величины V в фазовой плоскости отвечает замкнутая кривая (рис. 18). Пусть мы имеем две такие кривые, отвечающие V_1 и $V_2<V_1$ и обладающие тем свойством, что производные dV/dt, вычисленные при $V=V_1$ и $V=V_2$ в силу уравнений (6.1) имеют разные знаки. Это означает, что фазовые траектории системы (6.1) пересекают внешний замкнутый контур извне внутрь, а внутренний контур изнутри во вне, как это показано стрелками на рис. 18. Тогда, согласно теореме Бенедиксона, существует по крайней мере один такой замкнутый контур $V=V^{**}$, который является предельным циклом уравнения (6.1). Он лежит между контурами $V=V_1$ и $V=V_2$. На рис. 18 он показан пунктиром. Г. В. Каменков указал эффективный способ определения величины V^{**}.

Итак, процедура расчета периодических решений в методе Каменкова состоит в решении трансцендентного уравнения (6.18), которое позволяет определить значение V^*, и вычислении квадратур (6.11) и (6.12).

В данной книге мы рассмотрели только одну из задач, которая может быть изучена в рамках метода Г. В. Каменкова, — задачу расчета периодического решения в квазилинейных системах. Г. В. Каменков в своей статье, цитированной на стр. 100, рассмотрел еще целый ряд задач, в том числе задачу построения периодического решения в системах, близких к некоторой консервативной. Его метод позволяет также исследовать некоторые задачи теории неавтономных систем.

§ 7. Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре

Изучение неавтономных систем мы начнем с рассмотрения квазилинейных систем. Они имеют некоторые особенности, кроме того, задача изучения квазилинейных систем гораздо проще общей задачи и поэтому может быть изучена со значительно большей полнотой.

1. Замечание о линейных системах. Рассмотрим линейный осциллятор, подверженный действию внешних периодических сил:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=F(t). \tag{7.1}$$

Период функции $F(t)$, не ограничивая общности, мы можем принять равным 2π. Функция $F(t)$ разлагается в ряд Фурье

$$F(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kt+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kt. \tag{7.2}$$

Условимся, что число ω не есть целое. Решение уравнения (7.1) можно представить в виде

$$x=\tilde{x}+x^*,$$

где $\tilde{x}$ — общее решение однородного уравнения,

$$\tilde{x}=A\cos\omega t+B\sin\omega t, \tag{7.3}$$

а x^* — частное решение уравнения (7.1). Эта функция имеет период внешней силы $F(t)$,

$$x^*=c_0+\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos kt+\sum_{k=1}^{\infty} d_k\sin kt. \tag{7.4}$$

Подставляя выражение (7.4) в уравнение (7.1) и используя (7.2), легко находим коэффициенты c_k и d_k:

$$c_0=\frac{a_0}{\omega^2},\quad c_k=\frac{a_k}{\omega^2-k^2},\quad d_k=\frac{b_k}{\omega^2-k^2}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{7.5}$$

Так же просто рассматривается и общий случай линейных систем произвольного числа степеней свободы

$$\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.6}$$

где $F_i(t)$ представимы в виде рядов Фурье

$$F_i(t) = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(i)} \sin kt.$$

Для отыскания частного решения системы (7.6), период которого равен 2π, полагаем

$$x_i^* = c_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} \sin kt. \tag{7.7}$$

Для определения коэффициентов разложений (7.7) получаем следующие системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_0^{(j)} \alpha_{ij} = a_0^{(i)}, \\ &\sum_{j=1}^{n} c_k^{(j)} \left(\alpha_{ij} - \delta_i^j k^2\right) = a_k^{(i)}, \\ &\sum_{j=1}^{n} d_k^{(j)} \left(\alpha_{ij} - \delta_i^j k^2\right) = b_k^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

где δ_i^j — символ Кронекера. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие системы вида (7.6), которые при $F_i \equiv 0$ превращаются в консервативные системы. Но в этом случае в системе существуют главные координаты и вместо изучения системы вида (7.6) достаточно рассмотреть систему

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = F_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.9}$$

где $F_i(t)$ — обобщенная внешняя сила, отнесенная к главной координате x_i. Решение этих систем имеет вид (7.4), причем коэффициенты разложений определяются формулами (7.5).

Решение линейной системы представимо в виде суммы двух функций. Первая из этих функций имеет период внешней силы, а другая является суперпозицией главных колебаний. Наибольший практический интерес представляет изучение первой функции. В самом деле, хотя мы рассматриваем консервативную систему, но при этом понимаем, что речь идет о некоторой модели реальной системы, т. е. системы, которая находится всегда под

действием некоторых (пусть очень малых) сил, рассеивающих энергию. Следовательно, свободные колебания системы неизбежно затухнут с течением времени. Что касается вынужденных колебаний, то они все время будут поддерживаться действием внешних сил и, следовательно, через некоторый промежуток времени наблюдатель будет отмечать в системе только те колебания, которые генерированы внешним воздействием. Поэтому основное внимание в дальнейшем мы посвятим изучению частных решений систем вида (7.6) или (7.9), имеющих период внешних воздействий (который, по предположению, равен 2π). Формулы (7.5) и (7.8) имеют смысл лишь тогда, когда среди собственных частот отсутствуют частоты, равные целым натуральным числам. В противном случае в системе (7.6) не могут быть индуцированы периодические колебания: частные решения системы будут содержать вековые слагаемые. Это значит, что амплитуда колебаний, которые возбуждаются, неограниченно возрастает. В этом случае говорят о явлении резонанса в линейных случаях. Переходя к изучению квазилинейных систем, естественно поставить следующие вопросы.

а) Пусть среди собственных частот нет частот, равных целым числам. Этот случай называется нерезонансным. Какой в этих условиях будет форма колебаний, генерируемых внешними воздействиями?

б) Предположим, что имеет место резонанс, т. е. среди собственных колебаний есть колебания, период которых равен (или кратен) 2π. Может ли существование малой нелинейности привести к возможности генерирования в системе колебаний периода 2π?

в) Какие другие формы периодических движений могут возникать в квазилинейной системе под действием внешних периодических сил?

2. Колебания вдали от резонанса. Начнем изучение квазилинейных систем с наиболее простого вопроса *а*. Для этого рассмотрим систему с одной степенью свободы

$$\ddot{x}+\omega^2 x=F(t)+\varepsilon\varphi(x, \dot{x}). \tag{7.9'}$$

Функцию $F(t)$ условимся брать в виде

$$F(t)=a\cos t.$$

Не представляет никакого труда рассмотреть и общий случай. Излагаемый метод позволяет функцию φ также считать периодической функцией времени t периода 2π

$$\varphi=\varphi(x, \dot{x}, t).$$

Будем рассматривать решения уравнения (7.9′), которые при $\varepsilon \to 0$ переходят в решения порождающего уравнения

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + a\cos t \tag{7.10}$$

периода 2π.

Положим

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \tag{7.11}$$

Подставляя ряд (7.11) в уравнение (7.9′), раскладывая функцию φ в ряд Тейлора по степеням параметра ε

$$\varepsilon\varphi(x, \dot{x}) = \varepsilon\varphi(x_0, \dot{x}_0) + \varepsilon^2\left[\varphi_x x_1 + \varphi_{\dot{x}}\dot{x}_1\right] + \ldots = \varepsilon\varphi_0 + \varepsilon^2\varphi_1 + \ldots$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, мы получаем следующие уравнения для определения неизвестных функций x_i $(i = 1, 2, \ldots)$:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = a\cos t, \\ &\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \varphi_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ddot{x}_k + \omega^2 x_k = \varphi_{k-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Легко убедиться в том, что величина, стоящая в правой части уравнения номера k, зависит от функций $x_i(t)$, причем $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Следовательно, решая последовательно уравнения (7.12), мы можем определить любой член разложения (7.11).

Так как по условию $\omega \neq 1$, то единственное периодическое решение периода 2π, которое допускает первое из уравнений системы (7.12), имеет вид

$$x_0 = \frac{a}{\omega^2 - 1}\cos t. \tag{7.13}$$

Подставляя функцию (7.13) в выражение для φ_0, убеждаемся, что функция φ_0 будет периодической периода 2π и, следовательно, представима в виде ряда Фурье

$$\varphi_0 = \varphi_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0k}\cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{0k}^{*}\sin kt.$$

Следовательно, второе уравнение системы (7.12) также допускает решение периода 2π

$$x_1 = \frac{\varphi_{00}}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{0k}}{\omega^2 - k^2}\cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{0k}^{*}}{\omega^2 - k^2}\sin kt, \tag{7.14}$$

поскольку $\omega^2 \neq k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Решения остальных уравнений системы (7.12) могут быть получены по этой же схеме.

Итак, решение уравнения (7.9′) может быть представлено в следующем виде:

$$x = \frac{a}{\omega^2 - 1}\cos t + \varepsilon\left\{\frac{\varphi_{00}}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_{0k}}{\omega^2 - k^2}\cos kt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\overset{*}{\varphi}_{0k}}{\omega^2 - k^2}\sin kt\right\} + \varepsilon^2\{\ldots\} + \ldots \qquad (7.15)$$

Это решение удобно переписать в форме

$$x = A_0 + A_1\cos(t + \vartheta_1) + A_2\cos 2(t + \vartheta_2) + \ldots,$$

где

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{\omega^2}\{\varepsilon\varphi_{00} + \varepsilon^2\varphi_{10} + \ldots\},\\
A_1 &= \frac{1}{\omega^2 - 1}\{a + \varepsilon\varphi_{01} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots\},\\
A_k &= \frac{1}{\omega^2 - k^2}\left\{\varepsilon\sqrt{\varphi_{0k}^2 + \overset{*}{\varphi}{}_{0k}^2} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots\right\},\\
\vartheta_1 &= \operatorname{arctg}\left\{\varepsilon\frac{\overset{*}{\varphi}_{01}}{a} + \varepsilon^2(\ldots) + \ldots\right\},\\
\vartheta_k &= \operatorname{arctg}\left\{\frac{\overset{*}{\varphi}_{0k}}{\varphi_{0k}} + \varepsilon(\ldots) + \ldots\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.15')$$

Формулы (7.15′) показывают, что в нерезонансном случае все отличие вынужденных колебаний квазилинейной системы от колебаний линейной системы, вызванных той же силой, сводится к следующему:

1. Величина амплитуды A_1 основной гармоники изменяется на величины порядка $0(\varepsilon)$.

2. Возникает разность фаз ϑ_1 вынужденных колебаний по сравнению с фазой внешней силы. Этот сдвиг также имеет порядок $0(\varepsilon)$.

3. Имеет место систематическое смещение A_0, т. е. колебания происходят около положения, смещенного относительно положения равновесия. Это смещение также имеет первый порядок малости.

4. Появляются высшие гармоники, амплитуда которых имеет порядок $0(\varepsilon)$.

Итак, мы видим, что в нерезонансном случае малая нелинейность вносит в характер колебаний системы лишь малые количественные изменения. Поэтому в рассматриваемом случае

линейная трактовка задачи приводит только к небольшим количественным ошибкам: качественный характер квазилинейных колебаний будет таким же, как и в линейном случае. На первый вопрос, поставленный в предыдущем пункте, мы ответили полностью.

Мы рассмотрели колебания в системе с одной степенью свободы. Однако легко убедиться в том, что изложенная схема может быть использована для исследования колебаний систем произвольного числа степеней свободы, если только среди корней характеристического уравнения нет целых чисел.

3. Резонансные колебания. Случай одной степени свободы. Рассмотрим снова системы (7.9′) и предположим, что $\omega^2=1$. В предыдущем разделе мы рассматривали задачу отыскания периодических решений системы (7.9′), которые при $\varepsilon\to 0$ переходят в периодическое решение порождающего уравнения (7.10). В том случае, когда $\omega=1$, такая постановка не имеет смысла, поскольку порождающее уравнение не имеет периодических решений. Поэтому в теореме Пуанкаре рассматриваются только те задачи, в которых интенсивность внешнего возбуждения мала.

Будем рассматривать уравнение

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon a\cos t+\varepsilon\varphi(x,\ \dot{x}) \tag{7.16}$$

и предположим, что

$$\omega^2=1-\varepsilon\delta.$$

Примечание. Метод, который будет изложен, может быть без каких-либо оговорок перенесен на случай уравнения

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon\left[a\cos nt+\varphi(x,\ \dot{x})\right]+F(t), \tag{7.16′}$$

где

$$\omega^2=n^2-\varepsilon\delta,$$

$$F(t)=F_0+\sum_{k\neq n}F_k^{(1)}\cos kt+\sum_{k\neq n}F_k^{(2)}\sin kt.$$

В самом деле, для этого достаточно принять $x=\tilde{x}+x^*$, где x^* — частное решение уравнения

$$\ddot{x}+\omega^2 x=F(t),$$

имеющее период 2π. Функция $\tilde{x}$ после такой замены будет удовлетворять уравнению типа (7.16).

Рассмотрим порождающее уравнение

$$\ddot{x}+x=0. \tag{7.17}$$

Уравнение (7.17) допускает двупараметрическое семейство периодических решений периода 2π

$$x=M\cos t+N\sin t. \tag{7.18}$$

В предыдущем случае порождающее уравнение имело только одно периодическое решение указанного периода. В данном случае любое его решение периодическое.

Попробуем отыскать периодическое решение уравнения (7.16), которое при $\varepsilon \to 0$ переходит в одно из решений семейства (7.18). Другими словами, считая M и N величинами, которыми мы можем распоряжаться, постараемся их подобрать так, чтобы в окрестности решения (7.18) уравнения (7.17) обеспечить существование искомого периодического решения уравнения (7.16).

Решение будем искать в виде ряда

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \ldots, \tag{7.19}$$

где $x^{(0)}$ — одна из функций семейства (7.18). Функция $x^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}^{(1)} + x^{(1)} = a \cos t + \varphi(M \cos t + N \sin t, -M \sin t + N \cos t) + \\ + \delta M \cos t + \delta N \sin t. \tag{7.20}$$

Для того чтобы уравнение (7.20) допускало периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы разложение правой части в ряд Фурье не содержало членов вида $A \cos t + B \sin t$. Эти условия нам дают два уравнения для определения неизвестных чисел M и N

$$\left.\begin{aligned} &P(M, N) \equiv a + M\delta + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(M \cos t + N \sin t;\ -M \sin t + N \cos t) \cos t\, dt = 0, \\ &Q(M, N) \equiv N\delta + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(M \cos t + N \sin t;\ -M \sin t + N \cos t) \sin t\, dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (7.20) имело периодические решения периода 2π, необходимо, чтобы уравнения (7.21) имели действительные корни $\bar{M}$ и $\bar{N}$.

В этом случае функция

$$x = \bar{M} \cos t + \bar{N} \sin t$$

может быть пределом периодических решений уравнения (7.16) при $\varepsilon \to 0$.

Если $M = \bar{M}$ и $N = \bar{N}$, то периодические решения уравнения (7.20) имеют вид

$$x^{(1)} = \Phi^{(1)} + M_1 \cos t + N_1 \cos t. \tag{7.22}$$

где M_1 и N_1 — произвольные числа, а $\Phi^{(1)}$ — частное решение, которое определяется по формулам п. 1 этого параграфа, поскольку разложение функции

$$a\cos t+\delta(\tilde{M}\cos t+\tilde{N}\sin t)+\varphi(\tilde{M}\cos t+\tilde{N}\sin t,$$
$$-\tilde{M}\sin t+\tilde{N}\cos t)=\sum_{k\neq 1}(\varphi_k^{(1)}\cos kt+\varphi_k^{(2)}\sin kt) \quad (7.22')$$

в ряд Фурье, в силу выбора величин $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$, не содержит первых гармоник.

Рассмотрим уравнение для $x^{(2)}$

$$\ddot{x}^{(2)}+x^{(2)}=\delta(\Phi^{(1)}+M_1\cos t+N_1\sin t)+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_1\cos t+N_1\sin t+\Phi^{(1)})+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}(-M_1\sin t+N_1\cos t+\dot{\Phi}^{(1)}). \quad (7.23)$$

Производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}$ вычислены для значений $x=x^{(0)}$ и $\dot{x}=\dot{x}^{(0)}$; таким образом, правая часть этого уравнения является периодической функцией времени периода 2π. Следовательно, для существования периодических решений этой системы необходимо и достаточно, чтобы постоянные M_1 и N_1 были выбраны так, чтобы разложение правой части уравнения (7.23) в ряд Фурье не содержало первых гармоник. Таким образом, постоянные M_1 и N_1 удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&M_1\left[\delta+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos^2 t-\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\cos t\sin t\right\}dt\right]+\\
&\quad+N_1\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin t\cos t+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\cos^2 t\right\}dt=\\
&\quad=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Phi^{(1)}+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\dot{\Phi}^{(1)}\right\}\cos t\,dt\equiv\Psi_1(t),\\
&M_1\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos t\sin t-\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\sin^2 t\right\}dt+\\
&\quad+N_1\left[\delta+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\sin^2 t+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\cos t\sin t\right\}dt\right]=\\
&\quad=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Phi^{(1)}+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\dot{\Phi}^{(1)}\right\}\sin t\,dt\equiv\Psi_2(t).
\end{aligned}\right\} \quad (7.24)$$

При составлении системы (7.24) было учтено, что разложение функции $\Phi^{(1)}$ в ряд Фурье не содержит первых гармоник.

Системе (7.24) можно придать следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} M_1\frac{\partial P}{\partial M}+N_1\frac{\partial P}{\partial N}&=\Psi_1,\\ M_1\frac{\partial Q}{\partial M}+N_1\frac{\partial Q}{\partial N}&=\Psi_2.\end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

Для разрешимости системы (7.25) необходимо и достаточно, чтобы ее детерминант

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial M} & \dfrac{\partial P}{\partial N}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial M} & \dfrac{\partial Q}{\partial N}\end{vmatrix}=\frac{D(P,Q)}{D(M,N)} \tag{7.26}$$

был отличен от нуля.

Элементы этого определителя вычислены при $M=\bar{M}$ и $N=\bar{N}$. Следовательно, условие (7.26) означает, что величины $\bar{M}$ и $\bar{N}$ являются простыми корнями системы уравнений (7.21).

Итак, для того чтобы уравнение второго приближения допускало периодические решения достаточно выполнения неравенства (7.26). В этом случае постоянные M_1 и N_1 будут определены из уравнений (7.25), которые образуют линейную систему алгебраических уравнений. Функция $x^{(2)}$ в этом случае будет определена формулой типа (7.22)

$$x^{(2)}=\Phi^{(2)}+M_2\cos t+N_2\sin t, \tag{7.27}$$

где M_2 и N_2 — произвольные постоянные, которые могут быть определены только в третьем приближении.

Проведенные рассуждения нетрудно продолжить по индукции и показать, что задача построения периодического решения уравнения номера k сводится к решению алгебраической системы вида

$$\left.\begin{aligned} M_{k-1}\frac{\partial P}{\partial M}+N_{k-1}\frac{\partial P}{\partial N}&=\Psi_1^{(k)},\\ M_{k-1}\frac{\partial Q}{\partial M}+N_{k-1}\frac{\partial Q}{\partial N}&=\Psi_2^{(k)}.\end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

Система (7.28) всегда разрешима, если только $\bar{M}$ и $\bar{N}$ — простые корни системы уравнений (7.21).

Итак, мы приходим к следующему результату (Пуанкаре). Если система уравнений (7.21) имеет простые корни, то

каждой системе простых корней $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ соответствует ряд (7.19), каждый член которого может быть эффективно вычислен при помощи изложенной процедуры.

Пуанкаре доказал также, что при условии аналитичности правой части уравнения (7.16) ряды (7.19) сходятся для достаточно малых значений ε. В этом случае уравнение (7.16) допускает предельный цикл (периодическое решение). Число периодических решений соответствует числу простых корней системы (7.21).

Примечание. Тот случай, когда уравнение (7.21) имеет кратные корни, несколько более сложен для изучения. Однако он также тщательно изучался рядом авторов. В общем случае ряды, которые представляют периодические решения, должны быть расположены уже не по целым, а по дробным степеням параметра *).

Вернемся снова к уравнению (7.16). Если $\omega \neq 1$, то мы имеем нерезонансный случай и амплитуды вынужденных колебаний, как мы это видели, имеют порядок внешней возмущающей силы, т. е. порядок $O(\varepsilon)$. Если $\omega \sim 1$, то амплитуда вынужденных колебаний имеет порядок 1. Поэтому явлением резонанса в нелинейных системах естественно назвать возникновение интенсивных вынужденных колебаний при условии, что частота возмущающей силы близка к собственной частоте линейных колебаний.

В заключение напомним еще раз, что в линейных системах вдали от резонанса амплитуда вынужденных колебаний также имеет порядок $O(\varepsilon)$. Существенное влияние малой нелинейности проявляется только в условиях, близких к резонансу.

4. Пример: уравнение Ван-дер-Поля. В качестве примера рассмотрим систему, которая описывается уравнением Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon\beta \cos t + (\alpha - \gamma^2 x^2)\dot{x}, \tag{7.29}$$

и изучим ее колебания под действием внешних периодических сил. Условимся рассматривать резонансные колебания, т. е. предположим, что выполнено условие

$$\omega^2 = 1 - \varepsilon\delta.$$

Решение порождающего уравнения для этой системы имеет вид (7.18), где постоянные M и N определяются из уравнений (7.21),

---

*) См., например, А. П. Проскуряков, Периодические решения нелинейных систем в виде рядов по дробным степеням параметра, ПММ, т. XXV, в. 5 (1961).

которые в данном случае принимают следующий вид:

$$P(M, N) = M\delta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\alpha - \gamma^2 (M\cos t + N\sin t)^2] \times$$
$$\times [-M\sin t + N\cos t]\cos t\, dt = 0,$$

$$Q(M, N) \equiv N\delta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\alpha - \gamma^2 (M\cos t + N\sin t)^2] \times$$
$$\times [-M\sin t + N\cos t]\sin t\, dt = 0.$$

Проводя очевидные выкладки, мы придем к следующей системе двух кубических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \beta + M\delta + N\left[\alpha - \frac{\gamma}{4}(M^2 + N^2)\right] = 0, \\ N\delta - M\left[\alpha - \frac{\gamma}{4}(M^2 - N^2)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.30}$$

В уравнении (7.30) сделаем замену

$$M = A\cos\varphi, \qquad N = A\sin\varphi. \tag{7.31}$$

Физический смысл величины A очевиден — это амплитуда порождающего решения. Таким образом, нас интересуют только положительные значения этой величины.

После замены (7.31) уравнение (7.30) примет вид

$$A\left\{\delta\cos\varphi + \sin\varphi\left(\alpha - \frac{\gamma^2}{4}A^2\right)\right\} = -\beta,$$
$$A\left\{\delta\sin\varphi - \cos\varphi\left(\alpha - \frac{\gamma^2}{4}A^2\right)\right\} = 0.$$

Возводя в квадрат и складывая эти уравнения, мы исключим фазу φ

$$A^2\left\{\delta^2 + \left(\alpha - \frac{\gamma}{4}A^2\right)^2\right\} = \beta^2. \tag{7.32}$$

Таким образом, величина A^2 удовлетворяет кубическому уравнению. Так как кубическое уравнение имеет всегда хотя бы один корень, то система Ван-дер-Поля допускает по крайней мере один резонансный режим (исключая те сочетания параметров α, β, γ и δ, при которых уравнение (7.32) имеет кратные корни). Может оказаться, в частности, что уравнение (7.32) имеет три действительных корня. В этом случае в системе (7.29) возможно существование трех резонансных режимов. Исследование этих вопросов требует более детального анализа уравнения (7.32).

5. Один специальный случай. Особенность задачи отыскания резонансных режимов состоит в том, что порождающее решение заранее неизвестно. Множество решений порождающего уравнения образует семейство, зависящее от нескольких параметров (в случае, который рассматривался в п. 3 этого параграфа, семейство порождающих решений зависело от двух параметров). В процессе решения задачи мы должны отыскать те значения параметров, которые определяют порождающие решения.

Рассмотрим одну специальную задачу, которая иногда встречается в приложении: определить периодические решения уравнения

$$\ddot{x}=\varepsilon\varphi(x,\ \dot{x},\ t,\ \varepsilon), \tag{7.33}$$

где φ — периодическая функция времени периода 2π, аналитическая по переменным x, $\dot{x}$ и ε. Подставим задачу отыскания периодического решения уравнения (7.33) периода 2π.

Общее решение порождающего уравнения

$$\ddot{x}=0 \tag{7.34}$$

имеет вид

$$x=M+Nt. \tag{7.35}$$

И, следовательно, только при $N=0$ решение (7.35) будет периодическим периода 2π. Таким образом, функции, среди которых мы можем разыскивать порождающие решения уравнения (7.35), будут образовывать однопараметрическое семейство

$$x^{(0)}=M.$$

В этом и состоит основное отличие рассматриваемой задачи от задачи, которая изучалась в предыдущих пунктах этого параграфа. Однако, несмотря на это, методы, развитые ранее, могут быть использованы для отыскания периодического решения уравнения (7.33).

Положим

$$x=M+\varepsilon x^{(1)}(t)+\varepsilon^2 x^{(2)}(t)+\ldots$$

Функция $x^{(1)}$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\ddot{x}^{(1)}=\varphi(t,\ M,\ 0,\ 0), \tag{7.36}$$

где φ — периодическая функция t.

Для того чтобы уравнение (7.36) допускало периодическое решение периода 2π, необходимо и достаточно, чтобы

$$\bar{\varphi}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t,\ M,\ 0,\ 0)\,dt=0. \tag{7.37}$$

В самом деле, пусть $\bar{\varphi}\neq 0$, тогда функция φ может быть разложена в ряд Фурье вида

$$\varphi=\bar{\varphi}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

где $\bar{\varphi}$ — некоторая постоянная, отличная от нуля, и, следовательно, общее решение уравнения (7.36) будет иметь вид

$$x^{(1)}=x^{(1)}(0)+c_1(t)+\frac{\bar{\varphi}t^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(b_k\sin kt-a_k\cos kt), \quad (7.38)$$

т. е. оно будет содержать вековые слагаемые независимо от выбора начальных условий.

Итак, для существования периодического решения уравнения (7.36), а следовательно, и для существования периодического решения уравнения (7.33), аналитического по ε, необходимо, чтобы неизвестная постоянная M была корнем уравнения (7.37).

Из вида общего решения (7.38) сразу следует, что условие $\bar{\varphi}=0$ достаточно для существования периодического решения уравнения (7.34). В самом деле, мы всегда можем подобрать начальное условие $\dot{x}^{(1)}(0)$

$$\dot{x}^{(1)}(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k},$$

которое при любом $x^{(1)}(0)=M_1$ гарантирует условие $c_1=0$.

Итак, функция $x^{(1)}$ определяется формулой

$$x^{(1)}=M_1+\psi_1(t), \quad (7.39)$$

где ψ_1 — периодическая функция времени требуемого периода, а M_1 — постоянная, которая должна быть определена в следующем приближении.

Составим теперь уравнение для определения $x^{(2)}(t)$

$$\ddot{x}^{(2)}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}[M_1+\psi_1(t)]+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\dot{\psi}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}. \quad (7.40)$$

Производные $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial\dot{x}$ вычислены при условии, что $x=M$, $\varepsilon=0$, где M — корень уравнения (7.37):

$$\bar{\varphi}(M)=0. \quad (7.37')$$

Для существования периодического решения уравнения $x^{(2)}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}[M_1+\psi_1(t)]+\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}}\dot{\psi}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right\}dt=0. \quad (7.41)$$

Легко видеть, что уравнению (7.41) можно придать следующий вид:

$$M_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial M} = F_1, \tag{7.42}$$

где

$$F_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \dot{\psi}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right) dt.$$

Уравнение (7.40) — это линейное уравнение относительно неизвестной постоянной M_1. Если $\partial\bar{\varphi}/\partial M \neq 0$, то оно имеет единственное решение. Условие $\partial\bar{\varphi}/\partial M \neq 0$ означает, что постоянная M является простым корнем уравнения (7.37). Функция $x^{(2)}$ в этом случае имеет вид

$$x^{(2)} = M_2 + \psi_2(t),$$

где M_2 — постоянная, которая определяется в следующем приближении, а $\psi_2(t)$ — периодическая функция.

Легко продолжить рассуждения и показать, что в любом приближении периодическое решение имеет вид

$$x^{(k)}(t) = M_k + \psi_k(t),$$

где M_k — решение уравнения

$$M_k \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial M} = F_k,$$

причем число F_k определяется по первым $k-1$ приближениям. Для достаточно малых ε ряды, которые представляют решение, сходятся.

Итак, мы пришли к следующему результату. *Для существования периодического решения уравнения* (7.33), *аналитического по параметру* ε, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$\bar{\varphi}(M) = 0$$

имело простые корни.

Примечание. Изложенный метод без каких-либо изменений позволяет изучать периодические решения системы

$$\ddot{x}_i = \varepsilon \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t, \varepsilon)$$

произвольного порядка, если функция φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — аналитические функции по ε, x_i и периодические функции по t периода 2π.

6. О резонансе n-го рода. В рамках квазилинейной теории удается установить одну замечательную особенность нелинейных систем — возможность существования резонанса n-го рода. Мы уже знаем, что в тех случаях, когда на квазилинейный осциллятор действует внешнее периодическое возбуждение ин-

тенсивностью $O(\varepsilon)$, в осцилляторе могут возникнуть вынужденные колебания, амплитуды которых имеют порядок 1. Возникновение интенсивных колебаний, как это было показано, может осуществиться, если частота внешней возбуждающей силы близка к собственной частоте. Это явление мы называли резонансом. Условимся теперь называть его главным резонансом. Это уточнение необходимо потому, что интенсивные вынужденные колебания (амплитуда которых равна $O(1)$) квазилинейного осциллятора возможно и тогда, когда частота возмущающей силы (интенсивность которой имеет теперь порядок $O(\varepsilon)$) близка к $n\omega$, где ω — собственная частота, а n — некоторое целое число.

Рассмотрим снова квазилинейное уравнение (7.9) и для упрощения всех рассуждений ограничимся изучением его частного случая

$$\ddot{x}+x=a\cos nt+\varepsilon\varphi(x,\ \dot{x},\ t), \tag{7.43}$$

где n — целое число, а функция φ — периодическая функция времени периода 2π. Согласно терминологии, которая была нами принята, соотношение частот возмущающей силы и собственных колебаний определяет нерезонансный случай. Если, следуя изложенной методике, мы начнем разыскивать решения уравнения (7.43), периода 2π, то мы должны будем искать это решение в форме ряда

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots,$$

где x_0 — решение порождающего уравнения

$$x_0=-\frac{a}{n^2-1}\cos nt. \tag{7.44}$$

Решение, которое будет найдено этим способом, будет иметь период $T^*=2\pi/n$. Однако помимо решения (7.44), порождающее уравнение

$$\ddot{x}+x=a\cos nt$$

допускает еще двупараметрическое семейство периодических решений периода 2π

$$\tilde{x}=M\cos t+N\sin t+\psi(t), \tag{7.45}$$

где $\psi(t)$ определяется формулой (7.44). Это обстоятельство позволяет предположить, что среди периодических решений уравнения (7.43) периода 2π, кроме решений, определяемых алгоритмом п. 2 этого параграфа, могут быть решения также и другого типа. Попробуем разыскать решения уравнения (7.43), которые при $\varepsilon\to 0$ переходят в решения (7.45) при условии, что хотя бы одно из чисел M или N отлично от нуля.

Для этого положим

$$x=\tilde{x}+\varepsilon x_1+\ldots \tag{7.46}$$

Процедура отыскания решения вида (7.46) ничем не отличается от процедуры отыскания решения в окрестности главного резонанса. Подставляя ряд (7.46) в уравнение (7.43), мы получаем уравнения для x_i. Функция x_1 удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_1+x_1=\varphi(\tilde{x},\ \dot{\tilde{x}},\ t). \tag{7.47}$$

Для того чтобы уравнение (7.47) допускало периодические решения периода 2π, необходимо, чтобы числа M и N удовлетворяли следующей системе трансцендентных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P(N,\ M)&\equiv\int_0^{2\pi}\varphi(M\cos t+N\sin t+\psi;\\ &\qquad -M\sin t+N\cos t+\psi;\ t)\cos t\,dt=0,\\ Q(M;\ N)&\equiv\int_0^{2\pi}\varphi(M\cos t+N\sin t+\psi;\\ &\qquad -M\sin t+N\cos t+\psi,\ t)\sin t\,dt=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.48}$$

Пусть теперь M и N — простые корни системы (7.48), тогда, как это следует из теории, изложенной в п. 3 настоящего параграфа, определение последующих приближений потребует решения уже только линейных уравнения типа (7.25):

$$\left.\begin{aligned} M_i\frac{\partial P}{\partial M}+N_i\frac{\partial P}{\partial N}&=\Psi^{(i)},\\ M_i\frac{\partial Q}{\partial M}+N_i\frac{\partial Q}{\partial N}&=\Phi^{(i)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.25'}$$

где $\Psi^{(i)}$ и $\Phi^{(i)}$ — некоторые известные числа.

В силу сделанных предположений о природе корней системы уравнений (7.48) система (7.25′) всегда разрешима.

Система уравнений (7.48) аналогична системе уравнений (7.21) и может рассматриваться как частный случай такой системы. Она обладает следующей особенностью: если функция $\varphi(x, \dot{x}, t)$ имеет по t период $T=2\pi/n$, то система (7.48) всегда допускает тривиальное решение $M\equiv N\equiv 0$.

В самом деле, поскольку в этом случае, т. е. при $M=N=0$ функция (7.45) будет в качестве своего наименьшего периода иметь период $T^*=2\pi/n$, то таким же периодом будет обладать и функция $\varphi(\tilde{x},\ \dot{\tilde{x}},\ t)$, и следовательно, ее разложение в ряд Фурье будет содержать только гармоники, имеющие частоту,

кратную n, т. е. условие ортогональности (7.48) выполняется автоматически.

Это обстоятельство можно использовать для сокращения выкладок при эффективном определении интересующих нас решений.

Заметим, что все рассуждения остаются в силе и для того частного случая, когда амплитуда возмущающей силы имеет порядок $O(\varepsilon)$. Таким образом, даже малые воздействия на квазилинейную систему периодическими возмущающими силами кратной частоты могут возбудить в ней интенсивные колебания, происходящие с частотой собственных колебаний. Такое явление называется резонансом n-го рода. Впервые исследованиями подобных колебаний занимались Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси.

7. О квазилинейной трактовке нелинейных уравнений. В физике и технике имеют широкое распространение методы, которые основаны на предположении, что исследуемое нелинейное уравнение в некотором смысле близко к линейному. И в настоящем параграфе мы изучали уравнения вида

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon\varphi(x,\ \dot{x},\ t,\ \varepsilon), \tag{7.49}$$

которые при $\varepsilon=0$ переходят в линейные и для малых значений параметра ε развивали методы, позволяющие эффективно вычислять периодические движения.

Такая точка зрения, как мы это видели, богата разнообразными возможностями: она не только позволяет «уточнить» порождающее решение, но и дает возможность обнаружить такие свойства уравнений (7.49), которые полностью утрачиваются, если принять $\varepsilon=0$.

В технике и физике далеко не всегда уравнения оказываются в «готовом квазилинейном виде» типа (7.49). Разумеется, достаточно часто встречаются задачи с малыми возмущениями и малыми нелинейностями. Но очень часто мы умышленно трактуем нашу задачу как квазилинейную, предполагая использовать мощные средства анализа подобных задач. Попробуем на простом примере пояснить смысл редукции задачи к квазилинейной и область применимости подобной трактовки.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y}+Q(y)=\varepsilon\varphi(y,\ \dot{y},\ t). \tag{7.50}$$

Предположим, что точка $y=\dot{y}=0$ определяет положение равновесия и функция $Q(y)$ в окрестности этой точки является аналитической

$$Q(y)=\omega^2 y-b_2y^2-b_3y^3+\ldots$$

При $\varepsilon \to 0$ это нелинейное уравнение переходит снова в некоторое нелинейное уравнение. Для того чтобы уравнение (7.50) можно было трактовать как квазилинейное, сделаем замену переменных

$$y = \sqrt{\varepsilon}\, x, \qquad \varepsilon = \mu^2. \tag{7.51}$$

Уравнение (7.50) перейдет теперь в следующее:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu\varphi^*(x, \dot{x}, t, \mu), \tag{7.52}$$

где

$$\varphi^* = \varphi(\mu x, \mu\dot{x}, t) + b_2 x^2 + \mu b_3 x^3 + \ldots$$

Уравнение (7.52) уже относится к рассмотренному типу уравнений (7.49).

Как это видно из формул (7.51), возможность квазилинеаризации основана на предположении, что отклонение от положения равновесия мало. Таким образом, квазилинейная трактовка может быть использована для изучения только малых колебаний нелинейной системы. Для изучения колебаний с большими амплитудами изложенный подход не имеет смысла.

Однако может оказаться, что квазилинейная трактовка не будет пригодна даже для исследования малых колебаний. В самом деле, мы сделали замену (7.51). Но уже одним этим мы наложили известные ограничения на класс функций, внутри которого мы разыскиваем интересующее нас решение. И может случиться, что периодическое решение, которое допускает уравнение (7.50), не содержится внутри этого класса и, следовательно, в подобной ситуации квазилинейная трактовка не дает никакой полезной информации.

Рассмотрим простейший пример. Поставим задачу отыскания резонансных решений уравнения

$$\ddot{y} + y - a^2 y^2 = \varepsilon \cos t. \tag{7.53}$$

Рассматривая это уравнение как квазилинейное, заменой (7.51), мы приводим его к виду

$$\ddot{x} + x = \mu\,(\cos t + a^2 x^2). \tag{7.54}$$

Применим к уравнению (7.54) метод отыскания периодических решений, изложенный в этом параграфе. Для этого положим

$$x = M\cos t + N\sin t + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{7.55}$$

Функция x_1 удовлетворяет следующему уравнению:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \cos t + a^2\left\{\frac{1}{2}(M^2+N^2) + (M^2-N^2)\cos 2t + MN\sin 2t\right\} \equiv$$
$$\equiv f(M, N, t). \tag{7.56}$$

Для того чтобы уравнение (7.56) имело периодическое решение, необходимо так выбрать параметры M и N, чтобы правая часть этого уравнения была ортогональна $\sin t$ и $\cos t$. Но легко видеть, что этого сделать нельзя. В самом деле,

$$\int_0^{2\pi} f(M, N, t)\cos t\,dt = \pi$$

и не зависит от M и N.

Таким образом, на основании квазилинейной теории мы должны утверждать, что уравнение (7.53) не допускает периодических решений. Тем не менее, как мы это увидим в следующем параграфе, периодические решения этого уравнения существуют в окрестности положения равновесия. Только эти решения нельзя представить в форме ряда (7.55). Итак, если квазилинейная теория не дает возможности определить периодические решения нелинейного уравнения, то это еще не значит, что исходное уравнение не имеет подобных решений.

Отказ от квазилинейной трактовки задачи приводит к резкому усложнению задачи. Существует очень немного методов, позволяющих в отдельных случаях рассмотреть другие классы нелинейных уравнений. Один из таких методов принадлежит покойному профессору Свердловского университета И. Г. Малкину. Метод, который разработал И. Г. Малкин, позволяет распространить методологию Пуанкаре на изучение широкого класса систем, близких к системам Ляпунова *).

§ 8. Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. Метод Малкина

1. Предварительный анализ. В предыдущем параграфе мы изучали квазилинейные системы. При построении вычислительных алгоритмов существенным образом использовалось то обстоятельство, что порождающее уравнение линейно и, следовательно, нам известен весь возможный набор его решений.

Основная черта метода Пуанкаре, да и любых методов нелинейной механики состоит в том, что рассматриваются уравнения, которые в том или ином смысле близки к уравнениям с известными решениями. Поэтому, отказываясь от квазилинейной трактовки, мы должны рассматривать уравнения, близкие не к линейным уравнениям, а к некоторым другим, для изучения которых мы имеем необходимую рецептуру. Известно очень

*) И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Москва, 1956.

немного типов уравнений, для которых существуют эффективные аналитические методы построения решений. К ним относятся прежде всего системы Ляпунова. Естественно, что следующим после изучения квазилинейной теории должно быть изучение систем, близких к ляпуновским. Как мы увидим ниже, этот шаг приведет к значительному расширению возможных типов установившихся режимов нелинейных систем.

Итак, в этом параграфе мы будем изучать системы вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda y + X(x, y) + \mu F_1(x, y, t), \\ \dot{y} &= \lambda x + Y(x, y) + \mu F_2(x, y, t), \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

где F_i — функции, аналитические по x и y и периодические по t периода T. Не ограничивая общности, можем принять $T=2\pi$. При $\mu=0$ система переходит в систему Ляпунова

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= -\lambda\eta + X(\xi, \eta), \\ \dot{\eta} &= \lambda\xi + Y(\xi, \eta). \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Поставим задачу отыскания периодических решений системы (8.1), период которых равен периоду возмущающих сил F_1 и F_2 и которые при $\mu \to 0$ переходят в периодические решения порождающего уравнения (8.2). Порождающее уравнение, согласно теореме Ляпунова, имеет семейство периодических решений

$$\xi=\xi(c, t+h), \quad \eta=\eta(c, t+h),$$

зависящее от двух параметров: «амплитуды» c и «сдвига фазы» — h. Согласно теореме Ляпунова период этого решения имеет вид

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2c^{2k} + h_3c^{2k+1} + \ldots),$$

где через h_2 мы обозначили первый из коэффициентов в разложении периода, который отличен от нуля. Из теоремы Ляпунова мы знаем, что младшая степень амплитуды c в разложении периода всегда будет четная.

Мы будем изучать задачу отыскания периодического решения системы (8.1), которое при любом, достаточно малом μ имеет период, равный 2π. Следовательно, и предельное решение при $\mu=0$ будет также иметь период 2π или $2\pi/p$, где p — некоторое целое число. Таким образом, период порождающего решения, так же как и в квазилинейной теории, мы знаем заранее:

$$\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2c^{2k} + h_3c^{2k+1} + \ldots). \tag{8.3}$$

Однако соотношение (8.3) позволяет определить также и параметр c — амплитуду порождающего решения. Это обстоятель-

ство качественно отличает изучаемую задачу от задач квазилинейных. В квазилинейных задачах объектом исследования как раз и является амплитуда порождающего решения, здесь же она известна заранее. Однако, как мы увидим ниже, этот факт отнюдь не приводит к упрощению задачи.

Различие обеих теорий — квазилинейной и рассматриваемой — в этом параграфе состоит в том, что в первой решения порождающего уравнения изохронны. Порождающее решение в рассматриваемой теории является нелинейным и поэтому в общем случае уже не является изохронным.

Уравнение (8.3) мы можем представить в следующем виде:

$$h_2c^{2k} + h_3c^{2k+1} + \ldots = \frac{\lambda - p}{p},$$

или, извлекая корень $2k$-й степени, получим

$$c + \frac{h_3}{2kh_2}c^2 + \ldots = \sqrt[2k]{\frac{\lambda - p}{ph_2}}. \tag{8.4}$$

Уравнение (8.4) для каждого значения p и для каждого значения корня имеет бесконечное количество комплексных решений. Среди этих решений может оказаться и бесчисленное количество действительных решений. Каждому из этих действительных корней может, вообще говоря, отвечать некоторое искомое периодическое решение исходной системы (8.7). Уже это одно показывает сколь сложной является поставленная задача.

Если $h_2 > 0$, то уравнение (8.4) для каждого $p < \lambda$ имеет только два действительных решения, одно из которых положительное, а другое — отрицательное. Если $h_2 < 0$, то два действительных решения существуют для любого $p > \lambda$. Эти решения системы (8.1) будем обозначать $x^{(p)}$ и $y^{(p)}$. Порождающие решения, соответствующие им, обозначим через $\xi^{(p)}(c, t+h)$ и $\eta^{(p)}(c, t+h)$.

Порождающая система (8.2) всегда имеет тривиальное решение, которое мы можем считать периодическим любого периода T. Поэтому может оказаться, что система (8.1) допускает такие периодические решения, которые при $\mu \to 0$ переходят в тривиальные решения порождающей системы (8.2). Эти решения условимся обозначать $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$.

2. Решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$. Нерезонансный случай. Рассмотрим сначала решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$. Так как эти решения при $\mu \to 0$ переходят в тривиальные, то будем их искать в форме рядов

$$\left.\begin{aligned} x^{(0)} &= \mu x_1^{(0)} + \mu^2 x_2^{(0)} + \ldots, \\ y^{(0)} &= \mu y_1^{(0)} + \mu^2 y_2^{(0)} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Так как разложения функций X и Y начинаются с членов второго порядка малости, то функции $x_i^{(0)}$ и $y_i^{(0)}$ будут удовлетворять следующим системам:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1^{(0)} &= -\lambda y_1^{(0)} + F_1(0,\ 0,\ t), \\ \dot{y}_1^{(0)} &= \lambda x_2^{(0)} + F_2(0,\ 0,\ t), \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2^{(0)} &= -\lambda y_2^{(0)} + X_2\left(x_1^{(0)},\ y_1^{(0)}\right) + \\ &\qquad + x_1^{(0)}\frac{\partial F_1}{\partial x} + y_1^{(0)}\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv -\lambda y_2^{(0)} + F_{12}(t), \\ \dot{y}_2^{(0)} &= \lambda x_2^{(0)} + Y_2\left(x_1^{(0)},\ y_1^{(0)}\right) + x_1^{(0)}\frac{\partial F_2}{\partial x} + y_1^{(0)}\frac{\partial F_2}{\partial y} \equiv \lambda x_2^{(0)} + F_{22}(t) \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

и т. д.

Здесь F_{ij} — периодические функции периода 2π. Возможны два случая. Первый случай — это тот, когда λ не равно целому числу. В этом случае однородная система

$$\dot{x}_1^{(0)} = -\lambda y^{(0)}, \qquad \dot{y}_1^{(0)} = \lambda x^{(0)}$$

не имеет решений периода 2π ($\lambda \neq p$) и, следовательно, периодическое решение системы (8.6) мы можем построить обычными методами. Все последующие члены разложений (8.5) удовлетворяют системам дифференциальных уравнений, совершенно идентичным системе (8.6). Таким образом, в том случае, когда λ не равно целому числу, вычисление решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ не представляет труда.

Если $\lambda = p$ ($p = 1,\ 2,\ \ldots$), т. е. равно целому числу, то существования периодических решений необходимо и достаточно, чтобы функции F_1 и F_2 удовлетворяли следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} I_1(F_1,\ F_2) &= \int_0^{2\pi} F_1(0,\ 0,\ t)\cos pt\,dt + \\ &\qquad + \int_0^{2\pi} F_2(0,\ 0,\ t)\sin pt\,dt = 0, \\ I_2(F_1,\ F_2) &= \int_0^{2\pi} F_1(0,\ 0,\ t)\sin pt\,dt - \\ &\qquad - \int_0^{2\pi} F_2(0,\ 0,\ t)\cos pt\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

Если условия (8.8) выполнены, т. е. функции F_1 и F_2 ортогональны $\sin pt$ и $\cos pt$, то решения системы (8.8) находятся одним из стандартных способов, например методом Фурье.

Тот случай, когда функции F_1 и F_2 удовлетворяют условиям (8.8), является исключительным. Следовательно, в общем случае при $\lambda=p$ система (8.6) не будет иметь периодических решений вида (8.5). Таким образом, если решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ системы (8.1) существуют, то их следует разыскивать в форме, отличной от (8.5).

Первый случай, когда $\lambda\neq p$ (или когда выполнены оба условия (8.8)), условимся называть нерезонансным. В этом случае учет членов порядка μ^2 в уравнении (8.1) приводит только к количественным уточнениям. Решение системы (8.1) оказывается «качественно близким» соответствующему решению уравнений Ляпунова, которое формально также можно разыскивать в виде рядов (8.5).

Новые качественные особенности возникают во втором случае, когда $\lambda=p$ и хотя бы один из функционалов I_1 или I_2 не равняется нулю. Этот случай мы условимся называть резонансным.

3. Пример расчета нерезонансных решений. Проведем расчет нерезонансных решений $x^{(0)}$ для уравнений

$$\ddot{x}+\omega^2x=\mu\sin t+\alpha x^3, \tag{8.9}$$

$$\ddot{x}+\omega^2x=\mu\sin t+\alpha x^2 \tag{8.10}$$

при условии, что $\omega\neq 1$. Согласно изложенной теории периодические решения периода 2π уравнений (8.9) и (8.10), обращающиеся в тривиальные решения порождающего уравнения при $\mu\to 0$, следует искать в виде рядов

$$x=\mu x_1+\mu^2x_2+\mu^3x_3+\ldots$$

Функция x_1 в обоих случаях удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1=\sin t. \tag{8.11}$$

Так как $\omega\neq 1$, то единственное периодическое решение уравнения (8.11), имеющее период 2π, будет

$$x_1=\frac{1}{\omega^2-1}\sin t. \tag{8.12}$$

Уравнение для x_2 в случае (8.9) имеет вид

$$\ddot{x}_2+\omega^2x_2=0. \tag{8.13}$$

Уравнение (8.13) не допускает периодического решения периода 2π, кроме тривиального. Итак, $x_2\equiv 0$. Уравнения для x_3

$$\ddot{x}_3+\omega^2x_3=\left\{\frac{3\alpha}{4}\sin t-\frac{\alpha}{4}\sin 3t\right\}\frac{1}{(\omega^2-1)^3}$$

имеет решение

$$x_3 = \left\{ \frac{3\alpha}{4(\omega^2-1)} \sin t - \frac{\alpha}{4(\omega^2-9)} \sin 3t \right\} \frac{1}{(\omega^2-1)^3}$$

и т. д.

Итак, периодическое решения уравнения (8.9) имеет вид

$$x = \frac{\mu}{\omega^2-1} \sin t + \mu^3 \left\{ \frac{3\alpha \sin t}{4(\omega^2-1)} - \frac{\alpha}{4(\omega^2-9)} \sin 3t \right\} \frac{1}{(\omega^2-1)^3} + \ldots \tag{8.14}$$

Периодическое решение уравнения (8.10) находится столь же просто

$$x = \frac{\mu}{\omega^2-1} \sin t + \frac{\mu^2}{(\omega^2-1)^2} \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha \cos 2t}{2(\omega^2-4)} \right\} + \ldots \tag{8.15}$$

Если мы сделаем попытку построить нерезонансные периодические решения уравнений (8.9) и (8.10) методом Пуанкаре, рассматривая уравнения (8.9) и (8.10) как квазилинейные, то, как нетрудно убедиться, мы придем к тем же результатам. Таким образом, в рассматриваемом случае обе трактовки «квазилинейная» и «квазиляпуновская», оказываются, дают одно и то же.

4. Резонансные режимы в системах, близких к системе Ляпунова. Рассмотрим теперь случай резонансных колебаний в системе (8.1), т. е. будем считать, что λ близко к целому числу p: $\lambda = p + \mu k$. Система (8.1) тогда может быть приведена к виду

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -py + X(x, y) + \mu\Phi_1(x, y, t), \\ \dot{y} &= px + Y(x, y) + \mu\Phi_2(x, y, t), \end{aligned}\right\} \tag{8.16}$$

где

$$\Phi_1 = F_1 - ky, \qquad \Phi_2 = F_2 + kx.$$

Мы условились рассматривать резонансный случай. Это значит, что хотя бы одно из соотношений (8.8) не выполняется. Таким образом, будем считать, что один из функционалов $I_1(\Phi_1, \Phi_2)$ или $I_2(\Phi_1, \Phi_2)$ отличен от нуля.

Сделаем несколько предварительных замечаний:

а) При $\mu = 0$ порождающая система (8.2) допускает периодические решения, период которых T является четной аналитической функцией «постоянной энергии» H

$$x^2 + y^2 + W(x, y) = H.$$

Напомним, что $W(x, y)$ — аналитическая функция своих переменных, разложение которой начинается с членов третьего порядка. Итак,

$$T = \frac{2\pi}{}(1 + h_2 H^{2k} + \ldots), \tag{8.17}$$

причем, как мы это видели в п. 4, постоянная h_2 в разложении (8.17) та же, что и в разложении (8.3).

б) Задача определения возможных периодических решений системы (8.16) состоит в определении постоянных a и b — начальных значений переменных x и y

$$x(0)=a, \qquad y(0)=b, \tag{8.18}$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$x(2\pi, a, b, \mu)=a, \qquad y=(2\pi, a, b, \mu)=b, \tag{8.19}$$

поскольку условия (8.19) необходимы и достаточны для существования периодических решений исходной системы.

При $\mu=0$ любая пара чисел a и b, достаточно малых по абсолютной величине, будет определять некоторое периодическое решение. Период этого решения будет T (см. (8.17)). Следовательно,

$$x(T, a, b, 0)=a, \qquad y(T, a, b, 0)=b.$$

Очевидно, что эти соотношения сохраняют силу, если заменить T на qT, где q — любое целое число

$$x(qT, a, b, 0)=a, \qquad y(qT, a, b, 0)=b. \tag{8.20}$$

Используя обозначения (8.18) и принимая во внимание, что разложение функции $W(a, b)$ начинается с членов третьего порядка малости, выражение для T можно переписать в следующем виде:

$$T=\frac{2\pi}{\rho}(1+h_2(a^2+b^2)^k+\ \ldots), \tag{8.21}$$

где невыписанные члены имеют порядок малости более высокий, чем $O(a^{2k})$ и $O(b^{2k})$.

в) Функции x и y — аналитические функции a, b и μ, т. е. они могут быть представлены в форме рядов следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} x(t, a, b, \mu)&=A_1a+B_1b+C_1\mu+\ \ldots, \\ y(t, a, b, \mu)&=A_2a+B_2b+C_2\mu+\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Ряды (8.22) можно записать еще и так:

$$\left.\begin{aligned} x(t, a, b, \mu)&=x(t, a, b, 0)+\mu(C_1+\Psi_1), \\ y(t, a, b, \mu)&=y(t, a, b, 0)+\mu(C_2+\Psi_2), \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — аналитические функции переменных a, b и μ, обращающихся в нуль при $a=b=\mu=0$; A_1, A_2, $B_1\ldots$ — функции времени. Для их определения надо ряды (8.23) подставить в систему уравнений (8.16) и приравнять коэффициенты при

одинаковых степенях неизвестных a, b и μ. Например, для C_1 и C_2 мы получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= -pC_2 + \Phi_1(0, 0, t), \\ \frac{dC_2}{dt} &= pC_1 + \Phi_2(0, 0, t). \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

Так как $x(0)=a$ и $y(0)=b$, то функции C_1 и C_2 должны удовлетворять нулевым начальным условиям

$$C_1(0)=0, \qquad C_2(0)=0. \tag{8.25}$$

Определим C_1 и C_2 методом вариации произвольных постоянных, положив

$$C_1=\alpha\cos pt+\beta\sin pt, \qquad C_2=\alpha\sin pt-\beta\cos pt.$$

Считая α и β новыми неизвестными, определим их из уравнений (8.24). Используя начальные условия (8.25), получим окончательно следующие выражения для искомых функций C_1 и C_2:

$$C_1=\cos pt\left\{\int_0^t \Phi_1\cos pt\,dt+\int_0^t \Phi_2\sin pt\,dt\right\}+$$
$$+\sin pt\left\{\int_0^t \Phi_1\sin pt\,dt-\int_0^t \Phi_2\cos pt\,dt\right\},$$

$$C_2=\sin pt\left\{\int_0^t \Phi_1\cos pt\,dt+\int_0^t \Phi_2\sin pt\,dt\right\}+$$
$$+\cos pt\left\{\int_0^t \Phi_2\cos pt\,dt-\int_0^t \Phi_1\sin pt\,dt\right\}.$$

Вычислим еще значения $C_1(2\pi)$ и $C_2(2\pi)$. Легко видеть, что

$$C_1(2\pi)=I_1(\Phi_1, \Phi_2), \qquad C_2(2\pi)=I_2(\Phi_1, \Phi_2). \tag{8.26}$$

Мы условились, что хотя бы одно из чисел I_1 или I_2 не равно нулю. Поэтому либо $C_1(2\pi)$, либо $C_2(2\pi)$ не равно нулю.

После этих предварительных рассмотрений перейдем к доказательству существования резонансных решений $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ и нахождению их структуры. Для этого рассмотрим снова систему уравнений (8.19). Перепишем эти уравнения, используя представления (8.23):

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi, a, b, 0)+\mu[C_1(2\pi)+\Psi_1]=a, \\ y(2\pi, a, b, 0)+\mu[C_2(2\pi)+\Psi_2]=b. \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

Равенство (8.21) может быть переписано в следующей форме:

$$2\pi = pT(1 - h_2(a^2+b^2)^k + \ldots).$$

Сделаем тождественное преобразование

$$2\pi = pT - pTh_2(a^2+b^2)^k + \ldots = pT - 2\pi h_2(a^2+b^2)^k + \ldots$$

Таким образом, величину $x(2\pi, a, b, 0)$ мы можем представить в форме следующего ряда:

$$x(2\pi, a, b, 0) = x(pT - 2\pi h_2(a^2+b^2)^k + \ldots, a, b, 0) =$$
$$= x(pT, a, b, 0) - 2\pi h_2(a^2+b^2)^k \frac{\partial x}{\partial t} + \Phi_1^*, \quad (8.28)$$

где Φ_1^* — сумма членов более высокого порядка. Воспользуемся теперь равенствами (8.20) и тем обстоятельством, что

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\mu=0} = -py + X(x, y)$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\substack{\mu=0\\ t=pT}} = -pb + X(a, b).$$

Это позволяет разложение (8.28) представить в форме

$$x(2\pi, a, b, 0) = a + 2\pi h_2 pb\left(a^2+b^2\right)^k + \Phi_1^{**},$$

где Φ_1^{**} — сумма членов более высокого порядка по отношению a и b. Подобное разложение можно написать и для функции $y(2\pi, a, b, 0)$:

$$y(2\pi, a, b, 0) = b - 2\pi h_2 pa\left(a^2+b^2\right)^k + \Phi_2^{**}.$$

Эти равенства позволяют теперь систему (8.27) записать в форме

$$\left.\begin{aligned} 2\pi h_2 pb\left(a^2+b^2\right)^k + \Phi_1^{**} + \mu\left[C_1(2\pi) + \Psi_1\right] = 0, \\ -2\pi h_2 pa\left(a^2+b^2\right)^k + \Phi_2^{**} + \mu\left[C_2(2\pi) + \Psi_2\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8.29)$$

Итак, систему уравнений, которая позволяет определить начальные значения переменных x и y, порождающие периодические решения системы (8.1), мы привели к виду (8.29), где выделены низшие степени относительно искомых чисел a и b. Соотношения (8.29) показывают, что для периодических решений эти числа должны зависеть от μ и по условию обращаться в нуль при $\mu=0$, поскольку мы ищем решение, которое при $\mu \to 0$ превращается в тривиальное.

Так как наименьшая степень чисел a и b равна $2k+1$, то ряды, которые определяют a и b через μ должны быть расположены по степеням параметра $\nu=\mu^{\frac{1}{2k+1}}$. Поэтому сделаем еще одну замену переменных

$$a=\alpha\nu, \qquad b=\beta\nu. \tag{8.30}$$

Тогда система (8.29) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi h_2 p\beta(\alpha^2+\beta^2)^k + C_1(2\pi) + \frac{1}{\mu}\Phi_1^{**} + \Psi_1 = 0, \\ -2\pi h_2 p\alpha(\alpha^2+\beta^2)^k + C_2(2\pi) + \frac{1}{\mu}\Phi_2^{**} + \Psi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

Напомним, что через Φ_1^{**}, Φ_2^{**} и Ψ_1, Ψ_2 обозначены совокупности членов, порядок которых более высокий относительно ab и μ. Следовательно, мы можем утверждать, что они обращаются в нуль при $\nu=0$. Из аналитичности этих функций следует, что разложения этих функций начинаются с членов первого порядка малости по ν

$$\frac{1}{\mu}\Phi_i^{**} + \Psi_i = \nu x_i + \ldots \qquad (i=1,\ 2).$$

Левые части уравнений (8.31) — аналитические функции своих переменных. Поэтому решения этой системы будут аналитическими функциями параметра ν

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \alpha_0 + \nu\alpha_1 + \nu^2\alpha_2 + \ldots, \\ \beta = \beta_0 + \nu\beta_1 + \nu^2\beta_2 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

Уравнения (8.31) будут иметь только одно действительное решение, причем α_0 и β_0 в этом случае удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2\pi h_2\beta_0(\alpha_0^2+\beta_0^2)^k = -C_1(2\pi), \\ 2\pi h_2\alpha_0(\alpha_0^2+\beta_0^2)^k = C_2(2\pi). \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

Разделив первое из уравнений (8.33) на второе, найдем

$$\alpha_0 = \frac{C_2}{C_1}\beta_0.$$

Подставив затем это выражение во второе, из уравнений системы (8.33) найдем величину β_0:

$$\beta_0 = -\frac{C_1(2\pi)}{\sqrt[2k+1]{2\pi h_2 p\left[C_1^2+C_2^2\right]^k}}. \tag{8.34}$$

Аналогичным образом мы найдем и величину α_0

$$\alpha_0 = \frac{C_2(2\pi)}{\sqrt[2k+1]{2\pi h_2 p\left[C_1^2 + C_2^2\right]^k}}. \tag{8.35}$$

В равенствах (8.34) и (8.35) берется арифметическое значение корня. Среди чисел α_0 и β_0 по крайней мере одно отлично от нуля, так как мы уже установили, что одна из констант $C_1(2\pi)$ или $C_2(2\pi)$ необходимо отлична от нуля. Уравнения для определения последующих членов разложений (8.32) будут линейными и всегда разрешимыми. Итак, мы пришли к следующему фундаментальному результату.

Теорема (И. Г. Малкин). *Пусть число $2k$ — младшая степень величины c в разложении периода*

$$T = \frac{2\pi}{p}(1 + h_2 c^{2k} + \ldots)$$

порождающего решения. Тогда при главном резонансе существует одно и только одно периодическое решение системы (8.1), *которое обращается в нуль при* $\mu = 0$. *Это решение является аналитической функцией параметра* $\nu = \mu^{\frac{1}{2k+1}}$.

Эта теорема является фундаментальной теоремой теории резонансных решений. Она не только устанавливает факт существования резонансных решений, но и указывает путь их построения. Эти решения, как явствует из теоремы, следует искать в виде рядов, расположенных по степеням параметра

$$\nu = \mu^{\frac{1}{2k+1}}.$$

5. Примеры расчета резонансных решений уравнения Дюффинга. Вернемся теперь к расчету установившихся режимов в примерах, рассмотренных в п. 3 настоящего параграфа. Рассмотрим сначала уравнение (8.9) при $\omega = 1$. Это уравнение допускает резонансное решение вида

$$x = M\cos t + N\sin t + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{8.36}$$

Решение (8.36) может быть построено методом, изложенным в предыдущем параграфе. Однако, согласно теореме Малкина, кроме решения (8.36) уравнение (8.9) может допускать также и решение вида

$$x = x_1\mu^r + x_2\mu^{2r} + \ldots \tag{8.37}$$

Решение (8.37) может быть построено, следуя изложенному методу. Для этого прежде всего надо определить показатель r в разложении (8.37).

Рассмотрим порождающее уравнение

$$\ddot{x}+x=\alpha x^3. \tag{8.38}$$

Решение уравнения (8.38) мы будем искать, следуя методу Ляпунова. Сделаем сначала замену независимого переменного

$$t=\tau(1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots).$$

Тогда уравнение (8.38) примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+x(1+2h_2c^2+\ \ldots)=\alpha x^3(1+2h_2c^2+\ \ldots). \tag{8.39}$$

Согласно методу Ляпунова решение этого уравнения следует искать в виде

$$x=c\cos\tau+c^2x_2+c^3x_3+\ldots$$

Функция $x_2(t)$ будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{d^2x_2}{d\tau^2}+x_2=0.$$

Так как функции x_2 должны удовлетворять условиям (см. § 2)

$$x_2(0)=0;\quad \left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)_{\tau=0}=0,$$

то очевидно, что $x_2\equiv 0$. Для x_3 получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2x_3}{d\tau^2}+x_3=\alpha\cos^3\tau-2h_2\cos\tau. \tag{8.40}$$

Для того чтобы уравнение (8.40) допускало периодические решения, необходимо и достаточно выбрать постоянную h_2 так, чтобы правая часть этого уравнения не содержала $\cos t$. Легко видеть, что

$$h_2=\frac{3\alpha_2}{8}.$$

Итак, $h_2\neq 0$. Согласно теореме Малкина

$$r=\frac{1}{2k+1},$$

где $2k$ — младшая степень величины c в разложении периода. В нашем случае это показатель степени при c в слагаемом, содержащим h_2, т. е. $r=1/3$. Теперь решение уравнения (8.9) будем искать в виде ряда

$$x=x_1\mu^{1/3}+x_2\mu^{2/3}+\ldots, \tag{8.41}$$

Для функций x_i имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= 0, \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_3 + x_3 &= \sin t + \alpha x_1^3 \end{aligned}\right\} \tag{8.42}$$

и т. д.

Из первых двух уравнений (8.42) находим

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t,$$
$$x_2 = M_2 \cos t + N_2 \sin t,$$

где M_i и N_i — числа, которыми мы имеем право распоряжаться. Для функции x_3 мы будем иметь следующее уравнение:

$$\ddot{x}_3 + x_3 = \sin t + \alpha \left\{M_1^3 \cos^3 t + 3M_1^2 N_1 \cos^2 t \sin t + 3M_1 N_1^2 \cos t \sin^2 t\right\}. \tag{8.43}$$

Постоянные M_1 и N_1 мы должны подбирать так, чтобы правая часть уравнения (8.43) не содержала первых гармоник. Проводя очевидные выкладки, находим

$$M_1 = 0, \qquad N_1 = \sqrt[3]{-\frac{4}{\alpha}}.$$

Расчет последующих членов разложения (8.41) проводится аналогично.

Итак, в условиях главного резонанса, когда частота внешнего возбуждения совпадает с собственной частотой, уравнение Дюффинга (8.9) допускает по меньшей мере два решения, получаемых из квазилинейной теории Пуанкаре и теории Малкина, если $\alpha < 0$.

6. Еще один пример решений $x^{(0)}$. Рассмотрим теперь уравнение (8.10). В предыдущем параграфе мы установили, что в рамках квазилинейной теории не удается построить резонансного решения уравнения (8.10). Это значит, что не существует решений вида (8.36). Попробуем теперь определить резонансные решения методом Малкина.

Для этого надо в первую очередь определить степень r в разложении (8.37). Рассматривая предыдущее уравнение и повторяя вычисления предыдущего пункта, мы снова установим, что $r = 1/3$. Итак, получим

$$x = \mu^{1/3} x_1 + \mu^{2/3} x_2 + \mu x_3 + \ldots \tag{8.44}$$

Для членов разложения (8.44) мы получаем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \\ &\ddot{x}_2 + x_2 = \alpha x_1^2, \\ &\ddot{x}_3 + x_3 = 2x_1x_2 + \sin t \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

Из первого уравнения находим

$$x_1 = M_1 \cos t + N_1 \sin t.$$

Тогда второе уравнение (8.45) примет вид

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \alpha \left\{M_1^2 \cos^2 t + 2M_1N_1 \cos t \sin t + N_1^2 \sin^2 t\right\}. \tag{8.46}$$

Разложение правой части в ряд Фурье имеет вид

$$A_0(M_1, N_1) + A(M_1, N_1) \cos 2t + B(M_1, N_1) \sin 2t,$$

где

$$A_0 = \frac{\alpha}{2}(M_1^2 + N_1^2), \quad A = \frac{\alpha}{2}(M_1^2 - N_1^2), \quad B = \alpha M_1 N_1.$$

Таким образом, уравнение (8.46) допускает периодические решения при любых M_1 и N_1. Общее решение этого уравнения примет вид

$$x_2 = A_0 - \frac{1}{3}[A \cos 2t + B \sin 2t] + M_2 \cos t + N_2 \sin t,$$

где M_2 и N_2 — числа, которыми мы имеем право распоряжаться. Третье из уравнений (8.45) можно теперь переписать в форме

$$\ddot{x}_3 + x_3 = \sin t + 2(M_1 \cos t + N_1 \sin t)\left\{A_0 - \frac{1}{3}(A \cos 2t + B \sin 2t)\right\} + \\ + 2(M_1 \cos t + N_1 \sin t)(M_2 \cos t + N_2 \sin t). \tag{8.47}$$

Так как разложение в ряд Фурье последнего слагаемого правой части уравнения (8.47) не будет содержать первых гармоник, то вопрос о существовании периодических решений уравнения (8.47) будет решаться независимо от величин M_2 и N_2.

Для существования периодических решений периода 2π уравнения (8.47) необходимо и достаточно, чтобы разложение в ряд Фурье правой части уравнения (8.47) не содержало первых гармоник. Это дает два кубических уравнения относительно чисел M_1 и N_1. Они всегда имеют хотя бы одно действительное решение. Например, в одном из решений всегда $M_1 = 0$. Тогда

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Итак, теория Малкина позволяет обнаружить периодические решения в тех случаях, когда при помощи квазилинейной теории этого сделать не удается.

7. О решениях, близких к нетривиальным решениям системы Ляпунова. Мы рассмотрели только решения $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, но в начале параграфа было показано, что, помимо решений, которые при $\mu \to 0$ обращаются в тождественный нуль, в системе могут существовать решения, которые при $\mu \to 0$ переходят в нетривиальные решения порождающей системы.

Общая теория таких решений достаточно сложна. Читателя, интересующегося подробностями этой теории, можно отослать к уже неоднократно цитировавшейся книге И. Г. Малкина *). Здесь мы ограничимся обсуждением простейшей из задач этого класса.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+f(x)=\mu\cos t, \tag{8.48}$$

где $f(x)$ — аналитическая функция, имеющая вид

$$f(x)=\lambda^2x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$$

Таким образом, при $\mu \to 0$ мы получаем порождающее уравнение, которое является частным случаем уравнений Ляпунова. Поставим задачу отыскания периодических решений уравнения (8.48) периода

$$T=\frac{2\pi}{p},$$

где p — целое число, переходящее в нетривиальное решение порождающего уравнения

$$\ddot{x}_0+f(x_0)=0. \tag{8.49}$$

Все решения уравнения (8.49) в достаточно малой окрестности положения равновесия $x_0=\dot{x}_0=0$ являются периодическими. Они представимы в виде ряда

$$x_0=c\varphi_1(\psi)+c^2\varphi_2(\psi)+\ldots\equiv x_0(c,\ \psi), \tag{8.50}$$

где

$$\psi=\omega(c)(t+h),$$

h — произвольная постоянная, $\varphi_1(\psi)=\cos\psi$, $\omega(c)$ — частота колебаний, служащая нормирующим множителем, который выбирается из тех условий, чтобы функции φ_i были периодическими функциями переменной ψ. Таким образом, период T^* по переменной t определяется формулой

$$T^*=\frac{2\pi}{\omega(c)}. \tag{8.51}$$

*) См. сноску на стр. 121.

Для $\omega(c)$, согласно теории Ляпунова, мы имеем выражение

$$\omega(c)=\frac{\lambda}{1+h_2c^2+h_3c^3+\ldots}. \tag{8.52}$$

Поскольку период (решения уравнения (8.48)) T задан, то задан и период порождающего решения, так как

$$T=T^*,$$

что позволяет, согласно (8.4), получить уравнение для определения «амплитуды» c порождающего решения

$$c+\frac{h_3}{2h_2}c^2+\ldots=\sqrt{\frac{\lambda-p}{ph_2}}.$$

Таким образом, для существования действительных решений необходимо, чтобы

$$\operatorname{sign}(\lambda-p)=\operatorname{sign} h_2.$$

Предположим, что это условие выполнено: ограничиваясь простейшим случаем $p=1$, зафиксируем один из действительных корней уравнения (8.4). Тогда периодическое решение уравнения (8.48) естественно искать в виде ряда

$$x=x_0+\mu x_1+\mu^2x_2+\ldots \tag{8.53}$$

Подставляя ряд (8.53) в уравнение (8.48), мы придем к следующим уравнениям относительно неизвестных x_1, x_2, ...:

$$\ddot{x}_1+\left(\frac{df}{dx}\right)_0x_1=\cos t, \tag{8.54}$$

$$\ddot{x}_2+\left(\frac{df}{dx}\right)_0x_2=\Phi_2(t) \tag{8.55}$$

и т. д.

Здесь $\left(\frac{df}{dx}\right)_0$ означает, что производная вычислена при $x=x_0$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0=\lambda^2+2a_2x_0+3a_3x_0^2+\ldots$$

Принимая во внимание представление (8.50), можно написать

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_0=F(c,\ t+h),$$

где F — некоторая периодическая функция t периода 2π, c — заданное число, а h — произвольное число, которым мы можем распоряжаться.

Функция Φ_2 определяется только функциями x_0 и x_1. Все последующие уравнения имеют вид

$$\ddot{x}_i+\left(\frac{df}{dx}\right)_0=\Phi_i(t),$$

где Φ_i определяется функциями $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}$. Следовательно, если эти функции определены, то все Φ_i могут считаться известными функциями времени.

Рассмотрим уравнение (8.54), представляющее собой уравнение с периодическими коэффициентами. Полная система фундаментальных решений однородного уравнения

$$\ddot{x}+F(c,\ t+h)x=0 \tag{8.56}$$

нам известна, так как уравнение (8.56) является уравнением в вариациях для порождающего уравнения (8.49). Эти решения, как было показано (см. формулы (2.25)), можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{\partial x_0(c,\ \psi)}{\partial \psi} = u(c,\ \omega(c)(t+h)), \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{d\omega/dc}\,\frac{\partial x_0(c,\ \psi)}{\partial c} = v+tu, \end{aligned}\right\} \tag{8.57}$$

где u и v при данном c — периодические функции времени периода 2π.

Для того чтобы уравнение (8.54) допускало периодические решения, необходимо и достаточно выполнение условий (2.29), которые для интересующего нас случая будут иметь следующий вид:

$$\int_0^{2\pi} u(c,\ \omega(c)(t+h))\cos t\,dt=0, \tag{8.58}$$

$$\int_0^{2\pi} \{v(c,\ \omega(c)(t+h))+tu(c,\ \omega(c)(t+h))\}\cos t\,dt = \\ =2\pi(\dot{x}_{10}u(0)-x_{10}\dot{u}(0)), \tag{8.59}$$

где x_{10} и $\dot{x}_{10}$ — значение искомой функции $x_1(t)$ и ее производной при $t=0$.

Уравнение (8.58) — это некоторое трансцендентное уравнение для определения аддитивной постоянной h. Оно может вовсе не иметь решений, иметь конечное или бесконечное число решений.

Пусть теперь h — корень уравнения (8.58). Тогда порождающее решение $x_0(t)$, которое описывается формулой (8.50), становится полностью определенным.

Решение уравнения (8.54) — функцию x_1 — можно представить как

$$x_1=C_{11}u(t)+C_{12}(v+tu)+y_1(t), \tag{8.60}$$

где $y_1(t)$ — это некоторая функция, полученная методом вариации произвольных постоянных. Постоянные C_{11} и C_{12} выражаются линейным образом через начальные значения функции

x_{10} и ее производной $\dot{x}_{10}$. Но эти величины нам заранее не известны. Для их определения мы имеем только одно уравнение (8.59), поэтому на этом этапе процедуры дальнейшее уточнение решения $x_1(t)$ невозможно. Рассмотрим теперь уравнение (8.55).

