

АНАЛИЗ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В этой небольшой по объему книге автору удалось собрать и изложить богатый материал, разбросанный по различным источникам. Компактное изложение предполагает определенную математическую подготовку читателя, однако для чтения книги достаточно знакомства с традиционными курсами анализа и высшей алгебры. Книгу можно использовать как учебное пособие при изучении современного анализа.

Книга представляет интерес для математиков различных специальностей. Она будет полезна преподавателям, аспирантам и студентам университетов и пединститутов.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$	9
1.1. Формула Тейлора	10
1.2. Разбиения единицы	18
1.3. Обратные функции, неявные функции и теорема о ранге	20
1.4. Теорема Сарда и функциональная зависимость	25
1.5. Теорема Бореля о рядах Тейлора	33
1.6. Теорема Уитни о приближении	36
1.7. Теорема о приближении для голоморфных функций	42
1.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	46
Глава 2. Многообразия	55
2.1. Основные определения	55
2.2. Касательное и кокасательное расслоения	62
2.3. Многообразия Грассмана	68
2.4. Векторные поля и дифференциальные формы	71
2.5. Подмногообразия	81
2.6. Внешнее дифференцирование	87
2.7. Ориентация	93
2.8. Многообразия с границей	96
2.9. Интегрирование	99
2.10. Однопараметрические группы	105
2.11. Теорема Фробениуса	110
2.12. Почти комплексные многообразия	119

2.13. Леммы Пуанкаре и Гротендика	125
2.14. Применения: теорема Хартогса о продолжении и теорема Ока-Вейля	130
2.15. Погружения и вложения: теоремы Уитни	136
2.16. Теорема Тома о трансверсальности	144
Глава 3. Линейные эллиптические дифференциальные операторы	149
3.1. Векторные расслоения	149
3.2. Преобразования Фурье	158
3.3. Линейные дифференциальные операторы	164
3.4. Пространства Соболева	175
3.5. Леммы Реллиха и Соболева	181
3.6. Неравенства Гординга и Фридрихса	190
3.7. Эллиптические операторы с C^∞ -коэффициентами: теорема о регулярности	199
3.8. Эллиптические операторы с аналитическими коэффициентами	206
3.9. Теорема конечности	212
3.10. Теорема о приближении и ее применение к открытым римановым поверхностям	219
Литература	226
Предметный указатель	230

Предметный указатель

Аналитическая функция 11, 57	Граница многообразия 97
Аналитически зависимые функции 30	Граничная точка 97
Бореля теорема 34	Грассмана многообразия 70
Вейерштрасса теорема 13	Гротендика лемма 127
- - о приближении 37	Де Рама группы когомологий 91
Векторное поле 71	Диффеоморфизм 12, 57
- расслоение 149	Дифференциал 59
Вложение 136	- отображения 63
- замкнутое 136	- функции 20
- локально собственное 136	Дифференциальная система 111
Внешняя производная 87	- - вполне интегральная 111
- степень векторного расслоения 154	- - инволютивная 111
Внутренняя точка 96	- форма 71
Вполне интегрируемая	- - голоморфная 93
дифференциальная система 111	- - замкнутая 91
Голоморфная функция 12, 57	- - комплекснозначная 78
Голоморфное векторное поле 80	- - степени p 71
- отображение 57	- - типа (p, q) 80
Гординга неравенство 192	- - точная 91

Дифференциальный оператор 164
-- с аналитическими
коэффициентами 174
-- эллиптический 171
Дифференцируемое многообразие 55
Инвариантное векторное поле 108
Интеграл дифференциальной
системы 100
Интегрирование дифференциальных
форм 103
Касательное пространство 59
- расслоение 65
Касательный вектор 59
Ковектор 59
Касательное пространство 59
- расслоение 65
Комплексно аналитический
изоморфизм 57
Комплексное многообразие 56
Координатная окрестность 56
Критическая точка 26, 67
Локальная однопараметрическая
группа 105
Локально конечное семейство 18
- собственное отображение 82
Локальный оператор 87
Мальгранжа—Лакса теорема о
приближении 221
Многообразие 55
- класса C^k 55
- с границей 96
Морфизм 149
Носитель сечения 156
- функции 10, 56
Ньюлендера—Ниренберга теорема
122
Однопараметрическая группа 105
Ока—Вейля теорема 134
Ориентация 94
Ориентируемое многообразие 93
Отображение расслоения 149
Планшереля теорема 161
Погружение 136
Подмногообразие 81

Положительный касательный вектор
97
- ковектор 98
Порядок линейного
дифференциального оператора
168
Почти комплексная структура 120
- - - интегрируемая 121
Преобразование координат 56
Проективное пространство 70
Производная 59
Прообраз дифференциальной формы
74
Прямая сумма векторных расслоений
154
Пуанкаре лемма 125
Равномерно строго эллиптический
оператор 191
Разбиение единицы 18
Размерность 55, 56
Ранг отображения 66
Расслоение p -форм 66
- форм типа (p, q) 156
Регулярное отображение 136
Реллиха лемма 183, 214
Рунге область 42
- теорема 42, 223
Сарда теорема 26, 27
Сечение векторного расслоения 156
Символ линейного
дифференциального оператора
170
Система координат 55
Скобка векторных полей 75
Соболева лемма 187
- пространства 175
Собственное отображение 82
Сопряженное векторное расслоение
154
Стационарная функция 58
Стокса теорема 103
Строгая дифференцируемость в L^p
179
Структурные формы 120

Тензорное произведение векторных
 расслоений 154
 Теорема конечности об
 аналитичности 211, 213
 - - обратной функции 24, 67
 - о неявной функции 24
 - - ранге 24, 67, 77
 - регулярности 205, 213
 Тома теорема о трансверсальности
 148
 Трансверсальное отображение 146
 Уитни сумма 154
 - теорема о вложении 141
 - - - погружении 140
 - - - приближении 38, 39
 - - - продолжении 35
 Формально сопряженный оператор
 173
 - транспонированный оператор 174
 Фридрихса неравенство 196

Фробениуса теорема 114, 115, 117
 Функции перехода 151
 Функциональная зависимость 30
 Фурье преобразования 158, 161
 Хартогса теорема о продолжении 132
 Частный дифференциал 22
 Штейна многообразие 224
 Якоби тождество 75
 C^k -многообразие 55
 C^k -отображение 57
 C^k -структура 55
 C^k -функция 57
 $\bar{\partial}$ -ациклическое открытое множество
 132
 k -связное многообразие 144
 m -плоская функция 33
 $\mathbf{R}$ -аналитическая функция 4, 57
 $\mathbf{R}$ -аналитический изоморфизм 57
 $\mathbf{R}$ -аналитическое многообразие 55

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Эта книга, написанная одним из выдающихся аналитиков — индийским математиком Рагхаваном Нарасимханом, ныне работающим в Швейцарии, — несколько необычна. Как утверждает автор, она рассчитана на читателей, которые прилично владеют линейной алгеброй, знакомы с топологией, но не знают анализа и только начинают им интересоваться. Пожалуй, несколько лет назад множество таких читателей было пустым, но теперь, в результате происходящей в математике алгебраико-топологической экспансии, его мощность постоянно увеличивается. Кроме того, круг читателей заведомо не исчерпывается этим множеством — отлично написанная крупным ученым книга, несомненно, заинтересует как начинающих, так и маститых математиков.

Изложение в ней очень тщательно продумано. Материал отобран так, чтобы читатель без особенно больших усилий мог войти в круг обсуждаемых проблем и овладел основными приемами. Многое из того, что не входит в очерченный автором минимум, сообщается без доказательства с коротко комментированными отсылками к специальной литературе. Например, теорема Бореля о том, что для любого задания постоянных c_α , зависящих от всевозможных наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ неотрицательных целых чисел, существует бесконечно дифференцируемая во всем пространстве функция f , которая имеет c_α своими тейлоровскими коэффициентами в какой-либо точке (или иначе, о том, что отображение из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в кольцо формальных степенных рядов сюръективно), приводится с доказательством, и притом весьма красивым. Но теорема Уитни, утверждающая, что заданные на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ функции $f_\alpha \in C^\infty(X)$ при некоторых условиях служат последовательными производными (в каждой точке X) какой-либо функции $f \in C^\infty(X)$, уже не доказывается.

Но именно отбор материала книги и необычен более всего. Книга не является курсом ни теории многообразий, ни какой-либо части анализа. Ее содержание составляют лишь несколько тем — приближения, вложения, линейные дифференциальные операторы. Однако эти темы поданы в таком блестящем окружении идей, наиболее популярных в современной математике, и поданы так хорошо, что книгу можно рекомендовать всем, кто учит математику и занимается ею.

Б. В. Шабат

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла из лекций, читанных мною в Тата-институте фундаментальных исследований в Бомбее зимой 1964/65 гг. В этих лекциях я хотел изложить различные вопросы анализа на многообразиях, действительных или комплексных. Можно было бы и не говорить, что выбор материала целиком определился личными вкусами автора. Записи лекций были изданы Тата-институтом, и настоящая книга основана на этом издании.

Книга рассчитана на читателей, которые интересуются анализом, но имеют по нему еще небольшую подготовку. Предполагаются известными только элементы теории функций действительных переменных (дифференциальное и интегральное исчисление и теория меры), а также некоторые факты теории функций комплексного переменного. Элементарные свойства функций нескольких комплексных переменных, которые мы используем, четко формулируются и даются необходимые ссылки. Однако мы предполагаем, что читатель хорошо знаком с линейной и мультилинейной алгеброй (свойства сопряженности, тензорных произведений, внешних произведений векторных пространств и т. п.), а также с теоретико-множественной топологией (свойства связных и локально компактных пространств). Необходимый материал содержится в книгах Бурбаки: «Алгебра» и «Общая топология», главы I и II.

Книга состоит из трех глав. В первой изучаются свойства дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$. Задача этой главы — изложение с полными доказательствами некоторых часто используемых в дифференциальной топологии теорем о дифференцируемых функциях (таких, как теорема о неявной функции, теорема Сарда и теорема Уитни о приближении).

Вторую главу можно рассматривать как введение в теорию действительных и комплексных многообразий. Кроме обычных определений (дифференциальные формы и векторные поля), в этой

главе излагаются теорема Фробениуса, леммы Пуанкаре и Гротендика (с приложением леммы Гротендика к комплексному анализу), теорема Уитни о вложении и теорема Тома о трансверсальности.

В последней главе изучаются свойства линейных эллиптических дифференциальных операторов. Приводятся принадлежащие Петре и Хёрмандеру критерии линейных дифференциальных операторов. Доказываются неравенства Гординга и Фридрихса об эллиптических операторах, которые затем используются для доказательства регулярности слабых решений эллиптических уравнений. Глава заканчивается теоремой Мальгранжа — Лакса о приближении и ее применением к доказательству теоремы Рунге на открытых римановых поверхностях, принадлежащей Бенке и Штейну.

Мы не рассматриваем вопросы, связанные с римановыми метриками и элементарной дифференциальной геометрией. Мы ничего не говорим также о таких важных и интересных объектах, как эллиптические комплексы. Впрочем, такие теоремы, как теоремы конечности из главы 3, нетрудно распространить на эти комплексы.

Мне остается поблагодарить всех лиц, помогавших мне при подготовке этой книги. Я благодарен миссис М. Нарликар, сделавшей записи лекций, изданные Тата-институтом; особенно я обязан Х. Г. Даймонду, который очень внимательно прочитал большую часть этих записей, исправил ошибки и предложил ряд улучшений и вариантов доказательств. Наконец, я весьма признателен Н. Х. Кюиперу за предложение переиздать записи Тата-института в виде книги, за его полезные замечания о главах 1 и 2 и за помощь при подготовке рукописи к печати.

Рагхаван Нарасимхан

Женева, июль 1968

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^n$

Обозначения. Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Символами $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ соответственно будем обозначать поле действительных чисел, поле комплексных чисел, поле рациональных и кольцо целых чисел и при этом будем считать, что первые два из них снабжены обычной топологией. Символы $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, ... будут обозначать декартовы произведения соответственно пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ..., так что, например,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}.$$

Обозначения $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Z}^+$ мы примем для множеств неотрицательных элементов $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ соответственно.

Большей частью α , β обозначают упорядоченные наборы n неотрицательных целых чисел, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}^+$. Введем обозначения

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!}, \quad \text{если } \beta_j \leq \alpha_j.$$

Мы пишем $\beta \leq \alpha$, если все $\beta_j \leq \alpha_j$, и $\beta < \alpha$, если $\beta \leq \alpha$ и $\beta \neq \alpha$.

Для точек пространства $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) мы используем обозначение $x = (x_1, \dots, x_n)$ (соответственно $z = (z_1, \dots, z_n)$). Тогда

$$|x| = \max_j |x_j|, \quad |z| = \max_j |z_j|,$$

$$\|x\| = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}, \quad \|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2},$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}.$$

Если X — (хаусдорфово) топологическое пространство и S — подмножество X , то символом $\overset{\circ}{S}$ мы будем обозначать внутренность S , т. е. максимальное открытое множество, содержащееся в S . Если S_1 и S_2 — два подмножества X , то мы пишем $S_1 \subseteq S_2$, когда S_1 — относительно компактное подмножество S_2 , т. е. когда замыкание S_1 в S_2 является компактом.

Пусть f — отображение открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^q$ и λ — неотрицательная функция в Ω ; мы будем писать

$$f(x) = O(\lambda(x)) \quad (\text{или } f = O(\lambda)),$$

если существует константа $C > 0$, такая, что $|f(x)| \leq C\lambda(x)$ для всех $x \in \Omega$. Кроме того, если $a \in \Omega$, мы пишем

$$f(x) = o(\lambda(x))$$

при $x \rightarrow a$ (или при $|x - a| \rightarrow 0$), если существует отображение $\varepsilon: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, такое, что $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и $|f(x)| \leq \varepsilon(x)\lambda(x)$. Это же обозначение используется, когда точка a заменена «бесконечной» точкой.

§ 1.1. Формула Тейлора

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и k — целое неотрицательное число. Мы обозначаем через $C^k(\Omega)$ множество действительных функций f в Ω , обладающих непрерывными частными производными порядков $\leq k$, т. е. множество функций, для которых производные

$$\frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

существуют и непрерывны в Ω для всех α с $|\alpha| = a_1 + \dots + a_n \leq k$. Символом $C^\infty(\Omega)$ мы обозначаем множество функций, принадлежащих $C^k(\Omega)$ для всех $k \geq 0$. Функции из $C^k(\Omega)$ называются C^k -функциями в Ω (или функциями класса C^k в Ω). Для частной производной

$$\frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

функции $f \in C^k(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$, мы используем сокращенное обозначение

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{a_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{a_n} f.$$

Порядок, в котором выполняются дифференцирования, на результат не влияет. Для любой функции f (не обязательно непрерывной), определенной в Ω , мы обозначаем через $\text{supp } f$ замыкание в Ω множества

$$\{x \in \Omega: f(x) \neq 0\};$$

$\text{supp } f$ называется носителем f . Символ $C_0^k(\Omega)$ применяется для обозначения множества функций $f \in C^k(\Omega)$, носители которых являются компактными в Ω .

Если E — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, мы обозначаем через $C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \dots$ множество всех отображений $f: \Omega \rightarrow E$, таких, что для любого (непрерывного) линейного функционала l на E мы имеем $l \circ f \in C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), \dots$.

Если $e_1, \dots, e_q$ есть $\mathbb{R}$ -базис E и $f: \Omega \rightarrow E$, то для каждой точки $x \in \Omega$ найдутся действительные числа $f_1(x), \dots, f_q(x)$, такие, что

$$f(x) = \sum_{j=1}^q f_j(x) e_j.$$

Легко проверить, что

$$f \in C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \dots$$

тогда и только тогда, когда

$$f_j \in C^k(\Omega), C_0^k(\Omega), \dots \text{ для } j = 1, \dots, q.$$

Элементы множества $C^k(\Omega, E)$ называются C^k -отображениями Ω в E . Если $E = \mathbb{R}^q$, то для $C^k(\Omega, E), C_0^k(\Omega, E), \dots$ мы используем обозначения $C^k(\Omega, q), C_0^k(\Omega, q), \dots$. Для $f \in C^k(\Omega, E)$ можно определить производные $D^\alpha f$ при $|\alpha| \leq k$. Очевидно,

$$D^\alpha f \in C^{k-|\alpha|}(\Omega, E).$$

Функцию $f \in C_0^k(\Omega)$ мы будем отождествлять с элементом $g \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, равным f на Ω и нулю на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Мы часто будем иметь дело с комплексными функциями в Ω (или отображениями Ω в $\mathbb{C}^q$). В этом случае мы тоже будем использовать обозначения $C^k(\Omega), C^k(\Omega, q), \dots$ для $C^k(\Omega, \mathbb{C}), C^k(\Omega, \mathbb{C}^q), \dots$, если при этом не возникнут недоразумения.

Действительная функция f , определенная в Ω , называется ($\mathbb{R}$ -)аналитической, если для всякой точки $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ существует степенной ряд

$$P_a(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} (x - a)^{\alpha} = \sum_{\alpha_j \geq 0} c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \dots (x_n - a_n)^{\alpha_n},$$

который сходится к $f(x)$ для всех x из некоторой окрестности U точки a . Этот ряд сходится тогда равномерно к f на компактных подмножествах U (так что f непрерывна), и, значит, его можно почленно дифференцировать. Следовательно, $f \in C^\infty(\Omega)$, и для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеем

$$D^\beta f(x) = D^\beta P_a(x) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} D^\beta (x - a)^{\alpha}.$$

Более того, этот ряд однозначно определен функцией f ; действительно,

$$c_{\alpha} = \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(a).$$

Аналитические отображения множества Ω в конечномерное векторное пространство определяются так же, как и выше.

Если U, V — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $f: U \rightarrow V$ — такой гомеоморфизм, что и f и f^{-1} являются C^k -отображениями, мы будем говорить, что f есть C^k -диффеоморфизм (или просто диффеоморфизм) U на V . Если $U=V$, то f называется C^k -автоморфизмом.

Если f и f^{-1} являются $\mathbb{R}$ -аналитическими, то мы имеем аналитический изоморфизм (или автоморфизм, если $U=V$).

Пусть U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и f — комплексная функция в U ; f называется *голоморфной*, если для всякой точки $a \in U$ найдется степенной ряд $\sum c_a (z-a)^a$, который сходится к $f(z)$ для всех z из некоторой окрестности a .

Пусть E — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$; отображение $f: U \rightarrow E$ называется *голоморфным*, если для всякой $\mathbb{C}$ -линейной функции l на E функция $l \circ f$ голоморфна. Отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^q$ голоморфно тогда и только тогда, когда в координатной записи $f = (f_1, \dots, f_q)$ каждая f_i является голоморфной функцией.

Отображение $f: U \rightarrow V$ (открытые множества в $\mathbb{C}^n$) называется *$\mathbb{C}$ -аналитическим изоморфизмом* (или просто аналитическим изоморфизмом, когда не возникает недоразумений), если f и f^{-1} голоморфны. Теорема Остуда (см., например, Эрве [1]), которую мы в этой книге доказывать не будем, утверждает, что всякое взаимно однозначное голоморфное отображение U на V является $\mathbb{C}$ -аналитическим изоморфизмом. Аналогичное утверждение для C^k -отображений и $\mathbb{R}$ -аналитических отображений неверно.

Сформулируем некоторые элементарные свойства голоморфных функций. Они доказаны в большинстве книг по нескольким комплексным переменным; см., например, Эрве [1] и Хёрмандер [4].

1.1.1. Уравнения Коши — Римана. *Функция, определенная в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$, голоморфна тогда и только тогда, когда она непрерывна и для всех j , $1 \leq j \leq n$, существуют и равны нулю частные производные*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right).$$

Здесь $z_j = x_j + iy_j$; x_j и y_j — действительные числа и $i = \sqrt{-1}$.

Положим также по определению

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right).$$

Для голоморфной функции f мы пишем

$$D^a f = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{a_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)^{a_n} f.$$

Принимая во внимание равенство нулю всех $\partial f / \partial \bar{z}_j$, получаем

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f.$$

Основная теорема Хартогса (см. Хёрмандер [4]) утверждает, что условие непрерывности в утверждении 1.1.1 излишне; мы не будем доказывать здесь этот факт.

1.1.2. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. Если f — голоморфная ($\mathbb{R}$ -аналитическая) функция на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) и $D^\alpha f(a) = 0$ для всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и некоторой точки $a \in U$ ($a \in \Omega$), то $f \equiv 0$. В частности, если f равна нулю на непустом открытом подмножестве U (соответственно Ω), то $f \equiv 0$.

1.1.3. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА. Если последовательность голоморфных в U функций $\{f_j\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах U к некоторой функции f , то f голоморфна в U . Более того, для любого α последовательность $\{D^\alpha f_j\}$ сходится к $D^\alpha f$ равномерно на компактах из U .

1.1.3'. ТЕОРЕМА МОНТЕЛЯ. Если $\sigma = \{f\}$ — некоторое семейство голоморфных в U функций, равномерно ограниченных на каждом компактном подмножестве $K \subset U$,

$$|f(z)| \leq M_K \text{ для всех } z \in K, f \in \sigma,$$

то во всякой последовательности элементов семейства σ содержится подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактных подмножествах U .

1.1.3''. ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Пусть f голоморфна на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$. Тогда отображение $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ либо постоянно, либо открыто. В частности, если U ограничено и

$$M = \sup_{z \in \partial U} \overline{\lim}_{z \rightarrow z} |f(z)|,$$

то $|f(z)| < M$ для всех $z \in U$, если f не является константой.

1.1.4. НЕРАВЕНСТВА КОШИ. Если f голоморфна в U и $|f(z)| \leq M$, когда $z \in U$, то для любого компакта $K \subset U$ и любого α

$$|D^\alpha f(z)| \leq M \alpha! \delta^{-|\alpha|} \text{ для } z \in K,$$

где δ — расстояние от K до границы U .

1.1.5. ЛЕММА. Пусть функция f является $\mathbb{R}$ -аналитической в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как замкнутое подпространство в $\mathbb{C}^n$. Тогда существуют открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$, $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$, и голоморфная функция F в U , такие, что $F|_\Omega = f$.

◀¹⁾ Пусть $a \in \Omega$ и $P_a(x) = \sum c_a(x-a)^a$ — степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ при $|x-a| < r_a$, $r_a > 0$. Положим

$$U_a = \{z \in \mathbb{C}^n: |z-a| < r_a\}.$$

Тогда для $z \in U_a$ степенной ряд $P_a(z) = \sum c_a(z-a)^a$ сходится и его сумма голоморфна в U_a .

Пусть $U = \bigcup_{a \in \Omega} U_a$. Мы утверждаем, что если $U_a \cap U_b = U_{a,b} \neq \emptyset$, то $P_a = P_b$ в $U_{a,b}$. Действительно, множество $U_{a,b}$ выпукло и потому связно. Далее, если $U_{a,b} \neq \emptyset$, то $U_{a,b} \cap \mathbb{R}^n \neq \emptyset$, для любой точки $c \in U_{a,b} \cap \mathbb{R}^n$

$$D^a P_a(c) = D^a f(c) = D^a P_b(c),$$

и потому применима теорема единственности 1.1.2. Следовательно, мы можем определить голоморфную в U функцию F , полагая $F|U_a = P_a$. Очевидно, $F| \Omega = f$. ▶

Вернемся к действительным функциям. Пусть N — окрестность замкнутого единичного отрезка $0 \leq t \leq 1$ в $\mathbb{R}$, и пусть $f \in C^k(N)$, $k \geq 1$. Тогда верна

1.1.6. Лемма. Существует ξ , $0 \leq \xi \leq 1$, такое, что

$$f(1) = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!},$$

где

$$f^{(v)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^v f(t).$$

◀ Для непрерывной на N функции g положим

$$I_0(g, t) = g(t), \quad I_r(g, t) = \int_0^t I_{r-1}(g, s) ds, \quad r \geq 1.$$

Если $g \in C^k(N)$ и $g^{(v)}(0) = 0$ при $0 \leq v \leq k-1$, то, очевидно,

$$g(t) = I_k(g^{(k)}, t).$$

Применив это к функции

$$g(t) = f(t) - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} t^v,$$

¹⁾ Знаки ◀ и ▶ соответственно указывают начало и конец доказательства. — Прим. перев.

мы получим

$$(1.1.7) \quad f(1) - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} = I_k(g^{(k)}, 1) = I_k(f^{(k)}, 1).$$

Если m и M обозначают соответственно нижнюю и верхнюю грани $f^{(k)}$ на $[0, 1]$, то, очевидно,

$$\frac{m}{k!} \leq I_k(f^{(k)}, 1) \leq \frac{M}{k!}.$$

Так как $f^{(k)}$ непрерывна и потому принимает все значения между m и M , то существует ξ , $0 \leq \xi \leq 1$, для которого

$$I_k(f^{(k)}, 1) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi). \blacktriangleright$$

Легко показать по индукции, что

$$I_k(g, t) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^t g(s) (t-s)^{k-1} ds.$$

Следовательно, (1.1.7) можно переписать в виде

$$(1.1.8) \quad f(1) = \sum_{v=0}^{k-1} \frac{f^{(v)}(0)}{v!} + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt.$$

1.1.9. ТЕОРЕМА (ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА). Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^k(\Omega)$ — действительная функция. Пусть точки x, y и соединяющий их замкнутый отрезок $[x, y]$ принадлежат Ω . Тогда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(y) (x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) (x-y)^\alpha,$$

где ξ — некоторая точка из $[x, y]$.

Это сразу же следует из леммы 1.1.6, примененной к функции

$$g(t) = f(y + t(x-y)),$$

которая принадлежит $C^k(N)$ для некоторой окрестности N отрезка $[0, 1]$.

Если $f \in C^m(\Omega)$ и S — подмножество Ω , мы полагаем

$$\|f\|_m^S = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in S} |D^\alpha f(x)|.$$

Отметим, что если $f, g \in C^m(\Omega)$, то

$$(1.1.10) \quad \|fg\|_m^S \leq \|f\|_m^S \|g\|_m^S, \quad \|f+g\|_m^S \leq \|f\|_m^S + \|g\|_m^S.$$

Топологию в $C^k(\Omega)$ для конечного k мы определим следующим образом. Фундаментальная система окрестностей точки $g \in C^k(\Omega)$ состоит из множеств

$$B(g, K, \varepsilon) = \{f \in C^k(\Omega): \|f - g\|_K^k < \varepsilon\};$$

здесь ε пробегает все положительные действительные числа, а K — все компактные подмножества Ω . Соответствующая топология в $C^\infty(\Omega)$ получится, если в качестве фундаментальной системы окрестностей взять множества

$$\{f \in C^\infty(\Omega): \|f - g\|_m^k < \varepsilon\},$$

где ε, K такие, как и прежде, а $m \geq 0$ — любое целое число.

Ясно, что аналогичные топологии можно ввести в $C^k(\Omega, E)$, $0 \leq k \leq \infty$, для любого конечномерного векторного пространства E (размерности q); эти пространства функций изоморфны, алгебраически и топологически, декартову произведению $(C^k(\Omega))^q$. Указанный изоморфизм зависит от выбора базиса в E . Однако $C^k(\Omega, E)$ канонически изоморфно $C^k(\Omega) \otimes E$.

Легко видеть, что введенная выше топология в $C^k(\Omega)$ имеет счетную базу. Последовательность $\{f_\nu\}$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда $D^\alpha f_\nu \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах Ω для всех α с $|\alpha| \leq k$ (для всех α , если $k = \infty$). Далее, эта топология метризуема: если $k < \infty$, то в качестве метрики можно взять функцию

$$d(f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_{K_\nu}^{K_\nu}}{1 + \|f - g\|_{K_\nu}^{K_\nu}},$$

где $\{K_\nu\}$ — последовательность компактных подмножеств Ω , таких, что $K_\nu \subset \overset{\circ}{K}_{\nu+1}$ (внутренности $K_{\nu+1}$) и $\bigcup K_\nu = \Omega$. Если $k = \infty$, то вместо этой функции можно взять функцию

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \frac{\|f - g\|_{K_\nu}^{K_\nu}}{1 + \|f - g\|_{K_\nu}^{K_\nu}}.$$

1.1.11. ТЕОРЕМА. *Метрическое пространство $C^k(\Omega)$ является полным при любом k , $0 \leq k \leq \infty$.*

◀ Достаточно показать, что если последовательность $\{g_\nu\} \subset C^k(\Omega)$ такова, что

$$\|g_\nu - g_\mu\|_m^K \rightarrow 0$$

при $\mu, \nu \rightarrow \infty$ для всех целых чисел $m \leq k$ и всех компактов $K \subset \Omega$, то существует $g \in C^k(\Omega)$, такая, что

$$\|g_\nu - g\|_m^K \rightarrow 0$$

для $m \leq k$ и всех компактов K . Для всякого a , $|a| \leq k$, существует непрерывная функция g_a , такая, что

$$\|D^\alpha g_\nu - g_a\|_K \rightarrow 0 \text{ при } \nu \rightarrow \infty.$$

(Это следует из того, что $D^\alpha(g_\nu - g_\mu) \rightarrow 0$ равномерно на компактных подмножествах и что пространство непрерывных функций в Ω с топологией равномерной сходимости на компактах полно.) Нужно только доказать, что $g = g_0 \in C^k(\Omega)$ и $D^\alpha g = g_\alpha$. Для этого достаточно показать, что если $|\alpha| \leq k-1$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ таково, что $|\beta| = 1$, то $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ и $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$.

Если $a \in \Omega$ и x близко к a , то по формуле Тейлора

$$(1.1.12) \quad D^\alpha g_\nu(x) - D^\alpha g_\nu(a) = \sum_{|\beta|=1} D^{\alpha+\beta} g_\nu(\xi_\nu) (x-a)^\beta,$$

где ξ_ν — некоторая точка отрезка $[a, x]$. Мы можем выбрать подпоследовательность $\{\nu_p\}$, такую, что

$$\xi_{\nu_p} \rightarrow \xi \in [a, x].$$

Если заменить в (1.1.12) ν на ν_p и устремить $p \rightarrow \infty$, то

$$g_\alpha(x) - g_\alpha(a) = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(\xi) (x-a)^\beta = \sum_{|\beta|=1} g_{\alpha+\beta}(a) (x-a)^\beta + o(|x-a|),$$

где $o(|x-a|)$ — функция, стремящаяся к нулю быстрее, чем $|x-a|$, когда $x \rightarrow a$. Последнее равенство вытекает из непрерывности $g_{\alpha+\beta}$. Из него следует, что $g_\alpha \in C^1(\Omega)$ и $D^\beta g_\alpha = g_{\alpha+\beta}$, если $|\beta| = 1$. ►

1.1.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Это утверждение, очевидно, справедливо и для $C^k(\Omega, E)$.

Приведем еще одно следствие из формулы Тейлора.

1.1.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f \in C^\infty(\Omega)$, то f является $\mathbb{R}$ -аналитической тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset \Omega$ существует $M > 0$, такое, что

$$(1.1.15) \quad |D^\alpha f(x)| \leq M^{|\alpha|+1} \alpha! \text{ для всех } x \in K \text{ и всех } \alpha.$$

◄ Если f $\mathbb{R}$ -аналитична, то эти неравенства следуют из леммы 1.1.5 и неравенств Коши 1.1.4. Обратно, если выполнены неравенства (1.1.15), x принадлежит компактной выпуклой окрестности K точки $a \in \Omega$ и $\xi \in [a, x]$, то

$$\left| \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) (x-a)^\alpha \right| \leq k^n M^{k+1} |x-a|^k.$$

Если $|x - a| < M^{-1}$, то из формулы Тейлора следует, что ряд

$$\sum \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) (x - a)^\alpha$$

сходится к $f(x)$. ►

1.1.16. Замечание. Легко проверить, что (1.1.15) эквивалентно существованию такой константы $M' > 0$, что

$$|D^\alpha f(x)| \leq M'^{|\alpha|+1} (|\alpha|)! \text{ для всех } x \in K \text{ и всех } \alpha.$$

§ 1.2. Разбиения единицы

Прежде чем сформулировать основной результат, введем несколько определений.

Семейство $\{E_i\}_{i \in I}$ подмножеств топологического пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки $a \in X$ найдется такая окрестность U , что множество

$$\{i \in I: E_i \cap U \neq \emptyset\}$$

конечно. Семейство $\{E'_i\}_{i \in I}$ называется *измельчением* семейства $\{E_i\}_{i \in I}$, если существует отображение

$$r: I \rightarrow I$$

(называемое *измельчающим отображением*), такое, что $E'_i \subset E_{r(i)}$ для всех $i \in I$.

Мы будем использовать следующее утверждение, принадлежащее Дьедонне [1]. Доказательства можно найти в стандартных курсах по общей топологии (см., например, Бурбаки [2, 3]).

1.2.1. Предложение. Если X — локально компактное хаусдорфово пространство, являющееся счетным объединением компактов, то X — паракомпактное пространство, т. е. всякое открытое покрытие X допускает локально конечное измельчение, также являющееся открытым покрытием. Далее, для всякого локально конечного покрытия $\{U_i\}_{i \in I}$ пространства X существует открытое покрытие $\{V_i\}_{i \in I}$ (с тем же множеством индексов), такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$ для всех $i \in I$.

1.2.2. Определение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\{U_i\}_{i \in I}$ — его открытое покрытие. Семейство C^∞ -функций $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_i\}_{i \in I}$* , если

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad \text{supp } \varphi_i \subset U_i,$$

семейство $\{\text{supp } \varphi_i\}$ локально конечно и

$$\sum_{i \in I} \varphi_i(x) = 1 \text{ для всех } x \in \Omega.$$

1.2.3. ТЕОРЕМА. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\{U_i\}_{i \in I}$ — его открытое покрытие. Тогда существует разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

1.2.4. ЛЕММА. Существует C^∞ -функция η в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\eta \geq 0$, $\eta(0) > 0$ и $\text{supp } \eta \subset \{x: \|x\| < 1\}$.

◀ Пусть $0 < c < 1$ и s — функция класса C^∞ на $\mathbb{R}$, определенная следующим образом:

$$s(r) = \begin{cases} \exp(-1/(c-r)), & \text{если } r < c, \\ 0, & \text{если } r \geq c. \end{cases}$$

Мы можем взять

$$\eta(x) = s(x_1^2 + \dots + x_n^2). \quad \blacktriangleright$$

1.2.5. ЛЕММА. Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и U — открытое множество, содержащее K . Тогда существует C^∞ -функция φ в $\mathbb{R}^n$, такая, что $\varphi(x) \geq 0$ для всех x , $\varphi(x) > 0$ для $x \in K$ и $\text{supp } \varphi \subset U$.

◀ Пусть δ — расстояние от K до $\mathbb{R}^n \setminus U$. Если $a \in K$, положим

$$\varphi_a(x) = \eta\left(\frac{x-a}{\delta}\right),$$

где функция η определена в лемме 1.2.4. Пусть

$$V_a = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi_a(x) > 0\}.$$

Тогда $a \in V_a \subset U$. Так как K — компакт, то найдется конечное число точек $a_1, \dots, a_p \in K$, таких, что

$$K \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_p}.$$

Теперь можно взять $\varphi = \sum_{j=1}^p \varphi_{a_j}$. ▶

Доказательство теоремы 1.2.3. Пусть $\{V_j\}_{j \in J}$ — локально конечное измельчение $\{U_i\}_{i \in I}$ относительно компактными открытыми подмножествами Ω (оно существует в силу предложения 1.2.1). Пусть $\{\bar{W}_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие Ω , такое, что $\bar{W}_j \subset V_j$ (предложение 1.2.1). По лемме 1.2.5 существуют C^∞ -функции $\psi_j \geq 0$ в Ω , такие, что $\psi_j(x) > 0$ для $x \in \bar{W}_j$ и $\text{supp } \psi_j \subset V_j$. Положим

$$\varphi'_j = \frac{\psi_j}{\sum_{j' \in J} \psi_{j'}}.$$

(Поскольку покрытие $\{V_j\}$ локально конечно, $\sum_{j' \in J} \psi_{j'}$ определена, принадлежит $C^\infty(\Omega)$ и всюду положительна, так как $\psi_j > 0$ на W_j , а $\bigcup W_j = \Omega$.) Очевидно,

$$\varphi'_j \geq 0, \text{ supp } \varphi'_j \subset V_j \text{ и } \sum_{j \in J} \varphi'_j = 1.$$

Пусть $r: J \rightarrow I$ — такое отображение, что $V_j \subset U_{r(j)}$. Обозначим через $J_i \subset J$ множество $r^{-1}(i)$. Положим $\varphi_i = \sum_{j \in J_i} \varphi'_j$, где справа стоит 0, если J_i пусто. Так как множества J_i попарно не пересекаются и покрывают J , то

$$\sum_{i \in I} \varphi_i = \sum_{j \in J} \varphi'_j = 1.$$

Очевидно, $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$. Поскольку семейство $\{\text{supp } \varphi'_j\}$ локально конечно, то таким является и $\{\text{supp } \varphi_i\}$. ►

1.2.6. Следствие. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, X — замкнутое подмножество Ω и U — открытое подмножество Ω , содержащее X . Тогда существует C^∞ -функция ψ в Ω , такая, что $\psi(x) = 1$, если $x \in X$, $\psi(x) = 0$, если $x \in \Omega \setminus U$, и $0 \leq \psi \leq 1$ всюду в Ω .

◄ По теореме 1.2.3 существуют C^∞ -функции $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$, такие, что $\text{supp } \varphi_1 \subset U$, $\text{supp } \varphi_2 \subset \Omega \setminus X$ и $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ в Ω . Мы можем взять $\psi = \varphi_1$. ►

1.2.7. Лемма. Если $\{U_i\}_{i \in I}$ — открытое покрытие Ω , то существуют C^∞ -функции ψ_i , такие, что $\text{supp } \psi_i \subset U_i$, $0 \leq \psi_i \leq 1$ и $\sum_i \psi_i^2 = 1$ в Ω .

◄ Если $\{\varphi_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$, то можно взять

$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\left(\sum_{j \in I} \varphi_j^2\right)^{1/2}}. \quad \blacktriangleright$$

§ 1.3. Обратные функции, неявные функции и теорема о ранге

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^1(\Omega, m)$ — отображение Ω в $\mathbb{R}^m$ класса C^1 . Пусть $a \in \Omega$.

1.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциалом f в точке a называется $\mathbb{R}$ -линейное отображение $(df)(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, такое, что

$$(df)(a)(v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots, w_m),$$

где

$$w_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a) v_k.$$

Дифференциал $(df)(a)$ голоморфного отображения f открытого подмножества $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$ мы определяем аналогично:

$$(df)(a)(v_1, \dots, v_n) = (w_1, \dots, w_m), \quad w_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial z_k}(a) v_k.$$

Очевидно, это есть $\mathbb{C}$ -линейное отображение $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Оно совпадает с определенным выше отображением $(df)(a)$, если естественным образом отождествить $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$ и воспользоваться уравнениями Коши — Римана.

1.3.2. ТЕОРЕМА. Если f есть C^1 -отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ и для точки $a \in \Omega$ дифференциал $(df)(a)$ является изоморфизмом $\mathbb{R}^n$ на себя, то существуют окрестности $U \ni a$ и $V \ni f(a)$, такие, что сужение $f|U$ является гомеоморфизмом на V .

◀ Не теряя общности, мы можем считать, что $a = 0$ и $f(a) = 0$. Так как $(df)(a) = A$ есть изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на себя, то можно заменить f на $A^{-1} \circ f$ и считать, что $(df)(a)$ — тождественное отображение. Пусть g определена в Ω равенством

$$g(x) = f(x) - x.$$

Тогда, очевидно, $(dg)(a) = 0$. Из этого следует, что существует окрестность

$$W \ni 0, \quad \bar{W} \subset \Omega, \quad W = \{x: |x| < r\},$$

такая, что для любых $x, y \in \bar{W}$

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Если $x, y \in W$, то, очевидно,

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{2} |x - y|,$$

так что отображение f взаимно однозначно в W . Пусть $V = \{x: |x| < r/2\}$ и $U = W \cap f^{-1}(V)$. Определим $\varphi_0: V \rightarrow W$, полагая $\varphi_0(y) \equiv 0$ и далее по индукции

$$\varphi_v(y) = y - g(\varphi_{v-1}(y)).$$

Легко проверить индукцией по v , что

$$\varphi_v(V) \subset W, \quad v \geq 0,$$

и далее, что

$$|\varphi_v(y) - \varphi_{v-1}(y)| = |g(\varphi_{v-1}(y)) - g(\varphi_{v-2}(y))| \leq r 2^{-v} \quad (v \geq 2),$$

причем это верно и для $v = 1$. Значит, последовательность $\{\varphi_v\}$ сходится равномерно к отображению $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Так как $\varphi_v(V) \subset W$, то $\varphi(V) \subset \bar{W}$ и

$$\varphi(y) = y - g(\varphi(y)).$$

Так как $|y| < r/2$ на V и $|g(\varphi(y))| \leq r/2$, то $\varphi(V) \subset W$; более того, $f(\varphi(y)) = \varphi(y) + g(\varphi(y)) = y$. Так как $f|_W$ взаимно однозначно, то отображение φ является обратным к f . Очевидно, φ непрерывно, так как непрерывны все φ_ν . ►

Позже мы увидим, что на самом деле $\varphi \in C^1(V, n)$.

1.3.3. Замечание. У этой теоремы есть аналог для голоморфных отображений. Если Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение, такое, что $(df)(a)$ для некоторой точки $a \in \Omega$ есть изоморфизм, то найдутся окрестности $U \ni a$ и $V \ni f(a)$, такие, что $f|_U$ есть гомеоморфизм U на V и отображение, обратное к $f|_U$, тоже голоморфно. Доказательство совпадает с приведенным выше. Мы определяем U , V и φ_ν так же, как и выше; последовательность $\{\varphi_\nu\}$ сходится равномерно к отображению φ , обратному к $f|_U$. Так как каждое φ_ν голоморфно, то по теореме 1.1.3 φ тоже голоморфно.

1.3.4. Определение. Пусть Ω_1, Ω_2 — открытые подмножества $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ соответственно, f есть C^1 -отображение $\Omega_1 \times \Omega_2$ в $\mathbb{R}^p$ и точка $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$. Определим отображение $g: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, полагая $g(y) = f(a, y)$. Частным дифференциалом $(d_2f)(a, b)$ называется линейное отображение $(dg)(b)$ пространства $\mathbb{R}^{n_2}$ в $\mathbb{R}^p$. Частный дифференциал $(d_1f)(a, b)$ определяется аналогично.

1.3.5. Теорема. Пусть Ω_1, Ω_2 — открытые множества в $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ соответственно и f есть C^1 -отображение $\Omega_1 \times \Omega_2$ в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $f(a, b) = 0$ в некоторой точке $(a, b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ и $\text{rang}(d_2f)(a, b) = n_2$. Тогда найдется окрестность $U_1 \times U_2$ точки (a, b) , такая, что для любого $x \in U_1$ существует единственное $y = y(x) \in U_2$, такое, что $f(x, y(x)) = 0$. Отображение $x \mapsto y(x)$ непрерывно.

◀ Рассмотрим отображение $F: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, определяемое соотношением

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Тогда $(d_2f)(a, b)$ имеет ранг n_2 в том и только в том случае, если $(dF)(a, b)$ — изоморфизм. Значит, по теореме 1.3.2, найдутся окрестности $U \times U_2 \ni (a, b)$ и $W \ni (a, 0)$, такие, что отображение $F|_{U \times U_2} \rightarrow W$ является гомеоморфизмом. Пусть $\varphi: W \rightarrow U \times U_2$ — непрерывное отображение, обратное к $F|_{U \times U_2}$. Точка a обладает такой окрестностью U_1 , что если $x \in U_1$, то $(x, 0) \in W$. Пусть $y(x)$ для $x \in U_1$ означает проекцию $\varphi(x, 0)$ на U_2 . Очевидно, если $y \in U_2$ удовлетворяет условию $f(x, y) = 0$, то $y = y(x)$. Далее, $x \mapsto y(x)$ — непрерывное отображение и $f(x, y(x)) = 0$. ►

1.3.6. Замечание. Эта теорема имеет очевидный аналог для голоморфных отображений $f: \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ (с очевидными изменениями обозначений); в этом случае отображение $y(x)$ голоморфно.

1.3.7. Лемма. В предположениях и обозначениях теоремы 1.3.5 пусть $A(x) = (d_2 f)(x, y(x))$ и $B(x) = (d_1 f)(x, y(x))$. Тогда если U — достаточно малая окрестность точки a , то $A(x)$ — изоморфизм для всех $x \in U$, отображение $y \in C^1(U, n_2)$ и

$$(1.3.8) \quad (dy)(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x).$$

◀ Так как y непрерывно, то $x \mapsto A(x)$ является непрерывным отображением U_1 в пространство линейных отображений $\mathbb{R}^{n_2}$ в себя (пространство $n_2 \times n_2$ -матриц). Далее, $A(a)$ — изоморфизм. Значит, если U — достаточно малая окрестность точки a , то $A(x)$ при $x \in U$ — тоже изоморфизм. Мы можем предположить, что U выпукла. Пусть $x, x + \xi \in U$ и $\eta = y(x + \xi) - y(x)$. Тогда $f(x + \xi, y(x) + \eta) = 0$, так что по формуле Тейлора

$$0 = f(x, y(x)) + B(x)\xi + A(x)\eta + o(|\xi| + |\eta|) \text{ при } |\xi|, |\eta| \rightarrow 0.$$

Но $\eta \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$ и $f(x, y(x)) = 0$, поэтому

$$A(x)\eta = -B(x)\xi + o(|\xi| + |\eta|) \text{ при } |\xi| \rightarrow 0.$$

Если K — компактное подмножество U , то отображение $A(x)^{-1}$, будучи непрерывным в U , ограничено на K (в очевидном смысле), и мы получаем, что

$$\eta = -A(x)^{-1} \circ B(x)\xi + o(|\xi| + |\eta|).$$

Значит, если $|\xi|$ достаточно мал, то найдется константа $C > 0$, такая, что

$$|\eta| \leq C|\xi| + \frac{1}{2}|\eta|,$$

откуда $|\eta| \leq 2C|\xi|$. Следовательно,

$$y(x + \xi) - y(x) = -A(x)^{-1} \circ B(x)\xi + o(|\xi|) \text{ при } |\xi| \rightarrow 0,$$

а это как раз и означает, что $y \in C^1(U, n_2)$ и что выполняется равенство (1.3.8). ▶

1.3.9. Следствие. В предположениях и обозначениях теоремы 1.3.5 пусть U — окрестность точки a , в которой $(df)(x, y(x))$ является изоморфизмом для всех $x \in U$. Тогда если

$$f \in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2), \quad k \geq 1,$$

то

$$y \in C^k(\Omega_1, n_2).$$

◀ При $k=1$ утверждение совпадает с леммой 1.3.7. Для $k>1$ мы воспользуемся индукцией. Если

$$\begin{aligned} f &\in C^k(\Omega_1 \times \Omega_2, n_2), \\ y &\in C^r(U, n_2), \quad r < k, \end{aligned}$$

то, по определению, $x \mapsto A(x)$, $B(x)$ суть C^r -отображения U в соответствующее конечномерное векторное пространство. Но тогда из (1.3.8) следует, что $y \in C^{r+1}(U, n_2)$. ▶

1.3.10. Замечание. В обозначениях следствия 1.3.9, если f есть $\mathbb{R}$ -аналитическое отображение, то таково же и отображение y . Это сразу следует из леммы 1.1.5 и замечания 1.3.6.

1.3.11. Замечание. В предположениях теоремы 1.3.2 и с теми же обозначениями, если отображение $f \in C^k(\Omega, n)$ (или $\mathbb{R}$ -аналитично), то таково же и $(f|U)^{-1}$. Это вытекает сразу из следствия 1.3.9 и замечания 1.3.10, примененных к отображению $g: \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, где

$$g(x, y) = x - f(y).$$

1.3.12. Замечание. Теорема 1.3.2 вместе с замечанием 1.3.11 известна как *теорема об обратной функции*. Утверждения 1.3.5, 1.3.9 и 1.3.10 составляют *теорему о неявной функции*.

1.3.13. Определение. Брус в $\mathbb{R}^n$ — это множество вида $\{x: |x_i - a_i| < r_i\}$. Поликруг в $\mathbb{C}^n$ есть множество вида $\{z: |z_j - a_j| < r_j\}$.

1.3.14. ТЕОРЕМА О РАНГЕ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^k(\Omega, m)$, $k \geq 1$, т. е. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение класса C^k . Предположим, что ранг $(df)(x)$ есть целое число r , не зависящее от точки $x \in \Omega$. Тогда существуют открытые окрестности $U \ni a$ и $V \ni b = f(a)$, брусы Q, Q' в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ соответственно и C^k -диффеоморфизмы $u: Q \rightarrow U$, $u': V \rightarrow Q'$, такие, что отображение $\varphi = u' \circ f \circ u$ имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Далее, если f является $\mathbb{R}$ -аналитическим, то u, u' вместе с обратными к ним отображениями можно взять $\mathbb{R}$ -аналитическими.

◀ После выполнения подходящих автоморфизмов в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ мы можем предполагать, что $a=0$, $b=0$ и что $(df)(0)$ совпадает с линейным отображением

$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto (v_1, \dots, v_r, 0, \dots, 0).$$

Рассмотрим отображение $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое равенством

$$\omega(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x), x_{r+1}, \dots, x_n),$$

где

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x), \dots, f_m(x)).$$

Тогда $(d\omega)(0)$ — тождественное отображение; следовательно, по теореме об обратной функции (см. замечание 1.3.12), существуют окрестность $U \ni 0$ и брус Q , такие, что $\omega: U \rightarrow Q$ есть C^k -диффеоморфизм. Пусть $u = (\omega|U)^{-1}$. Очевидно,

$$f \circ u(y) = (y_1, \dots, y_r, \varphi_{r+1}(y), \dots, \varphi_m(y)).$$

где φ_i принадлежат $C^k(Q)$. Если теперь $\psi = f \circ u$, то

$$\text{rank}(d\psi)(y) = r$$

для $y \in Q$, и потому

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_k} = 0, \text{ если } j, k > r.$$

Таким образом, φ_i не зависят от $y_{r+1}, \dots, y_m$. Пусть теперь $Q = Q' \times Q^{n-r}$, где Q' , Q^{n-r} — брусы соответственно в $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^{n-r}$. Пусть отображение

$$v: Q' \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow Q' \times \mathbb{R}^{m-r}$$

определяется равенством

$$v(y_1, \dots, y_r, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - \varphi_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_m - \varphi_m(y_1, \dots, y_r)).$$

Очевидно, что v есть C^k -диффеоморфизм. Пусть Q' — брус в $\mathbb{R}^m$, такой, что

$$v \circ \psi(Q) \subset Q' \subset Q' \times \mathbb{R}^{m-r},$$

и пусть $V = v^{-1}(Q')$. Если мы положим $u' = v|V$, то получим, что

$$u' \circ f \circ u(x_1, \dots, x_n) = u' \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \blacktriangleright$$

Отметим, что C^k -отображения можно заменить $\mathbb{R}$ -аналитическими, если f аналитическое.

1.3.15. Замечание. Ясно, что теорема о ранге имеет аналог для голоморфных отображений. Мы не формулируем его явно, так как и утверждение и доказательство практически те же, что и в теореме 1.3.14.

§ 1.4. Теорема Сарда и функциональная зависимость

1.4.1. Лемма. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица на компактных подмножествах Ω , т. е. для любого компакта $K \subset \Omega$ существует такое $M > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ для всех $x, y \in K$. Тогда для любого множества $S \subset \Omega$ меры нуль множество $f(S)$ имеет меру нуль.

Это следует из определения множества меры нуль.

1.4.2. ЛЕММА. Если Ω открыто в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^1(\Omega, n)$, то f переводит множества меры нуль в множества меры нуль.

1.4.3. ЛЕММА. Если m и n — целые числа, $m > n$, Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть C^1 -отображение, то $f(\Omega)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.

◀ Если мы определим отображение $g: \Omega \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$, полагая

$$g(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_n),$$

то $f(\Omega) = g(\Omega \times 0)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$ по лемме 1.4.2. ▶

1.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть C^1 -отображение. Точка $a \in \Omega$ называется критической точкой f , если $\text{rank}(df)(a) < m$.

1.4.5. ЗАМЕЧАНИЯ. (а) Если $m > n$, то всякая точка в Ω является критической. (б) Множество критических точек отображения f замкнуто в Ω .

Основная цель этого параграфа — доказательство следующей теоремы.

1.4.6. ТЕОРЕМА САРДА. Если Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть C^∞ -отображение и A — множество критических точек f , то $f(A)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.

Эта теорема верна даже в предположении $f \in C^r(\Omega, m)$, где $r = \max(n - m + 1, 1)$. Доказательство этого более сильного варианта требует, однако, и несколько более тонкого анализа: см. Сард [1] и Морс [1], а также Мальгранж [2]. Уитни [3] показал, что требование дифференцируемости $\max(n - m + 1, 1)$ раз — лучшее из возможных, и привел пример C^{n-m} -отображения f ($n > m$) из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, для которого образ множества критических точек содержит непустое открытое множество.

Прежде всего мы докажем теорему Сарда в случае, когда $m = n$, но в более слабом предположении относительно дифференцируемости.

1.4.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть C^1 -отображение. Если A — множество критических точек f , то $f(A)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

◀ Пусть $a \in A$. По предположению, $\text{rank}(df)(a) < n$; следовательно, $f(a) + (df)(a)(\mathbb{R}^n)$ есть аффинное подпространство $V_a \subset \mathbb{R}^n$ размерности $< n$. Пусть $u_1, \dots, u_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ с центром $f(a)$, такой, что V_a лежит в пространстве, натянутом на $u_1, \dots, u_{n-1}$. Пусть Q — замкнутый куб в Ω ; нам доста-

точно показать, что $f(Q \cap A)$ имеет меру нуль. Когда $x, y \in Q$, мы имеем

$$f(x) - f(y) = (df)(y)(x - y) + r(x, y),$$

где

$$r(x, y) = o(\|x - y\|)$$

равномерно на $Q \times Q$ при $\|x - y\| \rightarrow 0$; следовательно, найдется функция $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, такая, что $\lambda(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и

$$\|r(x, y)\| \leq \lambda(\|x - y\|) \cdot \|x - y\|.$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и x лежит в кубе Q_ε с ребром ε , содержащем точку $a \in A$, то $f(x)$ лежит в слое между гиперплоскостями

$$u_n = 2\lambda(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad \text{и} \quad u_n = -2\lambda(\varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Более того, из формулы Тейлора следует, что $f(x)$ лежит в кубе с ребром $M\varepsilon$ и центром $f(a)$ (ребра куба параллельны осям координат u_i), где M — константа, не зависящая от a , $x \in Q$ и от выбора координат $\{u_i\}$. Объем пересечения куба с ребром $M\varepsilon$ и слоя между гиперплоскостями $u_n = \pm 2\lambda(\varepsilon) \cdot \varepsilon$ не превышает $4M^{n-1}\varepsilon^n\lambda(\varepsilon)$. Так как мера в $\mathbb{R}^n$ инвариантна относительно ортонормированной замены координат, то $f(Q_\varepsilon)$ имеет меру $\leq 4M^{n-1}\varepsilon^n\lambda(\varepsilon)$. Пусть l — длина ребра куба Q . Разобьем Q на $(l/\varepsilon)^n$ кубов Q_i с ребром ε , $i = 1, \dots, (l/\varepsilon)^n$. Мы показали, что если $Q_i \cap A \neq \emptyset$, то

$$\text{mes } f(Q_i) \leq 4M^{n-1}\varepsilon^n\lambda(\varepsilon),$$

где mes — мера в $\mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\text{mes } f(A \cap Q) \leq \sum_{i, A \cap Q_i \neq \emptyset} \text{mes } f(A \cap Q_i) \leq l^n 4M^{n-1}\lambda(\varepsilon).$$

Так как $\lambda(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\text{mes } f(A \cap Q) = 0$. ►

Для доказательства теоремы 1.4.6 нам понадобится одно подготовительное предложение.

1.4.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ — функция класса C^∞ и A — множество ее критических точек, то $f(A)$ имеет меру нуль.

◄ Положим

$$A_k = \{a \in \Omega: D^\alpha f(a) = 0 \text{ для всех } \alpha, 0 < |\alpha| \leq k\}.$$

Очевидно, $A_{k+1} \subset A_k$ и

$$(1.4.9) \quad A = A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup A_n.$$

Если $a \in A_n$ и Q — замкнутый куб в Ω , содержащий a , то

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|^{n+1}, \quad x \in Q,$$

так что образ куба с ребром ε , содержащего точку a , имеет меру $\leq M\varepsilon^{n+1}$ в $\mathbb{R}^1$ ($M = M(Q) > 0$ — фиксированная константа). Значит, разбивая Q на $(l/\varepsilon)^n$ кубов с ребром ε , мы получим, что $f(A_n \cap Q)$ имеет меру $< l^n M\varepsilon$, а поскольку ε произвольно, $f(A_n)$ имеет меру нуль. Если $n = 1$, то $A = A_1 = A_n$, так что в этом случае предложение доказано. Предположим теперь по индукции, что если Ω' — открытое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, g есть C^∞ -отображение Ω' в $\mathbb{R}^1$ и A_g — множество критических точек g , то $g(A_g)$ имеет меру нуль.

Как видно из разложения (1.4.9) для отображения $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, достаточно показать, что $f(A_k \setminus A_{k+1})$ имеет меру нуль при $1 \leq k < n$. Для этого достаточно показать, что для любой точки $a \in A_k \setminus A_{k+1} = B_k$ найдется окрестность U в $\mathbb{R}^n$, такая, что $f(U \cap B_k)$ имеет меру нуль.

Так как $a \notin A_{k+1}$, то найдется мультииндекс

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = k+1,$$

для которого

$$D^\alpha f(a) \neq 0.$$

Если $\alpha_j \neq 0$, пусть

$$\beta = \alpha - (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

(1 на j -м месте и 0 на остальных местах), и пусть $h = D^\beta f$. Тогда $(dh)(a)$ имеет в точке a максимальный ранг (равный 1); значит, по теореме о ранге 1.3.14, найдутся окрестность $U \ni a$, куб Q в $\mathbb{R}^n$ и C^∞ -диффеоморфизм $u: U \rightarrow Q$, такие, что

$$u(\{x: h(x) = 0\}) = \{(x_1, \dots, x_n) \in Q: x_1 = 0\} = H.$$

По построению, $u(B_k \cap U) \subset H$, и мы положим

$$\Omega' = \{(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}: (0, x_2, \dots, x_n) \in H\}.$$

Пусть g есть C^∞ -функция в Ω' , определяемая условием

$$g(x_2, \dots, x_n) = F(0, x_2, \dots, x_n),$$

где $F = f \circ u^{-1}$. Если $S = u(B_k \cap U)$, то, очевидно, $F(S) \subset g(A_g)$, где A_g — множество критических точек g . По индуктивному предположению, $g(A_g)$, а значит и $F(S) = f(U \cap B_k)$, имеет меру нуль. ►

1.4.10. Следствие. Если $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть C^∞ -отображение и $B = \{x: (df)(x) = 0\}$, то $f(B)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$.

◀ Если $f = (f_1, \dots, f_m)$, то $B \subset B_1 = \{x: (df_1)(x) = 0\}$. Следовательно,

$$f(B) \subset f_1(B_1) \times \mathbb{R}^{m-1}.$$

Согласно предложению 1.4.8, $f_1(B_1)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}$, поэтому $f_1(B_1) \times \mathbb{R}^{m-1}$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$. ►

Наконец, нам понадобится еще один результат, который прямо следует из теоремы Фубини о представлении кратных интегралов повторными.

1.4.11. ЛЕММА. Пусть S — измеримое множество в $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{p-r}$ ($0 < r < p$). Обозначим точку в $\mathbb{R}^p$ через (x, y) , $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^{p-r}$. Для $c \in \mathbb{R}^r$ пусть

$$S_c = \{y \in \mathbb{R}^{p-r}; (c, y) \in S\}.$$

Тогда S имеет меру нуль в $\mathbb{R}^p$ в том и только в том случае, когда S_c имеет меру нуль в $\mathbb{R}^{p-r}$ для почти всех $c \in \mathbb{R}^r$.

◀ Достаточно применить теорему Фубини к характеристической функции S (которая, по определению, равна 1 на S и 0 вне S). ▶

Доказательство теоремы 1.4.6. Пусть

$$E_k = \{x \in \Omega; \text{rank}(df)(x) = k\},$$

где $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — заданное C^∞ -отображение. Если $m > n$, то теорема следует непосредственно из леммы 1.4.3, и потому мы можем считать, что $n \geq m$. Тогда

$$A = \bigcup_{0 \leq k < m} E_k.$$

Нам надо показать, что у любой точки $a \in E_k$ найдется окрестность U в $\mathbb{R}^n$, такая, что $f(U \cap E_k)$ имеет меру нуль. Множество

$$\{x \in \Omega; \text{rank}(df)(x) \leq k\} = \bigcup_{0 \leq r \leq k} E_r$$

замкнуто для любого k ; значит, E_k локально замкнуто, т. е. для любой точки $a \in E_k$ и всех достаточно малых окрестностей $U \ni a$ в $\mathbb{R}^n$ множество $U \cap E_k$ замкнуто в U и потому является счетным объединением компактов. Так как образ компакта при отображении f есть компакт и потому измеримое множество, то $S_k = f(U \cap E_k)$ измеримо в $\mathbb{R}^m$.

Если $k = 0$, то S_0 имеет меру нуль, согласно следствию 1.4.10. Пусть $0 < k < m$ и $a \in E_k$. Если $f = (f_1, \dots, f_m)$, то мы можем считать, переставляя f_j , что

$$\text{rank}(du)(a) = k,$$

где $u = (f_1, \dots, f_k)$. В Ω найдутся C^∞ -функции $u_{k+1}, \dots, u_n$ (на самом деле — линейные функции в $\mathbb{R}^n$), такие, что

$$\text{rank}(dw)(a) = n,$$

где

$$w = (f_1, \dots, f_k, u_{k+1}, \dots, u_n).$$

По теореме об обратной функции 1.3.11, существуют сколь угодно малые окрестности $U \ni a$ и $V \ni \omega(a)$, такие, что $\omega: U \rightarrow V$ есть C^∞ -диффеоморфизм. Отображение

$$F = f \circ \omega^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}^m$$

имеет вид

$$F(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_k, F_{k+1}(v), \dots, F_m(v));$$

если

$$E'_k = \{v \in V: (dF)(v) \text{ имеет ранг } k\},$$

то

$$S_k = f(U \cap E_k) = F(E'_k).$$

Для $c \in \mathbb{R}^k$ определим отображение $F_c: V_c \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$, полагая

$$F_c(y) = (F_{k+1}(c, y), \dots, F_m(c, y)).$$

Здесь $V_c = \{y \in \mathbb{R}^{n-k}: (c, y) \in V\}$. Ясно, что

$$(c, y) \in E'_k \Leftrightarrow (dF_c)(y) = 0.$$

Значит, согласно следствию 1.4.10, если

$$E'_{k,c} = \{y \in V_c: (c, y) \in E'_k\},$$

то $F_c(E'_{k,c})$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^{m-k}$. Далее,

$$S_{k,c} = \{y \in \mathbb{R}^{m-k}: (c, y) \in S_k = F(E'_k)\} = F_c(E'_{k,c}).$$

Следовательно, так как S_k измеримо, то, по лемме 1.4.11, S_k имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$. Как мы уже отмечали, этим завершается доказательство теоремы 1.4.6. ►

Эта теорема, в ее общей формулировке, принадлежит М. Морсу, А. Морсу и Сарду.

Приведем одно применение теоремы Сарда.

1.4.12. ПРИМЕНЕНИЕ. Пусть $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(\Omega)$. Набор функций $\{f_j\}$ называется *функционально зависимым* на подмножестве $S \subset \Omega$, если существуют открытое множество

$$\Omega' \supset f(S), \text{ где } f = (f_1, \dots, f_m): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

и C^∞ -функция g в Ω' , такая, что $g^{-1}(0)$ нигде не плотно в Ω' и $g(f(x)) = 0$ для всех $x \in S$. Если g можно взять $\mathbb{R}$ -аналитической, то набор $\{f_j\}$ называется *аналитически зависимым*. Соответствующее определение формулируется и для голоморфных функций.

1.4.13. ЛЕММА. Для произвольного замкнутого множества X в $\mathbb{R}^n$ найдется функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что $X = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(x) = 0\}$.

Возьмем в $\mathbb{R}^n$ открытые множества U_p , $p \geq 1$, такие, что $X = \bigcap_{p \geq 1} U_p$. Пусть $\{K_m\}$ — последовательность компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{R}^n, \quad K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}.$$

Согласно следствию 1.2.6, найдутся $\varphi_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 0$ на X и $\varphi_p = 1$ на $\mathbb{R}^n \setminus U_p$. Пусть

$$c_p = \|\varphi_p\|_p^K = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in K_p} |D^\alpha \varphi_p(x)|.$$

Подберем $\varepsilon_p > 0$ так, чтобы

$$\sum_1^{\infty} \varepsilon_p c_p < \infty.$$

Положим

$$\psi_m = \sum_{p=1}^m \varepsilon_p \varphi_p.$$

Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такое r , что $K \subset K_r$, поэтому если $p > 0$ задано и $m' \geq m > r$, p , то $\|\psi_m - \psi_{m'}\|_p^K \leq \sum_{q>m} \varepsilon_q \|\varphi_q\|_p^K \leq \sum_{q>m} \varepsilon_q \|\varphi_q\|_q^K \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $\{\psi_m\}$ является фундаментальной последовательностью в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и ее предел φ , очевидно, обладает требуемыми свойствами. ▶

1.4.14. ТЕОРЕМА. Если $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть C^∞ -отображение $f = (f_1, \dots, f_m)$, то набор $\{f_j\}$ функционально зависим на каждом компактном подмножестве Ω в том и только в том случае, когда $\text{rank}(df)(x) < m$ для всех $x \in \Omega$.

◀ Предположим, что $\text{rank}(df)(a) = m$ в некоторой точке $a \in \Omega$. Тогда $\text{rank}(df)(x) = m$ для всех x , достаточно близких к a , так что, по теореме о ранге, найдется относительно компактная окрестность U точки a , такая, что $f(U)$ открыто в $\mathbb{R}^m$, а потому $f(\bar{U})$ не является нигде не плотным. Очевидно, что в этом случае набор $\{f_j\}$ функционально независим на $\bar{U}$.

Обратно, если $\text{rank}(df)(x) < m$ для всех $x \in \Omega$, то, по теореме Сарда 1.4.6, $f(\Omega)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^m$. Если $K \subset \Omega$ — компакт, то $f(K)$ — компакт меры нуль и, значит, нигде не плотное множество. По лемме 1.4.13, найдется функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, такая, что $g^{-1}(0) = f(K)$. Очевидно, $g \circ f(x) = 0$ для всех $x \in K$. ▶

Несколько более слабое утверждение справедливо для аналитической зависимости.

1.4.15. ТЕОРЕМА. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — аналитическое отображение, $f = (f_1, \dots, f_m)$. Тогда $\text{rank}(df)(x) < m$ для всех $x \in \Omega$ в том и только в том случае, когда существует нигде не плотное замкнутое множество $S \subset \Omega$, такое, что у любой точки $a \in \Omega \setminus S$ найдется окрестность $U \subset \Omega$, где $f|_U$ аналитически зависимы.

Отметим, что если Ω связно, то по теореме единственности $\text{rank}(df)(x) < m$ для всех $x \in \Omega$, если он $< m$ для всех x из некоторого непустого открытого подмножества Ω .

◀ Мы можем считать, что Ω связно. Если множество S с указанными выше свойствами существует, то, очевидно, $\text{rank}(df)(x) < m$ для $x \in \Omega \setminus S$ (теорема 1.4.14), а тогда и всюду на Ω , так как множество $\{x: \text{rank}(df)(x) = m\}$ открыто.

Обратно, пусть

$$p = \max_x \text{rank}(df)(x) < m;$$

возьмем точку $b \in \Omega$, в которой

$$\text{rank}(df)(b) = p.$$

Тогда найдутся индексы $j_1, \dots, j_p$, $1 \leq j_r \leq m$, и $k_1, \dots, k_p$, $1 \leq k_p \leq n$, такие, что $h(b) \neq 0$, где

$$h(x) = \det \left(\frac{\partial f_{j_r}}{\partial x_{k_s}}(x) \right).$$

Пусть $S = \{x \in \Omega: h(x) = 0\}$. Так как функция h аналитична в Ω и $\neq 0$, то S не содержит никакого открытого множества и потому нигде не плотно. Очевидно,

$$\text{rank}(df)(x) = p, \quad x \in \Omega \setminus S.$$

По теореме о ранге 1.3.15, существуют окрестности $U \ni a$, $V \ni f(a)$, брусы Q, Q' в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ соответственно и аналитические изоморфизмы $u: Q \rightarrow U$, $u': V \rightarrow Q'$, такие, что $u' \circ f \circ u$ совпадает с отображением $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$. Если $u' = (u'_1, \dots, u'_m)$ и мы положим $g = u'_m$, то получим, что

$$g \circ f = 0 \text{ на } U. \blacktriangleright$$

1.4.16. ПРИМЕР. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция комплексного переменного z , которая не является многочленом и действительна на действительной оси (например, $\varphi(z) = e^z$). Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, задаваемое равенством

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 x_2, x_1 \varphi(x_2)).$$

Можно показать, что не существует аналитической функции $g \neq 0$ в окрестности $0 \in \mathbb{R}^3$, такой, что $g \circ f = 0$ в окрестности

$0 \in \mathbb{R}^2$. Этот пример показывает, что наличие множества S в теореме 1.4.15 необходимо.

1.4.17. Замечание. Теорема 1.4.15 и пример 1.4.16 с очевидными изменениями применимы и к голоморфным функциям.

§ 1.5. Теорема Бореля о рядах Тейлора

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, такое, что $0 \in \Omega$, и пусть $f \in C^\infty(\Omega)$. Обозначим через $T(f)$ формальный степенной ряд

$$T(f) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(0) x^\alpha;$$

если $m > 0$ — целое число, положим

$$T^m(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(0) x^\alpha;$$

$T^m(f)$, конечно, является многочленом.

1.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X — замкнутое подмножество Ω . Функция $f \in C^k(\Omega)$ называется m -плоской на X , $m \leq k$, если $D^\alpha f(x) = 0$ для всех $x \in X$ и всех α с $|\alpha| \leq m$. Если $f \in C^\infty(\Omega)$ и $D^\alpha f(x) = 0$ для $x \in X$ и всех α , мы будем говорить, что f — плоская на X .