Для того чтобы оно имело периодическое решение, необходимо и достаточно выполнение условия типа (8.58)

$$\int_0^{2\pi} \Phi_2 u \, dt = 0. \tag{8.61}$$

Так как Φ_2 зависит от x_{10} и $\dot{x}_{10}$, то выражение (8.61) можно рассматривать как уравнение для определения этих величин. Вместе с уравнением (8.59) они дают систему двух уравнений для определения двух искомых величин x_{10} и $\dot{x}_{10}$ и т. д.

Мы рассмотрели схему вычислений периодического режима неавтономной системы, близкой к некоторой консервативной. При этом мы ограничились случаем одной степени свободы. Переход к более общей задаче — отысканию периодических режимов в системах с большим числом степеней свободы — нетривиально. Дело в том, что, рассматривая систему первого порядка, мы всегда можем построить с помощью метода Ляпунова фундаментальную систему решений для уравнений в вариациях. Переходя к системе произвольного порядка, мы сталкиваемся со следующей трудностью: для эффективной реализации вычислительной процедуры мы должны иметь в своем распоряжении полную систему интегралов порождающей системы.

§ 9. Заключительные замечания

Теория, элементы которой были изложены в этой главе, возникла в конце XIX века. В настоящее время ее аппарат разработан весьма детально, что позволяет решать разнообразные задачи, в том числе и широкий круг задач, возникающих в прикладной науке и технике. Несмотря на то, что в последние десятилетия появились новые подходы и более сильные методы, значение изложенной теории достаточно велико: можно указать целый ряд задач, для которых методы Ляпунова — Пуанкаре являются и до сих пор едва ли не единственным средством получения эффективного решения. Тем не менее рамки теории Ляпунова — Пуанкаре весьма ограничены. Эта теория ставит себе одну задачу — задачу отыскания периодических решений. При всей ее важности эта задача является все-таки очень специальной. Тем не менее теория периодических решений имеет внутри себя еще очень много проблем (в этой книге рассмотрены толь-

ко самые простые задачи). И все время появляются исследования, которые обогащают теорию Ляпунова — Пуанкаре, не выводя ее из круга первоначальных идей. Одновременно делаются попытки распространить идеологию и методы теории Ляпунова — Пуанкаре на более широкий круг задач и прежде всего на отыскание почти периодических решений. Однако целый ряд очень важных задач теории колебаний и теории нелинейных дифференциальных уравнений остается вне пределов ее интересов. Среди таких задач, имеющих особое практическое значение, можно указать, например, задачу определения закона изменения амплитуды колебаний под действием внешних возмущений. Эта и другие задачи отыскания «переходных режимов» в колебательных системах настоятельно требуют развития более универсальной теории — аппарата, который одновременно с отысканием периодических режимов был бы приспособлен для изучения переходных режимов в нелинейных системах.

Аппарат теории Ляпунова — Пуанкаре основан на использовании свойств аналитичности правых частей изучаемых дифференциальных уравнений. Питательной средой, в которой создавалась эта теория в XIX веке, были разнообразные проблемы небесной механики, в которых предположения об аналитичности были естественными. Однако в теории колебаний различных инженерных конструкций, при изучении сложных физических явлений и во многих других случаях предположение об аналитичности становится весьма обременительным. В рамках теории малого параметра делаются попытки отказаться от этого условия. Некоторые из результатов подобного рода приведены в книге И. Г. Малкина, которую мы неоднократно цитировали. Вместо разложения в ряды в этом случае предполагаются некоторые специальные способы использования последовательных приближений. Однако вычислительные схемы, которые здесь возникают, оказываются весьма сложными, и большого практического значения подобные исследования, по-видимому, не получили. Таким образом, «универсальная теория» должна удовлетворять еще одному требованию. Она должна распространяться на широкий класс дифференциальных уравнений, не стесненный требованием аналитичности.

Одним из возможных претендентов на роль такой «универсальной теории» является теория, использующая идеи усреднений. Эта теория приобретает все большую и большую популярность, и сфера ее использования все более и более расширяется. Ее изложению посвящена следующая глава.

ГЛАВА III

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

Введение

В этой главе рассматриваются асимптотические методы, использующие осреднение правых частей дифференциальных уравнений по некоторым из переменных. Эти методы часто называют методами осреднения или методами разделения движений. Они играют большую роль при изучении уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= Y_0(x, y) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

где x и y — некоторые векторы, а ε — малый параметр. Подобные уравнения часто встречаются в различных задачах физики и механики. В частности, они типичны для широкого класса задач теории колебаний. Их особенность состоит в том, что часть переменных (компоненты вектора x) меняется медленно, а другая часть переменных (компоненты вектора y) — быстро. Эти переменные мы будем называть соответственно медленными и быстрыми.

Теория, которая изучается в этой главе, имеет своим истоком работы голландского инженера Ван-дер-Поля, который разработал довольно эффективный способ решения нелинейных задач теории колебаний систем с одной степенью свободы.

Как мы увидим ниже, он, во-первых, предложил простую схему редукции задачи теории колебаний к исследованию одного частного случая уравнения (*) и, во-вторых, систему (*) заменил упрощенной системой, полученной из (*) усреднением правых частей по «быстрому» переменному. Для формального применения метода Ван-дер-Поля не требовалось, в отличие от методов предыдущего параграфа, никаких ограничительных предположений о природе сил, под действием которых происходит колебательный процесс. В равной степени он мог быть использован и для исследования установившихся движений и для исследования переходных процессов.

Метод Ван-дер-Поля обладал к тому же большой наглядностью и был удобен для проведения расчетов. Поэтому он быстро завоевал популярность у инженеров. Однако этот метод

носил чисто интуитивный характер. Ни его автор, ни его последователи даже не сделали попытки дать какое-либо обоснование новому методу. Поэтому он долгое время (подобно методу Хевисайда) оставался вне математики *).

В тридцатых годах Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов предложили некоторый общий подход для исследования уравнений типа (*). Его основное содержание сводится к построению такой замены переменных, которая позволяет отделить «быстрые» переменные от «медленных». Эта замена переменных позволяет также представить решение в виде асимптотического ряда, первый член которого совпадает с решением, полученным по методу Ван-дер-Поля (для тех задач, которые могут быть решены этим методом). В последующие годы метод Крылова — Боголюбова получил, главным образом благодаря работам учеников Н. Н. Боголюбова (Ю. А. Митропольского, Д. Н. Зубарева и др.) дальнейшее развитие. Он был распространен на новые типы задач (например, на задачи исследования поведения системы под действием периодических возмущений), был доказан целый ряд теорем, превративший этот метод в строгую математическую теорию. В послевоенное время метод разделения движений начал использоваться очень широко, находя применение в самых различных областях инженерной практики и физики. Данная глава может рассматриваться как введение в теорию асимптотических методов разделения движений.

В настоящее время существует несколько вариантов интерпретации этих методов. Та, которая используется в данной книге, по существу идентична интерпретации, предложенной в работах В. В. Волосова.

§ 1. Метод Ван-дер-Поля

1. Предварительные замечания. Истоки метода усреднения находятся в работах Ван-дер-Поля. Поэтому изложение целесообразно начать с рассмотрения последних, тем более, что метод Ван-дер-Поля сам по себе имеет широкую область применения.

В этом параграфе мы будем исследовать колебательные движения, описываемые одним уравнением второго порядка

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon\varphi(z,\ \dot{z}). \tag{1.1}$$

Здесь ω — некоторая действительная постоянная, а ε — малый параметр. Уравнение (1.1) условимся называть квазилинейным,

*) В конце двадцатых годов Мандельштам и Папалекси дали оценки точности метода Ван-дер-Поля. Подробнее см. Андронов, Хайкин и Витт, Теория колебаний. Физматгиз, Москва, 1961.

а колебания, которые оно описывает, — квазилинейными колебаниями.

Уравнение

$$\ddot{z}+\omega^2 z=0, \tag{1.2}$$

которое описывает гармонические колебания, будем, как и раньше, называть порождающим.

Функция φ может быть весьма общего вида и, в частности, даже разрывной. Естественно потребовать, чтобы она была ограниченной.

2. Переменные Ван-дер-Поля. Общее решение порождающего уравнения имеет вид

$$z=x\cos y, \tag{1.3}$$

где $y=\omega(t+t_0)$, x и t_0 — произвольные постоянные. Оно описывает некоторый колебательный процесс, обладающий частотой ω. Число x называется амплитудой, а функция $y(t)$ — фазой.

Естественно предположить, что в случае малых значений ε решение уравнения (1.1) будет описывать также некоторый колебательный процесс вида (1.3). Однако следует ожидать, что амплитуда этого процесса x уже не будет (в общем случае) постоянным числом, а будет изменяться, причем тем медленнее, чем меньше число ε. Скорость изменения фазы также будет изменяться со временем. Таким образом, если в каждый момент времени исследуемый процесс носит колебательный характер, то его полностью определяют мгновенные значения амплитуды x и фазы y. Поэтому в качестве переменных, описывающих процесс, можно принять амплитуду колебаний и фазу. Тогда одно из переменных — амплитуда — будет меняться медленно.

Итак, в задаче (1.1) будем в качестве новых переменных рассматривать функции $x(t)$ и $y(t)$. Для того чтобы определить эти переменные, к соотношению (1.3) надо добавить еще одно.

Используя идею вариации произвольных постоянных, потребуем, чтобы x и y были связаны, кроме (1.3), еще следующим соотношением:

$$\dot{z}=-\omega x\sin y, \tag{1.4}$$

которое всегда имеет место для постоянной амплитуды.

Составим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $x(t)$ и $y(t)$. Дифференцируя (1.3) и приравнивая к (1.4), получим

$$\dot{x}\cos y-x\dot{y}\sin y+\omega x\sin y=0. \tag{1.5}$$

Условие (1.5) — это условие совместимости формул (1.3) и (1.4). Дифференцируя далее (1.4) и подставив в (1.1), получим еще одно уравнение

$$-\dot{x}\omega \sin y - \omega x\dot{y} \cos y + x\omega^2 \cos y = \varepsilon\varphi(x \cos y, -\omega x \sin y). \quad (1.6)$$

Система (1.5)—(1.6) — это система двух уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций x и y. Разрешая ее относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$, имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi(x \cos y, -x\omega \sin y) \sin y \equiv \frac{\varepsilon}{\omega}\varphi_1(x, y), \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi(x \cos y, -x\omega \sin y) \cos y \equiv \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi_2(x, y). \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

Система двух уравнений (1.7) полностью эквивалентна уравнению (1.1).

Система (1.7) является частным случаем системы (*), приведенной во введении к данной главе. Роль медленного переменного играет амплитуда x, а роль быстрого переменного — фаза y.

Заметим, что правые части системы (1.7) являются периодическими функциями фазы y, какова бы ни была функция $\varphi(x, y)$.

3. Схема В. М. Волосова. Итак, введем переменные Ван-дер-Поля, амплитуду x и фазу y, мы свели задачу исследования одного уравнения второго порядка к изучению системы двух уравнений первого порядка (1.7). Осуществляя эту редукцию, мы следовали классической схеме метода вариации произвольных постоянных.

В. М. Волосов предложил другой способ этой редукции, аналогичный выводу уравнений для оскулирующих элементов в небесной механике. Переменные Ван-дер-Поля связаны с величиной z равенствами (1.3) и (1.4), которые можно переписать в следующем виде:

$$x = \sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}, \qquad y = -\operatorname{arctg}\frac{\dot{z}}{\omega z}. \quad (1.3')$$

Благодаря выбранной вариации произвольных постоянных эти соотношения справедливы в равной степени как для порождающего уравнения, так и для уравнения (1.1). В первом случае величина z меняется в силу уравнений (1.2) и при этом величина x остается постоянной, а $\dot{y} = \omega$. Найдем теперь закон изменения этих величин в интересующем нас случае. Продифференцируем равенство (1.3′) в силу уравнения (1.1) и рассмотрим

сначала первое из этих равенств

$$\dot{x} = \frac{z\dot{z}}{\sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}} + \frac{\dot{z}\dot{z}}{\omega^2\sqrt{z^2 + \frac{\dot{z}^2}{\omega^2}}} = \frac{z\dot{z}}{x} + \frac{\dot{z}(-\omega^2 z + \varepsilon\varphi)}{\omega^2 x} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi}{\omega^2 x}\dot{z} = -\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi\sin y,$$

т. е.

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon}{\omega}\varphi_1(x, y).$$

Таким образом, мы получили первое из уравнений системы (1.7). Дифференцируя подобным образом второе из равенств (1.3′), мы получим второе из уравнений этой системы.

Рассуждения В. М. Волосова имеют то преимущество перед стандартными, что они исключают необходимость разрешать систему уравнений (1.5), (1.6) относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

4. Укороченные уравнения. Первое из уравнений системы (1.7) показывает, что переменное x меняется медленно, так как ее производная имеет порядок ε. Следовательно, за одно колебание (за время, в течение которого фаза y изменится на величину, равную 2π) амплитуда и характер колебаний изменятся мало. Поэтому можно ожидать, что мы не сделаем большой ошибки, если заменим правые части системы (1.7) их средними значениями за период, т. е. вместо системы (1.7) станем рассматривать систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\bar{\varphi}_1(x), \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\bar{\varphi}_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -x\omega\sin y)\sin y\,dy, \\ \bar{\varphi}_2(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y, -x\omega\sin y)\cos y\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Уравнения (1.8) будем называть укороченными уравнениями или уравнениями Ван-дер-Поля. Они значительно проще исходной системы (1.7), поскольку первое уравнение может быть проинтегрировано независимо от второго. В системе (1.8) медленные и быстрые движения разделены. Интегрируя первое из уравнений этой системы, мы находим закон изменения амплитуды. Очень часто в прикладных задачах бывает достаточно

найти только зависимость амплитуды от времени. В рассматриваемой теории для этого достаточно найти решение уравнения первого порядка (в общем случае нелинейного).

Определение фазы сводится к квадратурам. Наибольший интерес обычно представляет не сама фаза, а скорость ее изменения в зависимости от амплитуды. Ответ на этот вопрос дает непосредственно второе уравнение системы (1.8).

Итак, метод Ван-дер-Поля решения уравнения (1.1) состоит в переходе от переменной z к переменным x и y (которые мы будем называть переменными Ван-дер-Поля) и к замене точных уравнений (1.7) укороченной системой (1.8).

5. **Стационарные режимы.** Система уравнений (1.8) позволяет найти возможные стационарные (автоколебательные) режимы, т. е. режимы, при которых амплитуда остается неизменной. Полагая $\dot{x}=0$, находим, что стационарная амплитуда должна быть корнем трансцендентного уравнения

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x\cos y,\ -\omega x\sin y)\sin y\,dy=0. \tag{1.10}$$

Заметим, что уравнение (1.10) совпадает с тем уравнением, которое мы получили бы, если бы рассматривали уравнение (1.1) как квазилинейное и разыскивали периодические решения методом Пуанкаре.

Второе из уравнений (1.8) позволяет найти зависимость угловой скорости $\dot{y}$ от амплитуды x

$$\dot{y}=\omega-\frac{\varepsilon}{2\pi\omega x}\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y)\cos y\,dy. \tag{1.11}$$

Рассмотрим в качестве примера уравнение Дюффинга

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon\alpha z^3. \tag{1.12}$$

В этом случае $\varphi(z)=\alpha z^3$, и уравнение (1.11) нам дает

$$\dot{y}=\omega-\frac{\varepsilon\alpha}{2\pi\omega x}\int_0^{2\pi}x^3\cos^4 y\,dy=\omega-\frac{3\varepsilon\alpha x^2}{8\omega}, \tag{1.13}$$

откуда

$$x=\sqrt{\gamma(\omega-\dot{y})}, \tag{1.14}$$

где

$$\gamma=\frac{8\omega}{3\varepsilon\alpha}.$$

Кривые, дающие зависимость амплитуды от частоты, называются амплитудными кривыми. Они имеют вид, изображенный на рис. 19.

Характер кривой зависит от знака γ (т. е. знака α). В случае $\alpha<0$ система называется жесткой. В противном случае система называется мягкой. Эти названия связаны с тем, что уравнение (1.12) мы можем интерпретировать как уравнение, описывающее колебание пружинного маятника

$$\ddot{z}+F(z)=0,$$

где возвращающая сила пружины $F(z)$ такова:

$$F(z)=\omega^2 z-\varepsilon\alpha z^3.$$

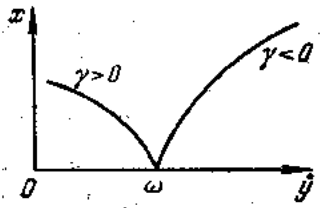

Рис. 19.

Трансцендентное уравнение (1.10) может совсем не иметь действительных решений. Это будет означать, что в системе стационарные колебания невозможны. Уравнение (1.10) может иметь одно или несколько решений, в некоторых случаях оно удовлетворяется тождественно. Так, например, обстоит дело, когда система консервативна. В самом деле, в этом случае функция φ зависит только от переменной z, поэтому уравнение (1.10) примет вид

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y)\sin y\,dy=0. \tag{1.15}$$

Так как $\sin y\,dy=-d\cos y$, то под знаком интеграла стоит полный дифференциал

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y)\sin y\,dy=-\frac{1}{x}\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y)\,d(x\cos y).$$

Обозначим через $F(\xi)$ — неопределенный интеграл

$$F(\xi)=\int_0^{\xi}\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos y)\sin y\,dy=-\frac{1}{x}\int_0^{2\pi}dF=-\frac{1}{x}F(x\cos y)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

т. е. уравнение (1.15) удовлетворяется тождественно по x,

Итак, теория Ван-дер-Поля позволяет отыскивать приближенные значения амплитуд стационарных решений и, в частности, решить задачу об автоколебаниях, причем значение амплитуды, найденное согласно этой теории, будет таким же, как и значение амплитуды первого приближения в теории Ляпунова — Пуанкаре, (если, разумеется, метод Пуанкаре в этом случае применим). Если $\alpha<0$, то с увеличением смещения возвращающая сила растет (жесткость пружины возрастает). Если $\alpha>0$, то с увеличением смещения возвращающая сила уменьшается. В первом случае система называется жесткой, во втором случае — мягкой.

Те же результаты мы получили, исследуя уравнение Дюффинга методом Ляпунова — Пуанкаре и ограничиваясь первыми тремя приближениями.

6. Пример разрывных правых частей. Использование метода Ван-дер-Поля для исследования уравнения Дюффинга нас привело к результатам, которые могут быть получены методом Ляпунова. Однако метод Ляпунова применим только к тем задачам, в которых правые части уравнений — аналитические

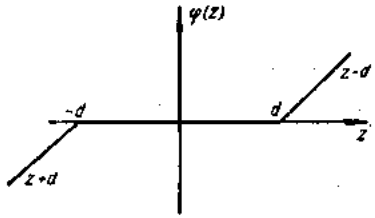

Рис. 20.

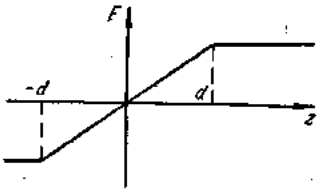

Рис. 21.

функции. Метод Ван-дер-Поля применим к уравнениям более общего типа. Для того чтобы это показать, рассмотрим один пример, в котором возмущающая сила φ не является аналитической.

Рассмотрим маятник, описываемый уравнением (1.1), в котором функция $\varphi(z, \dot{z})=\varphi(z)$ имеет вид, изображенный на рис. 20.

Возвращающая сила — функция $F(z)=\omega^2 z-\varepsilon\varphi(z)$ — изображена на рис. 21. Составим для этой системы укороченные уравнения Ван-дер-Поля. Так как система консервативна, то

$$\overline{\varphi_i(x)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(x\cos y)\sin y\,dy=0. \qquad (1.16)$$

Следовательно, амплитуда $x\equiv\text{const}$.

Вычислим далее

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x\cos y)\cos y\,dy. \tag{1.17}$$

Рассмотрим подробнее функцию

$$\varphi^*(y) = \varphi(x\cos y), \qquad x = \text{const}.$$

Предположим сначала, что амплитуды, которые нас интересуют, достаточно малы $x<d$. Тогда, как это видно из рис. 20, $\varphi^*(y) = 0$ для любых y, поскольку в этом случае $|z| = x|\cos y| \leqslant x < d$. Следовательно, на колебания с малыми амплитудами возмущающая сила φ не будет оказывать влияния, и колебания нашего маятника будут совпадать с обычными линейными колебаниями с постоянной частотой $\dot{y} = \omega$.

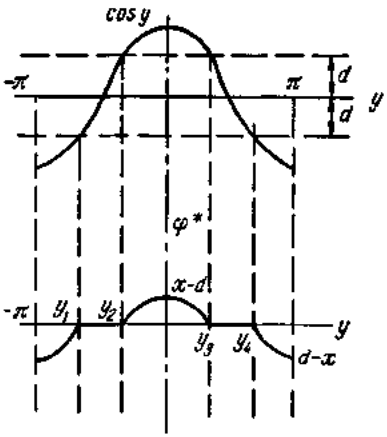

Рис. 22.

Совсем иначе будет обстоять дело для колебаний с достаточно большими амплитудами $x>d$.

Как это видно из рис. 22, функция $\varphi^*(y)$ определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&y \in (-\pi,\ y_1) && \varphi^* = d + x\cos y,\\
&y \in (y_1,\ y_2) && \varphi^* = 0,\\
&y \in (y_2,\ y_3) && \varphi^* = x\cos y - d,\\
&y \in (y_3,\ y_4) && \varphi^* = 0,\\
&y \in (y_4,\ \pi) && \varphi^* = d + x\cos y.
\end{aligned}$$

Здесь значения аргумента y_i такие:

$$\begin{aligned}
&y_1 = \arccos\left(-\frac{d}{x}\right), && y_1 \in \left(-\pi,\ -\frac{1}{2}\pi\right);\\
&y_2 = \arccos\left(\frac{d}{x}\right), && y_2 \in \left(-\frac{1}{2}\pi,\ 0\right);\\
&y_3 = \arccos\left(\frac{d}{x}\right), && y_3 \in \left(0,\ \frac{1}{2}\pi\right);\\
&y_4 = \arccos\left(-\frac{d}{x}\right), && y_4 \in \left(\frac{1}{2}\pi,\ \pi\right).
\end{aligned}$$

После того как составлено выражение для φ^*, легко можно

вычислить $\bar{\varphi}_2(x)$

$$\bar{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{y_1}(d + x\cos y)\cos y\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{y_2}^{y_3}(x\cos y - d)\cos y\,dy + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{y_4}^{\pi}(d + x\cos y)\cos y\,dy.$$

Проводя вычисления, получим

$$\bar{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\Big\{d[\sin y_1 - \sin y_3 + \sin y_2 - \sin y_1] + \\ + \frac{x}{2}[2\pi + y_1 + y_3 - y_2 - y_4] + \frac{x}{4}[\sin 2y_1 + \sin 2y_3 - \sin 2y_2 - \sin 2y_4].$$

Обозначим $\arccos\frac{d}{x} = \alpha$; тогда

$$y_1 = -(\pi - \alpha), \quad y_2 = -\alpha, \quad y_3 = \alpha, \quad y_4 = \pi - \alpha.$$

Поэтому

$$y_1 + y_3 - y_2 - y_4 = -2\pi + 4\alpha = -2\pi + 4\arccos\frac{d}{x}.$$

Далее, используя выражение y_i, мы найдем, что

$$\sin y_1 = -\frac{1}{x}\sqrt{x^2 - d^2}, \qquad \sin y_2 = -\frac{1}{x}\sqrt{x^2 - d^2},$$

$$\sin y_3 = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - d^2}, \qquad \sin y_4 = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - d^2},$$

$$\sin 2y_1 = \frac{2d}{x^2}\sqrt{x^2 - d^2}, \qquad \sin 2y_2 = -\frac{2d}{x^2}\sqrt{x^2 - d^2},$$

$$\sin 2y_3 = +\frac{2d}{x^2}\sqrt{x^2 - d^2}, \qquad \sin 2y_4 = -\frac{2d}{x^2}\sqrt{x^2 - d^2}.$$

Собирая все эти результаты, получим окончательно

$$\bar{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{2d}{x^2}\sqrt{x^2 - d^2} + 2x\arccos\frac{d}{x}\right\}. \tag{1.18}$$

Таким образом, колебание изучаемого нелинейного осциллятора в рамках теории Ван-дер-Поля можно рассматривать как колебание гармонического маятника

$$z = x\cos\Omega t$$

с постоянной частотой Ω. Отличие от гармонического осциллятора состоит лишь в том, что частота Ω

$$\Omega(x) = \omega - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega x}\bar{\varphi}_2(x), \tag{1.19}$$

согласно (1.18), зависит от амплитуды x

$$\Omega(x)=\begin{cases}\omega & \text{при} \quad x\leqslant d,\\ \omega-\dfrac{\varepsilon}{4\pi^2\omega x}\left[2x\arccos\dfrac{d}{x}-\dfrac{2d}{x}\sqrt{x^2-d^2}\right] & \text{при} \quad x\geqslant d.\end{cases}$$

График этой зависимости приведен на рис. 23.

Рассмотренная нами система, согласно введенному определению, является мягкой — с увеличением амплитуды частота ее колебаний уменьшается.

7. Диссипативная система. Перейдем теперь к изучению диссипативных систем, т. е. систем, в которых происходит рассеивание энергии.

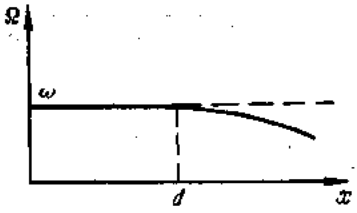

Рис. 23.

Рассмотрим уравнение типа (1.1)

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon\varphi(\dot{z}). \qquad (1.20)$$

Полная энергия маятника, движение которого описывает уравнение (1.20), определяется формулой

$$E=\frac{1}{2}(\dot{z}^2+\omega^2 z^2).$$

Для того чтобы рассматриваемая механическая система была диссипативной, т. е. для того чтобы вдоль траектории производная $\frac{dE}{dt}$ была отрицательной, достаточно, чтобы функция $\varphi(\dot{z})$ удовлетворяла условию

$$\operatorname{sign}\varphi(\dot{z})=-\operatorname{sign}\dot{z}. \qquad (1.21)$$

Для доказательства вычислим производную полной энергии в силу уравнения (1.20)

$$\frac{dE}{dt}=\dot{z}\ddot{z}+\omega^2 z\dot{z}=\varepsilon\varphi(\dot{z})\dot{z}.$$

На основании (1.21) получим

$$\frac{dE}{dt}<0.$$

Рассмотрим теперь для уравнения (1.20) укороченные уравнения (1.8). Функция $\bar{\varphi}_2(x)$ имеет вид

$$\bar{\varphi}_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(-x\omega\sin y)\cos y\,dy\equiv 0. \qquad (1.22)$$

Таким образом, диссипативная система вида (1.20) обладает свойством изохронности — частота колебаний не зависит от амплитуды.

Этот результат носит приближенный характер, поскольку он получен не из полного уравнения (1.20), а на основании исследования приближенных уравнений Ван-дер-Поля.

Вычислим еще функцию $\bar{\varphi}_1(x)$

$$\bar{\varphi}_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(-x\omega \sin y) \sin y \, dy.$$

Функция $\varphi(u)$, согласно (1.21), обладает свойством

$$\operatorname{sign} \varphi(-u) = \operatorname{sign} u.$$

Отсюда сразу следует, что подынтегральное выражение всегда положительно. Итак, функция $\bar{\varphi}_1(x)$ всегда положительна. Следовательно,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \bar{\varphi}_1(x) < 0. \tag{1.23}$$

Таким образом, амплитуда колебаний x — монотонно убывающая функция. Для определения зависимости $x(t)$ мы должны проинтегрировать еще нелинейное уравнение (1.23).

В качестве примера рассмотрим колебание маятника при наличии малого вязкого трения

$$\varphi(\dot{z}) = -k\dot{z}.$$

Тогда

$$\bar{\varphi}_1(x) = \frac{k\omega x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 y \, dy = \frac{k\omega x}{2}.$$

Интегрируя затем уравнение (1.23), получим

$$x = x_0 e^{-\frac{\varepsilon k t}{2}},$$

где x_0 — начальная амплитуда. Таким образом, уравнения Ван-дер-Поля позволяют представить колебательный процесс, описываемый уравнением (1.20), в следующем виде:

$$x = x_0 e^{-\frac{\varepsilon k t}{2}} \cos \omega t. \tag{1.24}$$

Для того случая, когда $\varphi(\dot{z}) = -k\dot{z}$, хорошо известно точное решение

$$z = x_0 e^{-\frac{\varepsilon k t}{2}} \cos \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2 \frac{k^2}{4}}\, t. \tag{1.25}$$

Сопоставляя (1.24) и (1.25), мы видим, что ошибка, которая возникает из-за замены точных уравнений укороченными, имеет

второй порядок малости по отношению к интенсивности возмущений ε.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о колебании маятника в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\ddot{z}+\varepsilon\alpha|\dot{z}|\dot{z}+\omega^2 z=0,$$

т. е.

$$\varphi(\dot{z})=-\alpha\dot{z}|z|.$$

Составим первое из укороченных уравнений Ван-дер-Поля. Проведя необходимые выкладки, получим

$$\dot{x}=-\varepsilon\frac{4\alpha x^2\omega}{3\pi}$$

и, следовательно, будем иметь следующую зависимость амплитуды от времени:

$$x=\frac{x_0}{1+\frac{4\varepsilon\alpha\omega x_0}{3\pi}t}.$$

8. Автоколебательная система. Покажем, как метод Ван-дер-Поля может использоваться для отыскания автоколебательных режимов. Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{z}+z=\varepsilon(1-bz^2)\dot{z}. \tag{1.26}$$

Это уравнение мы уже рассматривали в предыдущей главе методом Пуанкаре. Применим теперь метод Ван-дер-Поля для отыскания его стационарных решений. Согласно изложенной теории для этого нам достаточно выразить функцию $\bar{\varphi}_1(x)$

$$\bar{\varphi}_1(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-bx^2\cos^2 y)\,x\sin^2 y\,dy \tag{1.27}$$

и определить корни уравнения

$$\bar{\varphi}_1(x)=0.$$

Вычисляя (1.27), находим

$$\bar{\varphi}_1(x)=\frac{x}{2}\left(\frac{bx^2}{4}-1\right). \tag{1.28}$$

Корни уравнения (1.28) будут

$$x_1=0,\qquad x_2=2\sqrt{\frac{1}{b}}. \tag{1.29}$$

Таким образом, уравнение Ван-дер-Поля допускает при $b>0$ два стационарных режима: состояние покоя $x\equiv 0$ и автоколебательный режим с амплитудой

$$x_2=2\sqrt{\frac{1}{b}}.$$

Если $b<0$, то единственным стационарным решением будет состояние покоя $x\equiv 0$.

Аналогичный результат мы установили ранее, используя метод Пуанкаре. Метод Ван-дер-Поля позволяет получить тот же результат, но более экономным способом.

9. Эквивалентная линеаризация в консервативных системах. До сих пор мы рассматривали колебательные системы

$$\ddot{z}+F(z,\ \dot{z})=0, \tag{1.30}$$

где функция $F(z, \dot{z})$ имела вид

$$F(z,\ \dot{z})=\omega^2 z-\varepsilon\varphi(z,\ \dot{z}). \tag{1.31}$$

Метод решения задач теории колебаний существенным образом использовал тот факт, что функция $F(z, \dot{z})$ близка к линейной. Она отличается от $\omega^2 z$ только членами, порядок которых равен $O(\varepsilon)$. Именно это обстоятельство служило нам оправданием для представления решения в форме $z=x\cos y$, где x и $y=\omega t$ — величины, медленно меняющиеся. Задачи теории колебаний, в которых функция $F(z, \dot{z})$ имеет форму (1.31), мы условились называть квазилинейными.

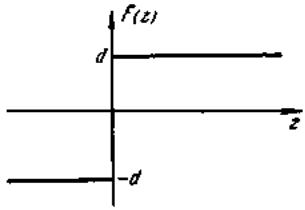

Рис. 24.

Квазилинейная трактовка задачи вполне оправдана, если речь идет о системах, движение которых происходит под действием сил, являющихся аналитическими функциями фазовых координат. Тогда функцию $F(z, \dot{z})$ всегда можно представить в виде

$$F(z,\dot{z})=\omega^2 z+k\dot{z}+a_{10}z\dot{z}+a_{11}z^2+\ldots \tag{1.32}$$

Квазилинейная трактовка (т. е. возможность представить функцию F в виде (1.31)) будет означать в этом случае только одно; мы ограничиваемся рассмотрением лишь малых колебаний, при дополнительном условии, что интенсивность сил, рассеивающих энергию, также мала.

Предположим теперь, что возвращающая сила имеет вид, изображенный на рис. 24. Функция $F(z)$ не является аналитической. Следовательно, для нее не существует представления (1.32). На первый взгляд кажется бессмысленным сам вопрос

о возможности изучения колебаний такой существенно нелинейной системы в рамках квазилинейной теории. С другой стороны, уравнение (1.30) и в этом случае описывает колебательный процесс. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно установить, что уравнение (1.30) допускает интеграл энергии

$$E \equiv \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}V(z) = \frac{1}{2}c,$$

где c — произвольная постоянная, а $V = 2\int_0^z F(z)\,dz$, и построить фазовую плоскость (рис. 25). Мы видим, что фазовые траектории рассматриваемой системы замкнутые, т. е. все решения уравнения

$$\ddot{z} + F(z) = 0 \qquad (1.30')$$

периодические. Качественный характер решений уравнения (1.30), естественно, наводит на мысль о целесообразности аппроксимировать его решения выражением

$$z = x\cos\Omega t, \qquad (1.33)$$

где x — некоторая постоянная. Величина Ω также постоянная, но она должна зависеть от амплитуды x, так как система (1.30′) не изохронна и время полного обхода изображающей точки вокруг начала координат вдоль фазовой траектории зависит от положения фазовой траектории. Другими словами, величина Ω должна считаться функцией амплитуды

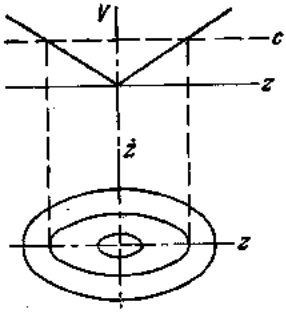

Рис. 25.

$$\Omega = \Omega(x). \qquad (1.34)$$

Таким образом, вопрос о возможности аппроксимировать решение уравнения (1.30) выражением (1.33) свелся к возможности определить надлежащим образом функцию (1.34).

Функция (1.33) удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = 0, \qquad (1.35)$$

описывающему колебательные движения под действием возвращающей силы

$$\Omega^2(x)z = \Omega^2(x)x\cos\Omega(x)t.$$

Функция $F(z)$ в этом случае имеет вид $F(x\cos\Omega t)$, т. е. является четной периодической функцией времени и может быть разложена в ряд Фурье

$$F(z) = a_1(x)\cos\Omega t + a_2(x)\cos 2\Omega t + \ldots, \qquad (1.36)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x \cos y) \cos y \, dy.$$

Положим теперь

$$F(z) = \Omega^2(x) z - \varepsilon\varphi(z) \tag{1.37}$$

и подберем функцию $\Omega(x)$ так, чтобы решение укороченных уравнений для случая, когда функция $F(z)$ имеет вид (1.37), совпадало бы с решением уравнения (1.35). Легко видеть, что для этого достаточно принять

$$\Omega^2(x) \cdot x = a_1(x), \tag{1.38}$$

откуда

$$\Omega(x) = \sqrt{\frac{a_1(x)}{x}}.$$

В самом деле, в этом случае

$$\varepsilon\varphi(z) = -[a_2(x) \cos 2y + a_3(x) \cos 3y + \ldots].$$

Следовательно,

$$\varepsilon\bar{\varphi}_2(x) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x \cos y) \cos y \, dy = 0,$$

т. е.

$$\dot{y} = \Omega(x).$$

Итак, фиксируя амплитуду x, мы находим частоту эквивалентных линейных колебаний по формуле

$$\Omega(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x} \int_0^{2\pi} F(x \cos y) \cos y \, dy}. \tag{1.38'}$$

Эта формула определяет зависимость частоты колебаний от амплитуды.

Итак, метод эквивалентной линеаризации состоит в замене уравнения (1.30) линейным уравнением (1.35), где $\Omega(x)$ дается формулой (1.38). Напомним, что амплитуда x здесь считается заданной постоянной.

Методы эквивалентной линеаризации разработаны сейчас не только для консервативных систем. Подробное изложение этих вопросов содержится в монографии Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского *).

*) Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.

10. Замечание об исследовании устойчивости. Метод Ван-дер-Поля позволяет не только отыскать стационарные режимы, но и изучить характер колебаний системы в окрестности этих режимов.

Пусть x^* — некоторый стационарный режим, и пусть в момент $t=0$ значение амплитуды не совпадает с x^*; тогда возникает задача об исследовании поведения амплитуды, если отклонение амплитуды $\delta x = x - x^*$ от стационарного значения невелико.

Составим уравнение в вариациях для укороченных уравнений (1.8)

$$\delta\dot{x} = -\frac{\varepsilon}{\omega}\frac{d\bar{\varphi}_1(x)}{dx}\delta x. \tag{1.39}$$

Отсюда сразу следует, что характер изменения величины δx определяется только знаком производной $\frac{d\bar{\varphi}_1(x)}{dx}$, вычисленной для стационарного значения амплитуды x^*. Если $\frac{d\bar{\varphi}_1(x)}{dx} > 0$, то амплитуда x убывает и стремится к своему стационарному значению, в противном случае $x(t)$ растет.

Проведенные рассуждения очень часто называют исследованием устойчивости. Однако укороченные уравнения Ван-дер-Поля являются приближенными, и мы исследуем устойчивость не исходного процесса, а некоторого решения уравнений Ван-дер-Поля. Тем не менее это рассуждение может быть очень полезным для изучения тенденции изменения x на некотором конечном (и, вообще говоря, достаточно большом) интервале времени.

Следует заметить, что предлагаемая процедура «исследования устойчивости» очень проста. Для решения вопроса об устойчивости нам достаточно вычислить производную в точке $x=x^*$.

Рассмотрим, например, уравнение (1.26). Функция $\bar{\varphi}_1(x)$ определяется формулой

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{bx^2}{4} - 1\right).$$

Вычислим

$$\frac{d\bar{\varphi}_1}{dx} = \frac{3}{8}bx^2 - \frac{1}{2}. \tag{1.40}$$

Мы знаем, что движение, которое описывается уравнением (1.26), имеет две стационарные точки $x=0$ и $x=2\sqrt{1/b}$. Так как

$$\left(\frac{d\bar{\varphi}_1}{dx}\right)_{x=0} = -\frac{1}{2} < 0,$$

то положение равновесия $x=0$ неустойчиво. Вычислим далее

$$\left(\frac{d\bar{\varphi}_1(x)}{dx}\right)_{x=2\sqrt{\frac{1}{b}}}=1>0.$$

Таким образом, предельный цикл оказывается устойчивым. Уравнение (1.39) легко интегрируется

$$\delta x=\delta x_0\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\omega}\frac{d\bar{\varphi}_1(x)}{dx}t\right\}. \tag{1.41}$$

Формула (1.41) нам дает закон изменения амплитуды в случае малых отклонений от стационарного режима. Столь же просто можно определить изменение частоты со временем. Линеаризуя второе из уравнений (1.8), мы определим

$$\dot{y}=\Omega(x^*+\delta x)=\Omega(x^*)+\frac{\varepsilon\,\delta x_0}{\omega x^*}\left\{\frac{\bar{\varphi}_2(x^*)}{x^*}-\frac{d\bar{\varphi}_2(x)}{dx}\right\}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\omega}\frac{d\bar{\varphi}_1(x)}{dx}t\right\}, \tag{1.42}$$

где

$$\Omega(x)=\omega-\frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi_2(x).$$

Формулы (1.41) и (1.42) описывают переходный процесс при малых начальных отклонениях. Для изучения произвольного переходного процесса мы должны найти численное решение первого из уравнений (1.8), что нам даст закон изменения амплитуды. Второе из этих уравнений позволит тогда в явном виде вычислить скорость изменения фазы $\dot{y}=\Omega(t)$.

§ 2. Метод Ван-дер-Поля в системах, близких к консервативным

1. Замена переменных. Ван-дер-Поль и его последователи разработали эффективные методы исследования квазилинейных задач теории колебаний. В этом случае порождающим является линейное уравнение. Однако не представляет существенного труда распространить метод Ван-дер-Поля на более общие задачи теории нелинейных колебаний. В этом параграфе мы будем изучать колебания в системах, близких к произвольным консервативным, когда порождающим является уже некоторое нелинейное уравнение. Мы убедимся, что в том случае, когда его общее решение известно, решение исходного уравнения может быть получено при помощи стандартных рассуждений предыдущего параграфа.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\ddot{z}+f(z)=\varepsilon\varphi(z\dot{z}), \tag{2.1}$$

где ε — малый параметр. Порождающим уравнением является

$$\ddot{z}+f(z)=0. \tag{2.2}$$

Относительно уравнения (2.2) будем предполагать, что его общий интеграл нам известен и может быть выписан в явном виде

$$z=Q^*(x,\ t+t_0), \tag{2.3}$$

где x и t_0 — произвольные постоянные. Кроме того, мы будем считать, что $f(0)=0$, и рассматривать ту область фазовых переменных, в которой все решения уравнения (2.2) — периодические функции времени.

Итак, функция Q^* будет периодической функцией t периода T. Период будет зависеть (в общем случае) от постоянной x, которую мы условимся называть амплитудой. Для того чтобы иметь дело с функцией одного периода, введем новую переменную

$$y=\omega(x)\,(t+t_0).$$

Здесь множитель $\omega(x)$ выбран таким образом, чтобы функция

$$Q(x,\ y)=Q^*(x,\ t+t_0)$$

была периодической по y периода 2π. Этим условием величина $\omega(x)$ определяется однозначно. Она является нормирующим множителем. По аналогии с линейными системами условимся называть ее частотой, а y — фазой.

Заметим, что функция $Q(x,\ y)$ тождественно, т. е. при любых значениях x и t_0, удовлетворяет порождающему уравнению (2.2). Таким образом,

$$\ddot{z}+f(z)\equiv\omega^2Q_{yy}+f(Q)\equiv 0. \tag{2.4}$$

Первый шаг при реализации метода Ван-дер-Поля состоит в замене одного уравнения второго порядка системой двух уравнений первого порядка. Для этого используется классический метод вариации произвольных постоянных.

В качестве новых переменных в предыдущем параграфе мы использовали амплитуду и фазу. Точно так же мы можем поступить и в данном случае. Итак, мы имеем

$$z=Q(x,\ y). \tag{2.5}$$

Положим, кроме того,

$$\dot{z}=\omega Q_y(x,\ y). \tag{2.6}$$

Равенства (2.5) и (2.6) определяют замену переменных. Составим теперь уравнения, которым удовлетворяют новые переменные. Дифференцируя (2.5) и приравнивая полученное выраже-

ние выражению (2.6), составим первое из соотношений между производными новых переменных

$$Q_x\dot{x}+Q_y\dot{y}-\omega Q_y=0. \tag{2.7}$$

Это уравнение представляет собой условие совместности определений (2.5) и (2.6). Второе уравнение получим, подставляя выражение (2.6) в уравнение (2.1):

$$(Q_y\omega'+\omega Q_{xy})\dot{x}+\omega\dot{y}Q_{yy}+f(Q)=\varepsilon\varphi(Q,\omega Q_y), \tag{2.8}$$

где ω' означает производную $\frac{d\omega(x)}{dx}$.

Система (2.7), (2.8) представляет собой систему двух дифференциальных уравнений относительно функций x и y. Для дальнейшего нам надо разрешить эти уравнения относительно производных $\dot{x}$ и $\dot{y}$. После очевидных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}\{[Q_xQ_{yy}-Q_yQ_{xy}]\omega-\omega'Q_y^2\}-\\&\qquad-\{\omega^2Q_{yy}+f(Q)\}Q_y=-\varepsilon\varphi(Q,\omega Q_y)Q_y,\\&\dot{y}\{Q_y^2\omega'-\omega[Q_xQ_{yy}-Q_yQ_{xy}]\}-\\&\quad-\{\omega Q_y(\omega'Q_y+\omega Q_{xy})+f(Q)Q_x\}=-\varepsilon\varphi(Q,\omega Q_y)Q_x.\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Введем обозначение

$$\Delta=[Q_xQ_{yy}-Q_yQ_{xy}]\omega-\omega'Q_y^2.$$

Далее замечаем, что в силу тождества (2.4) вторая фигурная скобка в первом из уравнений (2.9) равна нулю. Точно так же может быть упрощено второе слагаемое во втором из уравнений (2.9). Для этого мы заменим функцию $f(Q)$ ее выражением из (2.4)

$$f(Q)=-\omega^2Q_{yy};$$

тогда получим

$$\omega Q_y(\omega'Q_y+\omega Q_{xy})+f(Q)Q_x=\omega[\omega'Q_y^2+\omega(Q_{xy}Q_y-Q_xQ_{yy})]=-\omega\Delta.$$

Итак, система (2.9) может быть теперь переписана в виде

$$\dot{x}=-\frac{\varepsilon}{\Delta}\varphi Q_y,\quad \dot{y}=\omega(x)+\frac{\varepsilon}{\Delta}\varphi Q_x. \tag{2.10}$$

Система двух уравнений первого порядка (2.10) эквивалентна исходному уравнению второго порядка (2.1) *)

2. Укороченные уравнения. Система (2.10) совершенно аналогична системе (1.7). Подобно ей она также представляет собой систему с вращающейся фазой. Ее правые части являются

*) Мы предполагали, что функция Q является периодической. Для вывода уравнений (2.10) это предположение не требуется. Замена (2.5), (2.6) нас приведет к уравнениям (2.10), каковы бы ни были функции Q и ω.

периодическими функциями y периода 2π, поскольку таковыми, по предположению, является функция Q и ее частные производные. Следовательно, для исследования этой системы мы можем применить рассуждения Ван-дер-Поля и заменить систему (2.10) укороченными уравнениями, которые в рассматриваемом случае будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi} \varphi Q_y\, dy, \\ \dot{y} &= \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi} \varphi Q_x\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

При выписывании системы (2.11) мы вынесли функцию Δ из-под знака интеграла. Мы не сделали при этом ошибки, поскольку, как мы сейчас покажем, функция Δ не зависит от переменной y.

Лемма. *Функция Δ зависит только от одной независимой переменной — от амплитуды x.*

Для доказательства выпишем выражение полной энергии порождающей системы

$$E = \frac{\dot{z}^2}{2} + \int_0^z f(z)\, dz.$$

Или, используя общий интеграл порождающего уравнения — функцию $Q(x, y)$, получим

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 Q_y^2 + \int_0^Q f(Q)\, dQ.$$

Но функция Q удовлетворяет уравнению (2.4)

$$\omega^2 Q_{yy} + f(Q) = 0$$

для любых x. Поэтому, вычисляя E_y, будем иметь

$$E_y = \omega^2 Q_y Q_{yy} + \frac{d}{dQ}\int_0^Q f(Q)\, dQ\, \frac{dQ}{dy} = Q_y(\omega^2 Q_{yy} + f(Q)) = 0.$$

Следовательно, функция F не зависит от фазы y, она зависит только от амплитуды x; $E = E(x)$. Отсюда следует, что и Δ также

не зависит от фазы y. В самом деле, последняя величина связана с величиной E очень простым соотношением. Вычислим

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\omega^2 Q_y^2 + \int_0^Q f(Q)\,dQ\right) = \omega'\omega Q_y^2 + \omega^2 Q_y Q_{yx} + Q_x f(Q).$$

Заменяя $f(Q)$ его выражением из (2.4), получим

$$E_x = -\omega\left\{\left[Q_x Q_{yy} - Q_y Q_{xy}\right]\omega - \omega' Q_y^2\right\} = -\omega(x)\Delta,$$

откуда сразу следует, что величина Δ является функцией одной только амплитуды x.

Итак, мы показали, что для нелинейного уравнения второго порядка также могут быть составлены укороченные уравнения Ван-дер-Поля, если только в нашем распоряжении есть интеграл порождающего уравнения (точный или приближенный).

3. Пример. Рассмотрим в качестве примера задачу о линейном демпфировании нелинейных колебаний. Пусть движение описывается уравнением

$$\ddot{z} + f(z) = -\varepsilon c\dot{z},$$

где c — некоторая положительная постоянная. Это уравнение является частным случаем рассмотренного выше уравнения (2.1), когда функция $\varphi(z, \dot{z}) = -c\dot{z} = -c\omega Q_y$. Напишем для этой задачи первое из укороченных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\varepsilon c\omega}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi} Q_y^2\,dy. \tag{2.12}$$

В явном виде мы не можем проинтегрировать в общем случае это уравнение, но можем сделать некоторые заключения. Интеграл в уравнении (2.12) — всегда положительное число

$$\int_0^{2\pi} Q_y^2\,dy = \Phi(x) > 0.$$

Далее, $\omega(x) > 0$ по смыслу своего определения. Теперь отметим, что x — это некоторое новое переменное, которое при $\varepsilon = 0$ превращается в постоянную интегрирования порождающего уравнения. Мы назвали ее условно амплитудой по аналогии с теорией линейных колебаний. В этом есть определенный смысл. В самом деле, мы только что установили, что полная энергия порождающего уравнения зависит только от этой постоянной. Значит точно так же, как амплитуда в линейных колебаниях,

именно эта постоянная или любая ее однозначная функция определяют энергию системы. Следовательно, она играет ту же роль, что и амплитуда.

Предположим теперь, что в начальный момент времени энергия E в системе была равна некоторому значению E_0, и пусть в течение некоторого времени она находилась под действием диссипативной силы $\varphi = -\varepsilon c\dot{z}$. Вычислим производную в силу укороченных уравнений (2.12), принимая во внимание найденное выше выражение $E_x = -\omega(x)\Delta$:

$$\frac{dE}{dt} = E_x\dot{x} = -\omega\Delta\dot{x} = -\frac{\varepsilon c\omega^2}{2\pi}\Phi(x) < 0. \qquad (2.13)$$

Следовательно, под действием силы $\varphi = -\varepsilon c\dot{z}$ энергия системы непрерывно убывает.

Формула (2.13) позволяет для каждого фиксированного значения «амплитуды» x определить скорость убывания энергии. Что касается величины «амплитуды» x, то она в этом случае может и не убывать. Характер изменения этой величины, как это следует из уравнения (2.12), определяется только знаком $\Delta(x)$. Это обстоятельство подчеркивает тот факт, что физический смысл «амплитуды» может не иметь никакого отношения к максимальному отклонению от положения равновесия, которое всегда убывает под действием диссипативной силы.

4. Другой подход к решению той же задачи. В этом параграфе мы изложили естественное обобщение метода Ван-дер-Поля на класс задач, которые можно назвать существенно нелинейными. Мы ввели аналоги амплитуды и фазы и составили уравнения, которым должны удовлетворять эти величины. Для вывода наших уравнений мы воспользовались стандартной процедурой варьирования произвольных постоянных. Все эти рассуждения основывались на предположении о том, что интеграл порождающего уравнения нам известен в виде, разрешенном относительно неизвестной функции

$$z = Q(x, t + t_0). \qquad (2.14)$$

Порождающее уравнение (2.2) — это общее нелинейное уравнение второго порядка, не содержащее первой производной. Оба его интеграла могут быть всегда выписаны в форме квадратур. Однако явное выражение (2.14) может быть получено только в исключительных случаях.

Возможны два пути преодоления этой трудности. Первый — строить приближенные представления для функции $Q(x, t)$. Для этого мы можем, например, рассматривать порождающее уравнение (2.2) как квазилинейное и находить его общий интеграл тем или иным способом, в частности методом осредне-

ния. Такой подход пригоден только для случая малых энергий. Вторая возможность состоит в следующем (она предложена В. М. Волосовым) *).

Порождающее уравнение (2.2) допускает следующие интегралы:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{z}^2 + U(z) = \alpha, \\ &\psi(z, \alpha) \equiv \frac{1}{T(\alpha)} \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}} = \frac{t}{T(\alpha)} + \text{const} = \beta, \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

где

$$U(z) = 2 \int f(z)\, dz.$$

Примем в качестве новых переменных при изучении уравнения (2.1) величины α и β. Они характеризуют колебательный процесс с той же полнотой, что и величины x и y, принятые в этом параграфе. Но, дифференцируя (2.15), в силу уравнения (2.1) мы всегда можем составить уравнения для α и β. Для этого, как увидим, нам не надо явного представления решения в виде $z = Q(x, t)$. Итак,

$$\dot{\alpha} = 2\dot{z}\ddot{z} + \frac{dU}{dz}\dot{z},$$

но

$$\ddot{z} = -f(z) + \varepsilon\varphi(z, \dot{z}), \quad \frac{dU}{dz} = 2f(z),$$

поэтому

$$\dot{\alpha} = 2\varepsilon\varphi\left(z, \sqrt{\alpha - U(z)}\right)\sqrt{\alpha - U(z)}. \tag{2.15'}$$

Аналогично находим

$$\dot{\beta} = \frac{\partial\psi}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\dot{\alpha} = \frac{1}{T(\alpha)} + 2\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\varphi\left(z, \sqrt{\alpha - U(z)}\right)\sqrt{\alpha - U(z)}.$$

Поскольку z является периодической по времени, то этим свойством обладает и величина β. Поэтому мы можем провести усреднение правых частей этих уравнений по β:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\alpha} = \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\beta_0}^{\beta_0+T} \varphi \cdot \sqrt{\alpha - U(z)}\, d\beta, \\ &\dot{\beta} = \frac{1}{T(\alpha)} + \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\beta_0}^{\beta_0+T} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\varphi\sqrt{\alpha - U(z)}\, d\beta, \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

где $T(\alpha)$ — период функции $z(t + t_0, \alpha)$.

*) В. М. Волосов, Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанных с усреднением, Журнал вычислительной математики и математической физики, № 1, 1963.

В том виде, в каком мы получили систему уравнений (2.16), ее еще нельзя непосредственно использовать для исследования уравнения (2.1), поскольку в правую часть входит функция $z(\alpha, \beta)$, интегрирование ведется по β, а связь между этими величинами в явном виде нам не задана. Но, используя интеграл энергии (2.15), мы можем перейти в уравнениях (2.16) от интегрирования по переменному β к интегрированию по переменному z. Для того чтобы проделать необходимые выкладки, заметим, что

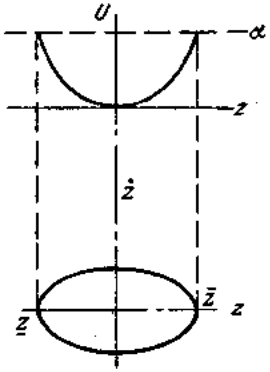

Рис. 26.

$$dz = \sqrt{\alpha - U(z)}\,d\beta \text{ — в верхней полуплоскости фазовой плоскости}$$

и

$$dz = -\sqrt{\alpha - U(z)}\,d\beta \text{ — в нижней полуплоскости.}$$

В самом деле, (см. рис. 26), изображающая точка движется вдоль фазовой траектории по часовой стрелке, и следовательно, в верхней полуплоскости $dz>0$, а в нижней $dz<0$.

Имея в виду это обстоятельство, перепишем уравнения (2.16) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)}\left\{\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \varphi(z, \dot{z})\,dz - \int_{\bar{z}}^{\underline{z}} \varphi(z\dot{z})\,dz\right\}, \\ \dot{\beta} &= \frac{1}{T(\alpha)} + \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)}\left\{\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,dz - \int_{\bar{z}}^{\underline{z}} \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,dz\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Первый из интегралов берется по верхней ветви фазовой траектории (т. е. вдоль той ветви, где величина $\dot{z} = \sqrt{\alpha - U(z)}$), а второй — вдоль нижней ветви (т. е. где $\dot{z} = -\sqrt{\alpha - U(z)}$).

В уравнениях (2.17) появились новые величины $\underline{z}$ и $\bar{z}$ — максимальное и минимальное отклонения от положения равновесия. Заметим прежде всего, что эти величины не независимы: им отвечает одно и то же значение потенциальной энергии $U(z)$

$$U(\underline{z}) = U(\bar{z}) = \alpha. \tag{2.18}$$

Далее вместо энергии α удобно взять в качестве переменного одну из этих величин, например $\bar{z}$. Тогда на основании (2.18)

$$\dot{\alpha} = \left(\frac{dU}{dz}\right)_{z=\bar{z}} \dot{\bar{z}} = 2f(\bar{z})\dot{\bar{z}},$$

и поэтому уравнение для $\bar{z}$ будет таким:

$$\dot{\bar{z}} = \frac{\varepsilon}{T(\bar{z})}\left\{\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \frac{\varphi(z, \dot{z})}{f(\bar{z})}\,dz - \int_{\bar{z}}^{\underline{z}} \frac{\varphi(z, \dot{z})}{f(\bar{z})}\,dz\right\}. \tag{2.19}$$

Замечая еще, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} f(\bar{z}),$$

мы можем аналогичным образом преобразовать и второе из уравнений (2.17)

$$\dot{\beta} = 1 + \frac{2\varepsilon}{T(\bar{z})f(\bar{z})}\left\{\int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \varphi(z, \dot{z})\,dz - \int_{\bar{z}}^{\underline{z}} \varphi(z, \dot{z})\,dz\right\}. \tag{2.20}$$

В системе уравнений (2.19), (2.20) период $T(\bar{z})$ также определяется квадратурами

$$T(\bar{z}) = \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \frac{dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}} - \int_{\bar{z}}^{\underline{z}} \frac{dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}}. \tag{2.21}$$

Уравнение (2.19) определяет нам закон изменения максимального отклонения системы от положения равновесия. Полученные выражения показывают, что эта важная характеристика может быть найдена без знания общего интеграла порождающего уравнения.

Вычисления значительно упрощаются, если колебания симметричны. В этом случае нет необходимости определять решение трансцендентного уравнения (2.18), так как

$$\underline{z} = \bar{z}.$$

Изложенная здесь схема рассуждений уже использовалась в § 1 для квазилинейных уравнений. Однако в этом случае она приводила только к упрощению вывода уравнений Ван-дер-Поля, ничего не меняя по существу. В общем случае нелинейных уравнений рассуждения В. М. Волосова позволяют получить качественно новые результаты.

5. Примечания. 1) Мы предположили, что функция Q периодическая. Для построения укороченных уравнений Ван-дер-Поля мы использовали более слабое предположение о том, что периодическими функциями фазы — переменного y являются производные Q_x и Q_y. Поэтому изложенный метод может быть распространен на более сложные случаи и, в частности, он может быть использован при изучении не только колебательных, но и, как мы увидим ниже, вращательных движений нелинейного маятника.

2) В этом параграфе было показано, каким образом метод Ван-дер-Поля может быть использован для изучения существенно нелинейных колебаний. Мы рассмотрели случай консервативных систем. Совершенно аналогично может быть рассмотрен и общий случай систем, близких к системам Гамильтона, и еще более широкий класс задач, допускающих первые интегралы типа интеграла энергии.

§ 3. Системы с медленным временем

В этом параграфе мы будем изучать системы с переменными параметрами. Первые существенные результаты этой теории, полученные методом усреднения, принадлежат Ю. А. Митропольскому, которому также принадлежит первое математическое изложение теории колебаний систем, параметры которых медленно изменяются *).

1. Вывод укороченных уравнений. Рассмотрим теперь уравнение следующего вида:

$$\ddot{z}+f(z,\ \tau)=\varepsilon\varphi(z,\ \dot{z},\ \tau), \tag{3.1}$$

где τ — «медленное время»: $\tau=\varepsilon t+\text{const}$. Таким образом, в отличие от уравнения (2.1) уравнение (3.1) описывает колебательные процессы в системе с медленно меняющимися параметрами. При $\varepsilon=0$ уравнение (3.1) превращается в порождающее

$$\ddot{z}+f(z,\ \tau)=0, \tag{3.2}$$

где τ — некоторая постоянная.

Методы, развитые в предыдущем параграфе, без каких-либо существенных изменений могут быть использованы для исследования уравнения (3.1).

Общий интеграл порождающего уравнения, как и в предыдущем параграфе, будем считать известным, однако теперь он будет зависеть не только от x и y, но и от параметра τ:

$$z=Q(x,\ y,\ \tau),$$

*) Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.

где, как и раньше, $y=\omega(x, \tau)(t+t_0)$. Заметим при этом, что теперь частота ω будет функцией не только амплитуды x, но и медленного времени τ: $\omega=\omega(x, \tau)$.

Функция Q будет удовлетворять уравнению

$$\omega^2 Q_{yy}+f(Q)=0 \tag{3.3}$$

тождественно по x и τ.

Так же, как и в предыдущем параграфе, решение уравнения (3.1) будем искать в виде (2.5)

$$z=Q(x, y, \tau), \tag{2.5'}$$

$$\dot{z}=\omega(x, \tau) Q_y(x, y, \tau). \tag{2.6'}$$

Другими словами, вместо переменной z мы введем новые переменные x и y при помощи равенств (2.5′) и (2.6′). Уравнения (2.7) и (2.8) в нашем случае будут иметь следующий вид:

$$Q_x\dot{x}+Q_y\dot{y}-\omega Q_y+\varepsilon Q_\tau=0,$$

$$(\omega_x Q_y+\omega Q_{xy})\dot{x}+\omega\dot{y}Q_{yy}+f(Q, \tau)+\varepsilon(\omega_\tau Q_y+\omega Q_{y\tau})=\varepsilon\varphi.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и используя определения Δ и тождество (3.3), мы получим

$$\dot{x}\Delta+\varepsilon\{\omega_x(Q_\tau Q_{yy}+Q_x Q_{y\tau})-\omega_\tau Q_y^2\}=-\varepsilon\varphi Q_y,$$

$$-\dot{y}\Delta+\omega\Delta+\varepsilon\{\omega(Q_\tau Q_{xy}-Q_x Q_{y\tau})+\omega_x Q_y Q_\tau-\omega_\tau Q_x Q_y\}=-\varepsilon\varphi Q_x$$

или окончательно

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{\Delta}\{\varphi Q_y+\xi_1(x, y, \tau)\},\\ \dot{y}&=\omega(x, \tau)+\frac{\varepsilon}{\Delta}\{\varphi Q_x+\xi_2(x, y, \tau)\},\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

где

$$\xi_1=\omega(Q_\tau Q_{yy}-Q_{y\tau}Q_y)-\omega_\tau Q_y^2,$$

$$\xi_2=\omega(Q_\tau Q_{xy}-Q_x Q_{y\tau})+\omega_x Q_y Q_\tau-\omega_\tau Q_x Q_y.$$

Система (3.4) отличается от системы (2.10) лишь тем, что ее правые части зависят не только от переменных x и y, т. е. не только от амплитуды и фазы, но и от времени. Существенно, однако, что правые части являются по условию медленно изменяющимися со временем. Поэтому основные соображения о возможности усреднения правых частей по периоду изменения быстрой переменной остаются в силе, так как за время, в течение которого фаза изменяется на 2π, величина τ изменяется мало.

Итак, и в этом случае мы также сможем составить систему укороченных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\{\varphi Q_y + \xi_1\}\,dy, \\ \dot{y} &= \omega(x, \tau) + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\{\varphi Q_x + \xi_2\}\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Таким образом, процедура Ван-дер-Поля формально применима к системам с медленно меняющимися правыми частями при условии, что функция $Q(x, y, \tau)$ описывает некоторый колебательный процесс (т. е. правые части системы (3.4) являются периодическими функциями «быстрой» переменной y). В этом случае мы можем заменить исходное уравнение (3.1) укороченными — системой (3.5).

2. **Адиабатические инварианты.** В системах с медленно меняющимися параметрами рассматриваются величины, называемые *адиабатическими инвариантами.*

Предположим, что некоторая величина $I(x, y)$ является интегралом порождающего уравнения. Это значит, что производная dI/dt, вычисленная в силу порождающего уравнения, равна нулю.

Предположим, что система (3.1) не подвержена действию внешних сил, т. е. $\varphi=0$, и вычислим в этом случае производную dI/dt в силу укороченных уравнений Ван-дер-Поля. В общем случае эта величина будет зависеть от переменных x и τ и, следовательно, будет отлична от нуля при $\varepsilon\neq 0$.

Условимся называть функцию $I(x, y)$ адиабатическим инвариантом системы (3.1) относительно укороченных уравнений Ван-дер-Поля, если ее полная производная по времени, вычисленная в силу этих уравнений, равна нулю.

Ниже будет показано, что уравнения Ван-дер-Поля определяют решение с точностью до величин $O(\varepsilon)$. Следовательно, величину $I(x, y, \tau)$ мы называем адиабатическим инвариантом, если

$$\frac{dI}{dt} = Q(\varepsilon^k), \qquad k > 1.$$

Другими словами, адиабатический инвариант — это некоторая функция амплитуды и фазы, которая изменяется медленнее, нежели параметры системы.

3. Интеграл действия. Рассмотрим функцию $I(x, \tau)$, определенную равенством

$$I(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(x, \tau) Q_y^2(x, y, \tau)\, dy. \tag{3.6}$$

Функция (3.6) называется *интегралом действия.* Свое название это выражение оправдывает тем, что $I(x, \tau)$ является интегралом порождающего уравнения. В самом деле, при $\tau = \text{const}$ «амплитуда» — величина постоянная, поэтому и $I(x, \tau)$ также является постоянной.

Покажем, что интеграл действия является адиабатическим инвариантом. Для этого найдем полную производную по времени

$$\frac{dI}{dt} = I_x \dot{x} + I_\tau \varepsilon.$$

Вычислим частные производные I_x и I_τ и подставим их в это выражение. В результате мы получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_x Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{xy})\, dy + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (Q_y^2 \omega_\tau + 2\omega Q_y Q_{y\tau})\, dy. \tag{3.7}$$

Преобразуем второе слагаемое в первом интеграле, проинтегрировав его по частям

$$\int_0^{2\pi} Q_y Q_{xy}\, dy = Q_y Q_x \Big|_{y=0}^{y=2\pi} - \int_0^{2\pi} Q_{yy} Q_x\, dy.$$

Но первое слагаемое равно нулю, поскольку Q — периодическая функция; следовательно,

$$\int_0^{2\pi} Q_y Q_{xy}\, dy = -\int_0^{2\pi} Q_{yy} Q_x\, dy.$$

Используя это выражение, мы можем преобразовать первый из интегралов, входящих в правую часть (3.7)

$$I_1 = \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega_x Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{xy})\, dy =$$

$$= \frac{\dot{x}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\omega_x Q_y^2 - \omega(Q_{yy} Q_x - Q_y Q_{xy})\}\, dy.$$

Но по определению

$$\omega_x Q_y^2 - \omega(Q_{yy}Q_x - Q_y Q_{xy}) = -\Delta.$$

Таким образом,

$$\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_x Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{xy})\,dy = -\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta\,dy.$$

Величина Δ от фазы y не зависит, поэтому

$$\frac{\dot{x}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q_y^2\omega_x + 2\omega Q_y Q_{xy})\,dy = -\dot{x}\Delta.$$

Аналогично проведем вычисление второго слагаемого

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_\tau Q_y^2 + 2\omega Q_y Q_{y\tau})\,dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\omega_\tau Q_y^2 - \omega Q_{yy}Q_\tau + \omega Q_y Q_{y\tau})\,dy = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1(x, y, \tau)\,dy.$$

Итак, окончательно

$$\frac{dI}{dt} = -\Delta\dot{x} - \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1(x, y, \tau)\,dy. \tag{3.8}$$

Подставляя в (3.8) выражение для $\dot{x}$, которое дается первым из уравнений (3.4)

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_y\,dy - \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_1\,dy,$$

получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x, y, \tau)Q_y\,dy.$$

Отсюда сразу следует, что если $\varphi=0$, то величина интеграла действия сохраняет свое значение. Итак, интеграл действия является адиабатическим инвариантом порождающего уравнения.

4. Пример использования адиабатических инвариантов. Использование адиабатических инвариантов позволяет в некоторых случаях получать ответы на интересующие нас вопросы, минуя интегрирование системы.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{z}+g(\varepsilon t)z=0. \tag{3.9}$$

В этом случае

$$z=x\cos y, \qquad \dot{z}=-\omega x\sin y,$$

где

$$\omega=\sqrt{g(\varepsilon t)}.$$

Таким образом,

$$Q(x,\ y)=x\cos y, \qquad Q_y=-x\sin y.$$

Составим выражение адиабатического инварианта

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\omega Q_y^2\,dy=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{g(\varepsilon t)}\ x^2\sin^2 y\,dy=\frac{\sqrt{g(\varepsilon t)}\,x^2}{2}. \tag{3.10}$$

На основании сказанного выше мы имеем $I=I_0=\text{const}$. Таким образом, если ставится вопрос об исследовании зависимости амплитуды x от времени, то из (3.10) мы сразу находим

$$x=\frac{\text{const}}{\sqrt[4]{g(\varepsilon t)}}. \tag{3.11}$$

Этот результат может быть получен разными методами, но применение теории адиабатических инвариантов позволяет его получить, по-видимому, наиболее простым способом.

5. Вычисление амплитуды и энергии. Формула (3.11) является выражением значительно более общего результата. Пусть мы имеем произвольное нелинейное уравнение вида

$$\ddot{z}+f(z,\ \varepsilon t)=0, \tag{3.12}$$

у которого решение

$$z=Q(x,\ y,\ \varepsilon t) \tag{3.13}$$

является периодической функцией y периода 2π. Тогда зависимость амплитуды от времени может быть получена без интегрирования уравнения (3.12). В самом деле, для уравнения (3.12) интеграл действия будет адиабатическим инвариантом, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi}\omega(x,\ \varepsilon t)\,Q_y^2(x,\ y,\ \varepsilon t)\,dy=\text{const}. \tag{3.14}$$

Выражение (3.14) является некоторым трансцендентным уравнением, которое связывает величины x и t

$$\Phi(x,\ t)=0 \tag{3.14'}$$

и представляет собой неявное задание функции $x(t)$.

Полная энергия системы не является адиабатическим инвариантом, хотя она определяется так же, как и интеграл действия, только амплитудой. Однако, имея в распоряжении зависимость $x(\varepsilon t)$ и используя то обстоятельство, что

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta\dot{x} + \varepsilon E_\tau,$$

мы можем легко подсчитать изменение энергии системы вследствие изменения параметров системы. Нетрудно убедиться в том, что dE/dt имеет порядок величины ε.

Процедура вычисления энергии может быть и не связана с нахождением корней трансцендентного уравнения (3.14′). Для этой цели следует использовать рассуждения предыдущего параграфа. Найдем производную величины $\alpha = 2E$

$$\alpha = \dot{z}^2 + U(z, \tau),$$

где

$$U(z, \tau) = \int_{z_0}^{z} f(z, \tau)\, dz.$$

Так как

$$\ddot{z} = -f(z, \tau),$$

то производная $d\alpha/dt$, вычисленная в силу этого уравнения, будет

$$\dot{\alpha} = \varepsilon U_\tau$$

или после усреднения

$$\dot{\alpha} = \frac{\varepsilon}{T(\alpha)} \int_{\beta_0}^{\beta_0+T} U_\tau(z, \tau)\, d\beta = \frac{\varepsilon}{T(\alpha)} \left\{ \int_{\bar{z}}^{\bar{\bar{z}}} \frac{U_\tau\, dz}{\sqrt{\alpha - U_z}} - \int_{\bar{z}}^{\bar{\bar{z}}} \frac{U_\tau\, dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}} \right\},$$

где $\bar{z}$ и $\bar{\bar{z}}$ являются корнями уравнения $U(z) = 0$.

6. **Некоторые обобщения.** Мы рассмотрели процедуру применения схемы Ван-дер-Поля для нахождения приближенных решений уравнения (3.1). Она может быть легко обобщена на широкий класс систем уравнений, близких к гамильтоновским. Одним из представителей таких систем является уравнение

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + f(z, \tau) = \varepsilon\varphi(z, \dot{z}, \tau). \tag{3.15}$$

Для этого случая повторим все рассуждения данного параграфа. Считая, как и раньше, что решение порождающего уравнения

$$m\ddot{z} + f(z, \tau) = 0, \quad \tau = \text{const},$$

нам известно:

$$z = Q(x, y, \tau),$$

сделаем замену переменного (2.5′) и (2.6′). Выписав уравнение совместности и подставив эти функции в уравнение (3.15), мы получим

$$Q_x\dot{x} + Q_y\dot{y} - \omega Q_y = -\varepsilon Q_\tau,$$

$$m\dot{x}(\omega_x Q_y + \omega Q_{xy}) + m\omega Q_{yy}\dot{y} + f(Q, \tau) = \\ = \varepsilon\varphi - \varepsilon\{\omega_\tau m Q_y + \omega m Q_{y\tau} + m_\tau \omega Q_y\}.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ и используя выражения для Δ, ξ_1 и ξ_2, мы придем к следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{m\Delta}\varphi Q_y - \frac{\varepsilon}{\Delta}\xi_1 + \frac{\varepsilon}{m\Delta} m_\tau \omega Q_y^2, \\ \dot{y} &= \omega + \frac{\varepsilon}{m\Delta}\varphi Q_x + \frac{\varepsilon}{\Delta}\xi_2 - \frac{\varepsilon}{m\Delta} m_\tau \omega Q_y Q_x. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Система (3.16) совершенно аналогична системе (3.4). Проводя операцию осреднения, мы получим систему укороченных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_y\,dy - \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_1\,dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\omega Q_y^2\,dy, \\ \dot{y} &= \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\varphi Q_x\,dy + \frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi}\xi_2\,dy - \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi m\Delta}\int_0^{2\pi}\omega Q_y Q_x\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

Нетрудно проверить, что для уравнения (3.15) выражение

$$I(x, \tau) = \frac{m(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega(x, \tau)\,Q_y^2\,dy \tag{3.18}$$

является также адиабатическим инвариантом. Найдем для этого

$$\frac{dI}{dt} = \dot{x}I_x + \varepsilon I_\tau. \tag{3.19}$$

Повторяя вычисления предыдущих пунктов этого параграфа, мы получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}I_x &= -\dot{x}m\Delta, \\ \varepsilon I_\tau &= -\frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi_1\,dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega Q_y^2\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Заменяя в этих выражениях величину $\dot{x}$ из системы (3.17) и подставляя величины (3.20) в равенство (3.19), получим

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi Q_y\, dy + \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi_1\, dy - \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega Q_y^2\, dy -$$

$$- \frac{\varepsilon m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi_1\, dy + \frac{\varepsilon m_\tau}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega Q_y^2\, dy = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi Q_y\, dy.$$

Таким образом, при отсутствии внешних воздействий величина I, определяемая формулой (3.18), остается постоянной, если считать, что величина x изменяется, следуя уравнениям (3.17).

7. **Задача о маятнике переменной массы.** Рассмотрим малые колебания математического маятника, масса которого изменяется со временем. Если предположить, что скорость отделения частиц бесконечно мала (или что система реактивных сил образует нулевой торсор), то уравнение движения такого маятника имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + m(\tau) glz = 0, \tag{3.21}$$

где g — напряженность гравитационного поля, l — длина маятника. Рассчитать приближенно изменения амплитуды колебаний такого маятника можно, не интегрируя уравнения (3.21). Для этого надо вспомнить, что величина

$$I = \frac{m(\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega Q_y^2\, dy$$

является адиабатическим инвариантом.

В нашем случае

$$\omega = \sqrt{gl}, \quad Q = x\cos y, \quad Q_y = -x\sin y.$$

Подставляя эти величины в выражение (3.18), мы получим уравнение для определения амплитуды

$$\frac{m\sqrt{gl}}{2}x^2 = \text{const},$$

откуда

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{m(\tau)}}. \tag{3.22}$$

Заметим, что закон изменения амплитуды (3.22) сохраняет свою силу также и для уравнения

$$\frac{d}{dt}(m(\tau)\dot{z}) + m(\tau) glz = \varepsilon\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — произвольная функция.

В самом деле, изменение величины I подчиняется уравнению

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi Q_y \, dy.$$

Следовательно, I сохраняет свое значение не только тогда, когда $\varphi \equiv 0$, но и при условии ортогональности φ и Q_y, что в нашем случае соблюдается

$$\int_0^{2\pi} \varphi Q_y \, dy = -x \int_0^{2\pi} \varphi(x \cos y) \sin y \, dy \equiv 0.$$

Итак, мы показали, как может быть использована идея Ван-дер-Поля об осреднении в задачах нелинейных колебаний. Она позволяет исследовать широкий круг вопросов этой теории при помощи укороченных уравнений.

Таким образом, теория Ван-дер-Поля позволяет получить только некоторые приближенные решения, причем она не содержит никаких методов, позволяющих оценить степень точности полученных решений. Точно так же в рамках теории Ван-дер-Поля мы не можем уточнить полученные решения. Наконец, еще одним существенным недостатком изложенного подхода является то, что он приспособлен для исследования только одномерных задач и не допускает непосредственного обобщения на многомерные задачи в системах с числом степеней свободы больше чем одна.

Для преодоления всех указанных трудностей необходима более общая теория, содержащая новый взгляд на проблему усреднения. Она впервые возникает в работах Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, опубликованных в тридцатых годах. К ее изложению мы сейчас и переходим.

§ 4. Описание алгоритма асимптотического интегрирования для случая одной быстрой переменной

1. Преобразование переменных. Вернемся теперь к задаче, поставленной во введении. Рассмотрим частный случай системы (*), которую мы условились называть системой с вращающейся фазой:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где x — вектор размерности n, а y — скаляр. Функции X и Y будем предполагать периодическими функциями переменной y периода T. Не ограничивая общности, можно принять $T = 2\pi$.

Поставим задачу отыскания такой замены переменных, которая позволила бы отделить быстрые движения от медленных. Для этого вместо x и y введем новые переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$ при помощи формул

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Функции $u_i(\bar{x}, \bar{y})$ и $v_i(\bar{x}, \bar{y})$ пока еще неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи.

Потребуем, чтобы в результате замены переменных, определяемой формулами (4.2), вектор-функция $\bar{x}(t)$ удовлетворяла системе уравнений, не содержащей «быстрой» переменной $\bar{y}(t)$. Точно так же потребуем, чтобы и скалярная функция $\bar{y}(t)$ удовлетворяла уравнению, правая часть которого не содержит $\bar{y}(t)$; другими словами, потребуем, чтобы новые переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяли системе уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A(\bar{x}, \varepsilon) = \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \ldots, \\ \dot{\bar{y}} &= \omega^*(\bar{x}, \varepsilon) = \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Функции A и ω, входящие в эти уравнения, а следовательно, и коэффициенты их разложений по степеням ε также заранее неизвестны.

Если нам удастся найти интересующую нас замену переменных, то мы придем к системе уравнений (4.3), которая значительно проще исходной. В самом деле, в системе (4.3) медленное движение, скорость которого имеет порядок $O(\varepsilon)$, полностью отделено от быстрого, скорость которого имеет порядок 1. Поэтому система уравнений, определяющая вектор $\bar{x}$, интегрируется независимо от уравнения, определяющего скаляр $\bar{y}$. Поскольку производная $\dot{\bar{x}}$ мала, а правые части этого векторного уравнения не зависят от $\bar{y}$, то оно может интегрироваться с большим шагом по времени. Определив $\bar{x}(t)$, мы найдем переменную $\bar{y}(t)$, вычислив квадратуру.

Для того чтобы сделать задачу определенной, подчиним функции u_i и v_i дополнительному ограничению: будем их считать ограниченными функциями $\bar{y}$ при $\bar{y} \to \infty$. Такое ограничение на класс допустимых функций естественно, поскольку оно позволяет для любых $\bar{y}$ считать величины $\varepsilon^k u_k$ и $\varepsilon^k v_k$ малыми порядка $O(\varepsilon^k)$.

Итак, задача отыскания преобразования (4.2) состоит в определении функций $u_i(\bar{x}, \bar{y})$, $v_i(\bar{x}, \bar{y})$, $A_i(\bar{x})$ и $B_i(\bar{x})$. Функции $A_i(\bar{x})$ и $u_i(\bar{x}, \bar{y})$ — это вектор функции своих переменных, а $B_i(\bar{x})$ и $v_i(\bar{x}, \bar{y})$ — скаляры.

2. Определение членов разложений. Будем считать X, Y и ω дифференцируемыми функциями своих переменных столько раз, сколько членов рядов (4.2) мы собираемся вычислить.

Для определения функций, входящих в правые части равенств (4.2) и уравнений (4.3), подставим ряды (4.2) в систему уравнений (4.1) и заменим производные $\dot{\bar{x}}$ и $\dot{\bar{y}}$ их выражениями (4.3). Кроме того, заметим, что

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}}\dot{\bar{x}} + \frac{\partial u_i}{\partial \bar{y}}\dot{\bar{y}} = \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}}(\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \ldots) + \\ + \frac{\partial u_i}{\partial \bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots).$$

Перепишем теперь уравнения (4.1) с учетом сделанных замечаний

$$\varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}(\varepsilon A_1(x) + \ldots) + \\ + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots) + \\ + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \bar{x}}(\varepsilon A_1(\bar{x}) + \ldots) + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \ldots) = \\ = \varepsilon X(\bar{x} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \bar{y} + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \varepsilon),$$

$$\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}}(\varepsilon A_1 + \ldots) + \\ + \varepsilon\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots) + \\ + \varepsilon^2\frac{\partial v_2}{\partial \bar{x}}(\varepsilon A_1(\bar{x}) + \ldots) + \varepsilon^2\frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}}(\omega(\bar{x}) + \ldots) = \\ = \omega(\bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots) + \\ + \varepsilon Y(\bar{x} + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \bar{y} + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \varepsilon).$$

Правые части этих уравнений разложим по степеням параметра ε и сравним коэффициенты при одинаковых степенях этого параметра. В результате мы придем к следующей системе уравнений, определяющей искомые функции:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}, 0) - A_1(\bar{x}) \equiv g_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}),\\
&\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) + D_1(u_1) - B_1(\bar{x}) \equiv h_1(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}),\\
&\frac{\partial u_2}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = \frac{\partial X}{\partial \bar{x}}u_1 + \frac{\partial X}{\partial \bar{y}}v_1 + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}A_1 - \\
&\qquad - \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}B_1 - A_2(\bar{x}) \equiv g_2(\bar{x}, \bar{y}) - A_2(\bar{x}),\\
&\frac{\partial v_2}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) = \frac{\partial Y}{\partial \bar{x}}u_1 + \frac{\partial Y}{\partial \bar{y}}v_1 + \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}B_1 + \\
&\qquad + D_1(u_2) + D_2(u_1) - B(\bar{x}) \equiv h_2(\bar{x}, \bar{y}) - B_2(\bar{x})
\end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

и т. д.

Общий вид систем уравнений для определения u_k, v_k, A_k и B_k будет такой:

$$\left.\begin{aligned} \omega(\bar{x})\frac{\partial u_k}{\partial \bar{y}} &= g_k(\bar{x}, \bar{y}) - A_k(\bar{x}), \\ \omega(\bar{x})\frac{\partial v_k}{\partial \bar{y}} &= h_k(\bar{x}, \bar{y}) - B_k(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Так как функции g_k и h_k определяются предыдущими приближениями, то они должны считаться заданными функциями своих переменных. Напомним, что величины $\bar{x}$, u_k и A_k — векторы с компонентами $\bar{x}^{(j)}$, $u_k^{(j)}$ и $A_k^{(j)}$ соответственно, $\bar{y}$, v_k и B_k — скаляры. Точно так же X — это вектор-функция своих аргументов, а Y и ω — скалярные функции. Следовательно, $\partial u_1/\partial\bar{y}$, $\partial X/\partial\bar{y}$, $\partial Y/\partial\bar{x}$ — это векторы с компонентами $\partial u_1^{(j)}/\partial\bar{y}$, $\partial X^{(j)}/\partial\bar{y}$ и $\partial Y/\partial\bar{x}^{(j)}$ соответственно, $\partial X/\partial\bar{x}$ — это квадратная матрица с элементами $\partial X^{(i)}/\partial\bar{x}^{(j)}$ и т. д. Кроме того, в уравнениях фигурируют операторы $D_1(u)$ и $D_2(u)$. Они имеют следующий смысл:

$$D_1(u) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial\bar{x}^{(j)}} u^{(j)}, \qquad D_2(u) = \frac{1}{2}\sum_{k,\,s} \frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{x}^{(k)}\partial x^{(j)}}.$$

Присутствие этих членов связано с разложением функции $\omega(\bar{x})$ в ряд Тейлора.

Все производные в уравнениях (4.4) вычислены при $\varepsilon=0$.

Рассмотрим первое из уравнений (4.4). Это уравнение в частных производных первого порядка, разрешенное относительно производной неизвестной функции $\partial u_1/\partial\bar{y}$, причем это уравнение содержит еще одну неизвестную функцию $A_1(\bar{x})$. Интегрируя это уравнение, получим

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(x)} \int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} \{g_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x})\}\, d\bar{y} + \varphi(\bar{x}), \tag{4.6}$$

где $\varphi(\bar{x})$ — произвольная функция $\bar{x}$.

Мы условились разыскивать решение в классе функций, удовлетворяющих условию ограниченности

$$\lim_{\bar{y}\to\infty} |u_i(\bar{x}, \bar{y})| < \infty.$$

Под знаком интеграла в выражении для $u_1(\bar{x}, \bar{y})$ стоит некоторая периодическая функция $\bar{y}$, поскольку $g_1(\bar{x}, \bar{y})$ — периодическая функция $\bar{y}$ и величина A не зависит от $\bar{y}$. Период этой

функции по $\bar{y}$ равен 2π. Предположим теперь, что ее среднее значение за период

$$\overline{g_1 - A} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\bar{y}_0}^{\bar{y}_0+2\pi} (g_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}))\, dy = c(\bar{x}) \neq 0.$$

Тогда

$$\lim_{k \to \infty} u_1(\bar{x}, \bar{y}_0 + 2\pi k) = \frac{1}{\omega(\bar{x})} \lim 2\pi c(\bar{x})\, k = \pm \infty.$$

Выбор знака плюс или минус зависит от знака $c(\bar{x})$. Таким образом, для ограниченности u_1 необходимо и достаточно, чтобы

$$c(\bar{x}) = 0 \tag{4.7}$$

для любого $\bar{x}$.

Интеграл в равенстве (4.6) содержит неизвестную функцию $A_1(\bar{x})$. Условия (4.7) достаточно для ее однозначного определения. В самом деле, из равенства (4.7) сразу следует, что среднее значение функции g

$$\bar{g}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\bar{x}, \bar{y})\, dy$$

должно равняться $A_1(\bar{x})$. Итак,

$$A_1(\bar{x}) = \bar{g}_1(x) = \bar{X}(x).$$

Интегрируя теперь первое из уравнений (4.4), мы получим выражение для $u_1(\bar{x}, \bar{y})$ в виде квадратур от известных функций

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(x)} \left[\int\limits_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} X(\bar{x}, \bar{y})\, dy - \bar{X}\bar{y} \right] + \varphi_1(\bar{x}). \tag{4.8}$$

В выражение (4.8) входит функция $\varphi_1(\bar{x})$, являющаяся «постоянной» интегрирования и выбираемая по произволу.

Существуют различные способы рационального задания этой функции. Например, если мы решаем задачу Коши, т. е. отыскиваем решение системы (4.1) по условиям

$$\text{при } t = t_0 \begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0, \end{cases}$$

то часто бывает удобно потребовать, чтобы функции $\bar{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяли тем же условиям, что и функции x и y, т. е. чтобы

$$x(t_0) = \bar{x}(t_0), \qquad y(t_0) = \bar{y}(t_0).$$

Отсюда сразу следует, что $u_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$, т. е. $\varphi_1(\bar{x}_0) = 0$. Если, кроме того, потребовать, чтобы при $y = \bar{y}_0$ имело место равенство $x = \bar{x}$, то функцию $\varphi_1(x)$ следует принять равной нулю.

Существуют и другие способы выбора произвольных функций. Например, при исследовании систем Гамильтона бывает целесообразно потребовать, чтобы система (4.3) была также системой Гамильтона. Это требование даст другой способ задания функции $\varphi_1(x)$. В дальнейшем будет показано, что точность построения приближенного решения не зависит от выбора этих функций. Таким образом, преобразование (4.2) может быть реализовано не единственным образом.

Примечание. Здесь мы впервые сталкиваемся с тем фактом, что реализация процедуры построения решения возможна не единственным образом. Однако такая ситуация типична для всех асимптотических теорий. Мы будем строить конечные агрегаты, которые и будем называть приближенными решениями. Установленная нами неединственность реализаций означает только одно: существует целое семейство агрегатов, состоящее из одинакового количества слагаемых, приближающих решение с одной и той же степенью точности в том смысле, что разность точного и приближенного решения стремится к нулю вместе с величиной ε независимо от того, какой из представителей семейства аппроксимирующих агрегатов нами рассматривается.

Перейдем теперь к исследованию остальных уравнений системы (4.4). Рассуждая совершенно аналогично тому, как мы это делали при исследовании первого из уравнений (4.4), найдем, что

$$B_1(\bar{x}) = \bar{h}_1 = \bar{Y} + D_1\bar{u}_1,$$

$$v_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})}\left\{\int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} h_1(\bar{x}, \xi)\,d\xi - \bar{h}_1(\bar{x})\,\bar{y}\right\} + \psi_1(\bar{x}),$$

где $\psi_1(x)$ — также произвольная функция своего аргумента. В общем случае

$$\left.\begin{aligned} &A_i = \bar{g}_i, \qquad B_i = \bar{h}_i, \\ &u_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})}\left\{\int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} g_i(\bar{x}, \xi)\,d\xi - \bar{g}_i\bar{y}\right\} + \varphi_i(\bar{x}), \\ &v_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})}\left\{\int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} h_i(\bar{x}, \xi)\,d\xi - \bar{h}_i\bar{y}\right\} + \psi_i(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

Выражения (4.9) исчерпывают задачу, сформулированную в начале раздела: они дают возможность вычислить все функции, входящие в преобразование (4.2), и определить правые части уравнений (4.3).

3. Построение приближенного решения. Итак, предположим, что мы определили искомые функции u_i, v_i, A_i и B_i. Теперь для построения приближенного решения мы должны поступить следующим образом: возьмем первые n членов в первом из уравнений системы (4.3) и обозначим через $\bar{x}_n$ функцию, которая будет определена нелинейным уравнением

$$\dot{\bar{x}}_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i A_i(\bar{x}_n). \tag{4.10}$$

Если мы хотим получить приближенное решение задачи Коши, то следует проинтегрировать это уравнение (например, численно). После этого функцию $\bar{y}_n(t)$ мы определим квадратурой

$$\bar{y}_n(t) = y_0 + \int_0^t \{\omega(\bar{x}_n) + \varepsilon B_1(\bar{x}_n) + \ldots\}\, dt. \tag{4.10'}$$

Определив функции $\bar{x}_n$ и $\bar{y}_n$, подставим их затем в ряды (4.2), в которых удержим также конечное число членов. Выражения

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \bar{x}_n(t) + \sum_{m=1}^{N_1} \varepsilon^m u_m(\bar{x}_n, \bar{y}_n), \\ y(t) &= \bar{y}_n(t) + \sum_{m=1}^{N_2} \varepsilon^m v_m(\bar{x}_n, \bar{y}_n) \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

мы примем в качестве приближенного решения исходной системы. Числа N_1 и N_2 должны быть также выбраны по определенным правилам, о которых речь будет идти ниже.

Формулы (4.11) при определенных условиях являются асимптотическими, т. е. функции, которые они определяют, стремятся при $\varepsilon \to 0$ к точным решениям.

Примечание. Уравнение (4.10) обычно оказывается сложным нелинейным уравнением и только в исключительных случаях может быть проинтегрировано в явном виде. В общем случае его приходится интегрировать численно. Заметим, что численное интегрирование системы (4.10) ($\bar{x}_n$ — это вектор-функция) значительно проще интегрирования исходной системы (4.1). Дело даже не в том, что порядок системы (4.10) на единицу меньше порядка системы (4.1). Система уравнений (4.10) определяет медленно изменяющиеся переменные. Следовательно, ее интегрирование может быть проведено с большим шагом по аргументу и, следовательно, с малой затратой машинного времени. Заметим также, что во многих прикладных задачах оказывается достаточным вычислить величины $x_n(t)$; величины y_n часто не представляют практического интереса.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда x — скаляр, а ω — величина постоянная. Ограничимся при этом рассмотрением только первого члена ряда (4.3); тогда

$$x=\bar{x}_1, \qquad y=\bar{y}_1,$$

причем

$$\dot{\bar{x}}_1=\dot{x}=\varepsilon\bar{X}, \qquad \dot{\bar{y}}_1=\dot{y}=\omega+\varepsilon\bar{Y}. \tag{4.12}$$

Уравнения (4.12) с точностью до обозначений совпадают с укороченными уравнениями Ван-дер-Поля (1.8). Итак, метод Ван-дер-Поля для того частного случая систем (4.1), когда x — скаляр дает возможность вычислить первые члены разложений (4.3). Ниже будет сформулирована теорема, которая утверждает, что ряды, построенные в этом параграфе, являются при определенных условиях асимптотическими: в общем случае они расходятся, но их конечный отрезок любой длины дает приближенное решение, т. е. функция, которая им определяется, стремится к точному решению при $\varepsilon\to 0$. Поэтому установленный результат весьма важен. Он показывает, что метод Ван-дер-Поля, введенный чисто эвристическим образом, является «правильным»: в тех случаях, когда алгоритм, изложенный в этом параграфе, дает приближенное решение, метод Ван-дер-Поля также дает приближенное решение.

Таким образом, метод Ван-дер-Поля позволяет построить приближенное решение, однако он не дает никаких указаний на то, каким образом можно уточнить это решение. Изложенный алгоритм позволяет, как мы увидим в следующем пункте, с любой степенью точности проводить расчет.

4. Оценка точности. Рассмотрим теперь вопрос о точности приближенного решения, полученного изложенным способом. Согласно общей схеме функция $\bar{x}$ должна быть заменена функцией $\bar{x}_n$, удовлетворяющей уравнению (4.10). Эту аппроксимацию мы будем рассматривать на большом интервале времени, длина которого имеет порядок $O(1/\varepsilon)$. Так как в уравнении (4.10) отброшены члены, порядок которых $O(\varepsilon^{n+1})$, то при вычислении производной мы допустим ошибку того же порядка. Следовательно, при интегрировании уравнения (4.10) на интервале длины, равной $1/\varepsilon$, мы совершим ошибку порядка $O(\varepsilon^n)$.

Итак,

$$\bar{x}=\bar{x}_n+O(\varepsilon^n).$$

В частном случае

$$\bar{x}=\bar{x}_1+O(\varepsilon).$$

Следовательно, если ограничиться первым приближением, то при интегрировании на больших отрезках времени ошибка в оп-

ределении вектор-функции $x(t)$ будет иметь порядок ее производной.

Обратимся теперь к уравнению (4.10). Предположим, что величину $\bar{x}$ мы определили с погрешностью порядка ε^n; тогда величина $\omega(\bar{x})$ также определяется с погрешностью порядка ε^n, т. е.

$$\omega(\bar{x}) = \omega(\bar{x}_n) + O(\varepsilon^n).$$

Следовательно, при интегрировании этой величины на интервале, длина которого имеет порядок $O(1/\varepsilon)$, мы будем иметь следующую оценку:

$$\int_0^t \omega(\bar{x})\,dt = \int_0^t \omega(\bar{x}_n)\,dt + O(\varepsilon^{n-1}). \tag{4.13}$$

Следовательно, в подынтегральном выражении формулы (4.10′) следует удержать только те члены, порядок которых после интегрирования будет равен $O(\varepsilon^{n-2})$. Следовательно, и в выражении для $\bar{y}$ слагаемое $\varepsilon^n B_n(\bar{x})$ должно быть отброшено, так как

$$\varepsilon^n \int_0^t B_n(\bar{x}_n)\,dt = O(\varepsilon^{n-1}),$$

т. е. оно имеет порядок ошибки в (4.13).

Следовательно, квадратуру (4.10′) мы должны писать в таком виде:

$$\bar{y}_n(t) = y(0) + \int_0^t \{\omega(\bar{x}_n) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon^{n-1} B_{n-1}(\bar{x}_n)\}\,dt. \tag{4.14}$$

Точно так же в рядах (4.2) мы должны удержать только те члены, порядок которых не превосходит порядка ошибки. Таким образом, если речь идет о формулах n-го приближения, т. е. если $\bar{x}$ определяется с ошибкой порядка ε^n, а $\bar{y}$ — с ошибкой порядка $O(\varepsilon^{n-1})$, то формула (4.2) должна быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots + \varepsilon^{n-1} u_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots + \varepsilon^{n-2} v_{n-2}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Итак, если вектор x определяется с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^n)$, то скаляр y, который мы будем называть фазой, определяется с меньшей точностью.

Рассмотрим частный случай, когда $n = 1$, т. е.

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + O(\varepsilon).$$

Тогда на основании формул (4.15) будем иметь

$$x = \bar{x}, \qquad \dot{\bar{x}} + \varepsilon \bar{X}(\bar{x}). \tag{4.16}$$

Примечание 1. Рассуждения этого раздела показывают, что при составлении укороченных уравнений Ван-дер-Поля (2.11) для нелинейных уравнений, близких к консервативным, мы включаем в правые части слагаемые, порядок которых равен порядку отброшенных членов. Теперь мы установили, что уравнения (2.11) без потери точности могут быть заменены такими:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\Delta}\int_0^{2\pi} Q_y \varphi\, dy, \\ \dot{y} &= \omega(x), \end{aligned}\right\} \tag{2.11'}$$

если только частота ω зависит от x.

Специального рассмотрения требует тот случай, когда «частота» ω не зависит от x. В этом случае величина $\int_0^t \omega\, dt = \omega t$ вычисляется точно. Это дает возможность величину y вычислить с меньшей погрешностью. В этом случае все величины $B_i(\bar{x}_n)$ вычисляются с погрешностью $O(\varepsilon^n)$. Следовательно, величина $\varepsilon \int B_1(\bar{x})\, dt$ вычисляется с погрешностью $O(\varepsilon^n)$. Все прочие слагаемые подынтегрального выражения (4.11) будут вычислены с еще большей точностью. В том случае, когда ω предполагалась функцией $\bar{x}$, максимальная точность, которой мы могли добиться, вычисляя величину $\bar{y}$, была $O(\varepsilon^{n-1})$. В случае $\omega = \text{const}$ порядок ошибки на единицу меньше. Следовательно, мы должны удержать в (4.11) все те члены, порядок которых $O(\varepsilon^{n-1})$. Так как

$$\varepsilon^n \int_0^t B_n(\bar{x})\, dx = O(\varepsilon^n),$$

то в отличие от предыдущего случая теперь это слагаемое должно быть удержано.

Итак, в случае $\omega = \text{const}$ формулы (4.15) имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots + \varepsilon^{n-1} u_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots + \varepsilon^{n-1} v_{n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \ldots + \varepsilon^n A_n(\bar{x}), \\ \dot{\bar{y}} &= \omega + \varepsilon B_1(x) + \ldots + \varepsilon^n B_n(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

В частном случае, когда $n=1$, мы получим следующий аналог формул (4.16):

$$x=\bar{x}, \quad \dot{x}=\varepsilon X(x). \tag{4.18}$$

Уравнения (4.18) в случае, когда размерность вектора x равна единице, совпадают с укороченными уравнениями Ван-дер-Поля.

Примечание 2. Заметим, что изложенная процедура сохраняет члены более высокого порядка, которые без потери точности могли бы быть отброшены. Поясним сказанное на примере расчета второго приближения *). Система уравнений для вектора $\bar{x}_2$ в этом случае будет

$$\dot{\bar{x}}_2=\varepsilon A_1(\bar{x}_2)+\varepsilon^2 A_2(\bar{x}_2). \tag{4.19}$$

Уравнение (4.19) позволяет вычислить $\bar{x}_2$ с ошибкой $O(\varepsilon^2)$ (так как производная $\dot{\bar{x}}_2$ определена с ошибкой $O(\varepsilon^3)$). Величина $\varepsilon^2 A_2(\bar{x}_2)$ сама имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Следовательно, величину $A(\bar{x}_2)$ мы можем вычислить с погрешностью $O(\varepsilon)$. Таким образом, вместо системы (4.19) мы можем рассмотреть такую:

$$\dot{\bar{x}}_2=\varepsilon A_1(\bar{x}_2)+\varepsilon^2 A_2(\bar{x}_1), \tag{4.20}$$

где $\bar{x}_1$ определяется уравнением

$$\dot{\bar{x}}_1=\varepsilon A_1(\bar{x}_1). \tag{4.21}$$

Такая замена может в некоторых случаях оказаться полезной при разработке схемы численного интегрирования.

В некоторых случаях удобно использовать методы теории возмущений, положив $\bar{x}_2=\bar{x}_1+\delta\bar{x}$. Подставив это выражение в (4.19) и отбрасывая произведения $\varepsilon^2\delta\bar{x}$, поскольку $\delta\bar{x}=O(\varepsilon)$, мы сведем задачу к решению уравнения (4.21) и решению линейного уравнения

$$\frac{d\,\delta\bar{x}}{dt}=\varepsilon\left(\frac{dA_1}{dx}\right)_{x=\bar{x}_1}\delta x+\varepsilon^2 A_2(x_1), \tag{4.22}$$

где dA/dx — производная оператора A в точке $x=x_1$. Вектор x в рассматриваемом случае мы можем записать в виде

$$x=\bar{x}_1+\delta\bar{x}+\varepsilon u_1(x_1, y_1). \tag{4.23}$$

Рассуждения подобного рода могут быть проведены и для анализа более общих случаев.

5. Независимость точности приближенного решения от выбора функций φ_i и ψ_i).** Вернемся теперь к вопросу о выборе произвольных функций φ_i и ψ_i, появляющихся при интегрировании

*) В. М. Волосов, ЖВМ и МФ, № 1 (1963).
**) См. В. М. Волосов, ЖВМ и МФ, № 4 (1963).

уравнений (4.5), и покажем, что выбор этих функций не влияет на точность получаемых приближенных формул. Этот факт является следствием того обстоятельства, что определение величин A_{i+1} и B_{i+1} производится с учетом величин φ_i и ψ_i.

Проведем все рассуждения на примере расчета второго приближения. Предположим, что мы имеем два различных выражения для функции $u_1(\bar{x}, \bar{y})$: u_{11} и u_{10}, причем

$$u_{11}=u_{10}+\varphi(\bar{x}), \tag{4.24}$$

т. е. мы предполагаем, что эти величины отличаются на произвольную функцию «медленного» переменного $\bar{x}$.

Так как величина u_1 не входит в выражение первого приближения, то выбор произвольной функции $\varphi(\bar{x})$ не влияет на точность первого приближения. Он может сказаться только на значении второго приближения. В рамках точности, гарантированной этим приближением, выражение (4.24) мы можем заменить через

$$u_{11}=u_{10}+\varphi(x_1), \tag{4.24'}$$

где $\bar{x}_1$ определяется уравнением

$$\dot{\bar{x}}_1=\varepsilon A_1(\bar{x}_1).$$

Рассмотрим теперь выражение для A_2. Выпишем в развернутом виде уравнение (4.9), которое определяет эту функцию; согласно (4.4) мы будем иметь

$$A_2(\bar{x})=\overline{\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}}u_1+\overline{\frac{\partial X}{\partial \bar{y}}}v_1+\overline{\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}}-\overline{\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}}A_1-\overline{\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}}B_1. \tag{4.25}$$

Полагая в формуле (4.25) один раз $u=u_{10}$, а другой $u=u_{11}$, мы найдем величину

$$\delta A_2=A_{21}-A_{20}.$$

Она определяется равенством

$$\delta A_2=\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}\varphi(x_1)-\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}}\bar{X}.$$

Теперь рассмотрим формулу (4.23). Перепишем ее в следующих двух вариантах:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\bar{x}_1+\delta\bar{x}+\varepsilon u_{10}(\bar{x}_1, \bar{y}_1),\\ \bar{x}^*&=\bar{x}_1+\delta\bar{x}^*+\varepsilon u_{10}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)+\varepsilon\varphi(\bar{x}_1)\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

и условимся, что $\bar{x}(0)=\bar{x}^*(0)$. Первая из этих формул определяет значение $\bar{x}$, соответствующее $u_1=u_{10}$, а вторая $u_1=u_{11}$. Покажем, что с точностью, которую гарантирует второе приближение, $x\equiv x^*$. Введем обозначения

$$z=\delta x^*-\delta x.$$

Прежде всего заметим, что из условия $x(0)=x^*(0)$ сразу следует, что

$$z(0) = -\varepsilon\varphi(x_1(0)). \tag{4.27}$$

Далее, в рамках точности второго приближения величины δx и $\delta x^* = \delta x + z$ удовлетворяют следующим уравнениям (см. (4.22)):

$$\frac{d\,\delta\bar{x}}{dt} = \varepsilon\left(\frac{dA_1}{dx}\right)\delta\bar{x} + \varepsilon^2 A_{20}, \tag{4.28}$$

$$\frac{d\,(\delta\bar{x}+z)}{dt} = \varepsilon\left(\frac{dA_1}{dx}\right)(\delta\bar{x}+z) + \varepsilon^2(A_{20}+\delta A_{20}). \tag{4.29}$$

Учитывая (4.28) и принимая во внимание выражение для δA_2, мы можем составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет вектор-функция $z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon\left(\frac{dA_1}{dx}\right)z + \varepsilon^2\frac{\overline{\partial X}}{\partial x}\varphi(x_1) - \varepsilon^2\overline{X}\frac{d\varphi}{dx}, \tag{4.30}$$

где

$$\frac{dA}{dx} \equiv \frac{\overline{dX}}{dx};$$

согласно (4.27) функция $z(t)$ должна удовлетворять условию $z(0) = -\varphi(x(0))$. Заметим далее, что уравнение (4.30) допускает решение

$$z(t) = -\varepsilon\varphi(x). \tag{4.31}$$

Для того чтобы показать справедливость этого равенства, вычислим

$$\frac{dz}{dt} = -\varepsilon\frac{d\varphi}{d\bar{x}}\frac{d\bar{x}}{dt} = -\varepsilon^2\frac{d\varphi}{d\bar{x}}A_1 = -\varepsilon^2\frac{d\varphi}{d\bar{x}}\overline{X}. \tag{4.31'}$$

Подставляя (4.31) и (4.31′) в уравнение (4.30), мы убеждаемся, что функция $-\varepsilon\varphi(\bar{x}_1)$ удовлетворяет этому уравнению. Так как, кроме того, функция $z(t)$ удовлетворяет начальному условию (4.27), то мы заключаем, что (4.31) — это и есть искомое решение уравнения (4.30).

Подставляя теперь (4.31) во второе из уравнений (4.26), мы убеждаемся в тождественности величин $\bar{x}$ и $\bar{x}^*$. Мы показали, что выбор функции φ_1 не влияет на точность расчета величины x, если использовать второе приближение, т. е. $x = x^* + O(\varepsilon^2)$. Аналогично доказывается и общий факт: выбор функций φ_i и ψ_i не влияет на точность определения вектора x и скаляра y, если они определяются $i+1$ приближением.

Итак, выбор функций φ_i и ψ_i совершенно произволен. Следовательно, вопрос о выборе этих функций чисто методический. Их следует выбирать, исходя из удобства и целей исследования. Ранее мы уже указали некоторые из способов выбора этих функций.

6. Замечание о характере приближенных формул. Вопросам обоснования изложенного метода асимптотического интегрирования системы (4.1) посвящен целый ряд исследований. Первые работы в этом направлении принадлежали Н. М. Крылову и Н. Н. Боголюбову и относились к тому частному виду систем (4.1), для которых $\omega=1$, $Y=0$ (система нормальной формы). В дальнейшем целый ряд важных результатов был получен Ю. А. Митропольским, В. М. Волосовым и другими. В настоящее время теория алгоритмов, подобных тем, которые излагаются в этом параграфе, представляет собой обширную главу теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой появляются все новые и новые результаты. Здесь мы не будем излагать этой теории. Отметим только один частный случай, позволяющий представить себе круг вопросов, которым посвящена указанная теория. Будем считать, что X и Y — периодические функции y периода 2π, причем как функции x они ограничены в некоторой области D вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно. Тогда теория, развитая для уравнений типа (4.1) позволяет утверждать, что решение x_n и y_n является асимптотическим в том смысле, что для любого t из интервала длиной порядка $1/\varepsilon$ справедлива оценка

$$|x-x_n|=O(\varepsilon^n), \qquad |y-y_n|=O(\varepsilon^{n-1}),$$

где x_n и y_n определяются формулами (4.15).

7. Метод последовательных приближений. Метод построения асимптотических рядов, которые дают приближенное решение системы (4.1), опирался на разложение в ряд функций X и Y, и следовательно, при его реализации предполагалось, что эти функции имеют производные нужных порядков. Окончательный результат формулировался при этом в форме интегралов. Поэтому, естественно, возникает вопрос о том, насколько необходимы введенные ограничения (поскольку они были связаны с самим методом построения решения, а не с окончательным результатом). Может быть, предположения о дифференцируемости функций X и Y являются лишними? Действительно, оказывается, что приближенное решение может быть построено без использования операций дифференцирования. Для этого надо только вместо разложения в ряды использовать метод последовательных приближений.

Рассмотрим снова систему (4.1), но преобразование (4.2) запишем теперь в форме

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u(\bar{x}, \bar{y}, \varepsilon), \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v(\bar{x}, \bar{y}, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

Точно так же уравнения для $\bar{x}$ и $\bar{y}$, которые мы хотим получить, будем писать в форме

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A(\bar{x}, \varepsilon), \\ \dot{\bar{y}} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B(\bar{x}, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

Подставим теперь выражения (4.32) и (4.31) в систему (4.1); сокращая ε, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &A(\bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} A(\bar{x}, \varepsilon) + \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} (\omega(\bar{x}) + \varepsilon B(\bar{x}, \bar{y})) = \\ &\qquad = X(\bar{x} + \varepsilon u, \bar{y} + \varepsilon v; \varepsilon), \\ &\omega(\bar{x}) + \varepsilon B(\bar{x}, \varepsilon) + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} A(\bar{x}, \varepsilon) + \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \bar{y}} (\omega(\bar{x}) + \varepsilon B(\bar{x}, \bar{y})) = \omega(\bar{x} + \varepsilon u) + \\ &\qquad + \varepsilon Y(\bar{x} + \varepsilon u, \bar{y} + \varepsilon v, \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Систему уравнений (4.34) будем изучать методом последовательных приближений, используя для этого следующую итерационную схему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^{(k)}}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= g_k - A^{(k)}, \\ \frac{\partial v^{(k)}}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) &= h_k - B^{(k)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

где

$$g_k = X(\bar{x} + \varepsilon u^{(k-1)}, \bar{y} + \varepsilon v^{(k-1)}, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial \bar{x}} A^{(k-1)} - \varepsilon \frac{\partial u^{(k-1)}}{\partial \bar{y}} B^{(k-1)},$$

$$h_k = \frac{\omega(\bar{x} + \varepsilon u^{(k-1)}) - \omega(\bar{x})}{\varepsilon} + Y(\bar{x} + \varepsilon u^{(k-1)}, \bar{y} + \varepsilon v^{(k-1)}, \varepsilon) - \\ - \varepsilon \frac{\partial v^{(k-1)}}{\partial \bar{x}} A^{(k-1)} - \varepsilon \frac{\partial v^{(k-1)}}{\partial \bar{y}} B^{(k-1)}.$$

Система (4.35) совершенно аналогична системе (4.5). Следовательно, повторяя рассуждения, мы снова придем к формулам (4.9).

Если функции X и Y достаточное количество раз дифференцируемы, то решение, которое при этом получается, отличается от решения, которое было найдено выше, только малыми более

высокого порядка. Однако в отличие от метода построения, изложенного выше, данный метод имеет то преимущество, что он не требует дифференцируемости функций X и Y и применим, вообще говоря, к уравнениям даже с разрывными правыми частями.

8. Система стандартного вида. Н. Н. Боголюбовым и его учениками изучались системы

$$\dot{x}=\varepsilon X(x,\ t,\ \varepsilon). \tag{4.36}$$

Системы (4.36) называются системами *стандартного* вида. Нетрудно видеть, что они приводятся к системам с вращающейся фазой *), причем являются частным случаем последних. Для доказательства достаточно записать систему (4.36) в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\varepsilon X(x,\ y,\ \varepsilon),\\ \frac{dy}{dt}&=1. \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

Система (4.1) совпадает с системой (4.37), когда $\omega\equiv 1$, $Y\equiv 0$. Если вектор-функция $X(x,\ t,\ \varepsilon)$ — периодическая функция аргумента t, то метод, изложенный в этом параграфе, без каких-либо оговорок может быть применен для исследования систем вида (4.36).

Примечание. Представляет определенный интерес рассмотрение систем, в которых вектор X не есть периодическая функция аргумента y. При известных условиях (например, если функция X почти периодическая) приближенное решение мы получим, проводя усреднение по бесконечному отрезку времени. Аналог уравнений Ван-дер-Поля в этом случае имеет вид

$$\dot{x}=\varepsilon \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} X(x,\ y)\,dy,$$

$$\dot{y}=\omega+\varepsilon \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{+\alpha} Y(x,\ y)\,dy.$$

9. О возможных обобщениях. Естественным обобщением системы (4.1) будет система, в которой не только величина x — вектор, но и величина y — также вектор. Еще более сложным является тот случай, когда изменение вектора y описывается системой

$$\dot{y}=\omega(x,\ y)+\varepsilon Y(x,\ y,\ \varepsilon). \tag{4.38}$$

---

*) Системы с вращающейся фазой впервые начал изучать ученик Н. Н. Боголюбова Л. Н. Зубарев.

Такие случаи также изучались. Ряд результатов, относящихся к системам (4.38), принадлежит В. М. Волосову. Ниже мы остановимся на некоторых частных случаях этой задачи.

10. Замечание об исследовании стационарных режимов. Вернемся снова к системе (4.1). Изложенный метод позволяет исследовать периодические и стационарные решения этой системы.

Предположим, что $\bar{x}_n$ — корень уравнения

$$A_1(\bar{x}_n)+\varepsilon A_2(\bar{x}_n)+\ldots+\varepsilon^{n-1}A(\bar{x}_n)=0.$$

Тогда (4.17) нам дает

$$\dot{\bar{x}}_n=0, \quad \text{т. е.} \quad \bar{x}_n=\text{const}. \tag{4.39}$$

Для функции $\bar{y}_n$ получим

$$\bar{y}_n=\omega^* t+y(0),$$

где

$$\omega^*=\omega(\bar{x}_n)+\Sigma\varepsilon^k B_k(\bar{x}_n).$$

Функции $u_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ и $v_i(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ — периодические функции переменной $\bar{y}$, следовательно, в данном случае они также будут периодическими функциями времени периода $2\pi/\omega^*$. Таким образом, функция

$$x=\bar{x}_n+\sum\varepsilon^k u_k(\bar{x}, \bar{y})=\bar{x}_n+\sum\varepsilon^k u_k(\bar{x}_n, y(0)+\omega^*(\bar{x}_n)t) \tag{4.39'}$$

будет периодической функцией времени.

В начале этой главы мы показали, что в том случае, когда исследования проводятся в рамках первого приближения, из уравнения (4.39′) для $\bar{x}$ мы получаем стационарное решение. В общем случае этот прием позволяет построить некоторые периодические решения. Они могут быть использованы для аппроксимации стационарных режимов.

§ 5. Алгоритм асимптотического интегрирования. Случай нескольких быстрых переменных

1. Система с двумя вращающимися фазами. В предыдущем параграфе была изложена процедура асимптотического интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих одну быстро изменяющуюся переменную — одну вращающуюся фазу. Там мы указали на то, что естественным обобщением развитой в нем теории будет теория, изучающая системы, содержащие несколько быстрых переменных, т. е. системы типа (4.1), в которых вектором является не только переменная x, но и переменная y. Подобное обобщение, как мы

увидим ниже, отнюдь не является тривиальным. Системы вида (4.1), в которых переменная y является вектором (размерности большей чем единицы), обладают целым рядом новых особенностей. Теория таких систем оказывается весьма сложной. В настоящее время она еще очень далека от завершения.

В данном параграфе мы укажем лишь некоторые способы, которые в отдельных случаях (правда, достаточно важных с прикладной точки зрения) дают возможность построить асимптотическое решение. Для определенности будем рассматривать систему с двумя вращающимися фазами. Этим термином условимся называть систему вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, z, \varepsilon), \\ \dot{z} &= \lambda(x) + \varepsilon Z(x, y, z, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

где x — по-прежнему векторная переменная произвольной размерности, а $y(t)$ и $z(t)$ — скалярные функции.

Будем считать X, Y и Z периодическими функциями переменных y и z периодов $T_y=2\pi/l$ и $T_z=2\pi/m$ соответственно. Задачи типа (5.1) часто встречаются в технике и физике. Например, к их числу относится задача о поведении нелинейного осциллятора, параметры которого зависят от времени и который находится под действием периодической внешней силы. Движение такого маятника описывается уравнением

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon\varphi(z, \dot{z}, t),$$

где φ — периодическая функция времени t периода $T=2\pi/m$. Используя переменные Ван-дер-Поля, т. е. полагая

$$z=x\cos y, \qquad \dot{z}=-\omega x\sin y,$$

мы можем свести уравнение осциллятора к системе следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, s), \\ \dot{y} &= \omega + \varepsilon Y(x, y, s), \\ \dot{s} &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{5.1'}$$

Функции X и Y будут иметь период $T_y=2\pi$ по переменной y и период $T_s=2\pi/m$ по переменной s. В системе (5.1′) две быстрые переменные y и s.

В одном из предыдущих параграфов мы так же рассматривали систему, параметры которой изменяются со временем. Но там мы предполагали, что параметры системы изменяются мед-

ленно. Это позволило свести задачу к изучению системы вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, s), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, s), \\ \dot{s} &= \varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (5.1'')$$

Система (5.1″) содержит только одну быструю переменную и, в отличие от системы (5.1′), может быть изучена методами, изложенными в предыдущем параграфе.

2. Метод Фурье. На некоторое время мы снова вернемся к системе (4.1). В предыдущем параграфе был изложен метод ее асимптотического интегрирования. Существенным элементом изложенного алгоритма была задача определения функции $F(x, y)$, удовлетворяющей следующему дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = V(x, y) - D(x), \qquad (5.2)$$

где $V(x, y)$ — периодическая функция y периода T. Особенность этой задачи состояла в том, что функция $D(x)$ также была неизвестной и находилась из условия ограниченности функции $F(x, y)$ при $y \to \infty$. В предыдущем параграфе мы изложили способ решения этой задачи. Ее можно решить также и методом Фурье, к изложению которого мы переходим.

Так как функция $V(x, y)$ периодическая по y, то она может быть представлена в виде ряда Фурье

$$V(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k(x) e^{ikly},$$

где $l = 2\pi/T$, причем $a_0 = \frac{l}{2\pi} \int\limits_{-\pi/l}^{\pi/l} V(x, y)\, dy = \overline{V}(x)$. Уравнение (5.2) перепишем теперь в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{k \neq 0} a_k(x) e^{ikly} + \overline{V}(x) - D(x). \qquad (5.3)$$

Функция F, производная которой по y имеет вид (5.3), может быть представлена в форме ряда

$$F(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} b_k(x) e^{ikly} + c(x)\, y. \qquad (5.4)$$

Если подставить ряд (5.4) в уравнения (5.3) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, то найдем неизвестные функции $b_k(x)$ и $c(x)$

$$b_k(x) = \frac{a_k(x)}{ikl} \qquad (k \neq 0), \quad c(x) = \overline{V}(x) - D(x). \qquad (5.4')$$

Функция $b_0(x)$ определена быть не может — это произвольная постоянная интегрирования.

Из представления (5.4) сразу следуют результаты, которые нами уже были получены другим путем: для того чтобы решение уравнения (5.2) было ограничено при $y \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $c \equiv 0$, т. е. чтобы имело место равенство

$$D(x) = \overline{V}(x).$$

При выполнении этого условия решение уравнения (5.2), т. е. функция $F(x, y)$, оказывается периодической функцией y.

3. Описание алгоритма в нерезонансном случае. Перейдем теперь к рассмотрению системы с двумя вращающимися фазами. Подобно тому как мы это делали в предыдущем параграфе, снова будем разыскивать некоторую замену переменных

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon^2 u_2 + \ldots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon^2 v_2 + \ldots, \\ z &= \bar{z} + \varepsilon w_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \varepsilon^2 w_2 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

которая позволяет уравнения для медленных движений отделить от уравнений для быстрых движений. Другими словами, система относительно новых переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ должна иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \ldots, \\ \dot{\bar{y}} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots, \\ \dot{\bar{z}} &= \lambda(\bar{x}) + \varepsilon C_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 C_2(\bar{x}) + \ldots. \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Функции $u_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $v_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и $w_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ будем считать ограниченными функциями $\bar{y}$ и $\bar{z}$ при $\bar{y} \to \pm\infty$ и $\bar{z} \to \pm\infty$.

Подставляя ряды (5.5) и (5.6) в уравнения (5.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим уравнения для определения неизвестных функций, входящих в выражения (5.5) и (5.6).

Выпишем только уравнения первого приближения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}}\lambda(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 0) - A_1(\bar{x}), \\ &\frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) + \frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}}\lambda(x) = Y(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 0) + \\ &\qquad\qquad + \omega_x u_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - B_1(\bar{x}), \\ &\frac{\partial w_1}{\partial \bar{y}}\omega(\bar{x}) + \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}}\lambda(\bar{x}) = Z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 0) + \\ &\qquad\qquad + \lambda_x u_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - C_1(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Уравнения последующих приближений имеют такой же вид. Таким образом, вычисление каждого из членов рядов (5.5) сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\omega(x)+\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\lambda(x)=U(x, y, z)-D(x), \qquad (5.8)$$

где U — функция периодическая по y и z с периодами $T_y=2\pi/l$ и $T_z=\frac{2\pi}{m}$ соответственно.

Рассмотрим первое из уравнений системы (5.7). Функция X по условию является периодической по переменным $\bar{y}$ и $\bar{z}$. Следовательно, ее можно представить в виде двойного ряда Фурье

$$X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} a_{ks}^{(x)}(\bar{x})\, e^{i(kl\bar{y}+sm\bar{z})}. \qquad (5.9)$$

Для отыскания ограниченного решения уравнения (5.8) мы можем воспользоваться методом Фурье, схема которого изложена в предыдущем пункте данного параграфа. Для этого заметим, что функция $u_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, которая удовлетворяет этому уравнению, представима в виде

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} b_{ks}(x)\exp(ikl\bar{y}+ism\bar{z})+c(\bar{x})\,\bar{y}+d(\bar{x})\,\bar{z}. \qquad (5.10)$$

Подставляя выражения для X и u_1 в первое из уравнений (5.7) и сравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$\left.\begin{aligned} &b_{ks}(\bar{x})=\frac{a_{ks}^{(x)}(\bar{x})}{i(kl\omega+sm\lambda)},\\ &c(\bar{x})\,\omega(\bar{x})+d(\bar{x})\,\lambda(\bar{x})=a_{00}(\bar{x})-A_1(\bar{x}).\end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

Величина $b_{00}(x)$ остается неопределенной.

Как показывает выражение (5.10), для ограниченности u_1 необходимо принять $c=0$ и $d=0$. Но это мы можем сделать лишь в том случае, когда

$$A_1=a_{00}=\overline{X}(\bar{x}).$$

Здесь усреднение проводится по обеим быстрым переменным

$$\overline{X}(\bar{x})=\frac{1}{T_1\cdot T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, 0)\,d\bar{y}\,d\bar{z},$$

Аналогично исследуются и другие уравнения системы (5.7). Итак, из рассмотрения первого приближения мы получаем следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \bar{X},\\
B_1 &= \bar{Y} + \omega_x \overline{u_1(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})},\\
C_1 &= \bar{Z} + \lambda_x \overline{v_1(\bar{x},\ y,\ z)},\\
u_1 &= \sum_{s,\ k\neq 0} \frac{a_{ks}^{(x)}(\bar{x})}{i(kl\omega + sm\lambda)} \exp i(kl\bar{y} + sm\bar{z}) + a_0^{(x)}(\bar{x}),\\
v_1 &= \sum_{s,\ k\neq 0} \frac{a_{ks}^{(y)}(\bar{x})}{i(kl\omega + sm\lambda)} \exp i(kl\bar{y} + sm\bar{z}) + a_0^{(y)}(\bar{x}),\\
w_1 &= \sum_{s,\ k\neq 0} \frac{a_{ks}^{(z)}(\bar{x})}{i(kl\omega + sm\lambda)} \exp i(kl\bar{y} + sm\bar{z}) + a_0^{(z)}(\bar{x}).
\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Здесь $a_{ks}^{(y)}$ и $a_{ks}^{(z)}$ — коэффициенты разложений в ряд Фурье функций $Y - \omega_x u_1$ и $Z - \lambda_x u_1$ соответственно, $a_0^{(x)}$, $a_0^{(y)}$ и $a_0^{(z)}$ — произвольные функции. Эти функции могут быть выбраны по произволу, и их выбор не отражается на точности решения. Совершенно аналогично вычисляются последующие приближения.

Для того чтобы формулы (5.12), а также и вся процедура имели смысл, необходимо, чтобы ни один из знаменателей не обращался в нуль, т. е. чтобы не существовало целых чисел k и s таких, что

$$kl\omega + sm\lambda = 0.$$

Этот случай условимся называть нерезонансным.

Итак, мы изложили схему расчета приближенного решения системы, имеющей две быстрые переменные в нерезонансном случае. Выпишем уравнения, определяющие первое приближение $x = \bar{x}$,

$$\dot{\bar{x}} = \frac{\varepsilon}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} X(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})\, d\bar{y}\, d\bar{z}. \tag{5.13}$$

Уравнение (5.13) естественно назвать уравнением Ван-дер-Поля в случае двух быстрых переменных. Для его составления нам оказалось достаточным привести осреднение независимо по обеим переменным.

Определив (например, численно) решение нелинейного уравнения (5.13), мы можем найти неизвестные $\bar{y}$ и $\bar{z}$, как и в про-

стейшем случае одной быстрой переменной, при помощи квадратур.

4. Резонансный случай. Мы уже заметили, что для реализации изложенного способа разделения движений во всяком случае необходимо, чтобы ни один из знаменателей в формулах (5.12) не обращался в нуль. Другими словами, алгоритм построения асимптотического решения, сводящийся к независимому осреднению по обеим быстрым переменным, имеет смысл только в том случае, если в процессе изменения медленной переменной x последняя не окажется корнем уравнения

$$kl\omega(x)+sm\lambda(x)=0, \tag{5.14}$$

где k и s — произвольные целые взаимно простые числа — положительные или отрицательные. Так как заранее нельзя описать эту область изменения переменной x, то в процессе интегрирования уравнения (5.13) мы должны все время проверять, не оказалась ли величина x в окрестности корня уравнения (5.14). Только в том частном случае, когда величины ω и λ не зависят от x, условие применимости изложенного алгоритма можно проверить до интегрирования системы (5.13).

Случаи, в которых может быть использован данный алгоритм, мы условились называть нерезонансными. Резонансной мы будем называть ситуацию, которая возникает в том случае, когда «амплитуда» x оказывается в окрестности корня уравнения (5.14). Если «частоты» ω и λ не зависят от x, то резонансом условимся называть явления, возникающие в системе тогда, когда частоты ω и λ связаны условием

$$kl\omega+sm\lambda=0,$$

где k и s — любые целые числа, положительные или отрицательные.

Ситуацию, при которой $|k|=|s|$, т. е. когда

$$l\omega\pm m\lambda=0,$$

будем называть *главным* резонансом. Случай произвольных k и s называется обычно *комбинационным* резонансом (в частности, дробным или кратным).

5. Исследование главного резонанса в случае постоянных частот. Величину

$$h^*=kl\omega(x)+sm\lambda(x)$$

обычно называют *расстройкой*. Условимся называть окрестностью резонанса такое соотношение параметров, при котором величина расстройки h^* мала: $h^*=\varepsilon h$. В окрестности резонанса

также может быть построен процесс асимптотического интегрирования. Однако в этом случае асимптотика будет иной, нежели та, которая дается формулами (5.12) и (5.13).

Итак, будем предполагать, что мы изучаем движение в окрестности точки $x=x^*$, где x^* — корень уравнения (5.14), которое мы можем писать в форме

$$\omega(x^*)=\frac{sm}{kl}\lambda(x^*), \tag{5.15}$$

поскольку взаимно простые целые числа s и k могут быть и положительными и отрицательными. Изучение резонансных явлений начнем с анализа главного резонанса $s=k=1$ при дополнительном условии, что частоты ω и λ не зависят от «амплитуды» x. Тогда положим

$$\lambda=\frac{l\omega}{m}+\varepsilon\frac{h}{m}$$

и выпишем исходную систему уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\varepsilon X(x,\ y,\ z),\\ \dot{y}&=\omega+\varepsilon Y(x,\ y,\ z),\\ \dot{z}&=\frac{l\omega}{m}+\varepsilon\left\{Z(x,\ y,\ z)+\frac{h}{m}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

где X и Y являются периодическими функциями y и z периода $2\pi/l$ и $2\pi/m$ соответственно.

В рассматриваемом случае частоты ω и λ удовлетворяют уравнению (5.15) тождественно по x, т. е. резонансная сутуация имеет место для любой «амплитуды» x. Прямое использование алгоритма асимптотического интегрирования, изложенного в предыдущем пункте, смысла не имеет. Поэтому вместо переменной y введем новое переменное θ (сдвиг фазы)

$$\theta=\frac{m}{l}z-y.$$

Оно будет удовлетворять уравнению

$$\dot{\theta}=-\varepsilon\Theta^*\left(x,\ \frac{m}{l}z-\theta,\ z\right), \tag{5.17}$$

где Θ^* имеет вид

$$\Theta^*(x,\ \theta,\ z)=\varepsilon\left\{\left[Z\left(x,\ \frac{m}{l}z-\theta,\ z\right)+\frac{h}{m}\right]\frac{m}{l}-Y\left(x,\ \frac{m}{l}z-\theta,\ z\right)\right\}.$$

Остальные уравнения системы (5.16) мы перепишем так:

$$\dot{x}=\varepsilon X\left(x,\ \frac{m}{l}z-\theta,\ z\right),$$

$$\dot{z}=\frac{l\omega}{m}+\varepsilon\left\{Z\left(x,\ \frac{m}{l}z-\theta,\ z\right)+\frac{h}{m}\right\}.$$

Итак, систему уравнений (5.16) можно теперь представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X^*(x, \theta, z), \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \vartheta^*(x, \theta, z), \\ \dot{z} &= \frac{l\omega}{m} + \varepsilon\left\{Z^*(x, \theta, z) - \frac{h}{m}\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

где смысл обозначений X^*, ϑ^* и Z^* совершенно очевиден. Функции X^*, ϑ^* и Z^* являются периодическими по z. Переменная z входит в правые части системы (5.18) двумя способами. Во-первых, самостоятельно и, во-вторых, в комбинации $(m/l)z - \theta$. Правые части системы (5.18) будут периодическими функциями переменной z, выступающей в своем первом качестве, периода $T_z = 2\pi/m$, а также периодическими функциями комбинации $(m/l)z - \theta$ периода $T_y = 2\pi/l$. Следовательно, они являются периодическими функциями переменной z, выступающей во втором качестве, периода $T_z' = \frac{l}{m} T_y = \frac{2\pi}{m}$. Итак, оказывается, что функции X^*, ϑ^* и Z^*, рассматриваемые как функции переменной z, имеют период $2\pi/m$.

Скалярная величина θ является медленно изменяющейся переменной. Поэтому система (5.18), в отличие от системы (5.16), является системой с одной, а не двумя вращающимися фазами и, следовательно, ее изучение может быть проведено методами общей теории, изложенной в предыдущих параграфах. Если мы ограничимся изучением первого приближения, то должны выписать укороченные уравнения Ван-дер-Поля, которые имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}, \quad \dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}^*(\bar{x}, \bar{\theta}), \\ \theta &= \bar{\theta}, \quad \dot{\bar{\theta}} = \varepsilon \bar{\vartheta}^*(\bar{x}, \bar{\theta}). \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Для определения быстрой переменной следует вычислить квадратуру

$$z = z_0 + \lambda t + \varepsilon \int_0^t \bar{Z}^*(\bar{x}, \bar{\theta}, \bar{z})\, dt. \tag{5.20}$$

Усреднение в этих формулах производится по периоду T_z, т. е.

$$\bar{X}^*(x, \theta) = \frac{m}{2\pi} \int_0^{2\pi/m} X^*(x, \theta, z)\, dz$$

и т. д.

Примечания. 1. Важным частным случаем рассмотренной задачи является тот, в котором $\omega=\lambda$ и $T_z=T_y$. Этот случай будет специально рассмотрен ниже. К нему сводится задача о главном резонансе в квазилинейных системах.

2. Движения, которые описываются уравнениями (5.19) и (5.20), называются резонансными. Среди этих движений особое значение имеют установившиеся резонансные движения. Положив $\dot{x}=\dot{\theta}=0$, мы получим систему трансцендентных уравнений

$$X^*(x,\ \theta)=0, \qquad \Theta^*(x,\ \theta)=0.$$

Левые части этих уравнений зависят от параметра h расстройки. Главное, что представляет интерес для техники, это зависимость стационарных значений x и θ от значения параметра h.

Мы рассмотрели явление главного резонанса для того частного случая, когда частоты λ и ω не зависят от амплитуды x. Основная его особенность состоит в том, что резонансная ситуация не изменяется при изменении амплитуды x.

6. Общий случай главного резонанса. Рассмотрим более общий случай, когда частоты ω и λ зависят от x, т. е. $\omega=\omega(x)$, $\lambda=\lambda(x)$. Предположим сначала, что периоды по обеим быстрым переменным совпадают. Тогда условие главного резонанса будет иметь вид

$$\lambda(x)=\omega(x)+\varepsilon h(x).$$

Обозначим через x^* корень этого уравнения при $h=0$ и ограничимся рассмотрением только той области изменения амплитуды, которая находится в окрестности точки x^*. Другими словами, разность $x-x^*$ условимся считать малой величиной первого порядка.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\varepsilon X(x,\ y,\ z),\\ \dot{y}&=\omega(x)+\varepsilon Y(x,\ y,\ z),\\ \dot{z}&=\lambda(x)+\varepsilon Z(x,\ y,\ z)\end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

и снова сделаем замену $y=z-\theta$. Тогда, полагая

$$\lambda(x)-\omega(x)=\varepsilon h(x),$$

мы придем к системе уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\varepsilon X^*(x,\ \theta,\ z),\\ \dot{\theta}&=\varepsilon\Theta^*(x,\ \theta,\ z),\\ \dot{z}&=\lambda(x)+\varepsilon Z^*(x,\ \theta,\ z),\end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

где смысл обозначений X, Θ^* и Z^* очевиден. Например,

$$\Theta^*=Z(x,\ z-\theta,\ z)-Y(x,\ z-\theta,\ z)+h(x).$$

Формально система (5.22) совершенно аналогична системе (5.18), и для построения асимптотического решения нам достаточно провести усреднение по быстрому переменному z. Однако по существу эти задачи существенно отличаются друг от друга. Представим себе, что мы решаем задачу Коши для системы (5.22) и пусть в начальный момент имела место резонансная ситуация, т. е. пусть при $t=0$ разность $\lambda(x(0))-\omega(x(0))$ была величиной малой. Однако с течением времени величина этой разности может как угодно измениться, и тогда все рассуждения потеряют смысл. Тот факт, что все исследование проводится только в ε-окрестности точки x^*, позволяет сделать некоторые упрощения. Предположим, что мы ограничиваемся рассмотрением уравнений первого приближения. Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\varepsilon\bar{X}^*(x,\ \theta),\\&\dot{\theta}=\varepsilon\bar{\Theta}^*(x,\ \theta)=\varepsilon\{\bar{Z}^*(x,\ \theta)-\bar{Y}^*(x,\ \theta)\}+\varepsilon h(x),\\&\dot{z}=\lambda(x)+\varepsilon\bar{Z}^*(x,\ \theta).\end{aligned}\right\}\qquad(5.23)$$

Усреднение в системе (5.23) произведено по переменной z. Мы не изменим точности приближения, если в величинах порядка $O(\varepsilon)$ допустим ошибку порядка $O(\varepsilon)$. Поэтому в рамках принятой точности мы можем положить $\varepsilon h(x)=(x-x^*)(\lambda_x(x^*)-\omega_x(x^*))$ и заменить систему (5.23) такой:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\varepsilon\bar{X}^*(x^*,\ \theta),\\&\dot{\theta}=(x-x^*)(\lambda_x(x^*)-\omega_x(x^*))+\varepsilon\{\bar{Z}^*(x^*,\ \theta)-Y^*(x^*,\ \theta)\},\\&\dot{z}=\lambda(x)+\varepsilon\bar{Z}^*(x^*,\ \theta).\end{aligned}\right\}\qquad(5.24)$$

Ниже мы еще не один раз будем возвращаться к системе (5.24) и убедимся в ее преимуществах перед системой (5.23).

В заключение остановимся на общем случае главного резонанса, когда периоды T_z и T_y не равны друг другу

$$T_y=\frac{2\pi}{l},\qquad T_z=\frac{2\pi}{m},\quad l\neq m.$$

В этом случае условие главного резонанса имеет вид

$$\frac{l\omega(x)}{m}+\frac{\varepsilon h}{m}=\lambda(x).$$

Обозначим снова через x^* корень уравнения

$$\frac{m}{l}\lambda(x^*)-\omega(x^*)=0$$

и вместо переменной y введем сдвиг фаз θ. Замена переменных теперь будет иметь вид

$$\theta = \frac{m}{l} z - y. \tag{5.25}$$

Следовательно, зависимость $\theta(t)$ будет описываться следующим уравнением:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} = \varepsilon \frac{h}{m} + \varepsilon \left\{ Z\left(x, \frac{m}{l} z - \theta, z\right) \frac{m}{l} - Y\left(x, \frac{m}{l} z - \theta, z\right) \right\} = \\ = (x - x^*)\left(\frac{m}{l} \lambda_x(x^*) - \omega(x^*)\right) + \varepsilon \left\{ Z\left(x, \frac{m}{l} z - \theta, z\right) \frac{m}{l} - \right. \\ \left. - Y\left(x, \frac{m}{l} z - \theta, z\right) \right\} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \vartheta^*(x, z, \theta).\end{aligned} \tag{5.26}$$

После замены (5.25) переменная z будет входить в правые части уравнений (5.21) самостоятельно и в комбинации $(m/l)z - \theta$. Правые части будут периодическими функциями z периода $2\pi/m$ и периодическими функциями величины $(m/l)z$ периода $2\pi/l$. Следовательно, период по аргументу z, входящему в комбинацию $(m/l)z - \theta$, также будет равен $2\pi/m$. Таким образом, функции X^*, ϑ^* и Z^* будут иметь период по переменной z, равный $2\pi/m$, и при переходе к укороченной системе мы должны усреднять по этому периоду.

7. Комбинационные резонансы. Мы рассмотрели способы построения асимптотических уравнений в случае главного резонанса. Последний является наиболее важным с прикладной точки зрения. Однако в теории колебаний и некоторых других областях физики и механики мы сталкиваемся с необходимостью изучения также и комбинационных резонансов. В этом случае соотношение частот ω и λ определяется формулой (5.15). Следовательно, мы будем считать, что

$$\lambda(x) = \frac{kl}{sm} \omega(x) + \varepsilon \frac{h(x)}{m},$$

где k и s — целые числа положительные или отрицательные.

Изучение комбинационных резонансов можно проводить по изложенной схеме. Прежде всего сделаем замену типа (5.25)

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{sm}{kl} z - y, \\ \frac{\varepsilon h}{sm} &= (x - x^*)\left(\frac{sm}{kl} \lambda_x(x^*) - \omega_x(x^*)\right).\end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

Уравнение (5.26) будет теперь таким:

$$\dot\theta = (x - x^*)\left(\frac{sm}{kl}\lambda_x(x^*) - \omega_x(x^*)\right) +$$
$$+ \varepsilon\left\{\frac{sm}{kl}Z\left(x,\ \frac{sm}{kl}z - \theta,\ z\right) - Y\left(x,\ \frac{sm}{kl}z - \theta,\ z\right)\right\} = \varepsilon\theta^*(x,\ z,\ \theta).$$

Таким образом, после замены (5.27) переменная z будет входить в правые части (5.21) дважды: как самостоятельная переменная и по этой переменной правые части будут периодическими функциями периода $T_z = 2\pi/m$ и в виде комбинации $(sm/kl)z - \theta$. Правые части системы (5.21) будут периодическими функциями переменной $(sm/kl)z$ периода $T_z = 2\pi/l$. Следовательно, по переменной z, которая входит в эту комбинацию, функции будут иметь период

$$T_z^* = T_y\frac{|k|\,l}{|s|\,m} = \frac{2\pi\,|k|}{|s|\,m}.$$

Период T_z правых частей системы (5.21) по переменной z будет, таким образом, равен наименьшему кратному периодов

$$T_z = \frac{2\pi}{m} \quad \text{и} \quad T_z^* = \frac{2\pi\,|k|}{|s|\,m}.$$

Значит, правые части системы (5.21) после замены (5.25) останутся периодическими функциями быстрой переменной z, но их период $\tilde T_z$ будет теперь равен

$$\tilde T_z = \frac{2\pi\,|k|}{m},$$

и при переходе к укороченным уравнениям усреднение следует проводить по периоду T_z.

8. Установившиеся режимы. В рамках теории первого приближения рассмотрим задачу об отыскании установившихся режимов в системах с двумя вращающимися фазами. Если в системе (5.1) частоты $\omega(x)$ и $\lambda(x)$ не удовлетворяют соотношению резонанса, то соответствующая укороченная система имеет вид (см. (5.13))

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= \varepsilon\overline{X}(x),\\ \dot y &= \omega(x) + \varepsilon\overline{Y}(x),\\ \dot z &= \lambda(x) + \varepsilon\overline{Z}(x), \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

где усреднение проведено по обеим быстрым переменным y и z. Отыскание стационарных «амплитуд» $\tilde x$ сводится к отысканию решения трансцендентного уравнения

$$\overline{X}(\tilde x) = 0. \tag{5.29}$$

Так как x — векторная величина, то уравнение (5.29) — это система трансцендентных уравнений, количество которых равно размерности вектора x. Последние два скалярных уравнения позволяют определить скорость вращения фаз как функцию амплитуды

$$\left.\begin{aligned}\Omega(\tilde{x}) &= \omega(\tilde{x}) + \varepsilon\tilde{Y}(\tilde{x}),\\ \Lambda(\tilde{x}) &= \lambda(\tilde{x}) + \varepsilon\overline{Z}(\tilde{x}).\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

Такой же способ рассуждения применим и в резонансном случае, только к числу величин, стационарное значение которых мы должны будем определить, следует теперь отнести также и сдвиг фазы θ.

Рассмотрим общий случай комбинационного резонанса

$$\omega(x) = \frac{sm}{kl}\lambda(x) \tag{5.31}$$

и выпишем уравнения, определяющие стационарные режимы

$$\left.\begin{aligned}&\overline{X}^*(\tilde{x},\ \tilde{\theta}) = 0,\\ &\frac{sm}{kl}\lambda(\tilde{x}) - \omega(\tilde{x}) = \varepsilon\left\{\overline{Y}^*(\tilde{x},\ \tilde{\theta}) - \frac{sm}{kl}\overline{Z}^*(\tilde{x},\ \theta)\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

Разрешив эту систему, мы по формулам (5.30) определяем скорости вращения фаз $\Omega(\tilde{x})$ и $\Lambda(\tilde{x})$. Заметим, что нам достаточно вычислить только одну из этих величин, так как сдвиг фаз постоянен в условиях стационарного режима. Так как

$$\dot{\theta} = \frac{sm}{kl}\dot{z} - \dot{y},$$

то из этого равенства сразу следует, что

$$\Omega(\tilde{x}) = \frac{sm}{kl}\Lambda(\tilde{x}).$$

Итак, в общем случае задача определения стационарных резонансных режимов сводится к отысканию решения системы $n+1$ трансцендентного уравнения.

В том случае, когда скорости вращения фаз ω и λ зависят от x, мы должны искать установившийся режим в окрестности величины x^*. Это обстоятельство дает возможность несколько упростить процедуру отыскания стационарного режима. С этим обстоятельством мы познакомимся на примере.

9. Вынужденные колебания квазилинейных систем. Рассмотрим теперь задачу, которая послужила толчком к созданию теории, изложенной в этом параграфе.

Рассмотрим задачу о колебании квазилинейного осциллятора, подверженного действию внешних периодических сил

$$\ddot{\xi}+\omega^2\xi=\varepsilon\varphi(\xi, \dot{\xi})+\varepsilon f(t), \tag{5.33}$$

где $f(t)$ — периодическая функция времени t.
Положим для упрощения выкладок

$$\xi=x\cos y$$

система (5.33), как известно (см. формулу (1.7)), окажется приведенной к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi(x\cos y, \ -x\omega\sin y)\sin y-\frac{\varepsilon}{\omega}f(t)\sin y,\\ \dot{y}&=\omega-\frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi(x\cos y, \ -x\omega\sin y)\cos y-\frac{\varepsilon}{\omega x}f(t)\cos y.\end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Положим для упрощения выкладок

$$f(t)=a\cos\lambda t \tag{5.35}$$

и перепишем систему (5.34) в виде

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi\sin y-\frac{\varepsilon a}{\omega}\cos z\sin y,\\ \dot{y}&=\omega-\frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi\cos y-\frac{\varepsilon a}{\omega}\cos z\cos y,\\ \dot{z}&=\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{5.34'}$$

Главный резонанс возникает в системе (5.34) в том случае, когда $\lambda=\omega$, т. е. частота внешнего возбуждения совпадает с частотой колебаний линеаризованной системы. Рассмотрим сначала этот случай.

Итак, пусть $\lambda=\omega+\varepsilon h$. Сделаем стандартную замену

$$y=z-\theta$$

и составим укороченные уравнения. После очевидных выкладок получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{2\omega\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos(z-\theta), \ -x\omega\sin(z-(\theta))\times\right.\\ &\qquad\left.\times\sin(z-\theta)\,dz-a\pi\sin\theta\right\},\\ \dot{\theta}&=\frac{\varepsilon}{2\pi\omega x}\left\{\int_0^{2\pi}\varphi(x\cos(z-\theta), \ -x\omega\sin(z-\theta))\times\right.\\ &\qquad\left.\times\cos(z-\theta)\,dz+a\pi\cos\theta\right\}+\varepsilon h.\end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

Поскольку z не входит в выражения $\varphi \sin y$ и $\varphi \cos y$, то в этих выражениях можно не делать замены $y = z - \theta$ и, следовательно, записать уравнения (5.36) так:

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\varepsilon}\left\{\int_0^{2\pi} \varphi(x\cos y,\ -x\omega\sin y)\sin y\,dy - a\pi\sin\theta\right\},$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2\pi x\omega}\left\{\int_0^{2\pi} \varphi(x\cos y,\ -x\omega\sin y)\cos y\,dy + a\pi\cos\theta\right\} + \varepsilon h.$$

Для определения стационарных режимов $\tilde{x}$, $\tilde{\theta}$ будем иметь следующую систему тригонометрических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} \varphi\sin y\,dy, \\ \cos\theta &= -\frac{1}{\pi a}\left\{h + \int_0^{2\pi} \varphi\cos y\,dy\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

Совершенно аналогично составляются уравнения в случае комбинационных резонансов.

Рассмотрим теперь два примера, иллюстрирующих применение указанной процедуры.

10. Резонансные решения уравнения Дюффинга. Рассмотрим уравнение типа (5.33)

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = -\varepsilon\xi^3 + \varepsilon a\cos\lambda t, \tag{5.38}$$

где функция

$$\varphi = -\xi^3.$$

Составим уравнения относительно амплитуды и фазы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\varepsilon}{\omega}\{x^3\cos^3 y\sin y + a\cos z\sin y\}, \\ \dot{y} &= \omega - \frac{\varepsilon}{\omega x}\{x^3\cos^4 y + a\cos z\cos y\}, \\ \dot{z} &= \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{5.39}$$

Рассмотрим сначала главный резонанс, положив

$$\lambda = \omega + \varepsilon h, \qquad y = z - \theta. \tag{5.40}$$

Исключая переменную y из уравнений (5.39) и проводя усреднение, получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\left\{\int_0^{2\pi} x^3\cos^3\psi\sin\psi\,d\psi + a\pi\sin\theta\right\}, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega x}\left\{\int x^3\cos^4\psi\,d\psi - a\pi\cos\theta\right\} + \varepsilon h. \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

Интегралы, входящие в уравнение (5.41), легко вычисляются, и мы получаем окончательно

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= a\pi\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega x}\left\{\frac{3}{4}x^3 - a\pi\cos\theta\right\} + \varepsilon h. \end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

Для отыскания стационарных режимов положим $\dot{x}=\dot{\theta}=0$. Отсюда следует, что

$$\sin\theta = 0, \qquad x^3 - \frac{8}{3}\pi\omega h x - \frac{4}{3}a\pi\cos\theta = 0. \tag{5.43}$$

При изучении резонансных режимов наибольший интерес представляет так называемая резонансная кривая, определяющая зависимость амплитуды от расстройки h. Эта кривая характеризует поведение колебательной системы при прохождении через резонанс.

Положим в системе (5.43) $\theta=0$. Тогда искомая зависимость может быть определена из кубического уравнения

$$x^3 - \frac{8}{3}\pi\omega h x - \frac{4}{3}a\pi = 0. \tag{5.44}$$

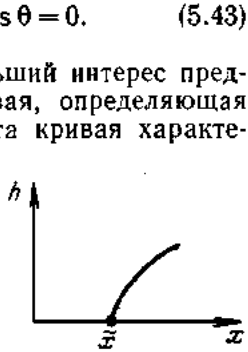

Рис. 27.

Нетрудно убедиться в том, что зависимость $x(h)$ в окрестности точки $h=0$ имеет вид, изображенный на рис. 27. По самому смыслу усреднения амплитуды величина x положительна. Поэтому нам достаточно рассмотреть только ту часть кривой $h(x)$, которая изображена на чертеже. Мы видим, что при стремлении расстройки к нулю амплитуда стремится к конечному значению

$$\tilde{x}(0) = \sqrt[3]{\frac{4}{3}a\pi}. \tag{5.45}$$

Случай $\theta=\pi$, который тоже удовлетворяет системе (5.45), мы рассматривать не будем, так как при малых значениях расстройки h получаются отрицательные значения для амплитуды.

11. О кратных резонансах в колебательных системах. Кратный резонанс — это частный случай комбинационного резонанса,

когда отношение k/s в формуле (5.15) равно целому числу. Понятие о кратном резонансе у нас уже встречалось не только в этом параграфе. В предыдущей главе мы рассмотрели несколько задач такого рода и изложили схему вычислений по методу Пуанкаре, которая позволяет обнаружить установившийся режим. В этом параграфе мы снова дали определение кратного резонанса. Нетрудно убедиться в том, что оно несколько отличается от введенного в предыдущей главе.