1.5.2. ЛЕММА. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ является m -плоской в начале координат. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная нулю в окрестности 0 и такая, что

$$\|g - f\|_{\mathbb{R}^n}^m < \varepsilon.$$

◀ По следствию 1.2.6 найдется функция $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что $\eta(x) \geq 0$ для всех x и $\eta(x) = 0$, если $|x| \leq 1/2$, $\eta(x) = 1$, если $|x| \geq 1$. Для $\delta > 0$ положим

$$g_\delta(x) = \eta\left(\frac{x}{\delta}\right) f(x).$$

Очевидно, $g_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и равна нулю вблизи 0; поэтому достаточно доказать, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(D^\alpha g_\delta)(x) - (D^\alpha f)(x)| \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, \text{ если } |\alpha| \leq m.$$

Так как $g_\delta(x) = f(x)$, если $|x| \geq \delta$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha g_\delta(x) - D^\alpha f(x)| = \sup_{|x| \leq \delta} |D^\alpha g_\delta(x) - D^\alpha f(x)|.$$

Так как f является m -плоской в 0 , то $D^\alpha f(0) = 0$, и потому

$$\sup_{|x| \leq \delta} |D^\alpha f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, \text{ если } |\alpha| \leq m.$$

Далее, мы имеем

$$D^\alpha g_\delta(x) = \sum_{\mu + \nu = \alpha} \binom{\alpha}{\nu} \delta^{-|\nu|} (D^\nu \eta) \left(\frac{x}{\delta} \right) (D^\mu f)(x).$$

Поскольку $\eta(x) = 1$, если $|x| \geq 1$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\nu \eta(x)| = M_\nu < \infty.$$

Следовательно,

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \leq M \sum_{\mu + \nu = \alpha} \delta^{-|\nu|} |D^\mu f(x)|, \quad \text{где } M = \max_{\nu} \binom{\alpha}{\nu} M_\nu.$$

Функция $D^\mu f$ является $(m - |\mu|)$ -плоской в 0 , так что

$$\sup_{|x| \leq \delta} |D^\mu f(x)| = o(\delta^{m-|\mu|}) \text{ при } \delta \rightarrow 0;$$

значит,

$$\sup_{|x| \leq \delta} |D^\alpha g_\delta(x)| = o\left(\sum_{\mu + \nu = \alpha} \delta^{m-|\mu|-|\nu|}\right) = o(1), \text{ если } |\alpha| \leq m. \blacktriangleright$$

1.5.3. ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле достаточно предполагать, что $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ и является m -плоской в 0 . Функция g из леммы 1.5.2, в частности, является плоской в 0 .

1.5.4. ТЕОРЕМА БОРЕЛЯ. Для любых наперед заданных действительных констант c_α , где α пробегает все наборы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из n неотрицательных целых чисел, существует такая функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что

$$\frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) = c_\alpha.$$

Другими словами, отображение пространства $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в кольцо формальных степенных рядов от n переменных, при котором $f \mapsto T(f)$, является сюръективным, т. е. отображением на.

◀ Пусть

$$T_m(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha.$$

Очевидно, функция $T_{m+1} - T_m$ является m -плоской в 0 ; значит, по лемме 1.5.2, существует $g_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная нулю в окрестности 0 и такая, что

$$\|T_{m+1} - T_m - g_m\|_m^{\mathbb{R}^n} < 2^{-m}.$$

Очевидно, что функция

$$f = T_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (T_{m+1} - T_m - g_m) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Далее, для любого $k > 0$ сумма $\sum_{m \geq k} (T_{m+1} - T_m - g_m)$ является k -плоской в 0. Следовательно,

$$T^k(f) = T^k\left(T_0 + \sum_{m=0}^{k-1} (T_{m+1} - T_m - g_m)\right) = T_k. \blacktriangleright$$

Эта теорема Бореля является весьма частным случаем теорем Уитни [1] о дифференцируемых функциях на замкнутых множествах. Мы сформулируем без доказательства одну из главных теорем Уитни в этом направлении. Элегантное ее доказательство, основанное на предложенных Глезером [1] упрощениях, приведено в книге Мальгранжа [2].

1.5.5. ТЕОРЕМА УИТНИ О ПРОДОЛЖЕНИИ. Часть 1. Пусть k — целое положительное число, Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и X — замкнутое подмножество Ω . Предположим, что для каждого набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из n неотрицательных целых чисел, $|\alpha| \leq k$, задана непрерывная функция f_{α} на X . Тогда для существования функции $f \in C^k(\Omega)$, такой, что $D^{\alpha}f|_X = f_{\alpha}$, $|\alpha| \leq k$, необходимо и достаточно, чтобы для любого α , $|\alpha| \leq k$, выполнялось равенство

$$f_{\alpha}(x) = \sum_{|\beta| \leq k - |\alpha|} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y) (x-y)^{\beta} + o(|x-y|^{k-|\alpha|})$$

равномерно на компактных подмножествах X при $|x-y| \rightarrow 0$.

1.5.6. ТЕОРЕМА УИТНИ О ПРОДОЛЖЕНИИ. Часть 2. Для заданных при всех α непрерывных функций f_{α} на X продолжение $f \in C^{\infty}(\Omega)$, такое, что $D^{\alpha}f|_X = f_{\alpha}$ для всех α , существует в том и только в том случае, когда для любого целого $m > 0$ и любого компакта $K \subset X$ выполняется равенство

$$f_{\alpha}(x) = \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} f_{\alpha+\beta}(y) (x-y)^{\beta} + o(|x-y|^m)$$

равномерно при $|x-y| \rightarrow 0$, $x, y \in K$.

Теорема Бореля является частным случаем теоремы 1.5.6, когда $X = \{0\}$ состоит из одной точки.

§ 1.6. Теорема Уитни о приближении

Начнем с леммы.

1.6.1. ЛЕММА. Пусть $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq k < \infty$. Для $\lambda > 0$ положим

$$\begin{aligned} I_\lambda(f)(x) &\equiv g_\lambda(x) = \\ &= c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\{-\lambda[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]\} dy = \\ &\equiv c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp\{-\lambda\|x - y\|^2\} dy, \end{aligned}$$

где $c = \pi^{-n/2}$, так что

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|^2) dx = 1.$$

Тогда

$$\|g_\lambda - f\|_k^{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Отметим, что $g_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

◀ Имеем

$$g_\lambda(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \exp(-\lambda\|y\|^2) dy,$$

так что для $|\alpha| \leq k$

$$\begin{aligned} D^\alpha g_\lambda(x) &= c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x - y) \exp(-\lambda\|y\|^2) dy = \\ &= c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(y) \exp(-\lambda\|x - y\|^2) dy. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\} \exp(-\lambda\|x - y\|^2) dy.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ когда } \|x - y\| \leq \delta \text{ и } |\alpha| \leq k,$$

так как $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Более того, существует $M > 0$, такое, что

$$|D^\alpha f(y)| < M \text{ для всех } y, |\alpha| \leq k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & |D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| = \\ & = c\lambda^{n/2} \left| \left(\int_{\|x-y\| < \delta} + \int_{\|x-y\| \geq \delta} \right) \{D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)\} \exp(-\lambda\|x-y\|^p) dy \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \varepsilon c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda\|x-y\|^p) dy + 2Mc\lambda^{n/2} \int_{\|x-y\| \geq \delta} \exp(-\lambda\|x-y\|^p) dy. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\lambda\|x-y\|^p) dy = 1, \\ & c\lambda^{n/2} \int_{\|x-y\| \geq \delta} \exp(-\lambda\|x-y\|^p) dy \leq \\ & \leq e^{-\lambda\delta^{2/p}} c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\|x-y\|^p\right) dy = 2^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\delta^2\right). \end{aligned}$$

Это дает нам оценку

$$|D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon + M2^{1+n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\delta^2\right).$$

Так как для фиксированного $\delta > 0$ можно подобрать λ столь большим, что последний член справа станет $< \varepsilon$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \blacktriangleright$$

1.6.2. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРИБЛИЖЕНИИ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой функции $f \in C^k(\Omega)$, $0 \leq k < \infty$, любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset \Omega$ найдется многочлен $P(x)$ от $x_1, \dots, x_n$, такой, что

$$\|f - P\|_K^k < \varepsilon.$$

◀ Заменяя f на φf , где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ и $\varphi = 1$ в окрестности K (такая функция φ существует, согласно следствию 1.2.6), мы можем считать, что $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Тогда, по лемме 1.6.1, для данного $\varepsilon > 0$ можно подобрать столь большое λ , что если

$$I_\lambda(f)(x) \equiv g_\lambda(x) = c\lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp(-\lambda\|x-y\|^p) dy,$$

то

$$\|g_\lambda - f\|_K^k < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Далее,

$$\exp(-\lambda \|x - y\|^2) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (-\lambda)^p \|x - y\|^{2p}.$$

Поэтому если положить

$$Q_N(x, y) = \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} (-\lambda)^p \|x - y\|^{2p},$$

то $D^\alpha Q_N(x, y) \rightarrow D^\alpha \exp(-\lambda \|x - y\|^2)$ при $N \rightarrow \infty$

равномерно для x, y из любого компактного множества. Если мы положим

$$P_N(x) = c\lambda^{n/2} \int f(y) Q_N(x, y) dy,$$

то P_N будет многочленом и $\|g_\lambda - P_N\|_k \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. ►

1.6.3. Следствие. Если Ω_j — открытые множества и x_j — точки в $\mathbb{R}^n$ ($j = 1, 2$), то конечные линейные комбинации

$$\sum_{\mu} \varphi_{\mu}^{(1)}(x_1) \varphi_{\mu}^{(2)}(x_2),$$

где $\varphi_{\mu}^{(j)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, плотны в $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ при $0 \leq k \leq \infty$.

Так как топология на $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определяется сходимостью на компактных подмножествах, то, домножая $\varphi_{\mu}^{(j)}$ на подходящие C^∞ -функции с компактным носителем, мы получаем

1.6.4. Следствие. В обозначениях следствия 1.6.3 конечные линейные комбинации $\sum_{\mu} \varphi_{\mu}^{(1)}(x_1) \varphi_{\mu}^{(2)}(x_2)$, где $\varphi_{\mu}^{(j)} \in C_0^\infty(\Omega_j)$, плотны в $C^k(\Omega_1 \times \Omega_2)$ для всех k , $0 \leq k \leq \infty$.

Теперь мы займемся теоремой Уитни о приближении [1], играющей большую роль при детальном изучении дифференцируемых и аналитических многообразий.

1.6.5. ТЕОРЕМА УИТНИ О ПРИБЛИЖЕНИИ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$. Пусть η — непрерывная функция в Ω , $\eta(x) > 0$ для всех $x \in \Omega$. Тогда существует $\mathbb{R}$ -аналитическая функция g в Ω , такая, что

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| < \eta(x) \text{ при } 0 \leq |\alpha| \leq \min\left(k, \frac{1}{\eta(x)}\right)$$

(естественно, $\min(\infty, a) = a$, если $a \in \mathbb{R}$).

Начнем с небольшой переформулировки результата.

1.6.6. Замечание. Пусть $\{K_p\}$ — последовательность компактных подмножеств Ω , такая, что $K_0 = \emptyset$, $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$ и $\bigcup K_p = \Omega$. Если $\{e_p\}$ — последовательность (строго) положительных чисел, то существует такая непрерывная функция η , что $\eta(x) > 0$ для всех x и $\eta(x) < e_p$, когда $x \in K_{p+1} \setminus K_p$, $p \geq 0$.

Поэтому теорему 1.6.5. можно сформулировать следующим образом.

1.6.7. Теорема. Пусть Ω открыто в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$. Пусть $\{K_p\}$ — последовательность компактных подмножеств Ω , такая, что $K_0 = \emptyset$, $K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}$ и $\bigcup K_p = \Omega$. Пусть $\{n_p\}$ — произвольная последовательность положительных целых чисел и $m_p = \min(k, n_p)$. Наконец, пусть $\{e_p\}$ — произвольная последовательность положительных чисел. Тогда существует $\mathbb{R}$ -аналитическая функция g в Ω , такая, что для всякого $p \geq 0$

$$\|f - g\|_{m_p}^{K_{p+1} \setminus K_p} < e_p.$$

◀ Мы можем считать, что $m_{p+1} \geq m_p$ для всех $p \geq 0$. Напишем неравенство (1.1.10): если $\varphi, \psi \in C^{m_p}(\Omega)$ и $S \subset \Omega$, то

$$\|\varphi\psi\|_{m_p}^S \leq \|\varphi\|_{m_p}^S \|\psi\|_{m_p}^S.$$

Пусть $L_p = K_{p+1} \setminus K_p$ ($p \geq 0$). Пусть $\varphi_p \in C^\infty(\Omega)$ таковы, что $\text{supp } \varphi_p$ — компакты из Ω , $\varphi_p(x) = 0$, если x лежит в окрестности K_{p-1} , и $\varphi_p(x) = 1$, если x лежит в некоторой окрестности $\overline{L}_p$. (Такие φ_p существуют согласно следствию 1.2.6.) Положим

$$M_p = 1 + \|\varphi_p\|_{m_p}^2.$$

Пусть $\delta_p > 0$ подобраны так, что

$$(1.6.8) \quad 2\delta_{p+1} \leq \delta_p, \quad \sum_{q \geq p} \delta_q M_{q+1} \leq \frac{1}{4} e_p \quad \text{при } p \geq 0.$$

Как и в лемме 1.6.1, определим $I_\lambda(f)$ при $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$I_\lambda(f)(x) = c \lambda^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \exp(-\lambda \|x - y\|^2) dy,$$

где

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|^2) dx = 1.$$

По лемме 1.6.1, можно подобрать $\lambda_0 > 0$ так, чтобы функция $g_0 = I_{\lambda_0}(\varphi_0 f)$ удовлетворяла неравенству

$$\|g_0 - \varphi_0 f\|_{m_0}^{K_1} < \delta_0.$$

Определим теперь по индукции числа $\lambda_0, \dots, \lambda_p, \dots$ и функции $g_0, g_1, \dots, g_p, \dots$ следующим образом. Предположим, что $g_0, \dots, g_{p-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ уже заданы. По лемме 1.6.1, существует функция $l_p(\lambda_j, g_j)$, $j \leq p-1$, такая, что если $\lambda_p > l_p$ и $g_p = I_{\lambda_p}[\varphi_p(f - g_0 - \dots - g_{p-1})]$, то

$$(1.6.9) \quad \|g_p - \varphi_p(f - g_0 - \dots - g_{p-1})\|_{m_p}^{K_{p+1}} < \delta_p.$$

Так как g_p зависит только от λ_p и $g_0, \dots, g_{p-1}$, то мы видим, что l_p зависит только от $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$.

Так как $\varphi_p = 0$ в окрестности K_{p-1} , то из (1.6.9) вытекает, в частности, что

$$(1.6.10) \quad \|g_p\|_{m_p}^{K_{p-1}} < \delta_p;$$

Поскольку $\varphi_p = 1$ в окрестности $\bar{L}_p$, то, кроме того,

$$(1.6.11) \quad \|f - g_0 - \dots - g_p\|_{m_p}^{L_p} < \delta_p, \quad L_p = K_{p+1} \setminus K_p.$$

Таким образом, если в (1.6.9) заменить p на $p+1$, то мы получим

$$\begin{aligned} \|g_{p+1}\|_{m_p}^{L_p} &\leq \left\| \varphi_{p+1} \left(f - \sum_0^p g_q \right) \right\|_{m_p}^{L_p} + \left\| g_{p+1} - \varphi_{p+1} \left(f - \sum_0^p g_q \right) \right\|_{m_p}^{L_p} \leq \\ &\leq \|\varphi_{p+1}\|_{m_p}^2 \cdot \left\| f - \sum_0^p g_q \right\|_{m_p}^{L_p} + \delta_{p+1} \leq M_{p+1} \delta_p + \delta_{p+1}, \end{aligned}$$

кроме того, мы имеем неравенство (1.6.10), откуда

$$\|g_{p+1}\|_{m_p}^{K_p} \leq \delta_{p+1};$$

поэтому

$$\|g_{p+1}\|_{m_p}^{K_{p+1}} \leq M_{p+1} \delta_p + 2\delta_{p+1} \leq M_{p+1} \delta_p + \delta_p \leq 2\delta_p M_{p+1}.$$

В частности,

$$\sum_{q > p} \|g_q\|_{m_p}^{K_{p+1}} \leq 2 \sum_{q > p} \delta_q M_{q+1} < \frac{1}{2} \varepsilon_p.$$

Отсюда следует, что

$$g = \sum_{q=0}^{\infty} g_q \in C^{m_p}(\Omega) \text{ для всех } p.$$

Далее, согласно (1.6.11),

$$\|f - g\|_{m_p}^{L_p} \leq \left\| f - \sum_0^p g_q \right\|_{m_p}^{L_p} + \left\| \sum_{q>p} g_q \right\|_{m_p}^{L_p} < \delta_p + \frac{1}{2} \varepsilon_p < \varepsilon_p.$$

Таким образом, если последовательность $\{\lambda_p\}$ такова, что $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$, последовательность $\{g_p\}$ определена описанным выше индуктивным процессом и $g = \sum g_p$, то

$$\|f - g\|_{m_p}^{K_{p+1} \setminus K_p} < \varepsilon_p.$$

Теперь нам надо показать, что если $\lambda_p > l_p(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1})$ выбрать подходящим образом, то функция g будет аналитической. По определению,

$$\begin{aligned} g_p(x) &= c\lambda_p^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_p(y) \left(f(y) - \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y) \right) \exp(-\lambda_p \|x - y\|^2) dy = \\ &= c\lambda_p^{n/2} \int_{\text{supp } \Phi_p} \dots \end{aligned}$$

Так как интегрирование ведется по компактному множеству и $\exp(-\lambda \|x - y\|^2)$ аналитична по x , то g_p аналитична в $\mathbb{R}^n$ при любом p . Пусть теперь $2\rho_p$ равно расстоянию от K_p до $\Omega \setminus K_{p+1}$. Очевидно, $\rho_p > 0$.

Пусть U_p — открытое множество в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$, $U_p \supset K_p$, причем если $z \in U_p$, а $y \in \Omega \setminus K_{p+1}$, то

$$\text{Re}((z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2) > \rho_p.$$

Ясно, что g_p является сужением на $\mathbb{R}^n$ целой функции

$$\begin{aligned} h_p(z) &= c\lambda_p^{n/2} \int_{\text{supp } \Phi_p} \Phi_p(y) \times \\ &\times \left(f(y) - \sum_{q=0}^{p-1} g_q(y) \right) \exp(-\lambda_p [(z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2]) dy. \end{aligned}$$

Далее, так как $\text{supp } \Phi_q \subset \Omega \setminus K_{p+1}$, если $q > p + 1$, то интеграл, определяющий g_q , $q > p + 1$, можно заменить интегралом по $\Omega \setminus K_{p+1}$. Это показывает, что для $z \in U_p$

$$\begin{aligned} (1.6.12) \quad |h_q(z)| &\leq c\lambda_q^{n/2} \exp(-\lambda_q \rho_p) H_q(g_0, \dots, g_{q-1}) = \\ &= c\lambda_q^{n/2} H_q \exp(-\lambda_q \rho_p), \end{aligned}$$

где H_q зависит только от $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}$, поскольку g_k зависит только от λ_j с $j \leq k$. Мы можем по индукции подобрать числа $\lambda_q > I_q(\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1})$ так, чтобы

$$\sum \lambda_q^{n/2} H_q \exp(-\lambda_q \rho) < \infty \text{ для любого } \rho > 0.$$

(Для этого достаточно брать λ_q такими, что $\lambda_q^{n/2} H_q \exp(-\lambda_q/q) < q^{-2}$.) При таком выборе последовательности $\{\lambda_q\}$ из (1.6.12) следует, что ряд

$$h(z) = \sum h_q(z)$$

сходится равномерно на U_p для любого p ; очевидно, $U = \bigcup U_p$ — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $U \cap \mathbb{R}^n = \Omega$; функция h голоморфна в U по теореме Вейерштрасса 1.1.3. Ее сужение на Ω , равное g , является поэтому $\mathbb{R}$ -аналитической функцией в Ω . ►

§ 1.7. Теорема о приближении для голоморфных функций

Вопросы приближения голоморфными функциями намного сложнее тех, с которыми мы имели дело в § 1.6. Прежде всего, так как равномерный предел голоморфных функций также является голоморфной функцией, то самое большее, на что мы можем надеяться, — это приближение голоморфных функций многочленами от комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$. Однако имеется ряд геометрических и аналитических условий на открытые множества $U \subset \mathbb{C}^n$, необходимых для того, чтобы любая голоморфная в U функция приближалась многочленами.

Простейший пример области, где приближение невозможно, — это область $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$: функцию z^{-1} нельзя приблизить в $\mathbb{C}^*$ многочленами от z . В случае одного переменного упомянутые ограничения являются чисто топологическими (см. теоремы 1.7.2 и 3.10.11), однако при $n > 1$ это уже не так.

1.7.1. Определение. Открытое множество $U \subset \mathbb{C}^n$ называется областью Рунге, если всякую голоморфную в U функцию можно приближать многочленами от $z_1, \dots, z_n$ равномерно на компактных подмножествах U .

Следующая теорема содержится в более общей теореме, доказываемой в гл. 3 (см. § 3.10). Простое прямое доказательство, основанное на интегральной формуле Коши, можно найти, например, в книге Хёрмандера [4].

1.7.2. Теорема Рунге. Открытое связное множество $U \subset \mathbb{C}$ является областью Рунге тогда и только тогда, когда всякая связная компонента U односвязна.

Пусть теперь U — открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция ($\lambda(z) > 0$ для всех $z \in U$). Пусть $dv = dv_z$

обозначает меру Лебега в $\mathbb{C}^n$ (с переменными $z_1, \dots, z_n$) и $\mathcal{H}(\lambda)$ — множество голоморфных в U функций, для которых

$$\int_U |f(z)|^2 \lambda(z) dv < \infty.$$

1.7.3. ЛЕММА. Для $f, g \in \mathcal{H}(\lambda)$ положим

$$(f, g)_\lambda = (f, g) = \int_U f(z) \overline{g(z)} \lambda(z) dv.$$

Тогда $\mathcal{H}(\lambda)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением (f, g) .

Так как пространство $L^2(\lambda dv)$ квадратично интегрируемых функций по мере $\lambda(z) dv_z$ полно, то достаточно показать, что $\mathcal{H}(\lambda)$ замкнуто в $L^2(\lambda dv)$. Этот результат сразу вытекает из следующего предложения.

1.7.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\{f_p\}$ — последовательность элементов из $\mathcal{H}(\lambda)$ и

$$\int_U |f_p(z) - f_q(z)|^2 \lambda(z) dv_z \rightarrow 0 \quad \text{при } p, q \rightarrow \infty,$$

то $\{f_p\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах из U .

◀ Поскольку λ ограничена снизу на каждом компактном подмножестве из U положительной константой, мы можем считать, что на заданном компакте $\lambda \equiv 1$.

Если g голоморфна в окрестности замкнутого круга $\{z \in \mathbb{C}: |z - a| \leq \rho\}$, то из формулы Коши следует, что

$$g(a) = (\pi \rho^2)^{-1} \int_{|z| \leq \rho} g(a + z) dv.$$

Применяя эту формулу n раз, мы получим, что если $h(z_1, \dots, z_n)$ голоморфна в окрестности поликруга $|z_1 - a_1| \leq \rho, \dots, |z_n - a_n| \leq \rho$, то

$$h(a) = (\pi \rho^2)^{-n} \int_{|z| \leq \rho} h(a + z) dv.$$

Пусть K — компакт в U и $\rho > 0$ столь мало, что множество

$$K_\rho = \{z \in \mathbb{C}^n: \text{существует } a \in K, \text{ такая, что } |z - a| \leq \rho\}$$

является компактом в U . Если f голоморфна в U и $a \in K$, то

$$|f(a)| \leq (\pi \rho^2)^{-n} \int_{|z| \leq \rho} |f(a + z)| dv \leq (\pi \rho^2)^{-n} \int_{K_\rho} |f(z)| dv.$$

Если мы применим это неравенство к квадрату разности $(f_p - f_q)^2$, то получим наше предположение. ►

Пусть $\{\varphi_\nu\}$ — полная ортонормированная система в $\mathcal{H}(\lambda)$. Тогда если $f \in \mathcal{H}(\lambda)$, то

$$f = \sum c_\nu \varphi_\nu, \quad c_\nu = (f, \varphi_\nu),$$

где ряд сходится в $\mathcal{H}(\lambda)$. Из предложения 1.7.4 вытекает

1.7.5. Лемма. Если $\{\varphi_\nu\}$ — полная ортонормированная система в $\mathcal{H}(\lambda)$, то любую функцию $f \in \mathcal{H}(\lambda)$ можно приблизить равномерно на компактных подмножествах U конечными линейными комбинациями

$$\sum_{\nu=1}^N c_\nu \varphi_\nu, \quad c_\nu \in \mathbb{C}.$$

1.7.6. Предложение. Пусть U_j — открытые множества в $\mathbb{C}^{n_j}$ и λ_j — строго положительные функции в U_j ($j=1, 2$). Определим $\lambda_1 \times \lambda_2$ в $U_1 \times U_2$, полагая

$$(\lambda_1 \times \lambda_2)(z_1, z_2) = \lambda_1(z_1) \cdot \lambda_2(z_2).$$

Пусть $\{\varphi_\nu^{(j)}\}$ — полная ортонормированная система в $\mathcal{H}(\lambda_j)$. Тогда функции $\{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1) \cdot \varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)\}$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

◀ Достаточно показать, что если $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$ и

$$\int_{U_1 \times U_2} f(z_1, z_2) \overline{\varphi_{\nu_1}^{(1)}(z_1)} \overline{\varphi_{\nu_2}^{(2)}(z_2)} \lambda_1(z_1) \lambda_2(z_2) dv = 0 \quad \text{для всех } \nu_1, \nu_2$$

(где dv — мера Лебега в $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$), то $f \equiv 0$. Пусть dv_j — мера Лебега в $\mathbb{C}^{n_j}$. Сначала покажем, что если $a_1 \in U_1$, то функция

$$z_2 \mapsto f(a_1, z_2)$$

в U_2 принадлежит $\mathcal{H}(\lambda_2)$. В самом деле, из доказательства предложения 1.7.4 вытекает, что если $z_2 \in U_2$ и $\rho > 0$ достаточно мало, то

$$|f(a_1, z_2)|^2 \leq c^{-1} (\pi \rho^2)^{-n_1} \int_{|z_1 - a_1| \leq \rho} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1) dv_1,$$

где

$$c = \inf \lambda_1(z_1) \quad \text{для } |z_1 - a_1| \leq \rho,$$

и потому

$$\begin{aligned} \int_{U_2} |f(a_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2 &\leq \\ &\leq c^{-1} (\pi \rho^2)^{-n_1} \int_{U_1 \times U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_1(z_1) \lambda_2(z_2) dv < \infty. \end{aligned}$$

Мы утверждаем теперь, что для любого v_2 функция

$$g(z_1) = g^{(v_2)}(z_1) = \int_{U_2} f(z_1, z_2) \overline{\Phi_{v_2}^{(2)}(z_2)} \lambda_2(z_2) dv_2$$

(которая, как мы показали выше, определена корректно) принадлежит $\mathcal{H}(\lambda_1)$. Прежде всего, $g(z_1)$ голоморфна в U_1 , так как если $\{K_p\}$ — последовательность компактов, исчерпывающих U_2 , то последовательность

$$\int_{K_p} f(z_1, z_2) \overline{\Phi_{v_2}^{(2)}(z_2)} \lambda_2(z_2) dv_2$$

сходится к $g(z_1)$ равномерно на компактных подмножествах U_1 , как в предложении 1.7.4. Далее, по неравенству Шварца,

$$|g(z_1)|^2 \leq \int_{U_1} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2 \cdot \int_{U_2} |\Phi_{v_2}^{(2)}(z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2,$$

откуда

$$\int_{U_1} |g(z_1)|^2 \lambda_1(z_1) dv_1 \leq \int_{U_1} \left(\int_{U_2} |f(z_1, z_2)|^2 \lambda_2(z_2) dv_2 \right) \lambda_1(z_1) dv_1 < \infty,$$

поскольку $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. Таким образом, $g(z_1) \in \mathcal{H}(\lambda_1)$. По предложению, $g(z_1)$ ортогональна всем $\Phi_{v_1}^{(1)}(z_1)$ в $\mathcal{H}(\lambda_1)$; следовательно, $g(z_1) \equiv 0$. Значит, для каждого фиксированного z_1 функция $f(z_1, z_2)$ ортогональна в $\mathcal{H}(\lambda_2)$ всем $\Phi_{v_2}^{(2)}(z_2)$, откуда следует, что $f(z_1, z_2) \equiv 0$. ►

1.7.7. ТЕОРЕМА. Если U_j — открытые множества в $\mathbb{C}^{n_j}$ ($j = 1, 2$), то конечные линейные комбинации

$$\sum_v \Phi_v^{(1)}(z_1) \Phi_v^{(2)}(z_2),$$

где $\Phi_v^{(j)}(z_j)$ голоморфны в U_j , плотны в пространстве голоморфных в $U_1 \times U_2$ функций относительно топологии сходимости на компактах.

◄ Пусть $f(z_1, z_2)$ голоморфна в $U_1 \times U_2$. Тогда существует (строго) положительная непрерывная функция $\eta: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, такая, что $f \in \mathcal{H}(\eta)$, т. е.

$$\int_{U_1 \times U_2} |f|^2 \eta dv < \infty.$$

Пусть $\{K_p^{(j)}\}$ — компактные множества в U_j , такие, что

$$K_p^{(j)} \subset K_{p+1}^{(j)}, \quad \bigcup K_p^{(j)} = U_j.$$

Тогда

$$\bigcup_p K_p^{(1)} \times K_p^{(2)} = U_1 \times U_2.$$

Пусть $0 < \varepsilon_p < 1$ таковы, что $\eta(z_1, z_2) \geq \varepsilon_p$, когда $(z_1, z_2) \in K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}$. Пусть λ_j — (строго) положительная непрерывная в U_j функция, такая, что $\lambda_j(z_j) \leq \varepsilon_p$, если $z_j \in K_p^{(j)} \setminus K_{p-1}^{(j)}$ (о существовании таких функций см. замечание 1.6.6). Так как

$$(K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}) \setminus (K_{p-1}^{(1)} \times K_{p-1}^{(2)}) = K_p^{(1)} \times (K_p^{(2)} \setminus K_{p-1}^{(2)}) \cup (K_p^{(1)} \setminus K_{p-1}^{(1)}) \times K_p^{(2)},$$

то отсюда тривиально следует, что если

$$(z_1, z_2) \in (K_p^{(1)} \times K_p^{(2)}) \setminus (K_{p-1}^{(1)} \times K_{p-1}^{(2)}),$$

то $\lambda_1(z_1) \lambda_2(z_2) \leq \varepsilon_p \leq \eta(z_1, z_2)$.

Поэтому мы имеем

$$\lambda_1(z_1) \lambda_2(z_2) \leq \eta(z_1, z_2) \text{ в } U_1 \times U_2;$$

следовательно, $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

Если теперь $\{\varphi_{v_i}^{(j)}\}$ — полная ортонормированная система в $\mathcal{H}(\lambda_j)$, то произведения $\varphi_{v_1}^{(1)}(z_1) \varphi_{v_2}^{(2)}(z_2)$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$. Так как $f \in \mathcal{H}(\lambda_1 \times \lambda_2)$, то по лемме 1.7.5 существуют комплексные константы $c_{v_1 v_2}$, такие, что конечные линейные комбинации вида

$$\sum c_{v_1 v_2} \varphi_{v_1}^{(1)}(z_1) \varphi_{v_2}^{(2)}(z_2)$$

приближают f равномерно на компактных подмножествах из $U_1 \times U_2$. ►

1.7.8. Следствие. Если U_j — области Рунге в $\mathbb{C}^{n_j}$ ($j=1, 2$), то $U_1 \times U_2$ — область Рунге в $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$. В частности, если $U_1, \dots, U_n$ — односвязные открытые множества в $\mathbb{C}$, то $U_1 \times \dots \times U_n$ — область Рунге в $\mathbb{C}^n$.

В дальнейшем мы изучим более глубокие свойства областей Рунге в $\mathbb{C}^n$.

§ 1.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.8.1. Лемма. Пусть I — интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0, и пусть $w: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция. Пусть $M, \eta \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\eta > 0$ и для $t \in I$

$$(1.8.2) \quad w(t) \leq M \int_0^t w(s) ds + \eta.$$

Тогда $w(t) \leq \eta e^{M|t|}$ для всех $t \in I$.

◀ Пусть сначала $t \geq 0$. Мы имеем

$$e^{Mt} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-Mt} \int_0^t w(s) ds \right\} = w(t) - M \int_0^t w(s) ds \leq \eta,$$

откуда

$$e^{-Mt} \int_0^t w(s) ds \leq \eta \int_0^t e^{-Ms} ds = \frac{\eta}{M} (1 - e^{-Mt}).$$

Комбинируя это соотношение с (1.8.2), мы получаем неравенство

$$w(t) \leq \eta e^{Mt} \quad (\text{так как } M > 0).$$

Если $t < 0$, положим $\tau = -t > 0$. Тогда

$$w(-\tau) \leq -M \int_{-\tau}^0 w(s) ds + \eta = M \int_0^{\tau} w(-s) ds + \eta$$

и, как мы уже видели, $w(-\tau) \leq \eta e^{M\tau}$, т. е. $w(t) \leq \eta e^{M|t|}$ также и при $t < 0$. ▶

1.8.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ω, Ω' — подмножества $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ соответственно и $f: \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^p$ — некоторое отображение. Мы говорим, что f удовлетворяет условию Липшица по $x \in \Omega$ на множестве $S \times S' \subset \Omega \times \Omega'$ ($S \subset \Omega, S' \subset \Omega'$) равномерно по $x' \in S'$, если существует число $M > 0$, такое, что

$$\|f(x, x') - f(y, x')\| \leq M \|x - y\|$$

для всех $(x, x'), (y, x') \in S \times S'$.

1.8.4. ТЕОРЕМА. Пусть Ω, Ω' — открытые множества в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ соответственно и I — открытый интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0. Пусть

$$f: \Omega \times I \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

— непрерывное отображение; обозначим точку в $\Omega \times I \times \Omega'$ через (x, t, α) . Предположим, что для любых компактов $K \subset \Omega, K' \subset \Omega'$ функция f удовлетворяет условию Липшица по x на $K \times I \times K'$ равномерно по t, α .

Тогда для любого данного $x_0 \in \Omega$ и компакта $K' \subset \Omega'$ существует интервал $I_0 = \{t: |t| < \varepsilon\}$ и для любого $\alpha \in K'$ существует единственное C^1 -отображение $I_0 \rightarrow \Omega, t \mapsto x(t, \alpha)$, такое, что

$$(1.8.5) \quad f(x(t, \alpha), t, \alpha) = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \alpha), \quad x(0, \alpha) = x_0.$$

Кроме того, отображение $I_0 \times K' \rightarrow \Omega$, при котором $(t, \alpha) \mapsto x(t, \alpha)$, непрерывно.

◀ Пусть $M > 0$ таково, что при $x, y \in K$, $\alpha \in K'$ мы имеем

$$\|f(x, t, \alpha) - f(y, t, \alpha)\| \leq M \|x - y\|.$$

Пусть x_0 — внутренняя точка K и $r > 0$ столь мало, что

$$\Omega_0 = \{x: \|x - x_0\| \leq r\} \subset K.$$

Пусть $\|f\| < C$ на $\Omega_0 \times I \times K'$. Подберем $\varepsilon' > 0$ таким, чтобы $\{t: |t| \leq \varepsilon'\} \subset I$, и положим

$$I_0 = \{t: |t| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon = \min(\varepsilon', r/C)$. Положим $x_0(t, \alpha) \equiv x_0$, а отображение $x_n: I_0 \times K' \rightarrow \mathbb{R}^n$ для $n > 0$ определим по формуле

$$(1.8.6) \quad x_n(t, \alpha) = x_0 + \int_0^t f(x_{n-1}(s, \alpha), s, \alpha) ds.$$

Мы утверждаем, что $x_n(t, \alpha) \in \Omega_0$, если $(t, \alpha) \in I_0 \times K'$. Действительно, для $n = 0$ этот факт тривиален. Если он уже доказан для x_{n-1} , то

$$\left\| \int_0^t f(x_{n-1}(s, \alpha), s, \alpha) ds \right\| \leq C |t| < C\varepsilon \leq r,$$

откуда

$$\|x_n(t, \alpha) - x_0\| < r.$$

Кроме того, мы имеем

$$\|x_{n+1}(t, \alpha) - x_n(t, \alpha)\| \leq \frac{1}{n!} M^n C |t|^n$$

при $n \geq 0$. В самом деле,

$$\|x_1 - x_0\| = \left\| \int_0^t f(x_0, s, \alpha) ds \right\| \leq |t| C,$$

и это совпадает с нашим неравенством при $n = 0$. Если это неравенство справедливо при $n = m$, то

$$\begin{aligned} \|x_{m+2}(t, \alpha) - x_{m+1}(t, \alpha)\| &= \\ &= \left\| \int_0^t \{f(x_{m+1}(s, \alpha), s, \alpha) - f(x_m(s, \alpha), s, \alpha)\} ds \right\| \leq \\ &\leq M \frac{1}{m!} M^m C \int_0^{|t|} s^m ds = \frac{1}{(m+1)!} M^{m+1} C |t|^{m+1}, \end{aligned}$$

а это как раз то, что нам надо. Значит, при $n \rightarrow \infty$ отображения $x_n(t, \alpha)$ равномерно стремятся к непрерывной функции $x(t, \alpha)$.

Более того, устремляя $n \rightarrow \infty$ в (1.8.6), мы получаем

$$x(t, \alpha) = x_0 + \int_0^t f(x(s, \alpha), s, \alpha) ds,$$

откуда следует, что при любом фиксированном α отображение $t \mapsto x(t, \alpha)$ принадлежит классу C^1 .

Наконец, если $u: I_0 \rightarrow \Omega$ для некоторого $\alpha_0 \in K'$ есть C^1 -отображение, такое, что

$$f(u(t), t, \alpha_0) = \frac{du}{dt}(t), \quad u(0) = x_0,$$

то мы положим

$$w(t) = x(t, \alpha_0) - u(t).$$

Тогда для $t \geq 0$ имеем

$$\|w(t)\| \leq \int_0^t \|f(x(s, \alpha_0), s, \alpha_0) - f(u(s), s, \alpha_0)\| ds \leq M \int_0^t \|w(s)\| ds,$$

а отсюда по лемме 1.8.1 с $\eta = 0$ следует, что $w(t) = 0$ при $t \geq 0$. Аналогичные рассуждения применимы и при $t < 0$; утверждение о единственности доказано. ►

1.8.7. Замечание. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$ и f удовлетворяет оценке

$$\|f(x, t, \alpha)\| \leq C_1 \|x\| + C_2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

в $\mathbb{R}^n \times I \times \Omega'$, то отображение x определено (и единственно) всюду в $I \times \Omega'$. Действительно, если мы определим x_n по формуле (1.8.6) для любого фиксированного α и $t \in I$, то для $t \geq 0$

$$\|x_n(t, \alpha)\| \leq M_1 \int_0^t \|x_{n-1}(s)\| ds + M_2,$$

где M_2 взято таким, что все еще

$$\|x_0\| \leq M_2 e^{M_1 t}.$$

По индукции получаем, что

$$\|x_n(t, \alpha)\| \leq M_2 e^{M_1 t},$$

и, значит, последовательность $\{x_n(t, \alpha)\}_{n \geq 0}$ равномерно ограничена (при $t \in I$, $t \geq 0$; аналогичные рассуждения показывают, что это верно и для $t < 0$). Применяя условие Липшица для f , мы можем показать, что

$$\|x_n(t, \alpha) - x_{n+1}(t, \alpha)\| \leq \frac{1}{n!} C M^n |t|^n, \quad n \geq 0,$$

а затем повторить доказательство теоремы 1.8.4. В частности, если f линейно по x , то решение уравнения (1.8.5) существует в $I \times \Omega'$. ►

1.8.8. ТЕОРЕМА. Пусть обозначения остаются теми же, что в теореме 1.8.4, и пусть I — открытый интервал, содержащий замыкание I . Предположим, что $f \in C^k(\Omega \times I \times \Omega')$, $k \geq 1$ (в частности, f удовлетворяет условию Липшица, как в теореме 1.8.4). Тогда решение x уравнения (1.8.5) принадлежит $C^k(I_0 \times \dot{K}')$.

◄ Пусть $U' = \dot{K}'$. Покажем сначала, что если $f \in C^1(\Omega \times I \times \Omega')$, то $x \in C^1(I_0 \times U')$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, то достаточно показать, что частные производные

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \dots, m,$$

существуют и непрерывны в $I_0 \times U'$, так как, согласно (1.8.5), $\partial x / \partial t$ существует и непрерывна. Будем считать, что $t \geq 0$. При фиксированных t, α пусть $h_{t, \alpha}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть отображение $x \mapsto f(x, t, \alpha)$, и пусть

$$A(t, \alpha) = (dh)(x(t, \alpha)) = (d_x f)(x(t, \alpha), t, \alpha);$$

$A(t, \alpha)$ — линейное преобразование $\mathbb{R}^n$ в себя. Пусть

$$B(t, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}(x(t, \alpha), t, \alpha);$$

B — непрерывное отображение $I_0 \times U'$ в $\mathbb{R}^n$.

Согласно замечанию 1.8.7, существует непрерывное отображение

$$y: I_0 \times U' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

(которое при каждом фиксированном α принадлежит C^1), такое, что

$$(1.8.9) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = A(t, \alpha)y + B(t, \alpha), \quad y(0, \alpha) = 0.$$

Для фиксированного $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in U'$ и достаточно малого действительного числа $h \neq 0$

$$\alpha^h = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j + h, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m),$$

положим, по определению,

$$u_h(t) = \frac{x(t, \alpha^h) - x(t, \alpha)}{h}.$$

По формуле Тейлора при $0 \leq s \leq t$ имеем

$$f(x(s, \alpha^h), s, \alpha^h) - f(x(s, \alpha), s, \alpha) = hA(s, \alpha)u_h(s) + hB(s, \alpha) + e(s, h),$$

где

$$e(s, h) = o(|h| \|u_h(s)\| + |h|)$$

равномерно по s при $h \rightarrow 0$. (Заметим, что $|h| \cdot \|u_h(s)\| + |h| = \|x(s, \alpha^h) - x(s, \alpha)\| + \|\alpha^h - \alpha\|$.) Учитывая уравнение (1.8.5), мы получаем отсюда, что

$$u_h(t) = \int_0^t \{A(s, \alpha) u_h(s) + B(s, \alpha) + \delta(s, h)\} ds,$$

где

$$\delta(s, h) = \frac{1}{h} \varepsilon(s, h) = o(\|u_h(s)\| + 1).$$

Из этого следует существование константы $C_1 > 0$, такой, что

$$\|u_h(t)\| \leq C_1 \int_0^t \|u_h(s)\| ds + C_1;$$

поэтому, по лемме 1.8.1, $\|u_h(t)\|$ ограничены равномерно по t (интервал I ограничен) при $h \rightarrow 0$. Значит, $\delta(s, h) \rightarrow 0$ равномерно по s при $h \rightarrow 0$.

Пусть теперь $z_h(t) = u_h(t) - y(t, \alpha)$. Тогда, поскольку

$$y(t, \alpha) = \int_0^t \{A(s, \alpha) y(s, \alpha) + B(s, \alpha)\} ds,$$

мы имеем

$$z_h(t) = \int_0^t A(s, \alpha) z_h(s) ds + \int_0^t \delta(s, h) ds.$$

Так как $\eta = \left\| \int_0^t \delta(s, h) ds \right\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то из леммы 1.8.1 видно, что $z_h(t) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Это означает в точности, что $(\partial x / \partial \alpha_i)(\alpha)$ существует и равна $y(t, \alpha)$. Следовательно $x \in C^1(I_0 \times U')$, как и утверждалось.

Окончание доказательства теоремы 1.8.8 мы проведем индукцией по k . Если $f \in C^k(\Omega \times J \times \Omega')$, $k > 1$, и если $x \in C^{k-1}(I_0 \times U')$, то очевидно, что $A(t, \alpha)$, $B(t, \alpha)$ суть C^{k-1} -отображения. Так как y удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t, \alpha) y + B(t, \alpha),$$

то из предположения индукции вытекает, что $y \in C^{k-1}(I_0 \times U')$. Поскольку выполнены соотношения

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}(t, \alpha) = y(t, \alpha), \quad \frac{\partial x}{\partial t} = f(x(t, \alpha), t, \alpha),$$

все первые производные x принадлежат C^{k-1} , так что x принадлежит $C^k(I_0 \times U')$. ►

Аналогичные результаты справедливы и для голоморфных функций.

1.8.10. ТЕОРЕМА. Пусть U, U' — открытые множества в $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ соответственно и $D = \{z: |z| < \rho\}$ — круг в комплексной плоскости. Если $f: U \times D \times U' \rightarrow \mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение, то для любого $x_0 \in U$ и любого компакта $K' \subset U'$ найдется $\delta > 0$, такое, что для всех $\alpha \in K'$ существует единственное голоморфное отображение

$$x: z \mapsto x(z, \alpha), \quad D_\delta \rightarrow U,$$

где $D_\delta = \{z: |z| < \delta\}$, для которого

$$\frac{\partial x}{\partial z} = f(x(z, \alpha), z, \alpha), \quad x(0, \alpha) = x_0.$$

Кроме того, отображение $(z, \alpha) \mapsto x(z, \alpha)$ из $D_\delta \times K'$ в U голоморфно.

◀ Доказательство такое же, как в теореме 1.8.4: мы определяем

$$x_n(z, \alpha) = x_0 + \int_0^z f(x_{n-1}(\zeta, \alpha), \zeta, \alpha) d\zeta,$$

где интегрирование ведется по отрезку, соединяющему 0 и z . Замечая, что условие Липшица автоматически выполняется, мы доказываем, что

$$\|x_{n+1}(z, \alpha) - x_n(z, \alpha)\| \leq \frac{1}{n!} M^n C |z|^n;$$

очевидно, всякое x_n голоморфно; следовательно, таково и предельное отображение $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Единственность доказывается, как и раньше. ▶

1.8.11. СЛЕДСТВИЕ. Если в теореме 1.8.4 отображение f является $\mathbb{R}$ -аналитическим, то решение x уравнения (1.8.5) тоже $\mathbb{R}$ -аналитично в $I_0 \times U'$, где I_0 — некоторый открытый интервал, содержащий 0.

◀ Мы можем выбрать открытые множества W, D, W' в $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^m$ соответственно, такие, что $W \cap \mathbb{R}^n = \Omega, D \cap \mathbb{R} = I, W' \cap \mathbb{R}^m = \Omega'$ и f допускает продолжение в $W \times D \times W'$ до голоморфного отображения (которое мы опять обозначим через f). Тогда решение w уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f(w(z, \alpha), z, \alpha), \quad w(0) = x_0,$$

определено и голоморфно в окрестности $I_0 \times U'$, где I_0 — некоторый интервал действительной оси, содержащий 0. Кроме того, ото-

бражение ω есть предел ω_n , определяемых по индукции соотношениями

$$\omega_0 \equiv x_0, \quad \omega_n(z, \alpha) = x_0 + \int_0^z f(\omega_{n-1}(\xi, \alpha), \xi, \alpha) d\xi,$$

и потому, очевидно, действительное при действительных z, α . Значит, его сужение на $I_0 \times U'$ аналитично в $I_0 \times U'$ и является тем решением, о котором идет речь. ►

1.8.12. ТЕОРЕМА. Пусть Ω, I, Ω' — те же, что в теореме 1.8.4, и $f: \Omega \times I \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть C^k -(соответственно $\mathbb{R}$ -аналитическое) отображение, $1 \leq k \leq \infty$. Тогда для любой точки $(u_0, u_0, \alpha_0, \xi_0) \in I \times I \times \Omega' \times \Omega$ найдутся окрестность $W = I \times I \times U' \times U$ и C^k -(соответственно $\mathbb{R}$ -аналитическое) отображение $x: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, такое, что

$$x(u, u, \alpha, \xi) = \xi, \quad \frac{\partial x}{\partial t}(t, u, \alpha, \xi) = f(x(t, u, \alpha, \xi), t, \alpha)$$

при $t, u \in I, \alpha \in U', \xi \in U$.

Другими словами, в окрестности данной точки $(u_0, u_0, \alpha_0, \xi_0)$ решение уравнения (1.8.5), которое принимает значение ξ в точке u , зависит дифференцируемым (соответственно аналитическим) образом от t, u, ξ , как и от всех параметров, входящих в отображение f .

◀ Рассмотрим окрестность Δ точки $(0, 0, u_0, \alpha_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times I \times \Omega' \times \Omega$ и C^k -(соответственно аналитическое) отображение $g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$, определяемое равенством

$$g(y, t, u, \alpha, \xi) = f(\xi + y, t + u, \alpha).$$

Если $y(t, u, \alpha, \xi)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = g(y, t, u, \alpha, \xi), \quad y(0, u, \alpha, \xi) = 0,$$

то

$$x(t, u, \alpha, \xi) = \xi + y(t - u, u, \alpha, \xi),$$

и наш результат вытекает из теоремы 1.8.8 и следствия 1.8.11. ►

1.8.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Изложенная выше теорема имеет аналог для голоморфных отображений, который мы здесь не формулируем.

Наконец, отметим, что теоремы 1.8.8 и 1.8.12 можно усилить следующим образом.

1.8.14. ТЕОРЕМА. Пусть Ω, I, Ω' те же, что в теореме 1.8.4, $f: \Omega \times I \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть C^k -(соответственно аналитическое) отображение и $I_1 \subset I, \Omega'_1 \subset \Omega'$ — связные открытые множества. Тогда если

$x: I_1 \times \Omega'_1 \rightarrow \Omega$ — непрерывное отображение, принадлежащее классу C^1 по t при фиксированном α ,

$$\frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial t} = f(x(t, \alpha), t, \alpha)$$

и $x(t_0, \alpha)$ принадлежит C^k (соответственно является аналитическим) для некоторого $t_0 \in I_1$, то $x: I_1 \times \Omega'_1 \rightarrow \Omega$ есть отображение класса C^k (соответственно аналитическое).

При доказательстве используется теорема 1.8.12. Детали мы опускаем.

МНОГООБРАЗИЯ

§ 2.1. Основные определения

2.1.1. Определение. Пусть V — хаусдорфово топологическое пространство. Мы говорим, что V есть *многообразие* (или C^0 -многообразие или локально евклидово пространство) *размерности* n , если у каждой точки $a \in V$ найдется открытая окрестность, гомеоморфная открытому множеству в $\mathbb{R}^n$.

2.1.2. Определение. Пусть V то же, что и выше, и $0 \leq k \leq \infty$. Мы говорим, что V является C^k -многообразием или (дифференцируемым) многообразием класса C^k и размерности n , если задано семейство пар (U_i, φ_i) , где i пробегает множество индексов $\mathcal{I}$, U_i — открытые подмножества V и φ_i — гомеоморфизмы U_i на открытые множества в $\mathbb{R}^n$, причем выполняются следующие условия:

$$(a) \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i = V;$$

(b) для любых $i, j \in \mathcal{I}$, таких, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, отображение $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ принадлежит классу C^k .

Если $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ можно выбрать так, что, когда $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, отображения $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$ являются $\mathbb{R}$ -аналитическими, то мы говорим, что V есть *$\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие*.

Символом

$$\dim V = \dim_{\mathbb{R}} V$$

мы обозначаем размерность многообразия (см. замечание 2.1.4).

2.1.3. Определение. Две системы пар, (U_i, φ_i) и (U'_j, φ'_j) , удовлетворяющие условиям (a) и (b), называются *эквивалентными*, если их объединение тоже удовлетворяет этим условиям; легко проверить, что это есть отношение эквивалентности. Множество эквивалентных систем частично упорядочено по вложению и, значит, для любой указанной системы (U_i, φ_i) найдется — и притом единственная — максимальная система, которая содержит все системы, эквивалентные (U_i, φ_i) . Такие максимальные системы пар, удовлетворяющие условиям (a), (b) определения 2.1.2, называются *C^k -структурами* многообразия V . Элементы C^k -структуры называются *системами координат*. Если (U, φ) — система координат,

то U называется *координатной окрестностью*, а $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ (часто записывается как $x_1, \dots, x_n$) называются *координатами* в U . Указанные выше отображения $\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}$ называются *преобразованиями координат*.

Так как любую систему пар из определения 2.1.2 можно пополнить до единственной C^k -структуры, то мы можем говорить о системах координат и т. п. на C^k -многообразии, не описывая полностью его C^k -структуру. Открытое подмножество C^k -многообразия естественным образом снабжается индуцированной C^k -структурой.

2.1.4. Замечание. Размерность многообразия — это его инвариант (не зависящий от используемых локальных гомеоморфизмов). Это следует из теоремы Брауэра, которая утверждает, что непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^m$ только в том случае, когда $m = n$. Доказательство можно найти, например, в книге Гуревича и Волмэна [1]. Соответствующее утверждение об инвариантности для C^k -многообразий, $k \geq 1$, намного проще и будет доказано ниже.

Заметим, что из одной теоремы Дьедонне [1] (см. также Бурбаки [2]) вытекает эквивалентность для многообразия V следующих утверждений:

- 1) V паракомпактно, т. е. всякое открытое покрытие V имеет локально конечное измельчение;
- 2) всякая связная компонента V является счетным объединением компактов;
- 3) всякая связная компонента V имеет счетную базу открытых подмножеств.

2.1.5. Определение. Хаусдорфово топологическое пространство V называется *комплексным многообразием комплексной размерности n* , если задано семейство $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$, где φ_i — гомеоморфизм U_i на открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ голоморфны в $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ для всех i, j . *Комплексно аналитическую* (или просто комплексную) *структуру* определяем, как в 2.1.3. Мы обозначаем через $n = \dim V = \dim_{\mathbb{C}} V$ (комплексную) размерность V .

2.1.6. Определение. Если V есть C^k -многообразие, U — открытое подмножество V , то отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ называется *C^r -функцией* в U , если для любой системы координат (W, ψ) на V , такой, что $W \subset U$, функция

$$f \circ \psi^{-1}: \psi(W) \rightarrow \mathbb{R}$$

принадлежит классу C^r ($0 \leq r \leq k$). Множество C^r -функций на V обозначается символом $C^r(V)$. *Носитель* (обозначается $\text{supp } f$) C^r -функции f на V — это замыкание в V множества $\{x \in V: f(x) \neq 0\}$.

Множество всех $f \in C^r(V)$, для которых $\text{supp } f$ есть компакт, обозначается символом $C_0^r(V)$.

Пусть V, V' суть C^k -многообразия, $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}, \{(U'_j, \Phi'_j)\}_{j \in \mathcal{J}}$ — определяющие их C^k -структуры. Непрерывное отображение $f: V \rightarrow V'$ называется C^r -отображением ($0 \leq r \leq k$), если для любой пары систем координат (U_i, Φ_i) на V и (U'_j, Φ'_j) на V' , такой, что $f(U_i) \subset U'_j$, отображение $\Phi'_j \circ f \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_i) \rightarrow \Phi'_j(U'_j)$ принадлежит классу C^r . Множество C^r -отображений V в V' обозначается символом $C^r(V, V')$.

Голоморфные и $\mathbb{R}$ -аналитические функции и отображения на голоморфных и $\mathbb{R}$ -аналитических многообразиях определяются аналогично.

Пусть V, V' суть C^k -($\mathbb{R}$ - или $\mathbb{C}$ -аналитические) многообразия. Непрерывное отображение $f: V \rightarrow V'$ принадлежит классу C^k ($\mathbb{R}$ -аналитично, голоморфно) в том и только в том случае, когда выполняется следующее условие:

Для любого открытого подмножества $U' \subset V'$ и любой C^k -($\mathbb{R}$ -аналитической, голоморфной) функции g' на U' функция $g' \circ f$ является C^k -($\mathbb{R}$ -аналитической, голоморфной) функцией в $f^{-1}(U')$.

Если V, V' — некоторые C^k -многообразия и $f: V \rightarrow V'$ — гомеоморфизм на V' , такой, что f и f^{-1} суть C^k -отображения, то f называется C^k -дiffeоморфизмом (или диффеоморфизмом или C^k -изоморфизмом) многообразий V и V' . Многообразия V, V' называются диффеоморфными (C^k -диффеоморфными, C^k -изоморфными), если существует C^k -дiffeоморфизм $f: V \rightarrow V'$ на V' . Голоморфные (= комплексно аналитические) и $\mathbb{R}$ -аналитические изоморфизмы между соответствующими многообразиями определяются аналогично.

2.1.7. Примеры. (а) $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| = 1\}$ — одномерное многообразие класса C^∞ .

(б) Пусть V — некоторое C^k -многообразие и $\tilde{V}$ — хаусдорфово пространство. Пусть $p: \tilde{V} \rightarrow V$ — локальный гомеоморфизм, т. е. у каждой точки $a \in \tilde{V}$ существует такая окрестность U , что $p(U)$ открыто в V и $p: U \rightarrow p(U)$ — гомеоморфизм. Тогда на $\tilde{V}$ имеется единственная C^k -структура, в которой p является локальным C^k -дiffeоморфизмом (т. е. для любой точки $a \in \tilde{V}$ найдется такая окрестность U , что $p|_U: U \rightarrow p(U)$ есть C^k -дiffeоморфизм; заметим, что $p(U)$ открыто в V). Аналогичное замечание применимо к $\mathbb{R}$ -аналитическим и комплексным многообразиям.

(с) Если V, W — некоторые многообразия, то $V \times W$ наделяется естественной структурой C^k -многообразия, для которой проекции являются C^k -отображениями.

Ясно, что на любом комплексно аналитическом многообразии есть естественная $\mathbb{R}$ -аналитическая структура, на $\mathbb{R}$ -аналитическом многообразии — C^∞ -структура и на C^k -многообразии ($0 \leq k \leq \infty$) — C^r -структура, если $0 \leq r \leq k$. Обратно, из результатов Уитни [3] следует, что любое паракомпактное C^r -многообразие, $r \geq 1$, можно наделить $\mathbb{R}$ -аналитической структурой, совместной с заданной C^r -структурой. Далее, из теоремы Грауэрта [1] о вложении (см. § 2.15) и теоремы Уитни 1.6.5 о приближении вытекает, что эта структура единственна (с точностью до изоморфизмов; тождественное отображение не обязано быть изоморфизмом). Может случиться, что C^0 -многообразие нельзя снабдить C^1 -структурой (Кервер [1]), а если это удастся сделать, то такая структура может быть не единственной. Например, Милнор [1] показал, что на сфере S^7 (см. пример 2.5.6) можно определить, помимо ее естественной структуры, такую C^∞ -структуру, что между ними нет ни одного C^1 -дiffeоморфизма (заметим только, что тождественное отображение не является диффеоморфизмом различных структур).

Проблема существования и единственности комплексных структур — это проблема совсем другой природы; с ней связана обширная литература (см., в частности, Хопф [1], Кодaira и Спенсер [1]).

После результатов Милнора и Кервера было получено значительно больше информации относительно существования и единственности дифференциальных структур на топологических многообразиях. Несколько статей, посвященных этой проблеме, можно найти в Трудах международных математических конгрессов 1962 и 1966 гг.

Пусть V есть C^k -многообразие и $a \in V$. Рассмотрим все пары (f, U) , где U — открытое множество, содержащее a , и $f \in C^k(U)$. Мы назовем две такие пары эквивалентными, $(f, U) \sim (f', U')$, если найдется открытое множество $W \subset U \cap U'$, $a \in W$, такое, что $f|_W = f'|_W$. Очевидно, что это — отношение эквивалентности.

Класс эквивалентности называется *ростком* C^k -функций в точке a . Мы будем отождествлять росток с определяющей его C^k -функцией, если не возникает недоразумений.

2.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f класса C^k ($k \geq 1$), определенная в окрестности W точки a , называется *стационарной* в a , если существует система координат (U, φ) , $U \subset W$, $a \in U$, такая, что все первые частные производные функции $f \circ \varphi^{-1}$ в точке $\varphi(a)$ равны нулю. Росток C^k -функций стационарен в точке a , если в этом ростке найдется представитель (f, W) , такой, что f стационарна в a .

Заметим, что если росток C^k -функций стационарен в точке a , то любая определяющая его C^k -функция тоже стационарна в a .

Мы обозначаем через $C_{a,k}$ множество всех ростков C^k -функций в точке a , а через $S_{a,k}$ — подмножество ростков, стационарных в a . Пусть $m_{a,k}$ — множество всех C^k -ростков, равных нулю в точке a . Очевидно, $C_{a,k}$ — алгебра над $\mathbb{R}$; $S_{a,k}$ и $m_{a,k}$ — ее под-алгебры и $m_{a,k}$ — идеал в $C_{a,k}$. Это единственный максимальный идеал в $C_{a,k}$, так как любой элемент из $C_{a,k} \setminus m_{a,k}$ обратим. Кроме того, если $f, g \in m_{a,k}$, то $fg \in S_{a,k}$, и $S_{a,k}$ содержит все константы.

Когда нужно указывать зависимость этих множеств от многообразия V , мы обозначаем их соответственно $C_{a,k}(V)$, $S_{a,k}(V)$, $m_{a,k}(V)$.

Ростки C^k -функций в точке a мы иногда называем просто C^k -ростками в a ; C^k -ростки в a можно складывать, перемножать и комбинировать с C^k -отображениями в очевидном смысле. Далее, для C^k -ростка g в точке a корректно определяется его значение $g(a)$ в этой точке.

2.1.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V есть C^k -многообразие, $k \geq 1$. Векторное пространство $C_{a,k}/S_{a,k} = T_a^*(V)$ называется *пространством дифференциалов* (или *касательных векторов* или *ковекторов*) в точке a . Если $f \in C_{a,k}$, то его образ в $T_a^*(V)$ обозначается символом $(df)_a$.

Пространство $T_a(V)$, сопряженное к $T_a^*(V)$, которое можно отождествить с множеством $\mathbb{R}$ -линейных отображений $X: C_{a,k} \rightarrow \mathbb{R}$, равных нулю на $S_{a,k}$, называется *касательным пространством* к многообразию V в точке a . Элементы $T_a(V)$ называются *касательными векторами* в точке a .

Линейная над $\mathbb{R}$ функция $L: C_{a,k} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *производной*, если для любых $f, g \in C_{a,k}$ имеем

$$L(fg) = L(f)g(a) + f(a)L(g).$$

2.1.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Любой касательный вектор $X \in T_a(V)$ является производной на $C_{a,k}$.

◀ Если $f, g \in C_{a,k}$, то

$$\varphi = fg - f(a)g - fg(a) \in S_{a,k}$$

(так как, очевидно, $\varphi = (f - f(a))(g - g(a)) - f(a)g(a)$), и потому $X(\varphi) = 0$. Но это в точности означает, что

$$X(fg) = f(a)X(g) + X(f)g(a). \quad \blacktriangleright$$

Пусть $a \in V$ и (U, φ) — некоторая система координат, $a \in U$. Если $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и $x \in U$, положим $\varphi_j(x) = x_j$, $j = 1, \dots, n$.

Определим для каждого j касательный вектор $(\partial/\partial x_j)_a \in T_a(V)$, полагая

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(a)), \quad f \in C_{a,k}.$$

(Очевидно, что $(\partial/\partial x_j)_a$ — касательные векторы.)

2.1.11. Предложение. Векторы $(\partial/\partial x_i)_a, i=1, \dots, n$, образуют базис пространства $T_a(V)$; в частности $T_a(V)$ и $T_a^*(V)$ суть n -мерные векторные пространства и $T_a^*(V)$ является сопряженным к $T_a(V)$. Более того, если $X \in T_a(V)$, $f \in C_{a,k}$, то $(df)_a(X) = X(f)$. (Последнее замечание оправдывает используемые нами обозначения.)

◀ Для $f \in C_{a,k}$ определим $g \in C_{a,k}$ по формуле

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f.$$

Ясно, что $g \in S_{a,k}$; значит, если $X \in T_a(V)$, мы имеем $X(g) = 0$. Отсюда получаем, что

$$X(f) = \sum X(x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f,$$

т. е.
$$X = \sum X(x_j) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a,$$

а это и означает, что векторы $(\partial/\partial x_j)_a, 1 \leq j \leq n$, порождают $T_a(V)$.

Если $X = \sum \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a = 0$, то $\lambda_j = X(x_j) = 0$, так как $(\partial/\partial x_j)_a x_k = \delta_{jk}$ (символ Кронекера $\delta_{jk} = 0$, если $j \neq k$, и $= 1$, если $j = k$). Следовательно, векторы $(\partial/\partial x_j)_a$ линейно независимы. Последнее утверждение из 2.1.11 следует непосредственно из определения и из конечномерности $T_a(V)$. ►

Двойственным к этому результату является следующий. Как и прежде, мы полагаем $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, если $a \in V$ и (U, φ) — система координат, причем $a \in U$. Тогда $x_j \in C_{a,k}$, и потому определены ковекторы $(dx_j)_a \in T_a^*(V)$.

2.1.11'. Предложение. Дифференциалы $(dx_j)_a, 1 \leq j \leq n$, образуют базис пространства $T_a^*(V)$. Этот базис является двойственным к базису, указанному в предложении 2.1.11. Кроме того, если $f \in C_{a,k}$, то

$$(df)_a = \sum \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a f \right\} (dx_j)_a.$$

Это следует из того очевидного факта, что $(\partial/\partial x_j)_a$, примененное к $(dx_k)_a$ (т. е. $(\partial/\partial x_j)_a x_k$), равно δ_{jk} .

2.1.12. Замечание. Дифференциал $(df)_a$ можно определить и для комплексной C^k -функции f ; в этом случае он является элементом пространства $T_a(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Далее, для любого $X \in T_a(V)$ и любой комплексной функции f значение $(df)_a(X)$ есть комплексное число; более того, если мы запишем f в виде $f = f_1 + if_2$, где f_1, f_2 — действительные C^k -функции, то

$$(df)_a(X) = (df_1)_a(X) + i(df_2)_a(X).$$

Очень полезно для некоторых целей заменять $T_a(V)$, $T_a^*(V)$ на $T_a(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $T_a^*(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ и оперировать с комплекснозначными объектами. Когда мы будем поступать таким образом, эти комплексные пространства будут обозначаться символами $\mathfrak{T}_a(V)$ и $\mathfrak{T}_a^*(V)$ соответственно.

2.1.13. Замечание. Если V есть C^k -многообразие, $k \geq 1$, то оно, естественно, и C^1 -многообразие. Поэтому мы можем рассматривать множество $C_{a,1} = \{\text{ростки } C^1\text{-функций в точке } a\}$. Заметим, что любой касательный вектор $X \in T_a(V)$ продолжается до производной на $C_{a,1}$, равной нулю на $S_{a,1}$; это сразу следует из предложения 2.1.11. Заметим также, что если $1 \leq r \leq k$, то существует естественное включение $C_{a,k} \subset C_{a,r}$; $C_{a,k}$, конечно, — подалгебра $C_{a,r}$. Для любого ростка $f \in C_{a,r}$, $1 \leq r \leq k$, снова можно определить его образ $(df)_a$ в $T_a^*(V)$.

2.1.14. Лемма. Всякий росток $f \in S_{a,k}$ можно представить в виде

$$f = \sum_{j=1}^n g_j h_j + f(a),$$

где g_j, h_j принадлежат $C_{a,k-1}$ и равны нулю в точке a , т. е. $g_j, h_j \in m_{a,k-1}$ ($k \geq 1$),

◀ Очевидно, мы можем считать, что V — выпуклая окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$ и что $a = 0$. Тогда

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x), \quad g_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt.$$

Ясно, что $x_j \in m_{a,k}$ и $g_j \in C_{a,k-1}$. Кроме того,

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0,$$

так как f стационарна по предположению. ▶

2.1.15. Предложение. Пусть X — производная в $C_{a,k-1}$ ($k \geq 1$). Тогда ее сужение на $C_{a,k}$ есть касательный вектор. (X может и не быть касательным вектором на $C_{a,k-1}$; см. Папи [1].)

◀ Нам нужно показать, что $X(f) = 0$, если $f \in S_{a,k}$. Заметим сначала, что

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1) \cdot 1 + 1 \cdot X(1),$$

откуда следует, что $X(c) = 0$ для любой константы c . Далее, из леммы 2.1.14 вытекает, что если $f \in S_{a,k}$, то

$$f - f(a) = \sum_{j=1}^n g_j h_j,$$

где $g_j, h_j \in m_{a,k-1}$. Так как X — касательная в $C_{a,k-1}$, то

$$X(f) = \sum_{j=1}^n (X(g_j) h_j(a) + g_j(a) X(h_j)) = 0. \blacktriangleright$$

2.1.16. Предложение. Если V есть C^∞ -многообразие и $a \in V$, то росток $f \in C_{a,\infty}$ стационарен в точке a тогда и только тогда, когда $f - f(a) \in (m_{a,\infty})^2$ (квадрат идеала $m_{a,\infty}$). В частности, $T_a^*(V) = m_{a,\infty} / m_{a,\infty}^2$.

Это сразу следует из леммы 2.1.14.

Другой способ описания касательных векторов состоит в следующем. Пусть I — единичный отрезок $[0, 1]$ в $\mathbb{R}$ и $\gamma: I \rightarrow V$ — некоторая C^k -кривая (т. е. C^k -отображение, определенное в некоторой окрестности I в V). Касательная к кривой γ в точке $a = \gamma(0)$ — это элемент $X = X_\gamma \in T_a(V)$, определяемый формулой

$$X(f) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \Big|_{t=0}, \quad f \in C_{a,1}.$$

Непосредственно видно, что этим равенством определяется касательный вектор. Далее, мы имеем

2.1.17. Предложение. Любой элемент $X \in T_a(V)$ является касательной в точке a к некоторой C^k -кривой γ , такой, что $\gamma(0) = a$.

◀ Пусть (U, φ) — некоторая система координат, $a \in U$, $\varphi(a) = 0$ и $\varphi(U) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x_j| < 1, j = 1, \dots, n\}$.

Пусть $X = \sum_{j=1}^n a_j (\partial/\partial x_j)_a$, $a_j \in \mathbb{R}$. Пусть γ'_j есть C^k -функция в окрестности I , такая, что $|\gamma'_j(t)| < 1$ на I и $\gamma'_j(t) = a_j t$ для t из некоторой окрестности нуля. В качестве γ мы можем взять кривую $\varphi^{-1} \circ \gamma'$, где γ' — отображение $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$. ▶

§ 2.2. Касательное и кокасательное расслоения

В этом параграфе через V обозначается C^k -многообразие размерности n с $k \geq 1$. Пусть W — другое C^k -многообразие размерности n и $f: V \rightarrow W$ — некоторое C^k -отображение. Пусть $b = f(a)$.

Определим два $\mathbb{R}$ -линейных отображения (первое из них называется дифференциалом f или касательным отображением к f в точке a)

$$f_{*,a}: T_a(V) \rightarrow T_b(W), \quad f_a^*: T_b^*(W) \rightarrow T_a^*(V)$$

следующим образом. Если $X \in T_a(V)$ и $g \in C_{b,k}(W)$, положим

$$f_{*,a}(X)g = X(g \circ f).$$

(Так как $g \circ f \in S_{a,k}(V)$, если $g \in S_{b,k}(W)$, то это равенство определяет элемент из $T_b(W)$.) Если $\varphi \in C_{b,k}(W)$ имеет образ $d\varphi = (d\varphi)_b \in T_b^*(W)$, положим

$$f_a^*(d\varphi) = d(\varphi \circ f)_a.$$

(Этим определяется отображение $f_a^*: T_b^*(W) \rightarrow T_a^*(V)$, так как $\varphi \circ f \in S_{a,k}(V)$, если $\varphi \in S_{b,k}(W)$.) Операторы f_* и f^* , как легко проверить, являются транспонированными (или сопряженными) друг к другу.