Рассмотрим снова уравнение типа (5.33)

$$\ddot{\xi}+\omega\xi=\varepsilon\varphi(\xi,\ \dot{\xi})+a\cos\lambda t. \tag{5.46}$$

Преобразование Ван-дер-Поля нас приведет к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi\sin y-\frac{a}{\omega}\cos\lambda t\sin y,\\ \dot{y}&=\omega-\frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi\cos y-\frac{a}{\omega x}\cos\lambda t\cos y.\end{aligned}\right\} \tag{5.47}$$

В этом параграфе мы говорили, что в системе (5.47) возникает кратный резонанс, если выполнены следующие условия:

а) $\lambda=q\omega$, q — целое число;

б) амплитуда внешнего возмущения a — малая величина порядка ε: $a=O(\varepsilon)$.

Последнее утверждение мы не формулировали в явном виде, но оно использовалось самым существенным образом. В самом деле, вся процедура осреднения, как мы знаем, основана на предположении о медленном изменении амплитуды. Таким образом, для формального применения теории, изложенной в предыдущих пунктах этого параграфа, мы обязаны предположить малость амплитуды a.

В главе II мы рассматривали ситуацию, которая возникает в системе (5.46), когда амплитуда a конечна. Пусть $\lambda=q\omega$. Тогда мы говорили, что имеет место резонанс q-го рода, если в системе (5.46) возмущающая сила частоты $\lambda=q\omega$ индуцирует колебания частоты ω.

Для того чтобы исследовать этот вопрос методами, изложенными в данном параграфе, нам надо сначала представить решение уравнения (5.46) в виде

$$\xi=\xi_0+\eta,$$

где

$$\xi_0=-\frac{a}{\lambda^2-\omega^2}\cos\lambda t.$$

Тогда новая переменная η удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\eta}+\omega^2\eta=\varepsilon\varphi\left(\eta-\frac{a}{\lambda^2-\omega^2}\cos\lambda t,\ \dot{\eta}+\frac{a\lambda}{\lambda^2-\omega^2}\sin t\right)\equiv\varepsilon\varphi^*(\eta,\ \dot{\eta},\ \lambda t). \tag{5.47'}$$

К уравнению (5.47′) мы можем применить стандартную методику. Для этого положим

$$\eta=x\cos y,\qquad \lambda=q\omega+\varepsilon h.$$

Уравнения для новых переменных будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi^*(x\cos y,\ -x\omega\sin y,\ z)\sin y,\\ \dot{y}&=\omega-\frac{\varepsilon}{\omega x}\varphi^*(x\cos y,\ -x\omega\sin y,\ z)\cos y,\\ \dot{z}&=\lambda.\end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Правые части этой системы являются периодическими функциями y и z периода 2π. Для исследования системы (5.48) можно уже использовать методы данного параграфа. Полагая

$$\theta=\frac{1}{q}z-y,$$

мы придем к следующей системе уравнения относительно амплитуды x и разности фаз θ:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}\varphi^*\left(x\cos\left(\frac{z}{q}-\theta\right);\ -x\omega\sin\left(\frac{z}{q}-\theta\right);\ z\right)\cos\left(\frac{1}{q}z-\theta\right),\\ \dot{\theta}&=\varepsilon\left\{\frac{1}{\omega x}\varphi^*\left(x\cos\left(\frac{z}{q}-\theta\right);\ -x\omega\sin\left(\frac{z}{q}-\theta\right);\ z\right)\sin\left(\frac{z}{q}-\theta\right)+h\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{5.49}$$

Правые части системы (5.49) — периодические функции z. Нетрудно установить, что период равен $2\pi q$. Следовательно, укороченные уравнения Ван-дер-Поля будут иметь вид

$$\dot{x}=-\frac{\varepsilon}{2\pi q\omega}\int_0^{2\pi q}\varphi^*\cos\left(\frac{z}{q}-\theta\right)dz\equiv\varepsilon\overline{X}(x,\ \theta),$$

$$\dot{\theta}=\frac{\varepsilon}{2\pi q\omega x}\int_0^{2\pi q}\varphi^*\sin\left(\frac{z}{q}-\theta\right)dz+\varepsilon h\equiv\varepsilon\overline{\Theta}(x,\ \theta).$$

Полагая $\dot{x}=\dot{\theta}=0$, мы придем, разумеется, к тем же результатам, которые получаются методом Пуанкаре, если в нем ограничиться вычислением нулевого приближения.

12. Один пример колебательной системы с большим числом степеней свободы. Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$\ddot{z}_i + F_i(z_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.50}$$

в квазилинейной постановке, предполагая, что точка $z_i = 0$ является устойчивым положением равновесия. Для этого можно, например, сначала линеаризовать систему (5.50) и вычислить ее главные координаты, которые существуют в силу принятых предположений. Эти величины будут линейными комбинациями переменных z_i

$$\xi_i = \sum \alpha_{ij} z_j.$$

Приняв величины ξ_i в качестве новых переменных, мы получим уравнения следующего вида:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \varepsilon \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.51}$$

В системе (5.51) произведем преобразование Ван-дер-Поля

$$z_i = x_i \cos y_i, \qquad \dot{z}_i = -x_i \omega_i \sin y_i,$$

и тогда эта система уравнений заменится следующей:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{\varepsilon}{\omega_i} \varphi_i(x_1 \cos y_1, \ldots, x_n \cos y_n; \ -x_1\omega_1 \sin y_1 \ldots) \sin y_i, \\ \Omega_i \equiv \dot{y}_i &= \omega_i - \frac{\varepsilon}{\omega_i x_i} \varphi(x_1 \cos y_1, \ldots, x_n \cos y_n; \ -x_1\omega_1 \sin y_1, \ldots \\ &\qquad \ldots, -x_n\omega_n \sin y_n) \cos y_i. \end{aligned}\right\} \tag{5.52}$$

Система (5.52) относится к тому типу систем, которые изучались в этом параграфе. Если «собственные частоты» несоизмеримы, то для получения укороченных уравнений нам достаточно осреднить правые части этой системы по всем быстрым переменным $y_1, \ldots, y_n$.

Предположим, что функции φ_i имеют вид

$$\varphi_i(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{s,j} a_{sj}^{(i)} z_s z_j + \sum_{s,j,k} b_{sjk}^{(i)} z_s z_j z_k.$$

Тогда нетрудно заметить, что уравнения первого приближения (укороченные уравнения) для системы (5.52) будут такими:

$$\dot{x}_i = 0,$$

$$\Omega_i = \omega_i - \frac{\varepsilon}{2\omega x_i}\left(\sum_{j \neq i} b_{ijj}^{(i)} + \sum_{j \neq i} b_{jij}^{(i)} + \frac{3}{4} b_{iii}^{(i)}\right).$$

Таким образом, любое колебательное движение будет происходить с постоянной амплитудой, а частота колебания каждой из координат никак не зависит (в этом приближении) от квадратичных членов разложения.

§ 6. Исследование стационарных точек и устойчивости

В предыдущих параграфах этой главы мы уже несколько раз обращали внимание на вопрос исследования стационарных режимов и проблему устойчивости. Тогда мы рассматривали только некоторые специальные случаи. В данном параграфе мы приведем анализ общего случая произвольного числа степеней свободы.

1. Предварительные замечания. Будем рассматривать систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

где x — вектор размерности n; y — вектор размерности m; X и Y — периодические функции y. Ограничимся изучением только первого приближения и предположим сначала, что мы имеем дело с нерезонансным случаем. Тогда вектор x удовлетворяет системе уравнений первого приближения

$$\dot{x} = \varepsilon \overline{X}(x, \varepsilon), \tag{6.2}$$

причем усреднение производится по всем компонентам вектора y независимо друг от друга. Таким образом, медленные переменные в нерезонансном случае удовлетворяют системе дифференциальных уравнений первого порядка.

(Черточки над переменными в уравнениях (6.2) мы не ставим, так как в рамках первого приближения $x = \bar{x}$.)

Предположим теперь, что мы имеем дело с резонансным случаем. В предыдущем параграфе было показано, что тогда число медленных переменных возрастает. Так, например, если размерность вектора y равна 2, то размерность вектора медленных переменных возрастает на 1. Во всяком случае, и в условиях резонанса задача в первом приближении сводится к исследованию системы уравнений типа (6.2). Только в качестве вектора x здесь будет выступать вектор большей размерности: его компонентами, помимо компонент вектора x из уравнений (6.1), будут также величины, характеризующие сдвиг фаз.

В прикладных задачах обычно основной интерес представляет изучение «медленных» переменных и закон изменения частоты «быстрых» переменных. Для этой цели достаточно изучать только систему усредненных уравнений (6.2).

Итак, мы будем изучать систему (6.2). Условимся называть ее стационарной точкой x^* корень уравнения

$$\overline{X}(x^*, \varepsilon)=0. \tag{6.3}$$

Значение координаты $x=x^*$ иногда будем называть стационарной амплитудой, так как при изучении колебательных процессов амплитуда является одной из медленных переменных.

В случае стационарной точки «быстрая» переменная y^* будет являться «равномерно вращающейся фазой». В самом деле, в этом случае $\dot{y}^*=\text{const}$ и, следовательно,

$$y^*=y_0+[\omega(x^*)+\varepsilon\overline{Y}(x^*, \varepsilon)]t=y_0+\Omega t, \tag{6.4}$$

где

$$\Omega=\omega(x^*)+\varepsilon\overline{Y}(x^*, \varepsilon)=\Omega(x^*).$$

Введенная терминология, как мы это видели при изложении метода Ван-дер-Поля, оправдана тем, что все используемые понятия (так же, как и метод) возникли из теории колебаний.

Определение стационарных состояний сводится к решению системы трансцендентных уравнений. Система этих уравнений может не иметь корней — это значит, что система (6.1) не имеет стационарных точек. Система (6.3) может иметь конечное или бесконечное число решений, а также может удовлетворяться и тождественно. Последнее означает, что любое из состояний системы (6.1) стационарное. С этим явлением мы сталкиваемся всякий раз, когда изучаемая система является консервативной.

2. Исследование устойчивости. Основной вопрос, который возникает при изучении стационарных состояний — это вопрос об их устойчивости. Мы не будем здесь давать какие-либо строгие определения и остановимся только на одном простом вопросе. Предположим, что начальное состояние отличается от стационарного, т. е.

$$x(0)=x^*+\delta x(0). \tag{6.5}$$

Тогда естественно поставить вопрос о том, как исследовать изменение вектора $x(t)$, удовлетворяющего условиям (6.5). Если вектор $\delta x(0)$ достаточно мал, то мы можем положить

$$x=x^*+\delta x$$

и составить для δx линеаризованные уравнения, т. е. составить для системы (6.2) уравнения в вариациях.

После очевидных вычислений получим

$$\delta\dot{x}=A\delta\dot{x}, \tag{6.6}$$

где A — матрица

$$A=\|q_{ij}\|=\left(\frac{d\overline{X}}{dx}\right)_{x=x^*}.$$

Элементы этой матрицы будут постоянными величинами

$$q_{ij}=\left(\frac{\partial \overline{X}_i}{\partial x_j}\right)_{x=x^*},$$

где X_i и x_j — компоненты векторов X и x соответственно. Таким образом, поведение усредненной системы в окрестности стационарной точки может быть изучено при помощи системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В начале этой главы мы рассмотрели задачу об устойчивости для системы с одной степенью свободы. В том случае вместо векторной системы (6.6) мы имеем одно скалярное уравнение

$$\delta\dot{x}=q\delta x. \tag{6.7}$$

Для асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (6.7) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$q=\left(\frac{d\overline{X}}{dx}\right)_{x=x^*}<0, \tag{6.8}$$

т. е. для исследования устойчивости нам достаточно проверить только знак производной функции $\overline{X}(x)$ в точке $x=x^*$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая.

3. Устойчивость тривиального решения системы (6.6). Умножим обе части уравнения (6.6) скалярно на вектор δx. Так как

$$(\delta\dot{x}\cdot\delta x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta x^2=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum\delta x_i^2,$$

то уравнение (6.6) мы можем записать в виде

$$\frac{d\rho^2}{dt}=2(A\delta x\cdot\delta x). \tag{6.9}$$

Здесь через ρ обозначен радиус сферы «вариаций»

$$\rho=\sqrt{\sum\delta x_i^2}.$$

Далее заметим, что

$$2(A\delta x\cdot\delta x)=\sum_{i,j}q_{ij}\delta x_i\delta x_j+\sum_{ij}q_{ji}\delta x_i\delta x_j=$$
$$=\sum_{i,j}r_{ij}\delta x_i\delta x_j=(R\delta x\cdot\delta x),$$

где R — уже симметричная матрица, так как $r_{ij}=q_{ij}+q_{ji}$.

Итак, выражение (6.9) имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho^2}{dt}=(R\delta x\cdot\delta x). \tag{6.10}$$

Отсюда видно, что для асимптотической устойчивости тривиального решения (6.6) (т. е. для того чтобы $\rho^2 \to 0$ при $t \to \infty$) достаточно, чтобы квадратичная форма $(R\delta x \cdot \delta x)$ была знакоопределенно отрицательной. Следовательно, условиями устойчивости стационарного решения будут условия знакоопределенной отрицательности этой квадратичной формы.

Вспомним теорему Сильвестра: *для того чтобы квадратичная форма* $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ *была определенно положительной, необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты* a_{ij} *удовлетворяли следующим неравенствам*:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\Delta}_1 = a_{11} > 0, \\ &\tilde{\Delta}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\tilde{\Delta}_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

Для того чтобы квадратичная форма $(R\delta x \cdot \delta x)$ была знакоопределенно отрицательной, необходимо и достаточно, чтобы форма $-(R\delta x \cdot \delta x)$ была определенно положительной. Но, если положить $-r_{ij} = a_{ij}$, то

$$\Delta_1 = r_{11} = -\tilde{\Delta}_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \tilde{\Delta}_2$$

и вообще

$$\Delta_k = (-1)^k \tilde{\Delta}_k.$$

Поэтому из условий (6.11) мы сразу находим достаточные условия устойчивости

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_1 < 0 \\ &\Delta_2 > 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta_k \begin{cases} > 0, & \text{если } k \text{ четное}, \\ < 0, & \text{если } k \text{ нечетное}, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

где k — размерность матрицы A.

При $k=1$ условия (6.12) сводятся к одному условию (6.8).

4. Замечания. а) Изложенные рассуждения могут быть использованы и для изучения устойчивости нестационарных задач.

Рассмотрим снова систему (6.2), и пусть x^* — некоторое частное решение этой системы. Поставим вопрос об устойчивости

этого решения. Подобные вопросы возникают во многих прикладных задачах, например при исследовании переходных режимов в колебательных системах.

Замена (6.5) нас снова приводит к уравнению (6.6), но только теперь элементы матрицы A будут уже не постоянными числами, а некоторыми известными функциями времени.

Повторяя рассуждения данного раздела, мы опять можем составить уравнение (6.10). Функция ρ^2 играет роль функции Ляпунова для уравнения с переменными коэффициентами

$$\delta\dot{x} = A(t)\,\delta x. \tag{6.6'}$$

Согласно теореме Ляпунова для асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (6.6′) достаточно существования такой определенно положительной функции $W(\delta x)$, не зависящей от времени, что для любого δx и любого момента времени t имеет место неравенство

$$-(R\delta x \cdot \delta x) \geqslant W(\delta x).$$

В качестве функции W мы можем принять функцию

$$W = \mu(\delta x \cdot \delta x),$$

где μ — любое положительное число. Тогда для устойчивости нам достаточно потребовать, чтобы квадратичная форма

$$-(R\delta x \cdot \delta x) - \mu(\delta x \cdot \delta x)$$

была определенно положительной. Отсюда в силу неравенства Сильвестра, мы получаем следующие достаточные условия устойчивости:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_1 = r_{11} < -\mu,\\
&\Delta_2 = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} > \mu^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta_k = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} \end{vmatrix} \begin{matrix} < -\mu^k, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ > \mu^k, & \text{если } k \text{ четное.} \end{matrix}
\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

б) Условия (6.12) определяют требования, которым должны удовлетворять коэффициенты системы (6.6) для того, чтобы обеспечить устойчивость решения. Изложенный способ исследования устойчивости является вариантом прямого метода Ляпунова, а функция ρ^2, как указывалось, является функцией Ляпунова.

В прикладных задачах широко используются и другие методы исследования устойчивости. Например, если матрица A

постоянная, то можно разыскивать решение уравнения (6.6) в виде

$$\delta x = y e^{\lambda t}. \tag{6.14}$$

Подставляя (6.14) в (6.6), мы получаем уравнение для λ

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Характеристический определитель $|A - \lambda E|$ представляет собой некоторый полином от λ. Для асимптотической устойчивости решения $\delta x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы корни этого полинома имели отрицательные действительные части. Условия, которым должны удовлетворять коэффициенты этого полинома, необходимые и достаточные для того, чтобы его корни имели отрицательные действительные части, даются теоремой Гурвица *). Метод, использующий теорему Гурвица, совершенно эквивалентен изложенному с точки зрения окончательного результата.

в) Мы составили условия асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (6.6). По теории Ляпунова из этого факта следует и более сильный результат. Если условия (6.13) имеют место, то мы можем утверждать, что решение x^* нелинейной системы (6.2) устойчиво в смысле Ляпунова (но не асимптотически устойчиво).

5. Трактовка результатов. В данном параграфе мы обсуждали возможности исследования устойчивости некоторого решения системы усредненных уравнений (6.2). Мы подошли к этому вопросу совершенно формально, описав общепринятый способ исследования устойчивости решений и понимая под устойчивостью устойчивость в смысле Ляпунова. Устойчивость в этом смысле предполагает исследование поведения решения на бесконечном интервале времени. Такое исследование и было проведено для системы (6.6). Если решение этой системы асимптотически устойчиво, то, согласно теореме Ляпунова, из устойчивости линеаризованного уравнения (6.6) следует устойчивость в смысле Ляпунова решения x^* системе (6.2). Но сама система (6.2) является приближенной. Она с некоторой точностью (порядка $O(\varepsilon)$) описывает решение исходной системы (6.1), и то только на некотором конечном отрезке времени (порядка $O(1/\varepsilon)$).

В силу перечисленных обстоятельств без дополнительных исследований никаких суждений об устойчивости в смысле Ляпунова решений исходной системы (6.1) из наших рассмотрений непосредственно сделать нельзя. Тем не менее использование

*) Н. Г. Четаев, Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, АН СССР, 1962.

описанного способа рассуждения дает много для технических задач. Дело в том, что асимптотический метод исследования уравнений имеет смысл применять только тогда, когда мы хотим изучать поведение системы на конечном (хотя и большом) интервале времени. Следовательно, информация, которую доставляет приведенный способ рассуждения, может оказаться вполне достаточной для решения тех или других технических задач.

Примечание. Следует заметить, что в некоторых специальных случаях, изучавшихся Н. Н. Боголюбовым и его учениками, по устойчивости решения усредненных уравнений удается судить об устойчивости решения исходных уравнений.

§ 7. Вращательные движения маятника

1. Замечания об изучении колебательных движений маятника. Маятником мы условимся называть систему, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{z}+f(z)=0, \tag{7.1}$$

где $f(z)$ — периодическая функция своего аргумента. Не ограничивая общности, мы можем принять, что период этой функции равен 2π и $f(0)=0$; кроме того, мы будем считать, что среднее значение $\bar{f}$ будет

$$\bar{f}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,dz=0. \tag{7.2}$$

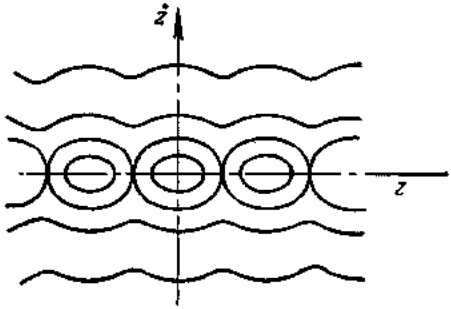

Рис. 28.

Все движения, описываемые уравнением (7.1), условимся называть собственными движениями маятника.

Кроме собственных движений маятника, мы будем еще рассматривать вынужденные движения, происходящие под действием внешних возмущений. Такие движения мы будем описывать уравнением

$$\ddot{z}+f(z)=\varepsilon\varphi(z,\ \dot{z},\ t), \tag{7.3}$$

где ε — малый параметр.

Фазовая плоскость уравнения (7.1) имеет вид, изображенный на рис. 28. Замкнутые ветви сепаратрисы ограничивают области значений z и $\dot{z}$, соответствующие периодическим (колебательным) движениям. Незамкнутые фазовые траектории описывают вращательные движения.

Во всех примерах этой главы мы рассматривали колебательные движения. Методы, развитые в этой главе, позволяют рассмотреть следующие задачи:

а) *Квазилинейные колебания.* В этом случае колебания считаются малыми, и уравнение (7.3) заменяется таким:

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon\varphi(z,\ \dot{z},\ t).$$

Выбор постоянной ω в том случае, когда $f(z)$ — аналитическая функция, очевиден — это коэффициент при первом числе тейлоровского разложения функции $f(z)$. Если $f(z)$ не аналитическая функция, то величина ω определяется методом эквивалентной линеаризации. В этом случае величина ω зависит от амплитуды x. Разность

$$f(z)-\omega^2 z=\varepsilon\psi^*(z)$$

относится к возмущающим силам.

б) *Колебания с малой энергией.* Квазилинейные колебания являются частным случаем таких систем. Однако на эту задачу можно посмотреть и с более общей точки зрения. Предположим, что мы снова представили функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\omega^2 z-\mu\psi^*(z),$$

где μ — некоторый малый параметр, не зависящий от ε. Тогда и уравнение возмущенного движения (7.3) будет

$$\ddot{z}+\omega^2 z-\mu\psi^*(z)=\varepsilon\varphi(z,\ \dot{z},\ t). \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) содержит два малых параметра. При $\varepsilon=0$ мы получаем порождающее уравнение

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\mu\psi^*(z). \tag{7.5}$$

Если энергия системы мала, то можно построить приближенное решение (7.5) с любой точностью относительно μ

$$z=Q(x,\ \omega(x)(t+c)). \tag{7.6}$$

Используя решение (7.6), мы можем теперь построить решение, асимптотическое по ε.

Такой подход к исследованию уравнений (7.3) является более гибким, чем тот, который дает квазилинейная теория. Использование двух малых параметров позволяет обнаружить в неавтономных системах такие решения, которые нельзя определить методом квазилинейной теории. Тем не менее его возможности ограничены только малыми амплитудами.

в) В том случае, если амплитуды колебательного процесса велики, фазовая траектория уже близка к сепаратрисе, и мы должны использовать для построения асимптотики общие ме-

тоды, которые были изложены в § 2 этой главы. Заметим, однако, что если при увеличении энергии период колебаний будет неограниченно увеличиваться (период движения вдоль сепаратрисы бесконечно большой), то точность асимптотических представлений будет уменьшаться.

Таким образом, методы данной главы позволяют с большой точностью изучить всю область колебательных движений, за исключением узкой полосы, примыкающей к сепаратрисе.

В настоящем параграфе мы рассмотрим вращательные движения маятника. Оказывается, что методы осреднения позволяют для больших энергий построить теорию, по меньшей мере не более сложную, чем изложенная теория нелинейных колебаний. Изучение вращательных движений мы начнем с рассмотрения собственных движений ($\varphi \equiv 0$).

2. Новые независимые переменные. Перейдем теперь к изучению тех движений системы (7.1), которые изображаются незамкнутыми фазовыми траекториями. Они соответствуют большим значениям начальной энергии.

Рассмотрим снова рис. 28 и какую-либо из кривых, описывающих вращательное движение. Она пересекает ось $O\dot{z}$ в точке $\dot{z}=\Omega$, и фазовая траектория, соответствующая этому уровню энергий, представляет собой волнообразную кривую, лежащую в окрестности прямой $\dot{z}=\Omega$. Поэтому в уравнении (7.1) естественно сделать замену переменных

$$\frac{dz}{dt} = \Omega + x. \tag{7.7}$$

Положим еще $t=\varepsilon s$, где $\varepsilon=1/\Omega$. Тогда уравнение (7.7) будет приведено к системе двух уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\varepsilon f(z), \\ z' &= 1+\varepsilon x, \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

где принято обозначение $\varphi'=d\varphi/ds$. Эта система уравнений относится к рассматриваемому типу уравнений: она содержит одну медленно изменяющуюся переменную — угловую скорость вращения x и одну быстро изменяющуюся переменную z, которую можно интерпретировать как угол между нитью маятника и некоторой прямой, фиксированной в пространстве. Кроме того, правые части являются периодическими функциями «быстрой» переменной z. Таким образом, для изучения системы (7.8) могут быть использованы методы, развитые в этой главе.

Для системы (7.1) условимся рассматривать следующую задачу Коши:

$$\text{при } t=0: \quad \frac{dz}{dt}=\Omega, \quad z=0$$

или

$$\text{при } t=0: \quad x=0 \;\; z=0. \tag{7.9}$$

Так как система (7.1) не содержит явно времени, то рассмотрение такой специальной задачи Коши не ограничивает общности. Если мы найдем ее решение

$$z=z(t,\ \Omega),$$

то общий интеграл уравнения (7.1) запишется в форме

$$z=z(t+t_0,\ \Omega), \tag{7.10}$$

где Ω и t_0 — произвольные постоянные.

3. Построение асимптотики порождающего решения. Следуя общей схеме, положим

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}+\varepsilon u_1(\bar{x},\ \bar{z})+\varepsilon^2 u_2(\bar{x},\ \bar{z})+\ \ldots, \\ z &= \bar{z}+\varepsilon v_1(\bar{x},\ \bar{z})+\varepsilon^2 v_2(\bar{x},\ \bar{z})+\ \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

где функции $\bar{x}$ и $\bar{z}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x})+\varepsilon^2 A_2(\bar{x})+\ \ldots, \\ \dot{\bar{z}} &= 1+\varepsilon B_1(\bar{x})+\varepsilon^2 B_2(\bar{x})+\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Как и во всех других случаях, мы будем считать функции u_i и v_i ограниченными. Далее, для того чтобы удовлетворить условиям (7.9), примем

$$u_i(\bar{x},\ 0)=v_i(\bar{x},\ 0)=0. \tag{7.13}$$

Уравнение для определения функций u_i, v_i, A_i и B_i будут в этой задаче такими:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}}=f(\bar{z})-A_1(\bar{x}), \quad \frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}}=\bar{x}-B_1(\bar{x}), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}}=-\frac{\partial f}{d\bar{z}}v_1-\frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}}A_1-\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}}B_1-A_2(\bar{x}), \\ &\frac{\partial v_2}{\partial \bar{z}}=u_1-\frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}}A_1-\frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}}B_1-B_2(\bar{x}) \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

и т. д.

Рассмотрим первое из уравнений системы (7.14). Для ограниченности функций u_1 необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1(\bar{x})=-\bar{f}.$$

Но, согласно условию (7.2), $\bar{f}=0$. Таким образом,

$$A_1=0. \tag{7.15}$$

Отсюда

$$u_1(\bar{x},\ \bar{z})=-\int_0^{\bar{z}} f(z)\,dz+C(\bar{x}),$$

где $C(\bar{x})$ — произвольная функция $\bar{x}$. Однако условие (7.13) нам сразу дает

$$C(\bar{x}) \equiv 0.$$

Введем обозначение

$$\int_0^{\eta} f(\eta)\, d\eta = \Psi(\eta), \qquad \int_0^{\eta} \Psi(\eta)\, d\eta = \Phi(\eta). \tag{7.16}$$

Тогда мы можем написать

$$u_1(\bar{z}) = -\Psi(\bar{z}). \tag{7.17}$$

Повторяя рассуждения для второго из уравнений системы (7.14), получим

$$B_1 = \bar{x} \tag{7.18}$$

и, следовательно,

$$v_1 \equiv 0. \tag{7.19}$$

Используя результаты (7.17), (7.18) и (7.19), перепишем третье уравнение системы (7.14)

$$\frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} = \frac{d\Psi(\bar{z})}{d\bar{z}}\, \bar{x} - A_2(\bar{x}),$$

откуда

$$A_2(\bar{x}) = \overline{\frac{d\Psi(\bar{z})}{d\bar{z}}}\, \bar{x} = \bar{f} \cdot \bar{x} = 0 \tag{7.20}$$

и, следовательно,

$$u_2(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x} \int_0^{\bar{z}} f(z)\, dz = \bar{x}\Psi(\bar{z}). \tag{7.21}$$

Перепишем, наконец, последнее из уравнений системы (7.14) с учетом полученных результатов

$$\frac{\partial v_2}{\partial \bar{z}} = -\Psi(\bar{z}) - B_2(\bar{x}),$$

откуда

$$B_2(\bar{x}) = -\overline{\Psi}, \tag{7.22}$$

и, следовательно, используя обозначения (7.16), получим

$$v_2(\bar{x}, \bar{z}) = -\Phi(\bar{z}) + \overline{\Psi} \cdot \bar{z}. \tag{7.23}$$

Продолжив эту процедуру, легко получить, что $A_3 = 0$, и т. д.

Ограничиваясь в наших вычислениях членами порядка $O(\varepsilon^2)$, придадим уравнениям (7.11) и (7.12) вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} - \varepsilon\Psi(\bar{z}) + \varepsilon^2\bar{x}\Psi(\bar{z}) + \ldots, \\ z &= \bar{z} - \varepsilon^2(\overline{\Phi}(\bar{z}) - \Psi\bar{z}), \\ \bar{x}' &= 0, \\ \bar{z}' &= 1 + \varepsilon\bar{x} - \varepsilon^2\overline{\Psi}. \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

Интегрируя третье из уравнений (7.24) и учитывая начальные условия (7.9), получим

$$\bar{x} \equiv 0. \tag{7.25}$$

На основании равенства (7.25) остальные уравнения системы (7.24) будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\varepsilon\Psi(\bar{z}), \\ z &= \bar{z} + \varepsilon^2(\bar{z}\overline{\Psi} - \Phi(\bar{z})), \\ \bar{z}' &= 1 - \varepsilon^2\overline{\Psi}. \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

Перепишем формулы (7.26), возвращаясь к переменному $t = s/\Omega$, и положим $\varepsilon = 1/\Omega$

$$\left.\begin{aligned} \bar{z} &= \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}\right)t, \\ z &= \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}\right)t + \frac{1}{\Omega^2}\left\{\overline{\Psi}\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}\right)t - \Phi\left(\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}\right)t\right)\right\}, \\ x &= -\frac{1}{\Omega}\Psi\left(\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\Psi\right)t\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.27}$$

Продолжив эту процедуру, мы можем получить решение с любой степенью точности относительно $1/\Omega$.

Так как $\overline{\Psi}$ является постоянной, не зависящей от Ω, то удобно ввести новую постоянную

$$\lambda = \Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}.$$

Тогда асимптотическое представление общего интеграла уравнения (7.1) для случая больших энергий будет иметь вид:

$$z = \lambda(t + t_0) + \frac{1}{\lambda^2}\left\{\overline{\Psi}\cdot\lambda(t + t_0) - \Phi(\lambda(t + t_0))\right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)^{*)}. \tag{7.28}$$

Решение (7.28) содержит две произвольные постоянные λ и t_0.

*) При выводе (7.28) мы использовали то обстоятельство, что

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\Omega^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Примечания. 1. Итак, асимптотическое представление общего интеграла уравнения (7.1) для случая больших энергий может быть приведено в форме квадратур. Таким образом, в этом случае мы имеем ту же самую ситуацию, которую мы имели для малых энергий. В самом деле, если рассматривать уравнение (7.1) как квазилинейное

$$\ddot{z}+\omega^2 z=\varepsilon\varphi(z)\equiv-(f(z)-\omega^2 z),$$

то мы должны принять

$$z=x\cos y, \qquad x=\text{const}.$$

Тогда y удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}=\omega+\frac{1}{2\pi x\omega}\int_0^{2\pi}[f(x\cos y)-\omega^2 x\cos y]\cos y\,dy,$$

т. е.

$$\dot{y}=\Omega(x)=\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2\pi\omega x}\int_0^{2\pi}f(x\cos y)\cos y\,dy$$

и асимптотическое представление общего интеграла будет

$$z=x\cos\Omega(x)(t+t_0), \tag{7.28'}$$

где x и t_0 — две произвольные постоянные.

Следовательно, формула (7.28) является аналогом (7.28′), а формула (7.7) играет ту же роль при изучении вращательных движений маятника, какую играет преобразование Ван-дер-Поля в случае колебательных движений.

2. Для построения формул (7.28) мы использовали разложение функций в ряды и связанные с этой процедурой операции дифференцирования. В § 4 этой главы было показано, что формула типа (7.28) может быть получена методом последовательных приближений, реализация которого не требует предположения о дифференцируемости (и даже непрерывности) правой части уравнения (7.1). Схема метода последовательных приближений применительно к данному случаю сводится к следующему.

Вместо замены переменных (7.11), (7.12) мы полагаем

$$\left.\begin{aligned} x&=\bar{x}+\varepsilon u(\bar{x},\ \bar{z},\ \varepsilon),\\ z&=\bar{z}+\varepsilon v(\bar{x},\ \bar{z},\ \varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{7.11'}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}}&=\varepsilon A(\bar{x},\ \varepsilon),\\ \dot{\bar{z}}&=1+\varepsilon B(\bar{x},\ \varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{7.12'}$$

Подставляя (7.11′) и (7.12′) в исходные уравнения (7.8), мы получаем

$$A + \varepsilon u_{\bar z} A + u_{\bar z}(1 + \varepsilon B) = -f(\bar z + \varepsilon v),$$
$$B + \varepsilon v_{\bar z} B + v_{\bar z}(1 + \varepsilon B) = \bar x + \varepsilon u.$$

Решение этой системы проводится по следующей итерационной схеме:

$$u_{\bar z}^{(k)} = -f(\bar z + \varepsilon v^{(k-1)}) - \varepsilon u_{\bar z}^{(k-1)} A^{(k-1)} - \varepsilon v_{\bar z}^{(k-1)} B^{(k-1)} - A^{(k)},$$
$$v_{\bar z}^{(k)} = \bar x + \varepsilon u^{(k-1)} - \varepsilon v_{\bar z}^{(k-1)} A^{(k-1)} - \varepsilon v_{\bar z}^{(k-1)} B^{(k-1)} - B^{(k)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что, использовав заданные начальные условия, а также условия ограниченности функций u и v и проводя два шага итерационного процесса, мы придем к формуле (7.28).

4. Вращательные движения математического маятника. В качестве простейшего примера рассмотрим вращательные движения математического маятника

$$\ddot z + \sin z = 0. \tag{7.29}$$

В этом случае

$$f(z) = \sin z$$

и, следовательно,

$$\Psi(z) = 1 - \cos z, \quad \overline{\Psi} = 1, \quad \Phi(z) = z - \sin z.$$

Используя эти выражения, составим выражение (7.28)

$$z = \lambda t + \frac{1}{\lambda^2}\sin \lambda t + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \tag{7.30}$$

Решение уравнения (7.29) выражается через эллиптические функции, поэтому асимптотику уравнения (7.30) можно построить, опираясь на свойства эллиптических функций.

Примечание. Если правая часть уравнения (7.1) — аналитическая функция z, то приближенное решение в случае больших энергий может быть построено и другими способами. Например, полагая в уравнении (7.1)

$$z = \Omega t + \alpha, \quad \Omega t = s, \quad \frac{1}{\Omega} = \varepsilon,$$

мы приведем его к виду

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = -\varepsilon^2 f(s + \alpha).$$

Правая часть данного уравнения зависит от малого параметра ε, причем эта зависимость аналитическая, поэтому его решение можно искать в виде ряда по степеням ε, опираясь на теорему

Пуанкаре. Применяя подобные рассуждения к уравнению (7.29), мы получим

$$z = \Omega t + \sin \Omega t \left\{ \frac{1}{\Omega^2} - \frac{5}{16\Omega^2} + \ldots \right\} +$$
$$+ \sin 2\Omega t \left\{ \frac{1}{8\Omega^4} + \ldots \right\} + \sin 3\Omega t \left\{ \frac{1}{48\Omega^6} + \ldots \right\} + \ldots \quad (7.31)$$

Первые члены разложений (7.30) и (7.31) совпадают.

5. Пример маятника, возвращающая сила которого разрывна. В § 4 этой главы мы уже обсуждали применимость методов усреднения к тому случаю, когда функция $f(z)$, входящая в уравнение (7.1), не допускает разложения в ряды. Покажем на примере, какие результаты могут быть получены в том случае, когда функция $f(z)$ разрывна.

Пусть $f(z)$ — периодическая функция z периода 2π, причем

$$f(z) = \begin{cases} +1, & z \in (0, \pi), \\ -1, & z \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

График функции $f(z)$ изображен на рис. 29.

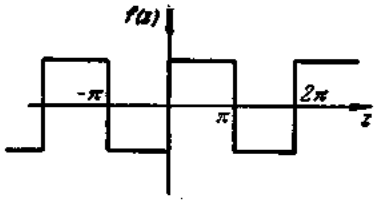

Рис. 29.

Так как $f=0$, то фазовая плоскость уравнения (7.1) будет в этом случае периодическая, т. е. иметь структуру, изображенную на рис. 28.

Вычислим

$$\Psi(z) = \int_0^z f(z)\,dz = \begin{cases} z, & z \in (0, \pi), \\ -z, & z \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi z\,dz - \int_{-\pi}^0 z\,dz \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Далее

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2}, & z \in (0, \pi), \\ -\frac{z^2}{2}, & z \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Теперь для этого случая составим выражение (7.28)

$$z = \begin{cases} \lambda t + \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\pi}{2}\lambda t - \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right], & t \in \left(0, \frac{\pi}{\lambda}\right), \\ \lambda t + \frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\pi}{2}\lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right], & t \in \left(-\frac{\pi}{\lambda}, 0\right). \end{cases} \quad (7.32)$$

Движения, которые определяются формулами (7.32), изображены на рис. 30, где

$$\lambda = \operatorname{tg} \varphi.$$

6. Система с вращающимся звеном. Методика, изложенная в этом параграфе, может быть использована без каких-либо существенных изменений для исследования уравнений значительно более общего вида, чем рассмотренный.

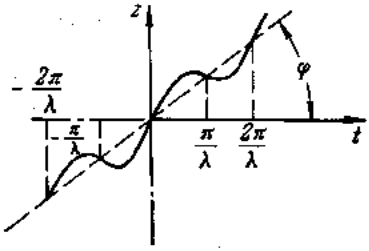

Рис. 30.

Предположим теперь, что вместо уравнения (7.1) мы рассматриваем такое:

$$\ddot{z} + f(z, \xi) = 0, \qquad (7.33)$$

где ξ — вектор, изменение которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = R(\xi, z). \qquad (7.34)$$

По-прежнему будем предполагать, что функция $f(z, \xi)$ периодическая по z периода 2π для любого ξ, причем

$$\bar{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z, \xi)\, dz = 0,$$

каково бы ни было ξ.

Функцию R также будем считать периодической функцией переменной z периода 2π (в частности, не зависящей от z). Будем предполагать далее, что

$$\dot{z}(0) = \Omega$$

есть некоторое большое число.

Систему (7.33), (7.34) при этих условиях мы будем называть *системой с вращающимся звеном*. Такие системы часто встречаются в приложениях. Например, как мы это увидим в следующем параграфе, общая задача движения спутника, т. е. задача исследования совместного движения центра инерции спутника и его движения относительно центра инерции во многих случаях сводится именно к исследованию системы с вращающимся звеном (или с вращающимися звеньями).

После замены

$$t = \varepsilon s, \quad \varepsilon = \frac{1}{\Omega}, \quad \dot{z} = \Omega + x$$

мы приведем систему (7.33), (7.34) к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \varepsilon R(\xi, z), \\ x' &= -\varepsilon f(\xi, z), \\ z' &= 1 + \varepsilon x, \end{aligned}\right\} \tag{7.35}$$

где $'$ — штрих означает дифференцирование по новому независимому переменному s.

Для системы (7.35) рассмотрим задачу Коши с начальными данными

$$\xi(0) = \alpha, \qquad x(0) = 0, \qquad z(0) = 0. \tag{7.36}$$

Эта задача может быть изучена стандартным методом. Быстрая переменная z при этом исключается, и мы приходим к системе уравнений, порядок которой равен $n+1$. Однако в этом случае результат уже не может быть представлен в столь компактной форме, какую нам удалось получить в задаче о вращательном движении маятника.

7. Маятник с переменной возвращающей силой. Частным случаем систем с вращающимся звеном является маятник, движение которого имеет вид

$$\ddot{z} + f(z, t) = 0 \tag{7.37}$$

при условии, что его начальная энергия велика. Эта задача сводится к системе типа (7.33), (7.34) заменой

$$t = \xi, \qquad \xi = 1.$$

Тогда система уравнений типа (7.35), соответствующая этому уравнению, будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= \varepsilon, \\ x' &= -\varepsilon f(z, \xi), \\ z' &= 1 + \varepsilon x. \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

Повторяя дословно все те рассуждения, которые были приведены в начале параграфа, мы легко получим для этого случая формулы типа (7.15), (7.17)—(7.19), (7.20), (7.22) и (7.23). Возвращаясь затем к старым переменным, найдем

$$z(t) = \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}(t_0)\right)t + \frac{1}{\Omega^2}\left\{\overline{\Psi}(t)\,t\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}(t_0)\right) - \right.$$
$$\left. - \Phi\left[t, \left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\Psi(t_0)\right)t\right]\right\}$$

или, вводя новое обозначение для произвольной постоянной

$$\lambda = \Omega - \frac{1}{\Omega}\overline{\Psi}(t_0),$$

получим окончательно для величины отклонения маятника следующую асимптотическую формулу:

$$z(t) = \lambda t + \frac{1}{\lambda^2}\{\overline{\Psi}(t)\lambda t - \Phi(t, \lambda t)\}. \tag{7.39}$$

Заметим, что асимптотическая формула (7.39) была получена без каких-либо предположений о скорости изменения параметров маятника (7.36). Это обстоятельство является отличительной особенностью задач асимптотики больших энергий. В этих задачах усреднение производится по периоду вращательного движения, который мал, и, следовательно, параметры системы за время одного оборота не успевают получить значительных приращений, даже если их производные и не являются малыми в «реальном масштабе времени».

В качестве примера рассмотрим вращательные движения математического маятника в поле переменной гравитации. Его уравнение можно записать как

$$\ddot{z} + g(t)\sin z = 0. \tag{7.29'}$$

Применяя формулу (7.39), мы получим следующий аналог формулы (7.30):

$$z = \lambda t + \frac{g(t)}{\lambda^2}\sin\lambda t. \tag{7.30'}$$

Примечание. Решение уравнения (7.29) мы могли получить в эллиптических функциях, и формулу (7.30) можно было вывести и из точного решения, не прибегая к асимптотической теории. Уравнение (7.29′) уже не интегрируется в элементарных функциях.

Колебательные движения, изученные в предыдущих параграфах, — это некоторый класс движения в окрестности положения равновесия. Движения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, — это класс движений, близких к равномерному вращению и имеющих также колебательный характер. Поэтому и здесь уместно ввести понятие амплитуды — максимального отклонения от равномерного вращения. В данном случае, как это следует из формулы (7.30′), амплитуду $a(t)$ можно определить формулой

$$a = \frac{1}{\lambda^2} g(t).$$

Из этого выражения видно, что амплитуда при вращательном движении растет с увеличением напряженности гравитационного поля. Напомним, что в случае колебательных движений ампли-

туда с увеличением интенсивности гравитационного поля уменьшалась по закону

$$a=\frac{a_0}{\sqrt[4]{g(t)}}.$$

Сопоставление этих двух формул указывает на существование качественных различий в характере колебательных движений в окрестности положения равновесия и равномерного вращения.

8. Теория возмущений. Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{z}+f(z,\ \tau)=\mu\varphi(z,\ \dot{z},\ t),\qquad \tau=\mu t+\tau_0 \tag{7.40}$$

и будем предполагать, что энергия этой системы достаточно велика. Таким образом, предполагается, что при $\mu=0$ движение маятника (7.40) вращательное.

Параметры Ω, характеризующий энергию системы, и μ, характеризующий возмущающие воздействия, считаются независимыми; поэтому для исследования уравнения (7.39) можно построить теорию, аналогичную той, которая была развита в § 2 этой главы, опираясь на асимптотические решения порождающего уравнения (7.1)

$$\ddot{z}+f(z,\ \tau_0)=0.$$

Будем считать, что решение порождающего уравнения (7.1) имеет вид

$$z=Q(x,\ y,\ \tau),$$

где

$$Q=y+Z(x,\ y,\ \tau), \tag{7.41}$$

здесь x — произвольная постоянная, а

$$y=\omega(x,\ \tau)(t+t_0),$$

$\omega(x,\ \tau)$ — нормирующий множитель, выбранный так, чтобы функция Z была периодической функцией переменного y периода 2π. Сопоставляя выражение (7.41) с асимптотическим представлением (7.28), мы получим

$$\left.\begin{aligned}&\omega=\lambda,\quad x=\frac{1}{\lambda^2},\quad \omega=\frac{1}{\sqrt{x}},\\&Z(x,\ y,\ \tau)=\overline{\Psi}(\tau)\,y-\overline{\Phi}(y,\ \tau)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)=Z(y,\ \tau)+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).\end{aligned}\right\} \tag{7.42}$$

Таким образом, с точностью до $O(1/\lambda^3)$ функция Z не зависит от x. Определим еще $\dot{Z}$:

$$\dot{Z}=\omega Z_y, \tag{7.43}$$

или, используя формулы (7.42),

$$\dot{Z} = \frac{1}{\sqrt{x}} Z_y. \tag{7.44}$$

Используя замену переменных, определенную формулами (7.41) и (7.44), составим уравнения относительно новых переменных x и y (см. § 3 этой главы):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\mu}{\Delta}\{\varphi Q_y + \xi_1\} = \mu X(x, y, \tau), \\ \dot{y} &= \omega + \frac{\mu}{\Delta}\{\varphi Q_x + \xi_1\} = \mu Y(x, y, \tau), \end{aligned}\right\} \tag{7.45}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= -\omega_\tau Q_y^2 + (Q_\tau Q_{yy} - Q_{y\tau} Q_y)\,\omega, \\ \xi_2 &= -\omega_\tau Q_y Q_x + \omega_x Q_y Q_\tau + \omega(Q_\tau Q_{xy} - Q_{y\tau} Q_x), \\ \Delta &= \omega(Q_x Q_{yy} - Q_{xy} Q_y) - \omega_x Q_y^2. \end{aligned}\right\} \tag{7.46}$$

Используя далее формулы (7.42), получим

$$\begin{aligned} &Q = y + xZ(y, \tau), \\ &Q_y = 1 + xZ_y, && Q_y^2 = 1 + 2xZ_y + x^2 Z_y^2, \\ &Q_{yy} = xZ_{yy}, && Q_{xy} = Z_y, \quad \omega_\tau = 0, \\ &Q_\tau = xZ_\tau, && Q_{y\tau} = xZ_{y\tau}, \end{aligned}$$

и, следовательно, выражения (7.46) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \sqrt{x}\left(ZZ_y - \frac{1}{2}Z_y^2\right) = \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{\omega}\left(ZZ_y - \frac{1}{2}Z_y^2\right), \\ \xi_1 &= \sqrt{x}\,[-Z_{y\tau} + x(Z_\tau Z_{yy} - Z_{y\tau} Z_y)], \\ \xi_2 &= -\frac{Z_\tau}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\left(\frac{Z_y Z_\tau}{2} - ZZ_{y\tau}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

Из формул (7.47) следует, что

$$\left.\begin{aligned} &\Delta = \frac{1}{2}\omega^3 + O\left(\frac{1}{\omega}\right) \\ \text{или} \\ &\Delta = \frac{1}{2\sqrt{x}} + O(\sqrt{x}). \end{aligned}\right\} \tag{7.48}$$

9. Уравнение Ван-дер-Поля. В этой книге мы не раз обращались к уравнению Ван-дер-Поля

$$\ddot{z} + z = \mu(1 - bz^2)\dot{z}. \tag{7.49}$$

Используем его в качестве примера для иллюстрации излагаемых методов. Напомним некоторые результаты, относящиеся к уравнению (7.49).

Если разыскивать решение этого уравнения в виде

$$z=\cos y,$$

то первое из укороченных уравнений будет иметь вид

$$\dot{x}=\frac{\mu x}{2}\left(1-\frac{bx^2}{4}\right), \tag{7.50}$$

откуда сразу следует, что существуют две стационарные амплитуды

$$x_1=0, \quad x_2=\frac{2}{\sqrt{b}}. \tag{7.51}$$

Для проверки устойчивости стационарных решений (7.51) нам достаточно определить знак производной правой части уравнения (7.50)

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x\left(1-\frac{bx^2}{4}\right)\right]\right)_{x=0}=1>0,$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left[x\left(1-\frac{bx^2}{4}\right)\right]\right)_{x=2/\sqrt{b}}=-\frac{1}{2}<0.$$

Из этих неравенств следует, что стационарное решение x_1 неустойчиво, а x_2 устойчиво.

Уравнение (7.49) — это квазилинейное уравнение. Его аналогом для произвольных отклонений z естественно считать уравнение

$$\ddot{z}+\sin z=\mu(1-b\sin^2 z)\dot{z}. \tag{7.52}$$

Порождающее уравнение, которое получается при $\mu=0$, нами уже изучено. Его общее решение можно представить в виде

$$z=y+xZ(x,\ y), \tag{7.53}$$

где $y=\omega t$, $\omega=\frac{1}{\sqrt{x}}$, Z — периодическая функция переменной y периода 2π. Величину x — отклонение от равномерного вращения — будем называть амплитудой.

Решение (7.53) допускает, как мы знаем, асимптотическое представление

$$z(x,\ y)=\sin y+O\left(\frac{1}{\omega^3}\right).$$

Величины x и y будем рассматривать как новые переменные и, применяя методику предыдущего пункта, получим

$$z = Q(x, y) = y + x \sin y,$$

$$\dot{z} = \omega Q_y = \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + x\cos y), \qquad \Delta = \frac{1}{2x^{3/2}}.$$

Выпишем первое из уравнений системы (7.45)

$$\dot{x} = -\frac{\mu}{\Delta}\varphi Q_y = -2\mu x\{1 - b\sin^2(y + x\sin y)\}\{1 + x\cos y\}^2. \qquad (7.54)$$

Правая часть уравнения (7.54) — периодическая функция переменной y периода 2π. Прежде чем проводить осреднение по этой переменной, представим правую часть уравнения (7.54) в виде ряда, расположенного по степеням x:

$$\dot{x} = -2\mu x\{1 - b\sin^2 y + x(2\cos y - 4b\cos y\sin^2 y) +$$
$$+ x^2(\cos^2 y + b\sin^3 y\cos y - 6b\sin^2 y\cos^2 y) + x^3(\ldots) + \ldots\}.$$

Усредняя правую часть этого уравнения, имеем

$$\dot{x} = -2\mu x\left\{1 - \frac{b}{2} + x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}b\right) + x^4(\ldots) + \ldots\right\}.$$

Удержим в фигурных скобках только величины нулевой и второй степени относительно амплитуды x

$$\dot{x} = -2\mu x\left\{1 - \frac{b}{2} + x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)b\right\} \qquad (7.55)$$

и в этой приближенной постановке найдем стационарные амплитуды

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \sqrt{2\,\frac{2-b}{3b-2}}. \qquad (7.56)$$

Так как при выводе уравнения (7.55) мы приняли предположение о малости амплитуды, то формула (7.56) имеет смысл только для значений коэффициента b, близких к двум (но $b<2$). Для исследования устойчивости вычислим

$$\frac{d}{dx}\left(-x\left\{1 - \frac{b}{2} + x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}b\right)\right\}\right) = -\left(1 - \frac{b}{2}\right) - 3x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}b\right).$$

Отсюда следует, что решение x_1 устойчиво, а решение x_2 неустойчиво.

10. Особенности резонансных явлений в системах с вращающимися звеньями. Задачи исследования резонансных явлений в системах с вращающимися звеньями имеют целый ряд особен-

ностей. Продемонстрируем этот факт на одном простом примере.

Рассмотрим частный случай уравнений (7.39)

$$\ddot{z}+f(z)=\varphi(\dot{z},\ t), \tag{7.57}$$

где

$$\varphi(\dot{z},\ t)=\psi(\sigma t)-2\nu\dot{z},$$

здесь ν — некоторая положительная постоянная, а число σ подобрано так, что функция $\psi(\sigma t)$ является периодической функцией периода 2π по переменному σt. Предположим, кроме того, что средние значения периодических функций ψ и Z равны нулю

$$\bar{\psi}=0, \qquad \bar{Z}=0.$$

Ограничимся рассмотрением случая главного резонанса и воспользуемся общей методикой § 5 этой главы. Для этого сделаем прежде всего замену

$$z=Q(x,\ y)=y+xZ(y), \quad \dot{z}=\omega Q_y=\frac{1}{\sqrt{x}}(1+xZ_y)$$

и заменим уравнение (7.57) следующей системой (см. уравнения (7.45)):

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}&=-\frac{\mu}{\Delta}\varphi Q_y=-2\mu x^{3/2}\left\{\psi(\xi)-\frac{2\nu}{\sqrt{x}}(1+xZ_y)\right\}(1+xZ_y),\\
\dot{y}&=\omega+\frac{\mu}{\Delta}\varphi Q_x=x^{-1/2}+2\mu x^{3/2}\left\{\psi(\xi)-\frac{2\nu}{\sqrt{x}}(1+xZ_y)\right\}Z,\\
\dot{\xi}&=\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{7.58}$$

Мы условились рассматривать случай главного резонанса. Это значит, что амплитуда x изменяется в окрестности значения x^0, являющегося корнем уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{x^0}}=\sigma. \tag{7.59}$$

При этом предположении преобразуем систему уравнений (7.58), сделав стандартную замену переменных

$$y=\xi+\theta. \tag{7.60}$$

После замены (7.60) правые части системы (7.59) окажутся периодическими функциями переменной ξ периода 2π. Далее проведем усреднение по быстрой переменной ξ, в результате

получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\dot{x} = -2\mu x^{3/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{x}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\xi)\,Z_y(\xi+\theta)\,d\xi - \right.$$

$$\left. -\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2xZ_y(\xi+\theta)+x^2Z_y^2(\xi+\theta)\right)d\xi\right\}, \quad (7.61)$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sigma + 2\mu x^{3/2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\xi)\,Z(\xi+\theta)\,d\xi - \right.$$

$$\left. -\frac{2\nu}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Z(\xi+\theta)+xZ_y(\xi+\theta)\,Z(\xi+\theta)\right)d\xi\right\}.$$

Систему (7.61) можно значительно упростить. Так как в рассматриваемой теории предполагается, что $x - x^0 = O(\mu)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \sigma = -\frac{x-x^0}{2\sqrt{x^{0\,3}}} + O(\mu^2).$$

Поскольку мы изучаем уравнения первого приближения, то слагаемое порядка $O(\mu^2)$ можно отбросить. На этом же основании в правых частях системы (7.61) мы можем заменить x на x^0. Далее мы будем пренебрегать величинами x^2 по сравнению с единицей.

Заметим, кроме того, что:

1) по условию

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\xi)\,d\xi = 0;$$

2) в силу того, что функция $Z(y)$ периодическая, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_y(\xi+\theta)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\{Z(2\pi+\theta) - Z(\theta)\} = 0;$$

3) на том же основании

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_y(\xi+\theta)\,Z(\xi+\theta)\,d\xi = 0;$$

4) по условию и в силу периодичности $Z(y)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Z(\xi+\theta)\,d\xi=0.$$

Введем еще следующие обозначения:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\xi)\,Z_y(\xi+\theta)\,d\xi=F_1(\theta),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\xi)\,Z(\xi+\theta)\,d\xi=F_2(\theta).$$

Используя эти замечания и введенные обозначения, перепишем систему (7.61) в форме

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=-2\mu\sqrt{x^{0^3}}\left\{x^0F_1(\theta)-\frac{2\nu}{\sqrt{x^0}}\right\},\\ \dot{\theta}&=-\frac{x-x^0}{2\sqrt{x^{0^3}}}+2\mu\sqrt{x^{0^3}}F_2(\theta).\end{aligned}\right\}\qquad(7.62)$$

Возможные стационарные режимы резонансных «колебаний» x^* и θ^* определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}F_1(\theta^*)&=\frac{2\nu}{\sqrt{x^{0^3}}},\\ x^*&=x^0+4\mu x^{0^3}F_2(\theta^*),\end{aligned}\right\}\qquad(7.63)$$

которая получается из (7.62) при $\dot{x}=\dot{\theta}=0$.

Первое из уравнений (7.63), определяющее сдвиг фаз при резонансе, является нелинейным уравнением и может иметь сколько угодно корней (в том числе и ни одного). Определив θ^*, находим резонансную амплитуду x^* однозначно.

В качестве примера рассмотрим уравнение (7.57), в котором

$$f(z)=\sin Z,\qquad \psi(\sigma t)=\sin\sigma t.$$

Тогда

$$Z=\sin y,\qquad Z_y=\cos y,$$

$$F_1(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\xi\cos(\xi+\theta)\,d\xi=-\frac{1}{2}\sin\theta,$$

$$F_2(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\xi\sin(\xi+\theta)\,d\xi=\frac{1}{2}\cos\theta.$$

Величина x^0 определяется равенством

$$x^0 = \frac{1}{\sigma^2}.$$

Соотношения, описывающие стационарное решение в данном случае, мы можем представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta^* &= -\frac{4\nu}{\sqrt{x^{0\,3}}} = -4\nu\sigma^3, \\ \cos\theta^* &= \frac{x^* - x^0}{2\mu x^{0\,3}} = \frac{\sigma^6}{2\mu}\left(x^* - \frac{1}{\sigma^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.64}$$

Первое из уравнений (7.64) нам показывает, что существуют только два резонансных режима θ_1^* и θ_2^*. Эти величины лежат во втором и четвертом квадрантах, т. е. $\cos\theta_1^*$ и $\cos\theta_2^*$ имеют разные знаки. Следовательно, одна из резонансных амплитуд больше чем x^0, а вторая меньше.

Рассмотрим теперь устойчивость стационарных решений x^* и θ^*, которые определяются формулами (7.63). Для этого мы должны составить систему уравнений в вариациях для системы (7.62).

Положим

$$x = x^* + \delta x, \qquad \theta = \theta^* + \delta\theta.$$

Подставляя эти величины в (7.62) и линеаризуя относительно вариаций δx и $\delta\theta$, получаем

$$\delta\dot{x} = -2\mu\sqrt{x^{0\,5}}\,\frac{dF_1(\theta^*)}{d\theta}\,\delta\theta,$$

$$\delta\dot{\theta} = -\frac{\delta x}{2\sqrt{x^{0\,3}}} + 2\mu\sqrt{x^{0\,3}}\,\frac{dF_2(\theta^*)}{d\theta}\,\delta\theta.$$

Составим характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2\mu\sqrt{x^{0\,5}}\,\dfrac{dF_1(\theta^*)}{d\theta} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x^{0\,3}}} & \lambda - 2\mu\sqrt{x^{0\,3}}\,\dfrac{dF_2(\theta^*)}{d\theta} \end{vmatrix} = 0. \tag{7.65}$$

Вычислим производную $dF_2/d\theta$ для значений $\theta = \theta^*$, удовлетворяющих первому из уравнений (7.63):

$$\frac{dF_2}{d\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\theta}\int_0^{2\pi}\psi(\xi)\,Z(\xi+\theta^*)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\xi)\,Z_y(\xi+\theta^*)\,d\xi = F_1(\theta^*).$$

Заменяя далее $F_1(\theta^*)$ по формулам (7.63), мы приводим уравнение (7.65) к виду

$$\lambda^2 - 4\mu\nu\lambda - \mu x^0 \frac{dF_1}{d\theta} = 0. \tag{7.66}$$

Для того чтобы вычислить производную $dF_1/d\theta$, необходимо конкретизировать задачу. Например, в том частном случае, который мы рассматривали в качестве примера

$$\frac{dF_1}{d\theta} = -\frac{1}{2}\cos\theta^*,$$

и уравнение (7.66) имеет следующий вид:

$$\lambda^2 - 4\mu\nu\lambda + \frac{\mu x^0}{2}\cos\theta^* = 0. \tag{7.67}$$

Заметим, однако, что для суждения об устойчивости нет необходимости конкретизировать вид функции $dF_1/d\theta$. Каковы бы ни были величина и знак $dF_1/d\theta$, оба корня уравнения (7.66) имеют положительные действительные части, т. е. мы имеем в этом случае совершенно общий результат: стационарные резонансные режимы у вращающегося маятника при наличии трения неустойчивы.

Впервые этот результат для частного случая математического маятника, когда решение может быть получено в эллиптических функциях, был установлен Ф. Л. Черноусько. Использование асимптотики больших энергий показывает его универсальность.

На основании общих соображений мы можем высказать только суждение о неустойчивости. Изучение характера развития изменения амплитуды и фазы требует использования более детальной информации.

Рассмотрим снова пример вращательных движений математического маятника. Мы знаем, что эта система имеет два стационарных режима $x_1^* > x^0$ и $x_2^* < x^0$. Первому из этих режимов, согласно формулам (7.64), отвечает такое значение θ_1^*, что $\cos\theta_1^* > 0$.

Следовательно, в этом случае

$$\lambda_{1,2} = 2\mu\nu\lambda \pm \sqrt{4\mu^2\nu^2 - \frac{\mu x^0}{2}\cos\theta^*}.$$

В зависимости от соотношения величин, входящих в подкоренное выражение, неустойчивость может быть либо колебательной, либо апериодической. Если

$$4\mu^2\nu^2 < \frac{\mu x^0}{2}\cos\theta^*,$$

то $\lambda_{1,2}$ будут комплексно сопряженными и мы имеем колебательную неустойчивость. В противном случае неустойчивость будет апериодической.

Режиму x^* отвечает такое значение стационарной фазы θ_2^*, что $\cos\theta_2^* < 0$. Легко видеть, что этому случаю всегда отвечает апериодическая неустойчивость.

Итак, резонансные режимы в условиях вращательного движения маятника всегда неустойчивы, если только на маятник действует диссипативная сила ($\nu > 0$). Если $\nu = 0$, то мы имеем нейтральный случай. Оба корня характеристического уравнения чисто мнимые. Это значит, что для суждения об устойчивости мы должны рассмотреть более сложную задачу о колебании с учетом нелинейных членов. Во всяком случае, из изложенной теории следует, что диссипативные слагаемые играют дестабилизирующую роль. Это обстоятельство указывает на существование качественных различий между колебательным движением около положения равновесия и колебательным движением около равномерного вращения.

Причина этого различия очевидна. В первом случае диссипативные силы никак не влияют на сам характер невозмущенного движения (состояние покоя), а во втором случае они разрушают само невозмущенное движение.

Для того чтобы были правомерно рассмотрены аналогии между этими двумя типами движений, необходимо в случае вращательного движения приложить к маятнику некоторый постоянный момент, компенсирующий в среднем действие диссипативных сил.

11. Метод В. М. Волосова в теории вращательных движений. До сих пор все наши рассуждения основывались на предположении, что энергия велика и теория, которая была развита, — это асимптотическая теория больших энергий. Ее выводы тем точнее, чем больше угловая скорость вращательного движения. Поэтому излагаемую здесь теорию можно еще назвать асимптотикой быстрых вращений.

Теперь представим себе, что речь идет об исследовании вращательных движений, у которых угловая скорость вращения еще не настолько велика, чтобы можно было использовать асимптотическую теорию быстрых вращений. В этом случае можно воспользоваться методом В. М. Волосова и найти приближенное выражение интегралов невозмущенного движения. В § 2 этой главы мы уже изложили подход В. М. Волосова для изучения существенно нелинейных колебательных движений. Этот подход может быть с успехом применен и для исследования вращательных движений. Более того, в теории вращательных движений реализация этой схемы даже проще, чем в случае колебатель-

ных движений. Повторим рассуждения п. 4 § 2 этой главы с учетом тех особенностей, которые связаны с вращательным характером изучаемых движений.

Итак, рассмотрим снова уравнение

$$\ddot{z}+f(z)=\varepsilon\varphi(z\dot{z}), \tag{7.68}$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, $f(z)$ — периодическая функция периода 2π.

Так как мы рассматриваем вращательные движения, то речь идет об изучении части фазовой плоскости, заполненной неограниченными движениями (рис. 31). При $\mu=0$ уравнение (7.68) допускает следующие два интеграла:

$$\dot{z}^2+U(z)=\alpha,$$

где

$$U(z)=2\int f(z)\,dz,$$

$$\psi(z,\ \alpha)=\frac{1}{T(\alpha)}\int\frac{dz}{\sqrt{\alpha-U(z)}}=$$
$$=t+\mathrm{const}=\beta.$$

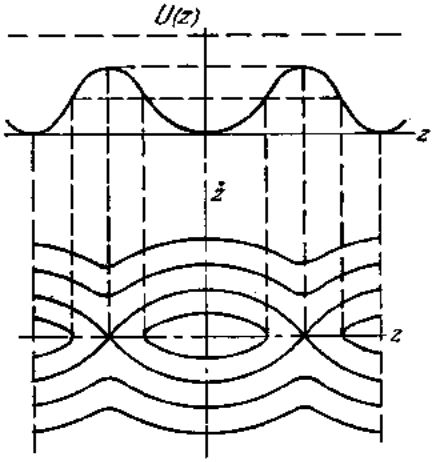

Рис. 31.

Примем в качестве новых переменных при изучении уравнения (7.68) величины α и β, и вычислим производные этих величин в силу уравнения (7.68)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}&=2\dot{z}(\ddot{z}+f(z))=2\varepsilon\varphi\left(\dot{z},\ \sqrt{\alpha-U(z)}\right)\sqrt{\alpha-U(z)}=\\&=2\varepsilon\varphi^*(z,\ \alpha)\sqrt{\alpha-U(z)},\\\dot{\beta}&=\frac{\partial\psi}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\dot{\alpha}=\frac{1}{T(\alpha)}+2\varepsilon\varphi^*(z,\ \alpha)\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\sqrt{\alpha-U(z)}\,.\end{aligned}\right\} \tag{7.69}$$

Правые части системы (7.69) являются периодическими функциями t периода $T(\alpha)$, а следовательно, и переменной β. Поэтому для того, чтобы получить уравнения первого приближения, достаточно осреднить правые части системы (7.69) по переменной β

$$\left.\begin{aligned}\dot{\alpha}&=\frac{2\varepsilon}{T(\alpha)}\int_0^T\varphi^*(z,\ \alpha)\sqrt{\alpha-U(z)}\,d\beta,\\\dot{\beta}&=\frac{1}{T(\alpha)}+\frac{2\varepsilon}{T(\alpha)}\int_0^T\varphi^*(z,\ \alpha)\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\sqrt{\alpha-U(z)}\,d\beta.\end{aligned}\right\} \tag{7.70}$$

Но дифференциалы dz и $d\beta$ связаны соотношением

$$dz = \pm \sqrt{\alpha - U(z)}\, d\beta, \tag{7.71}$$

где плюс соответствует движению в верхней полуплоскости, минус — движению в нижней полуплоскости.

Производя в уравнениях (7.70) замену (7.71), получим

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \pm \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int\limits_{\underline{z}}^{\bar{z}} \varphi^*(z, \alpha)\, dz, \\ \beta &= \frac{1}{T(\alpha)} \pm \frac{2\varepsilon}{T(\alpha)} \int\limits_{\underline{z}}^{\bar{z}} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \varphi^*(z, \alpha)\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{7.72}$$

Интегрирование в этих выражениях производится вдоль фазовой траектории, ордината которой в случае вращения является периодической функцией переменной z периода 2π. Поэтому в качестве $\underline{z}$ можно взять $z=0$, тогда $\bar{z}=2\pi$.

Вычисление периода $T(\alpha)$ также сводится к квадратуре

$$T(\alpha) = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dz}{\sqrt{\alpha - U(z)}}. \tag{7.73}$$

Для величины $\dot{\alpha}$ и β можно получить и другие приближенные формулы, опираясь на уравнения (7.69).

Так как правые части этих уравнений являются в случае вращательных движений периодическими функциями z периода 2π, то, усредняя по z, мы получим аналог формул (7.72)

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(z, \alpha) \sqrt{\alpha - U(z)}\, dz, \\ \beta &= \frac{1}{T(\alpha)} + \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(z, \alpha) \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \sqrt{\alpha - U(z)}\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

Помимо $\dot{\alpha}$ и β, можно вычислить еще целый ряд важных характеристик. Например, представляет интерес знать изменения максимальной величины $\dot{z} = \dot{z}(0)$. Так как

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \varepsilon\varphi - f(z)$$

и, по предположению, $\bar{f}=0$, то, осредняя по z, получаем следующую явную формулу:

$$\frac{d\dot{z}}{dt}=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi^*(z,\ \alpha)\,dz. \tag{7.75}$$

12. Заключение. Итак, мы видим, что изучение вращательных движений может, несмотря на их существенно нелинейный характер, быть проведено стандартными методами нелинейной механики. В некотором отношении изучение вращательных движений даже легче, чем колебательных.

Изучение вращательных движений в последние годы значительно продвинулось: рассмотрен целый ряд прикладных задач и, в частности, значительно усовершенствована методика их решения. Продвинут вперед и целый ряд теоретических вопросов, что касается прежде всего теории резонансных решений. Из числа авторов, внесших существенный вклад в эту область, следует прежде всего упомянуть В. М. Волосова, Б. И. Моргунова и Ф. Л. Черноусько.

§ 8. Приложения к задачам динамики орбитальных аппаратов

1. Предварительные замечания. Асимптотическая теория разделений движения выросла из теории колебаний, которая долгое время была единственным поставщиком материала для ее формирования. Однако в последние годы методы излагаемой теории проникли в самые разнообразные области физики и механики. Настоящий параграф имеет своей целью проиллюстрировать ее возможности в такой новой области механики, какой является динамика космических орбитальных аппаратов. Задачи, которые здесь возникают, по существу являются многомерными. Поэтому они очень трудны для какого-либо качественного анализа. В динамике космических аппаратов мы практически не имеем аналитических решений. Даже в случае кеплеровского движения в поле одного притягивающего центра связь координат и времени сводится к громоздкой квадратуре. Поэтому в динамике космических аппаратов особую роль играют численные методы.

Одна из важных задач, которую в теории колебаний решал метод разделения движений, — это дать такое приближенное описание колебательного процесса, которое обеспечивало бы наглядное представление о его природе. Поскольку в динамике космических аппаратов подобные задачи не играют существенной роли, то методы разделения движения здесь в первую

очередь используются для построения рациональных вычислительных схем.

В данном параграфе рассматривается ряд простейших плоских задач динамики, выбор которых определяется исключительно методическими соображениями. Задачи, с которыми приходится сталкиваться инженеру при расчете и проектировании орбит, значительно сложнее рассмотренных здесь. Автор следовал в основном своему докладу на XIV Международном конгрессе по астронавтике в г. Варна в 1962 г., целью которого было проиллюстрировать возможности метода усреднения для построения эффективных вычислительных схем как в проблеме расчета орбит вне атмосферы, так и при исследовании атмосферного участка траектории *). В последние годы были получены новые и важные результаты в этой области. В числе авторов, внесших вклад в эту область, в первую очередь следует назвать имена Ю. М. Евтушенко, Г. Е. Кузмака, Ф. Л. Черноусько.

Возможности и перспективы асимптотических методов в этой теории основываются на следующем обстоятельстве. Существует большое число задач динамики космических аппаратов, в которых имеется по меньшей мере два различных характерных масштаба времени. Например, действие возмущающих сил внешних планет мало, и результат их действия становится заметным только по прошествии значительного отрезка времени, в течение которого спутник совершит много витков по своей орбите. Таким образом, в течение одного витка параметры орбиты изменяются очень незначительно. Другой пример: вследствие случайных импульсных моментов, действующих на аппарат в момент его отделения от последней ступени, движение нестабилизированного аппарата носит вращательный характер. Может оказаться, что период этого вращательного движения во много десятков раз меньше времени полного обхода орбиты. Число таких примеров можно значительно увеличить.

Существование нескольких характерных масштабов времен позволяет развить соответствующие асимптотические теории и, следовательно, во многих случаях получить полезную информацию о природе движения. Кроме того, и это еще более важно, с помощью асимптотических методов удается построить экономные и более точные схемы численного расчета.

2. Возмущения кеплеровских орбит. Рассмотрим плоское движение материальной точки в гравитационном поле Земли. Если ее движение происходит вне атмосферы, то основной силой, дей-

---

*) Н. Н. Моисеев, Methods non-linear mechanics in the problems of the dynamics of setellites. Trans of XIV-th Astronautical congress, 1962.

ствующей на точку, будет сила притяжения Земли. Поэтому движение рассматриваемой точки будет описываться уравнением

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \varepsilon\boldsymbol{f}, \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, μ — гравитационная постоянная, $\varepsilon\boldsymbol{f}$ — вектор возмущающих сил, ε — малый параметр (обозначения даны на рис. 32). Первое слагаемое, стоящее в правой части уравнения (8.1), — это напряженность гравитационного поля одного притягивающего центра. В действительности, силы притяжения Земли несколько отличаются от этой величины, поскольку Земля не представляет собой точечную массу. Разность вектора напряженности реального поля Земли и величины $(\mu/r^3)\boldsymbol{r}$ является одной из составляющих вектора $\varepsilon\boldsymbol{f}$. Кроме того, к числу составляющих этого вектора мы отнесем притяжение Луны и планет, сопротивление атмосферы и т. д. Может оказаться также, что аппарат (который мы схематизируем как материальную точку) находится под действием тяги двигателя «малой тяги». В этом случае ускорение, которое создается этим двигателем, мы также отнесем к числу возмущающих сил.

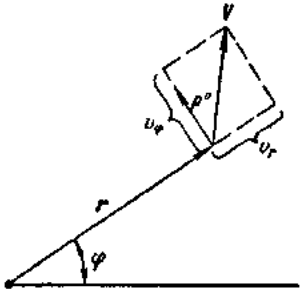

Рис. 32.

Перепишем уравнение (8.1) в проекциях на оси полярной системы координат

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_r}{dt} &= \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \varepsilon f_r, \\ \frac{dv_\varphi}{dt} &= -\frac{v_r v_\varphi}{r} + \varepsilon f_\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Здесь v_r и v_φ — проекции вектора скорости

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = v_r\boldsymbol{r}^0 + v_\varphi\boldsymbol{p}^0 \tag{8.3}$$

на направление радиуса-вектора и трансверсаль

$$v_r = \frac{dr}{dt}; \qquad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}. \tag{8.4}$$

Величина $\boldsymbol{h}$, определенная равенством

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{r},$$

носит название секториальной скорости. Используя равенства (8.3) и (8.4), легко найдем, что

$$h = r^2 \frac{d\varphi}{dt} (p^0 \times r^0).$$

Вводя обозначение

$$u = \frac{1}{r},$$

можно выражение угловой скорости $d\varphi/dt$ записать так:

$$\frac{d\varphi}{dt} = u^2 h. \tag{8.5}$$

Рассмотрим первое из уравнений (8.2). Заметим прежде всего, что, используя (8.5), его можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = u^3 h^2 - \mu u^2 + \varepsilon f_r. \tag{8.6}$$

Составим теперь уравнение, которому удовлетворяет функция $u(\varphi)$. Для этого проделаем следующие вычисления:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} u^2 h = u^2 h \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{u}\right) = -h \frac{du}{d\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{d}{d\varphi}\left(h \frac{du}{d\varphi}\right) u^2 h = -u^2 h \left\{\frac{dh}{d\varphi}\frac{du}{d\varphi} + h \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\right\}.$$

Используя эти вспомогательные выражения и уравнение (8.6), получим

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{1}{h}\frac{du}{d\varphi}\frac{dh}{d\varphi} + u = \frac{\mu}{h^2} - \frac{\varepsilon f_r}{u^2 h^2}. \tag{8.7}$$

Составим далее уравнение, которому удовлетворяет величина h; так как

$$v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt} = uh, \qquad v_r = \frac{dr}{dt} = -h\frac{du}{d\varphi},$$

то второе из уравнений системы (8.2) мы можем переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(uh) = u^2 h^2 \frac{du}{d\varphi} + \varepsilon f_\varphi.$$

Переходя к переменному φ, найдем

$$\frac{d}{dt}(uh) = \left[\frac{du}{d\varphi} h + \frac{dh}{d\varphi} u\right] u^2 h.$$

Из этих двух выражений получим искомое уравнение

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\varepsilon f_\varphi}{u^3 h}. \tag{8.8}$$

Используя в свою очередь уравнение (8.8), мы можем исключить из уравнения (8.7) производную $dh/d\varphi$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{\mu}{h^2}-\varepsilon\left\{\frac{f_r}{u^2h^2}+\frac{du}{d\varphi}\frac{f_\varphi}{u^3h^2}\right\}. \tag{8.9}$$

Уравнения (8.8) и (8.9) образуют замкнутую систему уравнений относительно u и h. В результате ее интегрирования мы получаем элементы орбиты как функции полярного угла φ. Для того чтобы перейти к аргументу t, необходимо еще вычислить квадратуру

$$t=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{u^2h}. \tag{8.10}$$

При $\varepsilon=0$ система уравнений (8.8), (8.9) имеет точное решение

$$\begin{gathered} u(\varphi)=\frac{\mu}{h^2}+x\cos\varphi,\\ h=\mathrm{const}=h_0, \end{gathered} \tag{8.11}$$

где x и h_0 — некоторые постоянные.

Следуя общей схеме метода усреднений, решение системы (8.8), (8.9) будем искать в виде

$$u=\frac{\mu}{h^2}+x\cos y,\qquad \frac{du}{d\varphi}=-x\sin y, \tag{8.12}$$

где x и y — неизвестные функции угла φ. Из (8.12) находим

$$x=\sqrt{\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2}, \tag{8.13}$$

$$y=-\operatorname{arctg}\frac{du}{d\varphi}\frac{1}{u-\frac{\mu}{h^2}}. \tag{8.14}$$

Дифференцируя (8.13), в силу уравнений (8.8) и (8.9) получим

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{x}\left[-x\cos y\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{h^2}\right)-\frac{du}{d\varphi}\varepsilon\left(\frac{f_r}{u^2h^2}+\frac{du}{d\varphi}\frac{f_\varphi}{u^3h^2}\right)\right]=$$

$$=\varepsilon\left\{\frac{2\mu f_\varphi\cos y}{\left(\frac{\mu}{h^2}+x\cos y\right)^3h^4}+\sin y\left[\frac{f_r}{\left(\frac{\mu}{h^2}+x\cos y\right)^2h^2}-\frac{x\sin y\,f_\varphi}{\left(\frac{\mu}{h^2}+x\cos y\right)^3h^3}\right]\right\}$$

и окончательно

$$\frac{dx}{d\varphi}=\varepsilon\left\{\frac{2\mu f_\varphi h^2\cos y}{(\mu+xh^2\cos y)^3}+\frac{f_rh^2\sin y}{(\mu+xh^2\cos y)^2}-\frac{xf_\varphi h^4\sin^2\varphi}{(\mu+xh^2\cos y)^3}\right\}\equiv$$

$$\equiv\varepsilon F_1(x,\ h,\ y,\ \varphi). \tag{8.15}$$

Продифференцируем теперь равенство (8.14)

$$\frac{dy}{d\varphi}=-\frac{\frac{d^2u}{d\varphi^2}\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)-\frac{du}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}-\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\mu}{h^2}\right)\right)}{\left[1+\left(\frac{du}{d\varphi}\frac{1}{u-\frac{\mu}{h^2}}\right)^2\right]\left(u-\frac{\mu}{h^2}\right)^2},$$

откуда после замены (9.12) получим

$$\frac{dy}{d\varphi}=-\frac{1}{x^2}\left\{x\cos y\left(-x\cos y-\varepsilon\left[\frac{f_r}{\left(\frac{\mu}{h^2}+x\cos y\right)^2h^2}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{x\sin y f_\varphi}{\left(\frac{\mu}{h^2}+x\cos y\right)^3h^2}\right]\right)+x\sin y\left(-x\sin y-\frac{2\mu\varepsilon f_\varphi}{h^4\left(\frac{\mu}{h^2}+x\cos y\right)^3}\right)\right\}$$

или окончательно

$$\frac{dy}{d\varphi}=1+\varepsilon\left\{\frac{f_rh^2\cos y}{x(\mu+xh^2\cos y)^2}-\frac{f_\varphi h^4\sin 2\varphi}{2(\mu+xh^2\cos y)^3}+\frac{2\mu f_\varphi h^2\sin y}{x(\mu+xh^2\cos y)^3}\right\}\equiv$$
$$\equiv 1+\varepsilon F_3(x,\ h,\ y,\ \varphi). \qquad (8.16)$$

Система уравнений (8.8), (8.15) и (8.16) может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi}&=\varepsilon F_1(x,\ h,\ y,\ \varphi),\\ \frac{dh}{d\varphi}&=\varepsilon F_2(x,\ h,\ y,\ \varphi),\\ \frac{dy}{d\varphi}&=1+\varepsilon F_3(x,\ h,\ y,\ \varphi),\end{aligned}\right\} \qquad (8.17)$$

где

$$F_3=\frac{f_\varphi h^5}{(\mu+xh^2\cos y)^2}.$$

Если функции f_φ, f_r являются периодическими функциями полярного угла φ, то система уравнений (8.17) относится к типу уравнений, изучаемому в этой главе. Она содержит две медленные переменные x и h и две быстрые y и φ, поэтому для ее исследования могут быть использованы изложенные выше методы анализа. При изучении этой системы может встретиться вся гамма случаев, изученных в этой главе. В системе (8.17) могут возникать резонансные ситуации.

В том случае, когда возмущающие силы не зависят от полярного угла φ, система (8.17) — это система с одной вращаю-

щейся фазой. Укороченные уравнения Ван-дер-Поля можно записать для нее в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} &= \varepsilon \bar{F}_1(x, h), \\ \frac{dy}{d\varphi} &= 1 + \varepsilon \bar{F}_3(x, h), \\ \frac{dh}{d\varphi} &= \varepsilon \bar{F}_2(x, h). \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Переход от системы (8.17) к системе (8.18) связан с операцией усреднений по быстрой переменной y. Заметим, что $\bar{F}_i$ в общем случае, когда f_i зависит от x, h и y, — это некоторые довольно сложные квадратуры. Таким образом, переход от системы (8.17) к (8.18) приводит к отделению медленных переменных, что позволяет при той же точности проводить интегрирование с большим шагом и, следовательно, уменьшить число шагов численного интегрирования. В то же время на каждый шаг численного интегрирования в системе (8.18) затрачивается значительно большее число машинных операций, поскольку он требует на каждом шаге вычисления квадратур. Отсюда следует, что вопрос о целесообразности перехода от одной системы к другой в каждом отдельном случае должен быть предметом специального исследования.

Примечание. Метод численного интегрирования, по идее близкий к изложенному, но не использующий непосредственно приемов теории усреднений движения, был разработан еще в 1960 г. Г. П. Таратыновой *). Метод осреднений в его стандартном виде в траекторных задачах теории искусственных спутников Земли, по-видимому, впервые был применен Лассом и Лореллом **).

Рассмотрим снова систему (8.17) и предположим, что требования точности определяют величину шага по фазовым переменным. Пусть шаг $\Delta x \sim \delta$, $\Delta y \sim \delta$, $\Delta h \sim \delta$. Тогда шаг по времени Δt, если принять простейшую разностную схему, определится из равенства

$$\Delta t_1 = \min\left\{ \frac{\Delta x}{\varepsilon \max|F_1(x, y, h)|}; \quad \frac{\Delta h}{\varepsilon \max|F_2(x, y, h)|}; \right.$$
$$\left. \frac{\Delta y}{1 + \varepsilon \max|F_3(x, y, h)|} \right\} = \frac{\delta}{1 + \varepsilon \max|F_3|} \sim \delta,$$

*) Г. П. Таратынова, Методы численного решения уравнения в конечных разностях и их применение к расчетам орбит искусственных спутников Земли, сб. «Искусственные спутники Земли», № 4, 1960.

**) H. Lass, J. Lorell, Low acceleration takeoff from a satellite orbit, J. Amer Rocket. Soc., vol. 31, № 1 (1961).

которое справедливо для достаточно малых значений ε. Таким образом, число шагов N_1 определится так:

$$N_1 = \frac{T}{\delta},$$

где T — промежуток интегрирования.

Обозначим через k_1 число машинных операций, необходимых для реализации одного шага численного интегрирования системы (8.17). Тогда R_1 — общее число операций, необходимых для вычисления x и h, будет

$$R_1 = \frac{T}{\delta} k_1.$$

Рассмотрим теперь систему (8.18) и поставим себе ту же задачу: вычислить $x(T)$ и $h(T)$.

Теперь величина Δt_2 шага численного интегрирования будет

$$\Delta t_2 = \frac{\delta}{\varepsilon F},$$

где

$$F = \max\{\overline{F}_1(x, h), \overline{F}_2(x, h)\}.$$

Обозначая через k_2 число машинных операций, необходимых для реализации одного шага численного интегрирования системы (8.18), мы получаем такую оценку R_2 — числа операций:

$$R_2 = \frac{T}{\delta} \varepsilon F k_2.$$

Вопрос о целесообразности замены в процессе численного интегрирования системы (8.17) системой (8.18) может быть в данном случае решен сравнением чисел R_1 и R_2.

Примечания. 1. Для изучения задачи, рассмотренной в данном параграфе, мы составили уравнения для величин x и h, которые в случае $\varepsilon=0$ являются интегралами изучаемой системы уравнений. Такие величины в небесной механике носят название оскулирующих элементов. Выбранные оскулирующие элементы были очень удобны для демонстрации процедуры применения методов осреднения. Однако уравнения для этих элементов оказались довольно сложными: при усреднении возникала проблема вычисления сложных вспомогательных квадратур. Поэтому в прикладных расчетах используют обычно другие оскулирующие элементы.

2. Заметим, что если величины возмущающих сил постоянны (или не зависят от y), то квадратуры в уравнениях (8.18) вычисляются в явном виде.

3. Задача о трансверсальной тяге. Рассмотрим задачу о движении космического аппарата малой тяги, считая, что сила двигателя направлена по трансверсали, т. е. перпендикулярно радиусу-вектору космического аппарата, который считается материальной точкой. Будем считать, что движение аппарата происходит в поле одного притягивающего центра, т. е. единственной возмущающей силой является тяга двигателя. Система уравнений (8.2) будет в этих предположениях иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{dt}=v_r, \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{v_\varphi}{r}, \\ &\frac{dv_r}{dt}=\frac{v_\varphi^2}{r}-\frac{1}{r^2}, \quad \frac{dv_\varphi}{dt}=-\frac{v_r v_\varphi}{r}+\varepsilon f, \end{aligned}\right\} \tag{8.19}$$

где f теперь обозначает величину «моторного ускорения» — отношение силы тяги двигателя к массе аппарата.

В этой задаче удобнее использовать оскулирующие элементы, отличные от тех, которые были введены в предыдущем разделе, и мы получим пример иной реализации процедуры осреднения. Проведем вычисления, следуя в основном монографии В. Н. Лебедева *).

В этой задаче мы приняли $\mu=1$, что всегда можно сделать выбором соответствующих масштабов.

В системе (8.19) перейдем к аргументу φ; тогда она примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dr}{d\varphi}=\frac{v_r r}{v_\varphi}, \quad \frac{dv_r}{d\varphi}=v_\varphi-\frac{1}{rv_\varphi}, \\ &\frac{dv_\varphi}{d\varphi}=-v_r+\varepsilon\frac{rf}{v_\varphi}, \quad \frac{dt}{d\varphi}=\frac{r}{v_\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

Вместо r, v_r и v_φ введем новые зависимые переменные

$$\left.\begin{aligned} &A=\frac{r}{2-r\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)}, \\ &\alpha=rv_\varphi(v_\varphi\cos\varphi+v_r\sin\varphi)-\cos\varphi, \\ &\beta=rv_\varphi(v_\varphi\sin\varphi-v_r\cos\varphi)-\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

Введенные переменные имеют определенный физический смысл. Как показывается в курсах небесной механики, A — отношение большой полуоси оскулирующего эллипса к его начальному значению, α и β — это компоненты вектора Лапласа, весьма

*) В. Н. Лебедев, Расчет движения космического аппарата с малой тягой, Изд. ВЦ АН СССР, 1967.

просто связанные с величиной эксцентриситета, причем для эллиптического движения $\alpha^2+\beta^2<1$. Если величины A, α и β заданы, то радиус-вектор и величины скоростей легко определяются по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{(\alpha\sin\varphi-\beta\cos\varphi)^2}{A(1-\alpha^2-\beta^2)}}, \\ v_\varphi &= \sqrt{\frac{(\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi+1)^2}{A(1-\alpha^2-\beta^2)}}, \\ r &= A\,\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi+1}. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Формулы (8.22) легко выводятся из формул (8.21). Вычислим производные A, α и β в силу уравнений (8.20)

$$\frac{dA}{d\varphi}=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\left[2-r\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)\right]+r\left[\frac{dr}{d\varphi}\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)+2r\left(v_r\frac{dv_r}{d\varphi}+v_\varphi\frac{dv_\varphi}{d\varphi}\right)\right]}{\left[2-r\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{2\frac{dr}{d\varphi}+2r^2\left(v_r\frac{dv_r}{d\varphi}+v_\varphi\frac{dv_\varphi}{d\varphi}\right)}{\left[2-r\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)\right]^2}.$$

Подставляя значения производных из (8.20), получим

$$\frac{dA}{d\varphi}=\varepsilon\,\frac{2r^3f}{\left[2-r\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)\right]^2}.$$

Далее, первая из формул (8.21) может быть переписана в виде

$$2-r\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)=\frac{r}{A}.$$

Поэтому

$$\frac{dA}{d\varphi}=2\varepsilon rA^2f.$$

Заменяя, наконец, величину r по первой из формул (8.22), получим окончательно

$$\frac{dA}{d\varphi}=\varepsilon\,\frac{2f(1-\alpha^2-\beta^2)A^3}{1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi}. \tag{8.23}$$

Аналогично составляются выражения для $d\alpha/d\varphi$ и $d\beta/d\varphi$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varphi} &= \varepsilon\,\frac{f(1-\alpha^2-\beta^2)^2(2\cos\varphi+\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin\varphi\cos\varphi+\alpha)A^2}{(1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)^3}, \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= \varepsilon\,\frac{f(1-\alpha^2-\beta^2)^2(2\sin\varphi+\beta\sin^2\varphi+\alpha\sin\varphi\cos\varphi+\beta)A^2}{(1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)^3}. \end{aligned}\right\} \tag{8.23'}$$

Система (8.23), (8.23′) содержит три медленные переменные A, α и β и одну быструю φ.

Составим для этой системы уравнения первого приближения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA}{d\varphi} &= \varepsilon\,\frac{fA^3(1-\alpha^2-\beta^2)}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi},\\
\frac{d\alpha}{d\varphi} &= \varepsilon\,\frac{fA^2\ (1-\alpha^2-\beta^2)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2\cos\varphi+\alpha\cos^2\varphi+\beta\sin\varphi\cos\varphi+\alpha}{(1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)^3}\,d\varphi,\\
\frac{d\beta}{d\varphi} &= \varepsilon\,\frac{fA^2(1-\alpha^2-\beta^2)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2\sin\varphi+\beta\sin^2\varphi+\alpha\sin\varphi\cos\varphi+\beta}{(1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\beta)^3}.
\end{aligned}\right\}\tag{8.24}$$

Усреднение здесь законно, если функция f — величина постоянная или не зависит от φ. Оно остается законным также и в том случае, если f — медленно меняющаяся функция полярного угла. Дело обстоит сложнее, если величина тяги задана как медленно изменяющаяся функция времени. В этом случае мы должны еще привлечь последнее из уравнений системы (8.20). Система уравнений, полученная при таком предположении, окажется уже значительно более сложной, поскольку время t относится к числу быстрых переменных. Таким образом, окажется, что система уравнений содержит две быстрые переменные t и φ.

Рассмотрим только тот случай, когда f постоянна. Интегралы в правой части системы (8.24) относятся к числу табличных и вычисляются в явном виде. Опуская выкладки, выпишем окончательный результат:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dA}{d\varphi} &= 2\varepsilon f A^3\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2},\\
\frac{d\alpha}{d\varphi} &= -\frac{3}{2}\,\varepsilon f A^2\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\cdot\alpha,\\
\frac{d\beta}{d\varphi} &= -\frac{3}{2}\,\varepsilon f A^2\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\cdot\beta.
\end{aligned}\right\}\tag{8.25}$$

Численное интегрирование этой системы не представляет никакого труда и может быть выполнено с большим шагом по аргументу φ. Изучим некоторые свойства решений системы (8.25). Заметим прежде всего, что эта система уравнений допускает два первых интеграла. В самом деле, переходя к аргументу A, мы получим следующие два уравнения, которые не содержат возмущающей силы f:

$$\frac{d\alpha}{dA} = -\frac{3}{4}\,\frac{\alpha}{A},\qquad \frac{d\beta}{dA} = -\frac{3}{4}\,\frac{\beta}{A}.$$

Эти уравнения легко интегрируются, и мы находим два первых интеграла

$$\alpha=\alpha_0 A^{-3/4}, \qquad \beta=\beta_0 A^{-3/4}, \tag{8.26}$$

где α_0 и β_0 — начальные значения величин α и β соответственно. Используя эти формулы, мы легко сведем интегрирование системы (8.25) к интегрированию нелинейного уравнения первого порядка

$$\frac{dA}{d\varphi}=2\varepsilon f A^3\sqrt{1-\left(\alpha_0^2+\beta_0^2\right)A^{-3/2}}. \tag{8.27}$$

Если функция f постоянна или является функцией только полярного угла φ, то в уравнении (8.27) переменные разделяются и задача сводится к квадратурам.

Рассмотрим подробнее один частный случай. Предположим, что $\alpha_0=\beta_0=0$. Тогда, как это следует из (8.26), тождественно для любого φ

$$\alpha\equiv\beta\equiv 0.$$

Физическое содержание этого факта следующее. Если $\alpha=\beta=0$, то это означает, что эксцентриситет $e=0$, т. е. движение происходит по круговой орбите. Таким образом, если старт аппарата происходит с круговой орбиты, т. е. если $\alpha_0=\beta_0=0$, то и в течение всего времени движения аппарата под действием трансверсальной тяги будут происходить по круговой орбите.

Этот вывод сделан на основе исследования уравнений первого приближения. Следовательно, мы можем говорить только о том, что в течение относительно большого промежутка времени порядка $1/\varepsilon$ оскулирующая орбита аппарата будет близка к круговой.

Уравнение (8.27) в этом случае примет вид

$$\frac{dA}{d\varphi}=2\varepsilon f A^3. \tag{8.28}$$

Если f — величина постоянная, то уравнение интегрируется в явном виде

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon f\varphi}}. \tag{8.29}$$

Заметим, что при $e=0$ величина большой полуоси оскулирующей орбиты аппарата — это просто радиус-вектор аппарата. Таким образом, формула (8.29) дает закон изменения радиуса-вектора (рис. 33). При $\varphi=\varphi^*$, где

$$\varphi^*=\frac{1}{\varepsilon f},$$

радиус-вектор обращается в бесконечность. Эта формула перестает быть справедливой при $\varphi \to \varphi^*$. Заметим прежде всего, что φ^* достаточно велико (порядка $1/\varepsilon$), а вся теория осреднения имеет смысл только на интервалах изменения независимого переменного порядка $1/\varepsilon$. Таким образом, условие $\varphi=\varphi^*$ означает только то, что мы подходим к границе допустимого интервала, и, следовательно, теория в окрестности $\varphi=\varphi^*$ теряет смысл. Легко понять также и физическое содержание этого факта. С увеличением радиуса орбиты время полного оборота непрерывно возрастает и, следовательно, те величины, которые за один обход окружности малого радиуса не успели значительно измениться, сильно изменяются при обходе орбиты большого радиуса.

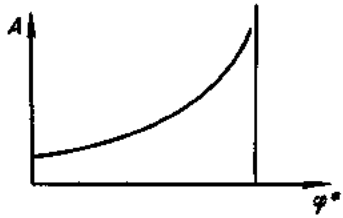

Рис. 33.

Формула (8.29) дает зависимость $A(\varphi)$. Представляет определенный интерес найти также зависимость $A(t)$. Для этого вернемся сначала к формулам (8.22). При $\alpha=\beta=0$ мы имеем

$$r=A, \qquad v_\varphi=A^{-1/2}, \qquad v_r=0.$$

Используя (8.30), можно переписать последнее из уравнений системы (8.20) в виде

$$\frac{dt}{d\varphi}=A^{3/2}. \tag{8.30}$$

Для того чтобы получить интересующую нас зависимость, следует исключить из уравнений (8.28) и (8.30) переменную φ

$$\frac{dA}{dt}=2\varepsilon f A^{3/2},$$

откуда при постоянном f получаем

$$A=\frac{1}{(1-\varepsilon f t)^2}. \tag{8.31}$$

Разумеется, качественный характер полученной зависимости такой же, как и той, которая дается формулой (8.29).

4. Задача о движении спутника на последних оборотах. Задачи, рассмотренные в первых разделах этого параграфа, относились к теории возмущений кеплеровского движения. При составлении этих уравнений мы игнорировали целый ряд важных обстоятельств. Например, мы не принимали во внимание присутствие атмосферы. На последних оборотах, которые происходят на высотах порядка 100 *км* над поверхностью Земли,

влияние аэродинамического сопротивления перестает играть роль возмущающего фактора и становится одной из сил, определяющих весь характер движения.

В этих условиях аппарат уже нельзя рассматривать как материальную точку, поскольку величина аэродинамической силы, точнее коэффициент аэродинамического сопротивления, будет существенно зависеть от ориентации спутника относительно его скорости.

Если спутник не стабилизирован специальным образом, то он будет находиться в состоянии вращательного движения. Рассмотрим этот класс движений, когда вращение происходит с достаточно большой угловой скоростью. В это понятие вкладывается следующий смысл: угловая скорость вращения спутника во много раз больше угловой скорости вращения спутника вокруг Земли. В этом случае в задаче появляется малый параметр — отношение времени одного оборота спутника вокруг своего центра инерции ко времени полного обхода спутником своей орбиты.

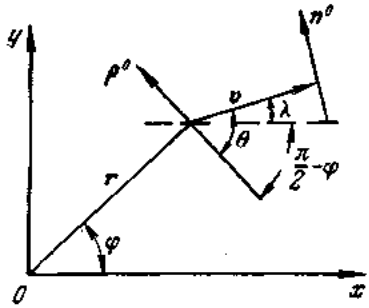

Рис. 34.

Итак, будем рассматривать плоское движение аппарата под действием гравитационного поля, аэродинамической силы и ее момента относительно центра инерции аппарата.

Движение центра инерции аппарата описывается векторными уравнениями

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{V},\qquad \frac{d\boldsymbol{V}}{dt}=-\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{r}^0+\boldsymbol{F}, \tag{8.32}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор центра инерции аппарата, а $\boldsymbol{V}$ — его скорость.

Для составления скалярных уравнений введем систему координат, изображенную на рис. 34. Перепишем первое из уравнений (8.32) в виде

$$\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^0+r\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{p}^0=v\boldsymbol{V}^0,$$

где $\boldsymbol{r}^0$, $\boldsymbol{p}^0$, $\boldsymbol{V}^0$ обозначают единичные векторы соответствующих направлений. Из рис. 34 сразу находим величины скалярных произведений

$$(\boldsymbol{r}^0\boldsymbol{V}^0)=\sin\theta,\quad (\boldsymbol{p}^0\boldsymbol{V}^0)=-\cos\theta, \tag{8.33}$$

угол θ обозначает угол наклона вектора скорости к горизонту в данной точке.

Используя (8.33), получим скалярные уравнения

$$\frac{dr}{dt} = v \sin\theta, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{v}{r}\cos\theta. \tag{8.34}$$

Уравнения (8.34) будем называть кинематическими соотношениями. Рассмотрим теперь второе из уравнений системы (8.32). Проекция вектора $\boldsymbol{F}$ на направление скорости называется лобовым сопротивлением. Проекция вектора $\boldsymbol{F}$ на направление нормали к траектории (вектора $\boldsymbol{n}^0$) называется подъемной силой. Условимся для простоты, что величиной подъемной силы можно пренебречь. Тогда выражение для вектора $\boldsymbol{F}$ запишем в следующем виде:

$$\bar{\boldsymbol{F}} = -\frac{\rho(r)\, v^2}{2m} S c_x(v,\ r,\ \alpha)\, \boldsymbol{V}^0.$$

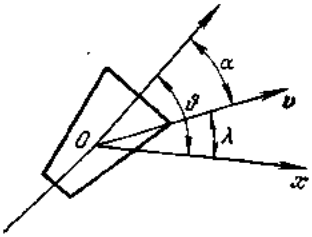

Рис. 35.

Здесь ρ — плотность атмосферы (она зависит от высоты орбиты и, следовательно, от величины r), m — масса аппарата, S — характерная площадь (например, площадь сечения Миделя), c_x — аэродинамический коэффициент. Кроме других величин, этот коэффициент зависит от угла атаки α — угла, который составляет некоторое выбранное направление на аппарате с вектором скорости (рис. 35); c_x является четной функцией угла атаки α.

Перепишем теперь второе из уравнений (8.32)

$$\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} \equiv \frac{dv}{dt}\boldsymbol{V}^0 + v\frac{d\lambda}{dt}\boldsymbol{n}^0 = -\frac{\mu}{r^2}\boldsymbol{r}^0 - \frac{\rho v^2}{2m} S c_x \boldsymbol{V}^0.$$

Здесь λ обозначает угол наклона вектора скорости к некоторому фиксированному в пространстве направлению — оси Ox (см. рис. 35). Замечая, что

$$(\boldsymbol{r}^0 \cdot \boldsymbol{n}^0) = \cos\theta,$$

и используя (8.33), перепишем это уравнение в проекциях на направление $\boldsymbol{v}^0$ и $\boldsymbol{n}^0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{\mu}{r^2}\sin\theta - \frac{\rho v^2}{2m} S c_x \equiv f_1(r,\ v,\ \theta,\ \alpha), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\mu}{r^2 v}\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

Для дальнейшего удобно исключить из уравнений (8.35) величину λ. Для этого заметим, что (см. рис. 34)

$$\theta = \lambda + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

откуда сразу находим

$$\frac{d\theta}{dt} = -\cos\theta\left(\frac{\mu}{r^2 v} - \frac{v}{r}\right) \equiv f_2(r,\ v,\ \theta). \tag{8.35'}$$

Уравнение, описывающее движение аппарата относительно центра масс, мы получим, применяя теорему моментов

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = M(v,\ r,\ \alpha), \tag{8.36}$$

где M обозначает аэродинамический момент, отнесенный к единице массы и также зависящий от угла атаки. Величина ϑ называется углом тангажа. Это угол, под которым ось аппарата наклонена к оси Ox. Из рис. 35 находим связь

$$\vartheta = \alpha + \lambda.$$

Используя уравнения (8.34) и (8.35), вычислим $d^2\lambda/dt^2$

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{\mu}{r^2 v}\sin\theta\, f_2(r,\ v,\ \theta) + \frac{\mu}{r^3}\sin 2\theta + \frac{\mu}{r^2 v^2} f_1(r,\ v,\ \theta,\ \alpha).$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.36), мы можем записать его в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = f_3(r,\ v,\ \theta,\ \alpha), \tag{8.37}$$

где

$$f_3 = M(r,\ v,\ \alpha) - \left\{\frac{\mu}{r^2 v}\sin\theta\, f_2(v,\ r,\ \theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu}{r^3}\sin 2\theta + \frac{\mu}{r^2 v^2} f_1(r,\ v,\ \theta,\ \alpha)\right\}.$$

Итак, система уравнений (8.34), (8.35) и (8.37) описывает плоское движение аппарата. Это система шестого порядка. Однако в силу того, что функция φ не входит в правые части уравнений этой системы, нам достаточно разработать метод интегрирования системы пятого порядка.

Введем обозначение

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0 + z,$$

где ω_0 — угловая скорость вращения аппарата в некоторый фиксированный момент времени t_0.

Согласно нашему основному предположению время $T = 2\pi/\omega_0$ мало по сравнению со временем полного обхода аппаратом своей орбиты вокруг Земли (за один оборот вокруг Земли аппарат совершает много оборотов вокруг своего центра инерции), т. е. ω_0 велико.

Введем малый параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega_0}$$

и сделаем замену независимого переменного

$$\tau = \omega_0 t.$$

Тогда система уравнений (8.34), (8.35) и (8.37) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{d\tau} = \varepsilon f_1(r,\ v,\ \theta,\ \alpha), \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon f_2(r,\ v,\ \theta),\\ &\frac{dr}{d\tau} = \varepsilon v \sin\theta, \qquad \frac{dz}{d\tau} = \varepsilon f_3(r,\ v,\ \theta,\ \alpha),\\ &\frac{d\alpha}{d\tau} = 1 + \varepsilon z. \end{aligned}\right\} \tag{8.38}$$

Уравнение относительно полярного угла φ в силу соображений, высказанных ранее, мы не выписываем.

Система (8.38) содержит одну вращающуюся фазу — угол α и четыре медленных переменных. Для ее исследования может быть использована стандартная процедура.

Остановимся только на анализе уравнений первого приближения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{d\tau} = \varepsilon \bar{f}_1(r,\ v,\ \theta),\\ &\frac{dz}{d\tau} = \varepsilon \bar{f}_3(r,\ v,\ \theta). \end{aligned}\right\} \tag{8.39}$$

Остальные уравнения мы не выписываем, так как их правые части не содержат угла атаки α и, следовательно, после осреднения останутся без изменений.

Рассмотрим первое из уравнений системы (8.39). Величина $\bar{f}_1$ имеет вид

$$\bar{f}_1(r,\ v,\ \theta) = -\frac{\mu}{r^2}\sin\theta - \frac{\rho v^2}{2m} S\bar{c}_x(r,\ v).$$

Так как c_x — обычно четная функция угла атаки, то величина $\bar{c}_x$ заведомо не равна нулю.

Величина момента $M(v,\ r,\ \alpha)$ обычно бывает нечетной функцией угла атаки α, поэтому функцию $\bar{f}_3$ мы можем записать

в следующем виде:

$$\bar{f}_3(r, v, \theta) = -\left\{ \frac{\mu}{r^2 v} \sin\theta \bar{f}_2(r, v, \theta) - \frac{\mu}{r^3} \sin 2\theta + \frac{\mu}{r^2 v^2} \bar{f}_1(r, v, \theta) \right\}.$$

Таким образом, в первом приближении мы должны проинтегрировать систему трех уравнений. Выпишем эти уравнения, возвращаясь к старому масштабу времени:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = \bar{f}_1(r, v, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \bar{f}_2(r, v, \theta), \\ \frac{dr}{dt} = v \sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

Определив эти величины, мы находим оставшиеся при помощи квадратур

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = \bar{f}_3(r, v, \theta), \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega_0 + z. \end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

Итак, в первом приближении уравнения движения центра масс могут быть отделены от уравнений движения относительно центра масс. При этом аэродинамическая сила, которая входит в эти уравнения, получается простым усреднением ее по углу атаки.

Определив движение центра масс, мы можем затем рассчитать характер изменения вращательного движения. Особенность этого приближения состоит еще и в том, что величина угла атаки и угловая скорость вращения аппарата не оказывают никакого влияния на движение центра масс. В свою очередь характер вращательного движения аппарата целиком определяется особенностями движения центра масс. Для более тонкого изучения взаимного влияния движения центра масс и вращения вокруг центра масс необходимо рассмотреть более высокие приближения.

Примечание. Мы предполагали, что аэродинамическая сила сводится только к силе лобового сопротивления Учесть влияние подъемной силы не представляет особого труда (это будет сделано в следующем параграфе). Однако в рамках первого приближения ее учет приведет к нулевому эффекту, поскольку подъемная сила является нечетной функцией угла атаки и ее среднее значение будет нулем. Таким образом, система уравнений (8.40) и (8.41) может быть использована для изучения движения аппарата в атмосфере, если только мы считаем достаточно точными уравнения первого приближения.

5. Задача о движении спутника в конце последнего оборота. Будем изучать движение осесимметричного спутника, входящего в плотные слои атмосферы. Условимся считать, что спутник имеет большой запас статической устойчивости. Как мы это увидим ниже, данное предположение существенно.

Задача, рассматриваемая в этом разделе, очень близка к предыдущей: точно так же основными силами, действующими на спутник, будет сила тяжести и аэродинамические силы. Однако в этой задаче есть одна существенная особенность, качественно отличающая характер изучаемого движения от того, которое было изучено в предыдущем разделе. Если аппарат, обладающий аэродинамической стабилизацией, входит в плотные слои атмосферы, то хаотическое вращение постепенно замедляется и переходит в колебательное движение. Следовательно, в конце последнего оборота (при подходе к Земле) движение спутника будет носить не вращательный, а колебательный характер. Это обстоятельство качественно отличает особенности асимптотики, которая будет изучаться в этом разделе от той, что была рассмотрена ранее.

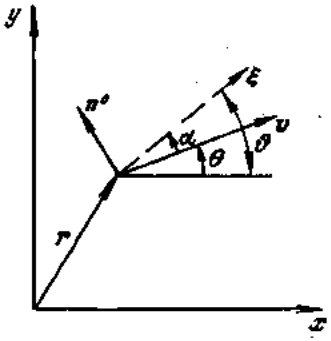

Рис. 36.

Уравнение движения мы снова можем записать в виде (8.32). Однако последний отрезок траектории аппарата, проходящий в плотных слоях атмосферы, невелик, и поле тяготения можно считать постоянным, поэтому нет необходимости использовать полярную систему координат.

Введем обычную декартову систему координат (рис. 36), и уравнения движения запишем тогда в виде

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}, \qquad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -g\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{F}, \tag{8.42}$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$, как и ранее, обозначают радиус-вектор и скорость центра масс аппарата относительно выбранного начала отсчета, величина g — это напряженность гравитационного поля, а $\boldsymbol{F}$ — аэродинамическая сила. Кинематические условия мы получим, записывая первое из уравнений системы (8.42) в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\theta. \tag{8.43}$$

Аэродинамическую силу $\boldsymbol{F}$, действующую на аппарат, мы представим в следующем виде:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\rho(y)v^2}{2m} Sc_x(v, y, \alpha)\boldsymbol{V}^0 + \frac{\rho(y)v^2}{2m} Sc_y(v, y, \alpha)\boldsymbol{n}^0.$$

Первое слагаемое, стоящее в правой части, — это уже известное нам лобовое сопротивление. В его выражении сохранены обозначения предыдущего пункта. Второе слагаемое — это подъемная сила, величина c_y называется коэффициентом подъемной силы. Эту безразмерную величину будем считать нечетной функцией угла атаки α. Подъемная сила направлена по нормали к траектории вдоль вектора $\boldsymbol{n}^0$. На рис. 36 пунктирный вектор ξ дает направление оси аэродинамической симметрии. На этом чертеже показано также направление отсчета угла атаки α; m, как и ранее, обозначает массу аппарата. Так как в данной задаче линия местного горизонта совпадает с неподвижной осью Ox, то

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{v}^0 + v\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{n}^0$$

и, следовательно, динамические уравнения, которые получаются из второго уравнения системы (8.42), если его записать в проекциях на оси Ox и Oy, будут в этом случае такими:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g\sin\theta - \frac{\rho v^2}{2m} Sc_x(y, v, \alpha) \equiv f_1(v, \theta, y, \alpha), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g\cos\theta}{v} + \frac{\rho v}{2m} Sc_y(y, v, \alpha) \equiv f_2(v, \theta, y, \alpha). \end{aligned}\right\} \quad (8.44)$$

Уравнение моментов аналогично (8.36) запишем в виде

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = M\left(v, y\ \alpha, \frac{d\theta}{dt}\right). \quad (8.45)$$

Отличие уравнения (8.45) от (8.36) состоит в том, что теперь мы необходимо должны учесть зависимость аэродинамического момента от угловой скорости колебаний, поскольку последняя велика, а атмосфера достаточно плотная.

В прикладной аэродинамике величину аэродинамического момента обычно представляют в виде двух слагаемых

$$M\left(v, y, \alpha, \frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{\rho v^2}{2J} Slm_z(v, y, \alpha) + \frac{\rho v}{2J} Slm_z^{\omega}(v, y)\frac{d\theta}{dt}. \quad (8.46)$$

Первое слагаемое иногда называется статическим моментом, второе — демпфирующим, J — полярный момент инерции аппарата, $m_z(v, y, \alpha)$ — безразмерный коэффициент аэродинамиче-

ского момента, l — некоторый характерный линейный размер (например, длина аппарата). Величина $m_z^{\omega}(v, y)\frac{d\vartheta}{dt}$ определяет основную характеристику демпфирующего момента. Зависимость величины демпфирующего момента от угловой скорости обычно считается линейной. Величину ϑ принято называть углом тангажа.

Так как углы ϑ, α и θ связаны конечным соотношением (см. рис. 36)

$$\vartheta = \alpha + \theta, \tag{8.47}$$

то

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \varphi\left(\theta,\ v,\ y,\ \alpha,\ \frac{d\alpha}{dt}\right),$$

где

$$\varphi = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{g\cos\theta}{v} + \frac{\rho v}{2m}Sc_y\right\} \equiv \frac{df_2}{dt}.$$

Используя равенства (8.46) и (8.47), перепишем уравнение моментов в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + f_3\frac{d\alpha}{dt} + f_4^*(\theta,\ v,\ y,\ \alpha) = \tilde{\alpha}(v,\ \theta,\ y), \tag{8.48}$$

где

$$f_3 = \frac{\rho v}{2J}Slm_z^{\omega} - \frac{\rho v}{2m}S\frac{\partial c_y}{\partial\alpha},$$

$$f_4^* = \frac{\rho v^2}{2J}Slm_z - \frac{Sc_y}{2m}\left\{\rho g\sin\theta - \frac{d}{dt}(\rho v)\right\},$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{g^2\sin 2\theta}{2v^2}.$$

Система уравнений шестого порядка (8.43), (8.44) и (8.48) дает полное описание плоского движения. Мы условились изучать движение аппарата, обладающего большим запасом статической устойчивости. В этом случае величина f_4^* всегда положительна и велика. Следовательно, мы можем положить

$$f_4^* = \lambda^2 f_4,$$

где λ^2 — некоторый большой параметр.

Далее мы снова сделаем замену независимой переменной

$$t = \frac{\tau}{\lambda} = \varepsilon\tau.$$

После этой замены система (8.43), (8.44) и (8.48) примет

следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{d\tau}=\varepsilon v\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\tau}=\varepsilon v\sin\theta,\\&\frac{dv}{d\tau}=\varepsilon f_1(v,\ \theta,\ y,\ \alpha),\quad \frac{d\theta}{d\tau}=\varepsilon f_2(v,\ \theta,\ y,\ \alpha),\\&\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}+\varepsilon f_3\frac{d\alpha}{d\tau}+f_4(v,\ \theta,\ y,\ \alpha)=\varepsilon\tilde{\alpha}.\end{aligned}\right\}\tag{8.49}$$

При $\varepsilon=0$ из системы (8.49) получаем

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}+f_4(v,\ \theta,\ y,\ \alpha)=0,\qquad v=\text{const}=v_0,\\&\theta=\text{const}=\theta_0,\qquad y=\text{const}=y_0.\end{aligned}\right\}\tag{8.50}$$

Будем считать, что решение системы (8.50) при условии, что все величины v, θ и y — некоторые постоянные, нам известно и что оно имеет вид

$$\alpha=q(c,\ \psi,\ v,\ \theta,\ y),$$

где

$$\psi=\omega(c,\ v,\ \theta,\ y)\,(\tau+\tau_0);$$

здесь c — постоянная интегрирования, которую мы будем называть амплитудой, τ_0 — аддитивная постоянная. Так как движение, по предположению, является колебательным, то функция q будет периодической функцией переменной τ некоторого периода $T(c)$. Величина $\omega(c,\ v,\ \theta,\ y)$ служит нормирующим множителем: функция q по переменной ψ имеет период, равный 2π. Знание общего решения системы в предположении, что $v=\text{const}$, $\theta=\text{const}$ и $y=\text{const}$ позволяет использовать стандартную процедуру метода осреднения.

Для того чтобы не усложнять изложения, ограничимся изучением только того случая, когда колебания малы и функцию f_4 можно представить в виде

$$f_4(v,\ \theta,\ y,\ \alpha)=\omega^2(v,\ \theta,\ y)\,\alpha.$$

В этом случае

$$\alpha=c\cos\psi,\qquad \psi=\omega(v,\theta,y)\,(\tau+\tau_0),\tag{8.51}$$

и уравнение (8.50) будет теперь таким:

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}=-\omega^2\alpha.\tag{8.50'}$$

Так как у тела, обладающего аэродинамической симметрией, m_z и c_y — нечетные функции угла атаки, то линеаризация этих функций допустима и в том случае, когда мы рассматриваем квадратичную теорию, поскольку, отбросив в уравнении (8.50)

члены третьего порядка малости относительно угла атаки α, мы тем не менее придем к уравнению (8.50′).

В системе (8.49) перейдем теперь от переменной α к переменным c и ψ. Для этого к равенству (8.51) добавим еще такое:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -c\omega(v,\ \theta,\ y)\sin\psi. \tag{8.52}$$

Из равенств (8.51) и (8.52) находим

$$\left.\begin{aligned} c &= \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\omega^2(v,\ \theta,\ y)}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2}, \\ \psi &= -\operatorname{arctg}\left\{\frac{1}{\omega\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{8.53}$$

Вычислим производную первой из величин, определяемых равенством (8.53), в силу уравнений (8.49)

$$\frac{dc}{d\tau} = \frac{\alpha\frac{d\alpha}{d\tau} + \frac{d\alpha}{d\tau}\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}\frac{1}{\omega^2} - \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2\left\{\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{d\tau}\right\}\frac{1}{\omega^3}}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{c}\left\{-\frac{f_3}{\omega^2}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2 + \frac{d\alpha}{d\tau}\tilde{\alpha} - \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2\left[\frac{\partial\omega}{\partial v}f_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}f_2 + \frac{\partial\omega}{\partial y}v\sin\theta\right]\frac{1}{\omega^3}\right\} =$$

$$= -\varepsilon c\sin^2\psi\left\{f_3 + \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial v}f_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}f_2 + \frac{\partial\omega}{\partial y}v\sin\theta\right]\right\} -$$

$$-\varepsilon\omega\sin\psi\tilde{\alpha} \equiv -\varepsilon c\sin^2\psi f_5(v,\ \theta,\ y,\ c\cos\psi). \tag{8.54}$$

Продифференцируем второе из уравнений (8.53)

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -\frac{\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}\omega\alpha - \left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2\omega - \varepsilon\frac{d\alpha}{d\tau}\alpha\left\{\frac{\partial\omega}{\partial\tau}f_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}f_2 + \frac{\partial\omega}{\partial y}v\sin\theta\right\}}{\left[1 + \frac{1}{\omega^2\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\tau}\right)^2\right]\omega^2\alpha^2} =$$

$$= -\frac{1}{\omega^2c^2}\left\{-\omega^2c^2 + \frac{\varepsilon}{2}f_3\sin 2\psi - c^2\omega^2 - \frac{\varepsilon c^2\omega}{2}\sin 2\alpha\left[\frac{\partial\omega}{\partial v}f_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}f_2 + \frac{\partial\omega}{\partial y}v\sin\theta\right]\right\} - \frac{\varepsilon}{\omega c}\tilde{\alpha}\cos\psi$$

и окончательно

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega - \frac{\varepsilon}{2}\sin 2\psi\left\{f_3 - \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial v}f_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}f_2 + \frac{\partial\omega}{\partial y}v\sin\theta\right]\right\} -$$

$$-\frac{\varepsilon}{\omega c}\tilde{\alpha}\cos\psi \equiv \omega - \varepsilon\left\{f_5(v,\ \theta,\ y,\ c\cos\psi)\sin 2\psi + \frac{1}{\omega c}\tilde{\alpha}\cos\psi\right\}. \tag{8.55}$$

Таким образом, вместо системы (8.49) мы пришли к другой системе, в которой последнее уравнение второго порядка

заменили двумя уравнениями первого порядка (8.54) и (8.55), а в правых частях второго и третьего уравнений вместо α подставлено его выражение $c\cos\psi$. Преобразованная система вполне эквивалентна исходной, но является системой с вращающейся фазой; она содержит пять медленных переменных x, y, v, θ, c и одну быструю — ψ. Правые части этой системы представляют собой периодические функции ψ периода 2π. Заметим, что первое уравнение этой системы интегрируется независимо от других, так как x не входит в правые части остальных уравнений. Теперь ее исследование может быть проведено с использованием стандартной процедуры разделения движения. Ограничимся рассмотрением только первого приближения; для этого достаточно осреднить правые части по быстрой переменной ψ.

Первые два уравнения не содержат угла атаки и останутся без изменения; их удобно записать, возвращаясь к переменному t:

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = v\sin\theta. \tag{8.56}$$

Рассмотрим третье уравнение этой системы. Используя выражение для f_1, после усреднения мы его приведем к следующему виду:

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - \frac{\rho v^2 S}{4\pi m}\int_0^{2\pi} c_x(y,\ v,\ c\cos\psi)\,d\psi. \tag{8.57}$$

Коэффициент подъемной силы для малых значений угла атаки α выражается как

$$c_x = c_{x0} + k\alpha^2, \qquad k > 0.$$

Следовательно, после усреднения уравнение (8.57) примет форму

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - \frac{\rho v^2 S}{2m}\left(c_{x0} + \frac{kc^2}{2}\right) \tag{8.58}$$

или, если мы ограничиваемся линейной теорией, то

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - \frac{\rho v^2 S}{2m}c_{x0}(v,\ y,\ \theta). \tag{8.58'}$$

Рассмотрим теперь четвертое уравнение системы (8.49), полагая в нем $c_y = c_y^{\alpha}\cdot\alpha$. После осреднения оно примет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v}. \tag{8.59}$$

Итак, если мы принимаем линейную теорию, то движение центра масс в первом приближении может быть описано независимо от движения относительно центра масс, причем урав-

нение в проекциях на нормаль (8.59) записывается так, как если бы движение происходило в пустоте и все действие аэродинамических сил сводилось к лобовому сопротивлению, вычисляемому для нулевого угла атаки. В квадратичной теории уравнение для проекций на касательную к траектории (8.58) содержит квадрат амплитуды. Поэтому в этом случае уже в первом приближении нельзя разделить движение центра масс и движение относительно центра масс.

Рассмотрим уравнение (8.54). После осреднения оно примет следующий вид:

$$\frac{dc}{d\tau} = -\frac{\varepsilon c f_3}{2} - \frac{\varepsilon c}{2\omega}\left\{\frac{\partial\omega}{\partial v}\bar{f}_1 + \frac{\partial\omega}{\partial\theta}\bar{f}_2 + \frac{\partial\omega}{\partial y}v\sin\theta\right\}. \qquad (8.60)$$

При осреднении слагаемого, содержащего $\bar{f}_1$, была принята линейная теория: $\bar{f}_1$ означает, что в выражении лобового сопротивления мы приняли $c_x = c_{x0}$, $\bar{f}_2 = -\frac{g\cos\theta}{v}$. Таким образом, величина, стоящая в фигурной скобке, равна $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\omega}{dt}$, где производная угловой скорости ω вычислена в силу уравнений (8.56), (8.58′) и (8.59). На этом основании уравнение (8.60) мы перепишем в виде (возвращаясь к аргументу t)

$$\frac{1}{c}\frac{dc}{dt} = -\frac{1}{2}f_3 - \frac{1}{2\omega}\frac{d\omega}{dt}.$$

В этом уравнении переменные разделены, и после интегрирования мы получаем

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\omega}}e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^t f_3\,dt}, \qquad (8.61)$$

где c_0 — произвольная постоянная — в данном случае начальное значение амплитуды угла атаки.

Таким образом, в линейной теории первое приближение осредненных уравнений позволяет рассчитать траекторию центра масс независимо от колебательного движения аппарата и найти, следовательно, зависимость $\omega(t)$ и $f_3(t)$. Для расчета амплитуды колебательного движения мы должны только вычислить одну квадратуру $\int f_3\,dt$, после чего для амплитуды колебаний c получим явное выражение.

В квадратичной теории переменные в уравнении (8.60) уже не разделяются. Рассмотрим снова уравнение (8.59) и перепишем его с учетом членов второго порядка

$$\frac{dc}{d\tau} = -\varepsilon\left\{cf_3\sin^2\psi + \frac{c\sin^2\psi}{\omega}\frac{d\omega}{dt} - \frac{c\sin^2\psi}{\omega}\cdot\frac{\rho v^2}{2m}Skc^2\cos^2\psi\right\},$$

где $d\omega/dt$ по-прежнему означает производную величины ω в силу уравнений (8.56), (8.58′) и (8.59). После осреднения это уравнение принимает вид

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{c}{2} f_3 - \frac{c}{2\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{c^3}{8\omega}\frac{\rho v^2 Sk}{2m}. \tag{8.62}$$

Мы видим, что в уравнении (8.62) переменные уже не разделяются. Для определения закона изменения амплитуды нам придется в этом случае численно интегрировать уравнение (8.62).

Рассмотрим, наконец, последнее из уравнений, описывающих движение аппарата — уравнение (8.55), которое дает закон изменения фазы. В линейном случае оно выглядит очень просто

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega,$$

откуда

$$\psi(t) = \psi_0 + \lambda \int_0^t \omega(t)\, dt. \tag{8.63}$$

В рамках квадратичной теории выражение (8.63) несколько усложнится за счет слагаемого в выражении f_1, которое содержит множителем величину $c^2k^2\cos^2\psi$.

Подведем теперь некоторые итоги. Предположим, что мы ограничиваемся первым приближением. Тогда в линейной теории нам достаточно численно рассчитать решение системы трех уравнений первого порядка (напомним, что уравнение, определяющее дальность x, интегрируется независимо), после чего расчет колебательного движения производится по формулам (8.61) и (8.63), требующим расчета квадратур.

В квадратичной теории мы вынуждены совместно интегрировать систему четырех уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= v\sin\theta,\\
\frac{dv}{dt} &= -g\sin\theta - \frac{\rho v^2 S}{2m}\left(c_{x0} + \frac{kc^2}{2}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g\cos\theta}{v},\\
\frac{dc}{dt} &= -\frac{c}{2}\left(f_3 + \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}\right) + \frac{c^3}{8\omega}\frac{\rho v^2}{2m} Sk.
\end{aligned}\right\} \tag{8.64}$$

Дальность x и фаза ψ определяются квадратурами.

Для исследования более точных эффектов, например для изучения влияния подъемной силы на величину дальности в

предположении колебательного движения, мы должны изучить следующее приближение. Заметим также, что первое приближение линейной теории не может дать никакой информации о рассеивании элементов траектории вследствие колебательного движения, поскольку среднее значение подъемной силы в этом приближении равно нулю. Все подобные вопросы должны решаться в следующем приближении.

6. Резонансные задачи в динамике искусственных спутников. В предыдущих разделах этого параграфа мы рассмотрели целый ряд задач динамики искусственных спутников, которые описываются системой уравнений с одной вращающейся фазой. Однако существует много интересных задач, которые сводятся к системе с двумя вращающимися фазами. В начале этого параграфа мы уже заметили, что если возмущающая сила зависит от времени, то мы приходим к системе уравнений с двумя быстрыми переменными. Такие задачи естественным образом возникают в динамике искусственных спутников Земли. К их числу относится, например, задача возмущения орбит высоких спутников Луной. В этой ситуации возмущения, вызываемые Луной, будут некоторыми периодическими функциями времени и, следовательно, полная система уравнений будет содержать две быстрые переменные. В том случае, когда период обращения спутника T и Луны $T_л$ будут связаны соотношением

$$T_л = kT,$$

где k — целое число, мы будем иметь резонансный случай.

Можно привести еще целый ряд интересных резонансных задач подобного рода. Много новых задач, в которых имеет место резонансная ситуация, нам доставляет изучение относительного движения спутника в центральном поле.

Если тело не обладает сферической симметрией, то на него в центральном поле действует некоторый момент, так называемый гравитационный момент. Под действием этого момента тело, движущееся по орбите вокруг Земли, совершает колебательное движение. Это движение в плоском случае может быть описано следующим уравнением *):

$$(1 + e\cos\theta)\frac{d^2\delta}{d\theta^2} - 2e\sin\theta\frac{d\delta}{d\theta} + 3a^2\sin\delta = 4e\sin\theta. \qquad (8.65)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$a = \frac{A - C}{B},$$

*) В. В. Белецкий, О либрации спутника, сб. «Искусственные спутники Земли», № 3, 1959.

B — момент инерции аппарата относительно оси перпендикулярной плоскости орбиты спутника, A и C — моменты инерции аппарата относительно осей инерции, лежащих в плоскости орбиты, причем $A>C$, т. е. $a \leqslant 1$; $\delta=2\psi$, где ψ — это угол между радиусом-вектором центра инерции аппарата и осью инерции, относительно которой момент инерции равен C, т. е. наиболее *длинной из осей инерций*, лежащих в плоскости орбит (см. рис. 37, где даны обозначения), θ — угловое расстояние между радиусом-вектором центра инерции аппарата и направлением на перигей, e — эксцентриситет орбиты спутника.

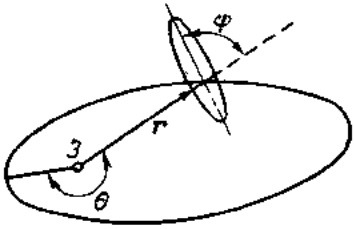

Рис. 37.

Заметим, что если $e=0$, то уравнение (8.65) принимает вид

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2}+3a^2\sin\delta=0. \qquad (8.66)$$

Уравнение (8.66) допускает два стационарных режима $\delta=0$ и $\delta=\pi$. Устойчивым является первый режим $\delta=0$, соответствующий тому случаю, когда наиболее длинная ось инерции коллинеарна радиусу-вектору. Этот факт впервые был установлен известным французским астрономом Тиссераном. В случае $\delta=\pi$ (или $\psi=\pi/2$) более длинная ось инерции перпендикулярна радиусу-вектору.

Предположим теперь, что эксцентриситет e — величина малая, тогда уравнение (8.65) перепишем так:

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2}+3a^2\sin\delta=e\left(4\sin\theta+2\sin\theta\frac{d\delta}{d\theta}+3a^2\cos\theta\sin\delta\right)+O(e^2). \qquad (8.67)$$

Уравнение (8.67) получается из (8.65), если сделать замену

$$e\cos\theta\frac{d^2\delta}{d\theta^2}=e\cos\theta\left(-3a^2\sin\delta+O(e)\right),$$

оно представляет собой типичный пример для приложения излагаемой теории. При $e=0$ оно переходит в уравнение (8.66) и может быть проинтегрировано в эллиптических функциях

$$\delta=q(x,y),$$

где x — максимальное отклонение, а y — фаза; $y=\theta+\theta_0$. Все вычисления могут быть проделаны, следуя общей методике. Здесь мы ограничимся рассмотрением того частного случая, когда ось инерции с моментом инерции C совершает малые колебания около своего положения равновесия ($\delta=0$). Этот слу-

чай был проанализирован в уже цитированной работе В. В. Белецкого *).

Линеаризуя уравнение (8.67) и отбрасывая малые, порядок которых выше первого относительно e, мы получим

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2}+\omega^2\delta=e\left(4\sin\theta+2\sin\theta\frac{d\delta}{d\theta}+\omega^2\cos\theta\delta\right), \tag{8.68}$$

где

$$\omega^2=3a^2.$$

Заметим, что частота ω определяется исключительно геометрическими характеристиками спутника — соотношением его моментов инерции.

Полагая как обычно

$$\delta=x\cos y, \qquad \frac{d\delta}{d\theta}=-\omega x\sin y,$$

заменим уравнение (8.68) следующей системой:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{d\tau}&=-\frac{e}{\omega}(4\sin\theta-2\sin\theta\sin y\,\omega x+\cos\theta\cos y\,\omega^2x)\sin y,\\
\frac{dy}{d\tau}&=\omega-\frac{e}{\omega x}(4\sin\theta-2\sin\theta\sin y\,\omega x+\cos\theta\cos y\,\omega^2x)\cos y,\\
\frac{d\theta}{d\tau}&=1.
\end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

Система (8.69) — это система с двумя быстрыми переменными θ и y. В зависимости от частоты ω (т. е. от соотношений моментов инерции) в системе (8.69) может возникать или не возникать резонансная ситуация.

При отсутствии резонанса первое приближение для системы (8.69), которое получается усреднением по обеим быстрым переменным, нам дает

$$x=\text{const}, \qquad y=y_0+\omega t,$$

т. е. с точностью до величины порядка $O(e^2)$ спутник будет совершать гармонические колебания около положения равновесия $\delta=0$.

Если $a=\sqrt{3}/3$, то $\omega=1$, и мы имеем случай главного резонанса. Исследуем это явление. Для этого прежде всего сделаем стандартную замену

$$y=\theta+z, \qquad \omega=1+eh$$

*) В. В. Белецкий, Движение искусственного спутника относительно центра масс, «Наука», 1965.

и перепишем систему (8.69)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -\frac{e}{\omega}\{4\sin\theta\sin(\theta+z)-2\omega x\sin^2(\theta+z)\sin\theta+\\ &\qquad+\omega^2 x\cos\theta\cos(\theta+z)\sin(\theta+z)\},\\ \frac{dz}{d\tau} &= -\frac{e}{\omega x}\{4\sin\theta\cos(\theta+z)-\\ &\qquad-2\omega x\sin\theta\sin(\theta+z)\cos(\theta+z)+\omega^2 x\cos\theta\cos(\theta+z)\}.\end{aligned}\right\}\quad(8.70)$$

Система (8.70) содержит теперь только одну быструю переменную θ, по этой переменной мы и должны провести усреднение.

Преобразуем правые части уравнений (8.70), используя замену

$$\sin\theta=\sin(\theta+z)\cos z-\cos(\theta+z)\sin z,$$
$$\cos\theta=\cos(\theta+z)\cos z+\sin(\theta+z)\sin z.$$

Получим

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -\frac{e}{\omega}\{4\sin^2(\theta+z)\cos z-4\cos(\theta+z)\sin(\theta+z)\sin z-\\ &\quad-2\omega x\sin^3(\theta+z)\cos z+2\omega x\cos(\theta+z)\sin^2(\theta+z)\sin z+\\ &\quad+\omega^2 x\cos^2(\theta+z)\sin(\theta+z)\cos z+\omega^2 x\sin^2(\theta+z)\cos(\theta+z)\sin z\},\\ \frac{dz}{d\tau} &= -\frac{e}{\omega x}\{4\sin(\theta+z)\cos(\theta+z)\cos z-4\cos^2(\theta+z)\sin z-\\ &\quad-2\omega x\sin^2(\theta+z)\cos(\theta+z)\cos z+2\omega x\cos^2(\theta+z)\sin(\theta+z)\cos z+\\ &\quad+\omega^2 x\cos^3(\theta+z)\cos z+\omega^2 x\sin(\theta+z)\cos^2(\theta+z)\sin z\}+eh.\end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta+z)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_z^{2\pi+z}\Phi(\xi)\,d\xi,$$

то мы можем провести усреднение по переменной $\xi=\theta+z$, в результате получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= -\frac{2e}{\omega}\cos z,\\ \frac{dz}{d\tau} &= -\frac{2e}{\omega x}\sin z+eh.\end{aligned}\right\}\quad(8.71)$$

Система (8.71) допускает два стационарных режима:

$$\text{I.}\ z=\frac{\pi}{2},\qquad x=\frac{2}{\omega h},$$

$$\text{II.}\ z=-\frac{\pi}{2},\quad x=-\frac{2}{\omega h}.$$

Мы видим, что при $h=0$ эти решения теряют смысл: система не допускает установившихся режимов. Этот результат следовало ожидать, поскольку исходное уравнение (8.68) было линейным, а в рамках линейной теории исследовать поведение системы в точке резонанса нельзя.

Для того чтобы исследовать характер колебания при нулевой расстройке, при упрощении уравнения (8.67) мы должны удержать члены более высокого порядка относительно δ. Заменим в левой части этого уравнения

$$\sin\delta=\delta-\frac{1}{6}\delta^3.$$

В правой части положим $\sin\delta=\delta$ (это значит, что мы пренебрегли величиной $e\delta^3$ по сравнению с δ^3) и проделаем обычные для квазилинейной теории преобразования, переписав уравнение (8.67) в следующем виде:

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2}+\omega^2\delta=e\left(4\sin\theta+2\sin\theta\frac{d\delta}{d\theta}+\omega^2\delta\cos\theta+\alpha\delta^3\right),$$

где

$$\alpha=\frac{\omega^2}{e}.$$

В этих предположениях система (8.70) запишется так:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\tau}=-\frac{e}{\omega}\{4\sin\theta\sin(\theta+z)-2\omega x\sin\theta\sin^2(\theta+z)+\\
&+\omega^2x\cos\theta\cos(\theta+z)\sin(\theta+z)+\alpha x^3\cos^3(\theta+z)\sin(\theta+z)\},\\
&\frac{dz}{d\tau}=-\frac{e}{\omega x}\{4\sin\theta\cos(\theta+z)-\\
&-2\omega x\sin\theta\sin(\theta+z)\cos(\theta+z)+\omega^2x\cos\theta\cos^2(\theta+z)+\\
&\qquad+\alpha x^3\cos^4(\theta+z)\}+eh.
\end{aligned}\right\}\quad(8.72)$$

После усреднения системы (8.72) мы получим следующий аналог системы (8.71):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\tau}=-\frac{2e}{\omega}\cos z,\\
&\frac{dz}{d\tau}=-\frac{2e}{\omega x}\left(\sin z+\frac{3}{8}\alpha x^3\right)+eh.
\end{aligned}\right\}\quad(8.73)$$

Система (8.73), в отличие от системы (8.71), допускает стационарные режимы и при нулевой расстройке $h=0$:

$$\text{I.}\ z=\frac{\pi}{2},\qquad x=-\sqrt[3]{\frac{8}{3\alpha}}.$$

$$\text{II.}\ z=-\frac{\pi}{2},\quad x=\sqrt[3]{\frac{8}{3\alpha}}.$$

Итак, один случай, когда уравнение (8.65) может быть исчерпывающим образом изучено методами асимптотической теории, — это случай малых эксцентриситетов ($e \ll 1$). В классической литературе по астрономии подробно изучен случай $e=0$. Случай малых эксцентриситетов орбиты, как показал впервые, по-видимому, В. В. Белецкий, не обнаруживает никаких новых качественных особенностей. Учет эксцентричности орбиты несколько изменяет характер параметров колебательного движения орбиты, не изменяя в сущности основного характера движения. Так, например, в случае $e=0$ устойчивым будет то положение тела, при котором его наибольшая ось инерции коллинеарна радиусу-вектору. В случае $e \ll 1$ устойчивым является то положение равновесия, при котором наибольшая ось инерции коллинеарна радиусу-вектору центра инерции в апогее и перигее. Во всех остальных типах орбиты ось будет составлять некоторый малый угол с радиусом-вектором. Этот результат справедлив, разумеется, только для малых значений эксцентриситета. Изложенная теория без каких-либо принципиальных трудностей может изучить случай произвольных углов δ, однако при одном условии малости эксцентриситета.

Ф. Л. Черноусько обратил внимание, что асимптотические методы усреднения могут быть использованы еще в одном случае, когда $a \ll 1$. В этом случае собственные колебания тела происходят с очень малой частотой. Если период этих колебаний значительно больше периода обращения тела по орбите, то за время одного обхода орбиты ориентация тела в пространстве существенно не изменится. Это обстоятельство и используется для построения асимптотической теории.

Случай $a \ll 1$ не содержит ограничений на величину эксцентриситета. В рамках такого рассмотрения могут быть изучены колебания тела, летящего по очень вытянутой эллиптической орбите. Исследование этого случая позволяет обнаружить целый ряд новых свойств движения, качественно отличающих его от случая малых эксцентриситетов, который был изучен выше. Например, если $e > e_0 = 0{,}68$, то устойчивым положением равновесия оказывается то, при котором в перигее и апогее наибольшая ось инерции перпендикулярна радиусу-вектору. Изложение этой интересной работы выходит далеко за рамки данной книги. За подробностями мы отсылаем читателя к оригиналу *).

Мы изложили несколько примеров, показывающих эффективность применения методов усреднения в задачах динамики

---

*) Ф. Л. Черноусько, Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс, Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 3, № 3 (1963), 528—538.

космических аппаратов. Число этих примеров легко умножить. Но уже изложенного достаточно для того, чтобы продемонстрировать возможности используемого математического аппарата.

§ 9. Асимптотические методы усреднения в задачах теории оптимального управления

1. Частичное усреднение. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}=\varepsilon X(x,\ t,\ u), \tag{9.1}$$

где X — периодическая функция времени t периода 2π, а u — некоторая медленно меняющаяся функция x и t (управление). Ее изменение может быть описано уравнением

$$\dot{u}=\varepsilon\varphi(x, t, u), \tag{9.2}$$

здесь x и u — это некоторые векторы размерностей n и m соответственно. Для исследования системы (9.1)—(9.2) может быть использован метод Ван-дер-Поля: так как за время одного периода переменные x и u изменятся мало, то уравнение (9.1) можно заменить усредненным

$$\dot{x}=\varepsilon\overline{X}(x,\ u), \tag{9.3}$$

где

$$\overline{X}(x,\ u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} X(x,\ t,\ u)\,dt,$$

и вместо системы (9.1), (9.2) рассматривать систему (9.3), (9.2).

Можно формально построить процесс, аналогичный тому, который был изложен в § 4 настоящей главы; для этого достаточно сделать замену

$$x=\bar{x}+\varepsilon\xi_1(x,\ t,\ u)+\varepsilon^2\xi_2(x,\ t,\ u)+\ldots,$$

где

$$\dot{x}=\varepsilon A_1(x,\ u)+\varepsilon^2 A_2(x,\ u)+\ldots$$

Тогда

$$A_1=\overline{X},$$

$$A_2=\overline{\frac{\partial X}{\partial \bar{x}}\,\xi_1-\frac{\partial \xi_1}{\partial \bar{x}}\,A_1-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\,\varphi},$$

$$\xi_1=\int\limits_0^t \{X(\bar{x},\ t,\ u)-\overline{X}(\bar{x},\ u)\}\,dt$$

и т. д.

В первом приближении мы получим систему уравнений (9.2), (9.3). Для второго приближения мы получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= \varepsilon A_1(\bar{x}_2, u) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}_2, u), \\ \dot{u} &= \varepsilon\varphi(\bar{x}_2 + \xi_1, t) \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

и т. д.

Представляет определенный интерес также рассмотрение систем и более общего вида, например

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, t, y, u), \\ \dot{y} &= \omega(x, u, t) + \varepsilon Y(x, t, y, u), \\ \dot{u} &= \varepsilon\varphi(x, t), \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

где правые части X и Y — периодические функции скалярных аргументов t и y. Такие системы содержат уже две быстрые переменные t и y. Для их исследования может быть формально использован весь аппарат данной главы. В системах уравнений типа (9.5) возможно существование резонансных режимов.

2. О возможных постановках задач оптимального управления для уравнений в стандартной форме. Построение теорий, позволяющих найти приближенное решение задач оптимального управления для систем уравнений, содержащих малые параметры, представляет интерес во всех отношениях. Прежде всего, существует большой класс технических задач, в которых дифференциальные уравнения, описывающие движение управляемой системы, содержат малые параметры, и поэтому вопрос о соответствии решения, которое получено при нулевых значениях параметров, точному решению всегда актуален. Более того, практически всегда мы имеем дело с идеализированными моделями управляемых систем, и поэтому развитие теории оптимального управления в том случае, когда дифференциальные ограничения содержат малые параметры, представляется важным с прикладной точки зрения. Далее, задачи оптимального управления относятся к числу некорректных задач. По-видимому, отбрасывание малых величин в некоторых случаях может привести к появлению новых качественных особенностей.

В данной работе мы рассматриваем только один простейший пример таких систем, который относится к частному типу задач, охватываемых излагаемой теорией.

Рассмотрим задачу отыскания такой функции $u(t)$, которая доставляет минимум функционалу

$$I = \int_0^T F(x, u)\,dt \tag{9.6}$$

при следующих ограничениях:

а) дифференциальные связи

$$\dot{x}=\varepsilon X(t,\ x,\ u), \tag{9.7}$$

б) фазовые ограничения

$$x\in G_x, \tag{9.8}$$

в) ограничения на управление

$$u\in G_u. \tag{9.9}$$

Здесь x и u — некоторые векторы размерностей n и m соответственно, вектор x называется фазовым вектором, u — управляющим вектором или управлением, G_x и G_u — некоторые множества.

К перечисленным условиям должны быть добавлены еще условия при $t=0$ и $t=T$. Условимся их фиксировать

$$\left.\begin{array}{ll} t=0 & x=x_0, \\ t=T & x=x_T. \end{array}\right\} \tag{9.10}$$

В такой постановке рассматриваемая задача допускает простую механическую интерпретацию: найти такое управление $u(t)$, которое переводит систему, движение которой описывается системой уравнений (9.7), за время T из состояния x_0 в состояние x_T так, чтобы функционал I (стоимость перехода из x_0 в x_T) был минимален и чтобы фазовая траектория этой системы не покидала допустимой области G_x.

Предположим теперь, что множество G_u включает только такие функции $u(t)$, производная которых мала, а функция $X(t,\ x,\ u)$ является периодической функцией времени t периода 2π. Тогда возникает та ситуация, о которой говорилось в предыдущем разделе.

В этом случае мы можем получить приближенное решение задачи, заменяя уравнения (9.7) осредненными

$$\dot{x}=\varepsilon\overline{X}(x,\ u). \tag{9.11}$$

Предположим, что G_u не содержит ограничений на производную функцию $u(t)$. Тогда методы усреднения можно использовать одним из следующих способов.

а) Решаем задачу, в которой система уравнений (9.7) заменена системой (9.11); в результате находим функцию $u(t)$. Если окажется апостериори, что производная функция $u(t)$ мала, то у нас есть интуитивная уверенность в том, что управление, найденное при помощи процедуры усреднения системы (9.7), есть некоторое допустимое управление, близкое

к оптимальному. Заметим, что для широкого класса технических задач такое «решение задачи» оказывается достаточным.

б) Если в результате решения оптимальной задачи производная функция $u(t)$ оказывается большой (например, функция $u(t)$ может просто оказаться разрывной), то метод усреднения неприменим. Тем не менее описанная процедура может оказаться полезной для построения возможных управлений. Предположим, что u является скаляром. Введем при помощи уравнения

$$\dot{u}=\varepsilon\varphi(t), \tag{9.12}$$

где $|\varphi|\leqslant\varphi^*$, новое управление $\varphi(t)$, а функцию $u(t)$ отнесем к числу фазовых координат, φ^* — некоторое заданное число.

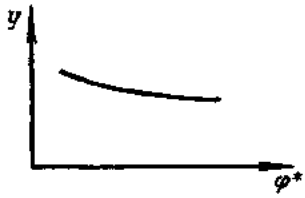

Рис. 38.

Предположим, что вариационную задачу с ограничениями (9.11), (9.12) мы можем решить эффективно для любого значения φ^*. Тогда каждому значению φ^* будет отвечать некоторое значение функционала $I(\varphi^*)$. Если эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 38, т. е. величина производной $dI/d\varphi^*$ оказывается малой, то в целом ряде технических задач этого факта оказывается достаточно для построения возможного управления, близкого к оптимальному (по функционалу).

в) Введение ограничения (9.12) сужает множество G_u. Остановимся подробнее на том случае, когда подобное сужение множества G_u сохраняет задачу в такой форме, что для нее оказывается возможным использовать принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Согласно принципу максимума оптимальное управление определяется из условия максимума функции

$$H=\varepsilon\overline{X}(x,\ u)p+\varepsilon\varphi q-F(x,u), \tag{9.13}$$

где p и q — множители Лагранжа (импульсы), которые удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}&=-\frac{\partial H}{\partial x}=-\varepsilon\frac{\partial\overline{X}(x,u)}{\partial x}p+\frac{\partial F}{\partial x},\\ \dot{q}&=-\frac{\partial H}{\partial u}=-\varepsilon\frac{\partial\overline{X}(x,u)}{\partial u}p+\frac{\partial F}{\partial u}.\end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Из вида функции H следует, что новое управление $\varphi(t)$ должно быть выбрано из условий

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varphi^*, &&\text{если}\quad q>0,\\ \varphi&=-\varphi^*, &&\text{если}\quad q<0.\end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

Итак, в рассматриваемом случае задача сводится к решению некоторой краевой задачи для системы уравнений (9.11), (9.12) и (9.13). Краевые условия — это условия трансверсальности. Например, если рассматривается задача о переходе системы из состояния x_0 в состояние x_T, то краевая задача будет формулироваться следующим образом:

$$t=0\begin{cases} x=x_0, \\ q=0, \end{cases} \qquad t=T\begin{cases} x=x_T, \\ q=0. \end{cases} \tag{9.16}$$

Примечание. Если исходная постановка вариационной задачи допускает применение принципа максимума, то можно сначала выписать всю систему уравнений сопряженной задачи

$$\dot{p}=-\varepsilon\frac{\partial X}{\partial x}p, \tag{9.17}$$

где u определяется из условия

$$H=\max_u H(x,\ p,\ u,\ t)=\max_u\{\varepsilon X(x,\ u,\ t)p-F(x,\ u)\}. \tag{9.18}$$

Правые части полученной системы уравнений будут периодическими функциями t. Множители Лагранжа будут функциями, которые изменяются медленно. Условие (9.18) нам покажет, будет ли функция $u(t)$ также изменяться медленно. В последнем случае мы сможем применить метод усреднения непосредственно к (9.7) и (9.17).

3. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу о движении космического аппарата под действием трансверсальной тяги. Предположим дополнительно, что начальная орбита космического аппарата была круговой. В предыдущем параграфе было показано, что уравнение, определяющее изменение радиуса орбиты A, после осреднения примет вид (см. (8.28)).

$$\frac{dA}{d\varphi}=2\varepsilon fA^3, \tag{9.19}$$

где εf — тяга двигателя. Во все время эволюции орбита (как это было показано) в первом приближении остается круговой.