2.2.1. Замечание. Если V_1, V_2, V_3 суть C^k -многообразия и $f_1: V_1 \rightarrow V_2, f_2: V_2 \rightarrow V_3$ суть C^k -отображения, то $f_2 \circ f_1 = f: V_1 \rightarrow V_3$ — тоже C^k -отображение, и мы имеем

$$f_{*,a} = f_{2*,f_1(a)} \circ f_{1*,a}, \quad f_a^* = f_{1,a}^* \circ f_{2,f_1(a)}^*.$$

Отсюда следует, что если $f: V \rightarrow W$ есть C^k -диффеоморфизм, то f_a^* — изоморфизм $T_b^*(W)$ на $T_a^*(V)$, $b = f(a)$. Применим эту формулу к $\text{id}_V = f^{-1} \circ f$ и $\text{id}_W = f \circ f^{-1}$. Так как, согласно предположению 2.1.11, $\dim V = \dim_{\mathbb{R}} T_a^*(V)$, мы получаем

2.2.2. Следствие. C^k -диффеоморфные многообразия ($k \geq 1$) имеют одинаковую размерность. (См. также замечание 2.1.4.)

Если V есть C^k -многообразие, $\dim V = n$, пусть

$$T(V) = \bigcup_{a \in V} T_a(V)$$

— топологическая сумма множеств $T_a(V)$. Имеется естественное отображение $p: T(V) \rightarrow V$, переводящее вектор $\xi \in T_a(V)$ в точку a , т. е. p — такое отображение, для которого $p^{-1}(a) = T_a(V)$. Докажем следующее утверждение.

2.2.3 ТЕОРЕМА. Множество $T(V)$ обладает естественной структурой C^{k-1} -многообразия, относительно которой p является C^{k-1} -отображением. Эта структура однозначно определяется следующим требованием:

Для любой точки $a \in V$ найдутся окрестность U и C^{k-1} -диффеоморфизм $h: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$, такой, что если π_1, π_2 — проекции

$U \times \mathbb{R}^n$ соответственно на первый и второй сомножители, то $\pi_1 \circ h = p$ и $\pi_2 \circ h|_{T_a(V)}$ — изоморфизм $T_a(V)$ на $\mathbb{R}^n$ (как векторных пространств над полем $\mathbb{R}$) для любой точки $a \in U$.

◀ Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ есть C^k -структура на V , и пусть $\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где x_j суть C^k -функции в U_i . Мы уже видели, что любой вектор $X \in T_a(V)$ однозначно определяется набором чисел $\alpha_v = X(x_v)$, $v = 1, \dots, n$ (доказательство предложения 2.1.11), и $X = \sum \alpha_v (\partial/\partial x_v)_a$. Пусть $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in \mathcal{J}}$ — другая система координат, такая, что $a \in U_j$. Для $x \in U_j$ положим $\varphi_j(x) = (y_1, \dots, y_n)$. Далее, $a \in U_i \cap U_j$ и $x_1, \dots, x_n$ суть C^k -функции на $U_i \cap U_j$. Если $g \in C_{a,k}$, мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a g &= \frac{\partial}{\partial y_\mu} (g \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(a)) = \frac{\partial}{\partial y_\mu} (g \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(a)) = \\ &= \sum_{v=1}^n \frac{\partial}{\partial x_v} g \circ \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a)) \frac{\partial (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_v}{\partial y_\mu}(\varphi_j(a)) = \sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_v}\right)_a g \beta_{\mu v}(a), \end{aligned}$$

где $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_1, \dots)$ и $\beta_{\mu v} = (\partial/\partial y_\mu)_a x_v$, так как сразу видно, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a x_v = \frac{\partial (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})_v}{\partial y_\mu}(\varphi_j(a)).$$

Таким образом, мы имеем

$$(2.2.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a = \sum_{v=1}^n \beta_{\mu v}(a) \left(\frac{\partial}{\partial x_v}\right)_a, \quad \beta_{\mu v}(a) = \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a x_v.$$

Заметим, что $\beta_{\mu v} \in C^{k-1}(U_i \cap U_j)$. Если $M_{ji}(a)$ означает матрицу $(\beta_{\mu v}(a))$, то $M_{ii}(a) = I$ (единичная $n \times n$ -матрица) для всех $a \in U_i$, $M_{ij}(a)M_{ji}(a) = I$ для $a \in U_i \cap U_j$ и $M_{ki}(a)M_{ji}(a) = M_{ki}(a)$, если $a \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Кроме того, если

$$X = \sum \alpha_v \left(\frac{\partial}{\partial x_v}\right)_a = \sum \beta_\mu \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu}\right)_a,$$

$$(2.2.5) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) M_{ji}(a).$$

Рассмотрим теперь покрытие $\{p^{-1}(U_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ множества $T(V)$. Для каждого i определим отображение

$$h_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

следующим образом. Пусть $\varphi_i = (x_1, \dots, x_n)$ — координаты, соответствующие U_i , и $X \in T_a(V)$, $a \in U_i$. Пусть $X = \sum \alpha_v (\partial/\partial x_v)_a$ и

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда мы положим $h_i(X) = (a, \alpha)$. Ясно, что $p = \pi_1 \circ h_i$ на $p^{-1}(U_i)$ и что $\pi_2 \circ h_i|_{T_a(V)}$ — изоморфизм векторных пространств $T_a(V)$ и $\mathbb{R}^n$. Следовательно, h_i — биективное отображение (взаимно однозначное отображение на). Более того, если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то отображение

$$h_j \circ h_i^{-1}: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

задается равенством

$$h_j \circ h_i^{-1}(x, \alpha) = (x, \alpha M_{ij}(x))$$

(согласно (2.2.5)) и потому является C^{k-1} -отображением; в частности, оно непрерывно. Следовательно, существует единственная топология на $T(V)$, в которой $p^{-1}(U_i)$ — открытые множества и h_i — гомеоморфизмы; тогда отображение $p: T(V) \rightarrow V$ непрерывно. Далее, очевидно, что $T(V)$ — хаусдорфово пространство (так как p непрерывно и каждое топологическое пространство $p^{-1}(U_i)$ хаусдорфово).

Поскольку, кроме того, отображения $h_i \circ h_i^{-1}$ принадлежат классу C^{k-1} , ясно, что семейство пар $\{(p^{-1}(U_i), h_i)\}$ задает на $T(V)$ структуру C^{k-1} -многообразия. По построению видно, что остальные свойства, указанные в теореме 2.2.3, также выполняются. ►

Замечание. Многообразие $T(V)$ является примером действительного векторного расслоения (см. § 3.1).

Таким же способом доказывается следующий результат.

2.2.6. ТЕОРЕМА. Множество

$$T^*(V) = \bigcup_{a \in V} T_a^*(V)$$

обладает естественной структурой C^{k-1} -многообразия.

Размерность $T(V)$ и $T^*(V)$ равна $2n$. Далее, у каждой точки из V есть окрестность U , такая, что $\bigcup_{a \in U} T_a^*(V)$ диффеоморфно произведению $U \times \mathbb{R}^n$, причем выполняются все свойства, указанные в теореме 2.2.3.

2.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройка $(T(V), V, p)$, где p — естественная проекция, называется *касательным расслоением многообразия V* . Если $p^*: T^*(V) \rightarrow V$ означает естественную проекцию (которая переводит $T_a^*(V)$ в $\{a\}$), то тройка $(T^*(V), V, p^*)$ называется *кокасательным расслоением V* .

Касательным и кокасательным расслоением мы будем часто называть соответственно сами $T(V)$ и $T^*(V)$, подразумевая под этим как само пространство, так и всю тройку.

Заметим, что если V является $\mathbb{R}$ -аналитическим многообразием, то $T(V)$, $T^*(V)$ — тоже $\mathbb{R}$ -аналитические многообразия, а проекции на V и локальные изоморфизмы с $U \times \mathbb{R}^n$ можно брать в классе аналитических отображений.

Еще одно «расслоение», которое нам понадобится в дальнейшем, получается следующим образом. Пусть $0 \leq p \leq n$. Рассмотрим p -ю внешнюю степень векторного пространства $T_a^*(V)$, обозначаемую, как обычно, $\wedge^p T_a^*(V)$. Пусть (U, φ) — система координат, $a \in U$, $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда дифференциалы $(dx_1)_a, \dots, (dx_n)_a$ образуют $\mathbb{R}$ -базис пространства $T_a^*(V)$ (см. предложение 2.1.11'). Следовательно, базис пространства $\wedge^p T_a^*(V)$ задается элементами

$$(dx_{j_1})_a \wedge \dots \wedge (dx_{j_p})_a, \quad j_1 < \dots < j_p.$$

Положим

$$\wedge^p T^*(V) = \bigcup_{a \in V} \wedge^p T_a^*(V).$$

Элементы множества $\wedge^p T^*(V)$ называются p -ковекторами в точке a . Аналогично теоремам 2.2.3 и 2.2.6 имеет место следующая

2.2.8. ТЕОРЕМА. Множество $\wedge^p T^*(V)$ обладает естественной структурой C^{k-1} -многообразия размерности $n + \binom{n}{p}$.

Это есть так называемое расслоение p -форм на V . Расслоение $\wedge^p \mathfrak{T}^*(V)$ комплекснозначных p -форм на V определяется аналогично.

2.2.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V и W — многообразия класса C^k , $k \geq 1$. Отображение $f: V \rightarrow W$ класса C^k имеет ранг r в точке $a \in V$, если

$$\text{rank} \{f_{*,a}: T_a(V) \rightarrow T_{f(a)}(W)\} = r.$$

Выразим отображение $f_{*,a}$ в терминах локальных координат. Пусть $b = f(a)$ и (U, φ) — система координат на V , $a \in U$; пусть (U', φ') — система координат на W , такая, что $b \in U'$ и $f(U) = U'$. Обозначим $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, если $x \in U$, и $\varphi'(y) = (y_1, \dots, y_m)$, если $y \in U'$. В $T_a(V)$ и $T_b(W)$ появляются базисы соответственно $(\partial/\partial x_\nu)_a$, $1 \leq \nu \leq n$, и $(\partial/\partial y_\mu)_b$, $1 \leq \mu \leq m$. Пусть

$$X \in T_a(V), \quad X = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_a,$$

и пусть

$$f_{*,a}(X) = \sum_{\mu=1}^m \beta_\mu \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} \right)_b.$$

Тогда для ростка $g \in C_{b,k}$ мы получаем

$$\sum_{\mu=1}^m \beta_\mu \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} \right)_b g = X(g \circ f) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \sum_{\mu=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial y_\mu} \right)_b g \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_a f_\nu,$$

где $f_\mu = y_\mu \circ f$. Это равенство показывает, что в локальных координатах $f_{*,a}$ представляется линейным преобразованием

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (\beta_1, \dots, \beta_m),$$

где

$$\beta_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_a f_\mu.$$

Если через F обозначить отображение $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$ множества $\phi(U)$ в $\phi'(U')$, то наше преобразование в точности совпадает (см. (1.3.1')) с отображением $(dF)(\phi(a))$.

Учитывая это представление и результаты гл. 1, мы получаем следующие теоремы.

2.2.10. ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ. Пусть V, W — многообразия размерности n класса C^k ($\mathbb{R}$ -аналитические), и пусть $f: V \rightarrow W$ — отображение класса C^k ($\mathbb{R}$ -аналитическое). Если для некоторой точки $a \in V$ отображение $f_{*,a}: T_a(V) \rightarrow T_{f(a)}(W)$ является изоморфизмом, то существуют окрестности $U \ni a$ и $U' \ni f(a)$, такие, что отображение $f|U$ является C^k - ($\mathbb{R}$ -аналитическим) изоморфизмом на U' .

2.2.11. ТЕОРЕМА О РАНГЕ. Пусть V, W — многообразия класса C^k размерностей соответственно n и m , и пусть ранг отображения f в каждой точке $a \in V$ есть целое число r , не зависящее от a . Тогда существуют системы координат $(U, \phi), (U', \phi')$ в точках a и $f(a)$ соответственно, такие, что $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}| \phi(U)$ совпадает с отображением

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

2.2.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V есть C^1 -многообразие размерности n со счетной базой, и пусть $S \subset V$. Говорят, что множество S имеет меру нуль, если для любой системы координат (U, ϕ) множество $\phi(S \cap U)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Критические точки мы определим, как в гл. 1. Именно, пусть V, W суть C^k -многообразия размерностей соответственно n и m , $k \geq 1$, и пусть $f: V \rightarrow W$ есть C^k -отображение. Точка $a \in V$ называется критической для f , если ранг f в этой точке меньше m .

Следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 1.4.6.

2.2.13. ТЕОРЕМА САРДА. Если V, W суть C^∞ -многообразия со счетными базами и $f: V \rightarrow W$ некоторое C^∞ -отображение, то образ $f(A)$ множества A критических точек f имеет меру нуль в W .

Наконец, можно доказать (как в § 1.2) существование разбиения единицы. Если (U, ϕ) — система координат на C^k -многообра-

зни V , то из леммы 1.2.5 сразу вытекает, что для любого компакта $K \subset U$ существует C^k -функция $\eta \geq 0$ на V , такая, что $\eta(x) > 0$ для $x \in K$ и $\text{supp } \eta \subset U$. Затем точно так же, как мы доказывали теорему 1.2.3, мы можем доказать следующее утверждение.

2.2.14. ТЕОРЕМА. *Предположим, что C^k -многообразие V , $0 \leq k \leq \infty$, имеет счетную базу и что задано его открытое покрытие $\{V_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. Тогда существует семейство C^k -функций $\{\eta_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, $\eta_i \geq 0$, $\text{supp } \eta_i \subset V_i$, такое, что семейство $\{\text{supp } \eta_i\}$ локально конечно и $\sum \eta_i(x) = 1$ для любой точки $x \in V$.*

2.2.15. Следствие. *Если X — замкнутое подмножество V и $U \supset X$ — открытое подмножество, то существует C^k -функция η на V , такая, что $\eta(x) = 1$, если $x \in X$, и $\eta(x) = 0$, если $x \in V \setminus U$.*

§ 2.3. Многообразия Грассмана

В этом параграфе мы рассмотрим один класс $\mathbb{R}$ - (или $\mathbb{C}$)-аналитических многообразий, важных со многих точек зрения, хотя эти многообразия и не будут использоваться в остальной части книги.

Пусть E — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{R}$. Пусть r — целое число, $0 < r < n$. Обозначим через $G_r(E)$ множество r -мерных линейных подпространств E . Мы покажем, что $G_r(E)$ обладает естественной структурой $\mathbb{R}$ -аналитического многообразия.

Пусть F — произвольное подпространство размерности r . Тогда можно найти подпространство $E' \subset E$ размерности $n - r$, такое, что $E' \cap F = \{0\}$ и $E = F + E'$. Если для подпространства $E' \subset E$ размерности $n - r$ мы положим

$$U(E') = \{F: F \text{ имеет размерность } r, F \subset E, F \cap E' = \{0\}\},$$

то получим, что

$$G_r(E) = \bigcup_{E'} U(E').$$

Теперь мы утверждаем, что $U(E')$ можно отождествить с множеством $L(E')$ всех $\mathbb{R}$ -линейных отображений $\lambda: E/E' \rightarrow E$, таких, что $\eta_{E'} \circ \lambda$ — тождественное отображение, где $\eta_{E'}: E \rightarrow E/E'$ — естественная проекция. В самом деле, если $\lambda \in L(E')$, то очевидно, что $\lambda(E/E') = F$ — подпространство E размерности r , такое, что $F \cap E' = \{0\}$. Обратно, если F задано, то

$$E = F + E'.$$

Обозначим через π_F проекцию на F , задаваемую разложением $E = F + E'$. Тогда

$$\pi_F(E') = 0$$

и, следовательно, π_F индуцирует $\mathbb{R}$ -линейное отображение

$$\lambda'_F: E/E' \rightarrow F,$$

а значит, и отображение

$$\lambda_F: E/E' \rightarrow E.$$

Очевидно, $\eta_{E'} \circ \lambda_F$ — тождественное отображение и

$$\lambda_F(E/E') = F.$$

Мы показали, что $U(E')$ и $L(E')$ можно естественным образом отождествить.

Далее, мы утверждаем, что $L(E')$ — конечномерное аффинное пространство, т. е. что для любого $\lambda_0 \in L(E')$ множество $\{\lambda - \lambda_0: \lambda \in L(E')\}$ является конечномерным векторным пространством. В самом деле, если $\lambda_0, \lambda \in L(E')$, то $\eta_{E'}(\lambda - \lambda_0) = 0$; поэтому

$$(\lambda - \lambda_0)(E/E') \subset \ker(\eta_{E'}) = E'$$

и $\lambda - \lambda_0$ есть $\mathbb{R}$ -линейное отображение E/E' в E' , т. е.

$$\lambda - \lambda_0 \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E/E', E').$$

Далее, если $\mu \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E/E', E')$, то $\lambda_0 + \mu \in L(E')$. Это показывает, что $\{\lambda - \lambda_0: \lambda \in L(E')\}$ естественно изоморфно $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E/E', E')$, и этим доказывается наше утверждение. Если мы теперь выберем базис в E' и дополним его до базиса в E , то мы получим возможность отождествить $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E/E', E')$ с множеством $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{n-r}) = M(r, n-r)$, т. е. с множеством $r \times (n-r)$ -матриц, изоморфным $\mathbb{R}^{r(n-r)}$.

Таким образом, при заданном $\lambda_0 \in U(E')$ и подходящих базисах в E' и E существует биективное отображение $h_{E'}$ множества $U(E')$ на $\mathbb{R}^{r(n-r)}$.

Далее, совсем легко показать, что для двух подпространств E', E'' размерности $n-r$ отображение $h_{E''} \circ h_{E'}^{-1}$ множества $h_{E'}(U(E') \cap U(E''))$ в $\mathbb{R}^{r(n-r)}$ задается рациональными функциями (в частности, $\mathbb{R}$ -аналитическими функциями). Отсюда следует существование единственной топологии на $G_r(E)$, относительно которой $U(E')$ являются открытыми множествами, а отображения $h_{E'}$ — гомеоморфизмами.

Мы утверждаем, что эта топология хаусдорфова. Прежде всего, $U(E')$ — хаусдорфово пространство, открытое в E для любого E' . Кроме того, для любых заданных подпространств $F_1, F_2 \subset E$ раз-

мерности r мы можем найти подпространство E' размерности $n-r$, такое, что $F_1 \cap E'$, $F_2 \cap E'$ оба равны $\{0\}$, т. е. $F_1, F_2 \subseteq U(E')$. Отсюда сразу следует, что если $F_1 \neq F_2$, то у них есть непересекающиеся окрестности в $U(E')$, а значит, и в $G_r(E)$.

Итак, мы показали, что $G_r(E)$ обладает структурой $\mathbb{R}$ -аналитического многообразия. Теперь мы покажем, что оно компактно.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в E , и пусть $O(n)$ — ортонормированная группа в $\mathbb{R}^n$, т. е. множество действительных $(n \times n)$ -матриц, таких, что

$$A \cdot {}^t A = I,$$

где ${}^t A$ — матрица, транспонированная к A , а I — единичная $(n \times n)$ -матрица. Имеет место изоморфизм $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, задаваемый равенством

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n), \quad \text{если } x = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Таким образом, $O(n)$ действует на E : если $A \in O(n)$ и $x \in E$, мы полагаем

$$A(x) = \varphi^{-1} A \varphi(x),$$

где $A\varphi(x)$ — обычное действие $O(n)$ в $\mathbb{R}^n$. Значит, эта группа действует и на $G_r(E)$. Мы утверждаем, что для любых $F_1, F_2 \subseteq G_r(E)$ найдется $A \in O(n)$, такое, что $AF_1 = F_2$. Но это утверждение достаточно доказать для $E = \mathbb{R}^n$, где оно очевидно (так как можно выбрать ортонормированные базисы $(u_1, \dots, u_r), (v_1, \dots, v_r)$ в $\mathbb{R}^n$, такие, что F_1 натянута на $(u_1, \dots, u_r)$, а F_2 — на $(v_1, \dots, v_r)$). Далее, отображение $O(n) \times G_r(E) \rightarrow G_r(E)$, при котором $(A, F) \mapsto AF$, непрерывно. Кроме того, $O(n)$ — компакт. Значит, если $F_0 \subseteq G_r(E)$ фиксировано, то $G_r(E)$ является образом $O(n)$ при непрерывном отображении $A \mapsto AF_0$ и потому есть компакт. Итак, нами доказана

2.3.1. ТЕОРЕМА. Многообразие Грассмана $G_r(E)$ является компактным $\mathbb{R}$ -аналитическим многообразием размерности $r(n-r)$.

2.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $r=1$, то $G_1(E)$ называется *проективным пространством* $P(E)$, ассоциированным с E ; $P(E)$ имеет размерность $n-1$. Если, в частности, $E = \mathbb{R}^n$, то соответствующее проективное пространство $P(\mathbb{R}^n)$ мы будем обозначать $\mathbb{RP}^{n-1}$.

2.3.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если E есть n -мерное комплексное векторное пространство, $0 < r < n$ и $\mathcal{G}_r(E)$ — множество комплексных r -мерных подпространств E (размерность комплексная), то, как и выше, мы можем показать, что $\mathcal{G}_r(E)$ — компактное комплексное многообразие комплексной размерности $r(n-r)$. При $r=1$ оно называется проективным пространством $P(E)$ и, если $E = \mathbb{C}^n$, обозначается символом $\mathbb{CP}^{n-1}$.

§ 2.4. Векторные поля и дифференциальные формы

Пусть V есть C^k -многообразие и $T(V)$ — его касательное расслоение. Имеется естественная проекция $p: T(V) \rightarrow V$, которая переводит $T_a(V)$ в точку a .

2.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторным полем на V называется отображение $X: V \rightarrow T(V)$, такое, что $p \circ X$ — тождественное отображение на V . Если X есть C^r -отображение ($0 \leq r \leq k-1$), то мы назовем X векторным полем класса C^r или C^r -векторным полем. Если V — аналитическое многообразие, то аналогично определяется аналитическое векторное поле.

В общем случае, если $p: B \rightarrow A$ — некоторое отображение множества B на множество A , то отображение $X: A \rightarrow B$, такое, что $p \circ X$ тождественно на A , называется сечением p . Векторные поля являются, таким образом, сечениями проекции касательного расслоения на многообразие.

Если X — векторное поле и (U, φ) — система координат, $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, то мы можем написать

$$X(a) = \sum_{v=1}^n \xi_v(a) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_a, \quad \xi_v(a) \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что X является C^r -векторным полем в том и только в том случае, если все ξ_v суть C^r -функции на U для любой системы координат (U, φ) . Векторное поле $a \mapsto (\partial/\partial x_v)_a$ (определенное на U) мы будем обозначать через $\partial/\partial x_v$.

Пусть p — целое число, $0 \leq p \leq n$, и $\Lambda^p T^*(V)$ — расслоение p -форм на V .

2.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальной формой степени p (или просто p -формой) называется отображение $\omega: V \rightarrow \Lambda^p T^*(V)$, такое, что

$$\omega(a) \in \Lambda^p T_a^*(V)$$

для любой точки $a \in V$. Мы говорим, что p -форма принадлежит классу C^r (аналитична), если этим свойством обладает отображение ω . Итак, дифференциальные формы — это сечения естественной проекции $\Lambda^p T^*(V)$ на V .

Если (U, φ) — система координат и $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, то элементы $(dx_1)_a, \dots, (dx_n)_a$ образуют базис в $T_a^*(V)$, а базис в $\Lambda^p T_a^*(V)$ задается элементами $(dx_{i_1})_a \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_a$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$.

Поэтому p -форму ω можно единственным образом представить в виде

$$\omega(a) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \xi_{i_1 \dots i_p}(a) (dx_{i_1})_a \wedge \dots \wedge (dx_{i_p})_a.$$

Снова ω принадлежит классу C^r (аналитична) тогда и только тогда, когда таковыми являются все $\xi_{j_1} \dots j_p$ для всех систем координат (U, φ) . Символ dx_j означает 1-форму

$$a \mapsto (dx_j)_a,$$

а $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$ означает p -форму

$$a \mapsto (dx_{j_1})_a \wedge \dots \wedge (dx_{j_p})_a.$$

Заметим, что для целых $p, q \geq 0$ определено естественное линейное отображение

$$\wedge^p T_a^*(V) \otimes \wedge^q T_a^*(V) \rightarrow \wedge^{p+q} T_a^*(V);$$

образ элемента $\omega_1(a) \otimes \omega_2(a)$ при этом отображении мы обозначим через $\omega_1(a) \wedge \omega_2(a)$. Теперь для двух данных дифференциальных форм ω_1, ω_2 степени соответственно p, q мы можем определить $(p+q)$ -форму $\omega_1 \wedge \omega_2$, называемую внешним произведением ω_1 и ω_2 , полагая

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) = \omega_1(a) \wedge \omega_2(a).$$

Непосредственно видно, что если ω_1, ω_2 суть C^r - (аналитические) формы, то такова и форма $\omega_1 \wedge \omega_2$.

Множество всех p -форм на V (класса C^{k-1}) обозначим символом $A^p(V)$. Мы будем также рассматривать прямую сумму

$$A(V) = \sum_{p \geq 0} A^p(V).$$

Определенное выше внешнее умножение превращает $A(V)$ в алгебру над полем $\mathbb{R}$. Элементы этой алгебры мы будем называть просто *дифференциальными формами*. Они состоят из компонент, которые являются p -формами, и все компоненты, за исключением конечного числа, суть нули.

Из наших формул в локальных координатах вытекает, кроме того, что если V C^k -диффеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^n$, то $A(V)$ как алгебра порождена элементами вида f, dg , где $f \in C^{k-1}(V)$ и $g \in C^k(V)$.

Отметим еще, что векторное пространство $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(V)$ всех C^{k-1} -векторных полей на V является к тому же R -модулем, где R — кольцо C^{k-1} -функций на V . Далее, между $\wedge^p T_a^*(V)$ и $\wedge^p T_a(V)$ имеется двойственность, относительно которой они являются сопряженными пространствами. Следовательно, если ω есть p -форма класса C^{k-1} на V , то ею определяется мультилинейное отображение $\mathfrak{X}^p$ в R по формуле

$$\omega(X_1, \dots, X_p)(a) = \omega(a)(X_1(a), \dots, X_p(a)).$$

Это отображение, очевидно, альтернирующее и R -мультилинейное.

2.4.3. Предложение. *Обратно, всякое альтернирующее R -мультилинейное отображение Φ пространства $\mathfrak{X}^p$ в R определяет некоторую p -форму ω класса C^{k-1} .*

◀ Для доказательства рассмотрим векторы $X_{1,a}, \dots, X_{p,a} \in T_a(V)$, $a \in V$, и покажем сначала, что существуют C^{k-1} -векторные поля $X_1, \dots, X_p$, такие, что $X_j(a) = X_{j,a}$. Для этого предположим, что $X_{j,a} = \sum \alpha_v (\partial/\partial x_v)_a$ в системе координат (U, ψ) и что η есть C^k -функция с компактным носителем $\text{supp } \eta \subset U$, $\eta(x) = 1$ для x из некоторой окрестности точки a (следствие 2.2.15). Мы можем определить векторное поле $X_j: V \rightarrow T(V)$, полагая

$$\begin{aligned} X_j(x) &= 0, & x \notin U, \\ X_j(x) &= \sum \eta(x) \alpha_v \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, & x \in U. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что если $X_j(a) = 0$ для некоторого j , то $\Phi(X_1, \dots, X_p)(a) = 0$. Ввиду R -мультилинейности Φ для этого достаточно показать, что если $X_j(a) = 0$, то $X_j = \sum_{\mu=1}^n \eta_\mu Y_\mu$, где $\eta_\mu \in C^{k-1}(V)$ обращаются в точке a в нуль и $Y_\mu \in \mathfrak{X}$. Пусть (U, ψ) — система координат, $a \in U$, и пусть

$$X_j(x) = \sum_{v=1}^n \alpha_v(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, \quad x \in U.$$

Так как $X_j(a) = 0$, то мы имеем $\alpha_v(a) = 0$, $1 \leq v \leq n$. Пусть $\eta \in C^{k-1}(V)$ такова, что $\eta(a) = 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ и $\text{supp } \eta$ — компактное подмножество U (см. следствие 2.2.15). Определим векторные поля Z_v , $1 \leq v \leq n$, полагая

$$Z_v(x) = 0, \text{ если } x \notin U, \quad Z_v(x) = \beta_v(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, \text{ если } x \in U,$$

где

$$\beta_v(x) = \begin{cases} \eta(x) \alpha_v(x), & x \in U, \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

так что $\beta_v \in C^{k-1}(V)$ и $\beta_v(a) = 0$. Определим векторные поля Y_v , полагая

$$Y_v(x) = 0, \text{ если } x \notin U, \quad Y_v(x) = \eta(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, \text{ если } x \in U.$$

Тогда мы имеем

$$X_j = \sum_{v=1}^n \{\beta_v Y_v + (1 - \eta) Z_v\} + (1 - \eta) X_j.$$

Так как $\eta(a) = 1$ и $\beta_v(a) = 0$, то это и есть требуемое представление. Зададим теперь p -ковектор $\omega(a)$ в каждой точке $a \in V$ формулой

$$\omega(a)(X_{1,a}, \dots, X_{p,a}) = \varphi(X_1, \dots, X_p)(a).$$

Учитывая вышеизложенное, мы видим, что это выражение равно нулю, если какое-нибудь X_j равно нулю в точке a , и потому $\omega(a)$ определен независимо от выбора векторных полей X_j ; единственное, что от них требуется — это выполнение условий $X_j(a) = X_{j,a}$. Простые выкладки в локальных координатах показывают, что таким образом определенные элементы $\omega(a) \in \wedge^p T_a^*(V)$ задают p -форму ω класса C^{k-1} . ►

Наконец, заметим, что $(C^k$ -, аналитическая) 0-форма — это просто $(C^k$ -, аналитическая) функция на V .

Пусть теперь V, W — два C^k -многообразия и $f: V \rightarrow W$ есть C^k -отображение. Пусть $a \in V$ и $f(a) = b$. Нами было определено отображение

$$f_a^*: T_b^*(W) \rightarrow T_a^*(V).$$

Для каждого $p > 0$ оно порождает линейное отображение

$$\wedge^p T_b^*(W) \rightarrow \wedge^p T_a^*(V).$$

Эти отображения в совокупности определяют гомоморфизм алгебр (который мы снова обозначим f_a^*)

$$f_a^*: \wedge T_b^*(W) \rightarrow \wedge T_a^*(V).$$

2.4.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть ω есть p -форма класса C^{k-1} на W и $f: V \rightarrow W$ — отображение класса C^k . *Прообразом $f^*(\omega)$ формы ω называется p -форма класса C^{k-1} на V , которая определяется так: при $p = 0$, когда $\omega = g$ есть C^{k-1} -функция, $f^*(\omega) = g \circ f$; при $p > 0$ мы полагаем*

$$f^*(\omega)(a) = f_a^*(\omega(f(a))).$$

Заметим, что индуцированное отображение

$$f^*: A(W) \rightarrow A(V)$$

пространства всех дифференциальных форм будет гомоморфизмом алгебр.

Если, в частности, U — открытое множество в C^k -многообразии V , ω есть p -форма на V и $i: U \rightarrow V$ — естественное вложение, то мы пишем $i^*(\omega) = \omega|_U$ и называем эту форму *сужением формы ω на U* .

2.4.5. Замечание. Для каждой точки $a \in V$ определено также отображение $f_{*,a}: T_a(V) \rightarrow T_b(W)$, $b = f(a)$. Однако его, вообще говоря, нельзя «продолжить» до отображения $\mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(W)$, например, если $X \in \mathfrak{X}(V)$ и a, a' — точки из V , для которых $f(a) = f(a') = b$, но $f_{*,a}(X(a)) \neq f_{*,a'}(X(a'))$. Однако, если, например, $f: V \rightarrow W$ является C^k -диффеоморфизмом, то отображение

$$b \mapsto f_{*,a}(X(a)), \quad a = f^{-1}(b),$$

очевидно, определяет, C^{k-1} -векторное поле $f_*(X)$ на W .

Пусть теперь V — многообразие класса C^k , $k \geq 2$. Пусть X и Y — два C^{k-1} -векторных поля на V . Для любой функции $f \in C^k(V)$ функция $X(f)$ принадлежит классу $C^{k-1}(V)$. Так как $k-1 \geq 1$, то мы можем применить Y к $X(f)$ (см. замечание 2.1.13). Таким образом, мы можем определить отображение $C^k(V) \rightarrow C^{k-2}(V)$ по формуле

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Опишем его в терминах локальных координат. Если (U, φ) — система координат, $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ и

$$X(x) = \sum \alpha_v(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, \quad Y(x) = \sum \beta_v(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x,$$

где

$$\alpha_v, \beta_v \in C^{k-1}(U),$$

то легко проверить, что

$$[X, Y](x) = \sum c_v(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x,$$

где

$$c_v(x) = \sum_{\mu} \left\{ \alpha_{\mu}(x) \frac{\partial \beta_v}{\partial x_{\mu}} - \beta_{\mu}(x) \frac{\partial \alpha_v}{\partial x_{\mu}} \right\}.$$

Отсюда видно, между прочим, что $[X, Y]$ — векторное поле класса C^{k-2} .

Векторное поле $[X, Y]$ называется *скобкой Пуассона* (или просто *скобкой*) векторных полей X, Y .

Заметим, что вектор $[X, Y](a)$ зависит от значений X и Y в полной окрестности точки a , а не только от векторов $X(a)$ и $Y(a)$. Очевидно, выполняются тождества $[X, X] = 0$, $[X, Y] = -[Y, X]$. Если $k \geq 3$ и X, Y, Z — векторные поля класса C^{k-1} , то легко проверить, что

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Это соотношение называется *тождеством Якоби*. Наконец, заметим, что если векторные поля X_v в координатной системе (U, φ) определены условием

$$X_v(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, \quad 1 \leq v \leq n,$$

то $[X_v, X_\mu] = 0$ в U для любых пар μ, v .

2.4.6. Перейдем теперь к рассмотрению касательных пространств и тому подобным понятиям на комплексных многообразиях. Пусть V — комплексное многообразие комплексной размерности n и $a \in V$. Пусть (U, φ) — система координат, $a \in U$; тогда φ есть комплексно-аналитический изоморфизм U на некоторое открытое множество в $\mathbb{C}^n$. Мы пишем $\varphi(z) = (z_1, \dots, z_n)$, где $z \in U$, $z_j = x_j + iy_j$, x_j, y_j — действительные функции класса C^∞ . Касательное пространство $T_a(V)$, где V рассматривается как действительное C^∞ -многообразие размерности $2n$, обладает естественной структурой комплексного векторного пространства, которая определяется следующим образом:

Мы полагаем $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ относительно изоморфизма

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n),$$

где $z_j = x_j + iy_j$. Тогда отображение $T_a(V) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, при котором

$$X \mapsto ((dx_1)_a(X), (dy_1)_a(X), \dots, (dx_n)_a(X), (dy_n)_a(X)),$$

является $\mathbb{R}$ -изоморфизмом. Следовательно, отображение

$$X \mapsto ((dz_1)_a(X), \dots, (dz_n)_a(X))$$

является $\mathbb{R}$ -изоморфизмом $T_a(V)$ на $\mathbb{C}^n$ и этот изоморфизм естественно определяет на $T_a(V)$ структуру $\mathbb{C}$ -векторного пространства (замечание 2.1.12). Эта комплексная структура на $T_a(V)$ не зависит от выбора системы координат (U, φ) . Фактически она характеризуется следующим свойством. Если f — росток голоморфных функций в точке $a \in V$, то

$$(df)_a(\xi X) = \xi (df)_a(X) \quad \xi \in \mathbb{C}, \quad X \in T_a(V),$$

где ξX означает операцию умножения на комплексное число, определяемую указанной комплексной структурой на $T_a(V)$, а в правой части стоит произведение двух комплексных чисел.

Пусть $\varphi(z) = (z_1, \dots, z_n)$ — комплексные координаты в U и, как выше, $z_j = x_j + iy_j$; тогда $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ образуют координаты в U , если V рассматривать как действительное C^∞ -многообразие. Таким образом, заданы векторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_a, \left(\frac{\partial}{\partial y_v} \right)_a \in T_a(V).$$

Легко проверить, что по отношению к определенной выше комплексной структуре на $T_a(V)$ мы имеем

$$i\left(\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)_a = -\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a.$$

Кроме того, $(\partial/\partial x_\nu)_a z_\mu = \delta_{\mu\nu}$, и потому векторы $(\partial/\partial x_\nu)_a$, $1 \leq \nu \leq n$, образуют $\mathbb{C}$ -базис в $T_a(V)$.

Пусть теперь (U', φ') — другая система координат, $a \in U'$ и $\varphi'(z) = (w_1, \dots, w_n)$, $z \in U'$. Напишем $w_j = u_j + iv_j$, где u_j, v_j — действительные C^∞ -функции. Пусть $X \in T_a(V)$ и

$$X = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a = \sum_{\mu=1}^n \beta_\mu \left(\frac{\partial}{\partial u_\mu}\right)_a, \quad \alpha_\nu, \beta_\mu \in \mathbb{C}.$$

Легко проверить, что

$$\beta_\mu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_a w_\mu.$$

Далее, $(\partial/\partial x_\nu)_a w_\mu$ — голоморфные функции точки a для $a \in U \cap U'$. Поэтому можно повторить доказательство теоремы 2.2.3 и получить следующий результат.

2.4.7. ТЕОРЕМА. Если V — комплексное многообразие размерности n , то $T(V) = \bigcup T_a(V)$ обладает естественной структурой комплексного многообразия размерности $2n$. Проекция $p: T(V) \rightarrow V$ является голоморфным отображением и $T(V)$ локально тривиально, т. е. у любой точки $a \in V$ имеется окрестность U и комплексно аналитический изоморфизм $h: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$, такой, что если $h(\xi) = (a, v)$, $\xi \in p^{-1}(U)$, то $p(\xi) = a$. Кроме того, отображение $T_a(V) \rightarrow \mathbb{C}^n$, задаваемое условием $\xi \mapsto v$, есть $\mathbb{C}$ -изоморфизм.

2.4.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Если V, W — комплексные многообразия и $f: V \rightarrow W$ — голоморфное отображение, то $f_{*,a}: T_a(V) \rightarrow T_{f(a)}(W)$ является $\mathbb{C}$ -линейным отображением.

Учитывая вышеизложенное, мы можем применить теорему о ранге для голоморфных функций (см. замечание 1.3.15) и получить следующее утверждение.

2.4.9. ТЕОРЕМА О РАНГЕ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. Пусть V, W — комплексные многообразия размерностей соответственно n, m и $f: V \rightarrow W$ — голоморфное отображение. Пусть r — такое целое число, что

$$\text{rank}_{\mathbb{C}} f_{*,a} = r$$

для любой точки $a \in V$. Тогда существуют комплексные координаты (U, φ) в точке a , (U', φ') в точке $f(a)$, такие, что $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ совпадает с отображением $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0)$.

2.4.10. Замечания. Несколько замечаний о комплексных C^∞ -дифференциальных формах на комплексном многообразии V . Мы отождествили C^n и $\mathbb{R}^{2n}$ с помощью отображения

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n),$$

где $z_j = x_j + iy_j$. Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ размерности n . Рассмотрим $\mathbb{C}$ -векторное пространство

$$\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{C})$$

всех $\mathbb{R}$ -линейных отображений E в $\mathbb{C}$. Пусть

$$F = \{f \in \mathcal{E}^*: f(iv) = if(v) \text{ для всех } v \in E\},$$

$$\bar{F} = \{f \in \mathcal{E}^*: f(iv) = -if(v) \text{ для всех } v \in E\}.$$

Очевидно, что F и $\bar{F}$ суть $\mathbb{C}$ -подпространства в $\mathcal{E}^*$ и что

$$\mathcal{E}^* = F \oplus \bar{F}.$$

В самом деле, $F \cap \bar{F} = \{0\}$, а если $g \in \mathcal{E}^*$ и

$$f'(v) = \frac{1}{2}(g(v) - ig(iv)), \quad f''(v) = \frac{1}{2}(g(v) + ig(iv)),$$

то $f' \in F$, $f'' \in \bar{F}$ и $g = f' + f''$. Мы обозначаем $F = \mathcal{E}_{1,0}^*$ и $\bar{F} = \mathcal{E}_{0,1}^*$. Отображение $z \mapsto \bar{z}$ поля $\mathbb{C}$ на себя продолжается до $\mathbb{R}$ -линейного отображения $\mathcal{E}^*$ на себя, которое переводит F в $\bar{F}$. Образ элемента $g \in \mathcal{E}^*$ при этом отображении мы тоже обозначим через $\bar{g}$. Если $(e_1, \dots, e_n)$ — некоторый $\mathbb{C}$ -базис в F , то $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ — тоже $\mathbb{C}$ -базис в $\bar{F}$.

Рассмотрим теперь внешнее произведение $\wedge^r \mathcal{E}^*$ комплексных векторных пространств $\mathcal{E}^*$. Пусть p, q — целые числа, $p + q = r$, и пусть $\mathcal{E}_{p,q}^*$ — подпространство $\wedge^r \mathcal{E}^*$, порожденное элементами вида

$$u_{j_1} \wedge \dots \wedge u_{j_p} \wedge \bar{v}_{k_1} \wedge \dots \wedge \bar{v}_{k_q},$$

где $u_{j_i} \in F$, $\bar{v}_{k_i} \in \bar{F}$. Базис в $\mathcal{E}_{p,q}^*$ задается элементами

$$e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p} \wedge \bar{e}_{k_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{k_q} = e_I \wedge \bar{e}_K,$$

где $j_1 < \dots < j_p$, $k_1 < \dots < k_q$ (и между j и k нет никакой зависимости). Очевидно,

$$\wedge^r \mathcal{E}^* = \sum_{p+q=r} \mathcal{E}_{p,q}^*,$$

где справа стоит прямая сумма.

Пусть теперь V — комплексное многообразие размерности n и $a \in V$. В качестве E возьмем $E = T_a(V)$ с определенной выше

комплексной структурой $T_a(V)$. Положим

$$\mathfrak{T}_a^*(V) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_a(V), \mathbb{C}) = T_a^*(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C};$$

это есть $\mathbb{C}$ -векторное пространство размерности $2n$. Как и раньше, если $(z_1, \dots, z_n)$ — координаты в открытом множестве U , $z_j = x_j + iy_j$, то

$$(dx_j)_a, (dy_j)_a \in T_a^*(V) \subset \mathfrak{T}_a^*(V),$$

и мы можем определить элементы

$$(dz_j)_a = (dx_j)_a + i(dy_j)_a \in \mathfrak{T}_a^*(V).$$

(см. также замечание 2.1.12); кроме того, положим

$$(d\bar{z}_j)_a = (dx_j)_a - i(dy_j)_a.$$

Легко проверить, что элементы $(dz_j)_a, (d\bar{z}_j)_a$, $j = 1, \dots, n$, образуют $\mathbb{C}$ -базис в $\mathfrak{T}_a^*(V)$ (так как $(dx_j)_a, (dy_j)_a$ образуют $\mathbb{R}$ -базис в $T_a^*(V)$). Положим, по определению,

$$\mathfrak{T}_a(V) = T_a(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{T}_a^*(V), \mathbb{C}).$$

Это пространство является сопряженным к $\mathfrak{T}_a^*(V)$, поэтому в $\mathfrak{T}_a(V)$ есть базис, двойственный к указанному выше. Если мы положим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z_v}\right)_a &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_v}\right)_a - i \left(\frac{\partial}{\partial y_v}\right)_a \right\}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_v}\right)_a &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_v}\right)_a + i \left(\frac{\partial}{\partial y_v}\right)_a \right\} \end{aligned}$$

(умножение на i — это умножение в $T_a(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а не в $T_a(V)$, т. е. $i(\partial/\partial y_v)_a = (\partial/\partial y_v)_a \otimes i$), то этот двойственный базис задается как раз векторами $(\partial/\partial z_v)_a, (\partial/\partial \bar{z}_v)_a$ ($1 \leq v \leq n$). Как и раньше, легко показать, что

$$\mathfrak{T}(V) = \bigcup_{a \in V} \mathfrak{T}_a(V), \quad \mathfrak{T}^*(V) = \bigcup_{a \in V} \mathfrak{T}_a^*(V)$$

суть C^∞ -многообразия действительной размерности $6n$. Внешние произведения $\wedge^p \mathfrak{T}(V)$, $\wedge^p \mathfrak{T}^*(V)$ определяются, как выше, а комплексная C^∞ -дифференциальная p -форма ω на V — это C^∞ -отображение $\omega: V \rightarrow \wedge^p \mathfrak{T}^*(V)$, такое, что $\omega(a) \in \wedge^p \mathfrak{T}_a^*(V)$ для каждой точки $a \in V$.

Для $E = T_a(V)$ рассмотрим, как и выше,

$$\wedge^r \mathcal{E}^* = \sum_{p+q=r} \mathcal{E}_{p,q}^*.$$

Когда надо указывать зависимость от V и a , мы будем писать $\mathcal{E}^*(V, a)$, $\mathcal{E}_{p,q}^*(V, a)$, Сразу видно, что $\mathcal{E}_{1,0}^*$ натянуто на ко-

векторы $(dz_1)_a, \dots, (dz_n)_a$, а $\mathcal{E}_{0,1}^*$ — на $(d\bar{z}_1)_a, \dots, (d\bar{z}_n)_a$. Следовательно, $\mathcal{E}_{p,q}^*$ порождено ковекторами

$$dz_I \wedge d\bar{z}_K = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q}.$$

Элементы пространства $\mathcal{E}_{p,q}^*$ называются ковекторами типа (p, q) .

2.4.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплекснозначная дифференциальная форма $\omega: V \rightarrow \wedge^r \mathfrak{X}(V)$ называется *формой типа (p, q)* , если $\omega(a) \in \mathcal{E}_{p,q}^*(V, a)$ для любой точки $a \in V$.

В терминах локальных координат ω есть форма типа (p, q) в том и только том случае, когда

$$\omega(a) = \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_p \\ k_1 < \dots < k_q}} \omega_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K, \quad J = (j_1, \dots, j_p), \quad K = (k_1, \dots, k_q).$$

Если V, W — комплексные многообразия и $f: V \rightarrow W$ — голоморфное отображение, то опять получается отображение

$$f_a^*: \mathfrak{X}_b^*(W) \rightarrow \mathfrak{X}_a^*(V), \quad b = f(a),$$

и мы можем определить прообраз $f^*(\omega)$ комплекснозначной p -формы на W , как это делалось в определении 2.4.4.

2.4.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если f — голоморфное отображение, $a \in V$ и $f(a) = b$, то

$$f_a^*(\mathcal{E}_{p,q}^*(W, b)) \subset \mathcal{E}_{p,q}^*(V, a).$$

В частности $f^*(\omega)$ имеет тип (p, q) , если ω — форма типа (p, q) на W .

◀ Достаточно показать, что

$$f_a^*(\mathcal{E}_{1,0}^*(W, b)) \subset \mathcal{E}_{1,0}^*(V, a).$$

Но это очевидно: если g — росток голоморфных функций в точке b , то

$$f_a^*((dg)_b) = d(g \circ f)_a \in \mathcal{E}_{1,0}^*(V, a),$$

так как $g \circ f$ — голоморфный росток. ▶

2.4.13. ЗАМЕЧАНИЕ. Мы можем определить *голоморфные векторные поля* X на комплексном многообразии V как голоморфные отображения $X: V \rightarrow T(V)$ (см. теорему 2.4.7), такие, что $X(a) \in T_a(V)$ для любой точки $a \in V$. Далее, для любой точки $a \in V$ пространство $T_a(V)$ является в очевидном смысле подпространством $\mathfrak{X}_a(V)$. Векторное поле $X: V \rightarrow T(V)$ мы назовем голоморфным, если $X(a) \in T_a(V)$ для любой точки a и X является голоморфным отображением в $T(V)$. Это поле голоморфно в том и только в том

случае, когда для каждой точки $a \in V$ найдется система координат (U, φ) , $a \in U$, такая, что в выражении

$$X(b) = \sum_{v=1}^n \left\{ \alpha_v(b) \left(\frac{\partial}{\partial z_v} \right)_b + \alpha'_v(b) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_v} \right)_b \right\}, \quad b \in U,$$

все $\alpha'_v(b)$ — нули, а все $\alpha_v(b)$ — голоморфные функции точки b .

Заметим, между прочим, что если X, Y — голоморфные векторные поля, то поле $[X, Y]$ тоже голоморфно.

§ 2.5. Подмногообразия

Пусть V — многообразие класса C^k , $k \geq 1$. Рассмотрим множество C^k -многообразий W и инъективных (т. е. взаимно однозначных) C^k -отображений $i: W \rightarrow V$, таких, что отображение

$$i_{*,a}: T_a(W) \rightarrow T_{i(a)}(V)$$

инъективно для любой точки $a \in W$. Две такие пары (W_1, i_1) и (W_2, i_2) называются эквивалентными, если существует C^k -диффеоморфизм $h: W_1 \rightarrow W_2$, такой, что $i_1 = i_2 \circ h$. Это есть отношение эквивалентности.

2.5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразием V называется класс эквивалентности пар (W, i) относительно определенной выше эквивалентности.

Мы будем часто отождествлять подмногообразие с одним из его представителей, когда это не вызовет недоразумений.

Если $m = \dim W = \dim T_a(W)$, $a \in W$ и $n = \dim V = \dim T_{i(a)}(V)$, то, очевидно, $m \leq n$.

2.5.2 ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\dim W = m$ и $a \in W$. Тогда, по теореме о ранге 2.2.11, найдутся системы координат (U, φ) в точке a и (U', φ') в $i(a)$, такие, что $\varphi' \circ i \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ совпадает с отображением

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Отсюда следует, что если (U_1, φ_1) — произвольная система координат в точке $a \in W$, $\varphi_1(x) = (y_1, \dots, y_m)$, то существует система координат (U_2, φ_2) в точке $i(a)$, $\varphi_2(u) = (u_1, \dots, u_n)$ для $u \in U_2$, такая, что $i^*(u_j) = y_j$ в некоторой окрестности точки a в W .

2.5.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть W — замкнутое подмножество C^k -многообразия V размерности n . Предположим, что у каждой точки $a \in W$ существует система координат (U, φ) на V , $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, такая, что

$$W \cap U = \{x \in U: x_{r+1} = \dots = x_n = 0\};$$

здесь r — фиксированное целое число, $0 \leq r \leq n$. Тогда W обладает естественной структурой C^k -многообразия и отображение вложения W в V превращает W в подмногообразие V .

Тривиальное доказательство этого факта мы опускаем.

2.5.4. Замечание. Определения и замечания, относящиеся к п. 2.5.1–2.5.3, применимы к действительным и комплексным многообразиям.

2.5.5. Следствие. Пусть V — некоторое C^k -($\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ -аналитическое) многообразие и $f_1, \dots, f_p$ ($1 \leq p \leq n$) суть C^k -($\mathbb{R}$ -аналитические, голоморфные) функции на V . Пусть

$$W = \{x \in V: f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\},$$

причем дифференциалы $(df_1)_a, \dots, (df_p)_a$ линейно независимы для всех $a \in W$. Тогда (W, i) , где i — обычное вложение, есть C^k -($\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ -аналитическое) подмногообразие V размерности $n - p$.

Это следует непосредственно из замечания 2.5.2 и теоремы о ранге 2.2.11, 2.4.9.

2.5.6. Пример. Множество

$$S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}: x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

называется n -мерной сферой. Положим $f(x) = x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$; тогда $(df)_a \neq 0$ при $a \in S^n$, и, значит, согласно следствию 2.5.5, S^n обладает естественной $\mathbb{R}$ -аналитической структурой.

Если (W, i) — подмногообразие V , то i , вообще говоря, не является гомеоморфизмом W на множество $i(W)$ (наделенное топологией, индуцируемой из V). Сейчас мы рассмотрим условия на i , при которых это все-таки имеет место.

2.5.7. Определение. Пусть V и W — локально компактные хаусдорфовы пространства. Непрерывное отображение $f: V \rightarrow W$ называется *локально собственным*, если для каждой точки $w \in f(V)$ можно подобрать компактную окрестность K этой точки в W , такую, что $f^{-1}(K)$ — компакт. Отображение f называется *собственным*, если для любого компакта $K \subset W$ множество $f^{-1}(K \cap f(W))$ — тоже компакт.

Известно, что собственное отображение переводит замкнутые подмножества из V в замкнутые подмножества из W (см. Бурбаки [2]). Отсюда следует, что *локально собственное отображение $f: V \rightarrow W$ является собственным в том и только в том случае, когда множество $f(V)$ замкнуто в W .* (Всякое собственное отображение, очевидно, локально собственное.)

2.5.8. Предложение. Пусть V — многообразие класса C^k и (W, i) — его подмногообразие. Отображение $i: W \rightarrow i(W)$ является

гомеоморфизмом W на множество $i(W)$ с топологией, индуцируемой из V , в том и только в том случае, когда i — локально собственное отображение.

« Предположим сначала, что i локально собственное. Тогда для заданной точки $a \in W$ существует компактная окрестность K точки $i(a)$ в V , такая, что $i^{-1}(K)$ — компакт и, следовательно, — компактная окрестность a . Итак,

$$i: i^{-1}(K) \rightarrow K \cap i(W)$$

— непрерывное взаимно однозначное отображение компактного хаусдорфова пространства на хаусдорфово пространство, а потому — гомеоморфизм. Отсюда, очевидно, следует, что отображение i^{-1} непрерывно всюду на $i(W)$.

Предположим теперь, что $i: W \rightarrow i(W)$ — гомеоморфизм. Тогда если $a \in W$ и C — некоторая компактная окрестность a в W , то $i(C)$ — компактная окрестность $i(a)$ в $i(W)$. Значит, найдется открытое подмножество $D \subset V$, такое, что

$$i(a) \in D \cap i(W) \subset i(C).$$

Пусть K — компактная окрестность $i(a)$, $K \subset D$. Очевидно,

$$K \cap i(W) \subset D \cap i(W) \subset i(C).$$

Так как i инъективно, отсюда следует, что $i^{-1}(K) \subset C$, и потому $i^{-1}(K)$ — компакт. ►

2.5.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмногообразие $\{(W, i)\}$ многообразия V называется *замкнутым*, если для некоторой представляющей его пары (W, i) отображение $i: W \rightarrow V$ собственное.

Заметим, что если пара (W', i') эквивалентна (W, i) , где i — собственное отображение, то i' тоже собственное.

Приведем теперь пример подмногообразия, которое не сохраняет топологию. Этот пример основан на следующей принадлежащей Кронекеру теореме, которую мы не будем доказывать. Красивое и простое доказательство намного более сильного утверждения дано Г. Вейлем [1].

2.5.10. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — действительные числа, линейно независимые над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел. Пусть

$$T^n = S^1 \times \dots \times S^1 = \{(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}): \theta_j \in \mathbb{R}\},$$

и пусть $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow T^n$ — отображение

$$t \mapsto (e^{i\lambda_1 t}, \dots, e^{i\lambda_n t}).$$

Тогда множество $\kappa(\mathbb{R})$ плотно в T^n .

2.5.11. Пример. Рассмотрим тор $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, $n > 1$, — аналитическое многообразие размерности n . Определенное выше отображение $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow T^n$ является инъективным. В самом деле, если $\kappa(t_1) = \kappa(t_2)$, то

$$\lambda_j t_1 = \lambda_j t_2 + 2\pi m_j, \quad m_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, n;$$

если $t_1 \neq t_2$ и если $k_1, \dots, k_n$ — целые числа, не все равные 0 и такие, что

$$\sum_{j=1}^n k_j m_j = 0$$

(они существуют при $n > 1$), то мы получаем

$$(t_1 - t_2) \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j = 0$$

в противоречие нашему предположению о независимости λ_j над $\mathbb{Z}$. Далее, $(d\kappa)_a \neq 0$ для каждой точки $a \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что пара $(\mathbb{R}, \kappa)$ определяет подмногообразие в T^n . Но κ не является локально собственным. Если бы это было так, то у любой точки $x_0 \in \kappa(\mathbb{R}) = S$ была бы замкнутая окрестность U в T^n , такая, что $S \cap U$ замкнуто в U (так как собственное отображение переводит замкнутые множества в замкнутые). Но по теореме 2.5.10, множество S плотно в T^n , так что $S \cap U = U$; поэтому отсюда следовало бы, что S также открыто в T^n . Но S не может содержать никакого открытого подмножества из T^n , так как $n > 1$ (например, это противоречило бы лемме 1.4.3).

Следующие три предложения устанавливают связь структуры C^k -подмногообразия со структурой объемлющего многообразия.

2.5.12. Предложение. Пусть V — многообразие класса C^k и (W, i) — его подмногообразие. Пусть M — произвольное C^k -многообразие и $f: M \rightarrow W$ — непрерывное отображение. Тогда f принадлежит классу C^k в том и только в том случае, когда $i \circ f: M \rightarrow V$ принадлежит C^k .

◀ Пусть $a \in W$; выберем системы координат (U, φ) в точке a , (U', φ') в $i(a)$,

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_m), \quad \varphi'(u) = (u_1, \dots, u_n),$$

такие, что $\varphi' \circ i \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ совпадает с отображением

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Тогда если

$$\varphi \circ f(y) = (y_1, \dots, y_m)$$

($y \in f^{-1}(U)$ — открытому множеству, ввиду непрерывности f), то

$$\varphi' \circ i \circ f(y) = (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0).$$

Наше предложение утверждает просто, что отображение

$$y \mapsto (y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0)$$

принадлежит классу C^k тогда и только тогда, когда классу C^k принадлежит

$$y \mapsto (y_1, \dots, y_m). \blacktriangleright$$

2.5.13. Предложение. Пусть V есть C^k -многообразие и (W, i) — его C^k -подмногообразие. Росток g_a непрерывных функций в точке $a \in W$ принадлежит C^k тогда и только тогда, когда существует росток G_b функций класса C^k в точке $b = i(a)$, такой, что $G_b \circ i = g_a$. Обратно, если i — непрерывное вложение C^k -многообразия W в C^k -многообразие V , обладающее этим свойством, то пара (W, i) является C^k -подмногообразием V .

◀ Предположим, что (W, i) — подмногообразие класса C^k . Выберем координаты (U, φ) в точке $a \in W$, (U', φ') в $b = i(a)$, такие, что $\varphi(U)$, $\varphi'(U')$ — кубы в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ соответственно и $\varphi' \circ i \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U)}$ есть отображение

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Тогда если $g \in C^k(U)$, а $G \in C^k(U')$ определяется условием

$$G \circ \varphi'^{-1}(x_1, \dots, x_n) = g \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m),$$

то, очевидно, $G \circ i = g$. Отсюда следует первая часть предложения.

Обратно, предположим, что $i: W \rightarrow V$ — непрерывное вложение, такое, что C^k -ростки в точке $a \in W$ — это в точности ростки вида $G \circ i$, где G пробегает множество всех C^k -ростков в точке $b = i(a)$.

Прежде всего мы утверждаем, что i — отображение класса C^k . Пусть $a \in W$ и $b = i(a)$, и пусть (U', φ') — система координат в точке b , $\varphi'(u) = (u_1, \dots, u_n)$. Тогда $\varphi' \circ i|_{i^{-1}\varphi'^{-1}(U')}$ есть отображение $x \mapsto (x_1, \dots, x_n)$, где $x_j = u_j \circ i$. Так как все $u_j \in C^k(U')$, то по предположению $x_j \in C^k(\varphi'^{-1}(U'))$; это означает, что i есть C^k -отображение.

Затем мы утверждаем, что если $a \in W$, $i(a) = b$, то существуют окрестности $D \ni a$, $D' \ni b$ и C^k -отображение $p: D' \rightarrow D$, такое, что $p \circ i$ — тождественное в D отображение. Пусть (U, φ) — система координат в точке a , $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_m)$. По предполо-

жению, если U достаточно мала и $i(U) \subset U'$, то существуют C^k -функции p_i в окрестности U' точки b , такие, что $p_i \circ i = x_i$. Предположим, что U' настолько мала, что на ней есть координаты φ . Очевидно, если $q = (p_1, \dots, p_m)$, то окрестность D' точки a можно выбрать так, что $p(D') \subset U$, где $p = \varphi^{-1} \circ q$. Ясно, что $p \circ i$ — тождественное отображение в окрестности a ; в частности, если D' достаточно мала, то множество $p(D') = D$ открыто в W и $p \circ i$ — тождественное отображение D .

Отсюда мы получаем, что $p_{*,b} \circ i_{*,a}$ — тождественное отображение $T_a(W)$ (согласно замечанию 2.2.1), в частности, $i_{*,a}$ — инъективное отображение. ►

2.5.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V есть C^k -многообразие со счетной базой и (W, i) — замкнутое C^k -подмногообразие (т. е. $i: W \rightarrow V$ — собственное отображение). Тогда для любой C^k -функции g на W найдется C^k -функция G на V , такая, что $g = G \circ i$.

◄ Пусть $W' = i(W)$; W' замкнуто в V . Для каждой точки $a \in W'$ существуют окрестность $U_a \ni a$ на многообразии V и C^k -функция G_a в U_a , такие, что $G_a \circ i = g$ в $i^{-1}(U_a)$; это следует из предложения 2.5.13 и того факта, что $i: W \rightarrow W'$ — гомеоморфизм. Рассмотрим открытое покрытие $\{U_a, V \setminus W'\}_{a \in W'}$ многообразия V . По теореме 2.2.14 существует разбиение единицы $\{\eta_a, \eta\}$, связанное с этим покрытием, т. е. набор C^k -функций η_a, η на V , таких, что $\eta_a, \eta \geq 0$, $\text{supp } \eta_a \subset U_a$, $\text{supp } \eta \subset V \setminus W'$, носители которых образуют локально конечное семейство и

$$\eta(x) + \sum_{a \in W'} \eta_a(x) = 1.$$

Определим функцию $h_a \in C^k(V)$, полагая

$$h_a(x) = \begin{cases} \eta_a(x) G_a(x), & x \in U_a \\ 0, & x \notin U_a; \end{cases}$$

тогда семейство $\{\text{supp } h_a\}$ локально конечно и потому

$$G = \sum_{a \in W'} h_a \in C^k(V).$$

Если $w \in W$ и

$$A = \{a \in W': i(w) \in U_a\},$$

то

$$\sum_{a \in A} \eta_a(i(w)) = \eta(i(w)) + \sum_{a \in W'} \eta_a(i(w)) = 1.$$

Отсюда

$$G \circ i(w) = \sum_{a \in A} G_a(i(w)) \eta_a(i(w)) = g(w) \sum_{a \in A} \eta_a(i(w)) = g(w). \quad \blacktriangleright$$

2.5.15. Замечания. Предложения 2.5.12, 2.5.13 и их доказательства переносятся на $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{C}$ -аналитические многообразия и соответствующие отображения и функции. Предложение 2.5.14 справедливо для $\mathbb{R}$ -аналитических многообразий (со счетной базой) и аналитических функций. Однако доказать это очень трудно; см. Картан [2] и Грауэрт [1]. Соответственное утверждение для комплексных многообразий (и голоморфных функций), вообще говоря, неверно. Очень важный частный случай, в котором оно все же выполняется (результат Ока [1]), будет разобран позже (см. теорему 2.14.9).

2.5.16. Замечание. Если V есть C^k -многообразие, (W, i) — его замкнутое подмногообразие и ω p -форма на V , то символом $\omega|W$ мы будем обозначать форму $i^*(\omega)$ на многообразии W .

§ 2.6. Внешнее дифференцирование

Пусть V — многообразие класса C^k , $k \geq 2$ и $A^p(V, r)$, $p > 0$, $0 \leq r < k$ — множество всех C^r -дифференциальных форм степени p на V . Если $p = 0$, то $A^0(V, r)$, где $0 \leq r \leq k$, означает множество всех C^r -функций на V . Результаты, которые мы будем сейчас обсуждать, справедливы как для действительных, так и для комплексных функций и форм.

2.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Внешней производной $d = d_V$ называется определенное для каждой пары (p, r) (где $1 \leq r < k$, если $p > 0$, и $1 \leq r \leq k$, если $p = 0$) отображение $d: A^p(V, r) \rightarrow A^{p+1}(V, r-1)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (a) d является $\mathbb{R}$ - (или $\mathbb{C}$ -) линейным для всех p и r ;
- (b) если $f \in A^0(V, r)$, $1 \leq r \leq k$, то df — это 1-форма ω , такая, что $\omega(a) = (df)_a$, т. е. образ f в $T_a^*(V)$ для всех $a \in V$;
- (c) если $f \in A^0(V, r)$, $2 \leq r \leq k$, то $d(df) = 0$;
- (d) если $\omega_1 \in A^p(V, r)$, $\omega_2 \in A^q(V, r)$, то

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Прежде чем приступить к доказательству существования и единственности внешней производной, мы выведем несколько следствий из условий (a) — (d).

2.6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Внешняя производная d — локальный оператор. Это означает, что если $\omega \in A^p(V, r)$ и $\omega|U = 0$ в некотором открытом множестве $U \subset V$, то $d\omega|U = 0$.

◀ Пусть $a \in U$, и пусть f — функция класса C^k на V , равная 0 в окрестности a и равная 1 в окрестности $V \setminus U$ (следствие 2.2.15). Тогда $\omega = f\omega$. Следовательно,

$$d\omega = (df) \wedge \omega + f \wedge (d\omega).$$

Так как $f=0$ в окрестности a и $\omega(a)=0$, то $(d\omega)(a)=0$. Ввиду произвольности $a \in U$ предложение доказано. ►

Заметим, что для существования указанной выше функции f вовсе не обязательно, чтобы у многообразия V была счетная база (хотя это предполагается в следствии 2.2.15). В самом деле, если U' — относительно компактная окрестность a , то (ввиду следствия 2.2.15) существует C^k -функция, равная 0 вблизи a и 1 в окрестности границы $\partial U'$ множества U' ; мы можем просто доопределить f единицей на $V \setminus U'$.

2.6.3. Предложение. Пусть $k \geq 3$, $r \geq 2$. Тогда $d^2=0$ на $A^p(V, r)$.

◄ Мы можем считать, что $p \geq 1$. Пусть $a \in V$. Заметим, что если $\omega \in A^p(V, r)$, то найдется p -форма ω' , которая является конечной линейной комбинацией форм вида

$$(2.6.4) \quad g \cdot dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p, \quad g \in C^r(V), \quad g_i \in C^k(V)$$

и для которой $\omega - \omega' = 0$ в окрестности a . В самом деле, если (U, φ) — система координат в точке a , $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ и

$$\omega(x) = \sum_J f_J(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}, \quad J = (j_1, \dots, j_p), \\ j_1 < \dots < j_p, \quad x \in U,$$

то в качестве ω' мы можем взять форму, полученную заменой f_J на ηf_J и x_i на ηx_i , где $\eta \in C^k(V)$, $\eta=1$ в окрестности a и имеет компактный носитель, принадлежащий U . Значит, по предложению 2.6.2, достаточно доказать, что $d^2\omega=0$ для форм ω , представимых в виде (2.6.4). Используя индукцию по p и условия 2.6.1 (c), (d), мы имеем

$$d(dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p) = 0.$$

Значит, из условия 2.6.1 (d) получается, что

$$d^2(g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p) = d^2(g) \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p = 0$$

(на последнем шаге используется свойство 2.6.1 (c)). ►

2.6.5. Теорема. Если V — многообразие класса C^k , $k \geq 2$, то внешняя производная существует и единственна.

◄ Единственность. Пусть d_1, d_2 — две внешние производные. По условию 2.6.1 (b), $d_1 f = d_2 f$, если $f \in C^r(V)$; кроме того, обе они являются локальными операторами. Поэтому достаточно показать, что $d_1 \omega = d_2 \omega$ в окрестности произвольной точки $a \in V$. Но в окрестности a форма ω является конечной линейной комбинацией форм типа (2.6.4). Значит, по предложению 2.6.2 достаточно доказать, что $d_1(g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p) = d_2(g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p)$.

Снова индукцией по p , учитывая условия 2.6.1 (с) и (d), мы получаем

$$d_j(g dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p) = dg \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_p, \quad j = 1, 2,$$

и единственность доказана.

Существование. Так как единственность доказана, то ввиду предложения 2.6.2 достаточно доказать существование внешней производной на многообразии V , C^k -диффеоморфном некоторому открытому множеству Ω в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi: V \rightarrow \Omega$ — этот C^k -диффеоморфизм и $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Любую форму $\omega \in A^p(V, r)$ можно единственным образом записать в виде

$$\omega(x) = \sum_J f_J(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}, \quad J = (j_1, \dots, j_p),$$

$$j_1 < \dots < j_p, \quad f_J \in C^r(V).$$

Положим

$$d\omega = \sum_J df_J \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p},$$

где df_J определено в соответствии с условием 2.6.1 (b). Проверка условий 2.6.1 (a), (b) тривиальна. Что касается условия 2.6.1 (с), то по предложению 2.1.11' мы имеем

$$(df)(x) = \sum_{v=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x f \cdot dx_v,$$

$$(d^2f)(x) = \sum_{v=1}^n \left\{ \sum_{\mu=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)_x \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x f \right] dx_\mu \right\} \wedge dx_v =$$

$$= \sum_{\mu < v} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right) \right] f \cdot dx_\mu \wedge dx_v = 0,$$

так как скобки Пуассона для векторных полей $(\partial/\partial x_\mu)$, $(\partial/\partial x_v)$ равны нулю.

Для проверки условия 2.6.1 (d) мы можем предположить, что

$$\omega_1 = f_1 dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}, \quad \omega_2 = f_2 dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_q},$$

или в сокращенной записи $\omega_1 = f_1 dx_J$ и $\omega_2 = f_2 dx_K$. Имеем

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (f_1 f_2) dx_J \wedge dx_K.$$

Очевидно, по определению

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(f_1 f_2) \wedge dx_J \wedge dx_K = \{(df_1) f_2 + f_1 (df_2)\} dx_J \wedge dx_K =$$

$$= df_1 \wedge dx_J \wedge f_2 dx_K + (-1)^p f_1 dx_J \wedge (df_2) \wedge dx_K;$$

мы пользуемся тем, что

$$d(f_1 f_2) = (df_1) f_2 + f_1 (df_2)$$

и что для всякого векторного пространства E имеют место тождества

$$e_0 \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_p = (-1)^p e_1 \wedge \dots \wedge e_p \wedge e_0, \quad e_j \in E, \quad 0 \leq j \leq p.$$

Это, очевидно, доказывает условие 2.6.1 (d), а с ним и теорему 2.6.5. ►

Мы уже отмечали, что пространство $T_a^*(V)$ двойственно к $T_a(V)$ (предложение 2.1.11). Поэтому $\wedge^p T_a^*(V)$ является сопряженным к пространству $\wedge^p T_a(V)$, и, значит, любой элемент $\omega_a \in \wedge^p T_a^*(V)$ можно рассматривать как альтернирующую мультилинейную функцию на $\bigoplus_{v=1}^p T_a(V)$, а любая p -форма ω порождает альтернирующее мультилинейное отображение пространства

$$\mathfrak{X}^p = \bigoplus_{v=1}^p \mathfrak{X},$$

где $\mathfrak{X}$ — пространство C^{k-1} -векторных полей на V (см. предложение 2.4.3), мультилинейное над кольцом C^{k-1} -функций.

2.6.6. Предложение. Если ω — некоторая p -форма класса C^{k-1} и $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}$, то отображение $d\omega: \mathfrak{X}^{p+1} \rightarrow R_{k-2}$ (где R_{k-2} — кольцо $C^{k-2}(V)$) задается равенством

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{v=1}^{p+1} (-1)^{v+1} X_v(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_v, \dots, X_{p+1})) + \\ + \sum_{\mu < v} (-1)^{\mu+v} \omega([X_\mu, X_v], X_1, \dots, \hat{X}_\mu, \dots, \hat{X}_v, \dots, X_{p+1});$$

здесь знак $\sim$ над X означает, что этот член надо опустить.

Так как вычисления при доказательстве этого предложения очень громоздки, мы докажем его для случая $p=1$; доказательство в общем случае получено Кошулем [1] совсем с другой точки зрения; по существу эта формула бралась им как определение внешней производной.