Поставим следующую вариационную задачу: определить управление — функцию $f(\varphi)$, которая переводит аппарат с орбиты, радиус которой A_0, на орбиту радиуса A^*, за время, в течение которого аргумент φ изменится на φ_T, причем управление $f(\varphi)$ должно доставить минимум функционалу

$$I=\varepsilon\int_0^{\varphi^*} f^2\,d\varphi.$$

Составим функцию Гамильтона H

$$H = 2\varepsilon f A^3 p - \varepsilon f^2, \tag{9.20}$$

где p — множитель Лагранжа, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial A} = -6\varepsilon f A^2 p. \tag{9.21}$$

Из условия максимума функции H находим управление

$$f = A^3 p. \tag{9.22}$$

Рассмотрим теперь уравнения (9.19) и (9.21). Из этих уравнений легко находим

$$\frac{dp}{dA} = -\frac{3p}{A},$$

откуда

$$p = \frac{c}{A^3},$$

где c — некоторая постоянная: $c = (p(\varphi))_{\varphi=0}$. Подставляя полученное выражение в (9.22), находим

$$f = c.$$

Итак, оптимальное управление в этом случае постоянно. Постоянная c определяется из условия

$$(A(\varphi))_{\varphi=\varphi_T} = A^*.$$

Интегрируя уравнение (9.19), находим

$$A^* = \frac{A_0}{\sqrt{1 - \varepsilon f A_0^2 \varphi_T}},$$

откуда получаем окончательно

$$f = \frac{A^{*2} - A_0^2}{\varepsilon A_0^2 A^{*2} \varphi_T}. \tag{9.23}$$

Этот пример имел своей целью показать, что использование усредненных уравнений позволяет в отдельных случаях получить решение в явном виде. Этот пример очень прост и результат тривиален. Однако тем же приемом может быть рассмотрен и целый ряд более сложных задач. Некоторые из них приведены в монографии В. Н. Лебедева, цитированной выше на стр. 249.

ГЛАВА IV

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР

В этой главе излагаются асимптотические методы интегрирования линейных уравнений с переменными коэффициентами, содержащими большой параметр. Эта теория возникла в связи с обоснованием метода Фурье, которое потребовало изучения асимптотического поведения собственных функций и собственных чисел линейных дифференциальных операторов. Частным случаем этой задачи является задача о поведении решения уравнения

$$\ddot{y}+\lambda^2\omega^2(t)y=0, \qquad \omega>0 \qquad (*)$$

при $\lambda\to\infty$. Первые систематические рассмотрения этих задач были проведены Лиувиллем в тридцатые годы прошлого века. В XX веке вопросы поведения решений уравнений типа (*) при $\lambda\to\infty$ были предметом исследования ряда выдающихся математиков. Основные результаты этой теории связывают обычно с именами Брикхоффа и Я. Д. Тамаркина *).

Одновременно с этими исследованиями чисто математического характера и независимо от них изучались различные способы приближенного интегрирования уравнений вида (*). Первой из работ этого цикла был мемуар капитана французской артиллерии де Спарра, который построил приближенный способ интегрирования уравнений баллистики вращающегося артиллерийского снаряда. Де Спарр обратил внимание на то, что при известных интуитивно оправданных гипотезах движение артиллерийского снаряда относительно своего центра тяжести может быть описано уравнением типа (*). Это позволило де Спарру развить теорию, опирающуюся на способ приближенного интегрирования уравнения (*) при больших λ. В дальнейшем подход де Спарра к построению баллистики вращающегося снаряда стал традиционным.

Значительное развитие подобная концепция получила затем в работах покойного профессора Академии им. Жуковского

*) Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих вопросах теории дифференциальных уравнений и о разложении функций в ряды, Петроград, 1917.

Д. А. Вентцеля. В. С. Пугачев, опираясь на результаты Бригхоффа — Тамаркина, придал теории движения артиллерийского снаряда вполне современный вид и превратил интуитивно очевидную схему в строгую математическую теорию. С именем В. С. Пугачева связано также появление теории, позволяющей строить асимптотические представления весьма общего вида *).

В послевоенное время появился ряд работ, в которых изучались «сквозные асимптотики» уравнений типа (*) в случае, когда функции $\omega(t)$ могли в отдельных точках обращаться в нуль (см., например, работу А. А. Дородницына **). Выяснилась также возможность использования асимптотических представлений для построения рациональных численных схем.

Независимо от этих исследований, начиная с работ Стокса в физике, подробно изучался случай одного уравнения второго порядка вида (*). Разработанный приближенный способ получил название метода WBKJ (Wentzel, Brillouin, Kramers, Jeffreys).

В работах, посвященных методу WBKJ, главное внимание уделялось изучению поведения решений уравнения (*) в различных областях плоскости комплексного переменного λ, ограниченных линиями Стокса

$$\operatorname{Im} \int_0^t \sqrt{\omega^2(t)}\, dt = 0.$$

Значительный вклад в развитие асимптотических методов рассматриваемого типа сделан в послевоенные годы украинскими математиками И. М. Раппопортом, С. Ф. Фещенко и их учениками.

Количество работ, посвященных методам большого параметра, огромно, и замечания, которые мы сделали, отнюдь не претендуют на роль научного обзора. Большая библиография помещена в монографиях И. М. Раппопорта ***) и С. Ф. Фещенко ****). Перечнем фамилий авторов мы просто отметили тот круг вопросов, который имеет отношение к теории, излагаемой

*) В. С. Пугачев, Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе, Труды Военно-воздушной академии им Жуковского, № 70, (1940).

**) А. А. Дородницын, Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, УМН, т. VII, вып. 6, (1952).

***) И. М. Раппопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, Киев, 1954.

****) С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкилев и Л. Д. Николенко, Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, Киев, «Наукова думка», 1966.

в этой главе. Выбор вопросов этой теории, которые рассматриваются в данной монографии, определен прежде всего интересами задач динамики. Поэтому все рассмотрения мы будем вести только в действительной области изменения переменного λ.

§ 1. Одно уравнение второго порядка

1. WBKJ-решения. Подобно тому как изучение методов осреднения мы начали с рассмотрения простейших примеров и метода Ван-дер-Поля, изложение асимптотических методов большого параметра мы начнем также с рассмотрения простейших асимптотических решений и проведем рассуждения, опираясь на интуитивные соображения.

Рассмотрим уравнение (*)

$$\ddot{y} + \lambda^2\omega^2(t)\,y = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\lambda > 0$ — большой параметр $\lambda \gg 1$ и $\omega^2(t) \geqslant \alpha > 0$. Если бы функция $\omega(t)$ была постоянной величиной, то решения уравнения (1.1) имели бы вид

$$y_{1,2} = \exp\,(\pm i\lambda\omega t).$$

Кажется, что при достаточно большом λ поведение решений при $\omega = \omega(t)$ должно хорошо описываться функцией

$$\exp\left(\pm\, i\lambda \int\limits_0^t \omega(t)\,dt\right).$$

В самом деле, если λ достаточно велико, то решения уравнения (1.1) будут быстро осциллирующими функциями и за один период осцилляции функция $\omega(t)$ быстро измениться не сможет. Значит, в каждый момент времени линейно независимые решения можно аппроксимировать функциями

$$y_{1,2} \approx \exp(\pm i\lambda\bar{\omega}t),$$

где $\bar{\omega}$ — среднее значение функции $\omega(t)$, причем $\bar{\omega}t$ мало отличается от $\int \omega(t)\,dt$.

Используя эти наводящие соображения, будем искать решения уравнения (1.1) в виде

$$y_{1,2} = \exp\left[\pm\, i\lambda \int\limits_0^t \omega(t)\,dt\right] z(t, \lambda). \tag{1.2}$$

Экспоненциальный множитель в выражении (1.2) описывает быструю осцилляцию. Поэтому можно ожидать, что функция $z(t, \lambda)$ меняется медленно,

Дифференцируя дважды (1.2), подставляя в (1.1) и сокращая экспоненциальный множитель, мы получим уравнение относительно $z(t, \lambda)$

$$\ddot{z} \pm 2i\lambda\omega\dot{z} \pm i\lambda\dot{\omega}z = 0$$

или

$$\frac{1}{\lambda}\ddot{z} \pm 2i\omega\dot{z} \pm i\dot{\omega}z = 0. \tag{1.3}$$

Первая производная функции $z(t, \lambda)$ мала, вторая производная, по-видимому, должна быть еще более малой величиной; к тому же она умножается на величину $1/\lambda$, которая мала по условию. Следовательно, мы не сделаем большой ошибки, если отбросим в (1.3) слагаемое $(1/\lambda)\ddot{z}$. Уравнение (1.3) после этой процедуры превращается в уравнение первого порядка. Переменные в нем разделяются, и мы получаем

$$z(t) = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}},$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, мы получили следующие приближенные выражения для обоих линейно независимых интегралов уравнения (1.3):

$$y_{1,2}^* = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}} \exp\left[\pm i\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt\right] \tag{1.4}$$

или в тригонометрической форме

$$\left.\begin{aligned} y_1^* &= \frac{A}{\sqrt{\omega}} \cos\left(\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt\right), \\ y_2^* &= \frac{B}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Функции (1.4) и (1.5) обычно называются WBKJ-решениями. Мы предполагали, что $\omega^2(t) \geqslant \alpha > 0$. Но все рассуждения сохраняют свою силу и в том случае, когда $\omega^2(t) \leqslant \alpha < 0$, т. е. когда вместо уравнения (1.3) рассматривается уравнение

$$\ddot{y} - \lambda^2\omega_1^2(t)\,y = 0$$

при $\omega_1^2(t) \geqslant \alpha > 0$.

Для этого уравнения WBKJ-решения будут иметь вид

$$y_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega(t)}} \exp\left(\pm \lambda \int_0^t \omega(t)\,dt\right). \tag{1.5'}$$

2. Связь с методом усреднения. Рассуждения, которые мы использовали для вывода формул (1.5), не являются строгими. В следующем параграфе мы установим погрешность этих формул. Далее будет показано, что прием, который мы использовали, является частным случаем общего метода построения асимптотических представлений решений дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр.

Заметим еще, что формулы (1.5) могут быть получены методом усреднения. В самом деле, сделаем в (1.1) замену независимого переменного

$$t = \varepsilon\tau, \qquad \varepsilon = \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда уравнение (1.1) перейдет в следующее:

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \omega^2(\varepsilon\tau)\, y = 0. \tag{1.6}$$

Как мы знаем, из теории метода усреднения следует, что интеграл действия

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega(\varepsilon\tau)\, Q_\psi^2\, d\psi \tag{1.7}$$

будет адиабатическим инвариантом, т. е. его производная в силу уравнений первого приближения равна нулю. В выражении (1.7) Q и Q_ψ означает функции

$$Q = x\cos\psi, \qquad Q_\psi = -x\sin\psi.$$

Следовательно,

$$J(x) = \frac{\omega(\varepsilon\tau)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin^2\psi\, d\psi = \text{const},$$

откуда

$$x = \frac{\text{const}}{\sqrt{\omega(\varepsilon t)}}.$$

Далее, уравнение первого приближения для фазы имеет вид

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \omega(\varepsilon\tau),$$

из которого следует, что

$$y(t) = x\cos\psi = \frac{C}{\sqrt{\omega(t)}}\cos\lambda\int_0^t \omega(t)\, dt.$$

Примечание. Из этого примера тем не менее совсем не следует, что метод осреднения в каком-то смысле эквивалентен методам, которым будет посвящена эта глава. Метод усреднения не связан с линейностью задачи: так же, как и метод Пуанкаре, он позволяет исследовать некоторые задачи для нелинейных систем, близких к эталонным (решение которых нам известно и которые в свою очередь тоже могут быть нелинейными). В то же время метод усреднения может быть использован лишь для изучения процессов, близких к периодическим. Методы, которые рассматриваются в этой главе, относятся к линейным задачам, но зато никак не связаны с предположениями о периодичности решений.

3. Асимптотический характер приближенных формул. Вывод формул (1.5) и (1.5′) был основан на предположении о том, что в уравнении (1.3) можно отбросить слагаемое $(1/\lambda)\ddot{z}$, если λ достаточно велико. Это уравнение относится к классу уравнений, содержащих малый параметр при старших производных. Отбрасывание членов, содержащих малый параметр, приводит к понижению порядка системы. Решение такой системы меньшего числа степеней свободы может, вообще говоря, не иметь никакого отношения к решению исходной задачи. Тем не менее, как мы увидим ниже, при известных условиях формулы (1.5) и (1.5′) действительно являются хорошей аппроксимацией точных решений уравнения (1.1).

Прежде чем переходить к доказательству этого факта, введем одно определение.

Функции $z(t, \lambda)$ будем называть *λ^r-асимптотическим* решением (или просто решением, асимптотическим по параметру λ), если для любого $t \in [0, T]$ искомое решение можно представить в виде

$$y(t, \lambda) = z(t, \lambda) + \frac{\psi(t, \lambda)}{\lambda^r}, \tag{1.8}$$

где $\psi(t, \lambda)$ ограничена при $\lambda \to \infty$.

Цель данного параграфа будет состоять в доказательстве следующего утверждения.

Теорема. *Пусть функция $\omega^2(t)$ дважды дифференцируема на отрезке $[0, T]$ и существует такая постоянная $\alpha > 0$, что для любого $t \in [0, t]$*

$$\omega(t) \geqslant \alpha.$$

Тогда для любого $t \in [0, T]$ функция (1.5) *является λ асимптотическим решением уравнения* (1.1).

Доказательство этой теоремы опирается на два вспомогательных утверждения.

Лемма I. *Пусть u и v — положительные функции и C — положительная постоянная. Если для любого $t \geqslant 0$ имеет место неравенство*

$$u \leqslant C + \int_0^t uv\,dt, \tag{1.9}$$

то для любого $t \geqslant 0$

$$u \leqslant C \exp\left(\int_0^t v\,dt\right). \tag{1.10}$$

Доказательство этой леммы приведено в § 4 главы I.

Лемма II. *Если $\omega \geqslant \alpha > 0$ для любых $t \in [0, T]$, то для любого $\lambda \geqslant \beta > 0$ можно указать такую постоянную $D > 0$, зависящую только от начальных условий и чисел α, β и T, что при любом $t \in [0, T]$ решение задачи Коши для уравнения*

$$\ddot{y} + \lambda^2\omega^2(t)\,y = 0 \tag{1.11}$$

удовлетворяет неравенству

$$|y| \leqslant D.$$

Для доказательства умножим (1.11) на $\dot{y}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до t, в результате получим

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \lambda^2\omega^2\,\frac{y^2}{2} = \int_0^t y^2\omega\dot{\omega}\,dt + \frac{d}{2}\,\lambda^2, \tag{1.12}$$

где

$$d = \frac{\dot{y}_0^2 + \lambda^2\omega^2(0)\,y_0^2}{\lambda^2} > 0.$$

Заменим равенство (1.12) неравенством

$$\lambda^2\omega^2y^2 \leqslant \alpha^2\lambda^2C + \int_0^t 2y^2\omega|\,\dot{\omega}\,|dt,$$

где

$$C = \frac{\dot{y}_0^2}{\alpha^2\beta^2} + \frac{\omega^2(0)\,y_0^2}{\alpha^2},$$

или

$$y^2 \leqslant C + \int_0^t y^2\,\frac{2\omega\,|\,\dot{\omega}\,|}{\alpha^2\beta^2}\,dt. \tag{1.13}$$

Неравенство (1.13) удовлетворяет всем условиям леммы I, где $u=y^2$, $v=\frac{2\omega|\dot{\omega}|}{\alpha^2\beta^2}$. Следовательно, мы имеем оценку

$$y^2 \leqslant C\int_0^T \frac{2\omega|\dot{\omega}|}{\alpha^2\beta^2}\,dt = D. \tag{1.14}$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Рассмотрим функции (1.4)

$$y^*_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{\sqrt{\omega}}\exp\left\{\pm i\lambda\int_0^t \omega\,dt\right\}$$

и составим дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет. Вычисляя вторую производную, находим

$$\frac{d^2y^*_i}{dt^2} = y^*_i\left[\frac{3}{4}\omega^{-2}\dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}\omega\ddot{\omega} - \lambda^2\omega^2\right] \qquad (i=1,\ 2).$$

Следовательно, функции y^*_i удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y^*_i}{dt^2} + (\lambda^2\omega^2 + \varphi(t))\,y^*_i = 0, \tag{1.15}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\omega\ddot{\omega} - \frac{3}{4}\frac{\dot{\omega}^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, уравнению (1.15) удовлетворяют обе функции y^*_1 и y^*_2. Значит, этому уравнению удовлетворяет также их произвольная линейная комбинация

$$y^* = C_1y^*_1 + C_2y^*_2.$$

Пусть теперь y — то частное решение уравнения (1.11), которое удовлетворяет тем же начальным условиям, что и y^*. Обозначим

$$v = y - y^* \tag{1.16}$$

и перепишем уравнение (1.11) так:

$$\ddot{y} + (\lambda^2\omega^2 + \varphi)\,y = \varphi y. \tag{1.17}$$

Вычитая из уравнения (1.17) уравнение (1.15) и используя (1.16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция v:

$$\ddot{v} + (\lambda^2\omega^2 + \varphi)\,v = \varphi(t)\,y. \tag{1.18}$$

Функция v по построению удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$v(0) = \dot{v}(0) = 0. \tag{1.19}$$

Уравнение (1.18) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно v. Частные решения однородного уравнения (при $\varphi y \equiv 0$) нам известны — это функции y_1^* и y_2^*. Следовательно, функцию v мы можем выразить при помощи формулы Лагранжа

$$v(t) = \int_0^t G(t, \tau)\varphi(\tau)y(\tau)\,d\tau, \tag{1.20}$$

где $G(t, \tau)$ — известная нам функция Грина

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\Delta}\left\{y_2^*(t)\,y_2(\tau) - y_1^*(\tau)\,y_2^*(t)\right\},$$

Δ — определитель Вронского для функций y_1^* и y_2^*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1^* & y_2^* \\ \dfrac{dy_1^*}{dt} & \dfrac{dy_2^*}{dt} \end{vmatrix}.$$

Дифференцируя (1.5), убеждаемся, что

$$\dot{y}_i^* = O(\lambda).$$

Следовательно, имеем оценку

$$\Delta = O(\lambda),$$

откуда сразу следует и оценка для функции Грина

$$G = O(\lambda^{-1}).$$

В самом деле, формулы (1.4) показывают, что функции y_i^* ограничены при $\lambda \to \infty$.

Рассмотрим теперь выражение (1.20). Функция $\varphi(t)$ ограничена в силу условий, наложенных на $\omega(t)$. Для функции $y(t)$ априорная оценка дана леммой II. Следовательно, для любого $t \in [0, T]$

$$v(t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Итак,

$$y = y^* + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{1.21}$$

что и требовалось доказать.

Формула (1.21) дает оценку точности приближенного решения, построенного при помощи формул (1.5). Позднее мы увидим, что это решение может быть уточнено, а сам метод определения приближенных решения может быть видоизменен таким образом, что он окажется пригодным для построения асимптотических решений систем произвольного порядка.

4. Другой метод построения приближенных решений. Существует способ получения приближенных формул (1.5), отличный от изложенного в начале параграфа. Этот способ основан на сравнении исходного уравнения с некоторым эталонным. Такой подход, как мы в этом убедимся, позволит нам построить асимптотические решения в тех случаях, когда функция $\omega(t)$ обращается в нуль.

В этом параграфе мы рассматриваем уравнение

$$\ddot{y}+\lambda^2 f(t)y=0, \tag{1.22}$$

где λ — большой параметр, а функция $f(t)$ не меняет знака на рассматриваемом интервале времени. Решение этого уравнения мы разыскивали в форме (1.2), другими словами, предполагалось, что искомое решение близко к решению уравнения вида

$$x''\pm x=0,$$

где штрих означает дифференцирование по некоторому переменному $\tau(t)$. Уравнение

$$x''+x=0 \tag{1.23}$$

условимся называть эталонным.

Сделаем замену независимого переменного

$$t=t(\tau),$$

тогда

$$\dot{y}=\frac{y'}{t'}, \qquad \ddot{y}=\frac{y''t'-y't''}{t'^2}. \tag{1.24}$$

Используя формулу (1.24), перепишем уравнение (1.22)

$$y''-\frac{y't''}{t'}+\lambda^2 f t'^2 y=0. \tag{1.25}$$

Сделаем теперь такую замену зависимого переменного, которая позволит исключить y':

$$y=\sqrt{t'}\,z.$$

После этой замены уравнение (1.25) примет вид

$$z''+\left[\lambda^2 f\sqrt{t'}+\varphi(\tau)\right]z=0, \tag{1.26}$$

где

$$\varphi(\tau)=\frac{3}{4}\frac{(t'')^2}{(t')^2}-\frac{1}{2}\frac{t'''}{t'}.$$

Потребуем теперь, чтобы уравнение (1.26), если отбросить $\varphi(t)$, совпадало с эталонным уравнением (1.23). Для этого достаточно выбрать функцию $t(\tau)$ таким образом, чтобы

$$\lambda^2 f(t)(t')^2=1, \tag{1.27}$$

откуда

$$\tau = \pm \lambda \int_0^t \sqrt{f(t)}\, dt. \tag{1.28}$$

Оценим функцию $\varphi(\tau)$ на основании (1.27)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\lambda \sqrt{f(t)}}.$$

Используя это равенство, мы можем выразить функцию $\varphi(\tau)$ через функцию $f(t)$ и ее производные

$$\varphi(\tau) = \frac{9}{16}\frac{(f')^2}{f^2} - \frac{1}{4}\frac{f''}{f}.$$

Это выражение показывает, что если функция $f(\tau)$ изменяется медленно, т. е. ее производные много меньше единицы, а ее значение на исследуемом интервале времени не обращается в нуль, то

$$|\varphi| \ll 1$$

и в уравнении (1.26) слагаемое, содержащее функцию $\varphi(t)$, можно отбросить, поскольку первое слагаемое $\lambda^2 f(t)(t')^2$ имеет порядок единицы. Тогда уравнение (1.26) упрощается

$$z'' + \lambda^2 f(\tau)(t')^2 z = 0$$

и после выбора $t(\tau)$, согласно условию (1.27), мы получим эталонное уравнение (1.23). Следовательно,

$$z = \exp\{\pm i\tau\}$$

или, возвращаясь к старому переменному,

$$z = \exp\left\{\pm i\lambda \int_0^t \sqrt{f(t)}\, dt\right\}.$$

Таким образом, для неизвестной функции $y(t)$ мы получаем

$$y = \frac{\text{const}}{\sqrt[4]{f(t)}} \exp\left\{\pm i\lambda \int_0^t \sqrt{f(t)}\, dt\right\}, \tag{1.29}$$

т. е. мы снова пришли к формулам (1.5).

Оба способа рассуждения, которые нас привели к формулам (1.5) или (1.29), возникли при изучении прикладных задач и каждый из них имеет свои достоинства.

§ 2. Однородные системы второго порядка. Случай простых корней

1. Асимптотические решения для одного уравнения второго порядка. В предыдущем параграфе мы рассмотрели уравнение (1.1)

$$\ddot{y}+\lambda^2\omega^2(t)\,y=0$$

при условии, что $\omega^2(t)$ (которая может быть как положительной, так и отрицательной функцией времени) сохраняет знак для изучаемого промежутка времени. Для обоих частных решений этого уравнения мы вывели приближенные формулы (1.5). Таким образом, мы научились находить приближенное представление для общего решения уравнения (1.1). Далее мы доказали, что это решение носит асимптотический характер: оно стремится к точному при $\lambda\to\infty$. Одновременно была дана оценка остаточного члена; мы показали, что он имеет порядок $O(1/\lambda)$. Этот параграф будет посвящен изложению алгоритмов, позволяющих отыскивать решения с произвольной точностью.

Вернемся снова к уравнению (1.1); его решение мы искали в форме

$$y=\exp\left\{\lambda\int_0^t\mu(t)\,dt\right\}\cdot z(t,\lambda), \tag{2.1}$$

где μ — корень «характеристического уравнения»

$$\mu^2+\omega^2=0.$$

Выберем определенное значение корня μ, например положим $\mu=+i\omega$. Тогда для функции z получим уравнение (см. (1.3))

$$\ddot{z}+2i\omega\lambda\dot{z}+i\lambda\dot{\omega}z=0. \tag{2.2}$$

Естественно попытаться отыскать решение этого уравнения в виде ряда по обратным степеням параметра λ

$$z(t,\lambda)=z_0(t)+\lambda^{-1}z_1(t)+\lambda^{-2}z_2(t)+\ldots \tag{2.3}$$

Подставляя ряд (2.3) в уравнение (2.2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получаем следующие уравнения для определения неизвестных функций $z_i(t)$:

$$\left.\begin{aligned}&2\omega(t)\,\dot{z}_0+\dot{\omega}z_0=0,\\&2\omega(t)\,\dot{z}_1+\dot{\omega}z_1=i\ddot{z}_0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&2\omega(t)\,\dot{z}_s+\dot{\omega}z_s=i\ddot{z}_{s-1},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Интегрируя первое из уравнений системы (2.4), находим

$$z_0 = C\omega^{-1/2},$$

где C — произвольная постоянная.

Используя метод вариации постоянной, находим решение второго уравнения системы (2.4)

$$z_1(t) = C\omega^{-1/2}\left[D_0 + \frac{i}{2}\int_0^t \omega^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega^{-1/2}\,dt\right],$$

где D_0 — новая произвольная постоянная, и т. д.

Таким образом, частное решение, соответствующее корню $\mu + i\omega$, можно представить в виде

$$y^{(1)}(t) = \frac{C^{(1)}}{\sqrt{\omega(t)}}\left[1 + \frac{1}{\lambda}\left(D_0^{(1)} + \frac{i}{2}\int_0^t \omega^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega^{-1/2}\,dt\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda^2}(\ldots) + \ldots\right]\exp\left\{i\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\}. \qquad (2.5)$$

Легко проверить, что частное решение уравнения (1.1), соответствующее второму корню характеристического уравнения, имеет следующее представление:

$$y^{(2)}(t) = \frac{C^{(2)}}{\sqrt{\omega(t)}}\left[1 + \frac{1}{\lambda}\left(D_0^{(2)} - \frac{i}{2}\int_0^t \omega^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega^{-1/2}\,dt\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda^2}(\ldots) + \ldots\right]\exp\left\{-i\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\}. \qquad (2.6)$$

Выражения (2.6) и (2.5) содержат «дополнительные» произвольные постоянные $D_i^{(k)}$, которые возникают при интегрировании систем уравнений (2.4). Этими постоянными мы можем распорядиться по нашему усмотрению, поскольку каждой совокупности этих параметров будет отвечать свое частное решение, т. е. ряды (2.5) и (2.6) будут асимптотическими представлениями того или другого решения уравнения (1.3) в зависимости от значений постоянных $D_i^{(k)}$. Не ограничивая общности, мы можем принять их равными нулю.

Составим еще выражение для общего интеграла уравнения (1.1) для случая $\omega^2 > 0$. При этом мы заменим

$$\exp\left\{\pm i\lambda\int \omega\,dt\right\} = \cos\lambda\int \omega\,dt + i\sin\lambda\int \omega\,dt$$

и введем новые постоянные $A = C_1 + C_2$ и $B = i(C_1 - C_2)$. Тогда

$$y = \frac{A}{\sqrt{\omega}}\left\{\cos\lambda\int_0^t \omega\,dt - \frac{1}{2\lambda}\sin\lambda\int_0^t \omega\,dt\int_0^t \omega^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega^{-1/2}\,dt\right\} +$$

$$+\frac{B}{\sqrt{\omega}}\left\{\sin\lambda\int_0^t \omega\,dt + \frac{1}{2\lambda}\cos\lambda\int_0^t \omega\,dt\int_0^t \omega^{-1/2}\frac{d^2}{dt^2}\omega^{-1/2}\,dt\right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{2.7}$$

Точно так же при помощи формул (2.6) может быть построено общее решение этого уравнения для случая $\omega^2<0$. Для этого в этих формулах достаточно принять $\omega = i\psi$, где $\psi = |\omega|$.

Формула (2.7) дает приближенное решение уравнения (1.1) уже с большей точностью, чем WBKJ-решения. Его погрешность имеет порядок $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$. Рассматривая следующие уравнения системы (2.4), мы можем получить решения, погрешность которых будет иметь еще более высокий порядок.

Рассмотрим теперь несколько более общий случай

$$\ddot{y} + \lambda^2 F(t, \lambda)\, y = 0, \tag{2.8}$$

где

$$F(t, \lambda) = f_0(t) + \frac{1}{\lambda} f_1(t) + \ldots$$

Ниже мы столкнемся с одним важным применением уравнения (2.8). Подобному тому, как мы это делали в предыдущем пункте, частное решение уравнения (2.8) будем искать в виде

$$y(t, \lambda) = \exp\left\{\lambda\int_0^t \mu(t)\,dt\right\}\left(z_0(t) + \frac{1}{\lambda} z_1(t) + \ldots\right), \tag{2.9}$$

где $\mu(t)$ — один из двух корней уравнения

$$\mu^2(t) + f_0(t) = 0,$$

которое мы условились называть характеристическим. Итак,

$$\mu(t) = \pm i\sqrt{f_0(t)}.$$

Подставляя разложение (2.9) в уравнение (2.8), получим следующие уравнения для определения функций $z_0(t)$, $z_1(t)$ и т. д.:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mu^2 + f_0(t))\, z_0 = 0,\\
&(\mu^2 + f_0(t))\, z_1 = -[2\dot{z}_0\mu + \dot{\mu} z_0 + f_1 z_0],\\
&(\mu^2 + f_0(t))\, z_2 = L z_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

где через Lz_i обозначен дифференциальный оператор первого порядка относительно функций z_i. Коэффициенты этого выражения являются известными функциями времени: они определяются предыдущими приближениями.

Рассмотрим первое из уравнений системы (2.10). Так как $\mu^2+f_0=0$, то, для того чтобы это уравнение имело смысл, выражение, стоящее в правой части, также должно обращаться в нуль, т. е. функция $\dot{z}_0$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$2\dot{z}_0\mu+\dot{\mu}z_0+f_1z_0=0. \tag{2.11}$$

Это уравнение отличается от первого из уравнений системы (2.4) слагаемым f_1z_0. Интегрируя (2.11), получим

$$z_0(t)=\frac{C}{\sqrt{|\mu|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{f_1(t)}{\mu(t)}\,dt\right\}. \tag{2.12}$$

Функция $z_1(t)$ будет определена из второго уравнения системы (2.10), которое нам дает

$$Lz_1=0. \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) — это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами, которые полностью определяются функциями f_0, f_1 и f_2.

Этот процесс можно продолжать неограниченно, и любой член ряда (2.9) может быть определен. Таким образом, каждому из корней характеристического уравнения мы можем поставить в соответствие ряд (2.9), который определяет формальное решение. Этот ряд определен не единственным образом. Поскольку функции z_i определяются как решения дифференциальных уравнений, эти ряды содержат произвольные постоянные, которыми можно распорядиться как угодно.

Изложенный метод построения асимптотических решений пригоден в равной степени для изучения уравнений, имеющих и колеблющиеся решения ($f_0>0$) и неколеблющиеся ($f_0<0$).

2. Уравнение произвольного ранга. Представляет известный интерес рассмотреть уравнение более общего вида

$$\ddot{y}+\lambda^{2p}F(t,\ \lambda)\,y=0, \tag{2.14}$$

где функция $F(t,\ \lambda)$ имеет тот же вид, что и раньше. Уравнение (2.14) условимся называть уравнением ранга p (p всегда будем считать целым положительным числом). Соответственно принятой терминологии уравнения (1.1) и (2.8) будут уравнениями

первого ранга. Разложение (2.9) следует в этом случае заменить таким:

$$y = \exp \int \left(\lambda^p \mu_0(t) + \lambda^{p-1}\mu_1(t) + \ldots + \lambda\mu_{p-1}(t)\right) dt \times \\ \times \left(z_0(t) + \lambda^{-1} z_1(t) + \ldots\right). \qquad (2.15)$$

Здесь μ_0 — по-прежнему корень характеристического уравнения.

Подставляя разложения (2.15) в (2.14), мы получим уравнения для определения неизвестных функций $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$, z_0, z_1 и т. д. Первые $(p-1)$ уравнений этой системы определяют функции μ_i. Выпишем для примера первое из этих уравнений

$$(\mu_0^2 + f_0) z_1 = -(2\mu_0\mu_1 + f_1) z_0. \qquad (2.16)$$

Для того чтобы это уравнение имело смысл при $z_0 \neq 0$, необходимо, чтобы

$$\mu_1(t) = -\frac{f_1(t)}{2\mu_0(t)}.$$

Функция $\mu_2(t)$ определяется из следующего уравнения и т. д. Заметим, что функция $z_0(t)$ не определяется уравнением (2.16). В остальных уравнениях, которые определяют функции $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{p-1}$, последние также не могут быть определены. Функция z_0 определяется из уравнения, которое мы получим, приравнивая коэффициенты при первой степени параметра λ. Уравнение для $z_0(t)$, как это нетрудно проверить, будет дифференциальным уравнением первого порядка типа уравнения (2.11). Остальные функции $z_i(t)$ будут находиться из аналогичных уравнений первого порядка.

Уравнения, которые мы до сих пор рассматривали, не содержали первой производной. Однако уравнения более общего вида

$$\ddot{y} + 2\lambda^p \Phi(t, \lambda)\dot{y} + \lambda^{2p} F(t, \lambda) y = 0 \qquad (2.17)$$

легко сводятся к рассмотренному стандартной заменой переменного

$$y = \exp\left\{-\lambda^p \int_0^t \Phi\, dt\right\} x, \qquad (2.18)$$

Уравнение для $x(t)$ будет

$$\ddot{x} + \lambda^{2p}\left\{F(t, \lambda) - \Phi^2(t, \lambda) - \frac{d}{dt}\Phi(t, \lambda)\right\} x = 0. \qquad (2.19)$$

Рассмотрим для примера уравнен

$$\ddot{y} + \lambda\varphi(t)\dot{y} + \lambda^2 f(t) y = 0. \qquad (2.20)$$

После преобразования (2.18) оно примет форму

$$\ddot{x} + \lambda^2 \left(f(t) - \varphi^2(t) - \frac{d\varphi}{dt} \right) x = 0.$$

Для этого уравнения WBKJ-решение имеет вид

$$x = \frac{C}{\sqrt[4]{f - \varphi^2 - \dot{\varphi}}} \exp \left\{ \pm i\lambda \int_0^t \sqrt{f - \varphi^2 - \dot{\varphi}}\, dt \right\}.$$

Следовательно, приближенные решения уравнения (2.20) будут

$$y = \frac{C}{\sqrt[4]{f^2 - \varphi^2 - \dot{\varphi}}} \exp \left\{ \int_0^t \left[\varphi \pm i \sqrt{f - \varphi^2 - \dot{\varphi}} \right] dt \right\}. \tag{2.21}$$

Величину

$$a = \frac{C e^{-\int_0^t \varphi\, dt}}{\sqrt[4]{f^2 - \varphi^2 - \dot{\varphi}}} \tag{2.21'}$$

в случае колебательных движений ($f - \varphi^2 - \dot{\varphi} > 0$) естественно называть амплитудой. Таким образом, формула (2.22) определяет закон «затухания» амплитуды.

Примечание. Для построения асимптотического решения уравнения (2.17) замена (2.18) не является необходимой. Его можно разыскивать непосредственно в виде (2.15).

3. Система второго порядка. Перейдем теперь к изучению системы второго порядка, содержащей большой параметр

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 + a_{11}(t, \lambda)\, y_1 + a_{12}(t, \lambda)\, y_2 = 0, \\ \dot{y}_2 + a_{21}(t, \lambda)\, y_1 + a_{22}(t, \lambda)\, y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Предполагается, что функции a_{ij} представимы в следующей форме:

$$a_{ij}(t, \lambda) = \lambda a_{ij}^{(1)}(t) + a_{ij}(t) + \ldots + \lambda^{-s} h_{ij}(t, \lambda),$$

где h_{ij} — функция ограниченная при $|\lambda| \to \infty$.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} + \mu & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} + \mu \end{vmatrix} = 0 \tag{2.23}$$

будем называть характеристическим уравнением системы (2.22). Его корни $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ будем считать не равными нулю и различными на всем интервале $[0, T]$, на котором проводятся исследования.

Частные решения системы (2.22) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\} \cdot z_1(t, \lambda), \\ y_2 &= \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\} \cdot z_2(t, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

где $\mu(t)$ — один из корней уравнения (2.23), а z_1 и z_2 мы представляем в форме рядов

$$\left.\begin{aligned} z_1(t, \lambda) &= z_1^{(0)}(t) + \lambda^{-1} z_1^{(1)} + \ldots, \\ z_2(t, \lambda) &= z_2^{(0)}(\lambda) + \lambda^{-1} z_2^{(1)} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Подставляя выражения (2.24) и (2.25) в систему уравнений (2.22) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, приходим к следующим системам уравнений для определения функций $z_i^{(j)}$:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}^{(1)} + \mu) z_1^{(0)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(0)} &= 0, \\ a_{21}^{(1)} z_1^{(0)} + (a_{22}^{(1)} + \mu) z_2^{(0)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}^{(1)} + \mu) z_1^{(1)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(1)} &= -\dot{z}_1^{(0)} - a_{11}^{(0)} z_1^{(0)} - a_{12}^{(0)} z_2^{(0)}, \\ a_{21}^{(1)} z_1^{(1)} + (a_{22}^{(1)} + \mu) z_2^{(1)} &= -\dot{z}_2^{(0)} - a_{21}^{(0)} z_1^{(0)} - a_{22}^{(0)} z_2^{(0)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}^{(1)} + \mu) z_1^{(k)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(k)} &= -\left\{\frac{dz_1^{(k-1)}}{dt} + a_{11}^{(0)} z_1^{(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{12}^{(0)} z_2^{(k-1)} + \ldots + a_{11}^{-(k-1)} z_1^{(0)} + a_{12}^{-(k-1)} z_2^{(0)}\right\}, \\ a_{21}^{(1)} z_1^{(k)} + (a_{22}^{(1)} + \mu) z_2^{(k)} &= -\left\{\frac{dz_2^{(k-1)}}{dt} + a_{21}^{(0)} z_1^{(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. + a_{22}^{(0)} z_2^{(k-1)} + \ldots + a_{21}^{-(k-1)} z_1^{(0)} + a_{22}^{-(k-1)} z_2^{(0)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

Рассмотрим систему (2.26). Так как μ — корень уравнения (2.23), то она представляет собой систему линейных однородных алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю. Следовательно, она может допускать ненулевые решения, причем одна из неизвестных, например функция $z_1^{(0)}$, может быть задана произвольно, тогда функция $z_2^{(0)}$ определяется однозначно

$$z_2^{(0)} = k z_1^{(0)},$$

где

$$k = -\frac{a_{11}^{(1)} + \mu}{a_{12}^{(1)}}. \tag{2.29}$$

Таким образом, система (2.26) не позволяет определить функцию $z_1^{(0)}$, которая в этом приближении остается произвольной.

Рассмотрим теперь систему (3.27), представляющую собой систему двух неоднородных уравнений относительно $z_1^{(1)}$, причем определитель системы равен нулю. Для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы между величинами, стоящими в правых частях системы (2.27), была такая же зависимость, как и между элементами строк матрицы (2.23). Другими словами, для ее разрешимости необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы (2.23). Это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{dz_1^{(0)}}{dt} + a_{11}^{(0)} z_1^{(0)} + a_{12}^{(0)} z_2^{(0)} = C\left(\frac{dz_2^{(0)}}{dt} + a_{21}^{(0)} z_1^{(0)} + a_{22}^{(0)} z_2^{(0)}\right), \tag{2.30}$$

где

$$C = \frac{a_{11}^{(1)} + \mu}{a_{21}} = \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{22}^{(1)} + \mu}. \tag{2.30'}$$

Принимая во внимание равенство (2.29), преобразуем уравнение (2.30):

$$(1 - Ck)\frac{dz_1^{(0)}}{dt} = F_0(t) z_1^{(0)}, \tag{2.31}$$

где

$$F_0(t) = Ck + Ca_{21}^{(0)} - a_{11}^{(0)} + k\left(Ca_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)}\right).$$

Таким образом, функция $z_1^{(0)}$ удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению первого порядка и, следовательно, представима в форме квадратуры

$$z_1^{(0)} = C_1^{(0)} \exp\left\{\int_0^t \frac{F_0(t)\,dt}{1 - Ck}\right\}, \tag{2.32}$$

где $C_1^{(0)}$ — произвольная постоянная.

Итак, обе функции $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$ определены. Эти функции дают «нулевой член» асимптотического ряда.

Определив функцию $z_1^{(0)}$ по формуле (2.32), мы тем самым обеспечим разрешимость системы (2.27). Так как определитель этой системы равен нулю, то одна из искомых величин (например, $z_1^{(1)}$) остается неопределенной.

Повторяя аналогичные рассуждения для уравнения следующих приближений, мы убеждаемся в возможности определить любой член разложения (2.25). При этом следует иметь в виду, что функции $z_i^{(k)}$ находятся как решения дифференциального уравнения и, следовательно, будут содержать произвольные постоянные. Так как функции C, k и экспоненциальный множитель в (2.24) зависят от значения μ, то двум различным значениям корня характеристического уравнения будут отвечать два различных частных решения системы (2.22). Следовательно, как и в случае одного уравнения второго порядка, данный метод позволяет построить общий интеграл, т. е. составить матрицу фундаментальных решений.

4. Некоторые частные случаи. Особенно простой вид приобретают выражения для определения членов разложений (2.24), (2.25), если матрица $\|a_{ij}^{(1)}\|$ диагональная:

$$\|a_{ij}^{(1)}\| = \begin{Vmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{Vmatrix}.$$

Тогда из (2.26) следует, что либо $\mu = -a_{11}^{(1)}$, либо $\mu = -a_{22}^{(1)}$. Пусть, например, имеет место первый случай, тогда сразу находим $z_2^{(0)} = 0$, и система (2.27) принимает следующий вид:

$$0 = -\frac{dz_1^{(0)}}{dt} - a_{11}^{(0)} z_1^{(0)},$$

$$(a_{22}^{(1)} - a_{11}^{(1)}) z_2^{(1)} = -a_{21}^{(0)} z_1^{(0)}.$$

Из первого уравнения этой системы находим $z_1^{(0)}$:

$$z_1^{(0)} = C \exp\left\{ -\int_0^t a_{11}^{(0)}\, dt \right\},$$

из второго уравнения *) определяем $z_2^{(0)}$:

$$z_2^{(0)} = \frac{a_{21}^{(0)} z_1^{(0)}}{a_{11}^{(1)} - a_{22}^{(1)}}.$$

Так как всякое уравнение второго порядка может быть сведено к системе двух уравнений первого порядка, то формулы, полученные в начале параграфа, как частный случай следуют из

*) Напомним, что по условию корни характеристического уравнения различны для всех значений t из исследуемого промежутка времени и в нуль не обращаются. Следовательно, написанное выражение имеет смысл для любого $t \in [0, T]$.

формул, установленных в предыдущем пункте. Покажем это на простейшем примере.

Уравнение

$$\ddot{y}+\lambda^2\omega^2 y=0$$

эквивалентно системе

$$\dot{x}+\lambda\omega^2 y=0, \qquad \dot{y}-\lambda x=0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение этой системы такое:

$$\begin{vmatrix} \mu & \omega^2 \\ -1 & \mu \end{vmatrix}=0.$$

Положим для определенности $\mu=\mu_1=i\omega$ и выпишем систему (2.26)

$$i\omega z_1^{(0)}+\omega^2 z_2^{(0)}=0,$$
$$-z_1^{(0)}+i\omega z_2^{(0)}=0.$$

Далее,

$$z_2^{(0)}=kz_1^{(0)}, \qquad k=-\frac{i}{\omega}.$$

Для определения функции $z_1^{(0)}$, согласно общей схеме, следует определить функцию

$$C=\frac{a_{11}^{(0)}+\mu}{a_{21}}=-i\omega.$$

Функция F_0 в уравнении (2.31) имеет вид $F_0=-\frac{\dot{\omega}}{\omega}$. Далее $Ck=-1$. Следовательно,

$$z_1^{(0)}=C_1^{(0)}\exp\left\{\int_0^t \frac{\dot{\omega}}{2\omega}\,dt\right\}=C_1^{(0)}\exp\left\{-\ln\sqrt{\omega}\right\}=\frac{C_1^{(0)}}{\sqrt{\omega}}.$$

Таким образом, мы снова пришли к результатам § 1.

5. Система произвольного ранга. Системы уравнений (2.22), коэффициенты которых имеют вид

$$a_{ij}=\lambda^p a_{ij}^{(p)}+\lambda^{p-1}a_{ij}^{(p-1)}+\ \ldots\ +a_{ij}^{(0)}+\lambda^{-1}a_{ij}^{(-1)}+\ \ldots,$$

будем называть системами ранга p. Построение асимптотических разложений решений таких уравнений требует незначительной модификации изложенной схемы.

Частные решения системы (2.22) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \exp\left\{\int_0^t \left[\lambda^p\mu + \lambda^{p-1}\mu_1 + \ldots + \lambda\mu_{p-1}\right] dt\right\} z_1, \\ y_2 &= \exp\left\{\int_0^t \left[\lambda^p\mu + \lambda^{p-1}\mu_1 + \ldots + \lambda\mu_{p-1}\right] dt\right\} z_2, \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

где функции z_i разыскиваются в форме ряда

$$z_i = z_i^{(0)} + \frac{1}{\lambda} z_i^{(1)} + \ldots \tag{2.34}$$

Функция μ будет корнем характеристического уравнения, которое в этом случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(p)} + \mu & a_{12}^{(p)} \\ a_{21}^{(p)} & a_{22}^{(p)} + \mu \end{vmatrix} = 0. \tag{2.35}$$

Функции μ_i $(i=1, 2, \ldots, p-1)$, входящие в выражение (2.33), должны быть определены в процессе решения задачи.

Для того чтобы показать особенность этой задачи по сравнению с рассмотренной, нам достаточно проанализировать случай $p=2$. Случай $p>2$ изучается аналогично.

Итак, пусть $p=2$. Составим первые три системы уравнений, приравнивая коэффициенты при второй, первой и нулевой степени параметра λ

$$\left.\begin{aligned} \left(a_{11}^{(2)} + \mu\right) z_1^{(0)} + a_{12}^{(2)} z_2^{(0)} &= 0, \\ a_{21}^{(2)} z_1^{(0)} + \left(a_{22}^{(2)} + \mu\right) z_2^{(0)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(a_{11}^{(2)} + \mu\right) z_1^{(1)} + a_{12}^{(2)} z_2^{(1)} &= -\left\{\left(a_{11}^{(1)} + \mu_1\right) z_1^{(0)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(0)}\right\}, \\ a_{21}^{(2)} z_1^{(1)} + \left(a_{22}^{(2)} + \mu\right) z_2^{(1)} &= -\left\{a_{21}^{(1)} z_1^{(0)} + \left(a_{22}^{(1)} + \mu_1\right) z_2^{(0)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.37}$$

$$\left.\begin{aligned} \left(a_{11}^{(2)} + \mu\right) z_1^{(2)} + a_{12}^{(2)} z_2^{(2)} &= -\left\{\frac{dz_1^{(0)}}{dt} + a_{11}^{(0)} z_1^{(0)} + a_{12}^{(0)} z_{12}^{(0)} + \right. \\ &\qquad \left. + \left(a_{11}^{(1)} + \mu_1\right) z_1^{(1)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(1)}\right\}, \\ a_{21}^{(2)} z_1^{(2)} + \left(a_{22}^{(2)} + \mu\right) z_2^{(2)} &= -\left\{\frac{dz_2^{(0)}}{dt} + a_{21}^{(0)} z_1^{(0)} + a_{22}^{(0)} z_2^{(0)} + \right. \\ &\qquad \left. + a_{21}^{(1)} z_1^{(1)} + \left(a_{22}^{(1)} + \mu_1\right) z_2^{(1)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Так же, как и в предыдущем случае, из системы (2.36) мы мо-

жем найти только отношение искомых функций $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$. Таким образом, формула (2.29) остается справедливой.

Условие разрешимости системы (2.37) можно записать так:

$$\left(a_{11}^{(1)}+\mu_1\right)z_1^{(0)}+a_{12}^{(1)}z_2^{(0)}=C\left[a_{21}^{(1)}z_1^{(0)}+\left(a_{22}^{(1)}+\mu_1\right)z_2^{(0)}\right], \qquad (2.39)$$

где множитель C определяется формулой (2.30). Используя выражение (2.29), мы перепишем это условие в виде

$$z_1^{(0)}\left\{a_{11}^{(1)}+\mu_1+ka_{12}^{(1)}-C\left[a_{21}^{(1)}+k\left(a_{22}^{(1)}+\mu_1\right)\right]\right\}=0. \qquad (2.40)$$

Так как $z_1^{(0)}\not\equiv 0$, то равенство (2.40) нам позволяет определить функцию $\mu_1(t)$:

$$\mu_1(t)=\frac{C\left(a_{21}^{(1)}+ka_{22}^{(1)}\right)-a_{11}^{(1)}-ka_{12}^{(1)}}{1-C_k}. \qquad (2.41)$$

Таким образом, в этом приближении функция $z_1^{(0)}(t)$ также не определяется, она находится из системы (2.38).

Перепишем условие разрешимости указанной системы с учетом равенства (2.39)

$$\frac{dz_1^{(0)}}{dt}+a_{11}^{(0)}z_1^{(0)}+a_{12}z_2^{(0)}=C\left(\frac{dz_2^{(0)}}{dt}+a_{21}^{(0)}z_1^{(0)}+a_{22}^{(0)}z_2^{(0)}\right). \qquad (2.42)$$

Равенство (2.42) — это дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной $z_1^{(0)}$.

Уравнения остальных приближений определяют функции $z_i^{(k)}$ $(i=1,\ 2;\ k>0)$.

Случай произвольного ранга $p>2$ мало отличается от рассмотренного. Подставляя разложения (2.33) в исходную систему уравнений, мы получим системы уравнений, которые определяют искомые функции. Легко проверить, что первые p уравнений оставляют функции $z_1^{(0)}, z_1^{(1)}, \ldots, z_1^{(p-1)}$ неопределенными, но зато условие разрешимости этих систем нам дадут алгебраические соотношения, из которых мы можем найти функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t), \ldots, \mu_{p-1}(t)$. Первая из систем, позволяющая вычислить функцию $z_1^{(0)}$, будет та, которая получена сравнением коэффициентов при значении параметров в нулевой степени.

6. Возможные модификации алгоритма построения асимптотических рядов. Помимо изложенного, существуют различные другие модификации методов построения асимптотических разложений решений дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр. Рассмотрим одну из таких модификаций на примере системы первого ранга

$$\dot{y}_1+\left(\lambda a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(0)}+\ldots\right)y_1+\left(\lambda a_{12}^{(1)}+a_{12}^{(0)}+\ldots\right)y_2=0,$$
$$\dot{y}_2+\left(\lambda a_{21}^{(1)}+a_{21}^{(0)}+\ldots\right)y_1+\left(\lambda a_{22}^{(1)}+a_{22}^{(0)}+\ldots\right)y_2=0.$$

Обозначим через $\mu(t)$ какой-либо из корней характеристического уравнения и решение будем искать в форме

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \exp\left\{\int_0^t (\lambda\mu + \mu_0 + \lambda^{-1}\mu_1 + \ldots)\,dt\right\} z_1(t, \lambda), \\ y_2 &= \exp\left\{\int_0^t (\lambda\mu + \mu_0 + \lambda^{-1}\mu_1 + \ldots)\,dt\right\} z_2(t, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

где функции $z_i(t, \lambda)$ задаются в виде рядов (2.11).

Уравнения первого приближения будут такими:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}^{(1)} + \mu) z_1^{(0)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(0)} &= 0, \\ a_{21}^{(1)} z_1^{(0)} + (a_{22}^{(1)} + \mu) z_2^{(0)} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

Функция $z_1^{(0)}(t)$ и $z_2^{(0)}(t)$ связаны друг с другом соотношением (2.29). Для того чтобы удовлетворить системе (2.44), мы можем совершенно произвольно задать одну из функций. Например, системе (2.44) удовлетворяют следующие функции:

$$z_1^{(0)}(t) = a_{22}^{(1)} + \mu, \qquad z_2^{(0)} = -a_{21}^{(1)}. \tag{2.45}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений второго приближения

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}^{(1)} + \mu) z_1^{(1)} + a_{12}^{(1)} z_2^{(1)} &= -\left\{\frac{dz_1^{(0)}}{dt} + (a_{11}^{(0)} + \mu_1) z_1^{(0)} + a_{12}^{(0)} z_2^{(0)}\right\}, \\ a_{21}^{(1)} z_2^{(1)} + (a_{22}^{(1)} + \mu) z_2^{(1)} &= -\left\{\frac{dz_2^{(0)}}{dt} + a_{21}^{(0)} z_1^{(0)} + (a_{22}^{(0)} + \mu_1) z_2^{(0)}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Условие разрешимости системы (2.46) нам даст уравнение для определения функции μ_1, поскольку функции $z_1^{(0)}(t)$ и $z_2^{(0)}(t)$ уже подобраны при помощи соотношения (2.45).

Так как функцию $\mu_1(t)$ мы выбрали так, чтобы система (2.45) была разрешима, то, задав одну из функций $z_1^{(1)}(t)$ или $z_2^{(1)}(t)$ по произволу, однозначно определяем другую функцию по формуле (2.29).

Рассуждая подобным образом, мы убеждаемся в возможности определить все члены разложений (2.43): из третьего приближения мы находим функцию $\mu_2(t)$ (она будет однозначно определена функциями $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, $z_1^{(1)}$ и $z_2^{(1)}$, и затем можно вычислить функции $z_1^{(2)}$ и $z_2^{(2)}$, одна из которых задается по произволу и т. д.

Изложенный способ построения асимптотических рядов приводит в общем случае к другому выражению для приближенного решения. Это отражает тот общий факт, что асимптотические представления определяются не единственным образом. Однако

одинаковые отрезки асимптотических рядов обеспечивают одну и ту же точность.

В § 1 этой главы мы вывели простейшие приближенные формулы и установили для некоторых частных случаев их асимптотический характер: было показано, что ошибка, которую они дают, имеет порядок $O(1/\lambda)$. В этом параграфе мы дали формальное описание алгоритма, позволяющего построить любое λ^p асимптотическое решение. Доказательство теоремы, которая обосновывает асимптотический характер построенных рядов, можно найти в известной монографии Я. Д. Тамаркина, цитированной на стр. 279.

§ 3. Однородные системы второго порядка. Случай кратных корней

1. Предварительные замечания. Мы изучали системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = 0, \\ \dot{y}_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

у которых коэффициенты a_{ij} имели следующие представления:

$$a_{ij}(t, \lambda) = \lambda^p a_{ij}^{(p)}(t) + \lambda^{p-1} a_{ij}^{(p-1)}(t) + \ldots + a_{ij}^{(0)}(t) + \ldots$$

Развитый метод существенным образом опирался на предположение, что при изменении t в рассматриваемом интервале времени оба корня характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(p)} + \mu & a_{12}^{(p)} \\ a_{21}^{(p)} & a_{22}^{(p)} + \mu \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

были различны и не обращались в нуль.

Существование кратных корней может привести к появлению внутренних резонансов; при этом наступает качественное изменение поведения решений: колеблющиеся решения начинают приобретать вековые изменения, у апериодических решений меняется характер роста и т. д.

Однако не во всех случаях кратные корни бывают источником появления внутренних резонансов. Может оказаться, что система, имеющая кратные частоты, ведет себя подобно системе с некратными частотами. Примером такой системы является сферический маятник: наличие кратных частот не приводит к появлению вековых движений.

Прежде чем переходить к изложению некоторых результатов этой теории, напомним ряд фактов из линейной алгебры.

Пусть мы имеем некоторое линейное невырожденное преобразование

$$y = Ax, \tag{3.3}$$

где x и y — векторы n-мерного евклидова пространства R_n. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0,$$

где E — единичная матрица. Матрицу $\|A - \lambda E\|$ будем называть характеристической.

В курсах линейной алгебры *) доказывается, что в пространстве R_n всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы матрица линейного преобразования A имела в этой системе координат следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \left.\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{matrix}\right\} s_1 \text{ строк} & & & & 0 \\ & \left.\begin{matrix} \lambda_2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_2 \end{matrix}\right\} s_2 \text{ строк} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & \left.\begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_k \end{matrix}\right\} s_k \text{ строк} & & \\ 0 & & & & \end{array} \right\|.$$

Другими словами, существует такое невырожденное линейное преобразование C, что матрица $C(A - \lambda E)C^{-1}$ имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \boxed{\lambda_1 - \lambda, \ 1} \ s_1 & & & & \\ & \boxed{\lambda_2 - \lambda, \ 1} \ s_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \boxed{\lambda_k - \lambda, \ 1} \ s_k \end{array} \right\|,$$

*) См., например, И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре. Москва, 1948.

где

$$\boxed{\lambda_r-\lambda,\ 1}\ s_r=\left\|\begin{matrix} \lambda_r-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_r-\lambda & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_r-\lambda \end{matrix}\right\|\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}s_r \text{ строк.}$$

Здесь $s_1+s_2+\ldots+s_k=n$. Среди величин λ_r могут быть равные. Матрицы такого вида мы будем называть жордановым ящиком или жордановой клеткой. Изображенная форма матрицы A называется нормальной жордановой формой. Представление матрицы A в нормальной жордановой форме единственно.

Обозначим через $D_k(\lambda)$ общий наибольший делитель миноров матрицы $\|A-\lambda E\|$ порядка k. Пусть теперь матрица A имеет p ящиков порядка $n_1, n_2, \ldots, n_{p_1}$, соответствующих собственному значению λ_1 (причем $n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_p$), q ящиков порядка $m_1, m_2, \ldots, m_q$ $(m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\geqslant m_q)$, соответствующих собственному значению λ_2 и т. д. Тогда жорданова форма матрицы A такая:

$$A=\left\|\begin{array}{llllll} \boxed{\lambda_1}\}\,n_1 \text{ строк} & & & & & \\ & \boxed{\lambda_1}\}\,n_2 \text{ строк} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \boxed{\lambda_1}\}\,n_{p_1} \text{ строк} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \boxed{\lambda_2}\}\,m_r \text{ строк} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\lambda_2}\}\,m_{p_2} \text{ строк} & \\ & & & & & \ddots \end{array}\right\|.$$

Полиномы $D_k(\lambda)$ имеют в этом случае следующий вид:

$$D_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1+n_2+\ldots+n_{p_1}}(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1+m_2+\ldots+m_{p_2}}F_n(\lambda),$$

$$D_{n-1}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_2+\ldots+n_{p_1}}(\lambda-\lambda_2)^{m_2+\ldots+m_{p_2}}F_{n-1}(\lambda),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где $F_k(\lambda)$ — некоторые полиномы от λ, не делящиеся на $\lambda-\lambda_1$ и на $\lambda-\lambda_2$.

Доказательство этого факта читатель может найти, например, в указанной выше книге Гельфанда (для его доказательства используется метод индукции).

Большую роль играют многочлены $E_k(\lambda)$, определяемые при помощи равенства

$$E_k(\lambda)=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}.$$

$E_k(\lambda)$ называются инвариантными множителями матрицы $A-\lambda E$. В ситуации, которая только что была рассмотрена, инвариантные множители имеют вид

$$E_n=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots,$$
$$E_{n-1}=(\lambda-\lambda_1)^{n_2}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Последовательность инвариантных множителей полностью определяет жорданову нормальную форму матрицы A, а размеры ящиков, соответствующих собственному значению λ_1, равны n_1, n_2, ... Аналогично размеры ящиков, соответствующих собственному значению λ_2, равны m_1, m_2, ... и т. д. Выражения $(\lambda-\lambda_1)^{n_i}$, $(\lambda-\lambda_2)^{m_i}$, ... и т. д. называются элементарными делителями инвариантного множителя $E_i(\lambda)$.

Рассмотрим один пример, который нам потребуется при изложении одного из последующих разделов этой главы.

Пусть жорданова форма матрицы A имеет вид

$$A=\begin{Vmatrix}\lambda_1 & 1 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \ldots & .\\ . & . & . & .\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_1\end{Vmatrix}.$$

Тогда легко убедиться, что $D_n=(\lambda-\lambda_1)^n$, $D_{n-1}=1$ и, следовательно, $E_n=(\lambda-\lambda_1)^n$, $E_s=1$ $(s\leqslant n)$.

Из сказанного выше мы получаем следующее важное следствие.

Для того чтобы матрицу можно было привести к диагональному виду, необходимо и достаточно, чтобы инвариантные множители этой матрицы имели простые корни. В этом случае элементарные делители всех инвариантных множителей матрицы будут простыми, т. е. будут иметь вид

$$(\lambda-\lambda_1),\qquad(\lambda-\lambda_2),\ldots,$$

После этих замечаний справочного характера вернемся снова к изучаемому предмету.

Вопрос о том, как ведет себя система при наличии кратных корней, зависит от того, являются ли элементарные делители матрицы $\|a_{ij}^{(p)}\|$ кратными или простыми, т. е. от того, какой вид имеет жорданова форма этой матрицы.

Если элементарные делители простые и имеется кратный корень $\gamma_1=\gamma_2$, то матрица $\|a_{ij}^{(p)}\|$ имеет вид

$$\|a_{ij}^{(p)}\|=\begin{Vmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{Vmatrix}, \tag{3.4}$$

где γ_i — корни характеристического уравнения (3.2).

Если кратность элементарного делителя равна двум, то жорданова форма имеет вид

$$\|a_{ij}^{(p)}\|=\begin{Vmatrix}\gamma & 1\\ 0 & \gamma\end{Vmatrix}. \tag{3.5}$$

Хотя в обоих случаях, когда $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, корень характеристического уравнения имеет кратность, равную двум, поведение решений системы (3.1) и асимптотика при $\lambda\to\infty$ будут различными.

Общее исследование систем в том случае, когда характеристическое уравнение может иметь кратные корни, представляется не только громоздким, но и трудным. Поскольку коэффициенты характеристического уравнения зависят от времени, здесь могут возникать разнообразные ситуации. В этом параграфе мы рассмотрим только самые простые случаи, относящиеся к тому же к системам второго порядка. Некоторые вопросы, относящиеся к общему случаю, будут рассмотрены в конце главы.

2. Случай простых элементарных делителей. Предположим сначала, что ранг системы (3.1) равен единице.

Для того чтобы не усложнять изложения, предположим сразу, что независимые переменные выбраны так, что матрица $\|a_{ij}^{(p)}\|$ уже приведена к жордановой форме.

Рассмотрим последовательно случаи (3.4) и (3.5). Поскольку характер корней, а следовательно, и вид жордановой формы зависят от времени, то такой подход имеет смысл только в том случае, если рассматриваемая ситуация не изменяется в течение всего исследуемого промежутка времени.

Если корни кратные, но элементарные делители простые, то систему уравнений (3.1) можно переписать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}_1+(\lambda\mu+a_{11}^{(0)}+\ldots)y_1+(a_{12}^{(0)}+\ldots)y_2=0,\\ &\dot{y}_2+(a_{21}^{(0)}+\ldots)y_1+(\lambda\mu+a_{22}^{(0)}+\ldots)y_2=0.\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Точками обозначены члены более высокого порядка относительно $1/\lambda$.

Сделаем замену переменных

$$y_1 = e^{-\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt} z_1, \qquad y_2 = e^{-\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt} z_2. \tag{3.7}$$

Система уравнений (3.6) после такой замены уже не будет содержать слагаемых первого порядка относительно λ

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 + (a_{11}^{(0)} + \ldots) z_1 + (a_{12}^{(0)} + \ldots) z_2 = 0, \\ \dot{z}_2 + (a_{21}^{(0)} + \ldots) z_1 + (a_{22}^{(0)} + \ldots) z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Если бы коэффициенты a_{ij} не содержали слагаемых порядка λ^{-1} и более высокого, то задача построения асимптотики была бы исчерпана. В самом деле, система (3.8) в этом случае была бы следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 + a_{11}^{(0)} z_1 + a_{12}^{(0)} z_2 = 0, \\ \dot{z}_2 + a_{21}^{(0)} z_1 + a_{22}^{(0)} z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Обозначим через z_{1i} и z_{2i} $(i=1, 2)$ фундаментальные решения системы (3.8). Эти функции могут быть получены как результат численного решения двух задач Коши со следующими начальными данными:

$$\text{I.} \begin{cases} z_{11}(0) = 0, \\ z_{21}(0) = 1. \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} z_{12}(0) = 1, \\ z_{22}(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда асимптотические представления общего интеграла системы (3.6) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} y_1 = e^{-\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt} (C_1 z_{22} + C_2 z_{12}), \\ y_2 = e^{-\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt} (C_1 z_{21} + C_2 z_{22}). \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Если разложения коэффициентов a_{ij} содержат отрицательные степени параметра λ, то для построения функций z_i можно использовать методы теории возмущений, т. е. искать решение системы (3.7) в виде рядов по степеням λ^{-1}.

Примечание. Предположим, что элементарные делители не простые и жорданова нормальная форма имеет вид (3.5), т. е. система (3.6) будет такой:

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 + (\lambda\mu + a_{11}^{(0)} + \ldots) y_1 + (\lambda + a_{12}^{(0)} + \ldots) y_2 = 0, \\ \dot{y}_2 + (a_{21}^{(0)} + \ldots) y_1 + (\lambda\mu + a_{22}^{(0)} + \ldots) y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.6'}$$

Если решение системы (3.6′) искать в форме (3.7), то система уравнений относительно z_i будет содержать первые степени параметра λ и, следовательно, представлять решения в форме (3.10) в общем случае уже нельзя.

3. Один пример механической системы с двумя степенями свободы. Среди задач динамики механических систем с одной степенью свободы трудно найти интересный пример системы, у которой корень характеристического уравнения двукратный, а элементарные делители простые. В динамике систем со многими степенями свободы примеров таких систем очень много. Прежде всего это любые консервативные колебательные системы с кратными собственными частотами. Поэтому в качестве примера, иллюстрирующего приложение развиваемой теории, мы рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda^2\omega^2(t)\,x + \lambda a y = 0, \\ \ddot{y} + \lambda^2\omega^2(t)\,y + \lambda b x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

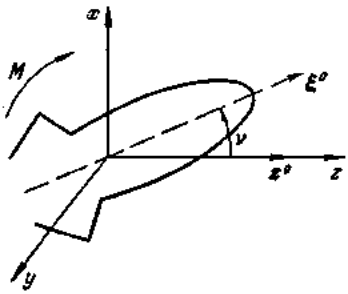

Рис. 39.

Система (3.11) встречается в разнообразных технических задачах. Рассмотрим, например, колебательное движение оперенного снаряда. Если тело, изображенное на рис. 39, движется в воздухе в направлении вектора z^0, то на него действует аэродинамический момент M. Этот момент при наличии стабилизатора создает восстанавливающий аэродинамический момент, действующий в плоскости угла атаки ν-угла, заключенного между вектором z^0 и осью симметрии этого тела ξ^0, если оно ею обладает. Условимся считать, что тело не вращается вокруг оси ξ^0; тогда рассматриваемая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат этой системы естественно принять направляющие косинусы вектора ξ^0: $x = \cos(\xi^0 x^0)$ и $y = \cos(\xi^0 y^0)$.

Если тело обладает осевой симметрией, то в линейной постановке (при малых углах атаки ν) система уравнений движения распадается на два независимых уравнения относительно обеих обобщенных координат

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \lambda^2\omega^2(t)\,x = 0, \\ \ddot{y} + \lambda^2\omega^2(t)\,y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Здесь $\lambda^2\omega^2$ — отношение восстанавливающего момента к экваториальному моменту инерции. Во многих случаях этот момент

предполагается большим, и следовательно, движение является высокочастотным.

Если тело обладает малой асимметрией, то мы должны уже рассматривать вместо системы (3.12) систему (3.11). Обозначим

$$x = x_1, \qquad y = x_3$$

и перепишем эту систему в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda\omega^2 x_1 - a x_3, \\ \dot{x}_3 &= \lambda x_4, \quad \dot{x}_4 = -\lambda\omega^2 x_3 - b x_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Система (3.13) является обобщением рассмотренной: она имеет два корня, кратность каждого из которых равна двум. При этом элементарные делители характеристической матрицы простые.

В этом можно убедиться следующим образом. Сделаем в системе (3.11) замену переменных

$$x = \xi_1 + \xi_3, \qquad \dot{x} = i\lambda\omega(\xi_1 - \xi_3),$$
$$y = \xi_2 + \xi_4, \qquad \dot{y} = i\lambda\omega(\xi_2 - \xi_4).$$

Тогда система (3.11) преобразуется так:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= i\lambda\omega\xi_1 + \ldots, \\ \dot{\xi}_2 &= i\lambda\omega\xi_2 + \ldots, \\ \dot{\xi}_3 &= -i\lambda\omega\xi_3 + \ldots, \\ \dot{\xi}_4 &= -i\lambda\omega\xi_4 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3.11'}$$

Точками здесь обозначены члены, не содержащие λ. Характеристическая матрица этой системы приведена к диагональной форме

$$\begin{Vmatrix} i\omega - \mu & & & \\ & i\omega - \mu & & \\ & & -i\omega - \mu & \\ & & & -i\omega - \mu \end{Vmatrix}.$$

Вернемся снова к системе (3.13), которая удобнее для использования, чем система (3.11). Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\Delta(\mu) = \begin{Vmatrix} \mu & -1 & 0 & 0 \\ \omega^2 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \mu \end{Vmatrix} = 0. \tag{3.14}$$

Корни уравнения (3.14) таковы:

$$\mu_1 = +i\omega, \quad \mu_2 = +i\omega, \quad \mu_3 = -i\omega, \quad \mu_4 = -i\omega.$$

Итак, пусть μ — один из корней этого уравнения. Следуя общей схеме, сделаем замену переменных

$$x_i = \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\} z_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{3.15}$$

После замены (3.15) система (3.13) примет форму

$$\left.\begin{aligned} &\mu z_1 - z_2 = -\frac{1}{\lambda}\dot{z}_1,\\ &\omega^2 z_1 + \mu z_2 = -\frac{1}{\lambda}[\dot{z}_2 + a z_3],\\ &\mu z_3 - z_4 = -\frac{1}{\lambda}\dot{z}_3,\\ &\omega^2 z_3 + \mu z_4 = -\frac{1}{\lambda}[\dot{z}_4 + b z_1]. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Решение системы (3.16) будем искать в виде рядов, расположенных по обратным степеням параметра λ

$$z_i = z_{i0} + \frac{1}{\lambda} z_{i1} + \ldots \tag{3.17}$$

Для функций z_{i0} мы получаем систему

$$\left.\begin{aligned} &\mu z_{10} - z_{20} = 0,\\ &\omega^2 z_{10} + \mu z_{20} = 0,\\ &\mu z_{30} - z_{40} = 0,\\ &\omega^2 z_{30} + \mu z_{40} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Так как $\mu^2 = \omega^2$, то система (3.18) всегда разрешима, причем два из четырех неизвестных могут быть выбраны по произволу.

Условимся для определенности, что

$$\mu = i\omega,$$

тогда

$$z_{20} = i\omega z_{10}, \qquad z_{40} = i\omega z_{30}. \tag{3.19}$$

Составим теперь уравнения для z_{i1}

$$\left.\begin{aligned} &\mu z_{11} - z_{21} = -\dot{z}_{10},\\ &\omega^2 z_{11} + \mu z_{21} = -\dot{z}_{20} - a z_{30},\\ &\mu z_{31} - z_{41} = -\dot{z}_{30},\\ &\omega^2 z_{31} + \mu z_{41} = -\dot{z}_{40} - b z_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

Система (3.20) распадается на две независимые системы уравнений, определитель каждой из которых равен нулю. Условия

их разрешимости приводят к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} -\dot{z}_{10}\omega^2 + \mu\dot{z}_{20} + a\mu z_{30} = 0, \\ -\dot{z}_{30}\omega^2 + \mu\dot{z}_{40} + b\mu z_{10} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

Делая замену (3.19), получим

$$\left.\begin{aligned} -2\dot{z}_{10}\omega^2 - \omega\dot{\omega}z_{10} + ia\omega z_{30} = 0, \\ -2\dot{z}_{30}\omega^2 - \omega\dot{\omega}z_{30} + ib\omega z_{10} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Сделаем в этом уравнении еще одну замену

$$z_{10} = iz_{10}^*,$$

после чего система (3.22) будет выглядеть так:

$$\left.\begin{aligned} -2\dot{z}_{10}^*\omega^2 - \omega\dot{\omega}z_{10}^* + a\omega z_{30} = 0, \\ -2\dot{z}_{30}\omega^2 - \omega\dot{\omega}z_{30} - b\omega z_{10}^* = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Теперь в уравнении (3.21) положим

$$\mu = -i\omega$$

и соответственно

$$z_{20} = -i\omega z_{10}, \qquad z_{40} = -i\omega z_{30}, \tag{3.24}$$

в результате мы получим

$$\begin{aligned} -2\dot{z}_{10} - \omega\dot{\omega}z_{10} - ib\omega z_{30} = 0, \\ -2\dot{z}_{30} - \omega\dot{\omega}z_{30} - ib\omega z_{10} = 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях сделаем такую замену:

$$z_{10} = -iz_{10}^*.$$

Тогда эта система будет снова сведена к системе (3.23). Система уравнений (3.23) — это система двух линейных уравнений первого порядка. Обозначим через

$$z_1^{*(1)}, \quad z_3^{(1)}; \quad z_1^{*(2)}, \quad z_3^{(2)}$$

систему ее фундаментальных решений. В общем случае эти решения нельзя получить ни в квадратурах, ни тем более в явном

виде. Однако решения системы (3.23) — это медленно меняющиеся функции, и их определение численными методами не представляет труда.

Построим теперь систему фундаментальных решений для уравнения (3.13). Заметим сначала, что функции

$$x_{11}^* = iz_1^{*(1)} \exp\left\{ i\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\},$$

$$x_{31}^* = z_3^{(1)} \exp\left\{ i\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\}$$

и функции

$$x_{12}^* = -iz_1^{*(1)} \exp\left\{ -i\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\},$$

$$x_{32}^* = z_3^{(1)} \exp\left\{ -i\lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\}$$

являются частными решениями системы (3.13). Вместо этих функций введем другие

$$x_{11} = -\frac{x_{11}^* + x_{12}^*}{2} = \sin\left\{ \lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\} z_1^{*(1)},$$

$$x_{31} = -\frac{x_{31}^* + x_{32}^*}{2} = -\cos\left\{ \lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\} z_3^{(1)},$$

$$x_{12} = \frac{x_{11}^* - x_{12}^*}{2} = \cos\left\{ \lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\} z_1^{*(1)},$$

$$x_{32} = \frac{x_{31}^* - x_{32}^*}{2} = \sin\left\{ \lambda \int_0^t \omega(t)\,dt \right\} z_3^{(1)}.$$

Вычисляя подобным способом остальные частные решения, мы придем к следующему выражению для асимптотического

представления общего решения:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A\sin\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_1^{*(1)}(t) + B\cos\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_1^{*(1)}(t) + \\ &\quad + C\sin\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_1^{*(2)}(t) + D\cos\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_1^{*(2)}(t), \\ x_3 &= -A\cos\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_3^{(1)}(t) + B\sin\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_3^{(1)}(t) - \\ &\quad - C\cos\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_3^{(2)}(t) + D\sin\left\{\lambda\int_0^t \omega(t)\,dt\right\} z_3^{(2)}(t). \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Аналогичные выражения мы будем иметь и для переменных x_2 и x_4. Здесь A, B, C и D — произвольные постоянные.

Итак, применяя асимптотические методы, численное интегрирование системы четвертого порядка (3.11), решение которого быстро осциллирует, мы свели к численному решению системы второго порядка (3.23) относительно «медленных» переменных.

Примечание. Систему двух уравнений (3.11) мы заменили системой четырех уравнений (3.13). Разумеется, все вычисления могли быть проведены и для исходной системы.