◀ Доказательство предложения 2.6.6 в случае $p=1$. Эту формулу достаточно доказать в окрестности произвольной точки, поэтому мы можем считать, что $\omega = f_1 df_2$, где $f_1 \in C^{k-1}(V)$, $f_2 \in C^k(V)$. Далее, мы имеем $d\omega = (df_1) \wedge (df_2)$ и

$$(df_1 \wedge df_2)(X_1, X_2) = \det \begin{pmatrix} (df_1)(X_1) & (df_1)(X_2) \\ (df_2)(X_1) & (df_2)(X_2) \end{pmatrix} = \\ = X_1(f_1)X_2(f_2) - X_1(f_2)X_2(f_1) = \\ = X_1[f_1X_2(f_2)] - X_2[f_1X_1(f_2)] - f_1X_1(X_2(f_2)) + f_1X_2(X_1(f_2)) = \\ = X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2]).$$

Это и есть требуемая формула. ►

2.6.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V, W — многообразия класса C^k и $f: V \rightarrow W$ — некоторое C^k -отображение. Тогда для любой p -формы ω на W мы имеем

$$(2.6.8) \quad d_V f^*(\omega) = f^*(d_W \omega);$$

здесь d_V, d_W означают соответственно внешние производные на V и W .

◀ Этот результат достаточно доказать для случая, когда W C^k -диффеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^m$. Кроме того, так как

$$f^*: A(W) \rightarrow A(V)$$

(A означает пространства всех дифференциальных форм) — алгебраический гомоморфизм, то, ввиду условия 2.6.1 (d), равенство (2.6.8) достаточно доказать для системы элементов $A(W)$, порождающих ее как алгебру. Так как W диффеоморфно открытому множеству в $\mathbb{R}^m$, то такая система задается элементами $\{h, dg\}$, где $h \in C^{k-1}(W)$ и $g \in C^k(W)$. По определению f_a^* ,

$$f_a^*(dh)_{f(a)} = d(h \circ f)_a,$$

что дает (2.6.8), если $\omega = h$. Если $\omega = dg$, то

$$f^*(d_W \omega) = 0 \quad \text{и} \quad d_V f^*(\omega) = d_V(d_V(g \circ f)) = 0. \quad \blacktriangleright$$

2.6.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальная форма ω на C^k -многообразии V называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Форма ω называется *точной*, если существует дифференциальная форма ω' , такая, что $d\omega' = \omega$; здесь $\omega \in C^{k-1}$, $\omega' \in C^k$.

Если V — многообразие класса C^∞ , то множество всех замкнутых p -форм класса C^∞ мы будем обозначать символом $Z^p(V)$, а множество всех точных p -форм — $B^p(V)$. Ввиду предложения 2.6.3 имеет место включение $B^p(V) \subset Z^p(V)$. Факторгруппы

$$H^p(V) = Z^p(V)/B^p(V)$$

называются *группами когомологий де Рама* многообразия V . Основная теорема, принадлежащая де Раму, утверждает, что эти группы являются *топологическими инвариантами* V , т. е. что *гомеоморфные* C^∞ -многообразия имеют изоморфные группы де Рама. Доказательство можно найти, например у А. Вейля [1].

Рассмотрим теперь внешнее дифференцирование на комплексном многообразии. Пусть V — комплексное многообразие, $a \in V$ и $\mathcal{E}_{p,q}^*(V, a)$ — пространство ковекторов типа (p, q) в точке a . Обозначим через $\mathcal{A}^{p,q}(V)$ пространство всех C^∞ -форм на V типа (p, q) ; тогда

$$\mathcal{A}(V) = \sum_{p,q \geq 0} \mathcal{A}^{p,q}(V)$$

есть пространство всех комплекснозначных дифференциальных форм на V . Как и раньше, мы можем определить внешнюю производную $d: \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(V)$ со свойствами 2.6.1 (a)–(d). В самом деле,

$$\mathcal{A}(V) = A(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

и поэтому определенный ранее оператор d продолжается на $\mathcal{A}(V)$.

Если $f \in C^\infty(V, \mathbb{C})$ и $a \in V$, то

$$(df)_a \in \mathfrak{L}_a^*(V) = \mathcal{E}_{1,0}^* \oplus \mathcal{E}_{0,1}^*.$$

Отсюда

$$(df)_a = (\partial f)_a + (\bar{\partial} f)_a,$$

где

$$(\partial f)_a \in \mathcal{E}_{1,0}^*(V, a), \quad (\bar{\partial} f)_a \in \mathcal{E}_{0,1}^*(V, a).$$

Значит, внешняя производная равна

$$df = \partial f + \bar{\partial} f,$$

где

$$\partial f \in \mathcal{A}^{1,0}(V), \quad \bar{\partial} f \in \mathcal{A}^{0,1}(V).$$

Теперь мы утверждаем, что

$$(2.6.10) \quad d\mathcal{A}^{p,q}(V) \subset \mathcal{A}^{p+1,q}(V) + \mathcal{A}^{p,q+1}(V).$$

Этот вопрос локальный, поэтому мы можем считать, что V совпадает с координатной окрестностью U . Пусть $\varphi(z) = (z_1, \dots, z_n)$ — комплексные координаты в U . Тогда каждый элемент из $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ является конечной линейной комбинацией элементов вида

$$\omega' = f dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q} \equiv f dz_J \wedge d\bar{z}_K,$$

но

$$d\omega' = (df) \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K = \partial f \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K + (-1)^p dz_J \wedge \bar{\partial} f \wedge d\bar{z}_K,$$

а эта сумма, очевидно, принадлежит пространству

$$\mathcal{A}^{p+1,q}(U) + \mathcal{A}^{p,q+1}(U).$$

Итак, если $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(V)$, мы определим $\partial\omega$, $\bar{\partial}\omega$ условиями

$$(2.6.11) \quad d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega, \quad \partial\omega \in \mathcal{A}^{p+1,q}(V), \quad \bar{\partial}\omega \in \mathcal{A}^{p,q+1}(V).$$

Ясно, что операторы ∂ и $\bar{\partial}$ продолжаются до $\mathbb{C}$ -линейных операторов на $\mathcal{A}(V)$. Так как $\mathcal{A}(V)$ есть *прямая* сумма $\sum_{p,q \geq 0} \mathcal{A}^{p,q}(V)$,

мы сразу видим, что равенство $d^2 = 0$ эквивалентно следующим:

$$(2.6.12) \quad \partial^2 = 0, \quad \bar{\partial}^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

Кроме того, если отображение $e \mapsto \bar{e}$ означает сопряжение $\mathcal{E}_{1,0}^* \rightarrow \mathcal{E}_{0,1}^*$, определенное в § 4, мы имеем

$$\bar{\partial} f = \overline{\partial(f)}, \quad f \in C^\infty(V, \mathbb{C}).$$

Пусть V, V' — комплексные многообразия и $f: V \rightarrow V'$ — голоморфное отображение. Пусть ω' — форма типа (p, q) на V' . По

предложению 2.6.7 имеем

$$d_V f^*(\omega') = f^*(d_W \omega').$$

Отсюда

$$\partial f^*(\omega') + \bar{\partial} f^*(\omega') = f^*(\partial \omega') + f^*(\bar{\partial} \omega').$$

По предложению 2.4.12, прообраз формы типа (p, q) при голоморфном отображении тоже имеет тип (p, q) . Отсюда из написанного выше уравнения следует, что

$$(2.6.13) \quad \partial f^* = f^* \partial, \quad \bar{\partial} f^* = f^* \bar{\partial},$$

если отображение $f: V \rightarrow V'$ голоморфно.

2.6.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциальная форма ω степени p на комплексном многообразии называется *голоморфной*, если она типа $(p, 0)$ и $\bar{\partial} \omega = 0$.

2.6.15. ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $f \in C^\infty(V, \mathbb{C})$ представляет голоморфную форму степени 0 тогда и только тогда, когда f — голоморфная функция. Форма ω типа $(p, 0)$ голоморфна в том и только в том случае, когда в любой системе комплексных координат (U, Φ) , $\Phi(z) = (z_1, \dots, z_n)$, она представляется в виде

$$\omega = \sum_I f_I dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p}, \quad I = (j_1, \dots, j_p), \quad j_1 < \dots < j_p,$$

где все f_I — голоморфные функции. Это вытекает непосредственно из следующего замечания.

2.6.16. ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве включения (2.6.10) мы получили, что форма ω типа (p, q) в локальных координатах имеет вид

$$\omega = \sum_{J, K} f_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K, \quad J = (j_1, \dots, j_p), \quad K = (k_1, \dots, k_q),$$

$$j_1 < \dots < j_p, \quad k_1 < \dots < k_q, \quad dz_J = dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p}, \\ d\bar{z}_K = d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q},$$

а потому

$$\begin{cases} \partial \omega = \sum_{J, K} \sum_v \left(\frac{\partial}{\partial z_v} \right) f_{JK} dz_v \wedge dz_J \wedge d\bar{z}_K, \\ \bar{\partial} \omega = \sum_{J, K} \sum_v (-1)^p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_v} \right) f_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_v \wedge d\bar{z}_K. \end{cases}$$

§ 2.7. Ориентация

2.7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V — многообразие класса C^k , $k \geq 1$, размерности n . Тогда V называется *ориентируемым*, если на V существует непрерывная n -форма ω , нигде не равная нулю.

Если V связно и ω_1, ω_2 — две n -формы, нигде не обращающиеся в 0, то существует непрерывная функция f , такая, что $\omega_1 = f\omega_2$; более того, f либо всюду положительна, либо всюду отрицательна. Если $f(x) > 0$ для всех x , мы назовем формы ω_1 и ω_2 эквивалентными; ориентация на V — это выбор одного из классов эквивалентных n -форм. На связном ориентируемом многообразии возможны только две ориентации. Пусть V — многообразие класса C^k и $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ — две системы координат на V . Тогда

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

есть C^k -отображение, и мы положим

$$d_{ij}(x) = \det \{d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x))\}.$$

2.7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Многообразие V ориентируемо тогда и только тогда, когда можно подобрать системы координат $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ так, что $V = \bigcup U_i$ и $d_{ij}(x) > 0$ для всех $i, j, x \in U_i \cap U_j$.

◀ Мы можем считать, что V связно. Пусть ω — непрерывная n -форма, нигде не равная нулю. Если (U_a, φ_a) — система координат, $\varphi_a(x) = (x_1, \dots, x_n)$, то пусть $\omega_a = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$; это есть n -форма на U_a , нигде не равная нулю. Для каждой точки $a \in V$ мы можем найти систему координат (U_a, φ_a) , такую, что $a \in U_a$ и $\omega = g_a \omega_a$, где g_a — непрерывная функция и $g_a(x) > 0$ для всех $x \in U_a$ (если надо, мы заменяем $\varphi_a(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ на $(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$). Кроме того, на $U_a \cap U_b$ мы имеем

$$\omega_a = d_{ab} \omega_b.$$

Поэтому $d_{ab} = g_b/g_a > 0$ на $U_a \cap U_b$.

Обратно, предположим, что $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — семейство систем координат, такое, что $V = \bigcup U_i$ и $d_{ij} > 0$ на $U_i \cap U_j$. Положим, как выше,

$$\omega_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

если $\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, класса C^k , подчиненное покрытию $\{U_i\}$, и

$$\omega = \sum \eta_i \omega_i.$$

Очевидно, что ω — форма класса C^{k-1} . Кроме того, если $a \in V$ и I — множество индексов i , таких, что $a \in \text{supp } \eta_i$ (это конечное непустое множество), то мы имеем

$$\omega(a) = \sum_{i \in I} \eta_i(a) \omega_i(a) = \left\{ \sum_{i \in I} \eta_i(a) d_{i, i_0}(a) \right\} \omega_{i_0}(a),$$

где $i_0 \in I$ фиксировано. Так как

$$\sum_{i \in I} \eta_i(a) = 1,$$

а $d_{i, i_0}(a) > 0$ для всех i и $\eta_i \geq 0$, мы заключаем, что $\omega(a) \neq 0$. ►

2.7.3. Замечание. Из доказательства видно, что на ориентируемом C^k -многообразии существует C^{k-1} -форма, нигде не равная нулю. Теперь рассмотрим расслоение

$$\wedge^n T^*(V) = \bigcup_{a \in V} \wedge^n T_a^*(V)$$

n -форм на V и в нем открытое множество

$$H = \{ \xi \in \wedge^n T^*(V) : \xi \in \wedge^n T_a^*(V) \text{ и } \xi \neq 0 \text{ в } \wedge^n T_a^*(V) \}.$$

Пусть $p: H \rightarrow V$ — отображение, такое, что $p(\xi) = a$, если $\xi \in \wedge^n T_a^*(V)$. Определим на H отношение эквивалентности, полагая $\xi_1 \sim \xi_2$, если $p(\xi_1) = p(\xi_2)$ и $\xi_1 = \lambda \xi_2$, где $\lambda > 0$. Пусть $\tilde{V}$ — факторпространство H по этому отношению. Нетрудно видеть, что $\tilde{V}$ — хаусдорфово пространство. Кроме того, отображение $p: H \rightarrow V$ индуцирует непрерывное отображение $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$.

2.7.4. Предложение. Отображение $\pi: \tilde{V} \rightarrow V$ является двулистным накрытием V , т. е. π — локальный гомеоморфизм $\tilde{V}$ на V и $\pi^{-1}(a)$ состоит из двух точек для каждой точки $a \in V$.

◀ Пусть $a \in V$ и (U, φ) — система координат, такая, что $a \in U$ и множество U связно. Пусть ω — нигде не равная нулю n -форма на U , определяемая условием

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \text{ если } \varphi(x) = (x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $\tilde{U}_1$ (соответственно $\tilde{U}_2$) есть множество точек $\tilde{x} \in \tilde{V}$, таких, что $\pi(\tilde{x}) = x \in U$ и $\omega(x) \in \tilde{x}$ (соответственно — $\omega(x) \notin \tilde{x}$). Очевидно, $\pi^{-1}(U) = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ и $\pi|_{\tilde{U}_1}$ — гомеоморфизмы на множество U . ▶

2.7.5. Предложение. Пусть V — связное C^k -многообразие. Тогда V ориентируемо в том и только в том случае, когда $\tilde{V}$ несвязно.

◀ Пусть V ориентируемо и ω — нигде не равная нулю n -форма на V . Форма ω является непрерывным отображением $V \rightarrow H$, которое индуцирует непрерывное отображение $\tilde{\omega}: V \rightarrow \tilde{V}$. Ясно, что $\pi \circ \tilde{\omega}$ — тождественное отображение, $\tilde{\omega}(V) \neq \tilde{V}$ и, таким образом, $\tilde{V}$ несвязно.

Если $\tilde{V}$ несвязно, обозначим через $\tilde{W}$ связную компоненту $\tilde{V}$. Ясно, что $\pi: \tilde{W} \rightarrow V$ — накрытие. Кроме того, на $\tilde{V}$ есть точка $\tilde{x}_0 \notin \tilde{W}$. Поэтому множество

$$\{ \tilde{x} \in \tilde{W} : \pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{x}_0) \}$$

состоит в точности из одного элемента. Так как $\pi|_{\tilde{W}}$ — накрытие и V связно, то отсюда следует, что $\pi: \tilde{W} \rightarrow V$ — гомеоморфизм.

Пусть теперь (U_i, φ_i) — семейство систем координат, такое, что $V = \bigcup U_i$ и $\omega_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \tilde{W}$ для всех $x \in U_i$ (здесь $(x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(x)$). Такое семейство существует: если $\omega_i(x_0) \notin \tilde{W}$ для некоторого x_0 , то мы заменим $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ на $(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. Если теперь $\omega_i = d_{ij}\omega_j$ на $U_i \cap U_j$, то, по определению отношения эквивалентности на H , мы получаем, что $d_{ij} > 0$ на $U_i \cap U_j$. Значит, по предложению 2.7.2, многообразие V ориентируемо. ►

2.7.6. Следствие. *Связное односвязное многообразие ориентируемо.* Это следует непосредственно из предложения 2.7.5.

Очевидно, что $\tilde{V}$ обладает естественной C^k -структурой (см. пример 2.1.7b). Можно доказать, что на $\tilde{V}$ всегда (даже когда V не ориентируемо) существует n -форма $\tilde{\omega}$, такая, что $\tilde{\omega}(\tilde{x}) = \lambda \pi_x^*(\xi)$, где $x = \pi(\tilde{x})$ и $\lambda > 0$ для всех $\xi \in \tilde{x} \in \tilde{V}$. Отсюда следует, что многообразие $\tilde{V}$ всегда ориентируемо.

§ 2.8. Многообразие с границей

Пусть $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_1 \geq 0\}$, и пусть Ω — (относительно) открытое подмножество $\mathbb{R}_+^n$. Мы будем говорить, что функция f в Ω принадлежит классу C^k , если существуют открытое множество Ω' в $\mathbb{R}^n$ и функция $F \in C^k(\Omega')$, такие, что $\Omega' \cap \mathbb{R}_+^n \supset \Omega$ и $F|_{\Omega} = f$. Аналогично определяются C^k -отображения Ω в $\mathbb{R}^m$.

2.8.1. Определение. Пусть V — хаусдорфово пространство. Предположим, что задано семейство пар $\{(U_i, \varphi_i)\}$, где U_i — открытые множества из V , а φ_i — гомеоморфизм U_i на открытое подмножество пространства $\mathbb{R}_+^n$, причем отображения $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)}$ принадлежат C^k для всех i, j . Тогда мы будем говорить, что это семейство определяет на V структуру C^k -многообразия с границей. Сама C^k -структура на V — это максимальное по вложению семейство пар $\{(U_i, \varphi_i)\}$ с указанными выше свойствами.

На C^k -многообразии V с границей ($k \geq 1$) можно определить C^k -функции и ростки, касательные векторы, дифференциальные формы, ориентацию и т. д. тем же способом, что и для обычных C^k -многообразий.

Для элемента $f \in C_{a, k}$, $a \in V$, мы будем писать $f \geq 0$, если $f(x) \geq 0$ для всех x , достаточно близких к a (и для некоторой функции, представляющей росток f).

2.8.2. Определение. Пусть V есть C^k -многообразие с границей. Мы будем говорить, что $a \in V$ — внутренняя точка, если найдется система координат (U, φ) , такая, что $a \in U$ и $\varphi(U)$ — открытое мно-

жество в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $\varphi(U)$ не пересекается с множеством $\{t_1=0\}$ в $\mathbb{R}_+^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n: t_1 \geq 0\}$). Точка a называется *граничной точкой*, если она не является внутренней; множество граничных точек V мы обозначим символом ∂V .

Заметим, что точка a принадлежит ∂V тогда и только тогда, когда существует система координат (U, φ) , $a \in U$, такая, что $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$ и $\varphi(a) = 0$. В этих координатах мы имеем

$$\partial V \cap U = \{x \in U: x_1 = 0, \text{ где } \varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)\}.$$

Отображение $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-1}$, очевидно, индуцирует гомеоморфизм $\partial V \cap U$ на открытое подмножество из $\mathbb{R}^{n-1}$; мы его обозначим через ψ . Кроме того, если (U, φ) , (U', φ') — две системы координат на V (такие, что $U \cap U' \cap \partial V \neq \emptyset$) и если ψ, ψ' — соответствующие гомеоморфизмы $\partial V \cap U, \partial V \cap U'$, то очевидно, что отображение

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}|_{\psi(U \cap U' \cap \partial V)}$$

является сужением C^k -отображения

$$\varphi' \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap U')}$$

на множество $t_1 = 0$ и потому само принадлежит классу C^k . Итак, мы получаем

2.8.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Граница ∂V любого C^k -многообразия с границей V обладает естественной структурой C^k -многообразия (без границы). Более того, сразу видно, что ∂V — замкнутое C^k -подмногообразие V (с естественным вложением $\partial V \rightarrow V$) и что касательное пространство $T_a(\partial V)$ к ∂V в точке $a \in \partial V$ есть подпространство $T_a(V)$.

2.8.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V есть C^k -многообразие с границей и $a \in V$. Касательный вектор $X \in T_a(V)$ называется *положительным* (или внутренней нормалью к ∂V), если для любого роста $f \in m_{a,k}$, такого, что $f \geq 0$, мы имеем $X(f) \geq 0$ и если существует по крайней мере один росток $f \in m_{a,k}$, $f \geq 0$, для которого $X(f) > 0$.

2.8.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть a — внутренняя точка V . Тогда мы утверждаем, что в точке a не существует ни одного положительного касательного вектора. В самом деле, если $f \in m_{a,k}$, $f \geq 0$, то представляющая f функция имеет в точке a локальный минимум. Поскольку первые частные производные C^1 -функции в открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$ в точках локального минимума равны нулю, мы заключаем, что $X(f) = 0$ для любого $X \in T_a(V)$.

2.8.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $a \in \partial V$ и (U, φ) — система координат в точке a , такая, что $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$, $\varphi(a) = 0$. Пусть $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ и вектор $X \in T_a(V)$ имеет разложение

$$X = \sum_{v=1}^n c_v \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_a.$$

Тогда X положителен в том и только в том случае, когда $c_1 > 0$.

◀ Если $f \in m_{a,k}$, $f \geq 0$, то росток $T \in m_{0,k}(\mathbb{R}^{n-1})$, определяемый условием

$$g(x_2, \dots, x_n) = f(0, x_2, \dots, x_n), \quad \text{где } (x_1, \dots, x_n) = \varphi(x),$$

имеет локальный минимум в 0 и, значит, $(\partial g / \partial x_v)_0 = 0$ при $v \geq 2$. Отсюда следует, что $X(f) = c_1 (\partial / \partial x_1)_a f$. Более того,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_a f &= \lim_{h \rightarrow +0} h^{-1} \{f(h, 0, \dots, 0) - f(0, \dots, 0)\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} h^{-1} f(h, 0, \dots, 0) \geq 0 \end{aligned}$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_a x_1 = 1.$$

Отсюда сразу следует наше предложение. ▶

2.8.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $a \in \partial V$ и X_1, X_2 — положительные касательные векторы в точке a , то существует $\lambda > 0$, такое, что $X_1 - \lambda X_2 \in T_a(\partial V)$.

◀ Пусть (U, φ) — система координат в точке a , $\varphi(a) = 0$ и

$$X_i = \sum_{v=1}^n c_v^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_a.$$

Подберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$c_1^{(1)} - \lambda c_1^{(2)} = 0$$

(это возможно ввиду предложения 2.8.6). Тогда $X_1 - \lambda X_2 \in T_a(\partial V)$. ▶

2.8.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент $\omega \in T_a^*(V)$, $a \in \partial V$, называется *положительным*, если $\omega(X) > 0$ для всех положительных $X \in T_a(V)$. Очевидно, что в локальных координатах (U, φ) , $\varphi(a) = 0$, $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ такой ковектор ω имеет вид $c(dx_1)_a$, $c > 0$.

2.8.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Ориентация на V индуцирует естественную ориентацию на ∂V .

◀ Пусть ω — некоторая n -форма на V , нигде не равная нулю. Покроем ∂V системами координат (U'_i, Φ'_i) так, чтобы для любой точки $y \in U'_i$ и любого положительного ковектора $e \in T_y^*(V)$ (см. определение 2.8.8) мы имели

$$e \wedge \omega'_i(y) = -\lambda \omega(y),$$

где $\omega'_i = dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ($\Phi'_i(x) = (x_1, \dots, x_n)$) и $\lambda > 0$ (мы рассматриваем $\Lambda^{n-1} T_y^*(\partial V)$ как подпространство в $\Lambda^{n-1} T_y^*(V)$). Сразу видно, что $\omega'_i = d'_{ij} \omega'_j$, причем $d'_{ij} > 0$ в $U'_i \cap U'_j$. Из доказательства предложения 2.7.2 следует существование $(n-1)$ -формы ω' на ∂V , такой, что $\omega'_i = g'_i \omega'$, где $g'_i > 0$ в U'_i . ▶

2.8.10. Замечание. Если D — открытое множество на C^k -многообразии V , причем для любой точки $a \in \bar{D} \setminus D$ имеются окрестность U в V и C^k -функция g в U , такие, что

$$(dg)_a \neq 0, \quad D \cap U = \{x \in U: g(x) > 0\},$$

то $\bar{D}$ является C^k -многообразием с границей и $\partial \bar{D}$ совпадает с топологической границей $\partial D = \bar{D} \setminus D$ множества D . Это следует непосредственно из теоремы о ранге.

2.8.11. Замечание. Если ориентировать $\mathbb{R}_+^n$ при помощи обычной n -формы $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, а $\mathbb{R}^{n-1}$ — при помощи формы $dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, то ориентация на $\partial \mathbb{R}_+^n$, индуцируемая на ней в соответствии с предложением 2.8.9, противоположна этой обычной ориентации.

§ 2.9. Интегрирование

Прежде чем вводить интегрирование на произвольном ориентированном многообразии, мы должны доказать формулу замены переменных в кратном интеграле. Приводимое ниже доказательство принадлежит Дж. Шварцу [1].

2.9.1. ТЕОРЕМА. Пусть Ω, Ω' — открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $h: \Omega' \rightarrow \Omega$ — диффеоморфизм класса C^1 . Тогда если f — непрерывная функция с компактным носителем в Ω , то

$$(2.9.2) \quad \int_{\Omega} f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega'} f \circ h(y) |\det dh(y)| dy \dots dy_n.$$

(Здесь $|\det dh(y)|$ — абсолютная величина определителя для дифференциала $dh(y)$ в точке y .)

◀ Сначала мы докажем этот результат для случая, когда h — линейное преобразование. Пусть A — матрица этого преобразования относительно канонического базиса в $\mathbb{R}^n$. По теореме

об элементарных делителях (см., например, Бурбаки [1]) А можно записать в виде произведения конечного числа матриц A_v , каждая из которых либо диагональная (в нашем случае — без нулей на диагонали), либо является элементарной матрицей, т. е. матрицей, соответствующей одному из линейных преобразований

(а) $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \dots, x_n)$ (перестановка x_j и x_k , $j < k$) или

(б) $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$.

Очевидно, достаточно доказать (2.9.2) для каждого из этих преобразований в отдельности. Для диагональных матриц и преобразований (а) это тривиально следует из теоремы Фубини. Для преобразования (б) мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} f \circ h(y) |\det dh(y)| dy_1 \dots dy_n &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{\mathbb{R}} f(x_1 + x_2, \dots, x_n) dx_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega} f(x) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы в общем случае мы продолжим следующим образом. Достаточно доказать, что для любой непрерывной неотрицательной f с компактным носителем выполняется неравенство

$$(2.9.3) \quad \int_{\Omega} f(x) dx_1 \dots dx_n \leq \int_{\Omega'} (f \circ h) |\det h(y)| dy_1 \dots dy_n.$$

В самом деле, если в (2.9.3) поменять местами Ω и Ω' и вместо h , f рассматривать соответственно h^{-1} и $f \circ h$ на Ω' , то мы получим равенство (2.9.2) для неотрицательных f . Так как всякая непрерывная функция с компактным носителем является разностью двух неотрицательных непрерывных функций с компактными носителями, то это даст (2.9.2) в общем случае.

Далее, для доказательства неравенства (2.9.3) достаточно доказать следующее утверждение: если Q — замкнутый куб в Ω' , то

$$(2.9.4) \quad m(h(Q)) \leq \int_Q |\det dh(y)| dy_1 \dots dy_n,$$

где $m(S)$ — мера Лебега измеримого множества S в $\mathbb{R}^n$. В самом деле, отсюда следовало бы (2.9.3), так как неотрицательная непрерывная функция $f \circ h$ с компактным носителем является равномерным пределом конечных линейных комбинаций $\sum c_j \chi_{Q_j}$, где константы $c_j \geq 0$, Q_j — замкнутые кубы и χ_S — характеристическая функция множества S (равная 1 на S и 0 вне S).

Доказательство неравенства (2.9.4). Пусть K — замкнутый куб в Ω' с ребрами, равными δ . Для $(n \times n)$ -матрицы $M = (a_{ij})$ мы определим норму

$$\|M\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Если I — единичная матрица, то, очевидно, $\|I\| = 1$. Если $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей M , то мы будем писать $\|l\| = \|M\|$.

Отображение $h: \Omega' \rightarrow \Omega$ задается n функциями, $h = (h_1, \dots, h_n)$. По формуле Тейлора 1.1.9 для любых точек $x, y \in K$ мы имеем

$$h_j(x) - h_j(y) = \sum_k \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(t_j)(x_k - y_k),$$

где $t_j \in K$. Следовательно,

$$|h_j(x) - h_j(y)| \leq \delta \|(dh)(t_j)\| \leq \delta \sup_{a \in K} \|dh(a)\|.$$

Отсюда сразу следует, что

$$(2.9.5) \quad m(h(K)) \leq \delta^n \left\{ \sup_{a \in K} \|dh(a)\| \right\}^n = m(K) \sup_{a \in K} \|dh(a)\|^n.$$

Пусть $a \in K$ и l — линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$, определяемое условием

$$l^{-1} = (dh)(a).$$

Пусть $g = l \circ h$. Тогда

$$m(g(K)) = |\det l| m(h(K)),$$

так как равенство (2.9.2) для линейных преобразований доказано. Если мы применим к g неравенства (2.9.5), то получим

$$(2.9.6) \quad m(h(K)) \leq |\det dh(a)| m(K) \sup_{y \in K} \|dh(a)^{-1} \circ dh(y)\|^n.$$

Очевидно, $dh(a)^{-1} \circ dh(y)$ стремится к I при $\delta \rightarrow 0$ (т. е. при $\|y - a\| \rightarrow 0$) равномерно по a из любого компактного подмножества Ω' . Поэтому найдется функция $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, такая, что $\lambda(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и

$$\sup_{y \in K} \|dh(a)^{-1} \circ dh(y)\| \leq 1 + \lambda(\delta), \quad a \in Q$$

(Q — некоторый замкнутый куб в Ω'). Разобьем Q на N^n кубов K_j с ребром δ , в N раз меньшим, чем ребро Q . Тогда, учитывая (2.9.6), мы получим для $a_j \in K_j$

$$m(h(Q)) \leq \sum_j m(h(K_j)) \leq (1 + \lambda(\delta)) \sum_j |\det dh(a_j)| m(K_j).$$

При $N \rightarrow \infty$ выражение справа стремится к

$$\int_Q |\det dh(y)| dy_1 \dots dy_n,$$

что доказывает неравенство (2.9.4), а вместе с ним и всю теорему. ►

Перейдем теперь к изучению интегрирования на ориентируемых многообразиях. Пусть V — ориентируемое C^k -многообразие размерности n ($k \geq 1$) с границей или без. Пусть ω — непрерывная n -форма на V с компактным носителем. Мы предполагаем, что V имеет счетную базу и ориентировано, т. е. что на V задана некоторая n -форма ω_0 , нигде не равная нулю. Пусть (U, φ) , (U, ψ) — две системы координат (с одним и тем же U). Напишем

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n), \quad \psi(x) = (y_1, \dots, y_n)$$

и положим

$$\theta_1 = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \theta_2 = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Тогда

$$\theta_j = f_j \omega_0, \quad f_j \in C^0(U), \quad j = 1, 2.$$

Мы будем предполагать, что координаты выбраны так, что $f_j > 0$. (Заменим x_n или y_n на $-x_n$ или $-y_n$, если это необходимо.) Такие системы координат мы будем называть *положительными* относительно ω_0 . В U , очевидно, имеем

$$\omega = g_1 \theta_1 = g_2 \theta_2, \quad g_j \in C^0(U), \quad j = 1, 2.$$

2.9.7. Замечание. Мы утверждаем, что если g_1 (и, значит, g_2) имеет компактный носитель в U , то

$$\int_{\varphi(U)} g_1 \circ \varphi^{-1} dx_1 \dots dx_n = \int_{\psi(U)} g_2 \circ \psi^{-1} dy_1 \dots dy_n.$$

В самом деле, если мы положим

$$u(x) = \det d(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)), \quad x \in U,$$

то получим, что

$$\theta_1(x) = u(x) \theta_2(x),$$

а потому $u(x) = f_1(x)/f_2(x) > 0$. Теперь можно применить теорему 2.9.1 и тот факт, что

$$[g_1 \circ \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ \Psi^{-1})](\Psi(x)) \cdot d(\Phi \circ \Psi^{-1})(\Psi(x)) = g_2 \circ \Psi^{-1}(\Psi(x));$$

это даст нам утверждение 2.9.7.

Теперь мы можем определить интеграл от формы ω по многообразию V . Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — семейство систем координат на $V = \bigcup U_i$, положительное относительно ω_0 , т. е. такое, что если θ_i есть форма $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, связанная с $\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_n)$, то $\theta_i = f_i \omega_0$ на U_i , где $f_i > 0$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$ и

$$\omega = g_i \theta_i \text{ на } U_i.$$

Мы полагаем

$$(2.9.8) \quad \int_V \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} (\eta_i g_i) \circ \varphi_i^{-1} dx_1 \dots dx_n.$$

Из замечания 2.9.7 непосредственно вытекает, что эта величина не зависит от выбора систем координат $\{(U_i, \varphi_i)\}$ и разбиения единицы $\{\eta_i\}$. Если заменить ω_0 другой формой ω'_0 , определяющей ту же ориентацию, то интеграл тоже не меняется.

2.9.9. ТЕОРЕМА СТОКСА. Пусть V — ориентируемое C^k -многообразие размерности n со счетной базой, и пусть $(n-1)$ -форма ω класса C^1 на V имеет компактный носитель. Тогда

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega.$$

В частности, эта формула справедлива для всех C^1 -форм ω , если V — компакт. (Если $\partial V = \emptyset$, то слева стоит 0.)

◀ Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — семейство систем координат, такое, что $\bigcup U_i = V$,

$$\theta_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = f_i \omega_0,$$

$$\varphi_i(x) = (x_1, \dots, x_n)$$

и $f_i > 0$. Пусть $\{\eta_i\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Достаточно доказать, что

$$\int_{\partial V} \eta_i \omega = \int_V d(\eta_i \omega).$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $U_i \cap \partial V = \emptyset$; тогда $\varphi_i(U_i)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и

$$\int_{\partial V} \eta_i \omega = 0.$$

Мы можем считать, что само U_i — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ (согласно замечанию 2.9.7). Пусть

$$\eta_i \omega = \sum_{j=1}^n g_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где знак $\wedge$ над dx_j означает, что этот множитель надо опустить. Тогда мы имеем

$$d(\eta_i \omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_V d(\eta_i \omega) &= \sum_{j=1}^n \int_{U_i} (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = 0, \end{aligned}$$

так как $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = 0$, поскольку все g_j имеют компактные носители.

Случай II. $U_i \cap \partial V \neq \emptyset$. В этом случае $\varphi_i(U_i)$ — (относительно) открытое множество в $\mathbb{R}_+^n$ и

$$\varphi_i(U_i) \cap \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_1 = 0\} \neq \emptyset.$$

Снова мы можем предположить, что U_i — открытое множество в $\mathbb{R}_+^n$. Как и в случае I, если

$$\begin{aligned} \eta_i \omega &= \sum_{j=1}^n g_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n, \\ d(\eta_i \omega) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned}$$

то

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n = 0, \quad \text{когда } j \neq 1.$$

Более того, если $j \neq 1$, то

$$g_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n|_{\partial V} = 0$$

(см. определение 2.5.16) и, кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 \dots dx_n &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \dots \int_0^{\infty} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\int_V d(\eta_t \omega) = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_t(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int_{\partial V} \eta_t \omega$$

(см. замечание 2.8.11). ►

§ 2.10. Однопараметрические группы

В этом параграфе V будет обозначать C^k -многообразие размерности n со счетной базой; предполагается, что $k \geq 3$.

2.10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $g: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — отображение класса C^r и $g_t: V \rightarrow V$ — отображение $x \mapsto g(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$. Мы назовем g *однопараметрической группой C^r -преобразований V* , если g_t для каждого t является C^r -дiffeоморфизмом V на себя и для любых $t, s \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$g_{s+t} = g_s \circ g_t;$$

в частности, g_0 — тождественное отображение.

Пусть U — открытое множество на многообразии V , $\varepsilon > 0$ и $I = \{t \in \mathbb{R}: |t| < \varepsilon\}$. Пусть $g: I \times U \rightarrow V$ — отображение класса C^r , а $g_t: U \rightarrow V$, как и выше, — отображение $x \mapsto g(t, x)$. Тогда g называется *локальной однопараметрической группой C^r -преобразований*, если g_t для каждого $t \in I$ является C^r -дiffeоморфизмом U на открытое подмножество V , g_0 — тождественное отображение и всякий раз, когда $s, t, s+t \in I$, а $x, g_t(x) \in U$, мы имеем

$$g_{s+t}(x) = g_s \circ g_t(x).$$

Пусть $g: I \times U \rightarrow V$ — локальная однопараметрическая группа C^r -преобразований. Определим C^{r-1} -векторное поле $X = X_g$ на U следующим образом. Пусть $a \in U$ и $f \in C_{a,k}$. Мы полагаем

$$X(a)(f) = \left. \frac{d(f \circ g_t(a))}{dt} \right|_{t=0},$$

заметим, что точки $g_t(a)$ близки к a при достаточно малых t , так как g_0 — тождественное отображение. Обратно, имеем

2.10.2. Предложение. Пусть X — векторное поле класса C^{k-1} на V и $a \in V$. Тогда найдется окрестность U точки a и локальная однопараметрическая группа преобразований U в V , такая, что X индуцируется группой g на U , т. е. $X = X_g$ на U .

◀ Достаточно доказать предложение для случая, когда V — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть векторное поле X имеет разложение

$$X(x) = \sum_{v=1}^n a_v(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_v} \right)_x, \quad x \in V.$$

По теореме 1.8.14 существуют $\delta > 0$, окрестность U_0 точки a и C^{k-1} -отображение

$$g: I_0 \times U_0 \rightarrow V \quad (I_0 = \{t \in \mathbb{R}: |t| < \delta\}),$$

такие, что

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = a(g(t, x)), \quad g(0, x) = x, \quad x \in U,$$

где $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$. Мы утверждаем, что g — локальная однопараметрическая группа. Чтобы доказать это, положим $g_t(x) = g(t, x)$ и выберем интервал

$$I = \{t: |t| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

и окрестность U точки a столь малыми, что

$$g_{s+t}(U) \subset U_0 \quad \text{для всех } s, t \in I.$$

Фиксируем $s \in I$ и положим $h_t = g_t \circ g_s$ на U . Мы сразу видим, что h_t и g_{t+s} удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a(u(t, x)), \quad u(0, x) = g_s(x), \quad x \in U, \quad t \in I.$$

Отсюда, ввиду единственности решения такого уравнения (см. теорему 1.8.4), мы имеем

$$h_t = g_{t+s}, \quad \text{т. е.} \quad g_{t+s} = g_t \circ g_s.$$

В частности, $g_t \circ g_{-t} = g_0$ — тождественное отображение, откуда следует, что все g_t — диффеоморфизмы класса C^k при $t \in I$.

Если $f \in C_{b,k}$, $b \in U$, то

$$\left. \frac{d(f \circ g_t(b))}{dt} \right|_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_v}(b) \left. \frac{\partial g_{t,v}(b)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum a_v(b) \frac{\partial f}{\partial x_v}(b) = X(b)(f)$$

($g_t = (g_{t,1}, \dots, g_{t,n})$), т. е. эта однопараметрическая группа g индуцирует наше векторное поле X на U . ▶

2.10.3. Замечание. Как следует из утверждения о единственности в теореме 1.8.4, эта локальная однопараметрическая группа g в очевидном смысле единственная.

2.10.4. ТЕОРЕМА. Пусть X — векторное поле класса C^{k-1} с компактным носителем на V . Тогда существует единственная однопараметрическая группа g C^{k-1} -преобразований V , которая индуцирует это поле X на V ; кроме того, $g(t, x) = x$ для всех t , если x лежит вне некоторого компактного подмножества V .

◀ Пусть K — компакт, такой, что $X(a) = 0$, если $a \notin K$. По предложению 2.10.2 для любой точки $a \in K$ найдется окрестность U_a и локальная однопараметрическая группа $g_t^{(a)}: U_a \rightarrow V$, $|t| < \varepsilon(a)$, индуцирующая X на U_a . Подберем точки a_v , $1 \leq v \leq p$, так, чтобы

$$U = \bigcup_{1 \leq v \leq p} U_{a_v} \supset K,$$

и положим

$$\varepsilon = \min_v \varepsilon(a_v).$$

Если $U_{a_v} \cap U_{a_\mu} \neq \emptyset$, то $g_t^{(a_v)}$ индуцируют на $U_{a_v} \cap U_{a_\mu}$ одно и то же векторное поле и поэтому совпадают при $|t| < \varepsilon$. Значит, мы можем определить g_t на U , полагая $g_t(x) = g_t^{(a_v)}(x)$, если $x \in U_{a_v}$. Кроме того, если $x \in U$, $x \notin K$, то $X(x) = 0$, и поэтому для всех $f \in C_{x,k}$ мы имеем

$$\left. \frac{df \circ g_t(x)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Из утверждения о единственности в теореме 1.8.4 следует, что $g_t(x) \equiv x$. Поэтому мы можем продолжить $g: I \times U \rightarrow V$ до отображения $g: I \times V \rightarrow V$, полагая $g(t, x) = x$, если $x \notin K$; здесь $I = \{t: |t| < \varepsilon\}$. Кроме того, если $t, s, t+s \in I$, то для любого $x \in V$ мы имеем $g_{t+s}(x) = g_t \circ g_s(x)$.

Если теперь $t \in \mathbb{R}$ произвольно, то мы подберем целое число $p > 0$ так, чтобы $t' = t/p \in I$, и положим

$$g_t = g_{t'} \circ \dots \circ g_{t'}$$

(p -кратная композиция $g_{t'}$). Непосредственно видно, что этим определено C^{k-1} -отображение $g: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, которое является однопараметрической группой и продолжает наше отображение $g: I \times V \rightarrow V$; в частности, g индуцирует векторное поле X . ►

2.10.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть U — открытое подмножество V и $\sigma: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм класса C^k множества U на открытое подмножество V . Пусть X — векторное поле на U . Тогда σ индуцирует векторное поле $\sigma_*(X)$ на $U' = \sigma(U)$, где

$$\sigma_*(X)(\sigma(a)) = \sigma_{*,a}(X(a))$$

(см. замечание 2.4.5). Если $f \in C^k(U')$, то мы имеем

$$\sigma_*(X)(f) = X(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}.$$

Значит, если X, Y — два векторных поля на U и $f \in C^k(U')$, то

$$\begin{aligned} [\sigma_*(X), \sigma_*(Y)](f) &= \sigma_*(X)\{Y(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}\} - \sigma_*(Y)\{X(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}\} = \\ &= (X(Y(f \circ \sigma)) - Y(X(f \circ \sigma))) \circ \sigma^{-1} = \sigma_*([X; Y])(f), \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$(2.10.6) \quad \sigma_*([X; Y]) = [\sigma_*(X), \sigma_*(Y)].$$

Пусть теперь $\sigma = U \rightarrow U'$ — указанный выше C^r -диффеоморфизм. Пусть $W \subseteq U$, $W' = \sigma(W)$ и $g: I \times U \rightarrow V$ — локальная однопараметрическая группа, индуцирующая векторное поле X на U . Тогда если интервал I достаточно мал, то $g(I \times W) \subset U'$, и поэтому отображение $t \mapsto \sigma \circ g_t \circ \sigma^{-1}$ определяет локальную однопараметрическую группу $g': I \times W' \rightarrow V$. Если $f \in C^k(W')$ и $a \in W'$, то мы имеем

$$\sigma_*(X)(f)(a) = X(f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1}(a) = \left. \frac{d(f \circ \sigma \circ g_t \circ \sigma^{-1}(a))}{dt} \right|_{t=0},$$

и, значит, g' индуцирует на W' векторное поле $\sigma_*(X)$. Таким образом, мы получаем

2.10.7. Следствие. Если $\sigma(W) = W'$, так же как и W , относительно компактно в U , то равенство

$$\sigma \circ g_t(x) = g_t \circ \sigma(x)$$

для $x \in W$ и всех малых t выполняется в том и только в том случае, когда для всех $a \in W$ мы имеем

$$\sigma_{*,a}(X(a)) = X(\sigma(a)).$$

2.10.8. Определение. Пусть $g: I \times U \rightarrow V$ — локальная однопараметрическая группа C^r -преобразований, $r \geq 2$, и X — векторное поле на U . Мы скажем, что поле X инвариантно относительно g , если для любой точки $a \in U$ и всех достаточно малых t имеет место равенство

$$(g_t)_{*,a}(X(a)) = X(g_t(a)).$$

Пусть теперь $g: I \times U \rightarrow V$, как и выше, — локальная однопараметрическая группа C^r -преобразований, и пусть U' — открытое множество, $U' \subseteq U$. Пусть Y — векторное поле класса C^r на U , $r \geq 2$. Для всех достаточно малых t определим векторное поле Y_t на U' , полагая

$$Y_t(f) = Y(f \circ g_t) \circ g_{-t} = (g_t)_*(Y)(f),$$

и векторное поле dY_t/dt , полагая $(dY_t/dt)(f) = dY_t(f)/dt$.

2.10.9. Предложение. Для всех достаточно малых t на U' выполняется равенство

$$dY_t/dt = [Y_t, X],$$

где X — векторное поле на U , индуцируемое группой g (и потому инвариантное относительно g ввиду следствия 2.10.7).

◀ Положим $Z = dY_t/dt$. При $f \in C^k(U)$ мы имеем

$$\begin{aligned} Z_0(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \{Y(f \circ g_t) \circ g_{-t} - Y(f)\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \{Y(f \circ g_t) - Y(f) - Y(f) \circ g_t + Y(f) \circ g_{-t}\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} Y(f \circ g_t - f) - \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (Y(f) \circ g_t - Y(f)), \end{aligned}$$

если эти последние два предела существуют равномерно на U' , так как $\lim_{t \rightarrow 0} g_{-t}$ — тождественное отображение. По определению поля X мы имеем

$$X(Y(f)) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \{Y(f) \circ g_t - Y(f)\}$$

равномерно на U' . Пусть теперь $h(t, x) = f \circ g_t(x)$. Очевидно, $h \in C^2(I \times U')$, если $I \in \mathbb{R}$ — достаточно малый интервал, содержащий 0. Следовательно, функция

$$F = \begin{cases} t^{-1}(f \circ g_t - f) = t^{-1}(h(t, x) - h(0, x)) & \text{при } t \neq 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t}(0, x) & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

принадлежит $C^1(I \times U')$, и потому

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} Y(f \circ g_t - f) = Y\left(\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(f \circ g_t - f)\right) = Y(X(f)).$$

Отсюда для $f \in C^k(U)$ мы получаем равенство

$$Z_0(f) = [Y, X](f) = [Y_0, X](f).$$

Это означает, очевидно, что $Z_0 = [Y_0, X]$ на U' .

Если теперь t_0 достаточно мало, то

$$(g_{t_0})_* Z_0 = Z_{t_0} \quad \text{и} \quad (g_{t_0})_* [Y_0, X] = [(g_{t_0})_* Y_0, (g_{t_0})_* X] = [Y_{t_0}, X] \quad \text{на } U',$$

чем и завершается доказательство. ►

2.10.10. Предложение. Пусть $g, h: I \times U \rightarrow V$ — локальные однопараметрические группы, индуцирующие на U векторные поля X и Y класса C^r , $r \geq 2$. Тогда равенство $g_t \circ h_s(x) = h_s \circ g_t(x)$ выполняется для любого множества $U' \subseteq U$, $x \in U'$ и всех достаточно малых t, s в том и только в том случае, когда $[X, Y] = 0$ на U .

◀ Если g_t, h_s коммутируют на U' при малых t, s , то сразу видно, что Y инвариантно относительно g_t (определение 2.10.8) и поэтому на U' (по предложению 2.10.9)

$$0 = \frac{dY_t}{dt} \Big|_{t=0} = [Y, X].$$

Так как $U' \subseteq U$ произвольно, то всюду на U

$$[X, Y] = -[Y, X] = 0.$$

Обратно, если $[X, Y] = 0$, мы имеем

$$dY_t/dt = (g_t), \quad [Y, X] = 0$$

(по предложению 2.10.9) и, значит, Y инвариантно относительно g . Остается применить следствие 2.10.7. ►

2.10.11. Замечание. Все результаты этого параграфа имеют аналоги для комплексно-аналитических многообразий V и голоморфных векторных полей. Вводятся голоморфные (локальные) однопараметрические группы, которые являются голоморфными отображениями $g: (I \times U) \subset \mathbb{C} \times V \rightarrow V$ с очевидными свойствами. Тогда голоморфные векторные поля и голоморфные локальные однопараметрические группы, как и выше, соответствуют друг другу. Коммутирование элементов различных групп опять соответствует обращению в нуль скобок Пуассона.

Доказательства этих фактов совпадают с приведенными выше, и поэтому мы их опускаем.

По поводу затронутых здесь вопросов см. Номидзу [1].

§ 2.11. Теорема Фробениуса

Пусть V — многообразие класса C^k размерности n со счетной базой и $k \geq 3$.

2.11.1. Определение. Говорят, что на V задана дифференциальная система $\mathfrak{D}$ ранга p , если в каждой точке $a \in V$ выделено некоторое подпространство $\mathfrak{D}(a) \subset T_a(V)$ размерности p . Система $\mathfrak{D}$ называется дифференцируемой класса C^r ($0 \leq r < k$), если у каждой точки $a \in V$ имеется окрестность U и в ней C^r -векторные поля $X_1, \dots, X_p$, такие, что векторы $X_1(b), \dots, X_p(b)$ образуют базис пространства $\mathfrak{D}(b)$ для каждой точки $b \in U$. В этом случае говорят, что поля X_i порождают систему $\mathfrak{D}$ на множестве U .

2.11.2. Определение. Пусть $\mathfrak{D}$ — дифференциальная система ранга p . Подмногообразие $i: W \rightarrow V$ называется интегралом (или интегральным многообразием) системы $\mathfrak{D}$, если в любой точке $a \in W$ имеет место включение

$$i_{*,a}(T_a(W)) \subset \mathfrak{D}(i(a)).$$

Мы будем говорить также, что C^r -отображение $f: V' \rightarrow V$ является интегралом $\mathfrak{D}$, если для всех $a \in V'$

$$f_{*,a}(T_a(V')) \subset \mathfrak{D}(f(a)).$$

Заметим, что подмногообразие интеграла — тоже интеграл.

2.11.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система $\mathfrak{D}$ называется *вполне интегрируемой*, если для любой точки $a \in V$ найдется система координат (U, φ) , $a \in U$, $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, такая, что для всех c_j , $p < j \leq n$, многообразия

$$U_c = \{x \in U: x_j = c_j, p < j \leq n\}$$

являются интегралами $\mathfrak{D}$.

Пусть $\mathfrak{D}$ — вполне интегрируемая система и $a \in V$. Выберем систему координат (U, φ) , $a \in U$, для которой выполняется условие определения 2.11.3. Тогда мы имеем

2.11.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $i: W \rightarrow U$ — интеграл и многообразие W связно, то $i(W) \subset U_c$ для некоторого $c = (c_{p+1}, \dots, c_n)$.

◀ Пусть $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Ясно, что пространство $T_b(U_c)$ для любой точки $b \in U$, $b = (b_1, \dots, b_p, c_{p+1}, \dots, c_n)$, имеет размерность p и принадлежит $\mathfrak{D}(b)$; поэтому $T_b(U_c) = \mathfrak{D}(b)$. Далее, $T_b(U_c)$ состоит из тех векторов в $T_b(V)$, которые аннулируются ковекторами $(dx_j)_b$, $p < j \leq n$. Следовательно, если $i: W \rightarrow V$ — интеграл $\mathfrak{D}$, то $i^*(dx_j) = 0$, $p < j \leq n$. Так как W связно, то отсюда следует, что функции $x_j \circ i$ постоянны на W , чем и доказывается наше утверждение. ▶

В частности, интегральные подмногообразия $\{U_c\}$ при достаточно малых c не зависят от выбора системы координат (U, φ) , в которой $\varphi(a) = 0$.

2.11.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathfrak{D}$ — произвольная C^r -дифференциальная система. Мы скажем, что $\mathfrak{D}$ *инволютивна*, если для любой точки $a \in V$ существуют окрестность U и C^r -векторные поля $X_1, \dots, X_p$, порождающие $\mathfrak{D}$ на U , таковы, что для всех точек $b \in U$

$$[X_\mu, X_\nu](b) \in \mathfrak{D}(b), \quad 1 \leq \mu, \nu \leq p.$$

2.11.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Это эквивалентно следующему условию: для любого открытого множества $U \subset V$ и любых двух C^r -векторных полей X, Y на U , таких, что $X(a), Y(a) \in \mathfrak{D}(a)$, когда $a \in U$, мы имеем

$$[X, Y](a) \in \mathfrak{D}(a), \quad a \in U.$$

2.11.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\mathfrak{D}$ — инволютивная C^r -дифференциальная система ранга p , то у любой точки $a \in V$ существуют окрест-

ность U и в этой окрестности векторные поля X_v , $1 \leq v \leq p$, такие, что $X_v(b)$ порождают $\mathfrak{D}(b)$ для всех $b \in U$ и $[X_v, X_\mu] = 0$ на U .

◀ Пусть $a \in V$ и (U, φ) — система координат, $a \in U$, $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. Если U мала, то найдутся C^r -векторные поля $Y_1, \dots, Y_p$, такие, что $Y_r(x)$ порождают $\mathfrak{D}(x)$ и $[Y_v, Y_\mu](x) \in \mathfrak{D}(x)$ для всех $x \in U$. Пусть

$$Y_v(x) = \sum_{\mu=1}^n a_{v\mu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)_x; \quad a_{v\mu} \in C^r(U).$$

Так как $\{Y_v(a)\}$ порождают векторное пространство размерности p , то матрица $(a_{v\mu}(a))$, $1 \leq v \leq p$, $1 \leq \mu \leq n$, имеет ранг p . Не теряя общности, мы можем предположить, что ранг p имеет матрица $A(a)$, где

$$A(x) = (a_{v\mu}(x)), \quad 1 \leq v \leq p, \quad 1 \leq \mu \leq p.$$

Отсюда следует, что если U достаточно мала, то матрица $A(x)$ обратима для всех $x \in U$. Пусть $B(x) = (b_{v\mu}(x)) = A(x)^{-1}$; тогда $b_{v\mu} \in C^r(U)$, $1 \leq v, \mu \leq p$. Пусть

$$X_v = \sum_{\mu=1}^p b_{v\mu} Y_\mu.$$

Тогда поле X_v имеет вид

$$X_v = \frac{\partial}{\partial x_v} + \sum_{\mu > p} c_{v\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad c_{v\mu} \in C^r(U);$$

кроме того, $\{X_v\}$ — базис $\mathfrak{D}$ в U . Так как система $\mathfrak{D}$ инволютивна, то

$$[X_v, X_\mu] = \sum_{m=1}^p \lambda_m X_m, \quad \lambda_m \in C^r(U).$$

Так как

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_v}, \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right] = 0,$$

то сразу видно, что в разложении

$$[X_v, X_\mu] = \sum_{m=1}^n \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

$\xi_m = 0$, когда $1 \leq m \leq p$. Очевидно, $\lambda_m = \xi_m$ при $m \leq p$ и поэтому все λ_m — нули. Таким образом $[X_v, X_\mu] = 0$. ▶

2.11.8. ТЕОРЕМА. Пусть $X_1, \dots, X_p$ — векторные поля на V класса C^r , $r \geq 2$, линейно независимые в каждой точке V и такие, что $[X_v, X_\mu] = 0$. Тогда для любой точки $a \in V$ найдется система координат

(U, Φ) класса C^r , $a \in U$, такая, что если $\Phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ и $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$ — соответствующие векторные поля на U , то $X_v = \partial/\partial x_v$, $v = 1, \dots, p$.

◀ Пусть (U', Φ') — система координат в точке a , такая, что векторы

$$X_1(a), \dots, X_p(a), \left(\frac{\partial}{\partial x'_{p+1}}\right)_a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x'_n}\right)_a$$

линейно независимы; здесь $\Phi'(x) = (x'_1, \dots, x'_n)$ и $\partial/\partial x'_j$ — соответствующие векторные поля на U' . (Ясно, что такая система существует; максимум, что надо сделать для ее получения — это подвергнуть $\mathbb{R}^n$ линейному преобразованию.) Будем считать, что $\Phi'(a) = 0$. Пусть

$$g^{(v)}: I \times U' \rightarrow V$$

— локальные однопараметрические группы C^r -преобразований, индуцирующие X_v на U' (здесь $I = \{t \in \mathbb{R} : |t| < \epsilon\}$); эти группы определены однозначно, если U' достаточно мала (предложение 2.10.2 и замечание 2.10.3).

Пусть $t_1, \dots, t_p, x'_{p+1}, \dots, x'_n$ — действительные числа, по модулю меньшие δ , где $\delta > 0$. Определим отображение

$$h: \Omega \rightarrow V, \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta\}$$

равенством

$$h(t_1, \dots, t_p, x'_{p+1}, \dots, x'_n) = g^{(1)}_{t_1} \circ \dots \circ g^{(p)}_{t_p} \circ \Phi'^{-1}(0, \dots, 0, x'_{p+1}, \dots, x'_n).$$

Это определение корректно, если δ достаточно мало. По определению, для $f \in C_{a,k}$ мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t_1} (f \circ h)(0) = X_1(a)(f)$$

(ибо $g^{(1)}$ индуцирует X_1). Так как по условию $[X_v, X_\mu] = 0$, то, согласно предложению 2.10.10, отображения $g^{(v)}_{t_v}$ «коммутируют» и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t_v} (f \circ h)(0) = X_v(a)(f), \quad v = 1, \dots, p.$$

т. е.

$$h_{*,a} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_v} \right)_0 \right) = X_v(a).$$

Более того, в очевидных обозначениях

$$h_{*,0} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x'_j} \right)_0 \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x'_j} \right)_a, \quad \text{когда } p < j \leq n,$$

Это показывает, в частности, что отображение $h_{*,0}$ имеет ранг n . Значит, по теореме об обратной функции 2.2.10, отображение h является C^r -изоморфизмом Ω на открытое множество $U \subset V$, если δ достаточно мало. Снова по определению,

$$h_{*,u} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_1} \right)_u \right) = X_1(h(u)),$$

и, ввиду коммутирования $g_{t_v}^{(v)}$, мы получаем, что

$$h_{*,u} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_v} \right)_u \right) = X_v(h(u)), \quad 1 \leq v \leq p.$$

Система координат (U, h^{-1}) класса C^r обладает требуемыми свойствами. ►

2.11.9. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА (ПЕРВАЯ ФОРМА). Дифференциальная система $\mathfrak{D}$ класса C^r на V , где $r \geq 2$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда она инволютивна.

◄ Инволютивная система вполне интегрируема по предложению 2.11.7 и теореме 2.11.8. Обратно, если система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема и (U, φ) — система координат класса C^r , такая, что $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, а множества

$$U_c = \{x \in U: x_j = c_j, p < j \leq n\}$$

— интегралы системы $\mathfrak{D}$, то векторы $(\partial/\partial x_v)_a$, $1 \leq v \leq p$, $a \in U_c$, порождают касательное пространство $T_a(U_c)$, а следовательно, и $\mathfrak{D}(a)$ для всех $a \in U$; отсюда, очевидно, следует, что $\mathfrak{D}$ инволютивна (только здесь система $\mathfrak{D}$ имеет базис класса C^{r-1}). ►

2.11.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Мы существенно использовали тот факт, что рассматриваемые векторные поля принадлежали C^r , где $r \geq 2$ (в доказательстве предложения 2.10.9). Однако инволютивные C^1 -системы тоже C^1 -вполне интегрируемы. Это можно доказать, используя методы, аналогичные изложенным выше. При этом понадобятся теоремы из § 1.8 и тот факт, что для системы уравнений $dx/dt = f(x, t)$ решение x имеет на единицу больше производных по t , чем по всем остальным переменным.

Рассмотрим теперь другой способ определения дифференциальных систем. Пусть $\omega_{p+1}, \dots, \omega_n$ — линейно независимые в каждой точке 1-формы на V . Определим дифференциальную систему $\mathfrak{D}$, полагая

$$\mathfrak{D}(a) = \{X \in T_a(V): \omega_v(a)(X) = 0, p < v \leq n\}.$$

Если все ω_i — дифференцируемые класса C^r , то $\mathfrak{D}$ — тоже класса C^r . В самом деле, мы можем предполагать, что в подходящих координатах формы ω_v имеют вид

$$\omega_v = dx_v + \sum_{\mu \leq p} a_{v\mu} dx_\mu, \quad v > p, \quad a_{v\mu} \in C^r(U).$$

Тогда $\mathfrak{D}$ — дифференциальная система, натянутая на векторные поля

$$X_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \sum_{\nu > \mu} a_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad 1 \leq \mu \leq p,$$

так как, очевидно, $\omega_\nu(X_\mu) = 0$ и X_μ линейно независимы. Более того, локально всякая дифференциальная система получается таким способом.

2.11.11. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА (ВТОРАЯ ФОРМА). Пусть $\omega_{p+1}, \dots, \omega_n$ — линейно независимые в каждой точке 1-формы класса C^r и $\mathfrak{D}$ — определяемая ими дифференциальная система. Тогда $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема в том и только в том случае, когда выполняется следующее условие:

У каждой точки $a \in V$ существует окрестность U и в ней 1-формы $a_{\mu\nu}$, такие, что

$$(2.11.12) \quad d\omega_\nu = \sum_{\mu=p+1}^n \omega_\mu \wedge a_{\mu\nu};$$

т. е. $d\omega_\nu$ принадлежат идеалу, порожденному формами ω_μ .

◀ Заметим, что условие (2.11.12) инвариантно относительно замены базиса. Другими словами, если $\{\omega'_\nu\}$ — другое множество из $n-p$ 1-форм, порождающее ту же систему $\mathfrak{D}$, то найдутся C^r -функции $a_{\mu\nu}$, такие, что

$$\omega'_\nu = \sum_{\mu} a_{\mu\nu} \omega_\mu.$$

Отсюда следует, что если (2.11.12) имеет место, то $d\omega'_\nu$ принадлежат идеалу, порожденному ω'_μ .

Если система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема и (U, φ) — система координат, указанная в определении 2.11.3, то касательное пространство $T_a(U_c)$, $a \in U_c$, является пространством, ортогональным к $(dx_{p+1})_a, \dots, (dx_n)_a$. Следовательно, $\mathfrak{D}|U$ определяется 1-формами $dx_{p+1}, \dots, dx_n$. Эти формы замкнуты, и поэтому условие (2.11.12) для них выполняется тривиально.

Обратно, предположим, что имеет место (2.11.12). Пусть $X_1, \dots, X_p$ — векторные поля в окрестности a , порождающие $\mathfrak{D}$. Тогда по предложению 2.6.6 мы имеем

$$(d\omega_\nu)(X_\kappa, X_\mu) = X_\kappa \omega_\nu(X_\mu) - X_\mu \omega_\nu(X_\kappa) - \omega_\nu([X_\kappa, X_\mu]).$$

Далее, по условию,

$$\omega_\nu(X_\mu) = \omega_\nu(X_\kappa) = 0,$$

а ввиду (2.11.12)

$$(d\omega_\nu)(X_\kappa, X_\mu) = 0.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\omega_v([X_\kappa, X_\mu]) = 0, \quad v = p+1, \dots, n,$$

и поэтому $[X_\kappa, X_\mu](b) \in \mathfrak{D}(b)$ для всех $b \in U$. Следовательно, система $\mathfrak{D}$ инволютивна и, значит, по теореме 2.11.9, вполне интегрируема. ►

Следующая теорема утверждает существование максимальных интегралов у вполне интегрируемых дифференциальных систем.

2.11.13. ТЕОРЕМА. Пусть $\mathfrak{D}$ — вполне интегрируемая C^1 -дифференциальная система ранга p на V . Тогда для любой точки $a \in V$ найдется связное интегральное C^1 -подмногообразие $(W, i) \subset V$ размерности p , такое, что $a \in i(W)$ и для любого связного интегрального C^1 -подмногообразия $j: W' \rightarrow V$, такого, что $a \in j(W')$, существует C^1 -отображение $\eta: W' \rightarrow W$, превращающее W' в C^1 -подмногообразие W , для которого $j = i \circ \eta$.

◀ Пусть I — замкнутый единичный интервал в $\mathbb{R}$. Набор C^1 -отображений $\gamma_v: I \rightarrow V$, $0 \leq v \leq N$, таких, что $\gamma_0(0) = a$, $\gamma_N(1) = x$, $\gamma_{v+1}(0) = \gamma_v(1)$, $0 \leq v < N$, называется интегральной цепочкой, соединяющей a с x , если каждое γ_v является интегралом системы $\mathfrak{D}$ (определение 2.11.2). Пусть W — множество точек $x \in V$, для которых существует интегральная цепочка, соединяющая a с x . Пусть $x_0 \in W$ и (U, φ) — система координат, такая, что $x_0 \in U$ и множества

$$U_c = \{x \in U: x_j = c_j, \quad p < j \leq n\},$$

где $x_1, \dots, x_n = \varphi(x)$ являются интегралами $\mathfrak{D}$; мы будем еще предполагать, что $\varphi(U)$ — куб, так что U_c связно, и что $\varphi(x_0) = 0$. Тогда, очевидно, $U_0 \subset W$. Снабдим W топологией, потребовав, чтобы полученные так множества U_0 образовывали фундаментальную систему окрестностей точки x_0 в W . Очевидно, что W — хаусдорфово пространство и что вложение $i: W \rightarrow V$ непрерывно. Если опять U, φ, U_0 — те же, что и выше, а π_i — проекция $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^p$, $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$, то отображение $\varphi_0 = \pi_i \circ \varphi|_{U_0}$ является гомеоморфизмом U_0 на открытое множество в $\mathbb{R}^p$. Пары (U_0, φ_0) определяют на W структуру C^1 -многообразия, а вложение $i: W \rightarrow V$ превращает W в подмногообразие V . Очевидно, что $i: W \rightarrow V$ — интегральное подмногообразие $\mathfrak{D}$.

Пусть теперь $j: W' \rightarrow V$ — произвольное связное интегральное C^1 -подмногообразие и точка $a' \in W'$ такова, что $j(a') = a$. Пусть $w' \in W'$ и $\gamma'_0, \dots, \gamma'_N$ — цепочка C^1 -отображений $\gamma'_v: I \rightarrow W'$, таких, что $\gamma'_0(0) = a'$, $\gamma'_N(1) = w'$, $\gamma'_{v+1}(0) = \gamma'_v(1)$, $0 \leq v < N$. Пусть $\gamma_v = j \circ \gamma'_v$. Тогда γ_v образуют интегральную цепочку, соединяющую a с $j(w')$, и поэтому $j(w') \in W$. Положим $\eta(w') = i_0^{-1}j(w')$. Этим определяется отображение $\eta: W' \rightarrow W$. Очевидно, $i \circ \eta = j$. Из

предложения 2.11.4 сразу следует, что отображение η непрерывно. Значит, по предложению 2.5.12, η принадлежит классу C^r . Так как для $w' \in W'$ мы имеем

$$j_{*, w'} = i_{*, \eta(w')} \circ \eta_{*, w'}$$

и отображение $j_{*, w'}$ инъективно, то $\eta_{*, w'}$ тоже инъективно, и, значит, отображение η превращает W' в C^r -подмногообразие W . ►

А сейчас мы рассмотрим третью форму теоремы Фробениуса, в которой она выступает как прямое обобщение теоремы существования для обыкновенных дифференциальных уравнений (§ 1.8).

2.11.14. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА (ТРЕТЬЯ ФОРМА). Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, Ω' — открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Точки $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_n)$, а точки $\mathbb{R}^m$ — символом $t = (t_1, \dots, t_m)$. Пусть $f_v: \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображения класса C^k , $k \geq 2$, $v = 1, \dots, m$. Тогда чтобы для каждой $t_0 \in \Omega'$ и $x_0 \in \Omega$ существовали окрестность $U \ni t_0$ и единственное C^k отображение $x: U \rightarrow \Omega$, такое, что

$$(2.11.15) \quad x(t_0) = x_0, \quad \frac{\partial x(t)}{\partial t_v} = f_v(x(t), t), \quad t \in U, \quad v = 1, \dots, m,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.11.16)$$

$$\frac{\partial f_v}{\partial t_\mu}(x, t) + (d_1 f_v)(x, t) f_\mu(x, t) = \frac{\partial f_\mu}{\partial t_v}(x, t) + (d_1 f_\mu)(x, t) f_v(x, t),$$

при $(x, t) \in \Omega \times \Omega'$, $1 \leq \mu, v \leq m$. [Здесь $(d_1 f_v)(a, b)$ — линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в себя, определяемое равенством $(d_1 f_v)(a, b) = (dg)(a)$, где $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение $x \mapsto f_v(x, b)$; см. определение 1.3.4.]

◀ Единственность решения, если оно существует, следует из соответствующего утверждения о единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема 1.8.4).

Если (2.11.15) всегда имеет решение, то имеет место и (2.11.16), так как тогда обе части этих уравнений в точке (x_0, t_0) равны

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t_\mu \partial t_v} \Big|_{t=t_0}.$$

Для доказательства обратного утверждения мы поступим следующим образом. Систему (2.11.15) можно записать в виде

$$(2.11.17) \quad \frac{\partial x_\kappa}{\partial t_v} = f_{v\kappa}(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad f_v = (f_{v1}, \dots, f_{vn}),$$

$$\kappa = 1, \dots, n, \quad v = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим дифференциальные формы

$$(2.11.18) \quad dx_{\kappa} - \sum_{\nu=1}^m f_{\nu\kappa}(x, t) dt_{\nu}, \quad \kappa = 1, \dots, n,$$

на $\Omega \times \Omega'$ и обозначим через $\mathfrak{D}$ дифференциальную систему ранга m , определяемую этими формами. Очевидно, что если $\mathfrak{D}$ имеет интегральное многообразие вида

$$x - \xi(t) = 0, \quad \xi(t_0) = x_0,$$

где ξ есть C^k -отображение окрестности t_0 в Ω , $x = \xi$ является решением системы (2.11.15).

Если $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема, то в $\Omega \times \Omega'$ найдется C^r подмногообразие размерности m в окрестности (x_0, t_0) , скажем W , которое является интегралом системы $\mathfrak{D}$. Затем мы можем найти C^r -функции $u_1, \dots, u_n$ в окрестности (x_0, t_0) , такие, что вблизи (x_0, t_0)

$$W = \{(x, t): u_1(x, t) = \dots = u_n(x, t) = 0\},$$

причем $du_{\mu}(x_0, t_0)$, $\mu = 1, \dots, n$, линейно независимы. Тогда формы $du_{\mu}(x_0, t_0)$, $\mu = 1, \dots, n$, порождают, очевидно, то же пространство $T_{(x_0, t_0)}^*(\Omega \times \Omega')$, что и формы (2.11.18). Отсюда следует, что ко-векторы $(d_1 u_{\mu})(x_0, t_0)$, $\mu = 1, \dots, n$, линейно независимы. После этого из теоремы 1.3.5 о неявной функции и из следствия 1.3.9 получается, что в окрестности (x_0, t_0) многообразие W определяется уравнениями вида $x - \xi(t) = 0$; как уже отмечалось, отсюда следует разрешимость системы уравнений (2.11.15), если система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема.