4. Системы произвольного ранга. Рассмотрим теперь систему произвольного ранга $p>1$, полагая по-прежнему, что характеристическое уравнение системы имеет простые элементарные делители; матрицу коэффициентов, порядок которых равен p, будем считать приведенной к диагональному виду

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 + (\mu\lambda^p + a_{11}^{(p-1)}\lambda^{p-1} + \ldots)\,y_1 + (a_{12}^{(p-1)}\lambda^{p-1} + \ldots)\,y_2 = 0, \\ \dot{y}_2 + (a_{21}^{(p-1)}\lambda^{p-1} + \ldots)\,y_1 + (\mu\lambda^p + a_{22}^{(p-1)}\lambda^{p-1} + \ldots)\,y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Сделав замену переменных (3.7), мы получим следующую систему уравнений относительно функций $z_i(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z}_1 + (\lambda^{p-1}a_{11}^{(p-1)} + \ldots)\,z_1 + (\lambda^{p-1}a_{12}^{(p-1)} + \ldots)\,z_2 = 0, \\ \dot{z}_1 + (\lambda^{p-1}a_{21}^{(p-1)} + \ldots)\,z_1 + (\lambda^{p-1}a_{22}^{(p-1)} + \ldots)\,z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Эта система уравнений имеет уже ранг, равный $p-1$; при этом может иметь место один из следующих трех случаев. Корни

характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(p-1)}+\varkappa & a_{12}^{(p-1)} \\ a_{21}^{(p-1)} & a_{22}^{(p-1)}+\varkappa \end{vmatrix}=0 \tag{3.28}$$

могут быть: а) все различные, б) кратные, но элементарные делители простые, в) кратные и элементарные делители непростые.

Если корни характеристического уравнения (3.28) все различны, то для построения асимптотических решений системы (3.27) мы можем воспользоваться теорией, которая была изложена в предыдущих параграфах этой главы.

Если корни кратные, но элементарные делители простые, то для исследования системы (3.27) можно повторить уже проделанную процедуру: произвести замену (3.7) и понизить ранг системы еще на единицу.

Общий случай систем, имеющих кратные корни, элементарные делители которых непростые, пока оставляем в стороне.

5. Пример колебательной системы, элементарные делители которой непростые. Для того чтобы продемонстрировать некоторые особенности асимптотических представлений решений и возможность их построения в том более сложном случае, когда корни системы кратные, но элементарные делители непростые, рассмотрим пример диссипативной системы следующего вида:

$$\ddot{y}+2(\lambda a_0+a_1)\dot{y}+(\lambda^2a_0^2+\lambda b_1)y=0. \tag{3.29}$$

Характеристическое уравнение этой колебательной системы

$$\mu^2+2a_0\mu+a_0^2=0 \tag{3.30}$$

имеет два равных корня

$$\mu_{1,2}=-a_0.$$

Легко проверить, что элементарные делители системы (3.29) непростые.

Для этого достаточно в уравнении (3.29) сделать замену

$$y=x_1+x_2, \qquad \dot{y}=-\lambda a_0x_1+\lambda(1-a_0)x_2.$$

Переменные x_1 и x_2 удовлетворяют системе

$$\dot{x}_1=-\lambda ax_1+\lambda x_2+\ldots,$$
$$\dot{x}_2=-\lambda ax_2+\ldots$$

Точками обозначены члены, порядок которых ниже λ.

Сделаем в уравнении (3.29) замену переменного

$$y=\exp\left\{-\lambda\int_0^t a_0(t)\,dt\right\}z(t,\lambda). \tag{3.31}$$

Функция (3.31) удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z}+2a_1\dot{z}+\lambda\omega^2 z=0, \tag{3.32}$$

где $\omega^2=\dot{a}_0+a_1a_0-b_1$.

В системе (3.32) возможны две различные ситуации. Во-первых, может случиться так, что $\omega\equiv 0$. Тогда уравнение (3.32) примет вид

$$\ddot{z}+2a_1\dot{z}=0. \tag{3.33}$$

Общее решение уравнения (3.33) может быть выражено через две квадратуры

$$z=A+B\int_0^t \exp\left\{-2\int_0^\xi a_1(\tau)\,d\tau\right\}d\xi,$$

где A и B — произвольные постоянные. Таким образом, асимптотическое представление общего решения уравнения (3.29) в этом случае имеет вид

$$y=\exp\left\{-\lambda\int_0^t a_0(\xi)\,d\xi\right\}\cdot\left[A+B\int_0^t \exp\left\{-2\int_0^\xi a_1(\tau)\,d\tau\right\}d\xi\right]. \tag{3.34}$$

Таким образом, в этом исключительном случае, когда $\omega\equiv 0$, процедура построения асимптотических решений совпадает с той, которую мы применяли при отыскании решений в случае систем с простыми элементарными делителями.

Если теперь $\omega^2(t)$ не обращается в нуль для $t\in[0, T]$, то для построения решения может быть применен метод, изложенный в первых параграфах. Мы без труда находим, (полагая $\lambda=\lambda_1^2$), что оба линейно независимых решения уравнения (3.32) выражаются в форме

$$z_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{\omega(t)}}\exp\left\{-\int_0^t\left[a_1(t)\pm i\lambda^{1/2}\omega(t)+\ldots\right]dt\right\}.$$

Итак, в этом случае решения уравнения (3.29) будут

$$y_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{\omega(t)}}\exp\left\{-\int_0^t\left[\lambda a_0+a_1\pm i\lambda^{1/2}\omega+\ldots\right]dt\right\}. \tag{3.35}$$

Таким образом, асимптотические разложения в этом случае будут содержать дробные степени параметра λ. Этот факт, по-видимому, первым установил Я. Д. Тамаркин.

§ 4. Неоднородные уравнения

1. Одно уравнение второго порядка. Предыдущие параграфы этой главы содержали изложение способов, которые позволяют построить асимптотические представления для фундаментальных решений однородной системы и, следовательно, получить приближенное выражение общего интеграла однородной части этих уравнений. Мы можем построить частное решение неоднородной системы, следуя общему методу вариации произвольных постоянных. Применение такой процедуры приведет нас к необходимости вычисления квадратур.

Однако эта процедура может быть упрощена, если мы ограничимся отысканием приближенного решения в виде отрезка асимптотического ряда, расположенного по степеням малого параметра. Оказывается, что асимптотическое представление некоторого частного решения неоднородного уравнения (или системы уравнений) может быть найдено только при помощи одной операции дифференцирования.

Рассмотрим сначала случай одного уравнения второго порядка

$$\ddot{y}+2\lambda a\dot{y}+\lambda^2\omega^2 y=\lambda^s f(t). \tag{4.1}$$

Будем искать решение в виде ряда

$$y=\lambda^{s-2}u_0+\lambda^{s-3}u_1+\ldots \tag{4.2}$$

Подставляя ряд (4.2) в уравнение (4.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, сразу находим

$$\left.\begin{aligned} u_0&=\frac{f}{\omega^2},\\ u_1&=-\frac{2a\dot{u}_0}{\omega^2},\\ u_2&=-\frac{2a\dot{u}_1+\ddot{u}_0}{\omega_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_m&=-\frac{2a\dot{u}_{m-1}+\ddot{u}_{m-2}}{\omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Если речь идет об уравнении колебаний без демпфирования

$$\ddot{y}+\lambda^2\omega^2 y=\lambda^s f(t), \tag{4.4}$$

то частное решение можно записать в компактной форме

$$y=\lambda^{s-2}\left\{\frac{f}{\omega^2}-\frac{1}{\lambda^2\omega^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{f}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\lambda^4\omega^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{f}{\omega^2}\right)\right]-\ldots\right\}. \tag{4.5}$$

2. Система произвольного ранга. Изложенная схема построения рядов, которые являются формальными частными решениями, легко распространяются на случай линейных систем произвольного ранга. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 + \left(\lambda^p a_{11}^{(p)} + \lambda^{p-1} a_{11}^{(p-1)} + \ldots\right) y_1 + \left(\lambda^p a_{12}^{(p)} + \lambda^{p-1} a_{12}^{(p-1)} + \ldots\right) y_2 = \\ = \lambda^s f_1^{(s)} + \lambda^{s-1} f_1^{(s-1)} + \ldots, \\ \dot{y}_2 + \left(\lambda^p a_{21}^{(p)} + \lambda^{p-1} a_{21}^{(p-1)} + \ldots\right) y_1 + \left(\lambda^p a_{22}^{(p)} + \lambda^{p-1} a_{22}^{(p-1)} + \ldots\right) y_2 = \\ = \lambda^s f_2^{(s)} + \lambda^{s-1} f_2^{(s-1)} + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Частное решение системы уравнений (4.6) будем искать в виде рядов

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda^{s-p} u_0 + \lambda^{s-p-1} u_1 + \ldots, \\ y_2 &= \lambda^{s-p} v_0 + \lambda^{s-p-1} v_1 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Легко видеть, что функции $u_i(t)$ и $v_i(t)$ удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$a_{11}^{(p)} u_0 + a_{22}^{(p)} v_0 = f_1^{(s)},$$
$$a_{21}^{(p)} u_0 + a_{22}^{(p)} v_0 = f_2^{(s)},$$
$$a_{11}^{(p)} u_1 + a_{22}^{(p)} v_1 = f_1^{(s-1)} - u_0 a_{11}^{(p-1)} - v_0 a_{12}^{(p-1)},$$
$$a_{21}^{(p)} u_1 + a_{22}^{(p)} v_1 = f_2^{(s-1)} - u_0 a_{21}^{(p-1)} - v_0 a_{22}^{(p-1)}$$

и т. д.

Если матрица $\left\| a_{ij}^{(p)} \right\|$ невырожденная, то задача определения функций $u_i(t)$ и $v_i(t)$ сводится к операции дифференцирования и последовательному решению систем алгебраических уравнений.

3. Основная теорема. Ряды (4.2), (4.5) и (4.6) в общем случае расходятся, однако они носят асимптотический характер и конечные отрезки этих рядов могут быть использованы для приближенного представления частных решений. Это утверждение легко доказывается для самого общего случая. Однако для того, чтобы не загромождать изложения, мы поступим так же, как и при исследовании однородной задачи, и проведем доказательство только для самого простого случая — уравнения (4.4). Итак, докажем следующую теорему.

Если функции $f(t)$ и $\omega(t)$ достаточное количество раз дифференцируемы на отрезке $[0, T]$ и, кроме того, существует такая положительная постоянная α, что для любых $t \in [0, T]$

$$\omega(t) \geqslant \alpha,$$

то уравнение (4.4) *допускает частное решение вида*

$$y=\lambda^{s-2}(u_0(t)+\lambda^{-2}u_1(t)+\ldots+\lambda^{-n+2}u_{n-2}+\lambda^{-n}\eta(t,\ \lambda)),\quad (4.8)$$

где функции $u_i(t)$ *определяются равенствами*

$$\left.\begin{aligned} u_0&=\frac{f}{\omega^2},\\ u_1&=-\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{f}{\omega^2}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\quad (4.9)$$

а функция $\eta(\lambda,\ t)$ *ограничена для любого* $t\in[0,\ T]$ *при* $\lambda\to\infty$.

Для доказательства составим уравнение, которому удовлетворяет функция $\eta(\lambda,\ t)$. Подставляя ряд (4.8) в уравнение (4.4) и используя формулы (4.9), получим

$$\ddot{\eta}+\lambda^2\omega^2\eta=\lambda^2\psi,\quad (4.10)$$

где

$$\psi(t)=-\frac{d^2u_{n-2}}{dt^2}.$$

Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что любое частное решение уравнения (4.10) равномерно ограничено на отрезке $[0,\ T]$ при $\lambda\to\infty$.

Заметим, что функция $\psi(t)$ не зависит от λ: она определяется полностью функциями ω, f и их производными. Следовательно, существует такая постоянная $\bar{\psi}>0$, что для любого $t\in[0,\ T]$

$$|\psi(t)|<\bar{\psi}.$$

Обозначим через Δ вронскиан обоих линейно независимых решений уравнения

$$\ddot{\eta}+\lambda^2\omega^2\eta=0.$$

Следовательно,

$$\Delta=\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2\end{vmatrix}.$$

Функции η_1 и η_2, согласно результатам предыдущих параграфов, имеют следующие представления:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1(t,\ \lambda)&=\sin\left\{\lambda\int_0^t\omega\,dt\right\}\Phi_1(t,\lambda),\\ \eta_2(t,\ \lambda)&=\cos\left\{\lambda\int_0^t\omega\,dt\right\}\Phi_2(t,\lambda), \end{aligned}\right\}\quad (4.11)$$

где функции Φ_1 и Φ_2 ограничены при $\lambda\to\infty$.

Используя далее формулу Лагранжа, выпишем общее решение уравнения (4.10)

$$\eta = \eta^* + \lambda^2 \int_0^t \frac{1}{\Delta} (\eta_1(t)\eta_2(\tau) - \eta_1(\tau)\eta_2(t))\psi(t)\,dt, \qquad (4.12)$$

где η^* — решение однородного уравнения.

Принимая во внимание равенства (4.11), оценим величины, входящие в (4.12). Вычислим

$$\Delta = \lambda\left(\frac{1}{\omega} + \lambda^{-1}F_1(t, \lambda)\right),$$

где $F_1(t, \lambda)$ — функция, ограниченная при $\lambda \to \infty$, следовательно, можно назначить такое λ_0, что для всех $\lambda > \lambda_0$

$$\frac{1}{\lambda}|F_1| < \frac{1}{2\alpha}.$$

На этом основании получаем оценку

$$|\Delta| \geqslant \lambda\left(\frac{1}{\alpha} - \lambda^{-1}|F_1(t, \lambda)|\right) \geqslant \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Функция η^* определяется начальными условиями: она зависит от λ, но, согласно лемме II § 1, п. 3 существует такая постоянная C, не зависящая от λ, что

$$|\eta^*| \leqslant C.$$

Так как функции η_1, η_2, Φ_1, Φ_2, ω и $\dot{\omega}$ ограниченные со своими производными при $t \in [0, T]$ и $\lambda \to \infty$, то можно назначить такое число D, что для всех $\lambda > \lambda_0$ будет

$$|\eta_1| \leqslant D, \quad |\eta_2| \leqslant D, \quad |\dot{\Phi}_1| \leqslant D \text{ и т. д.}$$

Тогда на основании (4.12) будем иметь следующую оценку:

$$|\eta| \leqslant C + 2\lambda\alpha D\left\{\left|\int_0^t \sin\left[\lambda\int_0^t \omega\,d\tau_1\right]\Phi_1(\tau)\,d\tau\right| + \right.$$
$$\left. + \left|\int_0^t \cos\left[\lambda\int_0^t \omega\,dt_1\right]\Phi_2(\tau)\,d\tau\right|\right\}.$$

Оценим интегралы, входящие в правую часть неравенства; интегрируя по частям, получим

$$J_1 = \left| \int_0^t \sin\left[\lambda \int_0^t \omega(\xi)\, d\xi\right] \Phi_1(\tau)\, d\tau \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\lambda} \left\{ -\cos\left[\lambda \int_0^t \omega\, d\xi\right] \frac{\Phi_1(t)}{\omega(t)} + \frac{\Phi_1(0)}{\omega(0)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t \cos\left[\lambda \int_0^t \omega\, d\xi\right] \frac{\dot{\Phi}\omega - \dot{\omega}\Phi}{\omega^2}\, d\tau \right\} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{2D}{\alpha} + \int_0^t \frac{2D^2}{\alpha^2}\, d\tau\right\} \leqslant \frac{2D}{\lambda\alpha}\left(1 + \frac{DT}{\alpha}\right).$$

Аналогичную оценку получаем и для второго интеграла. Собирая эти оценки, находим окончательно

$$|\eta| \leqslant C + 8D^2\left(1 + \frac{DT}{\alpha}\right).$$

Константа, стоящая в правой части неравенств, не зависит от λ. Теорема доказана полностью. Метод доказательства без каких-либо существенных изменений переносится и на общий случай.

4. Случай, когда внешние силы осциллируют. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{y} + 2a\dot{y} + \lambda\omega^2 y = \lambda^2 f(t)\, e^{i\lambda \int_0^t k(t)\, dt}. \tag{4.13}$$

Уравнение (4.13) является примером, на котором легко продемонстрировать все особенности асимптотических представлений в том случае, когда правая часть представляет собой быстро осциллирующую функцию.

Частное решение уравнения (4.13) будем искать в виде

$$y = z(t, \lambda) \exp\left\{i\lambda \int_0^t k(t)\, dt\right\},$$

для функции $z(t, \lambda)$ получим следующее уравнение:

$$\ddot{z} + 2i\lambda k(t)\, \dot{z} + i\lambda \dot{k}(t)\, z - \lambda^2 k^2 z +$$
$$+ 2a(\dot{z} + i\lambda k(t)\, z) + \lambda^2\omega^2 z = \lambda^2 f(t). \tag{4.14}$$

Предположим сначала, что $z(t, \lambda)$ — функция, которая изменяется медленно. Другими словами, примем, что

$$z(t, \lambda) = z_0(t) + \frac{1}{\lambda} z_1(t) + \ldots \tag{4.15}$$

Тогда для функций $z_i(t)$ мы имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &(\omega^2(t) - k^2(t))\, z_0 = f(t), \\ &(\omega^2(t) - k^2(t))\, z_1 = -iz_0(\dot{k} - 2ak), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

Формулы (4.15) позволяют последовательно вычислить все члены разложения (4.15), если только на рассматриваемом интервале времени

$$k(t) \neq \omega(t).$$

Если есть хотя бы одна точка $t = t^*$, где

$$k(t^*) = \omega(t^*),$$

то изложенная процедура теряет смысл. Следовательно, в этом случае функцию $z(t, \lambda)$ уже нельзя считать медленно изменяющейся.

Для построения асимптотики в этом случае расстройку будем считать малой. Другими словами, положим

$$\omega^2(t) - k^2(t) = \lambda^{-1}\chi(t), \tag{4.17}$$

а функцию z будем искать в виде

$$z(t, \lambda) = \lambda z_0 + z_1 + \lambda^{-1} z_2 + \ldots \tag{4.18}$$

Подставляя (4.17) и (4.18) в уравнения (4.14) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к следующим уравнениям, которые позволят определить члены разложения (4.18):

$$\left.\begin{aligned} &2ik\dot{z}_0 + (i\dot{k} + \chi + 2ak)\, z_0 = f, \\ &2ik\dot{z}_1 + (i\dot{k} + \chi + 2ak)\, z_1 = -\ddot{z}_0 + 2a\dot{z}_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

Каждое из этих уравнений является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка и его решение может быть получено в квадратурах. Так, например, частное решение первого из уравнений системы (4.19) имеет вид

$$z_0 = \int_0^t \psi(\xi) \exp\left\{-\int_\xi^t \varphi(\zeta)\, d\zeta\right\} d\xi, \tag{4.20}$$

где

$$\psi(\xi)=\frac{f(\xi)}{2ik(\xi)},\qquad \varphi(\xi)=\frac{ik(\xi)+\chi(\xi)+2a(\xi)k(\xi)}{2ik(\xi)}.$$

Если ограничиться первым членом разложения, то частное решение уравнения (4.13) мы представим в виде

$$y=z_0(t)\exp\left\{i\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\}. \tag{4.21}$$

Если функции, входящие в уравнение (4.13), будут постоянными величинами, то формула (4.20) переходит в известное выражение, описывающее резонансные явления в колебательных системах с постоянными параметрами.

Для того чтобы в этом убедиться, положим $k=0$. Кроме того, примем для простоты, что $\chi=0$, $a=0$. Тогда $\varphi=0$ и, следовательно,

$$y=\frac{f}{2i\omega}t\exp\{i\lambda kt\}. \tag{4.21'}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{y}+2a\dot{y}+\lambda^2\omega^2y=\lambda^2f(t)\cos\left\{\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\}.$$

Полагая

$$\cos\left\{\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\}=\frac{1}{2i}\left[\exp\left\{i\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\}+\exp\left\{-i\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\}\right]$$

и используя линейность задачи, положим

$$y=y_1+y_2,$$

где y_1 и y_2 — частные решения уравнений

$$\ddot{y}+2a\dot{y}+\lambda^2\omega^2y=\lambda^2f^*(t)\exp\left\{i\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\},$$

$$\ddot{y}+2a\dot{y}+\lambda^2\omega^2y=\lambda^2f^*(t)\exp\left\{-i\lambda\int_0^t k(t)\,dt\right\},$$

$$f^*(t)=\frac{f(t)}{2i}.$$

Итак, мы продемонстрировали процедуру построения асимптотических представлений частных решений неоднородных

уравнений, когда внешние силы являются осциллирующими функциями времени. Мы ограничились только тем случаем, когда система имеет одну степень свободы. Все проведенные рассуждения распространяются и на произвольные линейные системы вида

$$\dot{y} = \lambda A(t, \lambda) y + f(t) \exp\left\{ i\lambda \int_0^t k(t)\, dt \right\}, \tag{4.22}$$

где y и f — векторы размерности n, A — матрица

$$A(t, \lambda) = A_0(t) + \lambda^{-1} A_1(t) + \lambda^{-2} A_2(t) + \ldots$$

Если ни для какого $t \in [0, T]$ $k \neq \mu_i$, где μ_i — корень уравнения

$$|A_0 - \mu E| = 0,$$

то расчет частного решения уравнения (4.22) сводится к последовательному решению системы алгебраических уравнений; если для некоторых $t \in [0, T]$ $k = \mu$, то мы имеем резонансный случай, и расчет асимптотических представлений приводит к необходимости численно решать некоторую систему дифференциальных уравнений.

§ 5. Общий случай линейной системы произвольного порядка

1. Общее решение однородной системы в том случае, когда корни простые. Предыдущие параграфы содержали изложение методов построения асимптотических решений для дифференциальных уравнений второго порядка. Мы показали, что при известных ограничениях, наложенных на коэффициенты этих уравнений, их общее решение может быть выписано в форме квадратур. В некоторых случаях оно может быть выписано даже в явном виде.

Таким образом, мы получили эффективное средство решения задачи Коши для систем второго порядка. В одном случае мы рассмотрели также систему четвертого порядка.

Изложенная методика без каких-либо осложнений, переносится и на общий случай систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих большой параметр. Поэтому при изложении общего случая ограничимся только краткой сводкой правил построения приближенных решений.

Систему n-линейных уравнений первого порядка

$$\dot{y} + Ay = 0, \tag{5.1}$$

где y — вектор-функция размерности n, а $A=\|a_{ij}\|$ — квадратная матрица, условимся называть системой ранга k, если матрица A имеет вид

$$A(\lambda, t)=\lambda^k(A^{(k)}(t)+\lambda^{-1}A^{(k-1)}(t)+\ldots$$
$$\ldots+\lambda^{-s}A^{(k-s)}(t)+\lambda^{-s-1}H(t, \lambda)); \qquad (5.1')$$

здесь $A^{(i)}$ — матрицы, элементы которых зависят только от времени, а матрица $H(t, \lambda)$ остается ограниченной при $\lambda\to\infty$ для любого $t\in[0, T]$. Предполагается, что матрица $A^{(k)}$ невырожденная.

Частные решения системы (5.1) будем искать в виде

$$y=\exp\left\{\int_0^t[\lambda^k\mu(t)+\lambda^{k-1}\mu_1(t)+\ldots+\lambda\mu_{k-1}(t)]\,dt\right\}z(\lambda, t), \qquad (5.1)$$

где μ — корень характеристического уравнения

$$|A^{(k)}+\mu E|=0, \qquad (5.3)$$

E — единичная матрица. Предполагается, что уравнение (5.3) имеет на всем отрезке $[0, T]$ различные корни. Новая искомая функция z ищется в виде

$$z(\lambda, t)=z_0(t)+\lambda^{-1}z_1(t)+\ldots \qquad (5.4)$$

Цель алгоритма состоит в том, чтобы указать процесс, который каждому корню уравнения (5.3) ставит в соответствие приближенное (асимптотическое) выражение частного решения системы (5.1).

Проведем вычисления для случая $k=2$. Подставляя разложения (5.2) и (5.4) в (5.1), получим следующие уравнения относительно искомых величин:

$$(A^{(2)}+\mu E)z^{(0)}=0, \qquad (5.5)$$

$$(A^{(2)}+\mu E)z^{(1)}=-(A^{(1)}+\mu E)z^{(0)}, \qquad (5.6)$$

$$(A^{(2)}+\mu E)z^{(2)}=-\{z^{(0)}+(A^{(1)}+\mu E)z^{(1)}+A^{(0)}z^{(0)}\} \qquad (5.7)$$

. . . . . .

Так как $\mu(t)$ — корень характеристического уравнения этой системы, то она разрешима, и компоненты вектора $z^{(0)}$ могут быть определены с точностью до произвольного множителя. Последнее эквивалентно тому, что одна из компонент вектора $z^{(0)}$ остается неопределенной (например, $z_1^{(0)}$), а остальные могут быть через нее выражены.

В самом деле, система (5.5) может быть теперь переписана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&(a_{22}^{(2)}+\mu)z_2^{(0)}+a_{23}^{(2)}z_3^{(0)}+\ldots=-a_{21}^{(2)}z_1^{(0)},\\&a_{32}^{(2)}z_2^{(0)}+(a_{23}^{(2)}+\mu)z_3^{(0)}+\ldots=-a_{31}^{(2)}z_1^{(0)},\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&a_{n2}^{(2)}z_2^{(0)}+\ldots+(a_{nn}^{(2)}+\mu)z_n^{(0)}=-a_{n1}^{(2)}z_1^{(0)}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.8)$$

Обозначим через Δ_{1i} алгебраические дополнения элементов первой строки определителя (5.3); тогда решения системы (5.8) можно представить так:

$$z_k^{(0)}=-\frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{11}}z_1^{(0)}\qquad(k=2,\ 3,\ \ldots,\ n).\qquad(5.9)$$

Рассмотрим теперь систему (5.6). Поскольку определитель этой системы равен нулю и ранг ее матрицы, по предположению (кратные корни отсутствуют), равен $n-1$, то для разрешимости системы (5.6) необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы (матрицы с добавленным столбцом правых частей) также был равен $(n-1)$.

Ранг матрицы $A+\mu E$ равен $n-1$. Следовательно, между элементами ее строк существует линейная зависимость, которую, если воспользоваться разложением определителя $|A^{(2)}+\mu E|$ по элементам первой строки, можно записать, например, следующим образом:

$$a_{11}^{(2)}+\mu=c_2a_{21}^{(2)}+c_3a_{31}^{(2)}+\ \ldots\ +c_na_{n1}^{(2)},\qquad(5.10)$$

где величины $c_i=-\dfrac{\Delta_{i1}}{\Delta_{11}}$.

Следовательно, для разрешимости системы (5.6) необходимо и достаточно, чтобы между элементами столбца, стоящего в правой части, также имела место зависимость (5.10)

$$\begin{aligned}&(a_{11}^{(1)}+\mu_1)z_1^{(0)}+a_{12}^{(1)}z_2^{(0)}+\ldots+a_{1n}^{(1)}z_n^{(0)}=\\&\quad=c_2\left\{a_{21}^{(1)}z_1^{(0)}+(a_{22}^{(1)}+\mu_1)z_2^{(0)}+\ \ldots\ +a_{2n}^{(1)}z_n^{(0)}\right\}+\ \ldots\\&\qquad\ldots+c_n\left\{a_{n1}^{(1)}z_1^{(0)}+\ \ldots\ +(a_{nn}^{(1)}+\mu_1)z_n^{(0)}\right\}.\end{aligned}\qquad(5.11)$$

Если теперь заменить в (5.11) величины $z_2^{(0)}$, $z_3^{(0)}$, ..., $z_n^{(0)}$ их выражениями (5.9), то величина $z_1^{(0)}$ может быть вынесена за скобку и на нее можно сократить, поскольку нас интересуют ненулевые решения. В результате мы получим соотношение, которое является алгебраическим уравнением первой степени относительно неизвестной величины μ_1. Заметим, что функция оп-

ределяется только коэффициентами матрицы $\mu_1(t)$ и не зависит от вектора $z^{(0)}$.

Определив величину μ_1, мы может теперь выразить компоненты вектора $z^{(1)}$ через функцию $z_1^{(0)}(t)$. При этом компоненты вектора $z^{(1)}(t)$ снова могут быть определены с точностью до произвольной функции. В качестве такой произвольной функции может рассматриваться функция $z_1^{(1)}(t)$. Перейдем теперь к системе (5.7). Выпишем условие ее разрешимости

$$\frac{dz_1^{(0)}}{dt} + a_{11}^{(0)}z_1^{(0)} + \ldots + a_{1n}^{(0)}z_n^{(0)} = \\ = c_2\left\{\frac{dz_2^{(0)}}{dt} + a_{21}^{(0)}z_1^{(0)} + \ldots + a_{2n}^{(0)}z_n^{(0)}\right\} + \ldots \\ \ldots + c_n\left\{\frac{dz_n^{(0)}}{dt} + a_{n1}^{(0)}z_1^{(0)} + \ldots + a_{nn}^{(0)}z_n^{(0)}\right\}. \tag{5.12}$$

Исключая $z_2^{(0)}, z_3^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ из (5.12) при помощи (5.9), получаем одно уравнение относительно неизвестной функции $z_1^{(0)}(t)$. Это уравнение будет линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Следовательно, его решение будет содержать одну произвольную постоянную.

Уравнения следующих приближений нам дадут возможность определить функции $z_1^{(1)}, z_1^{(2)}, \ldots$ и т. д. Для определения этих функций мы каждый раз будем получать дифференциальные уравнения первого порядка. Следовательно, на каждом шаге у нас будут появляться новые произвольные постоянные, которые могут быть выбраны по нашему усмотрению. Задав их определенным образом, мы просто фиксируем начальные значения для того вектора z, который определяет частное решение, соответствующее выбранному значению корня характеристического уравнения.

Так как подобные рассуждения можно провести для любого корня характеристического уравнения и, по предположению, все его корни различны, то изложенный процесс позволяет построить полную систему линейно независимых решений системы (5.1).

2. Случай кратных корней. Задача становится значительно сложнее, если среди корней характеристического уравнения есть кратные. В этом случае приходится использовать рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены ранее для случая уравнения второго порядка.

Если мы имеем систему ранга k и некоторая функция $\mu(t)$ является кратным корнем характеристического уравнения, но

таким, что ему соответствует простой элементарный делитель, то решение уравнения (5.1) всегда можно искать в форме

$$y(t, \lambda) = e^{-\lambda \int \mu\, dt} z(t, \lambda). \tag{5.13}$$

Вектор $z(t, \lambda)$ будет удовлетворять системе того же порядка, но ранг системы будет на единицу ниже. Если характеристическое уравнение этой новой системы не будет иметь кратных корней, то, используя общую методику, мы можем довести задачу до конца. Если окажется, что характеристическое уравнение системы

$$\dot{z} + B(\lambda, t) z = 0, \tag{5.14}$$

которой удовлетворяет вектор z, имеет кратные корни, то мы можем понизить ее ранг, снова применяя преобразование (5.13). Таким образом, если элементарные делители остаются простыми, то последовательное применение преобразования (5.13) исчерпывает проблему.

Если элементарные делители не простые, то дело может обстоять совершенно иначе. Пример, который был рассмотрен в конце § 3, показывает, что в этом случае не все слагаемые старшего ранга оказываются скомпенсированными. В этом случае мы сталкиваемся с альтернативой: либо коэффициенты уравнения таковы, что после преобразования (5.13) коэффициенты при членах старшего ранга обращаются в нуль, либо они в нуль не обращаются. В первом случае ранг системы оказывается пониженным на единицу и мы можем продолжать процесс дальше. Во втором случае мы также можем построить асимптотические представления, но при этом решения уже представляются в виде рядов, расположенных по дробным степеням параметра λ. Некоторые вопросы теории для этих специальных случаев будут изложены в одном из следующих параграфов.

3. Частные решения неоднородных систем. Рассмотрим теперь неоднородную систему

$$\dot{y} + Ay = x, \tag{5.15}$$

где x — вектор-функция времени

$$x(t, \lambda) = \lambda^p x_p(t) + \lambda^{p-1} x_{p-1}(t) + \ldots,$$

а матрица A имеет вид (5.1′).

Для того чтобы найти общее решение уравнения (5.15), нам необходимо построить асимптотические представления для частного решения этого уравнения. Для этого может быть использована схема, изложенная в предыдущем параграфе.

Ищем решение в виде ряда

$$y(t, \lambda) = \lambda^{p-k} z^{(1)} + \lambda^{p-k-1} z^{(2)} + \ldots,$$

где функции $z^{(i)}$ удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\begin{aligned}
&A^{(k)} z^{(1)} = x_p, \\
&A^{(k)} z^{(2)} = -A^{(k-1)} z^{(1)} + x_{p-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&A^{(k)} z^{(p-k+1)} = -\{\dot{z}^{(1)} + A^{(k-1)} z^{(p-k)} + \ldots\} + x_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

В этом параграфе мы остановились только на формальной стороне вопроса. Однако можно доказать, что при известных условиях гладкости матрицы A все рассуждения этого параграфа могут быть сделаны вполне строгими: полученные ряды являются асимптотическими.

§ 6. Задача о движении гироскопа под действием момента, изменяющегося во времени

1. Вывод уравнений. Мы уже говорили о том, что методы, излагаемые в этой главе, находят разнообразные приложения в физике и технике. Одна из первых задач механики, рассмотренных асимптотическими методами, была задача о движении гироскопа под действием опрокидывающего момента в предположении, что этот момент медленно изменяется со временем. Эта задача возникла в середине XIX века в связи с появлением нарезной артиллерии. Нарезы на внутренней поверхности ствола придают снаряду вращательное движение вокруг оси симметрии. Благодаря этому снаряд приобретает гироскопическую стабилизацию. Кривизна траектории снаряда обычно мала, а изменение угловой скорости вращения за счет трения о воздух незначительно. Вот почему для объяснения различных особенностей движения артиллерийского снаряда можно использовать теорию свободного гироскопа. Первая теория движения артиллерийского снаряда, использующая такую концепцию, была создана в середине прошлого века русским артиллерийским генералом Майевским. Однако в его работах параметры гироскопа (снаряда) во все время его движения считались постоянными. Капитан французской артиллерии де Спарр был, по-видимому, первым, кто отказался от подобного предположения и развил теорию, по существу близкую к той, которая развивается в этой главе.

Мы будем рассматривать классическую задачу Лагранжа — Пуассона о движении осесимметричного волчка, неподвижная

точка которого лежит на оси собственного вращения. Предполагается, что его движение происходит под действием опрокидывающего момента $\boldsymbol{M}$, направленного перпендикулярно плоскости, проходящей через его ось симметрии, направление которой определяет единичный вектор ξ^0 (рис. 40).

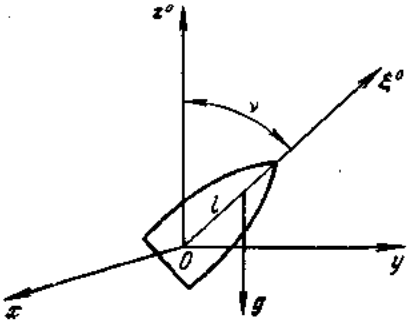

Рис. 40.

Обозначим через $\boldsymbol{\Omega}$ мгновенную угловую скорость гироскопа, через $\boldsymbol{\omega}$ — скорость собственного вращения

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\xi^0. \tag{6.1}$$

Положим

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1. \tag{6.2}$$

Рассмотрим подробнее, что собой представляет вектор $\boldsymbol{\omega}_1$. Вращение гироскопа можно рассматривать состоящим из двух вращательных движений: собственного вращения вокруг вектора ξ^0 и вращения вектора ξ^0. Таким образом, $\boldsymbol{\omega}_1$ — это мгновенная угловая скорость вектора ξ^0.

Величина $d\xi^0/dt$ — скорость конца вектора ξ^0. Так как ξ^0 — единичный вектор, то

$$\frac{d\xi^0}{dt} = \omega_1\tau^0,$$

где τ^0 — единичный вектор касательной к годографу вектора ξ^0 (рис. 41), а ω_1 — абсолютная величина вектора $\boldsymbol{\omega}_1$. Так как τ^0 — единичный вектор, то

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \left|\frac{d\xi^0}{dt}\right|. \tag{6.3}$$

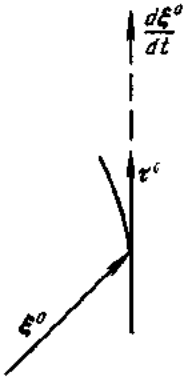

Рис. 41.

Вектор $\boldsymbol{\omega}_1$ мгновенной угловой скорости вращения вектора ξ^0 перпендикулярен плоскости, проходящей через вектор ξ^0 и вектор линейной скорости его конца. Следовательно, направление вектора $\boldsymbol{\omega}_1$ совпадает с направлением вектора

$$\xi^0 \times \frac{d\xi_0}{dt}. \tag{6.4}$$

С другой стороны, оба вектора, входящие в это произведение, перпендикулярны друг другу. Поэтому

$$\left|\xi^0 \times \frac{d\xi^0}{dt}\right| = \left|\frac{d\xi^0}{dt}\right|.$$

Сопоставляя это равенство с (6.3), мы убеждаемся, что и по величине, и по направлению вектор ω_1 совпадает с вектором (6.4). Итак,

$$\omega_1 = \xi^0 \times \frac{d\xi^0}{dt} \tag{6.4'}$$

и, следовательно, вектор Ω может быть представлен следующей формулой:

$$\Omega = \omega\xi^0 + \xi^0 \times \frac{d\xi^0}{dt}. \tag{6.5}$$

Составим выражение для кинетического момента гироскопа

$$K = J\Omega,$$

где J — тензор инерции. Обозначим через A экваториальный, а через C — полярный момент инерции рассматриваемого симметричного гироскопа. Тогда очевидно, что

$$K = A\omega_1 + C\omega.$$

Описывать движение гироскопа будем при помощи уравнения моментов

$$\frac{dK}{dt} = L, \tag{6.6}$$

где L — момент внешней силы $g(t)$. Будем считать, что эта сила постоянна по направлению, которое задается единичным вектором z^0. Тогда момент этой силы относительно неподвижной точки 0 будет

$$L = lg(t)(\xi^0 \times -z^0) = \varkappa(t)(z^0 \times \xi^0). \tag{6.7}$$

Вычислим теперь dK/dt. Для этого заметим, что

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \xi^0 \times \frac{d^2\xi^0}{dt^2}, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\xi^0 + \omega\frac{d\xi^0}{dt}. \tag{6.8}$$

Используя выражения (6.7) и (6.8), можно переписать уравнение (6.6) в виде

$$A\left(\xi^0 \times \frac{d^2\xi^0}{dt^2}\right) + C\left(\frac{d\omega}{dt}\xi^0 + \omega\frac{d\xi^0}{dt}\right) = \varkappa(t)(z^0 \times \xi^0). \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) — общее векторное уравнение, описывающее вращательное движение гироскопа Составим эквивалентную ему систему скалярных уравнений.

Обозначим через x, y и z проекции вектора ξ^0 на неподвижные оси Ox, Oy и Oz (см. рис. 40), связанные с неподвижной точкой O. Система координат $Oxyz$ введена так, что ось Oz совпадает с направлением действующей силы.

Умножим уравнение (6.9) скалярно сначала на единичный вектор $\boldsymbol{x}^0$, а затем на $\boldsymbol{y}^0$:

$$\left.\begin{aligned} A(y\ddot{z}-z\ddot{y})+C\omega\dot{x}+C\dot{\omega}x&=-\varkappa(t)\,y,\\ A(z\ddot{x}-x\ddot{z})+C\omega\dot{y}+C\dot{\omega}y&=\varkappa(t)x.\end{aligned}\right\}\tag{6.10}$$

Недостающее третье уравнение мы получим, умножив скалярно уравнение (6.9) на вектор $\boldsymbol{\xi}^0$:

$$C\frac{d\omega}{dt}=0.\tag{6.11}$$

Из уравнения (6.11) сразу находим $\omega=\text{const}$. Полученное выражение является интегралом системы: скорость собственного вращения остается постоянной независимо от характера изменения внешнего момента.

Итак, задача сводится к исследованию системы двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$. Перепишем уравнения (6.10) с учетом (6.11)

$$\left.\begin{aligned} A(y\ddot{z}-z\ddot{y})+C\omega\dot{x}&=-\varkappa(t)\,y,\\ A(z\ddot{x}-x\ddot{z})+C\omega\dot{y}&=\varkappa(t)\,x.\end{aligned}\right\}\tag{6.12}$$

В систему (6.12) входит еще одно неизвестное z. Но так как x, y и z — это проекции единичного вектора $\boldsymbol{\xi}^0$, то функция $z(t)$ определяется из соотношения

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Таким образом, система (6.12) — это замкнутая система двух нелинейных уравнений второго порядка относительно двух неизвестных величин x и y, она представляет собой точные уравнения, описывающие движение осесимметричного гироскопа вокруг неподвижной точки, лежащей на оси симметрии. Если величина $\varkappa$ постоянна, то полученная система может быть проинтегрирована в замкнутом виде (случай Лагранжа — Пуассона). Заметим, что система (6.12) всегда допускает тривиальное решение $x\equiv y\equiv 0$, соответствующее тому случаю, когда ось гироскопа направлена вдоль вектора внешней силы $\boldsymbol{g}(t)$. В этом случае движение гироскопа — это равномерное вращение вокруг оси Oz.

2. Линеаризация. Изучим задачу в линейной постановке, для этого условимся считать угол нутации ν (угол, заключенный между векторами $\boldsymbol{z}^0$ и $\boldsymbol{\xi}^0$) малой величиной первого порядка малости

$$\nu=O(\varepsilon).$$

Тогда величины x и y — проекции ξ^0 на оси Ox и Oy — мы также должны считать величинами первого порядка малости (см. рис. 42, на котором изображена плоскость, проходящая через вершину D вектора ξ^0 перпендикулярно оси Oz)

$$x = O(\varepsilon), \qquad y = O(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1 - O(\varepsilon^2).$$

Производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ также будем считать малыми первого порядка. Тогда

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y} = O(\varepsilon^2).$$

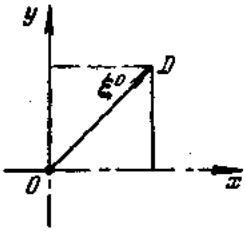

Рис. 42.

Сохраняя в уравнениях (6.12) члены первого порядка малости, мы приходим к следующей системе двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -A\ddot{y} + C\omega\dot{x} + \varkappa y = 0, \\ A\ddot{x} + C\omega y - \varkappa x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Система уравнений (6.13) является приближенной, описывая движение гироскопа при малых углах нутации. Если угол нутации равен нулю, то говорят о спящем положении волчка. В этом случае внешний момент равен нулю. Следовательно, уравнения (6.13) описывают движение гироскопа в окрестности его «спящего положения».

Система уравнений (6.13) — это система уравнений четвертого порядка. Однако она сводится к одному уравнению второго порядка, но с комплексными коэффициентами и относительно некоторой комплекснозначной функции действительного аргумента.

Введем новое неизвестное

$$\zeta = x + iy \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Умножим первое из уравнений системы (6.13) на i и сложим со вторым

$$A\ddot{\zeta} + C\omega(\dot{y} - i\dot{x}) + \varkappa\zeta = 0.$$

Но

$$-i\dot{x} + \dot{y} = -i(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\dot{\zeta},$$

и поэтому окончательно система (6.13) приводится к следующему уравнению второго порядка:

$$A\ddot{\zeta} - iC\omega\dot{\zeta} - \varkappa\zeta = 0. \tag{6.14}$$

Обычно вводятся обозначения

$$\frac{\varkappa}{A}=n^2, \qquad \frac{C}{2A}=e^2$$

и уравнение (4.14) записывается в следующем виде:

$$\ddot{\zeta}-2ie\omega\dot{\zeta}-n^2\zeta=0. \tag{6.15}$$

Итак, поставленная задача сведена к изучению уравнения (6.15).

3. Случай постоянных параметров. Элементарная теория гироскопа. Если функция $n(t)$ не зависит от времени, то уравнение (4.14) — это уравнение с постоянными коэффициентами и его решение элементарно. Полагая

$$\zeta=ze^{\mu t},$$

получим характеристическое уравнение

$$\mu^2-2ie\omega\mu-n^2=0,$$

откуда

$$\mu=ie\omega\pm\sqrt{n^2-e^2\omega^2}. \tag{6.16}$$

Равенство (6.16) показывает, что если условие

$$e^2\omega^2\geqslant n^2 \tag{6.17}$$

не выполнено, то один из корней характеристического уравнения будет иметь положительную действительную часть и, следовательно, «спящее положение» гироскопа будет неустойчивым. Условие (6.17) называется условием устойчивости гироскопа.

Предположим, что условие устойчивости (6.17) выполнено; тогда общее решение уравнения (4.15) можно представить в виде

$$\zeta=C_1\exp\left\{i\left(e\omega+\sqrt{\omega^2e^2-n^2}\right)t\right\}+C_2\exp\left\{i\left(e\omega-\sqrt{\omega^2e^2-n^2}\right)t\right\},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, являющиеся комплексными числами

$$C_1=C_{11}+iC_{12}, \qquad C_2=C_{21}+iC_{22}.$$

Так как $\zeta=x+iy$, то общий интеграл системы (4.13) можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
x&=C_{11}\cos\left(e\omega+\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t-C_{12}\sin\left(e\omega+\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t+\\
&+C_{21}\cos\left(e\omega-\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t-C_{22}\sin\left(e\omega-\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t,\\
y&=C_{11}\sin\left(e\omega+\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t+C_{12}\cos\left(e\omega+\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t+\\
&+C_{21}\sin\left(e\omega-\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t+C_{22}\cos\left(e\omega-\sqrt{e^2\omega^2-n^2}\right)t.
\end{aligned}\right\} \tag{6.18}$$

Формулы (6.18) можно переписать еще и так:

$$x = x^{(1)} + x^{(2)}, \qquad y = y^{(1)} + y^{(2)},$$

где

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)} &= A\cos\left\{\left(e\omega + \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\right)t + \varphi\right\}, \\ y^{(1)} &= A\sin\left\{\left(e\omega + \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\right)t + \varphi\right\}, \\ x^{(2)} &= B\cos\left\{\left(e\omega - \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\right)t + \psi\right\}, \\ y^{(2)} &= B\sin\left\{\left(e\omega - \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\right)t + \psi\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

здесь A, B, φ и ψ — произвольные постоянные, связанные с постоянными C_{jk} формулами

$$A\cos\varphi = C_{11}, \qquad A\sin\varphi = C_{12},$$
$$B\cos\psi = C_{21}, \qquad B\sin\psi = C_{22}.$$

Формулы (6.19) показывают, что движение точки пересечения ξ^0 с плоскостью, перпендикулярной оси Oz, описывают некоторую кривую, являющуюся суперпозицией двух вращательных движений. Вращательное движение по окружности с радиусом, равным A, и угловой скоростью $\mu_1 = e\omega + \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}$, именуемое быстрой прецессией, происходит вокруг точки, которая в свою очередь вращается вокруг начала координат по окружности радиуса B с угловой скоростью $\mu_2 = e\omega - \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}$. Последнее движение называется медленной прецессией.

4. Гироскоп в поле переменной напряженности. Предположим теперь, что напряженность внешней силы g (следовательно, и величины n) медленно изменяется со временем

$$n = n(\varepsilon t),$$

где ε — малый параметр.

Введем новую независимую переменную

$$\tau = \varepsilon t$$

и перепишем уравнение (6.15)

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} - 2ie\omega\lambda\frac{d\zeta}{d\tau} - \lambda^2 n^2(\tau)\zeta = 0. \tag{6.20}$$

Это уравнение имеет несколько более сложный вид, чем те уравнения, которые были рассмотрены в первых параграфах этой главы, поскольку ζ — комплекснозначная функция. Однако общая схема рассуждений остается неизменной.

Прежде всего в уравнении (6.20) сделаем замену переменных

$$\zeta = \eta\exp\{i\lambda e\omega t\}.$$

После очевидных преобразований для новой неизвестной мы получим уравнение, которое уже не содержит первой производной

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \lambda^2 (e^2\omega^2 - n^2)\,\eta = 0. \tag{6.21}$$

Уравнение (6.21) относится к тому типу уравнений, которым были посвящены первые параграфы этой главы:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \lambda^2 f(\tau)\,\eta = 0.$$

Его линейно независимые решения имеют вид

$$\eta_i = \frac{C_i}{\sqrt[4]{f(\tau)}} \exp\left\{\pm i\lambda \int_0^\tau \sqrt{f(\tau)}\, d\tau\right\} \qquad (i = 1, 2).$$

Так как в нашем случае

$$f = e^2\omega^2 - n^2 > 0,$$

то общим решением уравнения будет

$$\eta = \frac{C_1}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \exp\left\{i\lambda \int_0^\tau \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, d\tau\right\} +$$

$$+ \frac{C_2}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \exp\left\{-i\lambda \int_0^\tau \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, d\tau\right\}.$$

Теперь мы можем выписать общее решение уравнения (6.20)

$$\zeta = \frac{C_1}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \exp\left\{i\lambda e\omega t + i\lambda \int_0^\tau \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, d\tau\right\} +$$

$$+ \frac{C_2}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \exp\left\{i\lambda e\omega t - i\lambda \int_0^\tau \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, d\tau\right\}. \tag{6.22}$$

Имея в распоряжении формулу (6.22) и повторяя рассуждения, приведенные в конце предыдущего пункта, мы легко установим, что, как и в случае постоянных коэффициентов, гироскоп совершает сложное движение, которое представляет собой суперпози-

цию медленной и быстрой прецессии. Возвращаясь от переменного τ к переменной t, легко установить, что быстрая прецессия в данном случае описывается следующими формулами:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{A}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n}} \cos\left\{e\omega t + \int_0^t \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, dt + \varphi\right\}, \\ y^{(1)} &= \frac{A}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \sin\left\{e\omega t + \int_0^t \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, dt + \varphi\right\}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Для медленной прецессии мы получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{B}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \cos\left\{e\omega t - \int_0^t \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, dt + \psi\right\}, \\ y^{(2)} &= \frac{B}{\sqrt[4]{e^2\omega^2 - n^2}} \sin\left\{e\omega t - \int_0^t \sqrt{e^2\omega^2 - n^2}\, dt + \psi\right\}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

где A, B, ψ и φ — произвольные постоянные.

В отличие от случая, рассмотренного ранее, как это показывают формулы (6.23) и (6.24), движение происходит с переменной амплитудой и переменной частотой.

Мы рассмотрели самую простую задачу о движении гироскопа при условии, что его параметры медленно изменяются. Однако изложенный метод допускает разнообразные обобщения и позволяет решать значительно более сложные задачи, возникающие в теории гироскопа, когда моменты внешних сил и его параметры медленно изменяются во времени. К одной из таких задач мы и переходим.

5. Уравнения баллистики. Рассмотрим простейшую из задач баллистики вращающегося артиллерийского снаряда. Будем считать, что на вращающийся артиллерийский снаряд действует единственный внешний момент — аэродинамический. В такой постановке эта задача является моделью очень далекой от действительности. Наша единственная цель — показать некоторые установившиеся подходы для решения подобных задач, рациональное содержание которых подтверждается многолетней практикой.

Движение артиллерийского снаряда описывается двумя векторными уравнениями: уравнением количества движения и уравнением моментов. Первое из этих уравнений описывает движение

центра масс, а второе движение относительно центра массы

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{g}+\frac{\boldsymbol{R}}{m}, \tag{6.25}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{K}}{dt^2}=\boldsymbol{L}. \tag{6.26}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор центра массы снаряда, $\boldsymbol{g}$ — напряженность гравитационного поля, $\boldsymbol{R}$ — вектор внешних сил, m — масса снаряда, $\boldsymbol{K}$ — кинетический момент, $\boldsymbol{L}$ — момент внешних сил.

Внешние силы $\boldsymbol{R}$ — это аэродинамические силы, зависящие от угла нутации ν. Основной задачей внешней баллистики называется задача определения траектории центра масс в предположении, что угол нутации равен нулю. Эта траектория всегда является плоской. Внешняя баллистика использует следующую гипотезу: движение относительно центра тяжести может быть изучено с большой степенью точности, если предположить, что сам центр тяжести движется по траектории, являющейся решением основной задачи внешней баллистики.

Эта гипотеза играет важную роль, поскольку она позволяет изучить уравнение (6.26) независимо от (6.25).

Итак, мы пришли к задаче исследования движения гироскопа в подвижной системе координат $oxyz$. Эту систему координат свяжем с направлением вектора скорости центра массы (см. рис. 40). Вдоль вектора скорости направлена ось oz, ось ox направлена по пересечению вертикальной плоскости XOY и плоскости, нормальной к оси oz. Ось oy лежит, таким образом, в горизонтальной плоскости YOZ. Система координат $OXYZ$ неподвижная, система координат $oxyz$ вращается с некоторой мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^*$.

Обозначим через $d\tilde{\boldsymbol{K}}/dt$ производную вектора $\boldsymbol{K}$ относительно подвижной системы координат. Тогда уравнение (6.26) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{K}}}{dt}+\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{K}=\boldsymbol{L}. \tag{6.27}$$

Согласно предыдущему

$$\boldsymbol{K}=A\boldsymbol{\omega}_1+C\boldsymbol{\omega}, \tag{6.28}$$

где $\boldsymbol{\omega}_1$ — мгновенная угловая скорость вращения вектора $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{\xi}^0$. Поэтому линейная скорость конца вектора $\boldsymbol{\xi}^0$ будет

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}^0}{dt}=\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\xi}^0.$$

Перейдем теперь к вращающейся системе координат. Тогда

$$\frac{d\tilde{\xi}^0}{dt} + \omega^* \times \xi^0 = \omega_1 \times \xi^0.$$

Обе части этого равенства умножим векторно слева на ξ^0

$$\xi^0 \times (\omega^* \times \xi^0) = \omega^* (\xi^0 \cdot \xi^0) - \xi^0 (\xi^0 \cdot \omega^*) = \omega^* - \xi^0 (\xi^0 \cdot \omega^*),$$
$$\xi^0 \times (\omega_1 \times \xi^0) = \omega_1 - \xi^0 (\xi^0 \cdot \omega_1).$$

Но последняя скобка равна нулю, поскольку векторы ξ^0 и ω_1 ортогональные. Итак, формулу (6.4′), которую мы имеем в случае неподвижной системы координат, мы должны заменить такой:

$$\omega_1 = \xi^0 \times \frac{d\tilde{\xi}^0}{dt} + \omega^* - \xi^0 (\xi^0 \cdot \omega^*). \tag{6.29}$$

Используя выражения (6.28) и (6.29), преобразуем (6.27). При этом мы условимся считать, что опрокидывающий момент $\boldsymbol{L}$ определяется формулой (6.7), где $\varkappa(t)$ — характеристика аэродинамической силы, которая зависит от скорости и, следовательно, медленно изменяется со временем. В результате вместо уравнения (6.9) мы получим следующее:

$$A\left\{\xi^0 \times \frac{d^2\tilde{\xi}^0}{dt^2} - \frac{d\tilde{\xi}^0}{dt}(\xi^0 \cdot \omega^*) - \xi^0\left(\frac{d\tilde{\xi}^0}{dt} \cdot \omega^*\right) - \right.$$
$$\left. - \xi^0\left(\xi^0 \cdot \frac{d\omega^*}{dt}\right) + \frac{d\tilde{\omega}^*}{dt}\right\} + C\left(\frac{d\omega}{dt}\xi^0 + \omega\frac{d\tilde{\xi}^0}{dt}\right) = \varkappa(t)(z^0 \times \xi^0) -$$
$$- \omega^* \times \left\{C\omega\xi^0 + A\left[\xi^0 \times \frac{d\tilde{\xi}^0}{dt} - \xi^0(\xi^0 \cdot \omega^*)\right]\right\}.$$

Собирая подобные члены, получим окончательно

$$C\left(\frac{d\omega}{dt}\xi^0 + \omega\frac{d\tilde{\xi}^0}{dt} + \omega(\omega^* \times \xi^0)\right) + A\left\{\xi^0 \times \frac{d^2\tilde{\xi}^0}{dt^2} - \right.$$
$$- 2\frac{d\tilde{\xi}^0}{dt}(\xi^0 \cdot \omega^*) - \xi^0\left(\xi^0 \cdot \frac{d\tilde{\omega}^*}{dt}\right) + \frac{d\omega^*}{dt} -$$
$$- (\xi^0 \cdot \omega^*)(\omega^* \times \xi^0) = \varkappa(t)(z^0 \times \xi^0). \tag{6.30}$$

В уравнении (6.30) функции $\varkappa(t)$ и $\omega^*(t)$ должны считаться известными, поскольку они определены решением основной задачи внешней баллистики. Так же, как и система (6.9), система (6.30) допускает первый интеграл

$$\omega = \text{const}. \tag{6.31}$$

Используя это соотношение, мы можем упростить соотношение (6.30) и записать его в проекциях на оси Ox и Oy. Проекции

векторов $\xi^0 \times \frac{d^2\tilde{\xi}^0}{dt^2}$ и $\frac{d\tilde{\xi}^0}{dt}$ вычислены ранее при выводе уравнений (6.12).

Рассмотрим теперь вектор ω^*; подвижная система координат может совершать вращательное движение только вокруг осей Ox и Oy

$$\omega^* = \omega_x^* x^0 + \omega_y^* y^0.$$

Вращение вокруг оси Ox приводит к изменению угла ψ — угла, который образует ось Oz с вертикальной плоскостью. Этот угол условимся отсчитывать от оси Oz. Тогда

$$\omega_x^* = -\dot{\psi}.$$

Аналогично

$$\omega_y^* = \dot{\theta}.$$

Итак,

$$\omega^* = -\dot{\psi} x^0 + \dot{\theta} y^0.$$

Теперь мы легко вычислим проекции остальных векторов и произведения, входящие в уравнение (6.30):

$$\omega^* \times \xi^0 = \dot{\theta} z x^0 + \dot{\psi} z y^0 - (\dot{\psi} y + \dot{\theta} x) z^0,$$

$$\frac{d\tilde{\omega}^*}{dt} = -\ddot{\psi} x_0 + \ddot{\theta} y^0,$$

$$(\xi^0 \cdot \omega^*) = -\dot{\psi} x + \dot{\theta} y,$$

$$\left(\xi^0 \cdot \frac{d\tilde{\omega}^*}{dt}\right) = -\ddot{\psi} x + \ddot{\theta} y.$$

Используя эти равенства, перепишем уравнение (6.30) в проекциях на оси Ox и Oy

$$\left.\begin{aligned} &A(y\ddot{z} - \ddot{y}z) + C\omega\dot{x} - 2A\dot{x}(\dot{\theta}y - \dot{\psi}x) - Ax(\ddot{\theta}y - \ddot{\psi}x) - \\ &\qquad - A\ddot{\psi} - C\omega\dot{\theta}z - A\dot{\theta}z(\dot{\theta}y - \dot{\psi}x) = -\varkappa(t)\,y, \\ &A(\ddot{x}z - \ddot{z}x) + C\omega\dot{y} - 2A\dot{y}(\dot{\theta}y - \dot{\psi}x) - Ay(\ddot{\theta}y - \ddot{\psi}x) + \\ &\qquad + A\ddot{\theta} + C\omega\dot{\psi}z - A\dot{\psi}z(\dot{\theta}y - \dot{\psi}x) = \varkappa(t)\,x. \end{aligned}\right\} \quad (6.32)$$

Эти два уравнения совместно с интегралом (6.31) и условием нормировки

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

полностью описывают движение гироскопа в системе координат, которая движется заданным образом.

Теперь линеаризуем эту систему. При этом мы будем считать, что и система координат $oxyz$ вращается медленно, т. е. что величины производных угловой скорости также малы.

Кроме того, мы примем, что $\psi \equiv 0$. Последнее означает, что в качестве вертикальной плоскости OZX принята плоскость траектории, найденной при решении основной задачи. В результате мы получим следующую систему уравнений (сравним с (6.13)):

$$\left.\begin{aligned} A\ddot{x} + C\omega\dot{y} - \varkappa(t)\,x &= A\ddot{\theta}, \\ A\ddot{y} - C\omega\dot{x} - \varkappa(t)\,y &= C\omega\dot{\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

Система (6.33) отличается от системы (6.13) только тем, что в ее правой части стоят некоторые известные функции времени.

6. Исследование системы (6.33). Решение системы (6.33) можно представить в виде

$$x = \tilde{x} + x^*, \qquad y = \tilde{y} + y^*, \tag{6.34}$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — решение однородной системы, определяемое формулами (6.23) и (6.24); x^* и y^* — частное решение неоднородной системы (6.33). Для отыскания этих функций снова можно использовать метод асимптотического интегрирования. В § 4 этой главы были даны приближенные формулы для определения частных решений. Используя эти формулы, получим

$$x^* = -\frac{A\ddot{\theta}}{\varkappa(t)}, \qquad y^* = -\frac{C\omega\dot{\theta}}{\varkappa(t)}. \tag{6.35}$$

Дальнейшее исследование уравнений баллистики ведется обычно по следующей схеме. Уравнения (6.25) выписываются в проекциях на оси неподвижной системы координат $OXYZ$ и на оси подвижной системы координат $oxyz$.

Система скалярных уравнений имеет при этом следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} = -g\sin\theta - \frac{R(x, y, X)}{m}, \\ &\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g\cos\theta}{v} + \frac{Q_1(x, y, X)}{mv}, \\ &\frac{d\psi}{dt} = \frac{Q_2(x, y, X)}{mv}, \quad \frac{dX}{dt} = v\sin\theta, \quad \frac{dY}{dt} = v\sin\psi, \\ &\frac{dZ}{dt} = v\sqrt{1 - (\sin^2\theta + \sin^2\psi)} = v\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\psi}, \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

где X, Y, Z — координаты центра массы в инерциальной системе координат. Первые три уравнения этой системы носят название динамических уравнений: они описывают изменение вектора $\boldsymbol{v}$ — скорости центра масс снаряда. Последние три уравнения

носят название кинематических: они позволяют определить положение центра масс, если известен вектор скорости.

В динамические уравнения входят функции R, Q_1 и Q_2; R — сила лобового сопротивления, зависящая от квадрата угла нутации

$$R=R_0+R^*(x^2+y^2),$$

Q_1 и Q_2 — это составляющие вектора подъемной силы. С большой степенью точности их можно считать линейными функциями переменных x и y

$$\frac{Q_1}{m}=qx, \qquad \frac{Q_2}{m}=qy. \tag{6.37}$$

Предположим теперь, что в нашем распоряжении имеется решение основной задачи внешней баллистики и решение задачи об относительном движении около центра массы, т. е. функции x и y, определенные формулами (6.34). Следующий этап решения общей задачи баллистики состоит в том, чтобы определить влияние относительного движения на траекторию центра массы. Этот вопрос подробно изучен в ряде книг *). Весьма общий подход к решению поставленной задачи предложен В. С. Пугачевым **). Решение может быть проведено также в рамках теории возмущений. Для этого достаточно принять

$$\left.\begin{aligned} &v=v^0+\Delta v,\ \theta=\theta^0+\Delta\theta,\ \psi=\psi^0+\Delta\psi,\\ &X=X^0+\Delta X,\ Y=Y^0+\Delta Y,\ Z=Z^0+\Delta Z.\end{aligned}\right\} \tag{6.38}$$

Подставим выражения (6.38) в систему уравнений (6.37) и линеаризуем эту систему, считая малыми величинами первого порядка все приращения Δv, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$, ΔX, ΔY, ΔZ и составляющие угла нутации — величины x и y. Отбрасывая малые второго порядка, мы придем к системе линейных уравнений относительно этих переменных. Анализ полученных таким способом уравнений позволяет рассчитать влияние относительного движения вращающегося снаряда на его траекторию. Существуют разнообразные приближенные способы подобных расчетов. За всеми подробностями мы отсылаем читателя к специальным руководствам по баллистике, цитированным выше. Здесь мы сделаем только несколько замечаний.

---

*) См., например, Д. А. Вентцель, Внешняя баллистика, М., 1940.

**) В. С. Пугачев, Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе, Труды Военно-воздушной академии им. Жуковского, № 70 (1940).

Рассмотрим вначале величины $\Delta\theta$ и $\Delta\psi$; их можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}\Delta\theta &= \int_0^t K_\theta(t,\ \tau)\,x(\tau)\,d\tau,\\ \Delta\psi &= \int_0^t K_\psi(t,\ \tau)\,y(\tau)\,d\tau,\end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

где K_θ и K_ψ — элементы матрицы Грина для линеаризованной системы. Функции K_θ и K_ψ определяются только характером траектории в основной задаче внешней баллистики и не зависят от возмущений. Величины $x(t)$ и $y(t)$ в этих выражениях определяются формулами (6.34). Определив величины $\Delta\theta$ и $\Delta\psi$ при помощи формул типа (6.39), мы можем затем рассчитать величины ΔX, ΔY и ΔZ, т. е. определить полностью все эффекты, связанные с вращением снаряда.

В рамках изложенной теории может быть решен и еще один важный вопрос — какой должна выбираться угловая скорость собственного вращения снаряда. Во-первых, она должна быть достаточно велика, чтобы, во всяком случае, удовлетворить условию устойчивости, так как в противном случае снаряд начнет кувыркаться на траектории и его движение будет далеко от рассчетного. Однако угловая скорость не должна быть и особенно большой, так как в этом случае угловая скорость медленной прецессии будет столь мала, что среднее значение координат x и y будет иметь некоторые ненулевые составляющие и ось снаряда будет плохо следить за касательной к траектории.

Итак, мы видим, что асимптотические методы большого параметра являются естественным и очень эффективным средством для решения практических задач типа задач баллистики.

§ 7. Особые случаи (асимптотика и окрестности точек возврата)

1. Предварительные замечания. До сих пор мы изучали только те системы уравнений, у которых корни характеристического уравнения не обращаются в нуль внутри рассматриваемого интервала времени $[0,\ T]$. Кроме того, при изучении случая кратных корней мы предполагали, что рассматриваемая ситуация (например, кратность корня и структура элементарных делителей) сохраняется на всем отрезке времени $[0,\ T]$. Точки, лежащие внутри интервала или на его концах, где рассматриваемая ситуация нарушается, условимся называть точками возврата. Асимптотическое поведение решений в окрестности этих точек

уже не может описываться формулами, которые мы вывели в предыдущих параграфах этой главы.

Вопрос о построении подобных асимптотик тесно связан с другим общим вопросом. До сих пор мы изучали асимптотические представления экспоненциального типа, например такие

$$y \sim \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\} z(t, \lambda), \tag{7.1}$$

где $z(t, \lambda)$ — некоторая вектор-функция, представленная отрезком ряда, расположенного по целым степеням величины $1/\lambda$. Структура выражения (7.1) показывает, что природа решений изучаемых систем такая же, как и у систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, поскольку функция

$$\exp\{\lambda\varphi\} \cdot z,$$

где z — постоянный вектор, а φ — линейная функция времени, может рассматриваться как частное решение некоторой системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{d\varphi} = \lambda A y, \tag{7.2}$$

где A — постоянная матрица.

Естественно, возникает вопрос об исследовании асимптотических представлений более общего вида

$$y = \Phi(\lambda^k \varphi) z(t, \lambda), \tag{7.3}$$

где k — число, а $\Phi(x)$ — решение «эталонного» уравнения

$$\frac{dy}{dx} = By, \tag{7.4}$$

в котором матрица B — это некоторая функция времени. Мы увидим ниже, что асимптотические представления решений в окрестности точек возврата окажутся среди представлений вида (7.3).

В. С. Пугачев был, по-видимому, первым, который предпринял систематическое изучение представлений вида (7.3) *). Им была развита общая теория представлений вида (7.3) в предположении, что на рассматриваемом отрезке времени система не имеет ни точек возврата, ни кратных корней.

В 1948 г. автором этой монографии были изучены некоторые специального вида системы второго и четвертого порядка,

*) В. С. Пугачев, Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Математ. сборник, т. 15 (57), № 1 (1944).

но в отличие от работы В. С. Пугачева была рассмотрена структура асимптотических представлений в окрестности точек возврата. Позднее некоторые из этих результатов были использованы для построения приближенных методов численного интегрирования *).

В 1953 г. А. А. Дородницын опубликовал подробное исследование асимптотического поведения собственных функций для задачи Штурма — Лиувиля в тех случаях, когда рассматриваемое уравнение имеет точки возврата **). В этой работе рассматривался тот специальный случай, когда корни характеристического уравнения обращаются в нуль на границе или внутри рассматриваемого отрезка времени.

В 1954 г. вышла монография И. М. Раппопорта ***). Эта книга явилась прежде всего сводкой результатов, в которой последовательно проводилась некоторая единая концепция изучения асимптотических свойств решений; кроме того, она содержала целый ряд оригинальных результатов.

Параллельно с перечисленными работами на западе появился ряд исследований, посвященных тем же вопросам и содержащих близкие результаты. Отметим здесь только одну из работ этого цикла — работу Лангера ****).

За последнее десятилетие опубликовано довольно много работ, посвященных теории асимптотических представлений решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом параграфе мы рассмотрим только самые простые случаи систем второго порядка.

2. Эталонное уравнение, формальное построение асимптотических рядов. Условимся рассматривать уравнения вида

$$\ddot{y}+[\lambda^2 a(t)+b(t)]y=0. \tag{7.5}$$

Мы видели, что к рассмотрению уравнения (7.5) сводится целый ряд важных случаев. Например, уравнение

$$\ddot{y}+[\lambda^2 a+\lambda b]y=0$$

приводится к виду (7.5) заменой $t=\tau/\sqrt{\lambda}$ и $\lambda=\lambda_1^2$.

---

*) Н. Н. Моисеев, О приближенном интегрировании линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Ученые записки Ростовского университета, т. XVIII, в. 3 (1953).

**) А. А. Дородницын, Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. УМН, т. VII, в. 6 (1952).

***) И. М. Раппопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд. АН УССР, Киев, 1954.

****) Langer R., The asymptotic solution of ordinary linear differential equations of the second order with special reference to a turning point, Trans. Amer. Math. Soc., 67 (1949).

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+f(x)\Phi=0. \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) условимся называть эталонным уравнением. Функция $f(x)$ такова, что интегралы системы могут быть выписаны через известные функции. Во всех тех случаях, которые уже рассматривались в этой главе, эталонным уравнением было такое:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\Phi=0. \tag{7.7}$$

Решение эталонного уравнения будем считать известным. Следуя общей схеме, решение уравнения (7.5) ищем в виде

$$y=\Phi(x(t))z(t,\ \lambda), \tag{7.8}$$

где $\Phi(x)$ — какое-либо из частных решений эталонного уравнения (7.6). Функция $x(t)$ нам заранее неизвестна. В тех случаях, которые уже были рассмотрены, роль $x(t)$ играла функция $i\int\limits_0^t \mu\,dt$, выбором которой мы компенсировали члены, содержащие старшие степени параметра λ.

Подставив выражение (7.8) в уравнение (7.5), мы получим уравнение относительно функции $z(t,\ \lambda)$

$$\ddot{z}\Phi+2\dot{z}\Phi_x\dot{x}+z[\Phi_{xx}\dot{x}^2+\Phi_x\ddot{x}+(\lambda^2a+b)\Phi]=0.$$

Принимая во внимание, что функция $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению (7.6), получим

$$\ddot{z}\Phi+2\dot{z}\Phi_x\dot{x}+z\{[-\dot{x}^2f(x)+\lambda^2a(t)]\Phi+\Phi_x\ddot{x}+b\Phi\}=0. \tag{7.9}$$

Мы скомпенсируем члены порядка λ^2, если выберем функцию $x(t)$ таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль, т. е.

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{f(x)}=\lambda\sqrt{a(t)}. \tag{7.10}$$

Уравнение (7.10) в том случае, когда $f\equiv 1$ переходит в уравнение $\dot{x}=\lambda\sqrt{a}$. Полагая $x=i\lambda\int\limits_0^t \mu\,dt$ для $\mu(t)$, получим уравнение $\mu+i\sqrt{a}=0$, которое мы называли характеристическим. На этом основании уравнение (7.10) также условимся называть характеристическим.

Уравнение (7.10) в общем случае — это некоторое нелинейное уравнение относительно неизвестной функции $x(t)$. Предположим, что нам удалось его решить и получить решение в виде

$$x(t)=\lambda^s\psi(t),$$

тогда уравнение (7.9) можно будет переписать в форме

$$\ddot{z}\Phi+2\dot{z}\Phi_x\lambda^s\dot{\psi}+z\left[\Phi_x\lambda^s\ddot{\psi}+b\Phi\right]=0. \tag{7.11}$$

Решение уравнения (7.11) естественно попытаться разыскать в виде ряда, расположенного по обратным степеням величины λ^s

$$z=z_0(t)+\lambda^{-s}z_1(t)+\lambda^{-2s}z_2(t)+\ldots \tag{7.12}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (7.11), мы получим следующие уравнения для определения функций $z_0, z_1, \ldots$:

$$2\dot{\psi}\dot{z}_0+z_0\ddot{\psi}=0, \tag{7.13}$$

$$2\dot{\psi}\dot{z}_1+z_1\ddot{\psi}=-\frac{\ddot{z}_0\Phi+bz_0}{\Phi_x} \tag{7.14}$$

и т. д.

Решение уравнения (7.13) может быть получено в явном виде

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{\dot{\psi}}}. \tag{7.15}$$

Решения уравнения для z_1, z_2 и т. д. могут быть представлены в форме квадратур.

Обозначим через Φ_1 и Φ_2 частные решения уравнения (7.6). Тогда выражение

$$y(t,\ \lambda)=C_1\Phi_1\left(\lambda^s\psi(t)\right)\left[z_0^{(1)}+\lambda^{-s}z_1^{(1)}+\ldots\right]+$$
$$+C_2\Phi_2\left(\lambda^s\psi(t)\right)\left[z_0^{(2)}+\lambda^{-s}z_1^{(2)}+\ldots\right], \tag{7.16}$$

где функция $z_i^{(1)}(t)$ и $z_i^{(2)}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (7.13) и (7.14) при условии, что $\Phi\equiv\Phi_1$ и $\Phi\equiv\Phi_2$ соответственно, дает формальное представление для общего решения уравнения (7.5).

В общем случае ряд (7.16) не только не является сходящимся, но он и не асимптотический. Члены этого ряда вообще могут не существовать. Причина этого обстоятельства состоит в том, что в качестве эталонного уравнения мы приняли произвольное уравнение второго порядка. Естественно предположить, что изложенная процедура имеет какой-то смысл лишь в том случае, когда решения эталонного уравнения в некотором смысле «близки» к решениям изучаемых. Так обстояло дело в тех параграфах этой главы, когда изучались уравнения, близкие к уравнениям с постоянными коэффициентами.

3. Асимптотика решений в окрестности точек возврата, в которых корни характеристического уравнения обращаются в нуль. Рассмотрим теперь снова уравнение (7.5), предполагая, что функция $a(t)$ обращается в нуль в точке $t=0$. В этом случае характеристическое уравнение (в том смысле, в каком мы его понимали в первых параграфах этой главы)

$$\mu^2+a(t)=0$$

будет иметь нулевые корни, и следовательно, теория, развитая в начале этой главы, неприменима. Поэтому для построения асимптотики в окрестности точки $t=0$, воспользуемся соображениями этого параграфа.