Далее, мы знаем, что $\mathfrak{D}$ порождается векторными полями

$$X_{\nu} = \frac{\partial}{\partial t_{\nu}} + \sum_{\kappa=1}^n f_{\nu\kappa}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_{\kappa}}, \quad \nu = 1, \dots, m$$

(см. рассуждения перед теоремой 2.11.11). Поэтому, как и в доказательстве предложения 2.11.7, система $\mathfrak{D}$ вполне интегрируема в том и только в том случае, когда

$$[X_{\nu}, X_{\mu}] = 0, \quad \nu, \mu = 1, \dots, m.$$

Но это и есть в точности условия (2.11.16). ►

2.11.19. ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема справедлива также и в случае, когда f_{ν} являются C^1 -отображениями. Это можно доказать, используя замечание 2.11.10.

Если в изложенной выше теореме мы возьмем $n=1$, а в качестве f_{ν} — функции, не зависящие от x , то получим следующее утверждение:

Для существования C^k -функции $x(t_1, \dots, t_m)$ в окрестности $t = t_0$, удовлетворяющей системе уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t_v} = f_v(t), \quad v = 1, \dots, m,$$

необходимо и достаточно, чтобы $df_v/dt_\mu = df_\mu/dt_v$. Это можно также сформулировать следующим образом: пусть

$$\omega = \sum_{v=1}^m f_v(t) dt_v;$$

тогда условие $d\omega = 0$ является необходимым и достаточным для существования в окрестности каждой точки Ω' функции f , такой, что $df = \omega$.

Это частный случай леммы Пуанкаре, которая будет доказана в § 2.13.

Другую трактовку теоремы Фробениуса в форме теоремы 2.11.9 можно найти у Шевалле [1].

2.11.20. ЗАМЕЧАНИЕ. Все результаты этого параграфа имеют аналоги для голоморфных векторных полей и т. п. на комплексных многообразиях. Так, голоморфные дифференциальные системы $\mathcal{D}$ определяются условием локальной порождаемости голоморфными векторными полями. Вполне интегрируемые системы определяются, как и в 2.11.3, с помощью комплексных координат. Теоремы 2.11.8, 9, 11, 13, 14 все имеют аналоги для голоморфных систем. Естественно, в (2.11.12) требуется, чтобы $\alpha_{\mu\nu}$ были голоморфными 1-формами.

§ 2.12. Почти комплексные многообразия

Мы уже видели (замечание 2.4.6), что касательное пространство $T_a(V)$ комплексного многообразия V в точке $a \in V$ обладает естественной структурой комплексного векторного пространства. Иногда полезно рассматривать только эту структуру $T_a(V)$ вместо комплексной структуры самого V . Это приводит к более общему классу многообразий.

Пусть дано C^∞ -многообразие V четной размерности $n = 2m$. Предположим, что для каждой точки $a \in V$ на $T_a(V)$ задана структура $\mathbb{C}$ -векторного пространства (размерности m). Мы будем говорить, что эта структура зависит от a дифференцируемым образом, если выполняется следующее условие: у любой точки $a \in V$ имеется окрестность U и в ней m комплекснозначных C^∞ -дифференциальных 1-форм (замечание 2.1.12) $\omega_1, \dots, \omega_m$, таких, что отображение

$$T_x(V) \rightarrow \mathbb{C}^m, \quad x \in U,$$

задаваемое условием

$$X \mapsto (\omega_1(x)(X), \dots, \omega_m(x)(X)),$$

является $\mathbb{C}$ -изоморфизмом (относительно заданной комплексной структуры на $T_x(V)$).

2.12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Почти комплексной структурой на V называется комплексная структура на каждом $T_a(V)$, дифференцируемым образом зависящая от a .

Формы $\omega_1, \dots, \omega_m$, существование которых требуется, называются *структурными формами*. Вообще говоря, эти формы не замкнуты.

Обозначим через J_a , $a \in V$, линейное над полем $\mathbb{R}$ отображение пространства $T_a(V)$ в себя, задаваемое условием $X \mapsto \sqrt{-1} X$ (умножение относительно заданной на $T_a(V)$ структуры $\mathbb{C}$ -векторного пространства); для вскторного поля X определим векторное поле JX , полагая

$$(JX)(a) = J_a X(a).$$

Почти комплексное многообразие мы будем обозначать также символом (V, J) , так как отображение J_a пространства $T_a(V)$ однозначно определяет на нем структуру $\mathbb{C}$ -векторного пространства. Очевидно, что $-J_a^2$ совпадает на $T_a(V)$ с тождественным отображением.

Теперь можно применить замечания 2.4.10 к пространству $E = T_a(V)$. У нас есть пространства $\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{C})$, $\mathcal{E}_{p,q}^*, \dots$. В частности,

$$\mathcal{E}_{1,0}^* = \{\omega \in \mathcal{E}^*: \omega(JX) = i\omega(X) \text{ для всех } X \in T_a(V)\}.$$

Если $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ — множество структурных форм, то $\omega_1(a), \dots, \omega_m(a)$ принадлежат $\mathcal{E}_{1,0}^*$ и образуют $\mathbb{C}$ -базис этого пространства. Следовательно, базис в $\mathcal{E}_{p,q}^*$ задается коекторами

$$\omega_{j_1}(a) \wedge \dots \wedge \omega_{j_p}(a) \wedge \bar{\omega}_{k_1}(a) \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{k_q}(a), \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m, \quad 1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m,$$

и поэтому мы можем, как и в случае комплексных многообразий, говорить о дифференциальных формах типа (p, q) (определение 2.4.11). Если на комплексном многообразии форма ω имеет тип (p, q) , то $d\omega$ является суммой двух форм типа $(p+1, q)$, $(p, q+1)$ соответственно. Однако для почти комплексных многообразий в общем случае это неверно. Если $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ — множество структурных форм, то дифференциалы $d\omega_v$ являются 2-формами и, значит,

$$(2.12.2) \quad d\omega_v = \eta_v + \eta'_v + \eta''_v,$$

где η_v имеет тип $(2, 0)$, η'_v — тип $(1, 1)$ и η''_v — тип $(0, 2)$. Мы сразу получаем

2.12.3. Следствие. Если ω — форма типа (p, q) , то $d\omega$ является суммой четырех форм типов соответственно $(p-1, q+2)$, $(p, q+1)$, $(p+1, q)$, $(p+2, q-1)$. Кроме того, компоненты типа $(p-1, q+2)$ и $(p+2, q-1)$ равны нулю в том и только в том случае, когда все формы η''_v типа $(0, 2)$ в разложении (2.12.2) равны нулю.

2.12.4. Определение. Почти комплексная структура на многообразии V называется интегрируемой, если для любого множества $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ структурных форм их дифференциалы $d\omega_v$ не содержат компонент типа $(0, 2)$.

Пусть теперь η — некоторая 2-форма и X, Y — векторные поля. Пусть

$$S_\eta(X, Y) = \eta(X, Y) + i\eta(JX, Y) + i\eta(X, JX) - \eta(JX, JY).$$

Легко проверяется следующее утверждение:

2.12.5. Следствие. Если η — форма типа $(2, 0)$ или $(1, 1)$, то

$$S_\eta(X, Y) = 0 \text{ для всех } X, Y,$$

тогда как для формы η типа $(0, 2)$ мы имеем

$$S_\eta(X, Y) = 2\eta(X, Y).$$

Используя формулу из предложения 2.6.6 для 1-формы ω :

$$(d\omega)(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]),$$

и тот факт, что

$$\omega_v(JX) = i\omega_v(X)$$

для любой структурной формы ω_v , мы легко получаем такой результат:

2.12.6. Следствие. Почти комплексная структура на V интегрируема в том и только в том случае, когда для любых двух векторных полей X, Y на V выполняется равенство

$$[X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0.$$

2.12.7. Замечание. Мы уже видели, что любой комплексно-аналитической структуре на V соответствует некоторая почти комплексная структура (замечание 2.4.6), которая интегрируема (2.6.10). В этом случае локально существует множество замкнутых структурных форм. Пусть J — соответствующее структуре отображение векторных полей. Росток C^∞ -функций в точке $a \in V$ голоморфен в том и только в том случае, когда $(df)_x \in \mathcal{E}_{1,0}^*(x)$ для любого x из окрестности a , так как это просто означает, что $\bar{\partial}f = 0$ вблизи a .

Поэтому функция f голоморфна в том и только в том случае, когда

$$(df)_x(J_x X) = i(df)_x(X), \quad X \in T_x(V),$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$(2.12.8) \quad (J_x X)(f) = iX(f), \quad X \in T_x(V).$$

Пусть теперь V, V' — комплексные многообразия и $(V, J), (V', J')$ — соответствующие почти комплексные структуры. Предположим, что C^∞ -отображение $f: V \rightarrow V'$ удовлетворяет условию

$$f_{*,a} \circ J_a = J'_{f(a)} \circ f_{*,a} \text{ для всех } a \in V.$$

Тогда отображение f голоморфно. В самом деле, как мы только что показали, если g — росток голоморфной функции в точке $f(a)$, то росток $g \circ f$ голоморфен в точке a . Но если $X \in T_a(V)$, то ввиду голоморфности g

$$\begin{aligned} (J_a X)(g \circ f) &= f_{*,a}(J_a X)(g) = (J'_{f(a)} f_{*,a}(X))(g) = \\ &= i f_{*,a}(X)(g) = iX(g \circ f). \end{aligned}$$

В частности, мы получаем

2.12.9. Предложение. Комплексная структура однозначно определяется почти комплексной структурой.

Важная теорема Ньюлендера и Ниренберга [1] утверждает, что всякая интегрируемая почти комплексная структура индуцируется некоторой комплексной структурой. Позднейшие доказательства принадлежат Кону [1] и Хёрмандеру [2]. Мальгранж недавно получил очень простое доказательство этого результата, применимое в гораздо более общих ситуациях. Мы не будем доказывать этот результат. Мы только покажем, что если данные $\mathbb{R}$ -аналитичны, то результат можно вывести из теоремы Фробениуса 2.11.11 для голоморфных форм (см. замечание 2.11.20).

2.12.10. Теорема. Пусть дано $\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие V размерности $n = 2m$. Предположим, что V обладает интегрируемой почти комплексной структурой, которая в окрестности каждой точки имеет множество $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ $\mathbb{R}$ -аналитических структурных форм. Тогда на V существует структура комплексного многообразия, согласованная как с $\mathbb{R}$ -аналитической, так и с почти комплексной структурами многообразия V .

◀ Так как теорема локальная, мы можем считать, что V — открытая окрестность точки 0 в $\mathbb{R}^n$, $n = 2m$. Напишем

$$\omega_v = \sum_{\mu=1}^n a_{v\mu}(x_1, \dots, x_n) dx_\mu,$$

где $a_{\nu\mu}$ — комплекснозначные $\mathbb{R}$ -аналитические функции на V . По лемме 1.1.5. существует открытое множество U в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$ и голоморфные в U функции, которые мы снова обозначим $a_{\nu\mu}$, продолжающие $a_{\nu\mu}$ из V . Более того, если мы предположим, что U — поликруг (это возможно ввиду локальности рассматриваемого вопроса), то в U существуют однозначно определенные голоморфные функции $b_{\nu\mu}$, такие, что

$$b_{\nu\mu}(x) = \overline{a_{\nu\mu}(x)}, \quad x \in V = U \cap \mathbb{R}^n,$$

в самом деле, надо взять

$$b_{\nu\mu}(z) = \overline{a_{\nu\mu}(\bar{z})}.$$

Положим

$$\eta_\nu = \sum_{\mu=1}^n b_{\nu\mu}(z_1, \dots, z_n) dz_\mu, \quad \nu = 1, \dots, m,$$

и продолжим ω_ν в U по формуле

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^n a_{\nu\mu}(z_1, \dots, z_n) dz_\mu, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

По условию, $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ — множество структурных форм для почти комплексной структуры на V . Поэтому векторы

$$\omega_1(0), \dots, \omega_m(0), \bar{\omega}_1(0) = \eta_1(0), \dots, \bar{\omega}_m(0) = \eta_m(0)$$

образуют базис пространства $\mathcal{E}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_0(V), \mathbb{C})$. Значит, ω_ν, η_κ , $1 \leq \nu, \kappa \leq m$, $\mathbb{C}$ -независимы в 0, и поэтому, если U достаточно мала, они $\mathbb{C}$ -независимы и в U . Следовательно, дифференциалы

$$dz_\mu, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

являются в U линейными комбинациями с голоморфными коэффициентами форм ω_ν, η_κ ($1 \leq \nu, \kappa \leq m$). Значит, голоморфные 2-формы $d\omega_\nu$ можно записать в виде

$$d\omega_\nu = \sum_{r,s} f_{r,s}^{(\nu)} \omega_r \wedge \omega_s + \sum_{r,s} g_{r,s}^{(\nu)} \omega_r \wedge \eta_s + \sum_{r,s} h_{r,s}^{(\nu)} \eta_r \wedge \eta_s,$$

где все коэффициенты голоморфны. По условию, наша почти комплексная структура интегрируема; следовательно, $d\omega_\nu|V$ не имеет компонент типа $(0, 2)$, и поэтому

$$h_{r,s}^{(\nu)}|U \cap \mathbb{R}^n = 0.$$

Так как $h_{r,s}^{(\nu)}$ голоморфны, то они равны 0 и в U , откуда следует, что $d\omega_\nu$ принадлежит идеалу, порожденному формами $\{\omega_\mu\}$ с коэффициентами — голоморфными 1-формами. По теореме Фробениуса во второй форме (см. замечание 2.11.20), существуют голоморфные функции $F_1, \dots, F_m$, такие, что $dF_1, \dots, dF_m$ порождают

в окрестности $U' \ni 0$ ту же дифференциальную систему, что и $\omega_1, \dots, \omega_m$, и для всех $z \in U'$ дифференциалы $dF_1, \dots, dF_m$ порождают то же подпространство $T_z^*(\mathbb{C}^n)$, что и $(\omega_1, \dots, \omega_m)$. Значит, $(dF_1, \dots, dF_m)$ являются структурными формами почти комплексной структуры на $U' \cap \mathbb{R}^n$. Кроме того, если $\xi_v = F_v|_{\mathbb{R}^n \cap U'}$, то очевидно, что ковекторы $(d\xi_v)(0)$, $(d\bar{\xi}_v)(0)$ $\mathbb{R}$ -независимы и образуют базис в $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_0(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$. Значит, отображение $\xi: x \mapsto (\xi_1(x), \dots, \xi_m(x))$ имеет в 0 дифференциал, являющийся изоморфизмом $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{C}^m$, так что по теореме об обратной функции (см. замечание 1.3.11) ξ является C^∞ -дiffeоморфизмом некоторой окрестности W начала координат из $\mathbb{R}^n$ на открытое множество $W' \subset \mathbb{C}^m$. Ясно, что ξ переводит почти комплексную структуру на W в структуру, индуцированную на W' комплексной структурой пространства $\mathbb{C}^m$.

После этого теорема следует непосредственно из предложения 2.12.9. ►

Сделаем одно заключительное замечание.

2.12.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Всякое почти комплексное многообразие V обладает естественной ориентацией; в частности, всякое комплексное многообразие ориентируемо.

◄ Выберем покрытие $\{U_j\}$ многообразия V так, чтобы в каждой U_j имелась система структурных форм $(\omega_1^{(j)}, \dots, \omega_m^{(j)})$, $n = 2m$. Положим

$$\omega^{(j)} = \left(\frac{i}{2}\right)^m \omega_1^{(j)} \wedge \bar{\omega}_1^{(j)} \wedge \dots \wedge \omega_m^{(j)} \wedge \bar{\omega}_m^{(j)}.$$

Это n -форма класса C^∞ без нулей на U_j . Заметим, что если $(\omega_1, \dots, \omega_m)$, $(\omega'_1, \dots, \omega'_m)$ — два множества структурных форм на открытом подмножестве V , то существуют комплексные функции $a_{\mu\nu}$, $1 \leq \mu, \nu \leq m$, такие, что

$$\omega_\nu = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu\nu} \omega'_\mu.$$

Пусть $D = \det(a_{\mu\nu})$. Тогда

$$\omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \dots \wedge \omega_m \wedge \bar{\omega}_m = |D|^2 \omega'_1 \wedge \bar{\omega}'_1 \wedge \dots \wedge \omega'_m \wedge \bar{\omega}'_m,$$

а $|D|^2 > 0$. Значит,

$$\omega^{(j)} = f_{jI'} \omega^{(I')} \text{ на } U_j \cap U_{I'},$$

где $f_{jI'} > 0$. Отсюда непосредственно следует наш результат. ►

§ 2.13. Леммы Пуанкаре и Гротендика

Мы определили замкнутые и точные формы (определение 2.6.9) и группы де Рама $H^p(V)$ на C^∞ -многообразии V . А теперь мы докажем лемму, принадлежащую Пуанкаре, которая оказывается чрезвычайно важной при изучении этих групп.

2.13.1. ЛЕММА ПУАНКАРЕ. Пусть D — выпуклое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и на D определена C^k -форма ω ($k \geq 1$) степени $p \geq 1$, которая является замкнутой, т. е. $d\omega = 0$. Тогда существует C^k -форма ω' степени $p-1$ на D , такая, что $d\omega' = \omega$. Более того, для каждого целого числа $p \geq 1$ существует $\mathbb{R}$ -линейное отображение $A: A^p(D, r) \rightarrow A^{p-1}(D, r)$, такое, что для любой формы $\omega \in A^p(D, r)$ мы имеем

$$A(d\omega) + dA(\omega) = \omega.$$

Отображение A называется оператором гомотопии. Этот результат применим к любому многообразию, диффеоморфному D .

◀ Без ограничения общности можно считать, что начало координат 0 пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит D . Пусть $I = (0, 1)$ — открытый единичный интервал в $\mathbb{R}$ и $h: D \times I \rightarrow D$ — отображение $(x, t) \rightarrow tx$.

Пусть J пробегает все наборы из p целых чисел $j_1, \dots, j_p$, такие, что $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$, и пусть $dx_J = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$, если $J = (j_1, \dots, j_p)$. Всякую p -форму ω на D класса C^k единственным образом можно записать в виде

$$\omega = \sum_J a_J(x) dx_J, \quad a_J \in C^k(D).$$

Далее, $h^*(\omega) = \omega_1 + dt \wedge \omega_0$, где ω_1, ω_0 — формы степени $p, p-1$ соответственно, и ни та ни другая не содержат dt , т. е. представляются в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_J b_J(x, t) dx_J, & J &= (j_1, \dots, j_p), & 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n, \\ \omega_0 &= \sum_K c_K(x, t) dx_K, & K &= (k_1, \dots, k_{p-1}), & 1 \leq k_1 < \dots < k_{p-1} \leq n. \end{aligned}$$

Определим $(p-1)$ -форму $A(\omega)$ класса C^k на D по формуле

$$A(\omega) = \int_0^1 \omega_0 dt = \sum_K \left(\int_0^1 c_K(x, t) dt \right) dx_K.$$

Отображение A , очевидно, $\mathbb{R}$ -линейно. Рассмотрим теперь $A(d\omega)$. Мы имеем

$$h^*(d\omega) = dh^*(\omega) = d\omega_1 - dt \wedge d\omega_0 = d'\omega_1 + dt \wedge \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - d'\omega_0 \right),$$

где для p -формы χ на $D \times I$, не содержащей dt , мы обозначаем через $d'\chi$ форму степени $p+1$ на D , не содержащую dt и такую, что

$$d\chi = d'\chi + dt \wedge \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sum \frac{\partial a_j(x, t)}{\partial t} dx_j, \quad \chi = \sum a_j(x, t) dx_j.$$

Отсюда

$$A(d\omega) = \int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt - \int_0^1 (d'\omega_0) dt.$$

Непосредственно видно (по определению h), что

$$\int_0^1 \frac{\partial \omega_1}{\partial t} dt = \omega.$$

Это дает нам формулу

$$(2.13.2) \quad \omega = dA(\omega) + A(d\omega). \blacktriangleright$$

В частности, если ω замкнута, то $A(d\omega) = 0$ и $\omega = d\omega'$, где $\omega' = A(\omega)$.

Как показал впервые Гротендик (не опубликовано), соответствующий результат имеет место и для оператора $\bar{\partial}$. Однако здесь надо рассматривать другой класс областей. Мы начнем со следующей леммы.

2.13.3. ЛЕММА. Пусть K, L, L' — компакты в $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, \mathbb{R}^m$ соответственно. Точки множества $S = K \times L \times L'$ будем обозначать (z, w, t) . Пусть g — функция класса C^∞ в окрестности S , голоморфная по w при фиксированных z, t . Тогда существует C^∞ -функция f в окрестности S , голоморфная по w при фиксированных z, t и такая, что $\partial f / \partial \bar{z} = g$ в окрестности S .

◀ Мы можем считать, что g при фиксированных w, t имеет компактный носитель в $\mathbb{C}$; для этого достаточно умножить g на C^∞ -функцию с компактным носителем в подходящей окрестности K , равную 1 в меньшей окрестности K .

Пусть ξ — произвольная точка в $\mathbb{C}$, $\xi = \xi + i\eta$, где ξ, η — действительные числа. Положим

$$f(z, w, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(\xi, w, t)}{\xi - z} d\xi \wedge d\eta.$$

Так как функция $1/\xi$ интегрируема в окрестности 0 в $\mathbb{C}$, то это равно

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \xi^{-1} g(z + \xi, w, t) d\xi \wedge d\eta,$$

и поэтому f является функцией класса C^∞ , голоморфной по w при фиксированных z, t . Более того,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, w, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_C \zeta^{-1} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z + \zeta, w, t) d\bar{\zeta} \wedge d\eta = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}(z + \zeta, w, t) \zeta^{-1} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi i} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} d(g(\zeta + z, w, t) \zeta^{-1} d\bar{\zeta}),\end{aligned}$$

а это по теореме Стокса 2.9.9 равно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\varepsilon} g(\zeta + z, w, t) \zeta^{-1} d\bar{\zeta} = g(z).$$

Утверждение доказано. ►

Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Любую C^∞ форму ω типа (p, q) в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ можно единственным образом записать в виде

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{J, K} a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K, \quad a_{JK} \in C^\infty(\Omega), \\ J &= (j_1, \dots, j_p), \quad K = (k_1, \dots, k_q), \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n, \\ &\quad 1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n.\end{aligned}$$

Мы назовем a_{JK} коэффициентами формы ω . Положим

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_\nu} = \sum_{J, K} \frac{\partial a_{JK}}{\partial \bar{z}_\nu} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

и аналогично определим $\partial \omega / \partial z_\nu$. Тогда мы имеем

$$\bar{\partial} \omega = \sum_{\nu=1}^n d\bar{z}_\nu \wedge \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_\nu}.$$

2.13.4. ЛЕММА ГРОТЕНДИКА. Пусть $K_1, \dots, K_n$ — компакты в $\mathbb{C}$, $S = K_1 \times \dots \times K_n \subset \mathbb{C}^n$ и в окрестности S дана C^∞ форма ω типа (p, q) , $q \geq 1$, такая, что $\bar{\partial} \omega = 0$. Тогда существует форма ω' типа $(p, q-1)$ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar{\partial} \omega' = \omega$ в окрестности S .

◀ Если ν — целое число, $\nu \geq 1$, то обозначим через

$$A_{\nu}^{p, q} = A_{\nu}^{p, q}(S)$$

пространство C^∞ -форм ω типа (p, q) , определенных в окрестности $U = U(\omega)$ компакта S и не содержащих $d\bar{z}_\nu, \dots, d\bar{z}_n$, т. е. имеющих вид

$$\omega = \sum a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K, \quad a_{JK} \in C^\infty(U),$$

где $J = (j_1, \dots, j_p)$, $K = (k_1, \dots, k_q)$ и $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$, $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq v-1$. (Если $v > n$, то это пространство всех форм типа (p, q) .) Очевидно, если $\omega \in A_1^{p,q}$, а $q \geq 1$, то $\omega \equiv 0$, так что утверждение леммы 2.13.4 в этом случае тривиально. Предположим по индукции, что этот результат доказан для всех форм из $A_v^{p,q}$, где $1 \leq v \leq n$, и возьмем $\omega \in A_{v+1}^{p,q}$. Мы можем написать

$$\omega = d\bar{z}_v \wedge \omega_1 + \omega_2,$$

где $\omega_2 \in A_v^{p,q}$, $\omega_1 \in A_v^{p,q-1}$. Если $\bar{\partial}\omega = 0$, то мы имеем

$$-d\bar{z}_v \wedge \bar{\partial}\omega_1 + \bar{\partial}\omega_2 = 0.$$

Так как ω_1 и ω_2 не содержат $d\bar{z}_v, \dots, d\bar{z}_n$, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{z}_j} = 0$$

для $j \geq v+1$ и, таким образом, коэффициенты форм ω_1, ω_2 голоморфны по $z_{v+1}, \dots, z_n$. По лемме 2.13.3 в окрестности S существует форма χ' типа $(p, q-1)$, все коэффициенты которой голоморфны по $z_{v+1}, \dots, z_n$, такая, что $\partial\chi'/\partial\bar{z}_v = \omega_1$. Умножая χ' на подходящую C^∞ -функцию с компактным носителем, равную 1 в окрестности S , мы видим, что существует C^∞ -форма χ в C^n , все коэффициенты которой голоморфны по $z_{v+1}, \dots, z_n$ в окрестности S и для которой $\partial\chi/\partial\bar{z}_v = \omega_1$ в некоторой окрестности S . Отсюда следует, что

$$\omega - \bar{\partial}\chi \in A_v^{p,q}.$$

По предположению индукции, существует $(p, q-1)$ -форма ψ в C^n , такая, что $\omega - \bar{\partial}\chi = \bar{\partial}\psi$ в окрестности S . Это доказывает наш результат. ►

2.13.5. ТЕОРЕМА. Пусть $D_1, \dots, D_n$ — открытые множества в $\mathbb{C}$, $D = D_1 \times \dots \times D_n$ и на D дана C^∞ -форма ω типа (p, q) , такая, что $q \geq 1$ и $\bar{\partial}\omega = 0$. Тогда существует C^∞ -форма ω' типа $(p, q-1)$ на D , такая, что $\bar{\partial}\omega' = \omega$.

◄ Пусть $\{K_{v,m}\}$, $m=0, 1, 2, \dots$, $v=1, \dots, n$, — последовательность компактных подмножеств D_v , таких, что

$$K_{v,m} \subset \overset{\circ}{K}_{v,m+1}, \quad \bigcup_{m \geq 0} K_{v,m} = D_v,$$

и пусть $S_m = K_{1,m} \times \dots \times K_{n,m}$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $q \geq 2$. По лемме 2.13.4 для любого $m \geq 0$ существует форма ω_m типа $(p, q-1)$ в C^n , такая, что $\bar{\partial}\omega_m = \omega$ в окрестности S_m . Тогда $\omega_{m+1} - \omega_m$ есть форма типа $(p, q-1)$, $q-1 \geq 1$,

причем $\bar{\partial}(\omega_{m+1} - \omega_m) = 0$ в окрестности S_m . Опять применяя лемму 2.13.4, мы найдем форму χ_m типа $(p, q-2)$ в $\mathbb{C}^n$, такую, что $\bar{\partial}\chi_m = \omega_{m+1} - \omega_m$ на S_m . Определим C^∞ -форму ω' типа $(p, q-1)$ на D , полагая

$$\omega' = \begin{cases} \omega_0 & \text{на } S_0, \\ \omega_m - \bar{\partial}\chi_{m-1} - \dots - \bar{\partial}\chi_0 & \text{на } S_m, \quad m > 0; \end{cases}$$

заметим, что

$$\begin{aligned} (\omega_{m+1} - \bar{\partial}\chi_m - \dots - \bar{\partial}\chi_0) - (\omega_m - \bar{\partial}\chi_{m-1} - \dots - \bar{\partial}\chi_0) = \\ = \omega_{m+1} - \omega_m - \bar{\partial}\chi_m = 0 \text{ на } S_m, \end{aligned}$$

и, значит, это определение корректно. Очевидно, $\bar{\partial}\omega' = \omega$ на D .

Случай II. $q = 1$. Предположим теперь, что последовательность $\{K_{v,m}\}$ обладает тем свойством, что всякую функцию, голоморфную в окрестности $K_{v,m}$, можно аппроксимировать равномерно на $K_{v,m}$ функциями, голоморфными в D_v . Такая последовательность компактов $\{K_{v,m}\}$ существует в любом открытом подмножестве $\mathbb{C}$ — это известная классическая теорема Рунге (это следует также из результатов § 3.10). Тогда из теоремы 1.7.7 вытекает, что всякую функцию, голоморфную в окрестности $S_m = K_{1,m} \times \dots \times K_{n,m}$, можно аппроксимировать равномерно на S_m функциями, голоморфными в D .

Если форма χ в D имеет разложение $\sum a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K$ и S — подмножество D , то мы будем писать

$$\|\chi\|_S = \sum_{J,K} \sup_{z \in S} |a_{JK}(z)|.$$

Пусть на D задана $(p, 1)$ -форма ω , такая, что $\bar{\partial}\omega = 0$. По лемме 2.13.4 существует форма ω_m типа $(p, 0)$ в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\bar{\partial}\omega_m = \omega$ в окрестности S_m . Тогда $\bar{\partial}(\omega_{m+1} - \omega_m) = 0$, и поэтому все коэффициенты формы $\omega_{m+1} - \omega_m$ голоморфны в окрестности S_m (см. замечание 2.6.15). Согласно сделанному выше замечанию о возможности аппроксимации, существует голоморфная $(p, 0)$ -форма на D , скажем χ_m , такая, что

$$\|\omega_{m+1} - \omega_m - \chi_m\|_{S_m} < 2^{-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Положим

$$\omega' = \omega_0 + \sum_{m=0}^{\infty} (\omega_{m+1} - \omega_m - \chi_m).$$

Тогда ω' — форма типа $(p, 0)$ на D , а на S_{m+1} мы имеем

$$\omega' = \omega_{m+1} - \chi_0 - \dots - \chi_m - \sum_{\mu > m} (\omega_{\mu+1} - \omega_\mu - \chi_\mu).$$

Последний ряд представляет форму типа $(p, 0)$, все коэффициенты которой голоморфны в окрестности S_m , и поэтому ввиду голо-

морфности $\chi_0, \dots, \chi_m$ мы получаем, что $\bar{\partial}\omega' = \bar{\partial}\omega_{m+1} = \omega$ на S_m . Так как это верно для любого m , то теорема доказана. ►

В приведенном здесь доказательстве леммы Гротендика мы следовали изложению Серра [1] первоначального доказательства Гротендика. Отметим, что аналогичную индукцию можно использовать при доказательстве леммы Пуанкаре для кубов. Это было сделано Картаном [1].

§ 2.14. Применения: теорема Хартогса о продолжении и теорема Ока — Вейля

В этом параграфе мы покажем, как можно применять леммы Пуанкаре и Гротендика в комплексном анализе.

2.14.1. Предложение. Пусть Ω — выпуклое открытое множество в $\mathbb{C}^n$ и φ — действительная функция класса C^2 в Ω . Для существования голоморфной функции f в Ω , такой, что $\operatorname{Re} f = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы $\partial^2 \varphi / \partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu = 0$ в Ω для всех μ и ν , $1 \leq \mu, \nu \leq n$.

◄ Если $\varphi = \operatorname{Re} f = (f + \bar{f})/2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_\nu} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}_\nu} = 0,$$

и поэтому $\partial^2 \varphi / \partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu = 0$. Обратно, предположим, что последние уравнения удовлетворяются; это просто означает, что

$$\bar{\partial} \partial \varphi = 0.$$

Далее,

$$d \partial \varphi = (\bar{\partial} + \partial) \partial \varphi = \bar{\partial} \partial \varphi = 0$$

(так как $\partial^2 = 0$) и, значит, по лемме Пуанкаре 2.13.1 существует комплекснозначная C^1 -функция g , такая, что $dg = d \partial \varphi$. Далее, $d \partial \varphi$ есть форма типа $(1, 0)$; поэтому $dg = d \partial \varphi$ и $\bar{\partial} g = 0$, так что функция g голоморфна. Затем,

$$d(g + \bar{g}) = d \partial \varphi + d \bar{\partial} \varphi = d \varphi$$

(так как φ действительная), и поэтому $g + \bar{g} - \varphi$ есть константа. Предложение доказано. ►

Из него получается

2.14.2. Следствие. Пусть φ — действительная C^2 -функция на комплексном многообразии V . Тогда φ локально является действительной частью голоморфной функции в том и только в том случае, когда $\bar{\partial} \partial \varphi = 0$.

2.14.3. Лемма. Пусть

$$P = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < R_\nu, \nu = 1, \dots, n\}$$

есть поликруг в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Пусть U — окрестность ∂P и функция f голоморфна в U . Тогда существуют голоморфная в P функция F и окрестность $V \supset \partial P$, такие, что $F|V \cap P = f|V \cap P$.

◀ Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$U_1 = \{(z_1, \dots, z_n): R_1 - \varepsilon < |z_1| < R_1, |z_v| < R_v, v \geq 2\},$$

$$U_2 = \{(z_1, \dots, z_n): |z_1| < R_1, R_2 - \varepsilon < |z_2| < R_2, |z_v| < R_v, v \geq 3\}.$$

Тогда, если ε достаточно мало, мы имеем $U_1 \cup U_2 \subset U$. Для всякой функции f , голоморфной в U_1 , существуют голоморфные функции $a_p(z') = a_p(z_2, \dots, z_n)$ в поликруге

$$\{(z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}: |z_v| < R_v, v = 2, \dots, n\},$$

такие, что

$$f(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p(z') z_1^p, \quad z = (z_1, z'),$$

причем ряд сходится равномерно на компактных подмножествах U_1 . Возьмем произвольную точку $z' = (z_2, \dots, z_n)$, для которой

$$R_2 - \varepsilon < |z_2| < R_2, \quad |z_v| < R_v, \quad v \geq 3.$$

Если f голоморфна в U , то $f(z_1, z')$ голоморфна при $|z_1| < R_1$. Значит, в разложении Лорана для $f(z_1, z')$ отсутствуют члены с отрицательными степенями z_1 . Отсюда следует, что $a_p(z') = 0$ при $p < 0$, если z' удовлетворяет указанному выше условию. По теореме единственности имеем $a_p(z') \equiv 0$ при $p < 0$. Следовательно,

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z') z_1^p \quad \text{на } U_1 \cup U_2.$$

Этот ряд сходится равномерно на компактных подмножествах P по лемме Абеля. Если

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(z') z_1^p$$

на P , то $F = f$ в связной компоненте $U \cap P$, содержащей $U_1 \cup U_2$. Ясно, что эта компонента имеет вид $V \cap P$, где V — некоторая окрестность ∂P . ▶

2.14.4. Лемма. Пусть $\omega \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, дана C^∞ -дифференциальная форма ω типа $(0, 1)$ с компактным носителем. Если $\bar{\partial}\omega = 0$, то существует C^∞ -функция φ с компактным носителем, такая, что $\bar{\partial}\varphi = \omega$.

◀ Выберем $R > 0$ так, чтобы

$$\text{supp } \omega \subset P = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: |z_v| < R\}.$$

По лемме Гротендика 2.13.4, существует C^∞ -функция ψ в C^n , такая, что $\bar{\partial}\psi = \omega$. Так как $\bar{\partial}\psi = \omega = 0$ в некоторой окрестности U границы поликруга ∂P , то ψ голоморфна в окрестности ∂P . По лемме 2.14.3 существует голоморфная в P функция F , продолжающая $\psi|_{U \cap P}$ (если U выбрано подходящим образом). Пусть

$$\varphi(z) = \begin{cases} \psi(z) - F(z), & \text{если } z \in P, \\ 0, & \text{если } z \notin P. \end{cases}$$

Тогда φ — функция класса C^∞ с компактным носителем, и $\bar{\partial}\varphi = \omega$. ►

А теперь докажем следующую важную теорему, принадлежащую Хартогсу.

2.14.5. ТЕОРЕМА. Пусть D — ограниченное открытое множество в C^n , $n \geq 2$, со связным дополнением. Пусть U — окрестность ∂D и функция f голоморфна в U . Тогда существуют окрестность $V \supset \partial D$ и голоморфная в D функция F , такие, что $F|_{V \cap D} = f|_{V \cap D}$.

◀ Пусть α — функция класса C^∞ с компактным носителем в U и $\alpha = 1$ в окрестности ∂D . Пусть $f' = \alpha f$ в U , $f' = 0$ в $D \setminus U$. Тогда $f' \in C^\infty(D)$. Пусть $\omega = \bar{\partial}f'$ в D и $\omega = 0$ в $C^n \setminus D$. Так как $f' = f$ в окрестности ∂D и f голоморфна, то $\omega = 0$ в окрестности ∂D ; в частности, ω — форма класса C^∞ с компактным носителем в C^n (D — ограниченное множество). По лемме 2.14.4 существует C^∞ -функция φ с компактным носителем в C^n , такая, что $\bar{\partial}\varphi = \omega$. Очевидно, φ голоморфна на всяком открытом множестве, где $\omega = 0$; в частности, φ голоморфна в окрестности $C^n \setminus D$. Далее, $\varphi = 0$ вне некоторого компакта $K \subset C^n$. Так как по условию множество $C^n \setminus D$ связно и D ограничено, то существует связная окрестность W множества $C^n \setminus D$, которая пересекается с $C^n \setminus K$. По теореме единственности $\varphi \equiv 0$ в W .

Пусть $F = f' - \varphi$ в D . Так как $\varphi = 0$ в W и, в частности, $\varphi = 0$ в окрестности $V \supset \partial D$, в которой $\alpha \equiv 1$, мы имеем $F = f$ на $V \cap D$. Далее, $\bar{\partial}F = \bar{\partial}f' - \bar{\partial}\varphi = \omega - \bar{\partial}\varphi = 0$ в D , и поэтому F голоморфна в D . ►

2.14.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ω — открытое множество в C^n . Мы будем говорить, что Ω $\bar{\partial}$ -ациклично, если для любой C^∞ -формы ω типа (p, q) на Ω , для которой $p \geq 0$, $q \geq 1$ и $\bar{\partial}\omega = 0$, существует C^∞ -форма ω' типа $(p, q-1)$, такая, что $\bar{\partial}\omega' = \omega$.

2.14.7. ТЕОРЕМА (ОКА). Пусть $D = \{z \in C: |z| < 1\}$ — единичный круг в C и Ω — открытое множество в C^n , такое, что множество $\Omega \times D$ $\bar{\partial}$ -ациклично. Тогда если функция f голоморфна в Ω , то множество

$$\Omega_f = \{x \in \Omega: |f(x)| < 1\}$$

тоже $\bar{\partial}$ -ациклично. Кроме того, для любой C^∞ -формы ω типа (p, q) на Ω_f , $p \geq 0$, $q \geq 0$, $\bar{\partial}\omega = 0$, существует C^∞ -форма ω' типа (p, q) на $\Omega \times D$, такая, что $\bar{\partial}\omega' = 0$ и $u^*(\omega') = \omega$, где $u: \Omega_f \rightarrow \Omega \times D$ — отображение $x \mapsto (x, f(x))$.

◀ Мы начнем с последнего утверждения. Пусть на Ω дана C^∞ -форма ω типа (p, q) , $p, q \geq 0$, такая, что $\bar{\partial}\omega = 0$. Очевидно, отображение u — голоморфное, собственное и инъективное, поэтому касательное отображение u_* инъективно в каждой точке. Значит, $V = u(\Omega_f)$ — замкнутое комплексное подмногообразие в $\Omega \times D$.

Пусть $\pi: \Omega \times D \rightarrow \Omega$ — проекция $(x, z) \mapsto x$, и пусть $U = \pi^{-1}(\Omega_f) = \Omega_f \times D$. Очевидно, U является окрестностью подмногообразия V в $\Omega \times D$.

Пусть U' — окрестность V в $\Omega \times D$, такая, что $\bar{U}' \subset U$. Пусть C^∞ -функция α в $\Omega \times D$ такова, что

$$\alpha(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, z) \notin U', \\ 1, & \text{если } (x, z) \text{ лежит в некоторой окрестности } V. \end{cases}$$

Форма $\omega_0 = \pi^*(\omega)$ имеет тип (p, q) на U . Более того, $u^*(\omega_0) = (\pi \circ u)^*(\omega) = \omega$, так как $\pi \circ u$ — тождественное отображение Ω_f .

Определим форму ω_1 на $\Omega \times D$, полагая

$$\omega_1 = \begin{cases} \alpha\omega_0 & \text{в } U, \\ 0 & \text{вне } U. \end{cases}$$

Тогда ω_1 есть C^∞ -форма типа (p, q) на $\Omega \times D$ и $u^*(\omega_1) = \omega$. Пусть

$$\omega_2(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, z) \in V, \\ (z - f(x))^{-1}(\bar{\partial}\omega_1)(x, z), & \text{если } (x, z) \in \Omega \times D - V. \end{cases}$$

Тогда ω_2 является C^∞ -формой типа $(p, q+1)$ на $\Omega \times D$ и $\bar{\partial}\omega_2 = 0$ (ω_2 принадлежит классу C^∞ , так как $\bar{\partial}\omega_1 = 0$ в окрестности V). Так как $\Omega \times D$ по условию — $\bar{\partial}$ -ациклическое множество, то найдется форма ω_3 типа (p, q) на $\Omega \times D$, такая, что $\bar{\partial}\omega_3 = \omega_2$.

Пусть

$$\omega' = \omega_1 - (z - f(x))\omega_3;$$

тогда ω' является C^∞ -формой типа (p, q) на $\Omega \times D$. Кроме того,

$$\bar{\partial}\omega' = \bar{\partial}\omega_1 - (z - f(x))\omega_2 = 0$$

и $u^*(\omega') = u^*(\omega_1)$ (так как $z - f(x) = 0$, если $(x, z) \in V$), и поэтому $u^*(\omega') = \omega$.

Утверждение о $\bar{\partial}$ -ациклическости множества Ω_f сразу следует из доказанного выше и из того, что $\Omega \times D$ $\bar{\partial}$ -ациклично. ►

2.14.8. Следствие. В обозначениях теоремы 2.14.7, если $\Omega \times D^k$ является $\bar{\partial}$ -циклическим множеством для любого $k \geq 0$, то таким же является и множество $\Omega_f \times D^k$ для всех $k \geq 0$.

◀ Это следует из того, что

$$\Omega_f \times D^k = \Omega'_g,$$

где $\Omega' = \Omega \times D^k$ и $g(x, z) = f(x)$. ▶

2.14.9. ТЕОРЕМА (ОКА). Пусть $f_1, \dots, f_k$ — голоморфные функции в $\mathbb{C}^n$ и

$$U = \{x \in \mathbb{C}^n: |f_\nu(x)| < 1, \nu = 1, \dots, k\}.$$

Пусть $u: U \rightarrow \mathbb{C}^n \times D^k$ — голоморфное отображение

$$x \mapsto (x, f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Тогда для всякой голоморфной в U функции g найдется голоморфная в $\mathbb{C}^n \times D^k$ функция G , такая, что $G \circ u = g$.

◀ Пусть

$$\Omega_0 = \mathbb{C}^n, \Omega_p = \{x \in \Omega_{p-1}: |f_p(x)| < 1\}, \quad 1 \leq p \leq k.$$

Обозначим через

$$u_p: \Omega_{k-p} \times D^p \rightarrow \Omega_{k-p-1} \times D^{p+1}$$

отображение

$$(x, z) \mapsto (x, z, f_{k-p}(x)).$$

По теореме 2.13.5 и следствию 2.14.8 множества $\Omega_r \times D^s$ $\bar{\partial}$ -циклически для всех $s \geq 0$, $0 \leq r \leq k$. Более того, по теореме 2.14.7, для любой $\bar{\partial}$ -замкнутой (p, q) -формы ω на $\Omega_{k-p} \times D^p$ найдется $\bar{\partial}$ -замкнутая (p, q) -форма ω' на $\Omega_{k-p-1} \times D^{p+1}$, такая, что $u_p^*(\omega') = \omega$.

Далее, у нас $\Omega_k = U$ и

$$u: U \rightarrow \mathbb{C}^n \times D^k$$

есть отображение

$$u = u_{k-1} \circ \dots \circ u_1 \circ u_0.$$

Отсюда следует, что для всякой формы ω типа (p, q) на U , для которой $\bar{\partial}\omega = 0$, найдется форма ω' типа (p, q) на $\Omega_0 \times D^k = \mathbb{C}^n \times D^k$, такая, что $\bar{\partial}\omega' = 0$ и $u^*(\omega') = \omega$; теорема 2.14.9 получается отсюда как частный случай, когда $p = q = 0$. ▶

2.14.10. Аппроксимационная теорема ОКА — Вейля. Если функции $f_1, \dots, f_k$ голоморфны в $\mathbb{C}^n$, то множество

$$U = \{x \in \mathbb{C}^n: |f_\nu(x)| < 1, \nu = 1, \dots, k\}$$

является областью Рунге (см. определение 1.7.1), т. е. всякую голоморфную на U функцию можно аппроксимировать многочленами от $z_1, \dots, z_n$ равномерно на компактных подмножествах U .

◀ Пусть $u: U \rightarrow \mathbb{C}^n \times D^k = \Omega$ есть отображение $x \mapsto (x, f_1(x), \dots, f_k(x))$. Если функция g голоморфна в U , то по теореме 2.14.9 существует голоморфная в Ω функция G , такая, что $G \circ u = g$.

Функцию G можно разложить в ряд Тейлора

$$G(x, z) = \sum a_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} z_1^{\beta_1} \dots z_k^{\beta_k},$$

который сходится равномерно на компактных подмножествах Ω ; в частности, G есть предел последовательности многочленов P_N , сходящейся равномерно на компактных подмножествах Ω . Следовательно, целые функции

$$g_N(x) = P_N(x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_k(x))$$

равномерно стремятся к функции $G \circ u = g$ на компактных подмножествах U . Так как целые функции являются пределами многочленов, то отсюда следует наше утверждение. ▶

2.14.11. Предложение. Всякое выпуклое открытое множество в $\mathbb{C}^n$ является областью Рунге.

◀ Достаточно показать, что всякое ограниченное выпуклое открытое множество Ω в $\mathbb{C}^n$ есть область Рунге. Пусть K — компактное подмножество Ω . Если $x_1, \dots, x_n$ — координатные функции в $\mathbb{C}^n$, то для любой граничной точки $a \in \partial\Omega$ найдется линейная функция

$$l_a(x) = \sum_{v=1}^n c_v x_v + c_0,$$

такая, что $l_a(a) = 0$ и $\operatorname{Re} l_a(x) < 0$ для всех $x \in \Omega$. Значит, для любой точки $a \in \partial\Omega$ существует линейная функция L в $\mathbb{C}^n$, такая, что

$$\operatorname{Re} L(x) < 0, \quad x \in K, \quad \operatorname{Re} L(a) > 0$$

(надо заменить l_a на $L = l_a + \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало). Тогда $\operatorname{Re} L(x) > 0$ для всех x , близких к a . Так как $\partial\Omega$ — компакт, то существует конечное число линейных функций $L_1, \dots, L_r$, таких, что

$$\max_v \operatorname{Re} L_v(x) \begin{cases} > 0, & \text{если } x \in \partial\Omega, \\ < 0, & \text{если } x \in K. \end{cases}$$

Следовательно, множество

$$U = \{x \in \Omega: \operatorname{Re} L_v(x) < 0, \quad v = 1, \dots, r\}$$

содержит K и относительно компактно в U . Далее, множество $V = \{x \in \mathbb{C}^n: \operatorname{Re} L_v(x) < 0, \quad v = 1, \dots, r\}$ выпукло в $\mathbb{C}^n$, а значит,

связно, и $V \cap \Omega = U$ относительно компактно в Ω . Поэтому $V = U$. Таким образом,

$$U = \{x \in \mathbb{C}^n: |f_v(x)| < 1, \quad f_v = \exp(L_v), \quad v = 1, \dots, r\}.$$

По теореме 2.14.10, U есть область Рунге, и поэтому голоморфные в U функции равномерно на K аппроксимируются многочленами. Так как K — произвольный компакт из Ω и $U \subset \Omega$, то предположение доказано. ►

Приведенное здесь доказательство теоремы Хартогса подсказано доказательством аппроксимационной теоремы Мальгранжа — Лакса (см. § 3.10, а также Мальгранж [1]). Что касается нашего доказательства теоремы Ока — Вейля, то оно по существу — перевод доказательства самого Ока [1] на язык дифференциальных форм. Эти теоремы приведены также в книге Хёрмандера [4].

§ 2.15. Погружения и вложения: теоремы Уитни

Мы будем рассматривать только C^k -многообразия $V, V', \dots$, счетные в бесконечности.

2.15.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны C^k -многообразия V, V' и C^k -отображение $f: V \rightarrow V'$. Отображение f называется *регулярным* в точке $a \in V$, если касательное в этой точке отображение $f_{*,a}: T_a(V) \rightarrow T_{f(a)}(V')$ инъективно; f называется *регулярным* на множестве $S \subset V$, если оно регулярно в каждой точке S ; f называется *регулярным отображением*, или *погружением*, если оно регулярно на V .

Отображение $f: V \rightarrow V'$ класса C^k называется *вложением*, если f — инъективное погружение. Если, кроме того, f — гомеоморфизм V на множество $f(V)$ с топологией, индуцируемой из V' , то отображение f называется *локально собственным вложением* (см. предложение 2.5.8). Вложение (погружение) $f: V \rightarrow V'$ называется *замкнутым*, если f — собственное отображение (см. определение 2.5.7). Аналогичные определения можно дать для $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{C}$ -аналитических многообразий и отображений.

Рассмотрим теперь случай, когда $V' = \mathbb{R}^q$. Пусть $C^k(V, q)$ — множество всех C^k -отображений V в $\mathbb{R}^q$. Введем в этом пространстве топологию. Пусть $\mathcal{U}$ — семейство систем координат,

$$\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in \sigma},$$

такое, что семейство $\{U_i\}$ образует локально конечное покрытие V . Мы будем предполагать, что $U_i \Subset V$. Пусть K_i — компактные подмножества U_i , такие, что $\bigcup K_i = V$. Рассмотрим семейство $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in \sigma}$ положительных действительных чисел и семейство $m = \{m_i\}_{i \in \sigma}$ положительных целых чисел $m_i \leq k$ с теми же множествами индексов, что и у семейства $\mathcal{U}$. Для произвольной C^k -функ-

ции ψ на U_i и набора из n целых чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, где $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k$, положим

$$D^\alpha \psi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \psi(x),$$

где векторные поля $\partial/\partial x_i$, соответствующие системе координат (U_i, φ_i) , определены естественным образом, как в § 2.4. Для $f_0 \in C^k(V, q)$ обозначим через

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{U}, m, \varepsilon, f_0)$$

множество

$$\mathcal{B} = \{f \in C^k(V, q): |D^\alpha(f - f_0)(x)| < \varepsilon_i \text{ для } x \in K_i, |\alpha| \leq m_i, i \in \mathcal{I}\}.$$

Определим топологию в $C^k(V, q)$, потребовав, чтобы множества $\mathcal{B}$, для которых $\mathcal{U}$ фиксировано, а m и ε пробегает все семейства с перечисленными выше свойствами, образовывали фундаментальную систему окрестностей f_0 . Если

$$\mathcal{B}' = \{V_i, \varphi'_i\}_{i \in I}$$

— другое семейство систем координат, такое же, как выше и $\varepsilon' = \{\varepsilon'_i\}$, $m' = \{m'_i\}$ соответствуют $\mathcal{B}'$, то сразу видно, что для любого множества

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}', m', \varepsilon', f_0) = \mathcal{B}'$$

найдется множество $\mathcal{B}(\mathcal{U}, m, \varepsilon, f_0)$, содержащееся в $\mathcal{B}'$, и обратно. Следовательно, введенная топология в $C^k(V, q)$ не зависит от выбора семейства $\mathcal{U}$ (и системы компактов $K_i \subset U_i$).

Пространство $C^k(V, q)$ с этой топологией мы будем обозначать символом $\mathcal{E}^k(V, q)$ либо просто $\mathcal{E}^k$ или $\mathcal{E}^k(V)$, когда не возникает недоразумений.

Заметим, что эта топология совпадает с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах вместе с производными порядка $\leq k$ (см. § 2.16) только в случае, когда V — компакт. Пространство $\mathcal{E}^k(V, q)$, вообще говоря, не имеет счетной базы и не метризуемо.

Следующее предложение легко получается из определений.

2.15.2. Предложение. Множество C^k -погружений $f: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ открыто в $\mathcal{E}^k(V, q)$ при $k \geq 1$.

Фиксируем покрытие $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ с ранее перечисленными свойствами. Если L — произвольный компакт из V и $f \in C^k(V, q)$, то положим для $0 \leq r \leq k$

$$\|f\|_{r, L} = \sum_i \sum_{|\alpha| \leq r} \sup_{x \in L \cap K_i} |D^\alpha f(x)|.$$

2.15.3. ЛЕММА. Пусть K — компактное подмножество V и L — компактная окрестность K . Тогда для любого C^k -вложения $f: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $g \in C^k(V, q)$, для которых

$$\|f - g\|_{1, L} < \delta,$$

отображение $g|_K$ инъективно.

◀ Пусть (U, φ) — система координат на V , такая, что множество U относительно компактно, и пусть $C \subset U$ — компакт. Если $a, b \in U$, то положим

$$d(a, b) = \|\varphi(a) - \varphi(b)\|.$$

Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$|f(a) - f(b)| \geq \varepsilon d(a, b), \quad a, b \in C,$$

так как f — вложение. Если $g \in C^k(V, q)$ и $\|f - g\|_{1, \bar{U}}$ достаточно мала, то для $h = f - g$ мы имеем

$$|h(a) - h(b)| \leq \varepsilon d(a, b)/2 \text{ для всех } a, b \in C.$$

Отсюда следует, что $g|_C$ — инъективное отображение; в самом деле, $|g(a) - g(b)| \geq \varepsilon d(a, b)/2$ для всех $a, b \in C$.

Так как K — компакт, мы можем выбрать конечное число систем координат $(V_1, \varphi_1), \dots, (V_N, \varphi_N)$, таких, что $K \subset \bigcup V_v \subset L$. Если $\|f - g\|_{1, L}$ достаточно мала, то $g|_{V_v}$ инъективно. Поэтому существует окрестность W диагонали Δ произведения $K \times K$, такая, что если $(a, b) \in W \setminus \Delta$, то $g(a) \neq g(b)$ для любой g , такой, что полунорма $\|f - g\|_{1, L}$ мала.

Далее, существует $\theta > 0$, такое, что $|f(a) - f(b)| \geq \theta$, если $(a, b) \in (K \times K) \setminus W$. Если $\|f - g\|_{0, K} < \theta/2$, то $|g(a) - g(b)| > \theta/2$ для всех $(a, b) \in (K \times K) \setminus W$. Отсюда сразу следует утверждение леммы. ▶

2.15.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Множество замкнутых вложений V в $\mathbb{R}^q$ открыто в $\mathcal{C}^k(V, q)$, если $k \geq 1$.

◀ Пусть $\{K_m\}$ — последовательность компактных подмножеств V , таких, что

$$K_0 = \emptyset, \quad K_m \subset K_{m+1} \text{ и } \bigcup K_m = V.$$

Пусть L_m есть замыкание $K_{m+1} \setminus K_m$. Тогда

$$L_m \cap L_{m'} = \emptyset, \text{ если } m' \geq m + 2,$$

и семейство $\{L_m\}$ локально конечно. Если $f: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ — замкнутое вложение, то множества $f(L_m) \subset \mathbb{R}^q$ обладают такими же свойствами. Поэтому существуют открытые множества U_m в $\mathbb{R}^q$, такие, что $f(L_m) \subset U_m$ и $U_m \cap U_{m'} = \emptyset$, если $m' \geq m + 2$. Мы можем выбрать $\delta_m > 0$ так, что если $g \in C^k(V, q)$ и

$$\|f - g\|_{1, L_m} < \delta_m$$

для всех $m > 0$, то $g(L_m) \subset U_m$ и $g|_{L_m \cup L_{m+1}}$ — инъективное отображение (по лемме 2.15.3). Мы утверждаем, что все такие g инъективны. В самом деле, если $a, b \in V$, $a \neq b$, то пусть $a \in L_m$, $b \in L_{m'}$ (и, скажем, $m' \geq m$). Если $m' \geq m+2$, то $g(a) \in U_m$, $g(b) \in U_{m'}$ и $U_m \cap U_{m'} = \emptyset$, поэтому $g(a) \neq g(b)$. Если $m' = m+1$ или $m' = m$, то $g(a) \neq g(b)$, так как $g|_{L_m \cap L_{m+1}}$ инъективно. Из определения топологии в $C^k(V, q)$ следует теперь существование окрестности $\mathcal{B} \ni f$, такой, что всякое отображение $g \in \mathcal{B}$ является вложением. Ясно, что если $f: V \rightarrow \mathbb{R}^q$ — собственное отображение и $|f(x) - g(x)| \leq 1$ для всех $x \in V$, то g тоже собственное. Предложение 2.15.4 доказано. ►

2.15.5. Замечание. Легко показать, как в приведенном выше доказательстве, что любое отображение g из подходящей окрестности локально собственного вложения тоже является вложением. Без предположения о том, что вложение локально собственное, это утверждение неверно. Даже на компактных множествах отображение, близкое к (нерегулярному) инъективному, не обязано быть инъективным.

2.15.6. Лемма. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ — отображение класса C^k , $k \geq 1$, $q \geq 2n$. Пусть r — произвольное целое число, $r \leq k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует C^k -отображение $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$, такое, что $\|g - f\|_r^2 < \varepsilon$ и векторы $\partial g / \partial x_1, \dots, \partial g / \partial x_n$ линейно независимы в каждой точке Ω .

◀ Согласно теореме 1.6.5, мы можем считать, что $k \geq 2$. Пусть $f_0 = f$. Достаточно показать, что если f' — отображение класса C^k , для которого $\partial f' / \partial x_1, \dots, \partial f' / \partial x_s$ линейно независимы в каждой точке Ω , то существует $g \in C^k(\Omega)$, такое, что $\|g - f'\|_r^2 < \varepsilon$ и $\partial g / \partial x_1, \dots, \partial g / \partial x_{s+1}$ независимы во всех точках Ω ; здесь $0 \leq s < n$. Пусть

$$v_j(x) = \frac{\partial f'}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n$$

есть C^{k-1} -отображение Ω в $\mathbb{R}^q$. Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathbb{R}^s \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q,$$

определяемое равенством

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_s, x) = \sum_{j=1}^s \lambda_j \frac{\partial f'}{\partial x_j} - v_{s+1}(x).$$

Так как $\dim(\mathbb{R}^s \times \Omega) = s + n < 2n \leq q$ и $\varphi \in C^1$ (ибо $k \geq 2$), то по лемме 1.4.3 для любого $\delta > 0$ найдется $a \in \mathbb{R}^q$, $\|a\| < \delta$, такое, что $a \notin \varphi(\mathbb{R}^s \times \Omega)$. Если теперь $\partial f' / \partial x_1, \dots, \partial f' / \partial x_s$ $\mathbb{R}$ -независимы в Ω и $a \notin \varphi(\mathbb{R}^s \times \Omega)$, то, полагая

$$g(x) = f'(x) + a \cdot x_{s+1},$$

мы заключаем, что $\partial g / \partial x_1, \dots, \partial g / \partial x_{s+1}$ $\mathbb{R}$ -независимы во всех точках $x \in \Omega$. Если δ достаточно мало, мы получаем требуемый результат. ►

Заметим, что отображение g в лемме 2.15.6 является погружением Ω .

2.15.7. ТЕОРЕМА УИТНИ о погружениях. Для любого многообразия V класса C^k , $k \geq 1$, размерности n и любого $q \geq 2n$, множество C^k -погружений V в $\mathbb{R}^q$ является открытым плотным подмножеством в $\mathcal{C}^k(V, q)$.

◄ Пусть $\mathfrak{U} = \{(U_\nu, \varphi_\nu)\}$, $\nu = 0, 1, \dots$ — последовательность систем координат, такая, что семейство $\{U_\nu\}$ локально конечно, $\varphi_\nu(U_\nu) = \Omega_\nu$ — ограниченные открытые подмножества $\mathbb{R}^n$, U_ν относительно компактны в V и $V = \bigcup U_\nu$. Пусть компакты $K_\nu \subset U_\nu$ таковы, что $\bigcup K_\nu = V$, и пусть заданы $\varepsilon_\nu > 0$ и целые числа $n_\nu \geq 0$, $n_\nu \leq k$. Пусть $f \in C^k(V, q)$ и $f_0 = f$. Предположим, что мы уже построили отображения $f_0, \dots, f_m: V \rightarrow \mathbb{R}^q$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i, m) $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \varepsilon_\nu$ для $x \in K_\nu$, $|\alpha| \leq n_\nu$;
- (ii, m) f_m регулярно на $\bigcup_{\nu=0}^m K_\nu$;
- (iii, m) $\text{supp}(f_{p+1} - f_p) \subset U_{p+1}$, $p = 0, 1, \dots, m-1$.

Пусть C^k -функция α_m на V равна 1 в окрестности K_{m+1} и $\text{supp } \alpha_m \subset U_{m+1}$. По лемме 2.15.6 для любого $\delta > 0$ и любого целого числа N , $0 \leq N \leq k$, существует C^k -отображение $h_m: U_{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^q$, регулярное в U_{m+1} и такое, что

$$|D^\alpha (f_m - h_m)| < \delta \text{ на } U_{m+1}, \quad |\alpha| \leq N.$$

Рассмотрим отображение

$$f_{m+1} = \begin{cases} f_m + \alpha_m (h_m - f_m) & \text{на } U_{m+1}, \\ f_m & \text{на } V \setminus U_{m+1}. \end{cases}$$

Тогда $f_{m+1} \in C^k(V, q)$ и $f_{m+1} \rightarrow f_m$ в $\mathcal{C}^k(V, q)$ при $\delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow k$. Поэтому если δ достаточно мало и $N \geq 1$, то отображение f_{m+1} регулярно на $\bigcup_{\nu \leq m} K_\nu$. Далее, $f_{m+1} = h_m$ на K_{m+1} и потому регулярно

и на K_{m+1} . Значит, если δ достаточно мало, а N достаточно велико, то отображения $(f_0, \dots, f_{m+1})$ удовлетворяют условиям (i, $m+1$), (ii, $m+1$), (iii, $m+1$). Итак, мы по индукции построили отображения $f_m: V \rightarrow \mathbb{R}^q$, $m \geq 0$, удовлетворяющие (i, m), (ii, m), (iii, m) для всех $m \geq 0$. Полагая

$$g = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m,$$

мы получаем регулярное отображение $g: V \rightarrow \mathbb{R}^q$, такое, что $|D^\alpha f(x) - D^\alpha g(x)| \leq \varepsilon_v$, $|\alpha| \leq n_v$, для $x \in K_v$. ►

2.15.8. ТЕОРЕМА УИТНИ о вложениях. Для любого C^k -многообразия ($k \geq 1$) V размерности n и любого $q \geq 2n + 1$ множество вложений V в $\mathbb{R}^q$ всюду плотно в $\mathcal{E}^k(V, q)$.

◄ Пусть f — произвольное погружение V в $\mathbb{R}^q$. Пусть $\mathcal{U} = \{(U_v, \varphi_v)\}$ — последовательность координатных окрестностей, такая, что $\{U_v\}$ есть локально конечное покрытие V , $U_v \subseteq V$ и $f|_{U_v}$ — инъективные отображения (такая последовательность существует). Пусть компакты $K_v \subset U_v$ таковы, что $\bigcup K_v = V$, и пусть еще заданы $\varepsilon_v > 0$ и целые числа $n_v > 0$, $n_v \leq k$. Положим $f_0 = f$ и построим по индукции отображения $f_0, \dots, f_m$ многообразия V в $\mathbb{R}^q$ со следующими свойствами:

- (i), m) $f_m|_{U_v}$ инъективно для всех v ; $f_m|_{\bigcup_{v \leq m} K_v}$ инъективно;
- (ii), m) $\text{supp}(f_{p+1} - f_p) \subset U_{p+1}$ для $p = 0, 1, \dots, m-1$;
- (iii), m) $|D^\alpha f_m(x) - D^\alpha f(x)| < \varepsilon_v$ для $x \in K_v$ и $|\alpha| \leq n_v$, $v \geq 1$.

Предположим, что $f_0, \dots, f_m$ уже заданы. Возьмем C^k -функцию α_m на V с компактным носителем в U_{m+1} , равную 1 в окрестности K_{m+1} , и рассмотрим множество

$$\Omega = \{(x, y) \in V \times V : \alpha_m(x) \neq \alpha_m(y)\};$$

Ω — многообразие класса C^k размерности $2n$. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^q$ — отображение

$$\varphi(x, y) = - \frac{f_m(x) - f_m(y)}{\alpha_m(x) - \alpha_m(y)}.$$

Так как $q \geq 2n + 1$, то $\varphi(\Omega)$ имеет меру нуль; значит, для любого $\delta > 0$ найдется

$$v \in \mathbb{R}^q, \|v\| < \delta, v \notin \varphi(\Omega).$$

Положим

$$f_{m+1} = f_m + \alpha_m v.$$

Мы утверждаем, что f_{m+1} обладает свойствами (i), $m+1$) и (ii), $m+1$). Последнее очевидно. Если

$$f_{m+1}(x) = f_{m+1}(y),$$

то

$$f_m(x) - f_m(y) = -v(\alpha_m(x) - \alpha_m(y)),$$

откуда, поскольку $v \notin \varphi(\Omega)$, мы должны получить, что $\alpha_m(x) - \alpha_m(y) = 0$ и $f_m(x) - f_m(y) = 0$. Из последнего вытекает инъективность отображений $f_{m+1}|_{U_v}$ для всех v и $f_{m+1}|_{\bigcup_{v \leq m} K_v}$. Предположим, что $f_{m+1}(x) = f_{m+1}(y)$ для некоторых $x \in K_{m+1}$ и $y \in \bigcup_{v \leq m+1} K_v$. Тогда из равенства $\alpha_m(x) = \alpha_m(y)$ вытекает, что $y \in U_{m+1}$ (ибо $\alpha_m(x) = 1$ для $x \in K_{m+1}$ и $\alpha_m = 0$ на $V \setminus U_{m+1}$). Но так как отображение $f_m|_{U_{m+1}}$ инъективно, то отсюда следует, что $x = y$.

Кроме того, $f_{m+1} \rightarrow f_m$ в $\mathcal{C}^k(V, q)$ при $\delta \rightarrow 0$, и отсюда уже легко следует существование последовательности отображений f_m , удовлетворяющих (i, m), (ii, m), (iii, m) для всех $m \geq 0$.

Отображение

$$g = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$$

инъективно на всем V и $|D^\alpha(f - g)| \leq \epsilon_\nu$ при $|\alpha| \leq n_\nu$ на K_ν для всех ν . Отсюда видно, что для произвольного погружения существует сколь угодно близкие к нему C^k -вложения V в $\mathbb{R}^q$. Наша теорема следует теперь из теоремы 2.15.7. ►

Из этих теорем и предложения 2.15.4 мы сразу получаем следующее утверждение.

2.15.9. ТЕОРЕМА. Для любого C^k -многообразия V размерности n и любого $q \geq 2n$ множество замкнутых погружений V в $\mathbb{R}^q$ есть открытое плотное подмножество открытого множества $\mathcal{P}$ всех собственных C^k -отображений V в $\mathbb{R}^q$. Если $q \geq 2n + 1$, то множество замкнутых вложений V в $\mathbb{R}^q$ открыто и плотно в $\mathcal{P}$.

2.15.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $\mathcal{P}$ собственных C^k -отображений V в $\mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$) непусто.

◄ Так как существуют собственные C^k -отображения V в $\mathbb{R}^q$ ($q \geq 1$), то мы можем считать, что $q = 1$. Пусть $\{U_\nu\}$ — последовательность относительно компактных подмножеств V , $\bigcup U_\nu = V$, и предположим, что семейство $\{U_\nu\}$ локально конечно. Пусть K_ν — компактное подмножество U_ν и $\bigcup K_\nu = V$. Пусть η_ν — функция класса C^k на V с компактным носителем в U_ν , такая, что $0 \leq \eta_\nu(x) \leq 1$ для всех x , $\eta_\nu(x) = 1$ для $x \in K_\nu$. Тогда отображение

$$\varphi: V \rightarrow \mathbb{R},$$

задаваемое формулой

$$\varphi(x) = \sum_{\nu \geq 1} \nu \eta_\nu(x),$$

есть собственное отображение класса C^k . ►

2.15.11. СЛЕДСТВИЕ. Для любого C^k -многообразия V размерности n существует замкнутое погружение V в $\mathbb{R}^{2n}$ и замкнутое вложение V в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

2.15.12. ЗАМЕЧАНИЯ. Сделаем несколько дополнительных замечаний о теоремах Уитни. Прежде всего то, что мы отображаем V в евклидово пространство, совсем не существенно. Можно доказать следующую теорему (см., например, Картан [3]):

Пусть даны два C^k -многообразия V и V' (со счетной базой), причем V' связно. Предположим, что $\dim V' \geq 2\dim V + 1$. Тогда существует замкнутое C^k -вложение V в V' , за исключением случая, когда многообразие V некомпактно, а V' компактно. [В последнем случае, конечно, вообще не существует ни одного собственного отображения V в V' .]

Далее, если $\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие V допускает $\mathbb{R}$ -аналитическое замкнутое вложение в $\mathbb{R}^q$ для некоторого q , то из предложения 2.5.14 и теоремы 1.6.5 следует, что $\mathbb{R}$ -аналитические функции на V плотны в $\mathcal{C}^k(V, 1)$. Поэтому из доказанных выше результатов Уитни и предложения 2.15.4 следует, что такое многообразие имеет $\mathbb{R}$ -аналитическое замкнутое погружение в $\mathbb{R}^{2n}$ и замкнутое аналитическое вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Эти результаты были дополнены Грауэртом [1], который показал, что любое $\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие со счетной базой (размерности n) можно аналитически вложить в некоторое $\mathbb{R}^q$ как замкнутое подмногообразие.

Вернемся к C^k -многообразиям. Уитни [5] уточнил теорему о погружениях, показав, что любое C^k -многообразие размерности $n \geq 2$ допускает замкнутое C^k -погружение в $\mathbb{R}^{2n-1}$. [Для $n = 1$ это, очевидно, неверно: окружность нельзя погрузить в $\mathbb{R}^1$.] Он доказал, кроме того, что всякое C^k -многообразие размерности n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$; в частности, компактные C^k -многообразия размерности n допускают замкнутые вложения в $\mathbb{R}^{2n}$. (Уитни [4]). Эти результаты были дополнены Хиршем [1], который показал, что *всякое некомпактное многообразие размерности n допускает вложение в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и, значит, замкнутое вложение в $\mathbb{R}^{2n}$* ¹⁾.

Объединяя эти замечания, можно, в частности, утверждать следующее:

Теорема. *Для любого C^k - ($\mathbb{R}$ -аналитического) многообразия размерности n существует замкнутое C^k - ($\mathbb{R}$ -аналитическое) погружение V в $\mathbb{R}^{2n-1}$ (если $n \geq 2$) и замкнутое C^k - ($\mathbb{R}$ -аналитическое) вложение V в $\mathbb{R}^{2n}$.*

Известно немало очень интересных более тонких теорем вложения для более узких классов многообразий. Эти теоремы о вложимости и невложимости породили обширную литературу. Мы остановимся только на двух из этих теорем; дальнейшие ссылки можно найти в статьях Атья [1] и Хеффлигера [1].

Теорема Уолла [1]. *Всякое замкнутое компактное ориентируемое многообразие размерности 3 можно вложить в $\mathbb{R}^5$.*

¹⁾ Заметим, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ (компактное многообразие размерности n) нельзя замкнуто вложить в $\mathbb{R}^{2n-1}$. — Прим. ред.