В качестве эталонного уравнения мы подберем уравнение, коэффициенты которого имеют в точке $t=0$ такую же особенность, как и функция $a(t)$. Рассмотрим для определенности два случая:

А) $a(t)=tq(t), \quad q(0)\neq 0;$

Б) $a(t)=t^2q(t), \quad q(0)\neq 0.$

В качестве эталонных уравнений естественно принять следующее:

для случая А)

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+x\Phi=0, \tag{7.17}$$

для случая Б)

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+x^2\Phi=0. \tag{7.18}$$

Характеристические уравнения (7.10) будут соответственно иметь следующий вид:

$$\frac{dx}{dt}\sqrt{x}=\lambda\sqrt{tq(t)}, \tag{7.19}$$

$$\frac{dx}{dt}x=\lambda t\sqrt{q(t)}. \tag{7.20}$$

Рассмотрим сначала уравнение (7.19); оно легко интегрируется в квадратурах, и мы находим функцию

$$x(t)=\lambda^{2/3}\left(\frac{3}{2}\int_0^t\sqrt{tq(t)}\,dt\right)^{2/3}. \tag{7.21}$$

Таким образом, функция $\psi(t)$ будет такой:

$$\psi(t)=\left(\frac{3}{2}\int_0^t\sqrt{tq(t)}\,dt\right)^{2/3}. \tag{7.22}$$

Вычислим еще функцию $\psi(t)$

$$\psi(t)=\frac{\sqrt{tq(t)}}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}\int\limits_0^t\sqrt{tq(t)}\,dt}}. \tag{7.23}$$

Таким образом, на основании формулы (7.16) и (7.15) мы можем написать следующее приближенное выражение для линейно независимых интегралов уравнения (7.5) в том случае, когда $a=tq(t)$:

$$y_{1,2}=\frac{C_{1,2}\sqrt[6]{\frac{3}{2}\int\limits_0^t a(t)\,dt}}{\sqrt[4]{a(t)}}\,\Phi_{1,2}\left(\lambda^{2/3}\left(\frac{3}{2}\int\limits_0^t\sqrt{a(t)}\,dt\right)^{2/3}\right). \tag{7.24}$$

Эта формула дает погрешность, порядок которой равен $O(\lambda^{-2/3})$.

Функции $\Phi_{1,2}(x)$ — это линейно независимые решения уравнения (7.17), которое называется уравнением Эйри. Функции $\Phi_i(x)$ называются функциями Эйри. Они достаточно хорошо изучены, и имеются таблицы значений этих функций, почти столь же подробные, как и таблица тригонометрических функций.

Функции $y_i(t)$, определенные формулами (7.24), это прямой аналог WBKJ-решений, которые рассматривались в § 1 этой главы.

Рассмотрим теперь случай Б). Так же, как и в случае А), характеристическое уравнение (7.20) легко интегрируется, и мы находим

$$\left.\begin{aligned} &x(t)=\lambda^{1/2}\psi(t),\quad \psi(t)=\sqrt{2\int\limits_0^t\sqrt{a(t)}\,dt},\\ &\psi(t)=\sqrt{\frac{a(t)}{2\int\limits_0^t\sqrt{a(t)}\,dt}}. \end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

Отбрасывая члены, порядок которых $O(\lambda^{-1/2})$, мы получаем следующие приближенные представления для частных решений

уравнения (7.5) для того случая, когда $a(t)=t^2q(t)$:

$$y_{1,2}=C_{1,2}\sqrt[4]{\frac{\int\limits_0^t\sqrt{a(t)}\,dt}{a(t)}}\,\Phi_{1,2}\left(\lambda^{1/2}\sqrt{2\int\sqrt{a(t)}\,dt}\right). \quad (7.26)$$

Функции $\Phi_i(t)$, которые входят в формулу (7.26), это линейно независимые решения уравнения (7.18). Полученное уравнение в свою очередь сводится к уравнению Бесселя. Общее решение уравнения (7.18) можно представить в виде

$$\Phi=C_1\Phi_1(x)+C_2\Phi_2(x)=\sqrt{x}Z_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right), \quad (7.27)$$

где

$$Z_{1/4}(x)=C_1J_{1/4}(x)+C_2N_{1/4}(x),$$

$J_{1/4}$ и $N_{1/4}$ — функции Бесселя и Неймана соответственно.

Используя равенство (7.27), мы можем переписать формулу (7.26) в форме

$$y=\frac{\sqrt{\int\sqrt{a(t)}\,dt}}{\sqrt[4]{a(t)}}\,Z_{1/4}\left(\lambda\int\limits_0^t\sqrt{a(t)}\,dt\right). \quad (7.28)$$

Мы рассмотрели два уравнения типа (7.5), для которых был выбран специальный вид эталонных уравнений. Нетрудно показать, что в этих случаях ряды (7.16) являются асимптотическими.

4. Асимптотические разложения в окрестности точки возврата, где элементарные делители перестают быть простыми. В одном из параграфов мы рассматривали асимптотику уравнения

$$\ddot{y}+2\lambda a\dot{y}+\lambda^2by=0, \quad (7.29)$$

предполагая, что на всем интервале времени

$$b=a^2. \quad (7.30)$$

Если условие (7.30) выполнено, то характеристическое уравнение будет иметь кратные корни, а элементарные делители не будут простыми. Их кратность равна двум.

Предположим теперь, что условие (7.30) выполняется только в некоторой точке t_0. Не ограничивая общности, мы можем принять, что такой точкой является точка $t=0$. Для упрощения выкладок предположим, что

$$a=\text{const}.$$

В такой постановке уравнение (7.29) описывает колебание маятника в переменном гравитационном поле, но с постоянным демпфированием.

Сделаем сначала замену

$$y=z(t,\ \lambda)\exp\{-\lambda at\};$$

тогда для $z(t,\ \lambda)$ мы будем иметь следующее уравнение:

$$\ddot{z}+\lambda^2(b-a^2)z=0. \tag{7.31}$$

Предположим теперь, что

$$b^2=a^2+tq(t),$$

где $q(0)\neq 0$. Тогда уравнение (7.31) можно рассматривать как относящееся к случаю А) предыдущего пункта и мы сразу можем выписать окончательный результат

$$y_{1,2}=C_{1,2}\exp\{-at\}\frac{\sqrt[6]{\int\limits_0^t\sqrt{b-a^2}\,dt}}{\sqrt[4]{b-a^2}}\Phi_{1,2}\left\{\lambda^{2/3}\left(\frac{3}{2}\int\sqrt{b-a^2}\,dt\right)^{2/3}\right\}. \tag{7.32}$$

Мы рассмотрели несколько примеров, которые показывают, что эффективное построение асимптотических представлений требует существования подробных таблиц решений эталонных уравнений.

Заметим, что асимптотика рассматриваемого вида является равномерными асимптотиками на всем рассматриваемом интервале времени. Поэтому их называют также иногда «сквозными» асимптотиками, позволяющими построить асимптотические представления на всем интервале, включая окрестность точки возврата.

§ 8. О некоторых способах построения асимптотических представлений в случае кратных элементарных делителей характеристической матрицы

В § 3 этой главы мы уже имели дело с тем случаем, когда элементарные делители характеристической матрицы кратные; было рассмотрено несколько случаев, которые встречаются при исследовании систем второго порядка.

В числе рассмотренных был пример Я. Д. Тамаркина, который интересен прежде всего тем, что он вскрывает новые особенности асимптотики, которые появляются в случаях, когда элементарные делители кратные. Оказывается, что разложения

теперь уже могут содержать дробные степени параметра. Наконец, уже из приведенного примера становилось ясным, что при изучении асимптотического поведения, мы сталкиваемся с большим разнообразием возможных ситуаций, для каждой из которых возможен свой тип асимптотических представлений.

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторый общий подход к исследованию случаев кратных элементарных делителей, ограничиваясь при этом анализом нескольких примеров *).

1. Система с одним элементарным делителем произвольной кратности. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda\mu(t)\,x_1 + \lambda x_2 + \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(t)\,x_j, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_{m-1} &= \lambda\mu(t)\,x_{m-1} + \lambda x_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m-1,\,j}(t)\,x_j, \\ \dot{x}_m &= \lambda\mu(t)\,x_m + \sum_{j=1}^{m} a_{mj}(t)\,x_j. \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Характеристическая матрица системы (8.1) имеет один элементарный делитель $\mu - \mu^*$, и его кратность равна m.

Положим

$$x_k = u_k(\lambda,\ t)\exp\left\{\int_0^t [\lambda\mu(t) + \varphi(t,\ \lambda)]\,dt\right\}. \tag{8.2}$$

Тогда неизвестные функции u_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ и $\varphi(t,\ \lambda)$ должны удовлетворять следующим системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_1 + u_1\varphi &= \lambda u_2 + \sum_{j=1}^{m} a_{1j}u_j, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{u}_{m-1} + u_{m-1}\varphi &= \lambda u_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m-1,\,j}u_j, \\ \dot{u}_m + u_m\varphi &= \sum_{j=1}^{m} a_{mj}u_j. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Предположим, что мы стали искать решение в виде

$$u_i = \lambda^k t u_i^*(\lambda,\ t), \qquad \varphi = \lambda^k \varphi^*(\lambda,\ t), \tag{8.4}$$

*) Изложение этого параграфа следует заметке Н. Н. Моисеева, опубликованной в ДАН СССР.

где u_i^* и φ^* ограничены и не обращаются в нуль при $\lambda \to \infty$. Потребуем, чтобы члены, стоящие в правых частях системы (8.3) и имеющие высшие степени λ, компенсировались произведениями $u_i\varphi$.

Предположим, например, что в первом уравнении системы (8.3) слагаемым, содержащим старшую степень λ, будет член λu_2, тогда это выражение должно быть компенсировано слагаемым $u_1\varphi$, отсюда мы получим

$$k_1+k=k_2+1.$$

Рассуждая аналогично, для второго уравнения найдем

$$k_2+k=k_2+1$$

и т. д. Итак, мы приходим к следующей системе равенств:

$$\left.\begin{aligned} k_1-k_2&=1-k,\\ k_2-k_3&=1-k,\\ &\cdots\cdots\\ k_{m-1}-k_m&=1-k,\\ k_m-k_1&=-k. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Равенства (8.5) будем рассматривать как систему уравнений относительно k_i. Определитель этой системы, как легко проверить, равен нулю, а ранг матрицы системы равен $m-1$. Поэтому для того чтобы она имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы также равнялся $m-1$. Расширенная матрица в этом случае имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & (1-k)\\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & (1-k)\\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & (1-k)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & (1-k)\\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -k \end{Vmatrix}.$$

Мы видим, что сумма элементов каждого из первых m столбцов равна нулю. Следовательно, этим свойством должен обладать и $m+1$ столбец. Из этого условия находим величину k

$$k=\frac{m-1}{m}. \tag{8.6}$$

Не ограничивая общности, примем $k_1=0$. Тогда

$$k_2=-\frac{1}{m},\quad k_3=-\frac{2}{m},\ \ldots,\quad k_m=-\frac{m-1}{m}.$$

Итак, сделав некоторые предположения относительно структуры представлений (8.4) функций u_i и φ, мы пришли к следующим выражениям для функций $x_k(t,\lambda)$:

$$x_k(t,\ \lambda)=\lambda^{-\frac{k-1}{m}}u_k^*(\lambda,\ t)\exp\left\{\int_0^t\left[\lambda\mu(t)+\lambda^{\frac{m-1}{m}}\varphi^*(\lambda,\ t)\right]dt\right\}.$$

Мы видим, что оно содержит целые степени величины $\lambda^{1/m}$. Поскольку функции u_k^* и φ^* ограничены при $\lambda\to\infty$, будем их искать в форме рядов, расположенных по отрицательным степеням этого параметра

$$\left.\begin{aligned}u_s^*(t,\ \lambda)&=u_{s0}(t)+\lambda^{-\frac{1}{m}}u_{s1}(t)+\lambda^{-\frac{2}{m}}u_{s2}(t)+\ \ldots,\\ \varphi^*(\lambda,\ t)&=\varphi_0(t)+\lambda^{-\frac{1}{m}}\varphi_1(t)+\lambda^{-\frac{2}{m}}\varphi_2(t)+\ \ldots\end{aligned}\right\}\tag{8.7}$$

Подставляя ряды (8.7) в уравнения (8.3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим следующие уравнения для определения функций u_{s0} и φ_0:

$$\left.\begin{aligned}u_{10}\varphi_0-u_{20}&=0,\\ u_{20}\varphi_0-u_{30}&=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ u_{m-1,\,0}\varphi_0-u_{m-0}&=0,\\ u_{m0}\varphi_0-a_{m1}u_{10}&=0.\end{aligned}\right\}\tag{8.8}$$

Условимся сначала рассматривать лишь тот случай, когда для любых $t\in[0,\ T]$ коэффициент $a_{m1}\neq0$. Ниже мы увидим, что отказ от этого предположения приведет к другим выражениям для асимптотических представлений.

Система (8.8) — это система однородных алгебраических уравнений. Для того чтобы она допускала нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы функция φ_0 была корнем уравнения

$$\begin{vmatrix}\varphi_0 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \varphi_0 & -1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ -a_{m1} & 0 & 0 & \ldots & \varphi_0\end{vmatrix}=0,\tag{8.9}$$

откуда

$$\varphi_0 = \sqrt[m]{a_{m1}}.$$

Уравнение (8.9) будем называть разрешающим.

Обозначим через φ_0^s $(s=1,2,\ldots,m)$ какой-либо из корней разрешающего уравнения и примем $\varphi_0=\varphi_0^{(1)}$. Если одну из функций (например, u_{10}) оставить произвольной, то система (8.8) позволяет при таком выборе φ_0 выразить все u_{i0} через u_{10}

$$\left.\begin{aligned} u_{20} &= \varphi_0 u_{10} = \sqrt[m]{a_{m1}}\, u_{10}, \\ u_{30} &= \varphi_0^2 u_{10} = \sqrt[m]{a_{m1}^2}\, u_{10}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{m0} &= \varphi_0^{m-1} u_{10} = \sqrt[m]{a_{m1}^{m-1}}\, u_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Для функций u_{i1} будем иметь следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & u_{11}\varphi_0 - u_{21} = -u_{10}\varphi_1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & u_{m-2,\,1}\varphi_0 - u_{m-1,\,1} = -u_{m-2,\,0}\varphi_1, \\ & u_{m-1,\,1}\varphi_0 - u_{m1} = -u_{m-1,\,0}\varphi_1 + a_{m-1,\,1}u_{10}, \\ & u_{m1}\varphi_0 - a_{m1}u_{11} = -u_{m0}\varphi_1 + a_{m2}u_{20}. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Относительно искомых функций $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{m1}$ система (8.11) будет неоднородной системой алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю. Для того чтобы эта система была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы равнялся рангу матрицы системы (8.11).

Заметим, что если первую строку определителя ситемы (8.11) мы умножим на 1, вторую — на φ_0^{-1}, третью — на φ_0^{-2} и т. д., то сумма элементов каждого столбца станет равной нулю. Следовательно, тому же условию должны удовлетворять элементы столбца правых частей. Умножая соотношение, которое мы получим таким образом на φ_0^m, приходим к следующему выражению:

$$\varphi_1\left(\varphi_0^{m-1}u_{10} + \varphi_0^{m-2}u_{20} + \ldots + u_{m0}\right) = a_{m-1,\,1}u_{10}\varphi_0 + a_{m2}u_{20},$$

которое является уравнением относительно φ_1.

Принимая во внимание равенство (8.10), имеем

$$\varphi_1 = \frac{a_{m-1,\,1} + a_{m,\,2}}{m\varphi_0^{m-2}}. \tag{8.12}$$

Определив функцию φ_1 по формуле (8.12), можно найти решение системы (8.11) с точностью до произвольной функции. Считая произвольной функцию u_{11}, из уравнений (8.11), легко определить остальные неизвестные

$$\left.\begin{aligned} u_{21} &= u_{11}\varphi_0 + u_{10}\varphi_1, \\ u_{31} &= u_{11}\varphi_0^2 + 2u_{10}\varphi_0\varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{8.11'}$$

и т. д.

Рассуждая далее, без труда установим, что для любого $j = 1, 2, \ldots, m-2$

$$\varphi_j = \frac{a_{m-j,\,1} + a_{m-j+1,\,2} + \ldots + a_{m,\,j+1}}{m\varphi_0^{m-j-1}}. \tag{8.13}$$

После того как величина φ_j определена, функция u_{sj} определяется в явном виде.

Рассмотрим теперь систему для определения $u_{i,\,m-1}$. Эта система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} u_{1,\,m-1}\varphi_0 - u_{2,\,m-1} &= -\left[\dot u_{10} + u_{11}\varphi_{m-2} + u_{12}\varphi_{m-3} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + u_{1,\,m-2}\varphi_1\right] + a_{11}u_{10} \equiv B_1, \\ u_{2,\,m-1}\varphi_0 - u_{3,\,m-1} &= -\left[\dot u_{20} + u_{21}\varphi_{m-2} + u_{22}\varphi_{m-3} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + u_{2,\,m-2}\varphi_1\right] + a_{12}u_{11} + a_{22}u_{20} \equiv B_2, \\ u_{m,\,m-1}\varphi_0 - a_{m1}u_{1,\,m-1} &= -\left[\dot u_{m0} + u_{m1}\varphi_{m-2} + u_{m2}\varphi_{m-3} + \ldots \right. \\ &\left. \ldots + u_{m,\,m-2}\varphi_1\right] + a_{m2}u_{2,\,m-2} + a_{m3}u_{3,\,m-3} + \ldots + a_{mm}u_{m0} \equiv B_m. \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

Условие разрешимости системы (8.14)

$$B_1\varphi_0^{m-1} + B_2\varphi_0^{m-2} + \ldots + B_m = 0$$

можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\left\{\varphi_1\left[\varphi_0^{m-1}u_{1,\,m-2} + \varphi_0^{m-2}u_{2,\,m-2} + \ldots + u_{m,\,m-2}\right] - \right. \\ &\qquad \left. - a_{m2}u_{2,\,m-2} - \varphi_0 a_{m-1,\,1}u_{1,\,m-2}\right\} + \\ &+ \left\{\varphi_2\left[\varphi_0^{m-1}u_{1,\,m-3} + \varphi_0^{m-2}u_{2,\,m-3} + \ldots + u_{m,\,m-3}\right] - a_{m3}u_{3,\,m-3} - \right. \\ &\qquad \left. - \varphi_0 a_{m-1,\,2}u_{2,\,m-3} - \varphi_0^2 a_{m-2,\,1}u_{1,\,m-3}\right\} + \ldots \\ &\ldots + \left\{\varphi_{m-2}\left[\varphi_0^{m-1}u_{11} + \varphi_0^{m-2}u_{21} + \ldots + u_{m1}\right] - a_{m,\,m-1}u_{m1} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \ldots + \varphi_0^{m-3}a_{32}u_{21} + \varphi_0^{m-2}a_{21}u_{11}\right\} - \left(\dot u_{10} - a_{11}u_{10}\right)\varphi_0^{m-1} - \\ &\qquad - \left(\dot u_{20} - a_{22}u_{20}\right)\varphi_0^{m-2} - \ldots - \left(\dot u_{m0} - a_{mm}u_{m0}\right) = 0. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Используя формулы (8.13), мы установим, что выражения, стоящие в фигурных скобках, равны нулю, и равенство (8.15)

можно переписать так:

$$Lu_{10} \equiv \dot{u}_{10} - \frac{1}{m} u_{10} [a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{mm}] + \frac{\dot{\varphi}_0}{\varphi_0} \frac{m-1}{2} u_{10} = 0. \quad (8.16)$$

Таким образом, функция u_{10} удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка и, следовательно, определяется квадратурой

$$u_{10} = \frac{C}{\sqrt{\varphi_0^{m-1}}} \exp \left\{ \frac{1}{m} \int_0^t (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{mm})\, dt \right\}, \quad (8.17)$$

где C — произвольная постоянная.

Определив функцию u_{10} по формуле (8.17), находим затем u_{j0} по формулам (8.10).

На следующем шаге мы определим u_{11}, которая удовлетворяет уравнению вида

$$Lu_{11} = F(u_{10})$$

и т. д.

Итак, показано, что все члены разложения (8.7) могут быть эффективно вычислены либо в явном виде, либо в форме квадратур.

Определив N членов разложения (8.7), мы можем построить следующие функции:

$$x_{iN}^{(s)} = \left\{ \lambda^{k_i} u_{i0}^{(s)} + \ldots + \lambda^{k_i - \frac{N-1}{m}} u_{i,N-1}^{(s)} \right\} \times$$
$$\times \exp \int_0^t \left\{ \lambda\mu + \lambda^k \varphi_0^{(s)} + \ldots + \lambda^{\frac{1}{m}} \varphi_{m-2}^{(s)} \right\} dt, \quad (8.18)$$

где $\varphi_j^{(s)}$ и $u_{ji}^{(s)}$ означают функции, соответствующие корню уравнения (8.9) номера s.

Матрица

$$\| x_{iN}^{(s)} \| \quad (8.19)$$

может быть принята в качестве приближенного представления матрицы фундаментальных решений системы (8.1). Основанием для этого служит следующая теорема.

Теорема. *Пусть $a_{m1}(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, T]$, тогда матрица* (8.19) *дает равномерную на* $[0, T]$ *аппроксимацию матрицы фундаментальных решений системы* (8.1) *в следующем смысле: если частное решение системы* (8.1) $x_i^*(t)$ *и функция* $x_{iN}^{(s)}$ *удовлетворяют одинаковым начальным условиям, то для любого* $t \in [0, T]$

$$| x_i^*(t) - x_{iN}^{(s)}(t) | = O\left(\lambda^{k_i - \frac{N}{m}}\right). \quad (8.20)$$

2. Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+\lambda^2\mu^2x=2\lambda\mu\dot{x}+\lambda a^*x.$$

Заменой

$$x=x_1,\ \dot{x}=\lambda x_2+\lambda\mu x_1$$

это уравнение сводится к системе двух уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=\lambda\mu x_1+\lambda x_2,\\ \dot{x}_2&=\lambda\mu x_2+ax_1,\end{aligned}\right\}\tag{8.21}$$

где

$$a=a^*-\dot{\mu}.$$

Система (8.21) относится к рассмотренному типу, если только $a^*=\mu$.

Согласно теории, изложенной в этом разделе, асимптотику решений системы (8.21) следует искать в виде

$$x_1=\left(u_{10}+\lambda^{-1/2}u_{11}+\lambda^{-1}u_{12}+\ \ldots\right)\exp\int_0^t\left(\lambda\mu+\lambda^{1/2}\varphi_0\right)dt,$$

$$x_2=\left(\lambda^{-1/2}u_{20}+\lambda^{-1}u_{21}+\ \ldots\right)\exp\int_0^t\left(\lambda\mu+\lambda^{1/2}\varphi_0\right)dt,$$

где $\varphi_0=\pm\sqrt{a}$.

Для функций u_{10} и u_{20} получаются выражения

$$u_{10}=\frac{\text{const}}{\sqrt[4]{a(t)}},\qquad u_{20}=\text{const}\sqrt[4]{a(t)}.$$

Таким образом, первые члены разложений обоих линейно независимых решений будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}x_{11}&=\frac{C_1}{\sqrt[4]{a(t)}}\exp\int_0^t\left(\lambda\mu(t)+\lambda^{1/2}\sqrt{a(t)}\right)dt,\\ x_{21}&=C_1\sqrt[4]{a(t)}\exp\int_0^t\left(\lambda\mu(t)+\lambda^{1/2}\sqrt{a(t)}\right)dt,\\ x_{12}&=\frac{C_2}{\sqrt[4]{a(t)}}\exp\int_0^t\left(\lambda\mu(t)-\lambda^{1/2}\sqrt{a(t)}\right)dt,\\ x_{22}&=C_2\sqrt[4]{a(t)}\exp\int_0^t\left(\lambda\mu(t)-\lambda^{1/2}\sqrt{a(t)}\right)dt.\end{aligned}\right\}\tag{8.22}$$

Примечание. Выражения (8.22) могут оказаться неудобными, если величина a отрицательная. Тогда следует перейти к действительным выражениям. Легко убедиться, что в этом случае асимптотическое представление общего интеграла системы (8.21) будет таким:

$$x_1 = \frac{\exp\left\{\lambda \int\limits_0^t \mu(t)\,dt\right\}}{\sqrt[4]{a(t)}} \left\{ M \cos\left\{\lambda^{1/2} \int\limits_0^t \sqrt{a(t)}\,dt\right\} + \right.$$

$$\left. + N \sin\left\{\lambda^{1/2} \int\limits_0^t \sqrt{a(t)}\,dt\right\}\right\},$$

где M и N — произвольные постоянные.

В наших рассуждениях было существенным предположение о том, что $a \neq 0$, т. е. $\mu \neq a^*$. Этот случай будет рассмотрен ниже.

3. Пример 2. Рассмотрим еще один пример подобный системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda\mu x_1 + \lambda x_2, \\ \dot{x}_2 &= \lambda\mu x_2 + \lambda x_3 + b x_1, \\ \dot{x}_3 &= \lambda\mu x_3 + a x_1 + c x_2. \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

Асимптотические представления должны иметь вид

$$x_1 = \left(u_{10} + \lambda^{-1/3} u_{11} + \lambda^{-2/3} u_{12} + \ldots\right) \exp \int\limits_0^t \left(\lambda\mu + \lambda^{2/3}\varphi_0 + \lambda^{1/3}\varphi_1\right) dt,$$

$$x_2 = \left(\lambda^{-1/3} u_{20} + \lambda^{-2/3} u_{21} + \lambda^{-1} u_{22} + \ldots\right) \exp \int\limits_0^t \left(\lambda\mu + \lambda^{2/3}\varphi_0 + \lambda^{1/3}\varphi_1\right) dt,$$

$$x_3 = \left(\lambda^{-2/3} u_{30} + \lambda^{-1} u_{31} + \lambda^{-4/3} u_{32} + \ldots\right) \exp \int\limits_0^t \left(\lambda\mu + \lambda^{2/3}\varphi_0 + \lambda^{1/3}\varphi_1\right) dt.$$

В этом случае

$$\varphi_0 = a^{1/3}$$

и уравнение (8.10) нам даст $u_{20} = a^{1/3} u_{10}$, $u_{30} = a^{2/3} u_{10}$ и т. д. Уравнения относительно переменных u_{11}, u_{21} и u_{31} будут такими:

$$\left.\begin{aligned} u_{11}\varphi_0 &= u_{21} - u_{10}\varphi_1, \\ u_{21}\varphi_0 &= u_{31} + b u_{10} - \varphi_1 u_{20}, \\ u_{31}\varphi_0 &= a u_{11} + c u_{20} - \varphi_1 u_{30}. \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

Условие разрешимости системы (8.24)

$$\varphi_1\left(u_{10}\varphi_0^2+u_{20}\varphi_1+u_{30}\right)=bu_{10}\varphi_0+cu_{20}$$

даст

$$\varphi_1=\frac{b+c}{3\varphi_0}=\frac{b+c}{3\sqrt[3]{a}}.$$

Составим теперь уравнения, которым должны удовлетворять функции u_{i2}:

$$\left.\begin{aligned}u_{12}\varphi_0&=u_{22}-u_{11}\varphi_1-\dot{u}_{10},\\ u_{22}\varphi_0&=u_{32}-u_{21}\varphi_1-\dot{u}_{20}+bu_{11},\\ u_{32}\varphi_0&=au_{12}-u_{31}\varphi_1-\dot{u}_{30}+cu_{21}.\end{aligned}\right\}\qquad(8.25)$$

Условие разрешимости (8.25) выражается соотношением

$$\varphi_1\left(u_{11}\varphi_0^2+u_{21}\varphi_0+u_{31}\right)=bu_{11}\varphi_0+cu_{21}-\dot{u}_{10}\varphi_0^2-\dot{u}_{20}\varphi_0-\dot{u}_{30}.$$

Если теперь подставить в это выражение значение φ и величин

$$u_{21}=u_{11}\varphi_0+u_{10}\varphi_1,$$
$$u_{31}=u_{11}\varphi_0^2+2u_{10}\varphi_0\varphi_1-bu_{10}$$

и привести подобные члены, то мы увидим, что все слагаемые, не содержащие производных, обратятся в нуль. Итак, условие разрешимости будет приведено к следующему виду:

$$\dot{u}_{30}+\dot{u}_{10}\varphi_0^{20}+\dot{u}_{20}\dot{\varphi}_0=0.\qquad(8.26)$$

Заменяя в уравнении (8.26) u_{20} и u_{30} по формулам

$$u_{20}=u_{10}\varphi_0,$$
$$u_{30}=u_{10}\varphi_0^2,$$

мы получим одно дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции u_{10}

$$\dot{u}_{10}\varphi_0+u_{10}\dot{\varphi}_0=0,$$

откуда

$$u_{10}=\frac{1}{\varphi_0}=\frac{1}{\sqrt[3]{a(t)}}.$$

Итак, первые члены разложений решения системы (8.23) мы

можем представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{a(t)}} \exp \int_0^t \left\{ \lambda\mu + \lambda^{2/3}\sqrt[3]{a(t)} + \lambda^{1/3} \frac{b(t)+c(t)}{\sqrt[3]{a(t)}} \right\} dt, \\
x_2 &= \frac{\lambda^{-2/3}}{\sqrt[3]{a^2(t)}} \exp \int_0^t \left\{ \lambda\mu + \lambda^{2/3}\sqrt[3]{a(t)} + \lambda^{1/3} \frac{b(t)+c(t)}{\sqrt[3]{a(t)}} \right\} dt, \\
x_3 &= \frac{\lambda^{-2/3}}{a(t)} \exp \int_0^t \left\{ \lambda\mu + \lambda^{2/3}\sqrt[3]{a(t)} + \lambda^{1/3} \frac{b(t)+c(t)}{\sqrt[3]{a(t)}} \right\} dt.
\end{aligned}\right\} \tag{8.26'}$$

Придавая корню из $a(t)$ все его три возможных значения, мы получим полную систему линейно независимых решений системы (8.23).

Примечание. Формулы (8.26) дают нам только первые члены разложений каждой из функций x_i. Для того чтобы использовать их для решения конкретных задач (например, задачи Коши или краевой задачи), надо выписать величины x_i ($i=1, 2, 3$) с одинаковой погрешностью. Если мы условились удерживать члены порядка $\lambda^{-2/3}$, то в разложении x_1 мы должны вычислить три первых члена, в x_2 — два, а выражение x_3 записать в том виде, в каком оно дано формулой (8.26).

4. Случай, когда $a_{m1}=0$, но $a_{m2}\neq 0$. Исследуя систему (8.1), мы предполагали, что $a_{m1}\neq 0$. Это предположение было весьма существенным. Как мы увидим ниже, структура частных решений при $a_{m1}=0$ будет, вообще говоря, другая. Тем не менее использованная схема рассуждений без каких-либо существенных изменений позволит нам построить систему линейно независимых решений и в этом случае. Рассмотрим для определенности тот случай, когда $a_{m1}=0$, но $a_{m2}\neq 0$.

Итак, рассмотрим систему уравнений (8.2), в которой $a_{m1}=0$:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda\mu(t)x_1 + \lambda x_2 + \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(t)x_j, \\
\dot{x}_2 &= \lambda\mu(t)x_2 + \lambda x_3 + \sum_{j=1}^{m} a_{2j}(t)x_j, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}_{m-1} &= \lambda\mu(t)x_{m-1} + \lambda x_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m-1,j}(t)x_j, \\
\dot{x}_m &= \lambda\mu(t)x_m + \sum_{j=2}^{m} a_{mj}x_j.
\end{aligned}\right\} \tag{8.1'}$$

Решение этой системы мы снова будем искать в виде (8.2) и, следовательно, для функций u_i и φ_i получим снова систему (8.3). Однако в последнем уравнении этой системы старшие слагаемые в правой части будут теперь $a_{m2}x_2$. Согласно общей схеме оно должно быть компенсировано слагаемым $u_{m\varphi}$. Это нам даст следующее соотношение для показателей k_m, k и k_2:

$$k_m + k = k_2.$$

Таким образом, система уравнений (8.5) теперь будет такой:

$$\left.\begin{aligned} k_1 - k_2 &= 1 - k, \\ k_2 - k_3 &= 1 - k, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ k_{m-1} - k_m &= 1 - k, \\ k_m - k_2 &= -k. \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

Заметим, что в этой системе первое уравнение может быть рассмотрено независимо от других, которые образуют систему $m-1$-го порядка относительно неизвестных $k_2, k_3, \ldots, k_m$. Определитель этой системы равен нулю. Условие ее разрешимости, как мы видели выше, при изучении системы (8.5), состоит в том, что сумма членов в правом столбце должна равняться нулю. Отсюда мы получаем значение k

$$k = \frac{m-2}{m-1}.$$

Полагая снова $k_1 = 0$, мы находим

$$k_2 = -\frac{1}{m-1}, \quad k_3 = -\frac{2}{m-1}, \quad \ldots, \quad k_m = -\frac{m-1}{m-1} = -1.$$

Теперь для функции x_k будем иметь следующие представления:

$$x_k = \lambda^{-\frac{k-1}{m-1}} u_k^*(\lambda, t) \exp \int_0^t \left\{ \lambda\mu(t) + \lambda^{\frac{m-2}{m-1}} \varphi^*(\lambda, t) \right\} dt.$$

Для функций u_k^* и φ^* построим разложения типа (8.7). Подставляя эти выражения в уравнения (8.1′), мы получим следующую систему уравнений относительно функций u_{k0}:

$$\left.\begin{aligned} u_{10}\varphi_0 - u_{20} &= 0, \\ u_{20}\varphi_0 - u_{30} &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_{m-1}\varphi_0 - u_{m0} &= 0, \\ u_{m0}\varphi_0 - a_{m2}u_{20} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

Составим разрешающее уравнение

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_0 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -a_{m2} & 0 & \dots & \varphi_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Свертывая определитель, получим

$$\varphi_0(\varphi_0^{m-1} - a_{m2}) = 0. \tag{8.29}$$

Уравнение (8.29) имеет один нулевой корень $\varphi_0 = 0$ и $m-1$ ненулевых корней

$$\varphi_0 = \sqrt[m-1]{a_{m2}(t)}.$$

Пусть сначала $\varphi_0 \neq 0$. Тогда, считая u_{10} произвольной функцией, находим

$$u_{20} = u_{10}\varphi_0, \ \dots, \ u_{m0} = u_{10}\varphi_0^{m-1}.$$

Корню $\varphi = 0$ отвечает следующая система решений уравнения (8.28): u_{10} — произвольная функция, $u_{20} \equiv u_{30} \equiv \dots \equiv 0$. Расчет последующих членов разложения может быть проведен по схеме, которая была изложена выше.

5. Случай, когда $a_{m1} = a_{m2} = 0$, но $a_{ms} \neq 0$ при $s > 2$. Этот случай имеет некоторые особенности, поскольку при $s > 2$ асимптотические разложения содержат «вековые» слагаемые. Рассмотрим для определенности тот случай, когда $a_{m3} \neq 0$.

Разрешающее уравнение будет таким:

$$\varphi_0^2(\varphi_0^{m-2} - a_{m3}) = 0. \tag{8.29'}$$

Уравнение (8.29′) имеет $m-2$ различных корня, соответствующих значениям корня $\sqrt[m-2]{a_{m3}(t)}$. В этом случае вместо уравнений (8.27) получим

$$\left.\begin{aligned} k_1 - k_2 &= 1 - k, \\ k_2 - k_3 &= 1 - k, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_m - k_3 &= -k, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$k = \frac{m-3}{m-2}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{m-2}, \ \dots, \quad k_m = -\frac{m-1}{m-2}.$$

Теперь $m-2$ — решения, отвечающие ненулевым корням, разрешающего уравнения (8.29′), мы можем получить стандартной процедурой, описанной в этом параграфе.

Для того чтобы продемонстрировать процедуру построения недостающих частных решений, ограничимся рассмотрением примера

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda\mu x_1 + \lambda x_2, \\ \dot{x}_2 &= \lambda\mu x_2 + \lambda x_3, \\ \dot{x}_3 &= \lambda\mu x_3 + \lambda x_4, \\ \dot{x}_4 &= \lambda\mu x_4 + \lambda x_5, \\ \dot{x}_5 &= \lambda\mu x_5 + a x_3. \end{aligned}\right\} \tag{8.30}$$

Система (8.30) относится к рассматриваемому типу систем. Заметим, что старшие члены разложения исходной системы как раз к удовлетворяют системе (8.20). Поэтому все особенности методики построения асимптотических решений в случае изучаемого вырождения будут уже ясны из рассмотрения данного примера.

Заметим, что (8.30) допускает систему частных решений, где $x_3 \equiv x_4 \equiv x_5 \equiv 0$, а x_1 и x_2 удовлетворяют системе второго порядка

$$\dot{x}_1 = \lambda\mu x_1 + \lambda x_2, \qquad \dot{x}_2 = \lambda\mu x_2. \tag{8.30′}$$

Одно из частных решений системы (8.30′) получается сразу

$$x_2 = 0, \qquad x_1 = C_1 \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\}.$$

Другое частное решение мы получим, интегрируя второе из уравнений системы (8.30′)

$$\dot{x}_2 = C_2 \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\}.$$

Подставляя теперь x_2 в первое из уравнений, мы получим

$$\dot{x}_1 = \lambda\mu x_1 + \lambda C_2 \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\},$$

откуда легко находим

$$x_1 = \lambda C_2 t \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\,dt\right\}.$$

Таким образом, полная система частных решений определена.

§ 9. Асимптотические методы большого параметра и теория оптимальной коррекции

В предыдущей главе мы уже встретились с приложениями асимптотических методов к задачам оптимального управления. Методы, которые развиваются в этой главе, предназначены для решения линейных задач. Соответственно с этим мы будем рассматривать один специальный класс задач оптимального управления, который сводится к исследованию системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Примеры. Задачей оптимальной коррекции мы будем называть следующую задачу теории оптимального управления. Определить векторы $x(t)$ (фазовый вектор) и $u(t)$ (управление), доставляющие минимум или максимум функционалу $I(x, u)$ при следующих ограничениях:

а) дифференциальные связи

$$\dot{x}=Ax+Du; \tag{9.1}$$

б) условия на концах

$$x(0)\in\varepsilon_0, \qquad x(T)\in\varepsilon_T, \tag{9.2}$$

где ε_0 и ε_T — некоторые заданные множества;

в) ограничения на управления

$$u\in G_u, \tag{9.3}$$

где G_u — также некоторое заданное множество. В частности, оно может быть открытым, совпадать со всем пространством, а может быть и замкнутым.

Время протекания процесса T либо фиксировано, либо заранее не задано; A и D — это некоторые заданные матрицы, элементы которых в общем случае — функции времени.

Таким образом, задачей коррекции мы называем тот частный случай задачи оптимального управления, в котором дифференциальные связи — это линейные дифференциальные уравнения.

В этом параграфе рассмотрим тот специальный класс задач оптимальной коррекции, для которых система дифференциальных уравнений, полученных применением принципа максимума Л. С. Понтрягина, также является линейной. Это накладывает определенные ограничения на выбор функционалов. Прежде всего условимся рассматривать только интегральные функционалы

$$J=\int_0^T F(x, u)dt. \tag{9.4}$$

Тогда к нашей задаче применим принцип максимума,

Для того чтобы вектор-функция $x(t)$ и управление $u(t)$ реализовали минимум функционала (9.4) при условиях (9.1)—(9.3), необходимо существование функции $p(t)$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{9.5}$$

где функция Гамильтона

$$H = (Ax \cdot p) + (Du \cdot p) - F(x, u), \tag{9.6}$$

а управление u определяется из условия максимума H по $u(t)$ для любых x и p, т. е. $u = u(x, p)$.

Таким образом, задача оптимальной коррекции сводится к решению некоторой краевой задачи для системы уравнений (9.1) и (9.5). Линейность системы (9.1) не гарантирует в общем случае линейности системы (9.1) и (9.5). Эту систему уравнений мы условимся называть π-системой.

Если размерность вектора x равна n, то размерность π-системы равна $2n$.

Нетрудно убедиться, что существует широкий класс задач, для которых π-система является линейной. Приведем некоторые примеры.

Задача А. Управление с квадратичным функционалом

$$J = \int_0^T (Cu - u)\, dt, \tag{9.7}$$

где C — некоторая матрица. Задача управления с квадратичным функционалом довольно часто встречается в технике. Интересным примером является задача оптимальной коррекции космического аппарата, снабженного идеально регулируемым ядерным двигателем *).

Составим функцию H

$$H = (Ax \cdot p) + H^*,$$

где

$$H^* = (Du \cdot p) - (Cu \cdot u).$$

Считая, что G_u совпадает со всем пространством, мы легко найдем $u(t)$ из условия максимума H по u. Это условие можно записать следующим образом:

$$\bar{D}p = Wu,$$

*) О постановке подобных задач см. подробнее Г. Л. Гродзовский, Ю. Н. Иванов, В. В. Токарев, Механика космического полета с малой тягой, изд. «Наука», Москва, 1966.

где $W=C+\tilde{C}$ ($\tilde{D}$ и $\tilde{C}$ обозначают транспонированные матрицы). Таким образом,

$$u=W^{-1}\tilde{D}p.$$

Выпишем теперь π-систему

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bp,\\ \dot{p}&=-\tilde{A}p,\end{aligned}\right\}\tag{9.8}$$

где

$$B=DW^{-1}\tilde{D}.$$

Условия трансверсальности нам дадут $2n$ краевых условий. Например, задача перехода системы из точки в точку за время T нам даст следующее условие типа (9.2):

$$x(0)=x_0,\qquad x(T)=x_T.\tag{9.9}$$

Задача Б. Рассмотрим задачу Майера: определить минимум функционала

$$J=(e\cdot x(T)),\tag{9.10}$$

где e—некоторый заданный вектор.

Если G_u совпадает со всем пространством, то рассматриваемая задача смысла не имеет. Если G_u — замкнутое множество, то управление носит релейный характер и задача оказывается нелинейной. Однако подобные задачи являются некорректными в смысле А. А. Тихонова. Это свойство задачи состоит в том, что малым изменениям функционала соответствуют большие изменения управляющей функции $u(t)$. Вместо задачи Б будем рассматривать задачу Б′: определить минимум функционала

$$J=(e\cdot x(T))+\alpha\int_0^T(Cu\cdot u)\,dt.\tag{9.11}$$

Для задачи (9.11) π-система будет линейной.

Составим функцию

$$H=(Ax\cdot p)-(e\cdot Ax)+H^*,$$
$$H^*=(Du\cdot p)-\alpha(Cu\cdot u)-(e\cdot Du).$$

Теперь управление может быть определено из уравнения

$$\tilde{D}(p-e)=\alpha Wu.$$

Выпишем π-систему

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bp-Be,\\ \dot{p}&=-\tilde{A}p,\end{aligned}\right\}\tag{9.12}$$

где

$$B = \frac{1}{a} D W^{-1} \tilde{D}.$$

Заменой $p - e = q$ задача Б′ приводится к задаче А.

Можно привести еще целый ряд подобных примеров, показывающих, что класс вариационных задач, сводящихся к исследованию π-системы типа (9.8), достаточно широк для того, чтобы стать объектом специального исследования.

Если матрицы A и B постоянные, то общий интеграл системы (9.8) может быть записан в явном виде. Поэтому решение краевой задачи (удовлетворение условий трансверсальности) и вычисление управляющего воздействия сведется к решению некоторой системы линейных алгебраических уравнений.

Если коэффициенты матриц A и B зависят от времени, то задача становится значительно более сложной. В общем виде ее решение может быть получено только численными методами.

Случай системы с постоянными коэффициентами был предметом многочисленных исследований и является хорошо изученным. Методы, развитые в этой главе, позволяют столь же детально изучить тот случай, когда матрица A и B зависят от медленного времени $\varepsilon t = \tau$:

$$A = A(\tau), \qquad B = B(\tau).$$

Этот случай достаточно распространен и заслуживает внимания. К нему сводятся, например, многие задачи коррекции орбит искусственных спутников, задачи управления в экономических системах и т. д. Изучению этого случая и будет посвящен этот параграф.

В системе (9.8) сделаем замену

$$\tau = \varepsilon t \tag{9.13}$$

и положим $\lambda = 1/\varepsilon$.

После замены (9.13) система (9.8) примет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \lambda A(\tau) x + \lambda B(\tau) p, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\lambda \tilde{A}(\tau) p. \end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Система (9.14) является частным случаем систем, содержащих большой параметр, — системой первого ранга. Для построения ее общего интеграла могут быть использованы асимптотические методы.

Форма асимптотических представлений общего интеграла зависит от структуры элементарных делителей матрицы $\Gamma - \mu E$

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} A & B \\ 0 & -\tilde{A} \end{Vmatrix}.$$

Поэтому сначала мы должны установить некоторые свойства матрицы Γ в зависимости от свойств матриц A и B. Кроме того, для удобства дальнейших исследований приведем систему (9.14) к тому или другому каноническому виду.

Заметим в заключение, что систему (9.14) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \lambda \nabla_p H + B_p, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\lambda \nabla_x H, \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

где

$$H = (Ax \cdot p), \qquad \nabla_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Рассмотрим некоторые свойства матрицы Γ:

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} A & B \\ 0 & -\tilde{A} \end{Vmatrix}.$$

Лемма. *Совокупность корней характеристического уравнения* $|\Gamma - \mu E| = 0$ *представляет собой объединение совокупностей корней уравнений* $|A - \mu E| = 0$ *и* $|A + \mu E| = 0$.

Доказательство. В самом деле, по теореме Лапласа, разлагая определитель $|\Gamma - \mu E|$ по всевозможным минорам первых n столбцов, получим

$$|\Gamma - \mu E| = |A - \mu E| \cdot |-\tilde{A} - \mu E| = -|A - \mu E|\,|\tilde{A} + \mu E| = \\ = -|A - \mu E|\,|A + \mu E|, \tag{9.16}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Отметим некоторые особенности спектра матрицы Γ, вытекающие из уравнения (9.16).

1) Пусть μ_s — корень уравнения $|A - \mu E| = 0$ кратности k. Тогда $-\mu_s$ является корнем уравнения $|A + \mu E| = 0$ той же кратности. Если при этом ни один из корней уравнения $|A - \mu E| = 0$ не является корнем уравнения $|A + \mu E| = 0$, то мы будем говорить, что имеет место условие α.

2) Пусть условие α не выполнено. В этом случае среди корней μ_s характеристического уравнения $|A - \mu E| = 0$ найдутся

такие корни $\mu_{s_1}\mu_{s_2}$ кратности k каждый, что

$$\mu_{s_1} = \pm \mu_{s_2}.$$

Тогда μ_{s_1} и μ_{s_2} будут корнями характеристического уравнения $|\Gamma - \mu E| = 0$ кратности $2k$ каждый.

Вопрос о приведении матрицы Γ к нормальной жордановой форме в общем случае является сложным, так как структура этой формы определяется не только свойствами матрицы A, но и свойствами матрицы B. Покажем на некоторых простых примерах, как можно осуществить такое приведение.

1) Пусть μ_s — различные корни уравнения $|A - \mu E| = 0$ и свойство α выполнено ($\mu_s \neq 0$). Тогда Γ всегда приводится к диагональному виду. Покажем, как это сделать.

Пусть A уже приведена к диагональному виду. Тогда в новых переменных ξ_i и η_i имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \mu_1\xi_1 + \sum_{l=1}^{n} d_{1l}\eta_l, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\xi}_n &= \mu_n\xi_n + \sum_{l=1}^{n} d_{nl}\eta_l, \\ \dot{\eta}_l &= -\mu_l\eta_l, \\ &\cdots\cdots \\ \dot{\eta}_n &= -\mu_n\eta_n, \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

где

$$\| d_{ij} \| = F^{-1}BF,$$

здесь F — матрица перехода от старого базиса к новому.

Линейное преобразование

$$\rho_i = \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{ij}}{\mu_i + \mu_j}\eta_j, \quad \eta_i^* = \eta_i$$

приводит матрицу системы (9.17) к диагональному виду. Действительно, имеем

$$\dot{\rho}_i = \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{ij}\dot{\eta}_j}{\mu_i + \mu_j} = \mu_i\xi_i + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\eta_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{ij}\mu_j\eta_j}{\mu_i + \mu_j} = \mu_i\rho_i.$$

2) Пусть свойство α не выполнено и среди корней μ_s уравнения $|A - \mu E| = 0$ имеется пара корней μ_s, μ_k кратности единица каждый, причем

$$\mu_{s,k} = \pm a \qquad (a \neq 0).$$

Матрица Г в этом случае имеет два собственных значения второй кратности каждое. При этом в зависимости от структуры матрицы B матрица Г может приводится либо к жордановой форме, содержащей одну или две клетки второго порядка, либо к диагональному виду.

Среди уравнений системы (9.17) найдутся следующие четыре:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_s &= a\xi_s + \sum_{j=1}^{n} d_{sj}\eta_j, \\ \dot{\eta}_k &= a\eta_k, \\ \dot{\xi}_k &= -a\xi_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj}\eta_j, \\ \dot{\eta}_s &= -a\eta_s. \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

а) Пусть $d_{sk} \neq 0$, $d_{ks} \neq 0$.
Тогда линейное преобразование

$$\rho_s = \xi_s + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{sj}\eta_j}{a+\mu_j}, \quad \rho_k = \xi_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{kj}\eta_j}{a+\mu_j},$$
$$\eta_k^* = d_{sk}\eta_k, \quad \eta_s^* = d_{ks}\eta_s, \tag{9.19}$$

приводит (9.18) к следующему виду:

$$\dot{\rho}_s = a\rho_s + \eta_k^*, \quad \dot{\eta}_k^* = a\eta_k,$$
$$\dot{\rho}_k = -a\rho_k + \eta_s^*, \quad \dot{\eta}_s^* = -a\eta_s^*.$$

Таким образом, матрица Г, приведенная к нормальной жордановой форме, должна содержать в этом случае две клетки второго порядка.

б) Пусть $d_{sk}=0$, $d_{ks}\neq 0$. Тогда вместо (9.19) полагаем $\eta_k^* = \eta_k$. В этом случае, как нетрудно видеть, жорданова форма матрицы Г содержит одну клетку второго порядка. То же будет, если $d_{ks}=0$, $d_{sk}\neq 0$.

в) Если, наконец, $d_{sk}=d_{ks}=0$, то, полагая $\eta_k = \eta_k^*$, $\eta_s = \eta_s^*$, приведем Г к диагональному виду. Этот случай имеет место, например, тогда, когда $B=\gamma E$. Тогда $\|d_{ij}\|=\gamma E$, т. е. все внедиагональные элементы равны нулю.

3) Пусть условие α выполнено, а среди корней уравнений $|A-\mu E|=0$ имеется корень $\mu_1\neq 0$ кратности два, причем старший инвариантный множитель матрицы $A-\mu E$ содержит

$(\mu-\mu_1)^2$, а все остальные инвариантные множители равны единице и все μ_i $(i>1)$ различны. В этом случае вместо системы (9.17) имеем

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \mu_1\xi_1 + \xi_2 + \sum_{j=1}^{n} d_{1j}\eta_j,\\
\dot{\xi}_2 &= \mu_1\xi_2 + \sum_{j=1}^{n} d_{2j}\eta_j,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\dot{\xi}_i &= \mu_i\xi_i + \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\eta_j,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\dot{\eta}_1 &= -\mu_1\eta_1 + \eta_2,\\
\dot{\eta}_2 &= -\mu_1\eta_2,\\
&\cdots\cdots\\
\dot{\eta}_i &= -\mu_i\eta_i.\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

В этом случае жорданова форма матрицы Γ также содержит клетки второго порядка

$$\begin{Vmatrix} \mu_1 & 1 \\ 0 & \mu_1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} -\mu_1 & 1 \\ 0 & -\mu_1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соответствующее линейное преобразование, приводящее Γ к жордановой форме, имеет вид

$$\rho_i = \xi_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{d_{ij}+a_{ij}}{\mu_i+\mu_j}, \qquad \eta_i^* = \eta_j,$$

где

$$a_{11} = -\frac{d_{21}}{\mu_1}, \quad a_{i1} = 0 \qquad (i \geqslant 2),$$

$$a_{12} = \frac{1}{\mu_1}\left(d_{11} - d_{22} - \frac{2d_{21}}{\mu_1}\right),$$

$$a_{i2} = \frac{d_{i1}}{\mu_1} \qquad (i \geqslant 2),$$

$$a_{1j} = -\frac{d_{2j}}{\mu_j} \qquad (j \geqslant 3).$$

Это преобразование единственно.

2. Некоторые свойства управления консервативными системами. Рассмотрим систему

$$\ddot{z}=A^*z+u^*, \tag{9.21}$$

где A — симметричная матрица. Не ограничивая общности, мы можем считать, что матрица A имеет вид

$$A=\lambda^* A_0^* + A_1^* + \ldots,$$

где A_0 — диагональная матрица

$$A_0=\begin{Vmatrix} \mu_1(t) & & & \\ & \mu_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n(t) \end{Vmatrix}.$$

Для того чтобы привести систему к виду (9.16), положим

$$\dot{z}_i = y_i\sqrt{\lambda^*\mu}. \tag{9.22}$$

Тогда i-е уравнение системы (9.21) примет вид

$$\dot{y}_i = \sqrt{\lambda^*\mu_i}\, z_i - \frac{1}{2}\dot{\mu}\mu^{-1/2}y_i + \sum a_{ij}z_j + \frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}(\ldots) + \ldots, \tag{9.23}$$

где a_{ij} — элементы матрицы A_1^*.

Теперь вместо z_i и y_i введем новые переменные x_{2i} и x_{2i+1}

$$x_{2i-1}=z_i+y_i, \qquad x_{2i}=z_i-y_i.$$

Эти функции будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2i-1} &= \sqrt{\lambda^*\mu_i}\, x_{2i-1} + \ldots, \\ \dot{x}_{2i} &= -\sqrt{\lambda^*\mu_i}\, x_{2i} + \ldots \end{aligned} \tag{9.24}$$

Точки обозначают члены порядка $O(1)$, $O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^*}}\right)$ и т. д. Положим $\lambda=\sqrt{\lambda^*}$ и запишем систему (9.24) в виде

$$\dot{x}_i = (\lambda A_0 + A_1 + \ldots)x, \tag{9.25}$$

где

$$A_0=\begin{Vmatrix} \mu_1 & & & & \\ & -\mu_1 & & & \\ & & \mu_2 & & \\ & & & -\mu_2 & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Система (9.25) уже относится к изучаемому виду. Даже если все μ_i — простые корни характеристического уравнения матрицы A_0, π-система

$$\dot{x} = \lambda A_0 x + \lambda B_p,$$
$$\dot{p} = -\lambda \tilde{A}_0 p$$

может обладать кратными элементарными делителями. Построение асимптотических представлений решений системы (9.25) может быть приведено методами, изложенными в предыдущем параграфе. Однако для практического построения разложений решений системы типа (9.21) можно развить методы, не требующие сведения этой системы к виду (9.25).

3. Асимптотическое представление решений одной частной задачи коррекции. Предположим, что речь идет об управлении системой

$$\ddot{x} = \lambda^2 M x + A x + \lambda^2 u, \tag{9.26}$$

где M — диагональная матрица

$$M(t) = \begin{Vmatrix} \mu_1^2(t) & & & \\ & \mu_2^2(t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n^2(t) \end{Vmatrix},$$

а $A = \|a_{ij}(t)\|$ — произвольная матрица.

Управление $u(t)$, переводящее систему из положения x_0 в x_T за время T, выбирается из условий минимума функционала

$$J = \lambda^2 \int_0^T u^2 dt. \tag{9.27}$$

Для составления π-системы положим $\dot{x} = y$. Множители Лагранжа (импульсы), соответствующие переменным x_i, обозначим через p_i, а соответствующие переменным y_i — через q_i. В этих обозначениях функция H будет иметь следующий вид:

$$H = \sum_i y_i p_i + \lambda^2 \sum_i \mu_i^2 x_i q_i + \sum_{i,j} a_{ij} x_j q_i + \lambda^2 \sum_i u_i q_i - \lambda^2 \sum_i u_i^2. \tag{9.28}$$

Условие максимума H устанавливает связь между управлениями и импульсами

$$u_i = \frac{1}{2} q_i.$$

Используя эти выражения, выпишем систему необходимых условий

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\lambda^2\mu_i^2 q_i - \sum_j a_{ij} q_j,$$

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i} = -p_i.$$

Последнее из этих уравнений позволяет исключить p_i

$$\ddot{q}_i = \lambda^2\mu_i^2 q_i + \sum_j a_{ij} q_j. \tag{9.29}$$

Перепишем еще уравнение (9.26)

$$\ddot{x}_i = \lambda^2\mu_i^2 x_i + \sum_j a_{ij} x_j + \frac{\lambda^2}{2} q_i. \tag{9.30}$$

Итак, в данном случае π-система — это система уравнений (9.29), (9.30).

Ограничимся рассмотрением только того случая, когда все $\mu_i^2(t)$ для любого $t \in [0, T]$ разные. Тогда характеристическая матрица этой системы будет иметь двукратные корни. Кроме того, уравнения для q_i не содержат компонент вектора x. Следовательно, мы сталкиваемся здесь с одним из случаев вырождения, рассмотренных в предыдущем параграфе. Согласно развитой там общей теории мы можем искать частные решения в виде

$$\left.\begin{aligned} x_k &= v_k(t, \lambda) \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\, dt\right\}, \\ q_k &= u_k(t, \lambda) \exp\left\{\lambda \int_0^t \mu(t)\, dt\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

где μ совпадает с одним из значений $\sqrt{\mu_i^2(t)}$, а v_k и u_k представимы в виде рядов, расположенных по обратным степеням параметра $1/\lambda$.

Для определенности построим решение, соответствующее корню μ_1, пусть, кроме того $\mu_1^2 > 0$ и $\sqrt{\mu_1^2} = +|\mu_1|$. Тогда первые уравнения систем (9.29) и (9.30) после подстановки (9.31) примут вид

$$\ddot{v}_1 + 2\lambda\mu_1\dot{v}_1 + \lambda\dot{\mu}_1 v_1 = \sum_j a_{1j} v_j + \frac{\lambda^2}{2} u_1, \tag{9.32}$$

$$\ddot{u}_1 + 2\lambda\mu_1\dot{u}_1 + \lambda\dot{\mu}_1 u_1 = \sum_j a_{j1} u_j. \tag{9.33}$$

Остальные уравнения этих систем будут иметь такой вид:

$$\lambda^2(\mu_1-\mu_s)\,v_s+\ddot{v}_s+2\lambda\mu_1\dot{v}_s+\lambda\dot{\mu}_1 v_s=\sum_l a_{lj}v_l+\frac{\lambda^2}{2}u_s, \quad (9.34)$$

$$\lambda^2(\mu_1-\mu_s)\,u_s+\ddot{u}_s+2\lambda\mu_1\dot{u}_s+\lambda\dot{\mu}u_s=\sum_l a_{jl}u_j. \quad (9.35)$$

Заметим, что уравнения (9.32)—(9.35) допускают систему частных решений, в которой u_s $(s=1,2,\ldots,n)\equiv 0$. В этом случае система (9.32) и (9.34) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\ddot{v}_1+2\lambda\mu\dot{v}_1+\lambda\dot{\mu}v_1&=\sum a_{1j}v_j,\\ \lambda^2(\mu_1-\mu_s)\,v_s+\ddot{v}_s+\lambda\dot{\mu}v_s+2\lambda\mu\dot{v}_s&=\sum a_{sj}v_j.\end{aligned}\right\} \quad (9.36)$$

Положим далее

$$v_s=v_{s0}+\lambda^{-1}v_{s1}+\ldots$$

Из системы (9.35) для старших членов разложения получим

$$2\mu\dot{v}_{10}+\dot{\mu}_1 v_{10}=0,$$
$$(\mu_1-\mu_s)\,v_{s0}=0 \qquad (s=2,3,\ldots,n).$$

Отсюда сразу следует

$$u_{10}=\frac{C_1}{\sqrt{\mu_1}}, \qquad u_{s0}\equiv 0 \qquad (s=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, первые члены разложения искомого частного решения будут такими:

$$x_1=\frac{C_1}{\sqrt{\mu_1}}\exp\left\{\lambda\int_0^t\mu(t)\,dt\right\}, \qquad x_s\equiv 0 \quad (s=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

т. е. для x_1 получаем обычные формулы WBKJ-метода, а все прочие координаты тождественно равны нулю.

Для вычисления последующих членов разложения функции u_1 получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка

$$2\mu_1\dot{u}_{1k}+\mu_1 u_{1k}=\varphi(t),$$

решение которых находится в квадратурах.

Последующие члены разложенной функции u_s $(s=2,3,\ldots,n)$ даются конечными формулами. Например,

$$u_{s1}=\frac{a_{11}u_{10}}{\mu_1-\mu_s}.$$

Итак, мы получим одну систему частных решений, соответствующих корню $\mu_1 = +\sqrt{\mu_1^2}$. Вторую систему решений можно вычислить тем же способом, если положить $\mu = -\mu_1$.

Два других частных решения, соответствующих μ_1, мы получим из рассмотрения уравнений (9.33) и (9.35), которые допускают два линейно независимых решения вида

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} + \lambda^{-1} u_{11} + \ldots,$$

$$u_s = \lambda^{-1} \frac{a_{11} u_0}{\mu_1 - \mu_s} + \lambda^{-2} (\ldots) + \ldots$$

Подставляя затем эти выражения в правую часть уравнений (9.32) и (9.34), найдем некоторую систему неоднородных уравнений, частное решение которой может быть получено известными методами.

Итак, мы указали способ, который позволяет для каждого из чисел μ_i^2 построить группу четырех частных решений.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоколебания 79, 82, 93
Алгоритм Ляпунова 58
Аппарат космический 366
— — малой тяги 249
— — орбитальный 241
— — под действием трансверсальной тяги 277

Гироскоп в поле перменной напряженности 335
— в спящем положении 333
—, его элементарная теория 334
— осесимметричный 329
— под действием момента, изменяющегося во времени 329

Делители инвариантного множителя элементарные 306
Демпфирование нелинейных колебаний 161

Задача Лагранжа — Пуассона 329
Замораживание коэффициентов 26

Изохронность 15
Инварианты адиабатические 168, 170
Интеграл действия 169

Квазилинеаризация 119, 120
Колебания вдали от резонанса 105
— главные 79
— квазилинейные 142
— резонансные 108
Координаты главные 77
Коррекция оптимальная 365

Линеаризация эквивалентная 153, 155

Матрица Грина 39
— характеристическая 304
Маятник 31, 81, 147, 192, 217
— в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости 152
Маятник, возвращающая сила которого разрывна 225
— гармонический 149
— математический 18
— — в поле переменной гравитации 228
— —, его вращательные движения 228, 294
— — точка подвеса которого колеблется по периодическому закону 30
— ,на который действует диссипативная сила 27
— под действием возвращающей силы, обратно пропорциональной квадрату времени 26
— — — ограниченной возвращающей силы 26
— при наличии малого вязкого трения 151
— пружинный 146
— —, жесткость которого изменяется во времени 26
— с переменной возвращающей силой 227
— сферический 303
Метод Ван-дер-Поля 141
— — в системах, близких к консервативным 157
— Волосова 143
— — в теории вращательных движений 238
— Каменкова 96, 98
— Ляпунова 58, 71, 77
— Малкина 121
— малого параметра 135
— осреднения 140
— последовательных приближений 188
— Пуанкаре 103
— разделения переменных 140
— Фурье 193
— WBKJ 280

Множители матрицы инвариантные 306

Орбиты кеплеровы, их возмущения 242
Осциллятор гармонический 12, 149
— квазилинейный 205
— линейный 15, 103
— нелинейный 149, 192

Переменные Ван-дер-Поля 142, 145
Плоскость фазовая 12
Приближение Ван-дер-Поля 102
Принцип замораживания коэффициентов 26
— максимума Понтрягина 176

Ракета оперенная 28, 32
Расстройка 197
Резонанс 25, 117, 126, 131
— главный 117, 197, 201
— комбинационный 197, 202
— кратный 207
— n-го рода 119
Резонансная ситуация 197
Резонансный случай 105
Решение асимптотическое по параметру λ 284

Сепаратриса 15
Сила аэродинамическая 258, 259
— диссипативная 80
Система автоколебательная 152
— Гамильтона 180
— диссипативная 150, 315
— жесткая 146, 147
— линейная 12
— Ляпунова 67, 80
— —, ее каноническая форма 70
— мягкая 146, 170
— с вращающейся фазой 175, 190
— с вращающимся звеном 226, 232
— с двумя вращающимися фазами 192, 194, 267
— с медленным временем 166
— с переменными параметрами 25
— стандартного вида 190
Снаряд артиллерийский 329, 337
— оперенный 309
Сопротивление аэродинамическое 254
Спутник искусственный 253, 259, 267

Теорема Каменкова 100
— Ляпунова 70
— Малкина 131
— Пуанкаре 37, 40
— Сильвестра 214
Точка возврата 343
— изображающая 12
— особая 14
— — неустойчивая 15
— — типа седло 14
— — — фокус 80
— — — центр 14
— — устойчивая 14
— стационарная 212
Траектория фазовая 12

Управление оптимальное 274, 365
Уравнение Ван-дер-Поля 92, 112, 144
— — в случае двух быстрых переменных 196
— вековое 76
— Дюффинга 16, 17, 19, 21, 25, 64, 131, 145, 206
— квазилинейное 141
— Матье 30
— порождающее 36, 42
Уравнения в вариациях 38
— укороченные 134, 160
— Эйри 349

Форма жорданова нормальная 305
Функции Эйри 349

Цикл предельный 82

Частота мгновенная 26
Частоты собственные 77

Элементы оскулирующие 248, 249

Ящик жорданов 305

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава I. **Некоторые вопросы вспомогательного характера** 11

§ 1. Метод фазовой плоскости и некоторые свойства нелинейных колебаний 11

1. Фазовые траектории (11). 2. Линейные системы (12). 3. Фазовая плоскость уравнения Дюффинга (16). 4. Пример периодической фазовой плоскости (18).

§ 2. Дальнейшее изучение уравнения Дюффинга 19

1. Некоторые сведения из теории эллиптических функций (20). 2. Выражение общего интеграла уравнений Дюффинга (21). 3. Формула для периода (22).

§ 3. Примеры колебаний систем с переменными параметрами . . . 25

1. Предварительные замечания (25). 2. Случай, когда возвращающая сила стремится к нулю (26). 3. Колебания с диссипативными силами (27). 4. Случай, когда возвращающая сила ограничена (28).

§ 4. О некоторых достаточных условиях ограниченности колебаний 30

1. Критерий устойчивости для случая, когда возвращающая сила изменяется монотонно (30). 2. Устойчивость колебаний ракеты (32). 3. Основная лемма (33). 4. Критерий устойчивости для уравнения (3.8) (34).

§ 5. Теорема Пуанкаре 35

1. Формулировка (35). 2. Доказательство утверждения I (38). 3. Замечание об аналитичности правых частей (40).

Глава II. **Метод Ляпунова—Пуанкаре** 41

§ 1. Система Ляпунова — случай одной степени свободы. 41

1. Консервативные системы (41). 2. Система Ляпунова (42). 3. Приведение к каноническому виду (43). 4. Преобразование интеграла H (44). 5. Периодичность решений системы Ляпунова (45). 6. Вычисление периода (46). 7. Одно свойство периода (48). 8. Формулировка теоремы Ляпунова (49).

§ 2. Условия существования периодических решений 49

1. Предмет исследования (49). 2. Необходимые и достаточные условия периодичности (50). 3. Случай, когда фундаментальные решения уравнения (2.2) — периодические функции времени (51). 4. Пример (52). 5. Одно уравнение второго порядка (53). 6. Одно уравнение второго порядка. Случай непериодических фундаментальных решений (55).

§ 3 Метод Ляпунова 58

1. Пример (58). 2. Обсуждение алгоритма (60). 3. Расчет приближенного решения (63). 4. Уравнение Дюффинга (64). 5. Пример неконсервативной системы (66).

§ 4 Система Ляпунова. Случай произвольного числа степеней свободы 67

1. Определение (68). 2. Приведение к каноническому виду (68). 3. Теорема Ляпунова (70). 4. Метод Ляпунова (71). 5. Консервативные системы произвольного числа степеней свободы (75). 6. Метод Ляпунова в нелинейных консервативных системах (77).

§ 5. Автоколебания 79

1. Пример автоколебаний (79). 2. Формулировка математической задачи (82). 3. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае квазилинейных систем (метод Пуанкаре) (83). 4. Алгоритм построения автоколебательных режимов в случае систем, близких к консервативным (90). 5. Пример (92). 6. Автоколебания в квазилинейных системах со многими степенями свободы (93).

§ 6. Метод Г. В. Каменкова 96

1. Квазилинейная теория. Теорема Г. В. Каменкова (97). 2. Квазилинейная теория. Расчет периодических решений (101).

§ 7. Неавтономные квазилинейные системы. Метод Пуанкаре. . . . 103

1. Замечание о линейных системах (103). 2. Колебания вдали от резонанса (105). 3. Резонансные колебания. Случай одной степени свободы (108). 4. Пример: уравнение Ван-дер-Поля (112). 5. Один специальный случай (114). 6. О резонансе n-го рода (116). 7. О квазилинейной трактовке нелинейных уравнений (119).

§ 8. Неавтономные системы второго порядка, близкие к системам Ляпунова. Метод Малкина 121

1. Предварительный анализ (121). 2. Решения x^0 и y^c. Нерезонансный случай (123). 3. Пример расчета нерезонансных решений (125). 4. Резонансные режимы в системах, близких к системе Ляпунова (126). 5. Примеры расчета резонансных решений уравнения Дюффинга (131). 6. Еще один пример решений x^0 (133). 7. О решениях, близких к нетривиальным решениям системы Ляпунова (135).

§ 9. Заключительные замечания 138

Глава III. **Асимптотические методы разделения движений** 140

Введение 140

§ 1. Метод Ван-дер-Поля 141

1. Предварительные замечания (141). 2. Переменные Ван-дер-Поля (142). 3. Схема В. М. Волосова (143). 4. Укороченные уравнения (144). 5. Стационарные режимы (145). 6. Пример разрывных правых частей (147). 7. Диссипативная система (150). 8. Автоколебательная система (152). 9. Эквивалентная линеаризация в консервативных системах (153). 10. Замечание об исследовании устойчивости (156).

§ 2. Метод Ван-дер-Поля в системах, близких к консервативным 157

1. Замена переменных (157). 2. Укороченные уравнения (159). 3. Пример (161). 4. Другой подход к решению той же задачи (162). 5. Примечания (166).

§ 3. Системы с медленным временем 166

1. Вывод укороченных уравнений (166). 2. Адиабатические инварианты (168). 3. Интеграл действия (169). 4. Пример использования адиабатических инвариантов (170). 5. Вычисление амплитуды и энергии (171). 6. Некоторые обобщения (172). 7. Задача о маятнике переменной массы (174).

§ 4. Описание алгоритма асимптотического интегрирования для случая одной быстрой переменной 175

1. Преобразование переменных (175). 2. Определение членов разложений (177). 3. Построение приближенного решения (181). 4. Оценка точности (182). 5. Независимость точности приближенного решения от выбора функций φ_i и ψ_i (185). 6. Замечание о характере приближенных формул (188). 7. Метод последовательных приближений (188). 8. Система стандартного вида (190). 9. О возможных обобщениях (190). 10. Замечание об исследовании стационарных режимов (191).

§ 5. Алгоритм асимптотического интегрирования. Случай нескольких быстрых переменных 191

1. Система с двумя вращающимися фазами (191). 2. Метод Фурье (193). 3. Описание алгоритма в нерезонансном случае (194). 4. Резонансный случай (197). 5. Исследование главного резонанса в случае постоянных частот (197). 6. Общий случай главного резонанса (200). 7. Комбинационные резонансы (202). 8. Установившиеся режимы (203). 9. Вынужденные колебания квазилинейных систем (204). 10. Резонансные решения уравнения Дюффинга (206). 11. О кратных резонансах в колебательных системах (207). 12. Один пример колебательной системы с большим числом степеней свободы (210).

§ 6. Исследование стационарных точек и устойчивости 211

1. Предварительные замечания (211). 2. Исследование устойчивости (212). 3. Устойчивость тривиального решения системы. (6.6) (213). 4. Замечания (214). 5. Трактовка результатов (216).

§ 7. Вращательные движения маятника 217

1. Замечания об изучении колебательных движений маятника (217). 2. Новые независимые переменные (219). 3. Построение асимптотики порождающего решения (220). 4. Вращательные движения математического маятника (224). 5. Пример маятника, возвращающая сила которого разрывна (225). 6. Система с вращающимся звеном (226). 7. Маятник с переменной возвращающей силой (227). 8. Теория возмущений (229). 9. Уравнение Ван дер-поля (230). 10. Особенности резонансных явлений в системах с вращающимися звеньями (232). 11. Метод В. М. Волосова в теории вращательных движений (238). 12. Заключение (241).

§ 8. Приложения к задачам динамики орбитальных аппаратов . . 241

1. Предварительные замечания (241). 2. Возмущения кеплеровских орбит (242). 3. Задача о трансверсальной тяге (249). 4. Задача о движении спутника на последних оборотах (253). 5. Задача о движении спутника в конце последнего оборота (259). 6. Резонансные задачи в динамике искусственных спутников (267).

§ 9. Асимптотические методы усреднения в задачах теории оптимального управления 273

1. Частичное усреднение (273). 2. О возможных постановках задач оптимального управления для уравнений в стандартной форме (274). 3. Пример (277).

Глава IV. **Асимптотические методы в теории линейных уравнений, содержащих большой параметр** 279

§ 1. Одно уравнение второго порядка 281

1. WBKJ-решения (281). 2. Связь с методом усреднения (283). 3. Асимптотический характер приближенных формул (284). 4. Другой метод построения приближенных решений (288).

§ 2. Однородные системы второго порядка. Случай простых корней 290

1. Асимптотические решения для одного уравнения второго порядка (290). 2. Уравнение произвольного ранга (293). 3. Система второго порядка (295). 4. Некоторые частные случаи (298). 5. Система произвольного ранга (299). 6. Возможные модификации алгоритма построения асимптотических рядов (301).

§ 3. Однородные системы второго порядка. Случай кратных корней 303

1. Предварительные замечания (303). 2. Случай простых элементарных делителей (307). 3. Один пример механической системы с двумя степенями свободы (309). 4. Системы произвольного ранга (314). 5. Пример колебательной системы, элементарные делители которой непростые (315).

§ 4. Неоднородные уравнения 317

1. Одно уравнение второго порядка (317). 2. Система произвольного ранга (318). 3. Основная теорема (318). 4. Случай, когда внешние силы осциллируют (321).

§ 5. Общий случай линейной системы произвольного порядка . . . 324

1. Общее решение однородной системы в том случае, когда корни простые (324). 2. Случай кратных корней (327). 3. Частные решения неоднородных систем (328).

§ 6. Задача о движении гироскопа под действием момента, изменяющегося во времени 329

1. Вывод уравнений (329). 2. Линеаризация (332). 3. Случай постоянных параметров. Элементарная теория гироскопа (334). 4. Гироскоп в поле переменной напряженности (335). 5. Уравнения баллистики (337). 6. Исследование системы (6.33) (341).

§ 7. Особые случаи (асимптотика и окрестности точек возврата) . . 343

1. Предварительные замечания (343). 2. Эталонное уравнение, формальное построение асимптотических рядов (345). 3. Асимптотика решений в окрестности точек возврата, в которых корни характеристического уравнения обращаются в нуль (348). 4. Асимптотические разложения в окрестности точки возврата, где элементарные делители перестают быть простыми (350).

§ 8. О некоторых способах построения асимптотических представлений в случае кратных элементарных делителей характеристической матрицы 351

1. Система с одним элементарным делителем произвольной кратности (352). 2. Пример 1 (358). 3. Пример 2 (359). 4. Случай, когда $a_{m1}=0$, но $a_{ms}\neq 0$ (361). 5. Случай, когда $a_{m1}=a_{m2}=0$, но $a_{ms}\neq 0$ при $s>2$ (363).

§ 9. Асимптотические методы большого параметра и теория оптимальной коррекции 365

1. Постановка задачи. Примеры (365). 2. Некоторые свойства управления консервативными системами (373). 3. Асимптотическое представление решений одной частной задачи коррекции (374).

Предметный указатель 378