Многообразие V называется k -связным, если для любого m , $0 \leq m \leq k$, и любого непрерывного отображения f сферы

$$S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1\}$$

в V существует отображение F шара

$$D^{m+1} = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2 \leq 1\}$$

в V , такое, что $F|S^m = f$.

Теорема Хефлигера [1]. Любое компактное k -связное многообразие V можно вложить в $\mathbb{R}^{2n-k}$, если $n = \dim V \geq 2k + 3$.

Проблема голоморфного вложения комплексных многообразий в некоторое $\mathbb{C}^q$ имеет совсем другую природу. Многообразия, которые можно вложить в $\mathbb{C}^q$ в виде замкнутых подмногообразий, — это так называемые *многообразия Штейна*. Для них имеет место утверждение, аналогичное следствию 2.15.11; см. Бишоп [1] и Р. Нарасимхан [1].

Замечание. Приведенные здесь доказательства теорем 2.15.7, 8 по существу принадлежат Уитни [1].

§ 2.16. Теорема Тома о трансверсальности

В этом параграфе мы докажем один частный случай теоремы Тома [1]. Приводимое нами доказательство совпадает по существу с доказательством Абрахама [1]. Для подробного изучения теоремы и некоторых ее приложений см. Картан [3].

Пусть V — многообразие класса C^k , $1 \leq k \leq \infty$, размерности n со счетной базой. В пространстве $C^k(V)$ всех C^k -функций (с действительными значениями) на V определим топологию следующим образом. Пусть K — произвольное компактное подмножество V , $X_1, \dots, X_m$ ($0 \leq m \leq k$, $m \in \mathbb{Z}$) — векторные поля на V и $\varepsilon > 0$. Множества

$$\mathcal{B} = \{f \in C^k(V) : |X_1 \dots X_m(f)(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in K\}$$

образуют фундаментальную систему окрестностей функции $0 \in C^k(V)$. (Эта топология сходимости на компактных подмножествах вместе с производными порядка $\leq k$ слабее, чем топология $\mathcal{C}^k$, введенная в § 2.15.) Пусть V' — еще одно C^k -многообразие размерности m со счетной базой и $C^k(V, V')$ — множество C^k -отображений V в V' . Введем в $C^k(V, V')$ следующую топологию:

Фильтр $\{f_\alpha\}$ C^k -отображений $f_\alpha: V \rightarrow V'$ сходится к C^k -отображению $f: V \rightarrow V'$ в том и только в том случае, когда для всякой C^k -фун-

кции ϕ на V' фильтр $\{\phi \circ f_a\}$ C^k -функций на V сходится в $C^k(V)$ к функции $\phi \circ f$.

Легко проверить, что $C^k(V, V')$ — полное метрическое пространство со счетной базой.

Пусть теперь V, V' — два C^k -многообразия, счетных в бесконечности, и пусть (W, i) — замкнутое подмногообразие V' . отождествим W с $i(W)$ и касательное пространство $T_a(W)$ в точке $a \in W$ с подпространством $i_{*,a}(T_a(W)) \subset T_{f(a)}(V')$.

2.16.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: V \rightarrow V'$ класса C^k называется *трансверсальным* к W в точке $a \in V$, если либо $f(a) \notin W$, либо

$$f_{*,a}(T_a(V)) + T_{f(a)}(W) = T_{f(a)}(V'),$$

т.е. если $f_{*,a}(T_a(V))$ и $T_{f(a)}(W)$ порождают $T_{f(a)}(V')$. Отображение f называется *трансверсальным* к W , если оно трансверсально к W в каждой точке V .

Всюду в дальнейшем $\dim V = n$, $\dim V' = m$ и $\dim W = m - q$, $q \geq 1$, так что W имеет коразмерность q .

2.16.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f: V \rightarrow V'$ — некоторое C^k -отображение и $f(a) \in W$, $a \in V$, то f трансверсально к W в точке a тогда и только тогда, когда в $T_a(V)$ имеется подпространство E размерности q , такое, что $f_{*,a}|_E$ инъективно и

$$f_{*,a}(E) \cap T_{f(a)}(W) = \{0\}.$$

◀ Если это условие выполняется, то из равенства $\dim f_{*,a}(E) + \dim T_{f(a)}(W) = \dim T_{f(a)}(V')$ мы получаем, что $f_{*,a}(E) + T_{f(a)}(W) = T_{f(a)}(V')$, в частности, f трансверсально к W в точке a . Обратно, если f трансверсально к W в a , то в $f_{*,a}(T_a(V))$ имеется подпространство E' размерности q , такое, что $E' \cap T_{f(a)}(W) = \{0\}$. А тогда в $T_a(V)$ имеется подпространство E размерности q , такое, что $f_{*,a}(E) = E'$. ▶

2.16.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если C^k -отображение $f: V \rightarrow V'$ трансверсально к W , то множество $f^{-1}(W)$ либо пусто, либо является подмногообразием V коразмерности q , т.е. размерности $n - q$ (естественное вложение $f^{-1}(W)$ в V превращает его в подмногообразие).

◀ Пусть $a \in f^{-1}(W)$ и $b = f(a) \in W$. Пусть E есть q -мерное подпространство $T_a(V)$, такое, что отображение $f_{*,a}|_E$ инъективно и $E' \cap T_b(W) = \{0\}$, где $E' = f_{*,a}(E)$. Пусть $g_1, \dots, g_q$ — функции класса C^k в окрестности U' точки b на V' , такие, что $dg_1, \dots, dg_q$ $\mathbb{R}$ -независимы и

$$U' \cap W = \{y \in U': g_1(y) = \dots = g_q(y) = 0\}.$$

Так как $(dg_i)_b|_{T_b(W)} = 0$, то отсюда следует, что $(dg_i)_b|_{E'}, \dots, (dg_q)_b|_{E'}, \dots$ $\mathbb{R}$ -независимы. Так как $f_{*,a}: E \rightarrow E'$ — изомор-

физм, то ковекторы $d(g_1 \circ f)_a|E, \dots, d(g_q \circ f)_a|E$ $\mathbb{R}$ -независимы, в частности, независимы и $d(g_1 \circ f)_a, \dots, d(g_q \circ f)_a$. Так как

$$f^{-1}(W) \cap f^{-1}(U') = \{x \in f^{-1}(U') : g_1 \circ f(x) = \dots = g_q \circ f(x) = 0\},$$

то из следствия 2.5.5 вытекает, что $f^{-1}(W)$ — подмногообразие V коразмерности q . ►

2.16.4. Лемма. Пусть K — компакт из V . Тогда множество C^k -отображений V в V' , трансверсальных к W в каждой точке K , открыто в $C^k(V, V')$.

Это следует непосредственно из определения.

Пусть теперь V, V', W — многообразия класса C^∞ и $K \subset V$ — компакт.

2.16.5. Предложение. Множество C^∞ -отображений V в V' , трансверсальных к W в каждой точке компакта K , всюду плотно в $C^\infty(V, V')$ (и даже в $\mathcal{C}^\infty(V, V')$).

◀ Пусть $f: V \rightarrow V'$ — произвольное C^∞ -отображение. Ввиду леммы 2.16.4 достаточно доказать, что у любой точки $a \in V$ есть окрестность U , такая, что множество C^∞ -отображений V в V' , трансверсальных к W в каждой точке U , содержит f в своем замыкании. [Пересечение конечного числа открытых плотных подмножеств есть плотное подмножество.]

Пусть (U_0, φ_0) — система координат $a \in U_0, U_0 \subset V, f(a) = b \in W$, и пусть (U', φ') — система координат на V' , такая, что $f(U_0)$ относительно компактно в U' . Пусть U_1 — относительно компактное подмножество U_0 и λ — функция класса C^∞ на V , такая, что $\text{supp } \lambda \subset U_0$ и $\lambda(x) = 1$, когда x лежит в окрестности $\bar{U}_1$. Предположим, что $0 \in \varphi'(U')$. Если $u_1, \dots, u_p$ — произвольные C^k -отображения V в $\mathbb{R}^m$, а $\xi_1, \dots, \xi_p$ — действительные числа, $|\xi_j| < \delta$, то для достаточно малых δ выражение

$$g(x; \xi_1, \dots, \xi_p) = \begin{cases} \lambda(x)(\xi_1 u_1(x) + \dots + \xi_p u_p(x)) & \text{для } x \in U_0, \\ 0 & \text{для } x \notin U_0 \end{cases}$$

определяет C^k -отображение V в $\varphi'(U')$, а по нему мы построим отображение $F_\xi: V \rightarrow V'$, полагая

$$F_\xi(x) = \begin{cases} \varphi'^{-1} \circ (g(x; \xi_1, \dots, \xi_p) + \varphi' \circ f(x)) & \text{для } x \in U_0, \\ f(x) & \text{для } x \notin U_0. \end{cases}$$

Это отображение определено и принадлежит классу C^∞ на V , если δ достаточно мало. Пусть $Q = \{\xi \in \mathbb{R}^p : |\xi_j| < \delta\}$. Мы получили отображение

$$F: Q \times V \rightarrow V', \quad F(\xi, x) = F_\xi(x).$$

Легко проверить, что если векторы $u_1(a), \dots, u_p(a)$ порождают $\mathbb{R}^m$, то отображение

$$F_{*,(0,a)}: T_{(0,a)}(Q \times V) \rightarrow T_b(V')$$

сюръективно. Значит, если δ достаточно мало и U — достаточно малая окрестность точки a , то отображение

$$F_{*,(\xi,a')}: T_{(\xi,a')}(Q \times V) \rightarrow T_{f(\xi,a')}(V')$$

сюръективно для всех $\xi \in Q$ и $a' \in U$. В частности, отображение $F: Q \times U \rightarrow V'$ трансверсально к W . Следовательно (см. предложение 2.16.3), $F^{-1}(W) = W_0$ есть подмногообразие $Q \times U$ коразмерности q (заметим, что W_0 непусто, так как $F(0, a) = b \in W$).

Пусть π — сужение на W_0 естественной проекции $Q \times U$ на Q . Пусть A_π — множество критических точек π (т. е. множество точек $(\xi, x) \in W_0$, таких, что $\text{rang } \pi_{*,(\xi,x)} < p = \dim Q$). Тогда, по теореме Сарда 2.2.13, множество $\pi(A_\pi)$ нигде не плотно в Q . Теперь предложение 2.16.5 является прямым следствием такого утверждения:

2.16.6. Предложение. Для любого $\xi \notin \pi(A_\pi)$ отображение $F_\xi: V \rightarrow V'$ трансверсально к W во всех точках V .

◀ Пусть $x \in V$. Если $(\xi, x) \notin W_0$, то $F_\xi(x) \notin W$, так что нам нечего доказывать. Поэтому предположим, что $(\xi, x) \in W_0$. Тогда отображение $\pi_{*,(\xi,x)}: T_{(\xi,x)}(W_0) \rightarrow T_\xi(Q)$ сюръективно, так как $\xi \notin \pi(A_\pi)$. отождествим $T_{(\xi,x)}(Q \times V)$ с $T_\xi(Q) \oplus T_x(V)$ и $T_{(\xi,x)}(W_0)$ с подпространством $T_0 \subset T_\xi(Q) \oplus T_x(V)$. Тогда проекция T_0 на первое слагаемое $T_\xi(Q)$ сюръективна. Так как F трансверсально к W в точке (ξ, x) , то существует (предложение 2.16.2) q -мерное подпространство $E_0 \subset T_\xi(Q) \oplus T_x(V)$, такое, что

$$F_{*,(\xi,x)}(E_0) = E'$$

есть q -мерное подпространство $T_F(\xi, x)(V')$, для которого

$$E' \cap T_F(\xi, x)(W) = \{0\}.$$

Мы утверждаем, что если $\Phi = F_{*,(\xi,x)}$, то $\Phi^{-1}(T_F(\xi, x)(W)) \subset T_{(\xi,x)}(W_0)$. В самом деле, если $\Phi(v) \in T_F(\xi, x)(W)$, мы можем написать $v = w_0 + v_0$, $w_0 \in T_{(\xi,x)}(W_0)$, $v_0 \in E_0$, и тогда ясно, что $\Phi(v_0) \in T_F(\xi, x)(W)$. Ясно также, что $\Phi(v_0) \in E'$, и поэтому $\Phi(v_0) = 0$. Так как $\Phi|_{E_0}$ — инъективное отображение, то $v_0 = 0$ и $v \in T_{(\xi,x)}(W_0)$.

Отсюда сразу следует, что проекция E множества E_0 на $T_x(V)$ имеет размерность q и что $\Phi(E)$ является q -мерным подпространством $T_F(\xi, x)$, так что $\Phi(E) \cap T_F(\xi, x)(W) = \{0\}$. Снова по предложению 2.16.2 мы получаем, что F_ξ трансверсально к W в точке x . ►

2.16.7. ТЕОРЕМА ТОМА О ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ. Пусть V, V' — многообразия класса C^∞ со счетной базой и W — замкнутое подмногообразие V' . Тогда множество C^∞ -отображений V в V' , трансверсальных к W , всюду плотно в $C^\infty(V, V')$.

◀ Многообразие V является счетным объединением компактов. Следовательно, по лемме 2.16.4 и предложению 2.16.5, множество всех C^∞ -отображений V в V' , трансверсальных к W , является пересечением счетного числа открытых плотных подмножеств $C^\infty(V, V')$. Так как $C^\infty(V, V')$ — полное метрическое пространство, то наше утверждение следует из теоремы Бэра о том, что пересечение счетного числа открытых плотных подмножеств полного метрического пространства всюду плотно; см. Бурбаки [3]. ▶

2.16.8. ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле C^∞ -отображения, трансверсальные к W , образуют подмножество $C^\infty(V, V')$, плотное в топологии $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$. Это следует из доказательства предложения 2.16.5 и из того факта, что теорема Бэра верна и в $\mathfrak{C}^\infty(V, V')$, несмотря на то, что оно не является полным метрическим пространством; см. Картан [3].

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 3.1. Векторные расслоения

3.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X и E — хаусдорфовы пространства и $p: E \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Тройка $\xi = (E, p, X)$ называется *комплексным векторным расслоением* ранга q над пространством X (или просто *расслоением над X*), если выполнены следующие два условия:

(а) для каждой точки $a \in X$ множество $p^{-1}(a) = E_a$ снабжено структурой комплексного векторного пространства размерности q ;

(б) для каждой точки $a \in X$ существуют окрестность $U \ni a$ и гомеоморфизм $h = h_U$ множества $p^{-1}(U) = E_U$ на $U \times \mathbb{C}^q$, такой, что $p = \pi \circ h$ в E_U , где π — проекция $U \times \mathbb{C}^q$ на U (т. е. $\pi(h(y)) = x$, если $y \in E_x$, $x \in U$), и $h|E_x$ есть $\mathbb{C}$ -изоморфизм пространства E_x на $\{x\} \times \mathbb{C}^q$ для всех $x \in U$.

Множество $E_a = p^{-1}(a)$ называется *слоем* расслоения ξ в точке a . Расслоение ранга 1 называется *линейным расслоением*. Мы можем заменить комплексные векторные пространства E_x действительными векторными пространствами и таким же способом определить действительные векторные расслоения.

Если E и X являются C^k -многообразиями ($1 \leq k \leq \infty$), проекция p есть отображение класса C^k , а гомеоморфизмы $h_U: E_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ являются C^k -диффеоморфизмами, то тройку (E, p, X) мы назовем C^k -векторным расслоением (или векторным расслоением класса C^k).

Если X есть $\mathbb{R}$ - или $\mathbb{C}$ -аналитическое многообразие, то совершенно аналогично можно определить $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{C}$ -аналитические векторные расслоения. Комплексно-аналитические векторные расслоения называются также голоморфными векторными расслоениями.

3.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\xi = (E, p, X)$ и $\xi' = (E', p', X)$ — два комплексных векторных расслоения над X . Отображением расслоений (или *морфизмом*) $u: \xi \rightarrow \xi'$ называется непрерывное отображение $u: E \rightarrow E'$, такое, что $p' \circ u = p$ и для любой точки $a \in X$ отображение $u|E_a$ является $\mathbb{C}$ -линейным отображением E_a в E'_a .

Обозначение $u: \xi \rightarrow \xi'$ мы будем использовать также для любого (не обязательно непрерывного) отображения $u: E \rightarrow E'$, такого, что $p' \circ u = p$.

Аналогично можно определить C^k - (R - и C -аналитические) отображения расслоений.

Векторные расслоения ξ и ξ' называются изоморфными, если существуют морфизмы $u: \xi \rightarrow \xi'$ и $u': \xi' \rightarrow \xi$, такие, что отображение $u' \circ u$ тождественно на E , а $u \circ u'$ — на E' ; здесь $\xi = (E, p, X)$, $\xi' = (E', p', X)$.

В качестве примера векторного расслоения ранга q возьмем $E = X \times \mathbb{C}^q$, и пусть $p: E \rightarrow X$ — естественная проекция. Тройка $\Phi_q = (E, p, X)$ представляет собой векторное расслоение $\Phi_q = \Phi_q(X)$, которое называется *тривиальным расслоением* ранга q над X . Тривиальными называются также расслоения, изоморфные Φ_q .

По определению, всякое векторное расслоение $\xi = (E, p, X)$ ранга q локально изоморфно тривиальному расслоению ранга q . Поэтому существуют открытое покрытие $U = \{U_i\}$ пространства X и гомеоморфизмы

$$\varphi_i: E_{U_i} = p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q,$$

такие, что если

$$U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset,$$

то отображение

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: U_{ij} \times \mathbb{C}^q \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^q$$

является гомеоморфизмом и имеет вид

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ji}(x, v)),$$

где $g_{ji}(x, v)$ при каждом фиксированном x есть C -линейный автоморфизм $\mathbb{C}^q$. Следовательно,

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x, v) = (x, g_{ji}(x) v),$$

где для всех $x \in U_{ij}$

$$g_{ji}(x) \in GL(q, \mathbb{C}).$$

Для $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ непосредственно проверяется равенство

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x).$$

Из него, в частности, следует, что

$$g_{ii}(x) = I$$

(I — единичная матрица из $GL(q, \mathbb{C})$) и что

$$g_{ij}(x)^{-1} = g_{ji}(x).$$

Очевидно,

$$g_{ij}: x \mapsto g_{ij}(x)$$

есть непрерывное отображение U_{ij} в $GL(q, \mathbb{C})$.

Эти g_{ij} называются *функциями перехода* (а также отображениями или *матрицами перехода*) расслоения ξ .

Если ξ есть C^k - (или $\mathbb{R}$ - или $\mathbb{C}$ -аналитическое) расслоение, то g_{ij} являются C^k - (или $\mathbb{R}$ - или $\mathbb{C}$ -аналитическими) отображениями.

3.1.3. Замечания. Обратно, пусть X — топологическое хаусдорфово пространство и $\mathcal{U} = \{U_i\}$ — открытое покрытие X . Пусть $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(q, \mathbb{C})$ — непрерывные отображения, такие, что

$$g_{ij}(x) g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$$

для всех $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Обозначим через S топологическую сумму $\bigcup_i (U_i \times \mathbb{C}^q \times \{i\})$. Определим на S отношение эквивалентности $\sim$, полагая

$$(x, v, i) \sim (x', v', j), \text{ если } x' = x \text{ и } v' = g_{ji}(x)v.$$

Легко проверить, что это отношение открыто, а его график замкнут; поэтому факторпространство $E = S/\sim$ хаусдорфово. Пусть $p': S \rightarrow X$ — отображение

$$(x, v, i) \mapsto x.$$

Эквивалентные точки при отображении p' имеют одинаковые образы, и поэтому p' определяет непрерывное отображение $p: E \rightarrow X$. Если $\eta: S \rightarrow E$ — естественное отображение факторпространства, то

$$p^{-1}(U_i) = \{\eta(x, v, i): x \in U_i, v \in \mathbb{C}^q\},$$

и, следовательно, отображение $\eta|_{U_i \times \mathbb{C}^q \times \{i\}}$ является гомеоморфизмом на $p^{-1}(U_i)$. Отсюда сразу следует существование гомеоморфизма

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q$$

со свойствами, которые требуются в определении 3.1.1. Таким образом, $\xi = (E, p, X)$ — векторное расслоение. Из сказанного непосредственно следует, что функциями перехода расслоения ξ (относительно покрытия $\mathcal{U}$) являются как раз отображения g_{ij} .

Если X является C^k - ($\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ -аналитическим) многообразием, то приведенная выше конструкция задает C^k - ($\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ -аналитическое) расслоение.

3.1.4. Замечание. Пусть $\xi = (E, p, X)$ — векторное расслоение и

$$g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(q, \mathbb{C})$$

— матрицы перехода расслоения ξ относительно покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}$ пространства X . Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — измельчение покрытия $\mathcal{U}$ и

$$\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{J}$$

— «измельчающее отображение», т. е. такое отображение, что $V_\alpha \subset U_{\tau(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$. Пусть $h_{\alpha\beta}$ — сужение $g_{\tau(\alpha)\tau(\beta)}$ на $V_\alpha \cap V_\beta$, а $\xi' = (E', p', X)$ — векторное расслоение, построенное, как в замечании 3.1.3, с функциями перехода $\{h_{\alpha\beta}\}$. Тогда E' является факторпространством пространства

$$S' = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (V_\alpha \times \mathbb{C}^q \times \{\alpha\}).$$

Пусть $u': S' \rightarrow E$ — отображение, определяемое условием

$$u'(x, v, \alpha) = \varphi_i^{-1}(x, v),$$

где $i = \tau(\alpha)$ и $\varphi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q$ — изоморфизмы, индуцирующие функции перехода g_{ij} . Тогда отображение u' индуцирует изоморфизм $u: \xi \rightarrow \xi'$.

3.1.5. Предложение. Пусть $\xi = (E, p, X)$, $\xi' = (E', p', X)$ — два векторных расслоения и $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$, $\mathcal{U}' = \{U'_\lambda\}$ — два открытых покрытия X . Пусть $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{\alpha\beta}\}$ — матрицы перехода для ξ , ξ' соответственно, определяемые покрытиями $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ соответственно. Векторные расслоения ξ и ξ' изоморфны в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие:

Существуют общее измельчение

$$\mathfrak{B} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

покрытий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ и измельчающие отображения

$$\tau: \Lambda \rightarrow \mathcal{I}, \quad \tau': \Lambda \rightarrow \mathcal{A},$$

такие, что

$$V_\lambda \subset U_{\tau(\lambda)} \cap U'_{\tau'(\lambda)};$$

кроме того, существуют непрерывные отображения $h_\lambda: V_\lambda \rightarrow GL(q, \mathbb{C})$, такие, что для всех $x \in V_\lambda \cap V_\mu$

$$h_\lambda(x) g_{\tau(\lambda)\tau(\mu)}(x) h_\mu(x)^{-1} = g'_{\tau'(\lambda)\tau'(\mu)}(x).$$

◀ Согласно замечанию 3.1.4, мы можем считать, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ и что эти покрытия имеют одно и то же множество индексов Λ . Это общее покрытие мы обозначим через $\mathfrak{B}$.

Предположим, что существует изоморфизм $u: \xi \rightarrow \xi'$. Пусть

$$\varphi_\lambda: p^{-1}(V_\lambda) \rightarrow V_\lambda \times \mathbb{C}^q, \quad \varphi'_\lambda: p'^{-1}(V_\lambda) \rightarrow V_\lambda \times \mathbb{C}^q$$

— изоморфизмы, индуцирующие матрицы перехода $g_{\lambda\mu}$, $g'_{\lambda\mu}$ соответственно. Тогда отображения

$$u_\lambda = \varphi'_\lambda \circ u \circ \varphi_\lambda^{-1}$$

являются изоморфизмами $V_\lambda \times \mathbb{C}^q$ на себя. Поэтому существуют непрерывные отображения

$$h_\lambda: V_\lambda \rightarrow GL(q, \mathbb{C}),$$

такие, что

$$u_\lambda(x, v) = (x, h_\lambda(x) v), \quad x \in V_\lambda, \quad v \in \mathbb{C}^q.$$

Далее,

$$u_\lambda \circ \varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1} \circ u_\mu^{-1} = \varphi'_\lambda \circ \varphi_\mu'^{-1},$$

а так как $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}(x, v) = (x, g_{\lambda\mu}(x) v)$ и аналогичная формула справедлива для $\varphi'_\lambda \circ \varphi_\mu'^{-1}$, то мы получаем равенство

$$h_\lambda g_{\lambda\mu} h_\mu^{-1} = g'_{\lambda\mu}.$$

Обратно, предположим, что существуют непрерывные отображения

$$h_\lambda: V_\lambda \rightarrow GL(q, \mathbb{C}),$$

такие, что

$$h_\lambda g_{\lambda\mu} h_\mu^{-1} = g'_{\lambda\mu},$$

и определим отображения

$$\varphi_\lambda: \rho^{-1}(V_\lambda) \rightarrow V_\lambda \times \mathbb{C}^q, \quad \varphi'_\lambda: \rho'^{-1}(V_\lambda) \rightarrow V_\lambda \times \mathbb{C}^q$$

так же, как выше. Положим

$$u_\lambda(x, v) = (x, h_\lambda(x) v)$$

и рассмотрим отображение

$$\varphi_\lambda'^{-1} \circ u_\lambda \circ \varphi_\lambda: \rho^{-1}(V_\lambda) \rightarrow \rho'^{-1}(V_\lambda).$$

Очевидно, оно является изоморфизмом. Непосредственно проверяется, что на $\rho^{-1}(V_\lambda) \cap \rho^{-1}(V_\mu)$ имеет место равенство

$$\varphi_\lambda'^{-1} \circ u_\lambda \circ \varphi_\lambda = \varphi_\mu'^{-1} \circ u_\mu \circ \varphi_\mu.$$

Этим определяется изоморфизм $u: \xi \rightarrow \xi'$. ►

3.1.6. Замечание. Пусть $\xi_1 = (E_1, p_1, X)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, X)$ — два векторных расслоения. Пусть $a \in X$ и $E_a = E_{1,a} \oplus E_{2,a}$. Обозначим через E дизъюнктное объединение множеств E_a :

$$E = \bigcup_{a \in X} E_a$$

и обозначим через $p: E \rightarrow X$ отображение $e \mapsto a$, если $e \in E_a$.

Если U — открытое подмножество X , для которого существуют изоморфизмы

$$\varphi_1: \rho_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^q, \quad \varphi_2: \rho_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^q,$$

то возникает *биективное отображение*

$$\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^{q_1+q_2},$$

определяемое условием $e_1 \oplus e_2 \mapsto (x, v_1, v_2)$, где $\varphi_1(e_1) = (x, v_1)$, $\varphi_2(e_2) = (x, v_2)$. Ясно, что на E имеется единственная топология, относительно которой множества $p^{-1}(U)$ открыты в E , а все определенные выше отображения φ являются гомеоморфизмами. Векторное расслоение $\xi = (E, p, X)$ с этой топологией называется *прямой суммой* (или *суммой Уитни*) расслоений ξ_1 и ξ_2 ; ее мы будем обозначать символом

$$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2.$$

Если расслоения ξ_1, ξ_2 задаются матрицами перехода $g_{ij}^{(1)}, g_{ij}^{(2)}$ относительно покрытия $\{U_i\}$ пространства X , то матрицы перехода для ξ , полученные из указанных выше изоморфизмов, задаются равенством

$$g_{ij}(x) = g_{ij}^{(1)}(x) \oplus g_{ij}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}^{(1)}(x) & 0 \\ 0 & g_{ij}^{(2)}(x) \end{pmatrix}.$$

3.1.7. Замечание. Если ξ_1, ξ_2 — векторные расслоения над X , то аналогичным образом можно определить векторные расслоения

$$\xi_1 \otimes \xi_2, \quad \text{Hom}(\xi_1, \xi_2) \quad \text{и} \quad \lambda^p(\xi_1),$$

такие, что для любого $a \in X$ мы соответственно имеем

$$E_a = E_{1,a} \otimes E_{2,a}, \quad E_a = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E_{1,a}, E_{2,a}), \quad E_a = \wedge^p E_{1,a},$$

где (E, p, X) обозначает соответствующее расслоение.

Если $\xi_2 = \theta_1$ — тривиальное расслоение ранга 1, то расслоение

$$\text{Hom}(\xi_1, \theta_1) = \xi_1^*$$

называется *сопряженным* к ξ_1 ; слой этого расслоения в точке $a \in X$ является пространством, сопряженным к слою ξ_1 в точке a .

Векторное расслоение $\xi_1 \otimes \xi_2$ называется *тензорным произведением* расслоений ξ_1, ξ_2 , а $\lambda^p(\xi_1)$ называется *p-й внешней степенью* расслоения ξ_1 .

Если $\{U_i\}$ — открытое покрытие X , а расслоения ξ_1, ξ_2 порождаются матрицами перехода $g_{ij}^{(1)}, g_{ij}^{(2)}$ соответственно, то $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ имеет матрицы перехода g_{ij} , определяемые равенством

$$g_{ij}(x) = g_{ij}^{(1)}(x) \otimes g_{ij}^{(2)}(x),$$

где последний член означает кронекерово¹⁾ (или тензорное) произведение матриц $g_{ij}^{(1)}$ и $g_{ij}^{(2)}$. Далее, расслоение ξ_1^* имеет матрицы перехода g_{ij}^* , определяемые равенством

$$g_{ij}^*(x) = {}^t g_{ij}(x)^{-1},$$

где ${}^t A$ — матрица, транспонированная к A .

Изоморфизм

$$L \otimes M^* \simeq \text{Hom}(M, L)$$

для конечномерных векторных пространств L, M , где M^* — сопряженное к M , порождает изоморфизм

$$\xi_1 \otimes \xi_2^* \simeq \text{Hom}(\xi_2, \xi_1),$$

где ξ_1, ξ_2 — векторные расслоения. В частности, для любого векторного расслоения ξ имеется естественный изоморфизм

$$\xi \otimes \xi^* \simeq \text{Hom}(\xi, \xi).$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2$ — векторные расслоения над X , и пусть

$$u_k: \xi_k \rightarrow \xi'_k, \quad k = 1, 2,$$

— отображения расслоений. Тогда для каждой точки $a \in X$ определены $\mathbb{C}$ -линейные отображения

$$u_{k,a}: E_{k,a} \rightarrow E'_{k,a}$$

$(\xi_k = (E_k, p_k, X), \xi'_k = (E'_k, p'_k, X))$. Они индуцируют $\mathbb{C}$ -линейные отображения

$$u_{1,a} \otimes u_{2,a}: E_{1,a} \otimes E_{2,a} \rightarrow E'_{1,a} \otimes E'_{2,a},$$

которые в свою очередь определяют морфизм

$$u_1 \otimes u_2: \xi_1 \otimes \xi_2 \rightarrow \xi'_1 \otimes \xi'_2.$$

Аналогично, для любого расслоения ξ морфизмы $u_1: \xi_1 \rightarrow \xi'_1$ индуцируют отображения расслоений

$$\text{Hom}(\xi, \xi_1) \rightarrow \text{Hom}(\xi, \xi'_1), \quad \text{Hom}(\xi'_1, \xi) \rightarrow \text{Hom}(\xi_1, \xi).$$

В частности, мы имеем морфизмы

$$u_1^*: \xi_1^* \rightarrow \xi_1^*, \quad \lambda^p(u_1): \lambda^p(\xi_1) \rightarrow \lambda^p(\xi'_1).$$

¹⁾ Если A и B — квадратные $(n \times n)$ -матрицы, то их кронекеровым произведением $A \otimes B$ называется матрица размера $n^2 \times n^2$, которая получается, если вместо каждого элемента a_{ij} в матрице A поставить $(n \times n)$ -матрицу $a_{ij}B$; короче, $A \otimes B = (a_{ij}B)$. Эта матрица определяет линейный оператор в тензорном произведении двух n -мерных векторных пространств, действующий по формуле $(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By)$. — Прим. перев.

3.1.8. Замечание. Соответствующие определения можно применить к действительным векторным расслоениям, а также к C^k -, $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{C}$ -аналитическим векторным расслоениям.

3.1.9. Пример. Если V есть C^k - ($\mathbb{R}$ -аналитическое) многообразие размерности n , то касательное расслоение

$$T(V) = \bigcup_{a \in V} T_a(V),$$

введенное в § 2.2, является действительным C^{k-1} - ($\mathbb{R}$ -аналитическим) расслоением ранга n ; таким же является и кокасательное расслоение

$$T^*(V) = \bigcup_{a \in V} T_a^*(V).$$

Расслоение p -форм $\Lambda^p T^*(V)$, определенное в теореме 2.2.8, представляет собой p -ю внешнюю степень $\Lambda^p(T^*(V))$ расслоения $T^*(V)$.

Если V — комплексно аналитическое многообразие, то все эти расслоения являются голоморфными векторными расслоениями. Кроме того, на комплексном многообразии V мы можем определить расслоение форм типа (p, q) :

$$\mathcal{E}_{p,q}^*(V) = \bigcup_{a \in V} \mathcal{E}_{p,q}^*(V, a)$$

(см. замечание 2.4.10). Это есть $\mathbb{R}$ -аналитическое комплексное векторное расслоение над V .

3.1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V есть C^k -многообразие и $\xi = (E, p, V)$ — любое C^k -векторное расслоение над V . Пусть U — открытое подмножество V . Назовем C^k -сечением s расслоения ξ над U всякое C^k -отображение $s: U \rightarrow E$, такое, что отображение $p \circ s$ тождественно на U . Множество таких сечений мы будем обозначать символом $C^k(U, \xi)$.

Нам придется рассматривать не только непрерывные сечения ξ ; тогда это будут отображения $s: U \rightarrow E$, для которых $p \circ s$ — тождественное отображение.

Если s — произвольное сечение ξ над U , то носителем s (в U) называется замыкание в U множества $\{a \in U: s(a) \neq 0_a\}$; здесь 0_a — нулевой элемент векторного пространства $E_a = p^{-1}(a)$. Обычно мы будем опускать индекс a и вместо 0_a писать просто 0 .

Множество C^k -сечений расслоения ξ над U , имеющих компактные носители, обозначается символом $C_0^k(U, \xi)$.

Заметим, что если $\xi = \theta_q$ — тривиальное расслоение ранга q , то множество $C^k(V, \theta_q)$ можно канонически отождествить с множеством наборов из q функций класса C^k на U . Как и в гл. 1, мы будем употреблять для него обозначение $C^k(U, q)$. Анало-

гично, $C_0^k(U, \theta_q) = C_0^k(U, q)$ есть множество наборов из q функций класса C^k с компактными носителями.

Пусть $\xi = (E, p, X)$ — векторное расслоение с матрицами перехода g_{ij} относительно открытого покрытия $\{U_i\}$ и

$$\varphi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q$$

— соответствующие изоморфизмы. Если s — сечение ξ над X , то отображения

$$s_i = \varphi_i \circ s: U_i \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^q$$

определяют отображения

$$\sigma_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^q.$$

Так как $\varphi_i^{-1} \circ s_i = s$, то

$$s_i = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \circ s_j,$$

откуда следует, что

$$\sigma_i(x) = g_{ij}(x) \sigma_j(x) \text{ для всех } x \in U_i \cap U_j.$$

Обратно, отображения $\sigma_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^q$, связанные условиями $\sigma_i(x) = g_{ij}(x) \sigma_j(x)$, $x \in U_i \cap U_j$, определяют сечение s расслоения ξ по формуле

$$s = \varphi_i^{-1} \circ s_i \text{ на } U_i, \quad s_i(x) = (x, \sigma_i(x)).$$

Это сечение принадлежит классу $C^k(\mathbb{R}$ - или $\mathbb{C}$ -аналитично) в том и только в том случае, когда такими являются все σ_i .

3.1.11. Предложение. Пусть ξ — расслоение ранга 1 (т. е. линейное расслоение). Тогда ξ изоморфно θ_1 (т. е. тривиально) в том и только в том случае, когда ξ имеет непрерывное сечение s , такое, что $s(a) \neq 0$ для всех a .

◀ Если $E = X \times \mathbb{C}$ — тривиальное расслоение, то всякое отображение $x \mapsto (x, c)$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и не зависит от x , представляет собой непрерывное сечение, всюду отличное от нуля.

Обратно, пусть такое сечение s существует. Определим отображение $\xi_1 \rightarrow \theta_1$, при котором

$$e \mapsto (a, \lambda),$$

где e — произвольный элемент из $p^{-1}(a)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что $e = \lambda s(a)$ (мы пользуемся тем, что $s(a) \neq 0$ для всех $a \in X$). Очевидно, это отображение является изоморфизмом ξ на θ_1 . ▶

Из этого предложения следует, что если ξ — линейное расслоение, то расслоение $\xi \otimes \xi^*$ тривиально. В самом деле,

$$\xi \otimes \xi^* \simeq \text{Hom}(\xi, \xi),$$

а сечение s расслоения $\text{Hom}(\xi, \xi)$, для которого $s(a)$ есть тождественное отображение $p^{-1}(a)$, нигде не равно нулю.

Это замечание применимо к C^k -, $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{C}$ -аналитическим линейным расслоениям.

3.1.12. Замечание. Если $\xi = (E, p, V)$ — векторное расслоение, то для любого открытого множества $U \subset V$ тройка $(p^{-1}(U), p, U)$ тоже является векторным расслоением; мы будем обозначать его $\xi|U$. Это обозначение будет использоваться также для замкнутых подмножеств V .

§ 3.2. Преобразования Фурье

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и p — действительное число, $p \geq 1$. Множество комплексных измеримых по Лебегу функций f на Ω , для которых функция $|f|^p$ интегрируема по мере Лебега, образует векторное пространство. Факторпространство этого пространства по подпространству функций, равных нулю почти всюду, есть банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Мы обозначим это банахово пространство символом $L^p = L^p(\Omega)$. Часто мы будем отождествлять элементы этого пространства с представляющими их функциями. Если $p=2$ и $f, g \in L^2(\Omega)$, положим

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Относительно этого скалярного произведения $L^2(\Omega)$ является гильбертовым пространством.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье $\hat{f}$ функции f определяется формулой

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех C^∞ -функций f в $\mathbb{R}^n$, таких, что для любого целого $N \geq 0$ и любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ функция

$$(1 + |x|^2)^N D^\alpha f(x)$$

ограничена в $\mathbb{R}^n$. Множество $\mathcal{S}$ называется пространством Шварца или пространством быстро убывающих функций в $\mathbb{R}^n$. Для любого действительного p , $1 \leq p < \infty$, множество $\mathcal{S}$ содержится в L^p и является его плотным подмножеством. Более того, для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и любой $f \in \mathcal{S}$ функция $D^\alpha f$ тоже принадлежит $\mathcal{S}$.

В частности, все производные f ограничены. Для любой функции $f \in \mathcal{S}$ мы имеем

$$\begin{aligned} (\widehat{D^\alpha f})(\xi) &= i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi), \\ (D^\alpha \widehat{f})(\xi) &= ((-ix)^\alpha f(x)). \end{aligned}$$

Далее, если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1,$$

для любой точки $\xi \in \mathbb{R}^n$. Из этих замечаний получается

3.2.1. Следствие. Если $f \in \mathcal{S}$, то и $\widehat{f} \in \mathcal{S}$.

В дальнейшем все интегралы, в которых область интегрирования явно не указана, берутся по всему $\mathbb{R}^n$.

3.2.2. ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ. Если $f \in \mathcal{S}$, то

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

◀ Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда, ввиду ограниченности $\widehat{f}$, функция $\varphi(\xi) \widehat{f}(\xi)$ интегрируема. По теореме Фубини мы получаем

(3.2.3)

$$\begin{aligned} \int \varphi(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi &= (2\pi)^{-n/2} \int \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} \left\{ \int f(y) e^{-i(y, \xi)} dy \right\} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(y) dy \int \varphi(\xi) e^{-i(y-x, \xi)} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int f(x+t) dt \int \varphi(\xi) e^{-i(t, \xi)} d\xi = \int f(x+t) \widehat{\varphi}(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь фиксируем $g \in \mathcal{S}$ и положим $\varphi(\xi) = g(\varepsilon\xi)$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\widehat{\varphi}(t) = \varepsilon^{-n} \widehat{g}(t/\varepsilon),$$

и потому

$$\begin{aligned} \int g(\varepsilon\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi &= \int f(x+t) \varepsilon^{-n} \widehat{g}(t/\varepsilon) dt = \\ &= \int f(x+\varepsilon t) \widehat{g}(t) dt. \end{aligned}$$

Так как функции f и g ограничены, а $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ интегрируемы (они принадлежат $\mathcal{S}$, согласно следствию 3.2.1), то мы можем перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ под знаком интеграла и получить

$$g(0) \int \widehat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = f(x) \int \widehat{g}(t) dt.$$

Полагая

$$g(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)\right),$$

мы видим, что

$$\hat{g}(t) = g(t),$$

и потому

$$g(0) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{g}(t) dt = 1.$$

Используя это соотношение в приведенной выше формуле, мы получаем нужный результат:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi. \blacktriangleright$$

3.2.4. Следствие. Если $f, \varphi \in \mathcal{P}$, то

$$\int \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \int \varphi(x) \hat{f}(x) dx.$$

Это следует из (3.2.3), если там положить $x=0$.

3.2.5. Следствие. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{P}$, то

$$\int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \int f(x+t) \hat{g}(t) dt.$$

Это следует из равенства (3.2.3), в доказательстве которого используется только ограниченность $\hat{f}$ и которое поэтому справедливо для всех $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

3.2.6. Следствие. Если $f, g \in \mathcal{P}$, то

$$(f, g)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{g})_{L^2}.$$

В частности, для любой функции $f \in \mathcal{P}$ мы имеем $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.

◀ Пусть $\varphi \in \mathcal{P}$ определяется равенством

$$\overline{\varphi(t)} = \hat{g}(t).$$

Тогда, по формуле 3.2.2,

$$g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \hat{g}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi.$$

Взяв сопряженное выражение, получим, что

$$\overline{g(x)} = (2\pi)^{-n/2} \int \varphi(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi = \hat{\varphi}(x).$$

Теперь наше предложение вытекает из следствия 3.2.4. $\blacktriangleright$

3.2.7. Замечание. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ для некоторого $p \geq 1$, то для любой функции $g \in \mathcal{P}$ произведение fg интегрируемо. Каждая функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ определяет поэтому линейный функционал $\hat{f}$ на $\mathcal{P}$ по формуле

$$(\hat{f}, \varphi) = \int f(t) \hat{\varphi}(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Этот функционал $\hat{f}$ мы назовем преобразованием Фурье для функции f . Если при некотором q , $1 \leq q \leq \infty$, существует функция $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ($L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — это множество измеримых функций, равномерно ограниченных вне множества меры нуль), такая, что

$$(\hat{f}, \varphi) = \int g(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

то мы скажем, что $\hat{f}$ принадлежит $L^q(\mathbb{R}^n)$, будем отождествлять $\hat{f}$ с g и писать $\hat{f} = g$. Заметим, что функция g , если она существует, определена однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль. Кроме того для $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ это определение согласуется с данным ранее, ввиду следствия 3.2.5.

3.2.8. ТЕОРЕМА ПЛАНШЕРЕЛЯ. Если $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.

◀ Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует последовательность $\{f_\nu\}$ элементов $\mathcal{S}$, такая, что $\|f - f_\nu\|_{L^2} \rightarrow 0$. Согласно следствию 3.2.6,

$$\|\hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu\|_{L^2} = \|f_\nu - f_\mu\|_{L^2},$$

а отсюда следует, что

$$\|\hat{f}_\nu - \hat{f}_\mu\|_{L^2} \rightarrow 0$$

при $\nu, \mu \rightarrow \infty$. Ввиду полноты $L^2(\mathbb{R}^n)$ существует функция $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$\|g - \hat{f}_\nu\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Очевидно,

$$\|g\|_{L^2} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\hat{f}_\nu\|_{L^2} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f_\nu\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Кроме того, для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ мы имеем

$$\int g(t) \varphi(t) dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int \hat{f}_\nu(t) \varphi(t) dt = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu(t) \hat{\varphi}(t) dt$$

ввиду следствия 3.2.4. Так как $f_\nu \rightarrow f$ в L^2 и $\hat{\varphi} \in L^2$, то из неравенства Шварца следует, что для всех $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\int g(t) \varphi(t) dt = \int f(t) \hat{\varphi}(t) dt = (\hat{f}, \varphi). \quad \blacktriangleright$$

3.2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Формулу обращения 3.2.2 можно записать в виде

$$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Из теоремы Планшереля следует, что это соотношение справедливо также для любой функции $f \in L^2$ (здесь, конечно, равенство выполняется почти всюду).

Если теперь $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то по следствию 3.2.5 для любой $\phi \in \mathcal{P}$ мы имеем

$$\int \phi(\varepsilon \xi) \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \int f(x + \varepsilon t) \phi(t) dt.$$

Если, кроме того, $\hat{f} \in L^1$, то левая часть при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к

$$\phi(0) \int \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, так как $f \in L^1$, то правая часть стремится в $L^1(\mathbb{R}^n)$ к

$$f(x) \int \phi(t) dt.$$

Отсюда следует, что если f и $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\hat{\hat{f}}(-x) = f(x)$$

почти всюду. В частности, f совпадает (почти всюду) с ограниченной непрерывной функцией.

3.2.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int |f(x-y)g(y)| dy < \infty$$

почти для всех x . Далее, если мы положим

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy,$$

то

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

◀ Достаточно доказать это неравенство для случая $f \geq 0, g \geq 0$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int dx \int f(x-y)g(y) dy &= \int g(y) dy \int f(x-y) dx = \\ &= \left(\int g(y) dy \right) \left(\int f(x) dx \right) < \infty. \end{aligned} \blacktriangleright$$

3.2.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int |f(x-y)g(y)| dy < \infty$$

почти для всех x и

$$\left| \int f(x-y)g(y) dy \right| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|g\|_{L^2}.$$

Это тривиальное следствие неравенства Шварца.

3.2.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f, g \in \mathcal{P}$, то $f * g \in \mathcal{P}$ и

$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

◀ Из очевидного неравенства

$$|x|^2 = |x - y + y|^2 \leq 2|x - y|^2 + 2|y|^2$$

следует, что

$$1 + |x|^2 \leq 2(1 + |x - y|^2)(1 + |y|^2).$$

Поэтому, согласно замечанию 3.2.11, для любого $a = (a_1, \dots, a_n)$ и любого $x \in \mathbb{R}^n$ мы имеем

$$(1 + |x|^2)^N |D^a(f * g)(x)| \leq 2^N \|f'\|_{L^1} \|g'\|_{L^2},$$

где

$$f'(x) = (1 + |x|^2)^N D^a f(x), \quad g'(x) = (1 + |x|^2)^N g(x).$$

Отсюда следует, что $f * g \in \mathcal{S}$. Далее,

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x, \xi)} dx \int f(x - y) g(y) dy = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int g(y) dy \int f(x - y) e^{-i(x, \xi)} dx = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int g(y) e^{-i(y, \xi)} dy \int f(x) e^{-i(x, \xi)} dx = \\ &= (2\pi)^{n/2} \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.2.13. Следствие. Если $f, g \in \mathcal{S}$, то

$$(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}.$$

Это вытекает из предложения 3.2.12 и формулы 3.2.2.

3.2.14. Замечание. Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ или $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $g \in \mathcal{S}$, то функция $f * g$ тоже определена (по предложению 3.2.10 и замечанию 3.2.11). Кроме того, если $f_v \in \mathcal{S}$ и $f_v \rightarrow f$ в L^1 или L^2 в зависимости от того, принадлежит ли f к L^1 или L^2 , то $\hat{f}_v * \hat{g}$ равномерно стремятся к $\hat{f} * \hat{g}$ (если $f \in L^2$, то согласно замечанию 3.2.11, а если $f \in L^1$, то ввиду оценки $|\hat{f}_v(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \|f_v - f\|_{L^1} \rightarrow 0$). Легко видеть также, что в любом случае произведения $\hat{f}_v \hat{g}$ стремятся к $\hat{f} \hat{g}$ в L^1 . Отсюда следует, что

$$(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g},$$

если $g \in \mathcal{S}$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ или $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Аналогично, в этих предположениях, мы имеем

$$(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}.$$

3.2.15. Замечание. Все изложенные здесь результаты распространяются на функции со значениями в конечномерном $\mathbb{C}$ -векторном пространстве. Мы будем ими пользоваться и в этом более общем случае, не упоминая об этом явно.

§ 3.3. Линейные дифференциальные операторы

Пусть V — произвольное C^∞ -многообразие размерности n и $\xi = (E, p, V)$, $\eta = (F, q, V)$ — два C^∞ -векторных расслоения над V . Будем считать, что $\text{rank } \xi = r$ и $\text{rank } \eta = s$.

3.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линейным дифференциальным оператором* (или просто дифференциальным оператором) P из расслоения ξ в η называется C -линейное отображение

$$P: C^\infty(V, \xi) \rightarrow C^\infty(V, \eta),$$

такое, что для любого сечения $s \in C^\infty(V, \xi)$

$$\text{supp } Ps \subset \text{supp } s.$$

Здесь $C^\infty(V, \xi)$, $C^\infty(V, \eta)$ обозначают соответственно пространства C^∞ -сечений ξ и η .

Заметим, что это отображение порождает C -линейное отображение

$$P_U: C^\infty(U, \xi) \rightarrow C^\infty(U, \eta)$$

для любого открытого множества $U \subset V$, которое тоже является линейным дифференциальным оператором. В самом деле, если $a \in U$, то пусть φ — функция класса C^∞ с носителем в U , равная 1 в окрестности a . Для любого $s \in C^\infty(U, \xi)$ определим сечение $\varphi s \in C^\infty(V, \xi)$, полагая

$$(\varphi s)(x) = \begin{cases} \varphi(x) s(x), & \text{если } x \in U, \\ 0, & \text{если } x \notin U. \end{cases}$$

А теперь мы можем взять

$$(P_U s)(a) = P(\varphi s)(a).$$

3.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и P — линейный дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$. Тогда для любой точки $a \in \Omega$ найдутся окрестность $U \ni a$, целое число $m > 0$ и константа $C > 0$, такие, что

$$\|Pu\|_0 \leq C \|u\|_m$$

для любого

$$u \in C_0^\infty(U \setminus \{a\}, r).$$

(Напомним, что полунормы в $C_0^\infty(U, r)$ определяются равенствами

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^r \frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in U} |D^\alpha u_j(x)|, \quad u = (u_1, \dots, u_r).$$

◀ Предположим, что это утверждение неверно для некоторой точки $a \in \Omega$. Пусть U_0 — относительно компактная окрестность a

в Ω . Тогда найдется открытое множество

$$U_1 \subseteq U_0 \setminus \{a\}$$

и сечение

$$u_1 \in C_0^\infty(U_1, r),$$

такое, что

$$\|Pu_1\|_0 > 2^2 \|u_1\|_1.$$

Далее, множество $U_0 \setminus \bar{U}_1$ является окрестностью a . По предположению, найдется открытое множество

$$U_2 \subseteq (U_0 \setminus \bar{U}_1) \setminus \{a\}$$

и сечение

$$u_2 \in C_0^\infty(U_2, r),$$

такое, что

$$\|Pu_2\|_0 > 2^{2 \cdot 2} \|u_2\|_2.$$

Так по индукции мы можем построить последовательность $\{U_k\}$ открытых множеств,

$$\bar{U}_k \subset U_0 \setminus \{a\}, \quad \bar{U}_k \cap \bar{U}_l = \emptyset, \quad \text{если } k \neq l,$$

и последовательность сечений

$$u_k \in C_0^\infty(U_k, r),$$

таких, что

$$\|Pu_k\|_0 > 2^{2k} \|u_k\|_k.$$

Пусть

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} u_k}{\|u_k\|_k}.$$

Очевидно, этот ряд сходится в C^∞ и, таким образом,

$$u \in C_0^\infty(U', r),$$

где U' — относительно компактная окрестность $\bar{U}_0$ в Ω . Кроме того,

$$u|_{U_k} = 2^{-k} \|u_k\|_k^{-1} \cdot u_k|_{U_k}.$$

Отсюда и из условия $\text{supp } Pf \subset \text{supp } f$ для всех f следует, что

$$Pu|_{U_k} = 2^{-k} \|u_k\|_k^{-1} (Pu_k)|_{U_k}.$$

Так как $\|Pu_k\|_0 > 2^{2k} \|u_k\|_k$, то существует точка $x_k \in U_k$, такая, что

$$|Pu_k(x_k)| > 2^{2k} \|u_k\|_k,$$

откуда $|Pu(x_k)| > 2^k$. С другой стороны, так как $u \in C^\infty(\Omega, r)$, то сечение Pu непрерывно в Ω (поскольку $Pu \in C^\infty(\Omega, s)$) и потому

ограничено в $\bar{U}_0$. Это противоречие доказывает наше предложение. ►

3.3.3. ТЕОРЕМА ПЕТРЕ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и P — линейный дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$. Тогда для любого относительно компактного подмножества $\Omega' \Subset \Omega$ найдутся целое число $m \geq 0$ и C^∞ -отображения a_α множества Ω' в пространство линейных отображений $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}^s$ (т. е. $(s \times r)$ -матриц), такие, что для любых $u \in C^\infty(\Omega', r)$, $x \in \Omega'$

$$(3.3.4) \quad (Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha u)(x).$$

◀ Пусть U — произвольное открытое подмножество Ω . Предположим, что существуют константы $C > 0$, $m > 0$, такие, что

$$(3.3.5) \quad \|Pu\|_0 \leq C \|u\|_m \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(U, r).$$

Докажем сначала следующее:

3.3.6. Если сечение $u \in C_0^\infty(U, r)$ является m -плоским в точке $a \in U$ (см. определение 1.5.1), то $(Pu)(a) = 0$.

По лемме 1.5.2 существует последовательность $\{u_\nu\}$ элементов из $C_0^\infty(U, r)$, равных нулю в окрестности a и таких, что $\|u_\nu - u\|_m \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. Согласно (3.3.5), Pu_ν равномерно на U стремятся к Pu . Далее, так как

$$\text{supp } Pu_\nu \subset \text{supp } u_\nu,$$

а $u_\nu = 0$ в окрестности a , то

$$(Pu_\nu)(a) = 0$$

и потому

$$(Pu)(a) = \lim (Pu_\nu)(a) = 0.$$

Пусть $e_1, \dots, e_r$ — базис в $\mathbb{R}^r$. Если $u \in C^\infty(U, r)$, то

$$u = \sum_{j=1}^r u_j e_j, \quad u_j \in C^\infty(U, 1).$$

Пусть $\mu_{\alpha, a}$, $a \in U$, — моном

$$\mu_{\alpha, a}(x) = (x - a)^\alpha.$$

Тогда

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \mu_{\alpha, a} \sum_{j=1}^r D^\alpha u_j(a) e_j + f,$$

где f является m -плоской в точке a . Поэтому ввиду (3.3.6)

$$(Pu)(a) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^r \frac{1}{\alpha!} P(\mu_{\alpha, a} e_j)(a) D^\alpha u_j(a).$$

Отображение $a \mapsto P(\mu_{a, ae_j})(a)$ является C^∞ -отображением Ω (а не только U) в $\mathbb{R}^s$, так как

$$\mu_{a, a} = \sum_{\beta \leq a} \binom{a}{\beta} (-a)^{a-\beta} \mu_{\beta, 0},$$

а по условию $P(\mu_{\beta, 0e_j})$ есть C^∞ -отображение Ω в $\mathbb{R}^s$. Итак, мы получаем:

3.3.7. Если выполнена оценка (3.3.5), то существуют C^∞ -отображения a_α множества Ω в пространство $(s \times r)$ -матриц, такие, что для всех $u \in C^\infty(U, r)$

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha u)(x), \quad x \in U.$$

Теперь мы можем доказать теорему. Из предложения 3.3.2 следует, что если $\Omega' \subseteq \Omega$, то существует конечное число точек $x_1, \dots, x_N \in \bar{\Omega}'$ и константы $C, m > 0$, такие, что

$$\|Pu\|_0 \leq C \|u\|_m$$

для всех

$$u \in C_0^\infty(\Omega' \setminus \bigcup \{x_v\}, r).$$

Согласно утверждению 3.3.7, существуют C^∞ -отображения a_α множества Ω' в пространство $(s \times r)$ -матриц, такие, что

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha u)(x), \quad x \in \Omega' \setminus \bigcup \{x_v\}.$$

Так как обе части этого равенства непрерывны в Ω' , то мы получаем уравнение (3.3.4). ►

Следующая теорема представляет собой теорему Петре в более общей ситуации.

3.3.8. ТЕОРЕМА. Пусть V — многообразие класса C^∞ , ξ и η — векторные расслоения класса C^∞ соответственно ранга r и s . Пусть P — линейный дифференциальный оператор из ξ в η . Тогда у каждой точки $a \in V$ найдется окрестность U , диффеоморфная открытому множеству $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, такая, что расслоения ξ и η тривиальны над U , а индуцируемый оператор из $\mathfrak{F}_r$ в $\mathfrak{F}_s$ над U имеет вид

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

где a_α — некоторые $(s \times r)$ -матрицы класса C^∞ .

Пусть V — многообразие класса C^∞ , $a \in V$ и m_a — кольцо ростков C^∞ -функций, равных нулю в точке a (см. определение, следующее за определением 2.1.8). Пусть ξ, η — векторные расслоения класса C^∞ над V и P — линейный дифференциальный опе-

ратор из ξ в η . Слой ξ, η в точке $a \in V$ обозначим соответственно ξ_a, η_a .

3.3.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Порядком $o_P(a)$ оператора P в точке $a \in V$ называется наибольшее целое число m , такое, что $P(f^m s)(a) \neq 0$ для некоторого ростка $f \in \mathfrak{m}_a$ и некоторого сечения $s \in C^\infty(V, \xi)$. Порядок P определяется как $\max_{a \in V} o_P(a)$.

3.3.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко проверить, что порядок оператора, задаваемого равенством (3.3.4), есть наибольшее целое число m , для которого существует мультииндекс $\alpha, |\alpha| = m$, такой, что $a_\alpha \neq 0$.

Следующее предложение принадлежит Хёрмандеру [2] и имеет большое значение для дальнейшего развития теории, так как оно приводит к теории псевдодифференциальных операторов.

Так как локально всякое векторное расслоение изоморфно тривиальному, то мы можем говорить о локальной равномерной сходимости вместе со всеми частными производными последовательности элементов $s_\nu \in C^\infty(V, \xi)$. Линейное над полем $\mathbb{C}$ отображение $L: C^\infty(V, \xi) \rightarrow C^\infty(V, \eta)$ будем называть *слабо непрерывным*, если для любой последовательности $\{s_\nu\}$ сечений из $C^\infty(V, \xi)$, локально равномерно сходящейся вместе со всеми частными производными к сечению $s \in C^\infty(V, \xi)$, последовательность $\{Ls_\nu\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах V к Ls .

3.3.11. ТЕОРЕМА. Слабо непрерывное $\mathbb{C}$ -линейное отображение

$$L: C^\infty(V, \xi) \rightarrow C^\infty(V, \eta)$$

является линейным дифференциальным оператором порядка $\leq m$ в том и только в том случае, когда выполнено следующее условие:

Для любых $s \in C^\infty(V, \xi)$, $a \in V$ и любой действительной C^∞ -функции f на V функция

$$\kappa(\lambda)(a) = e^{-i\lambda f(a)} \{L(se^{i\lambda f})(a)\}$$

является многочленом по λ степени $\leq m$ со значениями в η_a .

◀ Тот факт, что $\kappa(\lambda)$ — многочлен степени $\leq m$ для любого линейного дифференциального оператора порядка $\leq m$, непосредственно проверяется вычислениями в локальных координатах.

Для доказательства обратного мы поступим следующим образом. Пусть

$$\kappa(\lambda) = \sum_{\nu=0}^m \kappa_\nu(f, s)(a) \lambda^\nu.$$

Тогда отображение

$$a \mapsto \kappa_\nu(f, s)(a)$$

определяет элемент

$$\kappa_v(f, s) \in C^\infty(V, \eta).$$

Если теперь $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — действительные числа и $f_1, \dots, f_k$ — действительные функции, то мы положим

$$e^{-it(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k)} L(s e^{it(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k)}) = \sum_{v=0}^m \kappa_v(\lambda, f, s) t^v,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$. Мы видим, что

$$\kappa_v(\lambda, f, s) \in C^\infty(V, \eta)$$

и для фиксированного λ и любого числа $v > 0$

$$\kappa_v(v\lambda, f, s) = v^v \kappa_v(\lambda, f, s).$$

Отсюда следует (например, по формуле Тейлора), что $\kappa_v(\lambda, f, s)(a)$ — однородный по $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ многочлен степени v .

Пусть теперь $a, b \in V$, $a \neq b$, U — окрестность $\{a, b\}$ и $\varphi: U \rightarrow \Omega$ — некоторый C^∞ -диффеоморфизм U на открытое множество Ω в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно связное).

По формуле обращения 3.2.2 для любой $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$ мы имеем

$$\beta(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\beta}(\lambda) e^{i\langle y, \lambda \rangle} d\lambda,$$

где $\hat{\beta}$ — преобразование Фурье функции β . Следовательно, если $s \in C^\infty(V, \xi)$ и $s_0(x) = s(x)\beta(\varphi(x))$, то

$$s_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\beta}(\lambda) e^{i(\lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x))} s(x) d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Так как отображение L слабо непрерывно, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} L(s_0)(a) &= 2\pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\beta}(\lambda) L\{s e^{i(\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n)}\}(a) d\lambda = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \sum_{v=0}^m \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\beta}(\lambda) \kappa_v(\lambda, \varphi, s)(a) e^{i\langle \lambda, \varphi(a) \rangle} d\lambda = \\ &= \sum_{v=0}^m \sum_{|\alpha|=v} \sigma_{\alpha, v}(a) (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\beta}(\lambda) e^{i\langle \lambda, \varphi(a) \rangle} \lambda^\alpha d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_{\alpha, v} \in C^\infty(V, \eta),$$

поскольку, как уже отмечалось, $\kappa_\nu(\lambda, \varphi, s)(a)$ — однородный многочлен по λ степени ν со значениями в η_a . По формуле обращения получаем, следовательно, равенство

$$(3.3.12) \quad L(s_0)(a) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{|\alpha|=\nu} \sigma_{\alpha, \nu}(a) i^{-|\alpha|} (D^\alpha \beta)(\varphi(a)).$$

Отсюда непосредственно делаем вывод, что если сечение $s \in C_0^\infty(V, \xi)$ имеет носитель в достаточно малой окрестности a , то

$$\text{supp } Ls \subset \text{supp } s;$$

в самом деле, если $b \notin \text{supp } s$, то достаточно применить (3.3.12) с функцией β , такой, что $\beta(\varphi(x)) = 0$ в окрестности b и $= 1$ в окрестности $\text{supp } s$, чтобы убедиться, что $Ls = 0$ в окрестности b . Таким образом, L — линейный дифференциальный оператор. То, что L имеет порядок $\leq m$, тоже легко получается из (3.3.12). ►

Пусть V — некоторое C^∞ -многообразие и ξ, η — два C^∞ -векторных расслоения над V . Пусть P — линейный дифференциальный оператор из ξ в η порядка m . Пусть $T^*(V)$ — действительное кокасательное расслоение V (§ 2.2) и $p^*: T^*(V) \rightarrow V$ — естественная проекция. Пусть $\xi = (E, p, V)$, $\eta = (F, q, V)$ и

$$E \times_V T^*(V) = \{(e, \omega) \in E \times T^*(V) : p(e) = p^*(\omega)\}$$

(другими словами, это множество состоит из троек вида: точка $a \in V$, кокасательный вектор в точке a и элемент слоя E_a над a). Определим отображение

$$\sigma: E \times_V T^*(V) \rightarrow F$$

следующим образом. Пусть $a \in V$ и $\omega \in T_a^*(V)$. Обозначим через f функцию класса C^∞ из m_a , индуцирующую ковектор ω , т. е. такую, что $\omega = (df)(a)$. Пусть $e \in E_a$ и сечение $s \in C_0^\infty(V, \xi)$ таково, что $s(a) = e$ (такое s всегда существует). Положим

$$\sigma(e, \omega) = P(f^m s)(a).$$

Заметим, что если $s(a) = 0$, то сечение $f^m s$ имеет в точке a нуль порядка $> m$ и, значит, в этом случае $P(f^m s)(a) = 0$. Таким образом, $\sigma(e, \omega)$ зависит только от e , а не от выбора сечения s , удовлетворяющего условию $s(a) = e$. Кроме того, если $g \in m_a$ и $d(f - g)(a) = 0$, то $f \equiv g \pmod{m_a^2}$ и потому $f^m - g^m \in m_a^{m+1}$. Следовательно, для любого сечения $s \in C_0^\infty(V, \xi)$ мы имеем

$$P(f^m s)(a) = P(g^m s)(a).$$

3.3.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определенное выше отображение

$$\sigma = \sigma_P: E \times_V T^*(V) \rightarrow F$$

называется *символом* оператора P .

3.3.14. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Линейный дифференциальный оператор P из ξ в η называется *эллиптическим*, если для всякого $\omega \in T_a^*(V)$, $\omega \neq 0$, $\mathbb{C}$ -линейное отображение

$$\sigma_a(\omega): E_a \rightarrow F_a, \quad e \mapsto \sigma(e, \omega)$$

инъективно. В этом случае мы будем называть P просто эллиптическим оператором из ξ в η .

3.3.15. **ПРИМЕРЫ.** (а) Пусть V — некоторое C^∞ -многообразие размерности n и $\mathcal{A}^p = \mathcal{A}^p(V)$ — множество C^∞ -дифференциальных p -форм на V (с комплексными значениями). Если $\mathcal{E}^p = \bigwedge^p \mathcal{Z}^*(V)$ — расслоение комплексных p -форм на V , то $\mathcal{A}^p = C^\infty(V, \mathcal{E}^p)$. Внешняя производная

$$d: \mathcal{A}^p \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}$$

является дифференциальным оператором порядка 1 из $\mathcal{E}^p$ в $\mathcal{E}^{p+1}$. Символ оператора $d: \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1$ задается равенством

$$\sigma(e, \omega) = e\omega, \quad e \in \mathcal{E}_a^0, \quad \omega \in T_a^*(V)$$

(заметим, что $\mathcal{E}_a^0$ канонически изоморфно $\mathbb{C}$, и, значит, произведение $e\omega$ имеет смысл). Отсюда мы сразу получаем, что оператор $d: \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1$ эллиптический.

(б) Пусть V — комплексное многообразие комплексной размерности n , и пусть $\mathcal{A}^{p,q}$ — пространство C^∞ -дифференциальных форм типа (p, q) на V . Если $\mathcal{E}^{p,q}$ — расслоение форм типа (p, q) , то $\mathcal{A}^{p,q} = C^\infty(V, \mathcal{E}^{p,q})$ (см. § 2.4). Оператор $\bar{\partial}: \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}$ является дифференциальным оператором порядка 1 из $\mathcal{E}^{p,q}$ в $\mathcal{E}^{p,q+1}$. Если $q=0$, то символ $\bar{\partial}$ определяется равенством

$$\sigma(e, \omega) = \omega_0 \wedge e, \quad e \in \mathcal{E}_a^{p,0}, \quad \omega \in T_a^*(V),$$

где ω_0 — проекция ω на $\mathcal{E}_a^{0,1}(V, a) \subset \mathcal{Z}_a^*(V)$. Заметим, что если ω — действительный ковектор, то отображение $\omega \rightarrow \omega_0$ инъективно. Так как e имеет тип $(p, 0)$, а ω_0 — тип $(0, 1)$, то $\omega_0 \wedge e = 0$ в том и только в том случае, когда $\omega_0 = 0$, $e = 0$. Отсюда следует, что оператор $\bar{\partial}: \mathcal{A}^{p,0} \rightarrow \mathcal{A}^{p,1}$ эллиптический.

(с) Тривиально проверяется, что оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_r$ на открытом множестве в $\mathbb{R}^n$, который задается условием

$$(u_1, \dots, u_r) \mapsto (\Delta u_1, \dots, \Delta u_r),$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

эллиптический. Он называется оператором Лапласа. Мы будем обозначать его тоже через Δ .

Пусть V — ориентируемое C^∞ -многообразие, счетное в бесконечности, $\mathfrak{E}^*(V)$ — расслоение комплексных ковекторов и

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^n(V) = \wedge^n \mathfrak{E}^*(V).$$

Если $\xi = (E, \rho, V)$ — произвольное векторное расслоение над V и ξ^* — сопряженное ему расслоение, то мы положим

$$\xi' = \xi^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}^n$$

и назовем расслоение ξ' транспонированным к ξ . Естественная двойственность между векторным пространством и ему сопряженным определяет для каждой $a \in V$ отображение

$$B_a: E'_a \times E_a \rightarrow \mathcal{E}^n_a, \quad \xi' = (E', \rho', V).$$

Это дает отображение

$$B: C^\infty(V, \xi') \times C^\infty(V, \xi) \rightarrow C^\infty(V, \mathcal{E}^n),$$

определяемое следующим образом: если $s' \in C^\infty(V, \xi')$, $s \in C^\infty(V, \xi)$, то

$$B(s', s)(a) = B_a(s'(a), s(a)).$$

Если $\text{supp } s \cap \text{supp } s'$ — компакт, то $B(s', s)$ есть n -форма класса C^∞ на V с компактным носителем, и мы положим

$$\langle s', s \rangle_\xi = \langle s', s \rangle = \int_V B(s', s).$$

Определено также скалярное произведение $\langle s, s' \rangle_\xi$ (замечание 3.3.16 (а)), причем $\langle s, s' \rangle_\xi = \langle s', s \rangle_\xi$.

3.3.16. Замечания. (а) Очевидно,

$$(\xi')' = (\xi')^* \otimes \mathcal{E}^n = \xi \otimes (\mathcal{E}^n)^* \otimes \mathcal{E}^n,$$

а это канонически изоморфно ξ , так как $\mathcal{E}^n$ — линейное расслоение и мы можем применить замечание в конце § 3.1 (о том, что $\eta \otimes \eta^*$ канонически тривиально, если расслоение η линейно).

(б) Если ξ — тривиальное расслоение, $\xi = (E, \rho, V)$ и

$$h: \xi \rightarrow V \times \mathbb{C}^q$$

— изоморфизм, то мы имеем изоморфизм

$$h^*: \xi^* \rightarrow V \times \mathbb{C}^q,$$

определяемый как обратный транспонированному к h (т.е. $h_a^* = {}^t h_a^{-1}$ для каждой точки $a \in V$). Кроме того, если $x \in E_a$, $y \in E_a^*$, то

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^q x_i y_i,$$

где $h(x) = a \times (x_1, \dots, x_q)$, $h^*(y^*) = a \times (y_1, \dots, y_q)$. Мы будем отождествлять точку $h(x)$ с ее проекцией $(x_1, \dots, x_q)$ в $\mathbb{C}^q$.

3.3.17. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть P — линейный дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$ на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, задаваемый равенством

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x).$$

Тогда существует единственный линейный дифференциальный оператор P^* из $\mathfrak{D}_s$ в $\mathfrak{D}_r$, называемый формально сопряженным к P , такой, что

$$\int_{\Omega} (Pu(x), v(x)) dx = \int_{\Omega} (u(x), P^*v(x)) dx$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$, $v \in C_0^\infty(\Omega, s)$. Более того, P^* задается формулой

$$(P^*v)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha}(x) v(x)).$$

[Здесь скалярное произведение (u_1, u_2) векторов в $\mathbb{C}^r$ определено равенством

$$(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^r u_{1j} \bar{u}_{2j}, \quad u_j = (u_{j1}, \dots, u_{jr}),$$

tA — матрица, транспонированная к A , и $\bar{A}$ — матрица, элементы которой комплексно сопряжены соответствующим элементам A .]

Это легко получается из формулы

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \overline{D^\alpha \psi(x)} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx,$$

где $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

3.3.18. ТЕОРЕМА. Пусть P — линейный дифференциальный оператор из ξ в η , где ξ, η — векторные расслоения над V . Тогда существует единственный линейный дифференциальный оператор P' из η' в ξ' , такой, что

$$(3.3.19) \quad \langle s, P't' \rangle_{\xi'} = \langle Ps, t' \rangle_{\eta'}$$

для всех $s \in C_0^\infty(V, \xi)$, $t' \in C_0^\infty(V, \eta')$.

◀ Очевидно, если $t' \in C_0^\infty(V, \eta')$, то сечение

$$P't' \in C_0^\infty(V, \xi'),$$

удовлетворяющее (3.3.19) для всех $s \in C_0^\infty(V, \xi)$, определено однозначно. Более того, если сечение t' равно нулю на открытом

множестве $U \subset V$, то $\langle Ps, t' \rangle_{\eta'} = 0$ для всех s с $\text{supp } s \subset U$, так что если выполняется (3.3.19), то $\langle s, P't' \rangle_{\xi'} = 0$ для всех s с $\text{supp } s \subset U$, а отсюда следует, что $P't'$ равно нулю на U . Следовательно, достаточно доказать существование P' для случая, когда V — открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а ξ и η тривиальны над Ω . Пусть

$$h_{\xi}: \xi \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}', \quad h_{\eta}: \eta \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}'$$

— изоморфизмы и h_{ξ}^* и h_{η}^* — соответствующие изоморфизмы сопряженных расслоений (замечание 3.3.16 (b)). В терминах этих изоморфизмов пусть P задается равенством

$$(Pu)(x) = \sum_{|a| \leq m} a_a(x) D^a u(x).$$

Если $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ означает стандартную n -форму на Ω , то любой элемент

$$t'_a \in F'_a = F_a^* \otimes \mathcal{E}_a^n$$

можно единственным образом записать в виде

$$t'_a = g_a \otimes (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_a, \quad g_a \in F_a^*.$$

Если $t' \in C_0^\infty(\Omega, \eta')$, $t' = g \otimes (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$, положим

$$P't' = f \otimes (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Здесь f определяется равенством

$$h_{\xi}^*(f) = \overline{P^*}(h_{\eta}^*(g)),$$

P^* — оператор, формально сопряженный к P , как в предложении 3.3.17, и для любого оператора

$$L = \sum c_a(x) D^a,$$

по определению

$$\overline{L} = \sum \overline{c_a(x)} D^a.$$

Если $s \in C_0^\infty(\Omega, \xi)$ и t' то же, что и выше, то

$$\begin{aligned} \langle Ps, t' \rangle_{\eta'} &= \int_{\Omega} (Ph_{\xi}(s), \overline{h_{\eta}^*(g)}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \int (h_{\xi}(s), P^* \overline{h_{\eta}^*(g)}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \langle s, P't' \rangle_{\xi'}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.3.20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор P' , определенный выше, называется (формально) транспонированным к P .

3.3.21. ЗАМЕЧАНИЕ. Если дано $\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие V и над ним $\mathbb{R}$ -аналитические расслоения ξ и η , то говорят, что оператор $P: C^\infty(V, \xi) \rightarrow C^\infty(V, \eta)$ имеет аналитические коэффициенты,

если сечение P_s аналитично всякий раз, когда сечение s аналитично. Легко видеть, что в терминах локальных координат на V и (аналитических) изоморфизмов между ξ , η и тривиальными расслоениями, это имеет место в том и только в том случае, когда P задается равенством

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x),$$

где все a_α являются $\mathbb{R}$ -аналитическими отображениями в пространство $(s \times r)$ -матриц. Кроме того, тогда и транспонированный оператор P' имеет аналитические коэффициенты.

3.3.22. Замечание. Если P — эллиптический оператор из ξ в η и $\text{rank } \xi = \text{rank } \eta$, то оператор P' тоже эллиптический. Заметим, что условие на ранг необходимо, так как если существует эллиптический оператор из расслоения ξ в расслоение η , то $\text{rank } \xi \leq \text{rank } \eta$.

Теорема 3.3.3 принадлежит Петре [1], теорема 3.3.11 — Хёрмандеру [3].

§ 3.4. Пространства Соболева

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, p — действительное число, $p \geq 1$ и q , m — целые числа, $q \geq 1$, $m \geq 0$. Пусть

$$f = (f_1, \dots, f_q): \Omega \rightarrow \mathbb{C}^q$$

— отображение класса C^∞ . Рассмотрим пространство C^∞ -отображений $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^q$, для которых

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^q \int_{\Omega} |D^\alpha f_j(x)|^p dx < \infty.$$

В этом пространстве мы определим норму $\|f\|_{m,p}$, полагая

$$\|f\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^q \int_{\Omega} |D^\alpha f_j(x)|^p dx$$

(заметим, что неравенство треугольника следует из неравенства Минковского). Когда надо указывать зависимость от Ω , мы будем обозначать эту норму через $\|f\|_{m,p}^\Omega$.

3.4.1. Определение. Пополнение вышеуказанного пространства по норме $\|f\|_{m,p}$ называется *пространством Соболева* $H_{m,p}(\Omega)$. Пополнение относительно нормы $\|f\|_{m,p}$ пространства $C_0^\infty(\Omega, q)$ всех C^∞ -отображений множества Ω в $\mathbb{C}^q$ с компактными носителями обозначается символом $\dot{H}_{m,p}(\Omega)$.

Пусть $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^q$, $v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jq})$. Положим, как обычно,

$$(v_1, v_2) = \sum_{\nu=1}^q v_{1\nu} \bar{v}_{2\nu}.$$

Если $f = (f_1, \dots, f_q): \Omega \rightarrow \mathbb{C}^q$ и $g = (g_1, \dots, g_q): \Omega \rightarrow \mathbb{C}^q$ — измеримые отображения, мы положим

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=1}^q \int_{\Omega} f_{\nu}(x) \overline{g_{\nu}(x)} dx = \int_{\Omega} (f(x), g(x)) dx$$

в предположении, что все произведения $f_{\nu}(x) \overline{g_{\nu}(x)}$ суммируемы.

3.4.2. ЗАМЕЧАНИЯ. Если $f = (f_1, \dots, f_q)$ и все $f_{\nu} \in L^p(\Omega)$, то мы это будем записывать так: $f \in L^p(\Omega, q)$ или $f \in L^p$. Если существуют функции $h^a \in L^k(\Omega, q)$, $1 \leq k \leq \infty$, $|\alpha| \leq m$, такие, что

$$\int_{\Omega} (f(x), D^a g(x)) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (h^a(x), g(x)) dx$$

для всех $g \in C_0^{\infty}(\Omega, q)$, мы будем говорить что f имеет в L^k слабые производные до порядка m включительно. Отображения h^a называются *слабыми производными* f . Заметим, что h^a , если они существуют, определены однозначно (с точностью до значений на множествах меры нуля).

Если теперь $\{f_{\nu}\}$ — последовательность элементов из $C^{\infty}(\Omega, q)$, сходящаяся в $H_{m,p}(\Omega)$, то $\{D^a f_{\nu}\}$ сходится в $L^p(\Omega)$ при $|\alpha| \leq m$. Пусть f^a — предел этой последовательности в L^p . Тогда

$$\langle f_{\nu}, D^a g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^a f_{\nu}, g \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle f^a, g \rangle$$

для любого отображения $g \in C_0^{\infty}(\Omega, q)$. Отсюда следует, что f^a — слабые производные отображения

$$f = f^0 = \lim f_{\nu}.$$

В частности, если $\{f_{\nu}\}, \{g_{\nu}\}$ — две последовательности, определяющие один и тот же элемент из $H_{m,p}(\Omega)$, то

$$\lim D^a f_{\nu} = \lim D^a g_{\nu} \quad \text{при } |\alpha| \leq m.$$

Таким образом, если $f \in H_{m,p}(\Omega)$, мы можем определить $D^a f$, полагая

$$D^a f = \lim D^a f_{\nu}, \quad \text{если } f_{\nu} \rightarrow f \text{ в } H_{m,p}(\Omega), \quad f_{\nu} \in C^{\infty}(\Omega, q).$$

Пусть теперь $0 \leq m' \leq m$ и $f \in H_{m,p}(\Omega)$. Тогда существует последовательность $\{f_{\nu}\}$, $f_{\nu} \in C^{\infty}(\Omega, q)$, фундаментальная относительно

нормы $|g|_{m,p}$ и определяющая элемент f . Так как $|g|_{m',p} \leq |g|_{m,p}$, то последовательность $\{f_v\}$ фундаментальна и относительно нормы $|g|_{m',p}$. Поэтому она определяет некоторый элемент $f' \in H_{m',p}(\Omega)$, не зависящий, очевидно, от выбора последовательности $\{f_v\}$, определяющей f . Положим

$$f' = i(f) = i_{m,m'}(f).$$

3.4.3. Предложение. *Линейное отображение $i: H_{m,p}(\Omega) \rightarrow H_{m',p}(\Omega)$ является вложением.*

◀ Если $i(f) = 0$ и $\{f_v\}$ — последовательность в $C^\infty(\Omega, q)$, определяющая f , то $f_v \rightarrow 0$ в $L^p(\Omega)$. Если $g \in C_0^\infty(\Omega, q)$, то

$$0 = \lim \langle f_v, D^\alpha g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim \langle D^\alpha f_v, g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f^\alpha, g \rangle$$

при $|\alpha| \leq m$, откуда $f^\alpha = 0$ при $|\alpha| \leq m$ и, значит, $f = 0$ в $H_{m,p}(\Omega)$. ▶
Очевидно,

$$(3.4.4) \quad i(\dot{H}_{m,p}(\Omega)) \subset \dot{H}_{m',p}(\Omega).$$

Далее, если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega, 1)$, то

$$\varphi f \in \dot{H}_{m,p}(\Omega)$$

для любого $f \in H_{m,p}(\Omega)$, и тогда

$$D^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi \cdot D^{\alpha-\beta} f \quad \text{при } |\alpha| \leq m.$$

Кроме того, очевидное включение $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ порождает отображение

$$\dot{H}_{m,p}(\Omega) \rightarrow \dot{H}_{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

сохраняющее норму. Поэтому мы будем часто отождествлять $\dot{H}_{m,p}(\Omega)$ с подпространством в $\dot{H}_{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

3.4.5. Неравенство Пуанкаре. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда если число M (зависящее только от Ω) достаточно велико, то

$$f(x) = \int_{-M}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \dots, x_n) dt,$$

и по неравенству Шварца

$$\|f\|_{L^p} \leq C(\Omega) \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_{L^p}.$$

Отсюда следует, что для любой функции $f \in \dot{H}_{m,p}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{m,p} \leq C(\Omega, m) \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{0,p}.$$

3.4.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Для наших целей наиболее интересен случай $p=2$. В этом случае мы пишем

$$H_{m,2}(\Omega) = H_m(\Omega) \quad \text{и} \quad \dot{H}_{m,2}(\Omega) = \dot{H}_m(\Omega), \\ \|f\|_{m,2} = \|f\|_m.$$

Норма $\|f\|_m$ очевидно, индуцируется скалярным произведением

$$[f, g]_m = [f, g] = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^q \int_{\Omega} D^\alpha f_j(x) \overline{D^\alpha g_j(x)} dx.$$

Таким образом, $H_m(\Omega)$ и $\dot{H}_m(\Omega)$ — гильбертовы пространства. Работать с этими пространствами несколько легче, чем с общими пространствами $H_{m,p}(\Omega)$ по той причине, что в них действует теорема Планшереля. Если $m=0$, то $H_0(\Omega) = L^2(\Omega)$ и вместо $[f, g]_0$ мы будем писать $\langle f, g \rangle$.

3.4.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f \in \dot{H}_m(\mathbb{R}^n)$ и $\hat{f}$ — преобразование Фурье для f . Тогда существуют не зависящие от f константы $c_1, c_2 > 0$, такие, что

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \|f\|_m^2 \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

◀ Неравенство достаточно доказать для $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, q)$, так как это пространство плотно в $\dot{H}_m(\mathbb{R}^n)$. Легко видеть, что существуют константы $c_1, c_2 > 0$, такие, что

$$(3.4.8) \quad c_1 (1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq c_2 (1 + |\xi|^2)^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Если теперь $f = (f_1, \dots, f_q)$, то по теореме 3.2.8

$$\begin{aligned} \|f\|_m^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^q \int_{\Omega} |D^\alpha f_j(x)|^2 dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^q \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha f_j}(\xi)|^2 d\xi = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{j=1}^q \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2 |\hat{f}_j(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

и наше предложение следует из неравенств (3.4.8). ▶

3.4.9. ТЕОРЕМА. Имеет место равенство

$$\dot{H}_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n, q): \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

◀ Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, 1)$ равна 1 при $|x| \leq 1$ и всюду $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Пусть $f \in H_m(\mathbb{R}^n)$ и

$$f_\nu(x) = \varphi(x_\nu) f(x).$$

Тогда f_ν имеет компактный носитель. Кроме того,

$$D^\alpha f_\nu = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi_\nu D^{\alpha-\beta} f, \quad \varphi_\nu(x) = \varphi\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

Очевидно, все $D^\beta \varphi_\nu$ равномерно по ν ограничены, $D^\beta \varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ в каждой точке $\mathbb{R}^n$, если $|\beta| \geq 1$, и $D^0 \varphi_\nu = \varphi_\nu \rightarrow 1$. Следовательно, $D^\alpha f_\nu \rightarrow D^\alpha f$ в $L^2(\mathbb{R}^n, q)$, $|\alpha| \leq m$, и, значит, $f_\nu \rightarrow f$ в $H_m(\mathbb{R}^n)$. Так как все $f_\nu \in \dot{H}_m(\mathbb{R}^n)$, мы сразу получаем, что $\dot{H}_m(\mathbb{R}^n) = H_m(\mathbb{R}^n)$. Далее, по предложению 3.4.7,

$$\dot{H}_m(\mathbb{R}^n) \subset \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n, q) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

Обратно, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

для некоторой $f \in L^2(\mathbb{R}^n, q)$, то

$$(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n, q).$$

Поэтому найдется последовательность вектор-функций $\{g_\nu\}$ в $\mathcal{S}$, такая, что

$$\hat{g}_\nu(\xi) \rightarrow (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{f}(\xi)$$

в $L^2(\mathbb{R}^n, q)$. Далее,

$$\hat{g}_\nu \cdot (1 + |\xi|^2)^{-m/2} \in \mathcal{S},$$

так что, по формуле обращения 3.2.2, найдется $h_\nu \in \mathcal{S}$, преобразование Фурье которой есть $\hat{g}_\nu (1 + |\xi|^2)^{-m/2}$. Тогда $h_\nu \in H_m(\mathbb{R}^n)$, а так как

$$\int (1 + |\xi|^2)^m |\hat{h}_\nu(\xi) - \hat{h}_\mu(\xi)|^2 d\xi = \int |\hat{g}_\nu(\xi) - \hat{g}_\mu(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0$$

при $\mu, \nu \rightarrow \infty$, то из предложения 3.4.7 следует, что h_ν сходятся в $H_m(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, $h_\nu \rightarrow f$ в $L^2(\mathbb{R}^n, q)$, и отсюда следует наша теорема. ▶

3.4.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы уже видели, что $H_{m,p}(\Omega)$ вкладывается в $H_{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega, q)$. Мы будем говорить, что отображение $f \in L^p(\Omega, q)$ строго дифференцируемо в L^p до порядка m (включительно), если для любого подмножества $\Omega' \Subset \Omega$ сужение $f|_{\Omega'}$

принадлежит образу $H_{m,p}(\Omega')$ в $L^p(\Omega', q)$. При $p=2$ мы будем просто говорить, что f строго дифференцируемо.

3.4.11. ТЕОРЕМА. Пусть φ — функция класса C^∞ с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \geq 0$, $\text{supp } \varphi \subset \{x: |x| < 1\}$ и $\int \varphi(x) dx = 1$. Пусть

$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ и Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Для $f \in L^p(\Omega)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

Тогда: (a) $\varphi_\varepsilon * f \rightarrow f$ в $L^p(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой $f \in L^p(\Omega)$; (b) если $f \in H_{m,p}(\Omega)$, то

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f) = \varphi_\varepsilon * D^\alpha f, \quad |\alpha| \leq m.$$

◀ Продолжим f в $\mathbb{R}^n$, полагая $f(x) = 0$, если $x \notin \Omega$. Тогда

$$\begin{aligned} (\varphi_\varepsilon * f - f)(x) &= \int \varphi_\varepsilon(x-y) (f(y) - f(x)) dy = \\ &= \int_{|y| \leq \varepsilon} \varphi_\varepsilon(-y) (f(y+x) - f(x)) dy. \end{aligned}$$

По неравенству Гёльдера при $p > 1$ мы имеем

$$|(\varphi_\varepsilon * f - f)(x)|^p \leq \left(\int_{|y| \leq \varepsilon} |\varphi_\varepsilon(y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} \int_{|y| \leq \varepsilon} |f(y+x) - f(x)|^p dy,$$

где p' определяется из равенства $1/p + 1/p' = 1$. (Если $p=1$, то первый множитель справа надо заменить на $\sup |\varphi_\varepsilon(y)| = \varepsilon^{-n} \sup |\varphi(y)|$.) Интегрируя по $\mathbb{R}^n$ относительно x и извлекая корень степени p , мы получаем

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} \leq \varepsilon^{-n/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \left\{ \int_{|y| \leq \varepsilon} dy \int |f(x+y) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

(где $\|\varphi\|_{L^{p'}} = \sup |\varphi(y)|$, если $p=1$). Отсюда

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{L^p} &\leq \varepsilon^{n/p} \left(\int_{|y| \leq \varepsilon} dy \right)^{1/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \sup_{|y| \leq \varepsilon} \left(\int |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= C \|\varphi\|_{L^{p'}} \sup_{|y| \leq \varepsilon} \left(\int |f(x+y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Последний член стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$; это очевидно, если f непрерывна и имеет компактный носитель, а для произвольной $f \in L^p(\Omega)$ это следует из того, что непрерывные функции с компактными носителями плотны в $L^p(\Omega)$. Этим доказано утверждение (a).

Чтобы доказать (b), рассмотрим последовательность $\{f_v\}$ элементов из $C_0^\infty(\Omega, q)$, сходящуюся в $\dot{H}_{m,p}(\Omega)$ к данному элементу $f \in \dot{H}_{m,p}(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f)(x) &= \int_{\Omega} D^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \varphi_\varepsilon)(x-y) f_v(y) dy = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) D^\alpha f_v(y) dy = \\ &= \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y) D^\alpha f(y) dy = (\varphi_\varepsilon * (D^\alpha f))(x). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.4.12. ТЕОРЕМА. Если $f \in H_{m,p}(\Omega)$ и все $D^\alpha f$ строго дифференцируемы при $|\alpha| \leq m$ до порядка m' в L^p , то f строго дифференцируема в L^p до порядка $m+m'$ включительно.

◀ Домножая f на подходящую C^∞ -функцию с компактным носителем, мы можем считать, что f имеет компактный носитель. Если функция φ_ε определена, как в теореме 3.4.11, то $\varphi_\varepsilon * f$ принадлежит классу C^∞ . Далее, по теореме 3.4.11 (b),

$$D^\alpha(\varphi_\varepsilon * f) = \varphi_\varepsilon * (D^\alpha f), \quad |\alpha| \leq m.$$

Так как $D^\alpha f \in \dot{H}_{m',p}(\Omega)$, то для любых α, β , $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m'$, мы имеем $D^{\alpha+\beta}(\varphi_\varepsilon * f) = D^\beta(\varphi_\varepsilon * D^\alpha f) = \varphi_\varepsilon * D^\beta(D^\alpha f)$ (теорема 3.4.11 (b)). Далее, при $\varepsilon \rightarrow 0$ это сходится в $L^p(\Omega, q)$ (по теореме 3.4.11 (a)), а отсюда следует, что $f \in H_{m+m',p}(\Omega)$. ▶

§ 3.5. Леммы Реллиха и Соболева

3.5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, φ — функция класса C^∞ с носителем в шаре $\{x: |x| < 1\}$,

$$\varphi(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1;$$

положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon).$$

Пусть $p \geq 1$ и p' определяется из равенства $1/p + 1/p' = 1$, если $p > 1$. Тогда при $m \geq 1$ для любой $f \in \dot{H}_{m,p}(\Omega)$ мы имеем

$$\|\varphi_\varepsilon * f - f\|_{m-1,p}^{\mathbb{R}^n} \leq A \varepsilon \|\varphi\|_{L^{p'}} \|f\|_{m,p},$$

где A — константа, зависящая только от Ω , m и p ; при $p=1$ под $\|\varphi\|_{L^{p'}}$ надо понимать $\sup |\varphi(x)|$.

◀ Пусть f — функция класса C^∞ в $\mathbb{R}^n$ и $\text{supp } f \subset \Omega$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ мы имеем

$$f(x+y) - f(x) = \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty) dt.$$

Значит, если

$$g_y(x) = f(x+y) - f(x),$$

то по неравенству Гёльдера

$$|g_y(x)|^p \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty) \right|^p dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \|g_y\|_{L^p}^p &\leq n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+ty) \right|^p dx = \\ &= n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right|^p dx \leq n^{p-1} \sum_{j=1}^n |y_j|^p \|f\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|y| \leq \varepsilon$ мы имеем

$$(3.5.2) \quad \|g_y\|_{L^p} \leq n\varepsilon \|f\|_{1,p}.$$

Далее,

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) (f(x-y) - f(x)) dy,$$

а так как

$$\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset \{x: |x| \leq \varepsilon\},$$

то отсюда при $p > 1$ мы получаем, что

$$\begin{aligned} |(\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x)| &\leq \left(\int |\varphi_\varepsilon(y)|^{p'} dy \right)^{1/p'} \left(\int_{|y| \leq \varepsilon} |f(x+y) - f(x)|^p dy \right)^{1/p} = \\ &= \varepsilon^{-n/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \left(\int_{|y| \leq \varepsilon} |g_y(x)|^p dy \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

причем это неравенство, очевидно, имеет место, даже если $p = 1$. Поэтому, согласно (3.5.2),

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \varepsilon^{-n/p} \|\varphi\|_{L^{p'}} n\varepsilon \|f\|_{1,p} \left(\int_{|y| \leq \varepsilon} dy \right)^{1/p} = \\ &= A\varepsilon \|\varphi\|_{L^{p'}} \|f\|_{1,p}. \end{aligned}$$

Применяя это к производным $D^\alpha f$, $|\alpha| \leq m-1$, и используя плотность $C_0^\infty(\Omega, q)$ в $\dot{H}_{m,p}(\Omega)$, мы получаем требуемое неравенство. ►

3.5.3. Предложение. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и k — непрерывная функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой $f \in L^p(\Omega)$ функция Kf , определяемая по формуле

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} k(x-y)f(y)dy,$$

принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$ и оператор

$$K: L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

вполне непрерывен ($p \geq 1$).

◀ Первое утверждение очевидно, так как для $f \in L^p(\Omega)$ функция Kf непрерывна и ее носитель содержится в компакте

$$S = \{x+y: x \in \bar{\Omega}, y \in \text{supp } k\}.$$

Поэтому достаточно показать, что для любой последовательности $\{f_v\}$ элементов из $L^p(\Omega)$ с $\|f_v\|_{L^p} \leq 1$ найдется подпоследовательность индексов $\{v_r\}$, такая, что $\{Kf_{v_r}\}$ сходится равномерно на S . По теореме Асколи, для этой цели достаточно показать, что семейство $\{Kf: \|f\|_{L^p} \leq 1\}$ ограничено и равномерно непрерывно. Для $\delta > 0$ положим

$$\eta(\delta) = \sup_{|a-b| \leq \delta} |k(a) - k(b)|.$$

Тогда, по неравенству Гёльдера,

$$|Kf(x)| \leq \|k\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \leq \|k\|_{L^{p'}},$$

$$|Kf(x) - Kf(y)| \leq \eta(|x-y|) \int_{\Omega} |f(t)| dt \leq C\eta(|x-y|) \|f\|_{L^p}$$

(так как Ω ограничено). ►

3.5.4. Лемма Реллиха. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $0 \leq m' < m$. Тогда естественное вложение

$$i: \dot{H}_{m,p}(\Omega) \rightarrow \dot{H}_{m',p}(\Omega)$$

вполне непрерывно.

◀ Для произвольного непрерывного оператора

$$T: \dot{H}_{m,p}(\Omega) \rightarrow \dot{H}_{m',p}(\mathbb{R}^n)$$

положим

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \left(\frac{\|Tf\|_{m',p}^{\mathbb{R}^n}}{\|f\|_{m,p}^{\Omega}} \right)$$

и обозначим через j композицию вложения i и изометрии $\dot{H}_{m', p}(\Omega) \rightarrow \dot{H}_{m', p}(\mathbb{R}^n)$. Пусть T_ε — оператор $f \mapsto \varphi_\varepsilon * f$, где функция φ_ε та же, что в предложении 3.5.1. Тогда, по этому предположению,

$$\|T_\varepsilon - j\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее, каждый оператор T_ε является вполне непрерывным по предположению 3.5.3. Так как равномерный предел вполне непрерывных операторов тоже вполне непрерывен (легко доказываемый факт), то теорема доказана. ►

3.5.5. Предложение. При $p = 2$ это утверждение доказывается более просто с помощью теоремы Планшереля.

◄ Пусть $f \in \dot{H}_m(\Omega)$, $|f|_m \leq 1$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ функцию

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega} f(x) e^{-i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} dx,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$. Если ξ лежит в компактном множестве $S \subset \mathbb{C}^n$, то по неравенству Шварца

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(S) |f|_m,$$

и, таким образом, $\hat{f}$ ограничена на S равномерно при $|f|_m \leq 1$. Далее, функция $\hat{f}$, очевидно, голоморфна в $\mathbb{C}^n$. Следовательно, по теореме 1.1.3 из любой такой последовательности $\{\hat{f}_v\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{\hat{f}_{v_r}\}$, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{C}^n$. Мы утверждаем, что соответствующая последовательность $\{f_{v_r}\}$ сходится в $H_{m-1}(\Omega)$. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и $M > 0$ выбрано так, что $1 + |\xi|^2 > 1/\varepsilon$ при $|\xi| \geq M$. Тогда, по предположению 3.4.7,

$$\begin{aligned} \|f_{v_r} - f_{v_s}\|_{m-1}^2 &\leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m-1} |\hat{f}_{v_r} - \hat{f}_{v_s}|^2 d\xi \leq \\ &\leq c_2 \varepsilon \int_{|\xi| > M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_{v_r} - \hat{f}_{v_s}|^2 d\xi + A(\varepsilon) \int_{|\xi| \leq M} |\hat{f}_{v_r} - \hat{f}_{v_s}|^2 d\xi, \end{aligned}$$

где константа $A(\varepsilon)$ зависит только от ε и m . Так как $\{\hat{f}_{v_r}\}$ сходится равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}^n$, то последний интеграл стремится к нулю при $r, s \rightarrow \infty$, откуда

$$\overline{\lim}_{r, s \rightarrow \infty} \|f_{v_r} - f_{v_s}\|_{m-1}^2 \leq c_2 \varepsilon \overline{\lim}_{r, s \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_{v_r} - \hat{f}_{v_s}|^2 d\xi \leq c_3 \varepsilon. \quad \blacktriangleright$$

3.5.6. Предложение. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и m — целое неотрицательное число. Тогда для всякого $M > 0$

найдется константа $A > 0$, зависящая только от M , Ω и m , такая, что для всех $f \in \dot{H}_m(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq A \int_{|\xi| \geq M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

◀ Если это утверждение неверно, то существует последовательность $\{f_\nu\}_{\nu \geq 1}$ C^∞ -функций с компактными носителями в Ω , такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_\nu(\xi)|^2 d\xi = 1,$$

$$\int_{|\xi| \geq M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_\nu(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty.$$

Если снова считать $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ комплексным, то голоморфные функции

$$\hat{f}_\nu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega} f_\nu(x) e^{-i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} dx$$

будут равномерно ограниченными на компактных подмножествах $\mathbb{C}^n$, и потому можно считать, что $\hat{f}_\nu$ сходятся равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^n$ (в частности, на таких подмножествах $\mathbb{R}^n$) к голоморфной функции g (см. теорему 1.1.3'). Далее,

$$\begin{aligned} \int_{M \leq |\xi| \leq M+1} (1 + |\xi|^2)^m |g(\xi)|^2 d\xi &= \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{M \leq |\xi| \leq M+1} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_\nu(\xi)|^2 d\xi = 0, \end{aligned}$$

согласно сделанному предположению. Следовательно, $g(\xi) = 0$ для всех действительных ξ , таких, что $M \leq |\xi| \leq M+1$. Так как g голоморфна в $\mathbb{C}^n$, то отсюда следует, что $g \equiv 0$, и потому $\hat{f}_\nu$ стремятся к нулю равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^n$. В частности,

$$\int_{|\xi| \leq M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_\nu(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty.$$

Так как, по предположению,

$$\int_{|\xi| \geq M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}_\nu(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0,$$

то отсюда следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{f}_v(\xi)|^2 d\xi \rightarrow 0.$$

Мы получили противоречие. ►

3.5.7. Замечания. Используя теорему Планшереля, мы можем следующим образом записать неравенство Пуанкаре: *существует константа $C(\Omega, m)$, такая, что для всех $f \in \dot{H}_m(\Omega)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C(\Omega, m) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Таким образом, предложение 3.5.6 можно рассматривать как усиленную форму неравенства Пуанкаре. Далее, для неравенства 3.5.6 можно получить наилучшую из возможных констант. Это связано с очень интересными вопросами анализа Фурье; см. Фукс [1].

3.5.8. Предложение. (Полярные координаты в $\mathbb{R}^n$.) Пусть $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R}: t > 0\}$ и S^{n-1} — сфера размерности $n-1$ в $\mathbb{R}^n$ (см. пример 2.5.6). Пусть

$$\vartheta: \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

— отображение $(t, x) \mapsto tx$. Тогда существует $(n-1)$ -форма ω на S^{n-1} , такая, что

$$\vartheta^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = t^{n-1} dt \wedge \omega.$$

Кроме того,

$$\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0.$$

◀ Если $x_1, \dots, x_n$ — сужения на S^{n-1} координатных функций в $\mathbb{R}^n$, то мы можем взять

$$\omega = \sum_{k=1}^n x_k dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где знак $\wedge$ над dx_k означает, что этот множитель надо опустить. Тот факт, что

$$\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0,$$

следует из условия

$$\int_U dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n > 0,$$

где $U = \vartheta(I \times S^{n-1})$, $I = \{t: 1/2 < t < 1\}$. ►

3.5.9. Лемма Соболева. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $m > n/p$. Тогда для всякого компакта $K \subset \Omega$ найдется константа $C > 0$, такая, что

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq C \|f\|_{m,p}$$

для любой $f \in C^\infty(\Omega)$, у которой $\text{supp } f \subset K$.

◀ Можно считать, что $\Omega = \mathbb{R}^n$. Далее, для заданного K найдется компакт $L \subset \mathbb{R}^n$, такой, что функция

$$g = g_y: x \mapsto f(x+y)$$

имеет носитель в L для любого $y \in K$. Таким образом, достаточно показать, что для любой $f \in C^\infty$ с $\text{supp } f \subset L$

$$|f(0)| \leq C \|f\|_{m,p}.$$

Пусть $\vartheta: \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — отображение, определенное в предложении 3.5.8.

Если $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, положим $g = f \circ \vartheta$. Тогда частные производные $\partial^m g(t, x) / \partial t^m$ можно получить следующим образом. В $\mathbb{R}^n$ существуют однородные многочлены q_α степени m , такие, что

$$(3.5.10) \quad \frac{\partial^m g(t, x)}{\partial t^m} = \sum_{|\alpha|=m} q_\alpha\left(\frac{y}{\|y\|}\right) D^\alpha f(y), \quad y = \vartheta(t, x) = tx;$$

в частности, функции $q_\alpha(y/\|y\|)$ ограничены. Если M — достаточно большая константа и $x \in S^{n-1}$, то

$$f(0) = - \int_0^M \frac{\partial}{\partial t} f(tx) dt = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^M t^{m-1} \frac{\partial^m g(t, x)}{\partial t^m} dt.$$

Домножая на ω и интегрируя по S^{n-1} , мы получаем

$$f(0) \int_{S^{n-1}} \omega = C_m \int_{S^{n-1}} \int_0^M \frac{\partial^m g(t, x)}{\partial t^m} t^{m-1} dt \wedge \omega,$$

откуда

$$(3.5.11) \quad \begin{aligned} f(0) &= C'_m \int_0^M \int_{S^{n-1}} t^{m-n} \frac{\partial^m g(t, x)}{\partial t^m} t^{n-1} dt \wedge \omega = \\ &= C'_m \int_{\|y\| \leq M} t^{m-n} g_m(y) dy, \quad t = \|y\| \end{aligned}$$

(по предложению 3.5.8), ввиду того, что

$$\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0;$$

здесь $g_m(y)$ задается формулой (3.5.10). Если $p > 1$, из неравенства Гёльдера получается, что

$$|f(0)| \leq C' \left(\int_{\|y\| \leq M} t^{(m-n)p'} dy \right)^{1/p'} \left(\int_{\|y\| \leq M} |g_m(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Так как $m > n/p$, то $(m-n)p' + n - 1 > -1$, и потому

$$\int_{\|y\| \leq M} t^{(m-n)p'} dy = \int_0^M t^{(m-n)p' + n - 1} dt \int_{S^{n-1}} \omega = C'' < \infty.$$

Кроме того, ввиду (3.5.10),

$$\int_{\|y\| \leq M} |g_m(y)|^p dy \leq \text{const} \cdot |f|_{m,p}^p,$$

откуда

$$|f(0)| \leq C |f|_{m,p},$$

что и требовалось.

Если $p = 1$, $m \geq n$, то требуемое неравенство следует непосредственно из (3.5.11). ►

3.5.12. Следствие. Если Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и K — компактное подмножество Ω , то $\sup_{x \in K} |f(x)| \leq C |f|_{m,p}$ при $m > n/p$ для любой $f \in C^\infty(\Omega, q)$.

Для доказательства достаточно применить лемму 3.5.9 к компонентам φf , где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\varphi(x) = 1$, когда $x \in K$.

3.5.13. Предложение. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $m > n/p$. Тогда всякая функция $f \in H_{m,p}(\Omega)$ почти всюду совпадает с функцией, обладающей непрерывными производными порядков $\leq m - [n/p] - 1$; здесь $[X]$ — наибольшее целое число, не превосходящее X .

◀ Домножая f на подходящую функцию с компактным носителем, мы можем считать, что $f \in \dot{H}_{m,p}(\Omega)$ и что множество Ω ограничено. Пусть

$$f_\nu \in C_0^\infty(\Omega, q), \quad |f_\nu - f|_{m,p} \rightarrow 0.$$

Согласно следствию 3.5.12, для любого компакта $K \subset \Omega$ найдется $C > 0$, такое, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha (f_\nu - f_\mu)(x)| \leq C |D^\alpha (f_\nu - f_\mu)|_{m-|\alpha|,p} \leq$$

$$\leq C |f_\nu - f_\mu|_{m,p} \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu, \mu \rightarrow \infty, \quad |\alpha| < m - (n/p).$$

Следовательно, при $|\alpha| < m - (n/p)$ производные $D^\alpha f_\nu$ сходятся равномерно на компактных подмножествах Ω . ►

3.5.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При $p = 1$ или $p = 2$ лемма 3.5.9 доказывается более просто.

◀ Случай $p = 1$. Если M достаточно велико, то

$$f(x) = \int_{-M}^{x_1} \dots \int_{-M}^{x_n} \frac{\partial^n f(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \dots \partial t_n} dt_1 \dots dt_n,$$

и потому из неравенства Гёльдера получается, что при $m \geq n$ и $p \geq 1$

$$(3.5.15) \quad |f(x)| \leq C \|f\|_{m,p}.$$

Отсюда следует наше неравенство.

Случай $p = 2$. Ввиду того, что

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x, \xi)} (1 + |\xi|^2)^{-m/2} \hat{f}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{m/2} d\xi, \end{aligned}$$

из неравенства Шварца следует, что

$$|f(x)|^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-m} d\xi \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m d\xi \leq C' \|f\|_m^2$$

(по предложению 3.4.7), так как при $m > n/2$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-m} d\xi < \infty. \blacktriangleright$$

Полезно сделать следующее замечание о нормах в $\dot{H}_m(\Omega)$:

3.5.16. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon) > 0$, такая, что

$$\|f\|_{m-1}^2 \leq \varepsilon \|f\|_m^2 + C(\varepsilon) \|f\|_0^2 \quad \text{для всех } f \in \dot{H}_m(\Omega).$$

◀ Доказательство достаточно провести для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. По предложению 3.4.7,

$$\|f\|_{m-1}^2 \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{m-1} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon) > 0$, такая, что

$$(1 + |\xi|^2)^{m-1} \leq \varepsilon c_2^{-1} (1 + |\xi|^2)^m + C(\varepsilon)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Поэтому

$$|f|_{m-1}^2 \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi + C(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi,$$

и доказательство завершено ввиду предложения 3.4.7. ►

3.5.17. Замечание. Это предложение эквивалентно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon) > 0$, такая, что для всех $f \in \dot{H}_m(\Omega)$

$$|f|_{m-1} \leq \varepsilon |f|_m + C(\varepsilon) |f|_0.$$

Лемма Реллиха останется верной, если мы заменим $\dot{H}_{m,p}(\Omega)$ на $H_{m,p}(\Omega)$, в случае, когда граница Ω достаточно гладкая (см. Реллих [1]).

Имеется несколько доказательств леммы Соболева. Сам Соболев [1] получил несколько весьма точных неравенств. Однако большинство из этих доказательств намного сложнее, чем приведенное выше.

§ 3.6. Неравенства Гординга и Фридрикса

В этом разделе мы будем рассматривать дифференциальные операторы из Φ_r в Φ_s на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что, оператор задан в виде

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad u \in C^\infty(\Omega, r).$$

Непосредственно видно, что

$$P(f^m v)(x_0) = m! \sum_{|\alpha| = m} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} a_\alpha(x_0) v,$$

где $v = (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{C}^r$, $x_0 \in \Omega$, $f \in m_{x_0}$ и

$$\xi_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

Положим

$$p_P(x, \xi) = p(x, \xi) = p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} \xi^\alpha a_\alpha(x), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

тогда из нашего замечания и определения 3.3.14 следует, что оператор P является эллиптическим в том и только в том случае, когда для любых $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ отображение

$$p(x, \xi): \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^s$$

инъективно. Функция p называется характеристическим многочленом оператора P .

В случае $r = s$ полезно рассмотреть более частный вид таких операторов.

3.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейный дифференциальный оператор порядка m из расслоения Φ_r над Ω в себя называется (равномерно) *строгим эллиптическим*, если существует константа $C > 0$, такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ и $v \in C^r$ мы имеем

$$\operatorname{Re}(p(x, \xi)v, v) \geq C|\xi|^m |v|^2.$$

Если $n > 1$, то любой строго эллиптический оператор имеет четный порядок. В самом деле, если $x \in \Omega$ и $v \neq 0$, то функция

$$Q(\xi) = \operatorname{Re}(p(x, \xi)v, v)$$

является однородным многочленом степени m (равной порядку P). Ясно, что для почти всех $a, b \in \mathbb{R}^n$ многочлен $Q(a + \lambda b)$ от действительной переменной λ имеет по λ степень m . Если m нечетное, то этот многочлен имеет действительные корни. С другой стороны, если $n > 1$, то a и b можно подобрать так, что $a + \lambda b \neq 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и, ввиду строгой эллиптичности, Q в этих точках отличен от нуля.

Пусть P_1 — линейный дифференциальный оператор порядка m_1 из Φ_r в Φ_s и P_2 — оператор порядка m_2 из Φ_s в Φ_t . Тогда

$$P_2 \circ P_1: C^\infty(\Omega, r) \rightarrow C^\infty(\Omega, t)$$

— линейный дифференциальный оператор. Легко проверить, что этот оператор имеет порядок $\leq m_1 + m_2$. Если

$$p_1(x, \xi): C^r \rightarrow C^s, \quad p_2(x, \xi): C^s \rightarrow C^t$$

— характеристические многочлены соответственно операторов P_1, P_2 и если $P_2 \circ P_1$ имеет порядок $m_1 + m_2$, то характеристический многочлен этого оператора равен $p_2 \circ p_1$. Это верно в том и только в том случае, когда $p_2 \circ p_1 \neq 0$. В частности, если операторы P_1, P_2 эллиптические, то отображение $p_2 \circ p_1: C^r \rightarrow C^t$, очевидно, инъективно для $\xi \neq 0$, а отсюда следует, что оператор $P_2 \circ P_1$ тоже эллиптический. Далее, если P^* — формально сопряженный к P оператор (предложение 3.3.17), то его характеристический многочлен задается равенством

$$p^*(x, \xi) = (-1)^m \overline{p(x, \xi)},$$

где p — характеристический многочлен P .

Из этих замечаний непосредственно вытекает

3.6.2. Следствие. Если P — эллиптический оператор из Φ_r в Φ_s на Ω , то для любого $\Omega' \Subset \Omega$ оператор $(-1)^m P^* \circ P$ есть равномерно строго эллиптический оператор на Ω' четного порядка из Φ_r в себя.

◀ Если

$$L = (-1)^m P^* \circ P$$

и p_L — характеристический многочлен оператора L , то

$$p_L = (-1)^m p^* \circ p,$$

поэтому для любого $v \in C^r$ имеем

$$(p_L(x, \xi) v, v) = (p(x, \xi) v, p(x, \xi) v) = \|p(x, \xi) v\|^2.$$

Если теперь $x \in \Omega' \Subset \Omega$ и $|\xi| = 1$, $|v| = 1$, то функция $\|p(x, \xi) v\|^2$ ограничена снизу, так как $p(x, \xi) v \neq 0$ ввиду эллиптичности P . Из однородности следует, что

$$(p_L(x, \xi) v, v) \geq C |\xi|^{2m} |v|^2. \blacktriangleright$$

3.6.3. Неравенство Гординга. Пусть P — равномерно строго эллиптический оператор (четного) порядка $2m$ из расслоения Φ , над Ω в себя. Тогда для любого относительно компактного открытого подмножества $\Omega' \subset \Omega$ найдутся константы $C > 0$ и $B > 0$, такие, что

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle \geq C \|u\|_m^2 - B \|u\|_0^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$.

◀ Теорема доказывается в три шага.

Шаг I. Пусть P имеет вид

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha u(x),$$

где a_α — постоянные матрицы (т. е. P — оператор с постоянными коэффициентами). По теореме Планшереля,

$$\langle Pu, u \rangle = \langle \widehat{Pu}, \widehat{u} \rangle.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \widehat{Pu} &= \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha \widehat{D^\alpha u}(\xi) = (-1)^m \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} a_\alpha i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) = \\ &= (-1)^m p(\xi) \widehat{u}(\xi) + q(\xi) \widehat{u}(\xi), \end{aligned}$$

где p — характеристический многочлен P и q — многочлен степени $\leq 2m-1$ (коэффициенты которого — комплексные $(r \times r)$ -матрицы). Таким образом,

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle =$$

$$= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (p(\xi) \widehat{u}(\xi), \widehat{u}(\xi)) d\xi + (-1)^m \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^n} (q(\xi) \widehat{u}(\xi), \widehat{u}(\xi)) d\xi \geq$$

$$\geq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi - c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{2m-1} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

где $c_1, c_2 > 0$; мы использовали тот факт, что, поскольку P равномерно строго эллиптичен, существует константа $c_1 > 0$, для которой

$$\operatorname{Re}(p(\xi)v, v) \geq c_1 |\xi|^{2m} |v|^2,$$

и что многочлен q имеет степень $\leq 2m-1$. Пусть число M настолько велико, что

$$c_1 |\xi|^{2m} - c_2 (1 + |\xi|)^{2m-1} \geq \frac{1}{2} c_1 (1 + |\xi|)^{2m}$$

при $|\xi| \geq M$. Тогда (полагая $c_3 = c_1/2$) мы получаем, что

$$\begin{aligned} (-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle &\geq \\ &\geq c_3 \int_{|\xi| \geq M} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi - c_2 \int_{|\xi| \leq M} (1 + |\xi|)^{2m-1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq \\ &\geq c_3 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi - c_4 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

где

$$c_4 = \sup_{|\xi| \leq M} \{c_3 (1 + |\xi|^2)^m + c_2 (1 + |\xi|)^{2m-1}\}.$$

По предложению 3.4.7 найдется константа $c > 0$, такая, что

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle \geq c \|u\|_m^2 - c_4 \|u\|_0^2.$$

Шаг II состоит в следующем:

3.6.4. Предложение. Для любой точки $x_0 \in \Omega$ найдется окрестность $U \ni x_0$, такая, что

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle \geq c \|u\|_m^2 - B \|u\|_0^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(U, r)$; здесь c, B — положительные константы, зависящие только от x_0 .

◀ Можно найти линейные дифференциальные операторы $Q_1, \dots, Q_N, R_1, \dots, R_N$ порядков $\leq m$ из Φ_r на Ω в себя, такие, что

$$P = \sum_{v=1}^N R_v^* \circ Q_v,$$

где R_v^* — оператор, формально сопряженный к R_v . Далее, можно написать

$$Q_v = Q_v^0 + Q_v', \quad R_v = R_v^0 + R_v',$$

где Q_v^0, R_v^0 — операторы с постоянными коэффициентами порядка $\leq m$, а все коэффициенты Q_v', R_v' равны нулю в точке x_0 . Тогда

$$\langle Pu, u \rangle = \langle P^0 u, u \rangle + \sum_v \{ \langle Q_v' u, R_v^0 u \rangle + \langle Q_v^0 u, R_v' u \rangle + \langle Q_v' u, R_v' u \rangle \},$$

где

$$P^0 = \sum_{v=1}^N (R_v^0)^* \circ Q_v^0.$$

Так как коэффициенты Q_v' , R_v' равны нулю в точке $x_0 \in \Omega$ и эти операторы имеют порядок $\leq m$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U \ni x_0$, такая, что последняя сумма в написанном выше выражении по модулю не превосходит $\varepsilon |u|_m^2$ для всех $u \in C_0^\infty(U, r)$. Применяя к P^0 результат первого шага, получаем

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle \geq (c_0 - \varepsilon) |u|_m^2 - B |u|_0^2, \quad u \in C_0^\infty(U, r),$$

если

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle P^0 u, u \rangle \geq c_0 |u|_m^2 - B |u|_0^2. \blacktriangleright$$

Шаг III — это общий случай.

Если $\Omega' \Subset \Omega$, то по предложению 3.6.4 найдутся константы $c > 0$, $B > 0$ и конечное покрытие $U_1, \dots, U_h$ множества $\bar{\Omega}'$, для которых

$$(3.6.5) \quad (-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle \geq c |u|_m^2 - B |u|_0^2 \quad \text{при} \quad u \in C_0^\infty(U_j, r), \\ j = 1, \dots, h.$$

Пусть $\eta_j \in C_0^\infty(U_j, 1)$, $0 \leq \eta_j \leq 1$ и $\sum \eta_j^2(x) = 1$ для всех x из некоторой окрестности $\bar{\Omega}'$ (такие η_j существуют по лемме 1.2.7).

Заметим, что для подходящего $C > 0$, зависящего лишь от $\{\eta_j\}$,

$$\left| |\eta_j u|_m^2 - \sum_{|\alpha| \leq m} |\eta_j D^\alpha u|_0^2 \right| \leq C |u|_{m-1} |u|_m, \\ \langle P(\eta_j u), \eta_j u \rangle - \langle \eta_j Pu, \eta_j u \rangle = \langle Lu, u \rangle,$$

где L — дифференциальный оператор порядка $\leq 2m-1$. Следовательно (записывая L в виде $\sum B_\mu \circ A_\mu$, где A_μ — операторы порядка $\leq m$, B_μ — порядка $\leq m-1$), мы видим, что найдется $C > 0$, такое, что $|\langle P(\eta_j u), \eta_j u \rangle - \langle \eta_j Pu, \eta_j u \rangle| \leq C |u|_m |u|_{m-1}$. Отсюда для любого $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$ мы получаем:

$$\begin{aligned} c |u|_m^2 &= c \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_0^2 = c \sum_{j=1}^h \sum_{|\alpha| \leq m} |\eta_j D^\alpha u|_0^2 \leq \\ &\leq c \sum_{j=1}^h |\eta_j u|_m^2 + cC |u|_m |u|_{m-1} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^h (-1)^m \operatorname{Re} \langle P(\eta_j u), \eta_j u \rangle + B' |u|_0^2 + C' |u|_m |u|_{m-1} = \\ &\leq \sum_{j=1}^h (-1)^m \operatorname{Re} \langle \eta_j Pu, \eta_j u \rangle + B' |u|_0^2 + C'' |u|_m |u|_{m-1} = \\ &= (-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle + B' |u|_0^2 + C'' |u|_m |u|_{m-1}. \end{aligned}$$

Далее, для любого $\delta > 0$ и любых комплексных чисел w_1, w_2

$$2|w_1 w_2| \leq \delta |w_1|^2 + \frac{1}{\delta} |w_2|^2.$$

Следовательно,

$$2C'' |u|_m |u|_{m-1} \leq \delta |u|_m^2 + \frac{(C'')^2}{\delta} |u|_{m-1}^2 \leq 2\delta |u|_m^2 + C(\delta) |u|_0^2$$

по предложению 3.5.16. Если $\delta \leq c/2$, это дает нам неравенство

$$\frac{1}{2} c |u|_m^2 \leq (-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle + B_0 |u|_0^2,$$

справедливое для подходящего $B_0 > 0$ и всех $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$. ►

3.6.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если P — равномерно строго эллиптический оператор порядка $2m$, однородный и с постоянными коэффициентами, т. е.

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha D^\alpha u(x),$$

то это неравенство можно несколько усилить. В этом случае в любом открытом множестве $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ для всех $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$

$$(-1)^m \operatorname{Re} \langle Pu, u \rangle \geq c(\Omega) |u|_m^2.$$

◄ Так как

$$(-1)^m \langle Pu, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (p(\xi) \hat{u}(\xi), \hat{u}(\xi)) d\xi \geq c \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

то наше утверждение следует из неравенства 3.4.5 и замечания 3.5.7. ►

3.6.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \geq 1$ — целое число. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\sum_{|\alpha|=k} |\varphi^k D^\alpha f|_0^2 \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=k+1} |\varphi^{k+1} D^\alpha f|_0^2 + C(\varepsilon) \sum_{|\alpha|=k-1} |\varphi^{k-1} D^\alpha f|_0^2$$

для всех $f \in C^\infty(\Omega)$, где φ^0 — функция, тождественно равная 1.

◄ Достаточно доказать, что при $k \geq 1$ и $|\beta| = k$ найдется $C(\varepsilon)$, такое, что

$$|\varphi^k D^\beta f|_0^2 \leq \varepsilon \sum_{|\alpha|=k+1} |\varphi^{k+1} D^\alpha f|_0^2 + C(\varepsilon) \sum_{|\alpha|=k-1} |\varphi^{k-1} D^\alpha f|_0^2.$$

Положим $\beta = \beta' + \gamma$, где $|\beta'| = k-1$ и $|\gamma| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\varphi^k D^\beta f|_0^2 &= \langle D^\beta f, \varphi^{2k} D^\beta f \rangle = - \langle D^{\beta'} f, D^\gamma (\varphi^{2k} D^\beta f) \rangle = \\ &= - \langle D^{\beta'} f, 2k \varphi^{2k-1} D^\gamma \varphi \cdot D^\beta f \rangle - \langle D^{\beta'} f, \varphi^{2k} D^{\beta+\gamma} f \rangle = \\ &= - 2k \langle D^\gamma \varphi \cdot \varphi^{k-1} D^{\beta'} f, \varphi^k D^\beta f \rangle - \langle \varphi^{k-1} D^{\beta'} f, \varphi^{k+1} D^{\beta+\gamma} f \rangle. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что

$$2|\langle u, v \rangle| \leq \delta \|u\|_0^2 + \frac{1}{\delta} \|v\|_0^2, \quad \text{если } \delta > 0,$$

мы получаем для любого $\delta > 0$

$$\|\varphi^k D^\beta f\|_0^2 \leq \delta \{ \|\varphi^k D^\beta f\|_0^2 + \|\varphi^{k+1} D^{\beta+\gamma} f\|_0^2 \} + C_1(\delta) \|\varphi^{k-1} D^\beta f\|_0^2,$$

и требуемое неравенство легко получается отсюда. ►

3.6.8. Неравенство Фридрихса. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и P — линейный эллиптический дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_s$ порядка m , задаваемый формулой

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha u)(x), \quad u \in C^\infty(\Omega, r).$$

Пусть k — целое неотрицательное число. Тогда

3.6.9. Если P имеет постоянные коэффициенты a_α , то существует константа $C > 0$, такая, что для всех $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$

$$\|u\|_{m+k} \leq C \|Pu\|_k.$$

3.6.10. Для любой точки $x_0 \in \Omega$ найдутся окрестность $U \ni x_0$ и константа $C_1 > 0$, такие, что

$$\|u\|_{m+k} \leq C_1 \|Pu\|_k$$

для всех $u \in C_0^\infty(U, r)$ (здесь уже коэффициенты P не обязательно постоянны).

3.6.11. Если Ω' относительно компактно в Ω , то существует константа $C_2 > 0$, такая, что

$$\|u\|_{m+k}^{\Omega'} \leq C_2 \{ \|Pu\|_k^{\Omega'} + \|u\|_0^{\Omega'} \}$$

для всех $u \in C^\infty(\Omega, r)$. В частности, для всех $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$

$$\|u\|_{m+k} \leq C_2 (\|Pu\|_k + \|u\|_0).$$

◄ Доказательство 3.6.9. Пусть $p(x, \xi) = p(\xi)$ — характеристический многочлен P . Так как P — эллиптический оператор, то $p(\xi) v \neq 0$ для $|\xi| = 1$, $v \in \mathbb{C}^r$, $|v| = 1$. Значит, в силу однородности, найдется $\rho_1 > 0$, такое, что

$$\|p(\xi) v\| \geq \rho_1 |\xi|^m |v|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{C}^r.$$

Для любого $M > 0$ мы имеем

$$\|Pu\|_k^2 \geq C' \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{Pu}(\xi)|^2 d\xi \geq C' \int_{|\xi| \geq M} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{Pu}(\xi)|^2 d\xi.$$

Далее, $\widehat{Pu}(\xi) = P(\xi) \hat{u}(\xi) + q(\xi) \hat{u}(\xi)$,

где q — многочлен степени $\leq m-1$. Так как для любых комплексных чисел a, b

$$|a+b|^2 \geq \frac{1}{2}|a|^2 - |b|^2,$$

то отсюда следует существование константы $A > 0$, такой, что

$$\begin{aligned} |\widehat{Pu}(\xi)|^2 &\geq \frac{1}{2}|p(\xi)\hat{u}(\xi)|^2 - A(1+|\xi|^2)^{m-1}|\hat{u}(\xi)|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\rho_1|\xi|^{2m}|\hat{u}(\xi)|^2 - A(1+|\xi|^2)^{m-1}|\hat{u}(\xi)|^2 \geq \\ &\geq \rho_2(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2, \text{ если } |\xi| \geq M, \end{aligned}$$

где M и $\rho_2 > 0$ выбраны подходящим образом. При таком выборе M, ρ_2

$$|Pu|_k^2 \geq C'\rho_2 \int_{|\xi| \geq M} (1+|\xi|^2)^{m+k} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

и 3.6.9 следует из предложений 3.4.7 и 3.5.6.

Доказательство 3.6.10. Запишем P в виде $P = P^0 + P'$, где P^0 имеет постоянные коэффициенты, а все коэффициенты P' равны нулю в точке x_0 (P^0 и P' имеют порядок m). Достаточно показать, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U \ni x_0$, такая, что

$$|P'u|_k \leq \varepsilon |u|_{m+k}$$

для всех $u \in C_0^\infty(U, r)$. Рассмотрим

$$D^\beta(bD^\alpha f), \quad |\alpha| \leq m, \quad |\beta| \leq k, \quad b \in C^\infty(\Omega), \quad f \in C_0^\infty(U), \quad b(x_0) = 0.$$

Имеем

$$D^\beta(bD^\alpha f) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma b \cdot D^{\alpha+\beta-\gamma} f.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$|D^\gamma b \cdot D^{\alpha+\beta-\gamma} f|_0^2 \leq \text{const} \cdot \|b\|_{2k}^2 \cdot \int_U |b(x)| \sum_{|\lambda| \leq m+k} |D^\lambda f(x)|^2 dx,$$

где

$$\|b\|_{2k} = \sum_{|\lambda| \leq 2k} \sup_U |D^\lambda b(x)|.$$

Так как $b(x_0) = 0$, отсюда следует, что

$$|D^\beta(bD^\alpha f)|_0^2 \leq \varepsilon |f|_{m+k}^2$$

для всех $f \in C_0^\infty(U)$, $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq k$, если U достаточно мала. Следовательно,

$$|P'u|_k \leq \varepsilon |u|_{m+k}$$

для всех $u \in C_0^\infty(U, r)$, если U — достаточно малая окрестность x_0 .

Доказательство 3.6.11. Сначала заметим, что

$$|u|_{m+k} \leq C' (|Pu|_k + |u|_0)$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega', r)$.

В самом деле, пусть $\{U_1, \dots, U_n\}$ — конечное покрытие $\bar{\Omega}'$, такое, что

$$|u|_{m+k} \leq C |Pu|_k$$

для всех $u \in C_0^\infty(U_j, r)$. Пусть

$$\eta_j \in C_0^\infty(U_j), \quad 0 \leq \eta_j \leq 1, \quad \sum \eta_j^2(x) = 1$$

для всех x из некоторой окрестности $\bar{\Omega}'$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| |u|_{m+k}^2 - \sum_j |\eta_j u|_{m+k}^2 \right| &\leq \text{const} \cdot |u|_{m+k-1}^2, \\ \left| |Pu|_k^2 - \sum_j |P(\eta_j u)|_k^2 \right| &\leq \text{const} \cdot |u|_{m+k-1}^2. \end{aligned}$$

Так как

$$|\eta_j u|_{m+k} \leq \text{const} \cdot |P(\eta_j u)|_k,$$

то отсюда получается неравенство

$$|u|_{m+k}^2 \leq \text{const} \cdot \{|Pu|_k^2 + |u|_{m+k-1}^2\},$$

и наше замечание следует из предложения 3.5.16.

Пусть теперь

$$\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi(x) = 1$$

для всех x из некоторой окрестности $\bar{\Omega}'$, и пусть $u \in C^\infty(\Omega, r)$ и $m' = m+k$. Для $|\alpha| \leq m'$ мы имеем

$$D^\alpha(\varphi^{m'} u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi^{m'} \cdot D^{\alpha-\beta} u = \varphi^{m'} D^\alpha u + \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \neq 0} c_\beta \varphi^{m'-|\beta|} D^{\alpha-\beta} u,$$

где $c_\beta \in C_0^\infty(\Omega)$. Возводя обе части в квадрат, применяя неравенство Шварца и суммируя по всем α , $|\alpha| \leq m' = m+k$, мы получаем, что

$$\left| |\varphi^{m+k} u|_{m+k}^2 - \sum_{|\alpha| \leq m+k} |\varphi^{m+k} D^\alpha u|_0^2 \right| \leq \text{const} \cdot \sum_{\beta < m+k} |\varphi^{|\beta|} D^\beta u|_0^2.$$

Согласно установленным выше результатам, отсюда

$$|\varphi^{m+k} u|_{m+k}^2 \leq \text{const} \cdot \{|P(\varphi^{m+k} u)|_k^2 + |\varphi^{m+k} u|_0^2\}.$$

Кроме того, из предложения 3.6.7 следует, что

$$\sum_{|\beta| < m+k} |\varphi^{|\beta|} D^\beta u|_0^2 \leq e \sum_{|\beta| = m+k} |\varphi^{m+k} D^\beta u|_0^2 + C(\varepsilon) (|u|_0^2)^2.$$

Подставляя эти неравенства и подбирая ε достаточно малым, мы получаем, что

$$\sum_{|a| \leq m+k} |\varphi^{m+k} D^a u|_0^2 \leq \text{const} \cdot \{ |\varphi^{m+k} P u|_k^2 + (|u|_0^\infty)^2 \}.$$

Так как $\varphi(x) = 1$ для $x \in \Omega'$ и $\text{supp } \varphi \in \Omega$, то 3.6.11 следует из этого неравенства. ►

Прямым следствием 3.6.11 является

3.6.12. ТЕОРЕМА. Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$ на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть

$$\mathcal{P} = \{u \in C^\infty(\Omega, r) : Pu = 0\}.$$

Тогда последовательность $\{u_\nu\}$ элементов $\mathcal{P}$ сходится в топологии $C^\infty(\Omega, r)$ в том и только в том случае, когда для любого компакта $K \subset \Omega$

$$\int_K |u_\nu - u_\mu|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu, \mu \rightarrow \infty.$$

Более общо, если последовательность $\{u_\nu\} \subset C^\infty(\Omega, r)$ такова, что $\{Pu_\nu\}$ сходится в $C^\infty(\Omega, s)$ и

$$\int_K |u_\nu - u_\mu|^2 dx \rightarrow 0$$

для любого компакта $K \subset \Omega$, то $\{u_\nu\}$ сходится в $C^\infty(\Omega, r)$.

Приведенные в этом параграфе доказательства по существу совпадают с доказательствами Гординга [1] и Фридрихса [1].

§ 3.7. Эллиптические операторы с C^∞ -коэффициентами: теорема о регулярности

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и P — линейный дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$ на Ω . Пусть $u \in H_0(\Omega)$. Определим Pu как линейный функционал на $C_0^\infty(\Omega, s)$, задаваемый равенством

$$(Pu)(v) = \langle u, P^*v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega, s).$$

Если для некоторого p , $1 \leq p \leq \infty$, существует вектор-функция $g \in L^p(\Omega, s)$, такая, что

$$(Pu)(v) = \langle g, v \rangle$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega, s)$, то мы отождествим линейный функционал Pu с g и будем писать $Pu = g$, $Pu \in L^p(\Omega, s)$. Заметим, что это согласуется с обычным обозначением, если $u \in C^\infty(\Omega, r)$. Далее, если P имеет порядок m и $u \in H_m(\Omega)$, то $Pu \in H_0(\Omega)$. Если g

принадлежит некоторому подпространству $L^2(\Omega, s) = H_0(\Omega)$, то мы будем говорить также, что Pu лежит в этом подпространстве.

Пусть P — равномерно строго эллиптический оператор из Φ_r в себя порядка $2m$ и

$$P = \sum_{v=1}^N R_v^* \circ Q_v,$$

где Q_v, R_v — операторы порядка $\leq m$ из Φ_r в себя. Для $u, v \in C_0^\infty(\Omega, r)$ мы положим

$$H(u, v) = \sum_{v=1}^N \langle Q_v u, R_v v \rangle.$$

Очевидно, это определение распространяется на элементы $u, v \in H_m(\Omega)$. Пусть h — действительное число, отличное от нуля, $\Omega' \subseteq \Omega$ и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega'$. Мы пишем

$$x + h = (x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$$

и считаем, что $x + h \in \Omega$, если $x \in \Omega'$. Если $g \in H_m(\Omega)$, мы полагаем

$$g^h(x) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Все эти соглашения считаются выполненными в предложениях 3.7.1–3.7.4.

3.7.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $\eta \in C_0^\infty(\Omega, 1)$, то найдется константа $C > 0$, такая, что

$$|(\eta f)^h - \eta(f^h)|_0 \leq C|f|_0$$

для всех $f \in H_0(\Omega)$. Далее, найдется $c > 0$, такое, что $|u^h|_{m-1} \leq c|u|_m$ для любой $u \in \dot{H}_m(\Omega)$, если h достаточно мало.

◀ Имеем

$$(\eta f)^h(x) - \eta(f^h)(x) = \eta^h(x)f(x+h),$$

откуда следует первое неравенство. Что касается второго, то у нас

$$u^h(x) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + th, x_2, \dots, x_n) dt,$$

если $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$, так что требуемое неравенство выполняется для всех $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$; общее неравенство получается предельным переходом. ▶

3.7.2. ТЕОРЕМА. Пусть $f \in H_m(\Omega)$, $m \geq 1$, имеет компактный носитель в Ω . Предположим, что существует константа $C > 0$, такая, что

$$|H(f, u)| \leq C|u|_{m-1}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega, r)$. Тогда $f \in \dot{H}_{m+1}(\Omega)$.

◀ Пусть $h \neq 0$ достаточно мало. Мы будем использовать обозначение $O(|u|_m)$ для всякой комплексной функции G от u , h , удовлетворяющей неравенству

$$|G| \leq \text{const} \cdot |u|_m,$$

где константа может зависеть от G , но не от u или h . Имеем

$$H \langle f^h, u \rangle = \sum_{v=1}^N \langle Q_v f^h, R_v u \rangle.$$

Так как $D^a(f^h) = (D^a f)^h$, то из предложения 3.7.1 следует, что величина $|Q_v f^h - (Q_v f)^h|$, рассматриваемая как функция от h , ограничена. Следовательно,

$$H \langle f^h, u \rangle = \sum_v \langle (Q_v f)^h, R_v u \rangle + O(|u|_m).$$

С другой стороны,

$$\langle (Q_v f)^h, R_v u \rangle = - \langle Q_v f, (R_v u)^{-h} \rangle = - \langle Q_v f, R_v u^{-h} \rangle + O(|u|_m),$$

так что

$$H \langle f^h, u \rangle = - H \langle f, u^{-h} \rangle + O(|u|_m).$$

Далее, по условию,

$$|H \langle f, u^{-h} \rangle| \leq C |u^{-h}|_{m-1} \leq C' |u|_m$$

(предложение 3.7.1). Поэтому найдется константа $C_1 > 0$, такая, что

$$|H \langle f^h, u \rangle| \leq C_1 |u|_m \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Пусть $\{u_v\}$ — последовательность элементов $C_0^\infty(\Omega, r)$, сходящаяся в $H_m(\Omega)$ к f^h . Тогда

$$|H \langle f^h, f^h \rangle| = \lim |H \langle f^h, u_v \rangle| \leq C_1 \lim |u_v|_m = C_1 |f^h|_m.$$

По неравенству Гординга 3.6.3 найдется константа $C_2 > 0$, такая, что

$$|u_v|_m^2 \leq C_2 \{ |\langle P u_v, u_v \rangle| + |u_v|_0^2 \} = C_2 \{ |H \langle u_v, u_v \rangle| + |u_v|_0^2 \};$$

устремляя $v \rightarrow \infty$, мы получаем

$$|f^h|_m^2 \leq C_2 \{ |H \langle f^h, f^h \rangle| + |f^h|_0^2 \} \leq C_3 \{ |f^h|_m + |f^h|_0^2 \}.$$

Так как $m \geq 1$, то, по предложению 3.7.1, $|f^h|_0$ ограничена при $h \rightarrow 0$. Значит, при $h \rightarrow 0$ мы имеем

$$|f^h|_m^2 \leq C_3 |f^h|_m + C_4,$$

откуда следует, что $|f^h|_m$ ограничена при $h \rightarrow 0$. Таким образом, множество $\{f^h\}$ ограничено в гильбертовом пространстве $H_m(\Omega)$.

где L'' тоже имеет порядок $\leq 2m - 1$. Следовательно,

$$H \langle \eta f, u \rangle - H \langle f, \bar{\eta} u \rangle = \langle f, Lu \rangle,$$

где L имеет порядок $\leq 2m - 1$. Так как $f \in H_m(\Omega)$, то из предложения 3.7.3 вытекает, что

$$|H \langle \eta f, u \rangle - H \langle f, \bar{\eta} u \rangle| \leq \text{const} \cdot |u|_{m-1}.$$

Так как по предположению, $|H \langle f, \bar{\eta} u \rangle| \leq \text{const} \cdot |\bar{\eta} u|_{m-1}$, это дает

$$|H \langle \eta f, u \rangle| \leq \text{const} \cdot |u|_{m-1},$$

откуда, по предложению 3.7.2, $\eta f \in \dot{H}_{m+1}^0(\Omega)$. Так как функция η произвольна, то отсюда следует, что f строго дифференцируема $m+1$ раз.

Общий случай. Предположим теперь, что результат доказан для $\mu = \mu_0 - 1$, $0 < \mu_0 \leq m$, и что

$$|H \langle f, u \rangle| \leq \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0}.$$

По индукции, f строго дифференцируема $m + \mu_0 - 1$ раз. Так как предложение достаточно доказать для любого открытого множества $\Omega' \Subset \Omega$, то мы можем считать, что $f \in H_{m+\mu_0-1}(\Omega)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — набор из n неотрицательных целых чисел, $|\alpha| = 1$. Очевидно,

$$H \langle D^\alpha f, u \rangle + H \langle f, D^\alpha u \rangle = \langle f, Lu \rangle,$$

где L — дифференциальный оператор порядка $\leq 2m$. Снова по теореме 3.7.2 и ввиду того, что $f \in H_{m+\mu_0-1}(\Omega)$, отсюда следует неравенство

$$|H \langle D^\alpha f, u \rangle + H \langle f, D^\alpha u \rangle| \leq \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0+1}.$$

Так как

$$|H \langle f, D^\alpha u \rangle| \leq \text{const} \cdot |D^\alpha u|_{m-\mu_0} \leq \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0+1},$$

то

$$|H \langle D^\alpha f, u \rangle| \leq \text{const} \cdot |u|_{m-\mu_0+1} = \text{const} \cdot |u|_{m-\mu}.$$

По индуктивному предположению отсюда следует, что $D^\alpha f$ строго дифференцируема $m + \mu_0 - 1$ раз, и нам остается применить теорему 3.4.12. ►

3.7.5. Предложение. Если $f \in H_m(\Omega)$ и Pf строго дифференцируема μ раз, $\mu \geq 0$, то f строго дифференцируема $2m + \mu$ раз.

◀ Сначала докажем теорему для $\mu = 0$. Если $Pf \in H_0(\Omega)$, то существует вектор-функция $g \in H_0(\Omega)$, такая, что

$$\langle f, P^* u \rangle = \langle g, u \rangle \quad \text{для всех } u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Так как $f \in H_m(\Omega)$, отсюда следует, что

$$H \langle f, u \rangle = \langle g, u \rangle,$$

и потому $|H(f, u)| \leq \text{const} \cdot |u|_0$. По предложению 3.7.4, f строго дифференцируема $2m$ раз.

Предположим теперь, что мы уже доказали $(2m + \mu - 1)$ -кратную строгую дифференцируемость f . Заменяя Ω его относительно компактным открытым подмножеством, мы можем считать, что $f \in H_{2m+\mu-1}(\Omega)$ и что существует $g \in H_\mu(\Omega)$, такая, что

$$(f, P^\alpha u) = (g, u), \quad u \in C_0^\infty(\Omega, r).$$

Рассмотрим оператор

$$L = P \circ D^\alpha - D^\alpha \circ P,$$

где $|\alpha| \leq \mu$ и D^α — обычный оператор дифференцирования из Φ_r в себя, задаваемый условием

$$(u_1, \dots, u_r) \mapsto (D^\alpha u_1, \dots, D^\alpha u_r).$$

Очевидно, L имеет порядок $\leq 2m + \mu - 1$. Следовательно,

$$P(D^\alpha f) = D^\alpha g + Lf,$$

где $g = Pf \in H_\mu(\Omega)$. Так как $f \in H_{2m+\mu-1}(\Omega)$ по предположению индукции, то отсюда следует, что

$$P(D^\alpha f) \in H_0(\Omega).$$

Ввиду доказанного выше частного случая это означает, что $D^\alpha f$ строго дифференцируема $2m$ раз, а α , $|\alpha| \leq \mu$, произвольно. ►

3.7.6. Предложение. Пусть Δ — оператор Лапласа из Φ_r в Φ_r на $\mathbb{R}^n$ (пример 3.3.15 (с)). Если $f \in H_0(\mathbb{R}^n)$ и $\rho \geq 1$ — целое число, то существует $F \in H_{2\rho}(\mathbb{R}^n)$, такая, что $(I - \Delta)^\rho F = f$; здесь $(I - \Delta)$ — оператор

$$u \mapsto u - \Delta u$$

и

$$(I - \Delta)^\rho = (I - \Delta) \circ \dots \circ (I - \Delta) \quad (\rho \text{ раз}).$$

◄ По теореме Планшереля 3.2.8, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть

$$\psi(\xi) = \hat{f}(\xi) (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{-\rho}.$$

Так как $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то существует $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$, такая, что $\hat{F} = \psi$. Более того,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{2\rho} |\hat{F}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Поэтому, ввиду (3.4.9), $F \in H_{2\rho}(\mathbb{R}^n)$. Непосредственно проверяется, что $(I - \Delta)^\rho F = f$. ►

Теперь рассмотрим произвольный эллиптический оператор P из Φ_r в Φ_s на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.7.7. ТЕОРЕМА О РЕГУЛЯРНОСТИ. Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$ на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что $f \in H_0(\Omega)$ и $Pf \in C^\infty(\Omega, s)$. Тогда $f \in C^\infty(\Omega, r)$.

◀ Рассмотрим оператор

$$L = (-1)^m P^* \circ P, \quad m - \text{порядок } P.$$

Тогда L — эллиптический оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_s$, равномерно строго эллиптический на любом $\Omega' \Subset \Omega$ (следствие 3.6.2). Далее,

$$Lf = (-1)^m P^* g, \quad g = Pf,$$

так что если $Pf \in C^\infty(\Omega, s)$, то $Lf \in C^\infty(\Omega, r)$. Следовательно, мы можем считать, что P — равномерно строго эллиптический оператор из $\mathfrak{D}_r$ в $\mathfrak{D}_r$ порядка $2m$.

Если $f \in H_0(\Omega)$, определим $f_0 \in H_0(\mathbb{R}^n)$, полагая

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x \notin \Omega. \end{cases}$$

По предложению 3.7.6 существует вектор-функция $F_0 \in H_{2m}(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$(I - \Delta)^m F_0 = f_0.$$

Пусть

$$P_0 = (-1)^m P \circ (I - \Delta)^m.$$

Тогда P_0 — тоже равномерно строго эллиптический оператор порядка $4m$. Кроме того, если $F_0|_{\Omega} = F$, то

$$F \in H_{2m}(\Omega), \quad P_0 F = (-1)^m Pf \in C^\infty(\Omega, r).$$

Значит, по предложению 3.7.5, F строго дифференцируема $4m + \mu$ раз для любого $\mu \geq 0$, а тогда, по предложению 3.15.13, $F \in C^\infty(\Omega, r)$. Поэтому

$$f = (-1)^m (I - \Delta)^m F \in C^\infty(\Omega, r). \quad \blacktriangleright$$

Приведенное здесь доказательство теоремы о регулярности по существу совпадает с доказательством Ниренберга [1]. Сейчас известно несколько других доказательств этой теоремы. Самое старое из них, оперирующее фундаментальными решениями, было предложено Л. Шварцем [1]. Сильные теоремы, которые можно получить этим методом, можно найти у Хёрмандера [1]. Первое доказательство, использующее только априорные оценки (типа неравенств Гординга и Фридрихса), принадлежит Фридрихсу [1] (который, однако, доказал несколько более слабый результат). Другие доказательства принадлежат Йону [1] и Лаксу [1]. Доказательство Лакса кратко и элегантно, но в нем используются пространства, сопряженные к $H_m(\Omega)$. Другое весьма общее и элегантное доказательство, использующее так называемые сингу-

лярные интегральные операторы, можно найти у Л. Шварца [2]. Имеется обширная литература, посвященная этой теореме и ее обобщениям, например, в связи с проблемой регулярности на границе или в связи с соответствующими результатами для параболических и других операторов.

§ 3.8. Эллиптические операторы с аналитическими коэффициентами

3.8.1. Предложение. Если K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n: d(x, K) < \delta\},$$

то существует функция $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такая, что

$$0 \leq \varphi_\delta \leq 1, \quad \varphi_\delta(x) = 1 \quad \text{для } x \in K,$$

$$\text{supp } \varphi_\delta \subset K_\delta \quad \text{и} \quad |D^\alpha \varphi_\delta(x)| \leq C_\alpha \delta^{-|\alpha|}$$

для всех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; константы C_α не зависят от K и δ .

◀ Пусть ψ — функция класса C^∞ в $\mathbb{R}^n$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 1, \quad \psi \geq 0 \quad \text{и} \quad \text{supp } \psi \subset \{x: \|x\| < 1\}.$$

Пусть χ_δ — характеристическая функция K_δ , т. е.

$$\chi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K_\delta, \\ 0, & \text{если } x \notin K_\delta. \end{cases}$$

Положим

$$\psi_\delta(x) = \delta^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \chi_\delta(y) dy.$$

Тогда $\psi_\delta(x) = 1$, если $x \in K$, и $\text{supp } \psi_\delta \subset K_{2\delta}$. Кроме того,

$$D^\alpha \psi_\delta(x) = \delta^{-n-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \psi)\left(\frac{x-y}{\delta}\right) \chi_\delta(y) dy,$$

откуда

$$|D^\alpha \psi_\delta(x)| \leq \delta^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha \psi(y)| dy;$$

нам остается взять $\varphi_\delta = \psi_{\delta/2}$. ▶

3.8.2. Замечание. В дальнейшем R и ρ будут обозначать действительные числа, такие, что $0 < \rho \leq \min(1, R)$, и $\Omega_\rho = \{x: \|x\| \leq R\}$.

Для $f \in L^2(\Omega, r)$ положим

$$M_p(f)^2 = \int_{\|x\| < R-\rho} |f(x)|^2 dx.$$

Пусть $\delta > 0$ и $\Omega = \{x: \|x\| < R + \delta\}$.

3.8.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть P — эллиптический оператор на Ω порядка m из $\mathcal{D}_r$ в себя. Тогда найдется константа $C > 0$, такая, что

$$\rho^m M_{\rho+\rho'}(D^\alpha u) \leq C \left\{ \rho^m M_{\rho'}(Pu) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{|\beta|} M_{\rho'}(D^\beta u) \right\} \quad \text{при } |\alpha| = m$$

для всех $u \in C^\infty(\Omega, r)$ и любых положительных $\rho, \rho', \rho + \rho' < R$.

◀ Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $\varphi(x) = 1$ при $\|x\| < R - \rho - \rho'$, $0 \leq \varphi \leq 1$ и $\text{supp } \varphi \subset \{x: \|x\| < R - \rho'\}$; подберем еще φ так, чтобы

$$|D^\alpha \varphi| \leq C_\alpha \rho^{-|\alpha|},$$

где константа C_α зависит только от α и n (предложение 3.8.1). Согласно (3.6.11), найдется константа $A > 0$, такая, что

$$|D^\alpha(\varphi u)|_0 \leq A(|P(\varphi u)|_0 + |\varphi u|_0).$$

Пусть

$$Pu(x) = \sum_{|\lambda| \leq m} a_\lambda(x) D^\lambda u(x),$$

где a_λ принадлежит классу C^∞ в Ω . Мы имеем

$$P(\varphi u) - \varphi(Pu) = \sum_{\beta < \lambda, |\lambda| \leq m} a_\lambda \binom{\lambda}{\beta} (D^{\lambda-\beta} \varphi)(D^\beta u).$$

Очевидно, существуют константы $c_{\lambda, \beta}$, не зависящие от ρ ,

такие, что $|a_\lambda(x) \binom{\lambda}{\beta} D^{\lambda-\beta} \varphi(x)| \leq c_{\lambda, \beta} \rho^{-|\lambda-\beta|}$ при $\|x\| \leq R$.

Следовательно,

$$|D^\alpha(\varphi u)|_0 \leq \text{const} \cdot \left\{ M_{\rho'}(Pu) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{-m+|\beta|} M_{\rho'}(D^\beta u) \right\}. \blacktriangleright$$

3.8.4. ТЕОРЕМА. Пусть P — эллиптический оператор порядка m из $\mathcal{D}_r$ в себя на открытом множестве U в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что P имеет аналитические коэффициенты и что $0 \in U$. Тогда если числа $R > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малы, то существует константа $A \geq 1$, такая, что

$$(3.8.5) \quad \rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|\rho}(D^\alpha u) \leq A^{|\alpha|+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^k \rho^{(\nu-1)m} M(P^\nu u) + M(u) \right\}$$

для $|\alpha| \leq km$, $k = 1, 2, \dots$, для всех ρ , $0 < \rho < \min\{1, R\}$, и всех $u \in C^\infty(\Omega, r)$.

Здесь мы положили

$$P^v = P \circ \dots \circ P \text{ (} v \text{ раз)}$$

и

$$M(f)^2 = M_{-\delta}(f)^2 = \int_{\|x\| \leq R+\delta} |f(x)|^2 dx.$$

◀ Если $(Pu)(x) = \sum_{|\lambda| \leq m} a_\lambda(x) D^\lambda u(x),$

a_λ все $\mathbb{R}$ -аналитичны на U , и если $R_1 > 0$ достаточно мало, то a_λ являются сужениями на $\|x\| \leq R_1$ голоморфных отображений множества $\{z \in \mathbb{C}^n: \|z\| \leq R_1\}$ в пространство комплексных $(r \times r)$ -матриц; эти отображения мы будем обозначать тоже через a_λ . Пусть

$$B = \sum_{|\lambda| \leq m} \sup_{\|z\| \leq R_1} |a_\lambda(z)|.$$

По неравенствам Коши 1.1.4,

$$(3.8.6) \quad \sum_{|\lambda| \leq m} |D^\alpha a_\lambda(x)| \leq B \alpha! \rho^{-|\alpha|}, \quad \text{если } \|x\| \leq R_1 - \rho.$$

Пусть $0 < R < R_1$, $\delta = R_1 - R$ и

$$S_k(u) = S_k(u, \rho) = \sum_{v=1}^k \rho^{(v-1)m} M(P^v u) + M(u).$$

Тогда

$$(3.8.7) \quad \rho^m S_k(Pu) \leq S_{k+1}(u).$$

Неравенство (3.8.5) мы докажем индукцией по k . При $k=1$, т. е. когда $|\alpha| \leq m$,

$$M_0(D^\alpha u) \leq C_2 \{M(Pu) + M(u)\}$$

ввиду (3.6.11), и неравенства (3.8.5) выполняются (при $\rho < 1$), как только $A > C_2$. Предположим теперь, что $km < |\alpha| \leq (k+1)m$ и что (3.8.5) доказано для всех β с $|\beta| < |\alpha|$. Пусть $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, где $|\alpha_0| = m$. Применим предложение 3.8.3 с $\rho' = (|\alpha| - 1)\rho$, α_0 вместо α и $D^{\alpha'} u$ вместо u . Это даст нам неравенство

$$(3.8.8) \quad \rho^{|\alpha|} M_{|\alpha| \rho}(D^\alpha u) \leq C \{ \rho^{|\alpha|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(PD^{\alpha'} u) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{|\beta|+|\alpha'|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(D^{\beta+\alpha'} u) \}.$$

Далее, $D^{\alpha'} Pu - PD^{\alpha'} u = \sum_{|\lambda| \leq m} \sum_{\gamma < \alpha'} \binom{\alpha'}{\gamma} (D^{\alpha'-\gamma} a_\lambda)(D^{\gamma+\lambda} u).$

Теперь, если $\|x\| \leq R - m k \rho$, то

$$|D^{\alpha'-\gamma} a_\lambda(x)| \leq B (\alpha' - \gamma)! (m k \rho)^{-|\alpha'-\gamma|} \quad (\text{см. (3.8.6)})$$

и

$$\left(\frac{\alpha'}{\gamma}\right) \frac{(\alpha' - \gamma)!}{(mk)^{|\alpha' - \gamma|}} \leq \left(\frac{|\alpha'|}{mk}\right)^{|\alpha' - \gamma|} \leq 1,$$

так как $|\alpha'| = |\alpha| - m \leq km$. Значит, при $\|x\| \leq R - mkr$, а следовательно, и при $\|x\| \leq R - (|\alpha| - 1)r$ мы имеем

$$(3.8.8') \quad |D^{\alpha'} Pu(x) - PD^{\alpha'} u(x)| \leq B \sum_{|\lambda| \leq m} \sum_{\gamma < \alpha'} \rho^{-|\alpha' - \gamma|} |D^{\gamma + \lambda} u(x)|.$$

Вместе с (3.8.8) это дает следующее утверждение:

При $km < |\alpha| \leq (k+1)m$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|, \rho}(D^{\alpha} u) \leq C \left\{ \rho^{|\alpha|} M_{|\alpha'|, \rho}(D^{\alpha'} Pu) + \sum_{|\beta| < m} \rho^{|\beta| + |\alpha'|} M_{|\beta + \alpha'|, \rho}(D^{\beta + \alpha'} u) + \right. \\ \left. + B \sum_{|\lambda| \leq m} \sum_{\gamma < \alpha'} \rho^{m + |\gamma|} M_{(m + |\gamma|), \rho}(D^{\gamma + \lambda} u) \right\}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем применить предположение индукции к каждому из трех членов в фигурных скобках. Первый член не превосходит

$$\rho^m A^{|\alpha'| + 1} S_k(Pu) \leq A^{|\alpha'| + 1} S_{k+1}(u) \quad (\text{см. (3.8.7)}).$$

Второй не больше, чем

$$\sum_{|\beta| < m} A^{|\beta + \alpha'| + 1} S_{k+1}(u),$$

а третий не превосходит

$$B' \sum_{\gamma < \alpha'} A^{m + |\gamma| + 1} S_{k+1}(u).$$

Отсюда

$$\rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|, \rho}(D^{\alpha} u) \leq A^{|\alpha| + 1} S_{k+1}(u) \left\{ CA^{-m} + C \sum_{|\beta| < m} \frac{1}{A} + CB' \sum_{\gamma < \alpha'} A^{-|\alpha' - \gamma|} \right\}$$

(так как $|\alpha| = m + |\alpha'|$). Далее,

$$\sum_{\gamma < \alpha'} A^{-|\alpha' - \gamma|} \leq A^{-1} \sum_{|\beta| \geq 0} A^{-|\beta|} \rightarrow 0 \quad \text{при } A \rightarrow \infty.$$

Поэтому мы можем подобрать $A \geq C_2$ настолько большим, что

$$CA^{-m} + C \sum_{|\beta| < m} \frac{1}{A} + CB' \sum_{\gamma < \alpha'} A^{-|\alpha' - \gamma|} < 1,$$

а это нам даст (3.8.5). ►

3.8.9. ТЕОРЕМА. (Котаке, М. Нарасимхан [1].) Пусть P — эллиптический оператор порядка m из $\mathcal{D}$, в себя на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ с аналитическими коэффициентами и $u \in C^\infty(U, r)$. Предположим, что для всякого множества $U' \Subset U$ найдется $M > 0$, такое, что

$$\|P^k u\|_0^{\alpha'} \leq M^{k+1} (km)!, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда вектор-функция u аналитична в Ω_r .

◀ Мы можем считать, что $0 \in U$, и нам достаточно доказать, что u аналитична в окрестности 0. Подберем R, δ так, чтобы выполнялось (3.8.5). Тогда

$$M(P^v u) \leq M^{v+1} (vm)!, \quad v = 1, 2, \dots,$$

так что для любого $\rho > 0$

$$S_k(u) \leq \sum_{v=1}^k M^{v+1} \rho^{(v-1)m} (vm)! + M.$$

Если мы возьмем $\rho = c/km$, где c мало, то получим, что

$$(vm)! \rho^{(v-1)m} \leq (km)^m$$

при $v \leq k$, и потому найдется константа $B_1 > 0$, такая, что

$$S_k(u) \leq B_1^{k+1} \quad \text{при } k \geq 1.$$

Следовательно, ввиду (3.8.5),

$$M_c(D^\alpha u) \leq B_2^{k+1} k^k \quad \text{при } |\alpha| \leq k.$$

Если K — компактное подмножество шара $\{x: \|x\| < R - c\}$, то из предложения 3.5.12 мы получаем неравенство

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq B_3^{k+n+1} (k+n)^{k+n} \quad \text{при } |\alpha| \leq k.$$

По формуле Стирлинга отсюда следует, что

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq B_4^{k+1} k! \quad \text{при } |\alpha| \leq k,$$

и вектор-функция u аналитична ввиду 1.1.15, 16. ►

3.8.10. ТЕОРЕМА. Пусть P — линейный дифференциальный оператор порядка m из $\mathfrak{D}$, в $\mathfrak{D}$, с коэффициентами, голоморфными в полукруге

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n: |z_j| < r_j \leq 1\}.$$

Пусть u — ограниченное голоморфное отображение $D \rightarrow \mathbb{C}^r$. Тогда найдется константа $A > 0$ (зависящая от D), такая, что

$$|P^v u(z)| \leq \frac{(3A)^{v+1} (mv)!}{\prod_j (r_j - |z_j|)^{mv}} \quad \text{для всех } z \in D.$$

Докажем сначала следующее утверждение.

3.8.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если функция h голоморфна в круге $\{w \in \mathbb{C}; |w| < R\}$ и

$$|h(w)| < M(R - |w|)^{-\mu}, \quad |w| < R,$$

то

$$|h'(w)| < 3(\mu + 1) M(R - |w|)^{-(\mu+1)}, \quad |w| < R,$$

где $h'(w)$ — производная h .

◀ Пусть $|\omega_0| < R$ и $0 < \varepsilon < R - |\omega_0|$. По неравенству Коши,

$$|h'(\omega_0)| \leq \varepsilon^{-1} \sup_{|\omega - \omega_0| = \varepsilon} |h(\omega)| \leq M \varepsilon^{-1} (R - |\omega_0| - \varepsilon)^{-\mu}.$$

Если мы возьмем

$$\varepsilon = \frac{R - |\omega_0|}{\mu + 1},$$

то получим, что

$$|h'(\omega_0)| \leq M(\mu + 1)(R - |\omega_0|)^{-(\mu+1)} \left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^\mu.$$

Так как $(1 + 1/\mu)^\mu < e < 3$, то отсюда следует наше неравенство. ▶

◀ Доказательство теоремы 3.8.10. Предположим по индукции, что

$$|P^{v-1}u(z)| \leq \frac{(3A)^v (m(v-1))!}{\prod (r_j - |z_j|)^{m(v-1)}}, \quad z \in D,$$

где

$$A \geq \sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(z)|,$$

$$Pu(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z) D^\alpha u(z).$$

Тогда, по предложению 3.8.11, мы имеем

$$|D^\alpha P^{v-1}u(z)| \leq \frac{3(3A)^v (mv)!}{\prod (r_j - |z_j|)^{m(v-1)+|\alpha|}},$$

и наш результат следует из того, что $\sum_{|\alpha| \leq m} |a_\alpha(z)| \leq A$. ▶

3.8.12. ТЕОРЕМА ПЕТРОВСКОГО. Если P — эллиптический оператор порядка m с аналитическими коэффициентами из $\mathfrak{D}$, в $\mathfrak{D}$, на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и если $u \in C^\infty(\Omega, r)$ такова, что Pu — аналитическая вектор-функция, то сама u тоже аналитична.

◀ Заменяя, если надо, P на $P^* \circ P$, мы можем считать, что P — оператор из $\mathfrak{D}$, в себя. Пусть $f = Pu$ — аналитическая вектор-функция. Из теоремы 3.8.10 следует существование константы $M > 0$, такой, что

$$|P^v f(x)| \leq M^{v+1} (vm)!, \quad \text{если } x \in \Omega' \Subset \Omega,$$

и наше утверждение вытекает из теоремы 3.8.9. ▶

3.8.13. ЗАМЕЧАНИЯ. Укажем вкратце, как упростить доказательство теоремы 3.8.9 в частном случае, необходимом для доказательства теоремы 3.8.12. Воспользуемся опять оценками (3.8.8) и (3.8.8').

Применяя неравенства Коши к голоморфному продолжению $\tilde{f} = Pu$ в комплексную область, мы получим, что

$$|D^{\alpha} Pu| \leq \text{const} \cdot \alpha! (mk\rho)^{-|\alpha|} \quad \text{при } \|x\| \leq R - mk\rho,$$

откуда

$$\rho^{|\alpha'|} M_{(|\alpha|-1)\rho}(D^{\alpha'} Pu) \leq \text{const} \quad \text{для } \rho > 0 \text{ и всех } \alpha.$$

Это приводит к оценке

$$\rho^{|\alpha|} M_{|\alpha|\rho}(D^{\alpha} u) \leq A^{|\alpha|+1}, \quad A = A(u),$$

и доказательство завершается, как выше.

Основная теорема 3.8.12 является частным случаем результатов И. Г. Петровского [1], который рассматривал также нелинейные системы дифференциальных уравнений. Однако его доказательство очень трудно. Главная идея приведенного здесь доказательства содержится в работе Морри и Ниренберга [1]. Изложение основано на работе Хёрмандера [1].

§ 3.9. Теорема конечности

Пусть V — ориентированное C^{∞} -многообразие, ξ и η — векторные расслоения класса C^{∞} над V , $\xi = (E, p, V)$, $\eta = (F, q, V)$. Пусть P — линейный дифференциальный оператор из ξ в η порядка m .

Мы будем рассматривать не только непрерывные сечения расслоений ξ , η , ... (напомним, что сечением расслоения ξ мы условились называть отображение $s: V \rightarrow E$, такое, что $p \circ s$ — тождественное отображение). Будем называть сечение s *измеримым*, если у каждой точки $a \in V$ есть окрестность U и изоморфизм $\tau: \xi|_U \rightarrow U \times C^r$, такие, что сечение $\tau \circ s$ тривиального расслоения $U \times C^r$, рассматриваемое как набор из r функций, измеримо. Мы скажем, что s локально принадлежит H_m , если указанную окрестность U можно взять диффеоморфной некоторому открытому множеству Ω в $\mathbb{R}^n$ и сечение $\tau \circ s$, рассматриваемое как набор из r функций на Ω , принадлежит $H_m(\Omega)$. Аналогично мы будем понимать локальную интегрируемость сечений и т. д.

Если P — дифференциальный оператор из ξ в η и s — локально интегрируемое сечение ξ , то мы определим Ps как линейный функционал λ на $C_0^{\infty}(V, \eta)$ равенством¹⁾

$$\lambda(t') = \langle s, P't' \rangle_{\xi},$$

¹⁾ Заметим, что если s — локально квадратично интегрируемое сечение ξ , то s' — локально квадратично интегрируемое сечение ξ' , а если одно из них равно нулю вне компактного подмножества V , то мы можем определить $\langle s', s \rangle_{\xi} =$

$= \int_V B(s', s)$, как в § 3.3.

где P' — транспонированный к P оператор. Будем говорить, что Ps локально интегрируемо (класса $C^\infty, \dots$), если найдется локально интегрируемое (класса $C^\infty, \dots$) сечение t расслоения η , такое, что

$$\lambda(t') = \langle s, P't' \rangle_{\xi} = \langle t, t' \rangle_{\eta}, \quad \text{для всех } t' \in C_0^\infty(V, \eta).$$

Элемент t , если он существует, определен однозначно (с точностью до значений на множествах меры нуль), и тогда мы можем отождествить Ps и t .

Непосредственно из теорем 3.7.7 и 3.8.12 получаются следующие два утверждения.

3.9.1. ТЕОРЕМА О РЕГУЛЯРНОСТИ. Пусть ξ, η — произвольные C^∞ -расслоения на ориентируемом C^∞ -многообразии V и P — эллиптический оператор из ξ в η . Если s — локально квадратично интегрируемое сечение ξ , такое, что Ps есть C^∞ -сечение η , то s (почти всюду) совпадает с C^∞ -сечением ξ .

3.9.2. ТЕОРЕМА ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ. Пусть V — произвольное $\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие, ξ, η — аналитические векторные расслоения над V . Пусть P — эллиптический оператор из ξ в η с аналитическими коэффициентами. Тогда если s — локально квадратично интегрируемое сечение ξ , для которого Ps — аналитическое сечение η , то s равно (почти всюду) аналитическому сечению ξ .

Если s — сечение расслоения ξ , то мы определим носитель $\text{supp } s$ как замыкание в V множества $\{x \in V: s(x) \neq 0_x\}$, где 0_x — нулевой элемент векторного пространства E_x .

Пусть K — компактное подмножество V . Обозначим через $H_m(K, \xi)$ множество сечений s расслоения ξ , локально принадлежащих H_m , носители которых $\text{supp } s \subset K$. Пусть $U'_1, \dots, U'_n$ — конечное число координатных окрестностей, покрывающих K , $K \subset \bigcup U'_j$, на каждой из которых расслоение $\xi|_{U'_j}$ тривиально. Пусть $U_j \subset U'_j$ и $K \subset \bigcup U_j$. Пусть $\tau_j: \xi|_{U'_j} \rightarrow U'_j \times \mathbb{C}^r$ — изоморфизм класса C^∞ и $\varphi_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\sum \varphi_j(x) = 1$ для всех x из некоторой окрестности K . Тогда если $s \in H_m(K, \xi)$, то $\tau_j(\varphi_j s)$ можно рассматривать как набор из r функций на U_j . Предположим, что U'_j изоморфна открытому множеству Ω'_j в $\mathbb{R}^n$. Если $\psi_j: U'_j \rightarrow \Omega'_j$ — изоморфизм, мы положим $\psi_j(U_j) = \Omega_j$. Тогда $\tau_j(\varphi_j s)$ можно рассматривать как наборы $s_j = \tau_j(\varphi_j s) \circ \psi_j^{-1}$ из r функций на Ω_j , причем

$$s_j \in H_m(\Omega_j).$$

Положим $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ и

$$\|s\|_{m, \mathcal{U}}^2 = \sum_j \|s_j\|_m^2.$$

Относительно этой нормы $H_m(K, \xi)$ является гильбертовым пространством. Пусть

$$\mathcal{H} = \bigoplus H_m(\Omega_j).$$

Отображение

$$\eta: H_m(K, \xi) \rightarrow \mathcal{H},$$

задаваемое условием $\eta(s) = \bigoplus s_j$, будет изометрией $H_m(K, \xi)$ на замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$. Кроме того,

$$\tau_j(s|U_j) \circ \psi_j^{-1} = s'_j \in H_m(\Omega_j).$$

Если мы положим

$$\|s\|_{m, \Pi}^2 = \sum_j |s'_j|_{m, \Omega_j}^2,$$

то $H_m(K, \xi)$ тоже будет гильбертовым пространством относительно нормы $\|s\|_{m, \Pi}$. Легко видеть, что $|s|_{m, \Pi}$ и $\|s\|_{m, \Pi}$ — эквивалентные нормы на $H_m(K, \xi)$ и что различные покрытия Π и различные разбиения единицы $\{\varphi_j\}$ с перечисленными выше свойствами порождают эквивалентные нормы $|\cdot|_{m, \Pi}$.

Как и в предложении 3.4.3, определено *вложение*

$$i_m: H_m(K, \xi) \rightarrow H_{m-1}(K, \xi), \quad m \geq 1.$$

Далее, из леммы 3.5.4 вытекает

3.9.3. Лемма Реллиха. *Вложение*

$$i_m: H_m(K, \xi) \rightarrow H_{m-1}(K, \xi)$$

вполне непрерывно.

3.9.4. Предложение. *Для любого непрерывного линейного функционала l на $H_0(K, \xi)$ найдется единственное сечение $s' \in H_0(K, \xi')$, такое, что*

$$l(s) = \langle s', s \rangle_\xi \quad \text{для всех } s \in H_0(K, \xi).$$

◀ Ясно, что если сечение s' существует, то оно единственно. Поэтому достаточно доказать следующее:

Пусть U — координатная окрестность, такая, что расслоение $\xi|U$ тривиально, и пусть L — компактное подмножество U . Тогда найдется сечение $s' \in H_0(L, \xi')$, такое, что

$$l(s) = \langle s', s \rangle_\xi \quad \text{для всех } s \in H_0(L, \xi).$$

Пусть $h: \xi|U \rightarrow U \times \mathbb{C}'$ — изоморфизм и $h^*: \xi^*|U \rightarrow U \times \mathbb{C}'$ — соответствующий изоморфизм сопряженных расслоений. Пусть $\psi: U \rightarrow \Omega$ — изоморфизм U на открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и

$$(s_1, \dots, s_r) = h(s) \circ \psi^{-1}, \quad s \in H_0(L, \xi).$$

Тогда все $s_j \in L^2(\Omega)$ и равны нулю вне $\psi(L)$. По известной теореме Рисса существуют элементы $t_1, \dots, t_r \in L^2(\Omega)$, равные нулю вне $\psi(L)$ и такие, что

$$I(s) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^r s_j t_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad s \in H_0(L, \xi).$$

Если мы положим

$$s' = (h^*)^{-1} (t_1 \circ \psi, \dots, t_r \circ \psi) \otimes \psi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n),$$

то получим, что $s' \in H_0(L, \xi')$ и

$$I(s) = \langle s', s \rangle_{\xi} \quad \text{для всех } s \in H_0(L, \xi). \blacktriangleright$$

3.9.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Если P — линейный дифференциальный оператор порядка m из ξ в η , то P определяет непрерывное линейное отображение

$$P_K: H_m(K, \xi) \rightarrow H_0(K, \eta);$$

здесь K — компактное подмножество V .

3.9.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть P — эллиптический дифференциальный оператор из ξ в η и

$$\mathcal{P} = \{s \in C^\infty(V, \xi): Ps = 0\}.$$

Последовательность $\{s_v\}$ элементов $\mathcal{P}$ сходится вместе со всеми частными производными равномерно на компактных подмножествах V (см. замечания после 3.3.10) тогда и только тогда, когда $\{s_v\}$ сходится в $H_0(K, \xi)$ для любого компактного множества $K \subset V$, т. е. когда последовательность $\{s'_v\}$, определяемая условием

$$s'_v(x) = \begin{cases} s_v(x), & \text{если } x \in K, \\ 0, & \text{если } x \notin K, \end{cases}$$

сходится в $H_0(K, \xi)$.

Это следует из теоремы 3.6.12.

3.9.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства, A_1 и A_2 — непрерывные линейные отображения $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, причем

(а) A_1 инъективно и $A_1(\mathcal{H}_1)$ замкнуто в $\mathcal{H}_2$,

(б) A_2 вполне непрерывно.

Тогда ядро $\ker(A_1 + A_2)$ имеет конечную размерность и подпространство $(A_1 + A_2)(\mathcal{H}_1)$ замкнуто в $\mathcal{H}_2$.

◀ По теореме о замкнутом графике, отображение

$$A_1^{-1} = B: A_1(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{H}_1$$

непрерывно. Предположим, что $\ker(A_1 + A_2)$ бесконечномерно. Тогда существует бесконечная ортонормированная последовательность $\{x_v\}$, $x_v \in \mathcal{H}_1$, такая, что

$$A_1(x_v) = -A_2(x_v).$$

Так как $\|x_v\| = 1$ и A_2 вполне непрерывно, мы можем считать, переходя к подпоследовательности, что элементы $A_2(x_v)$ стремятся к некоторому y_0 . Поэтому

$$A_1(x_v) \rightarrow -y_0$$

и, значит,

$$x_v = B(A_1(x_v)) \rightarrow -B(y_0) \quad \text{при } v \rightarrow \infty,$$

что противоречит нашему предположению об ортонормированности $\{x_v\}$. Следовательно, $\ker(A_1 + A_2)$ имеет конечную размерность.

Пусть $N = \ker(A_1 + A_2)$ и M — ортогональное дополнение N в $\mathcal{H}_1$. Пусть T — сужение $A_1 + A_2$ на M . Тогда T — непрерывное инъективное отображение и $T(M) = (A_1 + A_2)(\mathcal{H}_1)$. Для доказательства замкнутости этого пространства достаточно доказать, что отображение $T^{-1}|_{T(M)}$ непрерывно. Пусть

$$\begin{aligned} y_v &\in T(M), \quad y_v \rightarrow 0, \\ x_v &\in M, \quad T(x_v) = y_v. \end{aligned}$$

Если $\{x_v\}$ не сходится к 0, то можно считать, что $\|x_v\| \geq \rho > 0$. Тогда если $x'_v = x_v / \|x_v\|$, то

$$T(x'_v) = A_1(x'_v) + A_2(x'_v) \rightarrow 0,$$

и потому, опять ввиду вполне непрерывности A_2 , мы можем считать, что $A_2(x'_v)$, а значит, и $A_1(x'_v)$, образуют сходящиеся последовательности. Так как B непрерывно, то $x'_v = B A_1(x'_v)$ стремится, скажем, к x'_0 . Тогда, очевидно, $\|x'_0\| = 1$. С другой стороны,

$$T(x'_0) = \lim T(x'_v) = 0$$

и, значит, $x'_0 \in N$. Так как $x'_v \in M$, то и $x'_0 \in M$. Отсюда следует, что $x'_0 = 0$, и мы получили противоречие. ►

3.9.8. ТЕОРЕМА КОНЕЧНОСТИ. Пусть V — ориентированное C^∞ -многообразие и ξ, η — два C^∞ -векторных расслоения на V . Пусть P — эллиптический оператор из ξ в η порядка $m \geq 1$ и K — компактное подмножество V . Тогда отображение

$$P_K: H_m(K, \xi) \rightarrow H_0(K, \eta)$$

имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

◀ Пусть

$$i_m: H_m(K, \xi) \rightarrow H_{m-1}(K, \xi)$$

— естественное вложение. Пусть

$$\mathcal{H}_1 = H_m(K, \xi), \quad \mathcal{H}_2 = H_0(K, \eta) \oplus H_{m-1}(K, \xi).$$

Определим отображения $A_1, A_2: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ следующим образом:

$$A_1(s) = P_K s \oplus i_m(s), \quad A_2(s) = 0 \oplus -i_m(s).$$

Очевидно, A_1 — вложение и отображение A_2 вполне непрерывно (лемма 3.9.3). Кроме того, если U — координатная окрестность на V и $\varphi \in C_0^\infty(U)$, то из (3.6.11) следует, что

$$|\varphi s|_{m, u} \leq \text{const} \cdot \{ |P(\varphi s)|_{0, u} + |\varphi s|_{0, u} \} \leq \text{const} \cdot \{ |\varphi P s|_{0, u} + |s|_{m-1, u} \}$$

относительно любого фиксированного покрытия $\mathcal{U}$ компакта K . Отсюда

$$|s|_{m, u} \leq \text{const} \cdot \{ |P s|_{0, u} + |s|_{m-1, u} \}$$

и, значит,

$$\text{const} \cdot \|A_1(s)\|_{\mathcal{H}_2} \geq \|s\|_{\mathcal{H}_1}, \quad s \in \mathcal{H}_1,$$

так что $A_1(\mathcal{H}_1)$ — замкнутое подпространство $\mathcal{H}_2$. По предложению 3.9.7, ядро

$$\ker(A_1 + A_2) = \ker P_K$$

имеет конечную размерность и $(A_1 + A_2)(\mathcal{H}_1) = P_K(H_m(K, \xi)) \oplus \{0\}$ замкнуто. ▶

3.9.9. Предложение. Пусть V — ориентированное C^∞ -многообразие ξ, η — векторные расслоения и P — эллиптический оператор порядка m из ξ в η . Пусть K — компактное подмножество V . Тогда если сечение $t_0 \in H_0(K, \eta)$ таково, что $\langle t', t_0 \rangle_\eta = 0$ для всех $t' \in \mathring{H}_0(K, \eta')$, для которых $P't' = 0$ на K , то существует сечение $s_0 \in H_m(K, \xi)$, такое, что $Ps_0 = t_0$.

◀ Пусть

$$N = \{t \in H_0(K, \eta): \langle t', t \rangle_\eta = 0 \text{ для всех } t' \in H_0(K, \eta'), \text{ таких, что } P't' = 0 \text{ на } \hat{K}\}.$$

Уравнение $P't' = 0$ на $\hat{K}$ означает, что $\langle Ps, t' \rangle_{\eta'} = 0$ для всех $s \in C_0^\infty(\hat{K}, \xi)$. Пусть l — непрерывный линейный функционал на $H_0(K, \eta)$, равный нулю на $P_K(H_m(K, \xi))$. Так как подпространство $P_K(H_m(K, \xi))$ замкнуто, нам надо показать, что $l(t_0) = 0$. По предложению 3.9.4, найдется сечение $t'_0 \in H_0(K, \eta')$, такое, что

$$l(t) = \langle t'_0, t \rangle_\eta$$

для всех $t \in H_0(K, \eta)$. Так как l равен нулю на $P_K(H_m(K, \xi))$, то

$$l(Ps) = \langle t'_0, Ps \rangle_\eta = 0$$

для всех $s \in C_0^\infty(\bar{K}, \xi)$, и потому $P't'_0 = 0$ на $\bar{K}$. А по определению N

$$\langle t'_0, t \rangle_\eta = l(t) = 0 \quad \text{для } t \in N. \blacktriangleright$$

3.9.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если, кроме того, V — компактное многообразие и $K = V$, то

$$P_V(H_m(V, \xi)) = \{t \in H_0(V, \eta) : \langle t', t \rangle_\eta = 0$$

$$\text{для всех } t' \in H_0(V, \eta'), \text{ таких, что } P't' = 0\}.$$

◀ Пространство справа обозначим через N ; из теоремы 3.9.9 следует, что

$$P_V(H_m(V, \xi)) \supset N.$$

С другой стороны, $\langle Ps, t' \rangle_{\eta'} = 0$ всякий раз, когда $P't' = 0$, и, значит, $N \supset P_V(H_m(V, \xi))$. ▶

3.9.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть V — компактное ориентированное C^∞ -многообразие, ξ, η — два C^∞ -векторных расслоения над V , причем $\text{rank } \xi = \text{rank } \eta$. Пусть P — эллиптический оператор из ξ в η . Тогда факторпространство $C^\infty(V, \eta)/P(C^\infty(V, \xi))$ имеет конечную размерность.

◀ Рассмотрим оператор

$$P_V: H_m(V, \xi) \rightarrow H_0(V, \eta);$$

пусть M — его образ. По предложению 3.9.10,

$$M = \{t \in H_0(V, \eta) : \langle t', t \rangle_\eta = 0$$

$$\text{для всех } t' \in H_0(V, \eta'), \text{ таких, что } P't' = 0\}.$$

Поэтому, если

$$P'_V: H_m(V, \eta') \rightarrow H_0(V, \xi')$$

— оператор, соответствующий формально транспонированному к P оператору P' из η' в ξ' , то

$$\text{coker } P_V \simeq \ker P'_V.$$

Так как $\text{rank } \xi = \text{rank } \eta$, то P' — тоже эллиптический оператор (замечание 3.3.22), так что, по предложению 3.9.8, $\text{coker } P_V$ имеет конечную размерность. Далее,

$$M \cap C^\infty(V, \eta) = P(H_m(V, \xi)) \cap C^\infty(V, \eta) = P(C^\infty(V, \xi))$$

по теореме 3.9.1. Так как M имеет конечную коразмерность в $H_0(V, \eta)$, то отсюда следует, что $P(C^\infty(V, \xi))$ имеет конечную коразмерность в $C^\infty(V, \eta)$. ▶

§ 3.10. Теорема о приближении и ее применение к открытым римановым поверхностям

3.10.1. ОБОЗНАЧЕНИЕ. Пусть V — произвольное C^∞ -многообразие со счетной базой и S — подмножество V . Обозначим через $\mathcal{F}(S)$ объединение S и всех относительно компактных связных компонент множества $V \setminus S$.

Нам понадобятся некоторые свойства множеств $\mathcal{F}(S)$.

3.10.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $S_1 \subset S_2$, то

$$\mathcal{F}(S_1) \subset \mathcal{F}(S_2);$$

кроме того,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(S)) = \mathcal{F}(S).$$

◀ Если C — относительно компактная связная компонента $V \setminus S_1$, то множество $C \setminus S_2$ является объединением связных компонент $V \setminus S_2$. В самом деле, если C' — связная компонента $V \setminus S_2$, не содержащаяся в C , и $C \cap C' \neq \emptyset$, то $C \cup C'$ — связное подмножество $V \setminus S_1$, содержащее C и не совпадающее с ним, а это невозможно, так как C — компонента. Значит, $C \setminus S_2$ есть объединение компонент $V \setminus S_2$; так как C — относительно компактное множество, то отсюда следует, что $C \subset \mathcal{F}(S_2)$ ▶

3.10.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если множество S замкнуто, то $\mathcal{F}(S)$ тоже замкнуто. Если K — компакт, то $\mathcal{F}(K)$ — тоже компакт.

◀ Если S замкнуто, то любая компонента множества $V \setminus S$ открыта. Поэтому $V \setminus \mathcal{F}(S)$, будучи объединением компонент $V \setminus S$, не являющихся относительно компактными, есть открытое множество.

Пусть U — относительно компактное открытое множество, содержащее K , и $U_1, \dots, U_n$ — связные открытые множества, покрывающие ∂U и такие, что $U_i \cap K = \emptyset$. Очевидно, любая связная компонента $V \setminus K$, не принадлежащая U , должна содержать по крайней мере одну из U_i . Поэтому имеется не более конечного числа относительно компактных компонент $V \setminus K$, не содержащихся в U , а отсюда следует, что $\mathcal{F}(K)$ — относительно компактное множество. ▶

В дальнейшем нам понадобится

3.10.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство и K_0 — связная компактная компонента X . Тогда K_0 имеет фундаментальную систему окрестностей, одновременно открытых и замкнутых в X .

◀ Заменяя X некоторой компактной окрестностью K_2 , если это необходимо, мы можем считать, что X — компакт.

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство окрестностей $N \supset K_0$, одновременно открытых и замкнутых ($\mathcal{F} \neq \emptyset$, так как $X \in \mathcal{F}$). Пусть

$$K = \bigcap_{N \in \mathcal{F}} N.$$

Очевидно, K — замкнутое, а значит, и компактное множество. Так как $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, то K обладает фундаментальной системой окрестностей, состоящей из элементов $\mathcal{F}$, и нам достаточно показать, что $K = K_0$. Так как $K_0 \subset K$ и K_0 — связная компонента X , то достаточно показать, что множество K связно.

Предположим, что K несвязно. Тогда

$$K = A_0 \cup A_1,$$

где A_0, A_1 — замкнутые подмножества K (и значит, компакты), $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, но ни A_0 , ни A_1 не пусто. Так как компакты A_0 и A_1 не пересекаются, то существуют открытые множества U_0, U_1 , такие, что $A_j \subset U_j$, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Пусть $U = U_0 \cup U_1$. Так как

$$\bigcap_{N \in \mathcal{F}} (N \cap (X \setminus U)) = \emptyset$$

и так как $X \setminus U$ — компакт, а семейство $\mathcal{F}$ замкнуто относительно конечных пересечений, то отсюда следует, что существует

$$N \in \mathcal{F}, \quad N \cap (X \setminus U) = \emptyset,$$

т. е. $N \subset U$. Очевидно, K_0 содержится либо в U_0 , либо в U_1 , скажем $K_0 \subset U_0$. Но тогда множество

$$N \cap U_0 = N \cap (X \setminus U_1)$$

одновременно открыто и замкнуто, откуда

$$K \subset N \cap U_0 \subset U_0,$$

вопреки тому, что

$$K \cap U_1 \supset A_1 \neq \emptyset. \blacktriangleright$$

3.10.5. Предложение. Если S — открытое подмножество V , то $\mathcal{F}(S)$ тоже открыто.

◀ Пусть K_0 — относительно компактная компонента $V \setminus S$. Тогда K_0 — компакт. Пусть N — окрестность K_0 , компактная и открытая в $V \setminus S$. Тогда множество $(V \setminus S) \setminus N$ замкнуто в $V \setminus S$, а значит, и в V , так что $S \cup N$ открыто в V . Очевидно, $N \subset \mathcal{F}(S)$, а отсюда следует, что $\mathcal{F}(S)$ открыто. ▶

3.10.6. Предложение. Пусть K — компакт и $K = \mathcal{F}(K)$. Тогда K обладает фундаментальной системой открытых (и компактных) окрестностей S , таких, что $S = \mathcal{F}(S)$.

◀ Мы можем считать, что многообразие V связно. Легко показать, что K обладает фундаментальной системой открытых окрестностей U , таких, что $V \setminus U$ имеет не более конечного числа связных компонент. Пусть $U' = \mathcal{F}(U)$ и C_0 — компактная компонента $V \setminus U$.

Тогда $C_0 \in V \setminus K$ и, таким образом, $C_0 \subset U_0$, где U_0 — (открытая) связная компонента $V \setminus K$. Так как $K = \mathcal{F}(K)$, то U_0 не является относительно компактной, и потому $\partial U' \cap U_0 \neq \emptyset$. Пусть γ_0 — кривая, соединяющая точку из C_0 с точкой из $\partial U'$ и целиком принадлежащая U_0 . Построим такую кривую γ_i для каждой компоненты C_i множества $V \setminus U$. Тогда очевидно, что множество

$$S = U \setminus \bigcup_i \gamma_i$$

открыто и $S = \mathcal{F}(S)$. Если S — открытая окрестность K , такая, что $S = \mathcal{F}(S)$, а L — компактная окрестность K и $L \subset S$, то, по предложению 3.10.2, $L' = \mathcal{F}(L) \subset S$, а по предложению 3.10.3, L' — компактная окрестность K . ▶

3.10.7. ТЕОРЕМА МАЛЬГРАНЖА — ЛАКСА О ПРИБЛИЖЕНИИ. Пусть V — ориентированное $\mathbb{R}$ -аналитическое многообразие, ξ и η — два $\mathbb{R}$ -аналитических векторных расслоения над V , таких, что $\text{rank } \xi = \text{rank } \eta$. Пусть P — эллиптический оператор порядка m из ξ в η с аналитическими коэффициентами. Пусть U — открытое подмножество V , такое, что у $V \setminus U$ нет компактных связных компонент. Тогда всякое сечение $u \in C^\infty(U, \xi)$, удовлетворяющее на U уравнению $Pu = 0$, приближается вместе со всеми частными производными равномерно на компактных подмножествах U глобальными сечениями $u_v \in C^\infty(V, \xi)$, такими, что $Pu_v = 0$ на всем V .

◀ Пусть K — компактное подмножество U . Заменяя K на $\mathcal{F}(K)$, мы можем считать, что $K = \mathcal{F}(K)$, так как, по предложениям 3.10.2, 3, $\mathcal{F}(K)$ — компакт, принадлежащий U .

Пусть L — компакт в V , такой, что $K \subset \overset{\circ}{L}$, и пусть

$$\mathcal{P}(L) = \{s \in H_0(L, \xi) : Ps = 0 \text{ на } \overset{\circ}{L}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}(K)$ множество сужений на K сечений $s \in C^\infty(N, \xi)$, таких, что $Ps = 0$ на N , где N — окрестность K , вообще говоря, зависящая от s ; $\mathcal{P}(K)$ мы будем рассматривать как подмножество $H_0(K, \xi)$. Пусть отображение

$$\rho: \mathcal{P}(L) \rightarrow H_0(K, \xi)$$

задается равенством

$$\rho(s)(x) = \begin{cases} s(x), & \text{если } x \in K, \\ 0, & \text{если } x \notin K, \end{cases}$$

и пусть $M = \rho(\mathcal{P}(L))$. Очевидно, $M \subset \mathcal{P}(K)$. Сначала мы докажем такой факт:

3.10.8. ТЕОРЕМА. Подмножество M плотно в $\mathcal{P}(K)$.

◀ Пусть l — непрерывный линейный функционал на $H_0(K, \xi)$, такой, что $l|_M = 0$. Нам надо показать, что $l|_{\mathcal{P}(K)} = 0$. По предложению 3.9.4, существует сечение $s'_0 \in H_0(K, \xi')$, такое, что

$$l(s) = \langle s'_0, s \rangle_\xi, \quad s \in H_0(K, \xi).$$

Определим сечение $s' \in H_0(L, \xi')$, полагая

$$s'(x) = \begin{cases} s'_0(x), & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что

$$\langle s', u \rangle_\xi = 0,$$

если $u \in H_0(L, \xi)$ и $Pu = 0$ на $\mathring{L}$. В самом деле, так как $l|_M = 0$, то

$$\langle s', u \rangle_\xi = \langle s'_0, \rho(u) \rangle_\xi = l(\rho(u)) = 0.$$

По предложению 3.9.9 существует сечение $t' \in H_m(L, \eta')$, такое, что $P't' = s'$. Так как $s'(x) = 0$, если $x \notin K$, то $P't' = 0$ на $V \setminus K$. Так как P' — эллиптический оператор с аналитическими коэффициентами (замечание 3.3.22), то из теоремы 3.9.2 следует, что t' аналитично на $V \setminus K$. Далее, $t'(x) = 0$, если $x \notin L$, и, кроме того, никакая связная компонента $V \setminus K$ не содержится в L , так как $K = \mathcal{J}(K)$. Следовательно, t' равно нулю на непустом открытом подмножестве любой компоненты $V \setminus K$, откуда ввиду аналитичности t' на $V \setminus K$ мы получаем, что $t'(x) = 0$ для любого $x \in V \setminus K$.

Если $s \in \mathcal{P}(K)$ и N — окрестность K , в которой s определено и $Ps = 0$, то

$$l(s) = \langle s'_0, s \rangle_\xi = \langle P't', s \rangle_\xi = \int_N B(P't', s) = \int_N B(t', Ps)$$

(так как $P't' = 0$ на $N \setminus K$ и $\text{supp } t' — компакт в N), а это равно нулю, так как $Ps = 0$. Таким образом, $l|_{\mathcal{P}(K)} = 0$. ►$

Продолжим доказательство теоремы 3.10.7. По теореме 3.9.1 существует последовательность сечений $u_v \in C^\infty(\mathring{L}, \xi)$, таких, что $Pu_v = 0$ и $u_v \rightarrow u$ в $H_0(K, \xi)$. По предложению 3.9.6, u_v стремятся к u равномерно на K вместе со всеми производными.

Пусть $\{K_v\}$ — последовательность компактных подмножеств V , такая, что

$$K \subset \mathring{K}_1, \quad K_v \subset \mathring{K}_{v+1}, \quad K_v = \mathcal{J}(\mathring{K}_v)$$

(легко показать, что такая последовательность существует). Если $\varepsilon > 0$ задано и $s \in \mathcal{P}(K)$, то из теоремы 3.10.8 следует суще-

ствование сечений $s_v \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_{v+1}, \xi)$, таких, что

$$Ps_v = 0, \quad |s_1 - s|^{K_v} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |s_{v+1} - s_v|^{K_v} < \frac{\varepsilon}{2^v};$$

здесь $|\dots|^{K_v}$ означает норму, определяющую топологию в пространстве $H_0(K_v, \xi)$, и $|s|^{K_v} \leq |s|^{K_{v+1}}$, если $s \in H_0(K_{v+1}, \xi)$. Ряд

$$u = s_v + \sum_{\mu=v+1}^{\infty} (s_\mu - s_{\mu-1})$$

сходится в $H_0(K_v, \xi)$, и его сумма не зависит от v . Более того, по предложению 3.9.6, $u \in C^\infty(V, \xi)$ и $Pu = 0$. Очевидно, $|u - s|^{K_v} < \varepsilon$. Таким образом, мы можем найти последовательность $\{u_N\}$ в $C^\infty(V, \xi)$, $Pu_N = 0$, сходящуюся к s в $H_0(K, \xi)$. Остальное следует из предложения 3.9.6. ►

Из этой теоремы и предложения 3.10.6 мы получаем

3.10.9. Следствие. Пусть K — компактное подмножество V и $K = \mathcal{J}(K)$. В обозначениях теоремы 3.10.7 всякое решение и уравнение $Pu = 0$ в окрестности K можно равномерно на K вместе со всеми производными аппроксимировать решениями уравнения $Ps = 0$ на всем V .

3.10.10. Замечание. Можно доказать, что условие $U = \mathcal{J}(U)$ в теореме 3.10.7 также и необходимо для того, чтобы выполнялась эта теорема о приближении. Однако в доказательстве этого факта используется теория существования решений уравнения $Pu = f$, которой мы не касались: см. Мальгранж [1].

Пусть теперь V — комплексное многообразие размерности n и $\mathcal{E}^{p,q}$ — расслоение форм типа (p, q) на V . Мы уже отмечали в примере 3.3.15 (b), что дифференциальный оператор $\bar{\partial}$ из $\mathcal{E}^{p,0}$ в $\mathcal{E}^{p,1}$ эллиптический; в частности, оператор $\bar{\partial}$ из $\mathcal{O}_1$ в $\mathcal{E}^{0,1}$ эллиптический. Далее, $\text{rank } \mathcal{O}_1 = 1$, а $\text{rank } \mathcal{E}^{0,1} = n$. Поэтому при $n = 1$ мы можем применить теорему 3.10.7 и тогда получим следующее утверждение.

3.10.11. Теорема Рунге для открытых римановых поверхностей. (Бенке — Штейн.) Пусть V — связное комплексное многообразие размерности 1 со счетной базой, т. е. открытая риманова поверхность. Пусть U — открытое подмножество V , такое, что в $V \setminus U$ нет компактных связных компонент. Тогда любая голоморфная на U функция равномерно на компактных подмножествах U приближается функциями, голоморфными на V .

Одним из следствий этой теоремы, имеющим далеко идущие применения, является приводимая ниже теорема 3.10.13. Она до-

казывает, в частности, гипотезу Каратеодори о том, что на любой открытой римановой поверхности существуют непостоянные голоморфные функции.

3.10.12. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть V — комплексное многообразие размерности n и $\mathcal{H} = \mathcal{H}(V)$ — кольцо голоморфных на V функций. Говорят, что V — *многообразие Штейна*, если выполнены следующие три условия:

(а) $\mathcal{H}$ разделяет точки V , т. е. для любых $a, b \in V$, $a \neq b$, найдется $f \in \mathcal{H}$, такая, что $f(a) \neq f(b)$;

(б) если $a \in V$, то существуют функции $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}$, такие, что отображение $f: V \rightarrow \mathbb{C}^n$, определяемое функциями $f_1, \dots, f_n$, является изоморфизмом некоторой окрестности a на открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, т. е. $f_1, \dots, f_n$ задают локальные координаты в окрестности a ;

(с) для любого компакта $K \subset V$ множество

$$\hat{K} = \hat{K}_{\mathcal{H}} = \{x \in V: |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)| \text{ для всех } f \in \mathcal{H}\}$$

— тоже компакт.

3.10.13. **ТЕОРЕМА.** (Бенке — Штейн.) *Всякая открытая риманова поверхность является многообразием Штейна.*

◀ Пусть V — открытая риманова поверхность и $a, a' \in V$. Пусть $(U, \varphi), (U', \varphi')$ — системы координат, $U \cap U' = \emptyset$ и

$$\varphi(U) = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} = \varphi'(U'), \quad \varphi(a) = \varphi(a') = 0.$$

Если

$$D = \{x \in U: |\varphi(x)| < r < 1\}, \\ D' = \{x \in U': |\varphi'(x)| < r < 1\},$$

то сразу видно, что $V \setminus D$, $V \setminus D'$ и $(V \setminus D) \setminus D'$ — связные множества, и потому множество $V \setminus \Omega$, где $\Omega = D \cup D'$, не имеет компактных связных компонент. По теореме 3.10.11, функция u на Ω , такая, что

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ 1, & x \in D', \end{cases}$$

равномерно на компакте $K' = \{a\} \cup \{a'\}$ приближается элементами $f \in \mathcal{H}$. В частности, существует $f \in \mathcal{H}$, такая, что $|f(a)| < 1/2$, $|f(a')| > 1/2$. Следовательно, $\mathcal{H}$ разделяет точки V .

Если $a \in V$, (U, φ) — координатная окрестность, указанная выше, и

$$D = \{x \in U: |\varphi(x)| < r < 1\}, \quad K = \{x \in U: |\varphi(x)| \leq r' < r\},$$

то множество $V \setminus D$ связно. Опять по теореме 3.10.11, существует функция $f \in \mathcal{H}$, такая, что

$$\sup_{y \in K} |f(y) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Если ε достаточно мало, то $(df)(a) \neq 0$, откуда следует, что f — локальный гомеоморфизм в окрестности a , т. е. функция f задает локальные координаты в точке a . Что касается условия (с) в определении 3.10.12, то нам достаточно доказать равенство

$$\hat{K}_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}(K).$$

Прежде всего, если U — относительно компактная компонента $V \setminus K$, то $\partial U \subset K$. Поэтому из принципа максимума следует, что $U \subset \hat{K}_{\mathcal{H}}$, откуда

$$\mathcal{F}(K) \subset \hat{K}_{\mathcal{H}}.$$

Пусть теперь $a \notin \mathcal{F}(K)$ и $L = \{a\} \cup \mathcal{F}(K)$. Непосредственно видно, что $L = \mathcal{F}(L)$. Поэтому мы применим следствие 3.10.9 к оператору $\bar{\partial}$ из $\mathcal{D}_1$ в $\mathcal{E}^{0,1}$ и получим функцию $f \in \mathcal{H}$, такую, что

$$\sup_{y \in L} |f(y) - u(y)| < 1/2,$$

где

$$u(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ из окрестности } a, \\ 0, & \text{если } y \text{ из окрестности } \mathcal{F}(K). \end{cases}$$

Тогда

$$|f(a)| > \sup_{y \in K} |f(y)|$$

и, значит, $a \notin \hat{K}_{\mathcal{H}}$. Следовательно,

$$\hat{K}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{F}(K). \blacktriangleright$$

Основной результат этого раздела — теорема 3.10.7, принадлежащая Мальгранжу [1] и Лаксу [2]. Применение к открытым римановым поверхностям дано, как у Мальгранжа [1]. Первоначальная трактовка Бенке — Штейна [1] совсем иная, чем эта. Метод Бенке — Штейна намного труднее и существенно использует теорию компактных римановых поверхностей. Однако он имеет то преимущество, что одновременно дает решения так называемых первой и второй проблем Кузена (теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса).

ЛИТЕРАТУРА

Абрахам (Abramam R.)

1. Transversality in manifolds of mappings, *Bull. Am. Math. Soc.*, **69** (1963), 470—474.

Атья (Atiyah M. F.)

1. Immersions and imbeddings of manifolds, *Topology*, **1** (1962), 125—132.

Бенке, Штейн (Behnke H., Stein K.)

1. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Math. Ann.*, **120** (1948), 430—461.

Бишоп (Bishop E.)

1. Mappings of partially analytic spaces, *Am. J. Math.*, **83** (1961), 209—242.

Бурбаки (Bourbaki N.)

1. Алгебра. Модули, кольца, формы, М., 1966. [Гл. VII. Модули над кольцами главных идеалов.]
2. Общая топология. Основные структуры, М., 1958. [Гл. I. Топологические структуры.]
3. Topologie générale, Ch. IX, Utilisation des nombres réels en topologie générale, Hermann, Paris, 1958.

Вейль А. (Weil A.)

1. Sur les théorèmes de de Rham, *Comment. Math. Helv.*, **26** (1952), 119—145.

Вейль Г. (Weyl H.)

1. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, *Math. Ann.*, **77** (1916), 313—352.

Глезер (Glaeser G.)

1. Etudes de quelques algèbres Tayloriennes, *J. d'Analyse* (Jerusalem), **6** (1958), 1—124.

Гординг (Gårding L.)

1. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72.

Грауэрт (Grauert H.)

1. On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, *Ann. Math.*, **68** (1958), 460—472. [Перевод в сб. *Математика*, 4:3 (1960), 29—40.]

Гуревич В., Волман Г. (Hurewicz W., Wallman H.)

1. Теория размерности, М., 1948.

Дьедонне Ж. (Dieudonné J.)

1. Une généralisation des espaces compacts, *J. Math. Pure Appl.*, **23** (1944), 65—76.

Ион (John F.)

1. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, М., 1958.

Картан А. (Cartan H.)

1. Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. France*, 85 (1957), 77—79.
2. Séminaire E. N. S.: Topologie différentielle, 1961—1962.

Картан Э. (Cartan E.)

1. Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, Paris, 1958.

Кервер (Kervaire M.)

1. A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comment. Math. Helv.*, 34 (1960), 257—270.

Кодаира, Спенсер (Kodaira K., Spencer D. C.)

1. On deformations of complex analytic structures, Part I and II, *Ann. Math.*, 67 (1958), 328—466.

Кон (Kohn J. J.)

1. Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I, *Ann. Math.*, 78 (1963), 206—213.

Котакэ, Нарасимхан М. (Kotaké T., Narasimhan M. S.)

1. Regularity theorems for fractional powers of a linear elliptic operator, *Bull. Soc. Math. France*, 90 (1962), 449—471.

Кошуль (Koszul J. L.)

1. Lectures on fibre bundles and differential geometry, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

Лакс (Lax P.)

1. On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 615—633.
2. A stability theorem for abstract differential equations and its application to the study of the local behaviour of solutions of elliptic equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, 9 (1956), 747—766.

Мальгранж (Malgrange B.)

1. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, 6 (1955—1956), 271—355.
2. Идеалы дифференцируемых функций, М., 1968.

Милнор (Milnor J.)

1. On manifolds which are homeomorphic to the 7-sphere, *Ann. Math.*, 64 (1956), 399—405. [Перевод в сб. *Математика*, 1:3 (1957), 35—42.]

Морри, Ниренберг (Morrey C. B., Nirenberg L.)

1. On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), 271—290.

Морс (Morse A. P.)

1. The behaviour of a function on its critical set, *Ann. Math.*, 40 (1939), 62—70.

Нарасимхан Р. (Narasimhan R.)

1. Imbedding of holomorphically complete complex spaces, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), 917—934. [Перевод в сб. *Математика*, 8:6 (1964), 141—156.]

Ниренберг (Nirenberg L.)

1. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 648—674.

Номидзу (Nomizu K.)

1. Группы Ли и дифференциальная геометрия, М., 1960.

Ньюлендер, Ниренберг (Newlander A., Nirenberg L.)

1. Complex analytic co-ordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.*, **65** (1957), 391—404. [Перевод в сб. *Математика*, **3:6** (1959), 131—144.]

Ока (Ока К.)

1. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, *J. Sci., Hiroshima Univ.*, **6** (1936), 245—255.

Папи (Papy G.)

1. Sur la définition intrinsèque des vecteurs tangents à une variété de classe C^r lorsque $1 \leq r < \infty$, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **242** (1956), 1573—1575.

Петре (Peetre J.)

1. Rectifications à l'article «Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels», *Math. Scand.*, **8** (1960), 116—120.

Петровский И. Г.

1. Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, *Матем. сб.*, **5**, № 1 (1939), 3—70.

Реллих (Rellich F.)

1. Ein Satz über mittlere Konvergenz, *Göttingen Nachr.*, (1930), 30—35.

Сард (Sard A.)

1. The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Am. Math. Soc.*, **45** (1942), 883—890.

Серр (Serre J. P.)

1. Exposé 18 in Séminaire H. Cartan, 1953—1954.

Соболев С. Л.

1. Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.*, **н. с.**, **4**, № 3 (1938), 471—497.

Том (Thom R.)

1. Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (1956), 59—71.

Уитни (Whitney H.)

1. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Am. Math. Soc.*, **36** (1934), 63—89.
2. A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, **1** (1935), 514—517.
3. Differentiable manifolds, *Ann. Math.*, **37** (1936), 645—680.
4. The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space, *Ann. Math.*, **45** (1944), 220—246.
5. The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space, *Ann. Math.*, **45** (1944), 247—293.
6. Геометрическая теория интегрирования, М., 1960.

Уолл (Wall C. T. C.)

1. All 3-manifolds imbed in 5-space, *Bull. Amer. Soc.*, **71** (1965), 564—567.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

1. On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 299—325.

Фукс (Fuchs W. H. J.)

1. On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band limited signals, *J. Math. Anal. Appl.*, **9** (1964), 317—330.

Хёрмандер (Hörmander L.)

1. Линейные дифференциальные операторы, М., 1965.
2. The Frobenius Nirenberg theorem, *Arkiv Math.*, 5 (1964), 425—432.
3. Псевдодифференциальные операторы, в сб. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967.
4. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968.

Хефлигер (Haefliger A.)

1. Plongements différentiables de variétés dans variétés, *Comment. Math. Helv.*, 36 (1961), 47—82.

Хирш (Hirsch M. W.)

1. On imbedding differentiable manifolds in Euclidean space, *Ann. Math.*, 73 (1961), 566—571.

Хопф (Hopf H.)

1. Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays presented to R. Courant (Interscience N. Y.), 1948, pp. 167—185.

Шевалле (Chevalley C.)

1. Теория групп Ли, т. 1—3, М., 1948.

Шварц Дж. (Schwartz J.)

1. The formula for change in variables in a multiple integral, *Am. Math. Month.*, 61 (1954), 81—85.

Шварц Л. (Schwartz L.)

1. Théorie des distributions, vol. 1, 2, Hermann, Paris, 1950—1951.
2. Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété. Séminaire Bourbaki, 1963—1964. Exposé 269.

Эрве (Herve M.)

1. Функции многих комплексных переменных, М., 1965.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналитическая функция 11, 57
 Аналитически зависимые функции 30
 Бореля теорема 34
 Вейерштрасса теорема 13
 — — о приближении 37
 Векторное поле 71
 — расслоение 149
 Вложение 136
 — замкнутое 136
 — локально собственное 136
 Внешняя производная 87
 — степень векторного расслоения 154
 Внутренняя точка 96
 Вполне интегрируемая дифференциальная система 111
 Голоморфная функция 12, 57
 Голоморфное векторное поле 80
 — отображение 57
 Гординга неравенство 192
 Граница многообразия 97
 Граничная точка 97
 Грассмана многообразия 70
 Гротендика лемма 127
 Де Рама группы когомологий 91
 Дiffeоморфизм 12, 57
 Дифференциал 59
 — отображения 63
 — функции 20
 Дифференциальная система 111
 — — вполне интегральная 111
 — — инволютивная 111
 — форма 71
 — — голоморфная 93
 — — замкнутая 91
 — — комплекснозначная 78
 — — степени p 71
 — — типа (p, q) 80
 — — точная 91
 Дифференциальный оператор 164
 — — с аналитическими коэффициентами 174
 — — эллиптический 171
 Дифференцируемое многообразие 55
 Инвариантное векторное поле 108
 Интеграл дифференциальной системы 100
 Интегрирование дифференциальных форм 103
 Касательное пространство 59
 — расслоение 65
 Касательный вектор 59
 Ковектор 59
 Касательное пространство 59
 — расслоение 65
 Комплексно аналитический изоморфизм 57
 Комплексное многообразие 56
 Координатная окрестность 56
 Критическая точка 26, 67
 Локальная однопараметрическая группа 105
 Локально конечное семейство 18
 — собственное отображение 82
 Локальный оператор 87
 Мальгранжа — Лакса теорема о приближении 221
 Многообразие 55
 — класса C^k 55
 — с границей 96
 Морфизм 149
 Носитель сечения 156
 — функции 10, 56
 Ньюльсидера — Ниренберга теорема 122

Однопараметрическая группа 105

Ока — Вейля теорема 134

Ориентация 94

Ориентируемое многообразие 93

Отображение расслоений 149

Планшереля теорема 161

Погружение 136

Подмногообразие 81

Положительный касательный вектор 97

— ковектор 98

Порядок линейного дифференциально-го оператора 168

Почти комплексная структура 120

— — интегрируемая 121

Преобразование координат 56

Проективное пространство 70

Производная 59

Прообраз дифференциальной формы 74

Прямая сумма векторных расслоений 154

Пуанкаре лемма 125

Равномерно строго эллиптический оператор 191

Разбиение единицы 18

Размерность 55, 56

Ранг отображения 66

Расслоение p -форм 66

— форм типа (p, q) 156

Регулярное отображение 136

Реллиха лемма 183, 214

Рунге область 42

— теорема 42, 223

Сарда теорема 26, 27

Сечение векторного расслоения 156

Символ линейного дифференциального оператора 170

Система координат 55

Скобка векторных полей 75

Соболева лемма 187

— пространства 175

Собственное отображение 82

Сопряженное векторное расслоение 154

Стационарная функция 58

Стокса теорема 103

Строгая дифференцируемость в L^p 179

Структурные формы 120

Тензорное произведение векторных расслоений 154

Теорема конечности об аналитичности 211, 213

— — обратной функции 24, 67

— — о неявной функции 24

— — ранге 24, 67, 77

— — регулярности 205, 213

Тома теорема о трансверсальности 148

Трансверсальное отображение 145

Уитни сумма 154

— теорема о вложении 141

— — — погружении 140

— — — приближении 38, 39

— — — продолжении 35

Формально сопряженный оператор 173

— транспонированный оператор 174

Фридрихса неравенство 196

Фробениуса теорема 114, 115, 117

Функции перехода 151

Функции перехода 151

Функциональная зависимость 30

Фурье преобразования 158, 161

Хартогса теорема о продолжении 132

Частный дифференциал 22

Штейна многообразие 224

Якоби тождество 75

S^k -многообразие 55

S^k -отображение 57

S^k -структура 55

S^k -функция 57

δ -циклическое открытое множество 132

k -связное многообразие 144

m -плоская функция 33

R -аналитическая функция 4, 57

R -аналитический изоморфизм 57

R -аналитическое многообразие 55

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Глава 1. Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$	9
§ 1.1. Формула Тейлора	10
§ 1.2. Разбиения единицы	18
§ 1.3. Обратные функции, неявные функции и теорема о ранге	20
§ 1.4. Теорема Сарда и функциональная зависимость	25
§ 1.5. Теорема Бореля о рядах Тейлора	33
§ 1.6. Теорема Уитни о приближении	36
§ 1.7. Теорема о приближении для голоморфных функций	42
§ 1.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения	46
Глава 2. Многообразия	55
§ 2.1. Основные определения	55
§ 2.2. Касательное и кокасательное расслоения	62
§ 2.3. Многообразия Грассмана	68
§ 2.4. Векторные поля и дифференциальные формы	71
§ 2.5. Подмногообразия	81
§ 2.6. Внешнее дифференцирование	87
§ 2.7. Ориентация	93
§ 2.8. Многообразия с границей	96
§ 2.9. Интегрирование	99
§ 2.10. Однопараметрические группы	105
§ 2.11. Теорема Фробениуса	110
§ 2.12. Почти комплексные многообразия	119
§ 2.13. Леммы Пуанкаре и Гротендика	125
§ 2.14. Применения: теорема Хартогса о продолжении и теорема Ока — Вейля	130
§ 2.15. Погружения и вложения: теоремы Уитни	136
§ 2.16. Теорема Тома о трансверсальности	144
Глава 3. Линейные эллиптические дифференциальные операторы	149
§ 3.1. Векторные расслоения	149
§ 3.2. Преобразования Фурье	158
§ 3.3. Линейные дифференциальные операторы	164
§ 3.4. Пространства Соболева	175
§ 3.5. Леммы Реллиха и Соболева	181
§ 3.6. Неравенства Гординга и Фридрихса	190
§ 3.7. Эллиптические операторы с C^∞ -коэффициентами: теорема о регулярности	199
§ 3.8. Эллиптические операторы с аналитическими коэффициентами	206
§ 3.9. Теорема конечности	212
§ 3.10. Теорема о приближении и ее применение к открытым римановым поверхностям	219
Литература	226
Предметный указатель	230