А.А.Кириллов

ЧТО ТАКОЕ ЧИСЛО?

М.: ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ФИРМА «ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА» ВО «НАУКА»
1993

Представляет расширенный вариант лекции, прочитанной на заседании студенческого лектория Московского математического общества.

Основная цель — показать, какой смысл придается понятию числа в современной математике. Изложены основные понятия *p*-адического и нестандартного анализа, объяснено, что такое кватернион и числа Кэли. Изложение подводит читателя к понятию алгебр фон Неймана, а также к идее «суперматематики» — исчисления антикоммутирующих переменных.

Для студентов, аспирантов и научных работников, интересующихся приложениями математики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Жили вятские мужики плохо, но этого не знали... И думали, что живут хорошо, не хуже других.
>
> *В. Крупин.* Живая вода

Когда школьник впервые знакомится с математикой, ему говорят, что это — наука о числах и геометрических фигурах. Вузовский курс математики обычно начинается с аналитической геометрии, основная цель которой — выразить геометрические понятия на языке чисел. Таким образом, получается, что числа — это единственный предмет изучения в математике.

Правда, если вы откроете современный научный журнал и попробуете прочитать какую-нибудь статью по математике, то вполне вероятно, что вы не встретите в этой статье ни одного числа «в чистом виде». Вместо них речь идет о множествах, функциях, операторах, категориях, мотивах и т. д. Однако, во-первых, почти все эти понятия так или иначе опираются на понятие числа, а во-вторых, конечный результат любой математической теории, как правило, выражается на языке чисел.

Поэтому мне кажется небесполезным обсудить со студентами-математиками вопрос, поставленный в заголовке этой книги.

Разумеется, одно только описание исторического развития понятия числа или обсуждение его философского смысла требует много времени и места. Об этом уже написано немало толстых книг. Моя цель более проста и конкретна — показать, какой смысл придается понятию числа в современной математике, рассказать о задачах, которые возникают в связи с разным пониманием чисел, и о том, как эти задачи решаются. Конечно, в каждом случае я смогу лишь кратко описать самые начала соответствующей теории. Для тех читателей, которые захотят разобраться в ней подробнее, я указываю подходящую литературу.

Надеюсь, что мой рассказ поможет изучающим математику ориентироваться в ее богатом, красивом и сложном мире.

Эту цепочку последовательных расширений понятия числа (или по крайней мере первые 4—6 членов ее) вы хорошо знаете. Символы, составляющие цепочку, стали сейчас стандартными обозначениями соответственно для множеств натуральных, целых, рациональных, вещественных, комплексных чисел, кватернионов и октонионов (последние называются также октавами или числами Кэли).

Я хочу обсудить здесь переходы от одного звена цепочки к следующему и показать, что идеи, лежащие в основе этих переходов, работают и в других, иногда очень неожиданных и красивых теориях.

§ 1. От N к Z и от Z к Q: группа Гротендика, тела Ли и производные категории

> Мы подтянем себя до небес за шнурки от ботинок.
>
> *Ж. П. Серр.* Локальная алгебра и теория кратностей

Натуральные числа можно складывать, но не всегда можно вычитать; целые числа можно умножать, но не всегда можно делить. Стремление обойти эти неудобства, по существу, и вызвало переход от натуральных чисел к целым и от целых к рациональным.

Напомним, как совершаются эти переходы. Если мы хотим вычесть натуральное число m из натурального числа n, то в случае $m \geqslant n$ ответ не может быть натуральным числом. Обозначим его временно символом $n \ominus m$. Если мы хотим, чтобы в расширенном множестве чисел выполнялись привычные нам аксиомы сложения, то мы должны будем отождествить $n \ominus m$ со всеми выражениями $(n + k) \ominus (m + k)$, $k \in \mathbf{N}$, а также с выражениями вида

$(n-k) \ominus (m-k)$, $1 \leqslant k < \min(m, n)$. Другими словами, символы $n_1 \ominus m_1$ и $n_2 \ominus m_2$ отождествляются, если $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.

Рассмотрим теперь всевозможные выражения вида $n \ominus m$, $n, m \in \mathbf{N}$, с указанным законом отождествления. Их можно не только складывать (покомпонентно), но и вычитать по правилу

$$n_1 \ominus m_1 - n_2 \ominus m_2 = (n_1 + m_2) \ominus (n_2 + m_1).$$

Например, $0 \ominus 0 - m \ominus n = n \ominus m$. Можно проверить, что классы эквивалентности образуют группу по сложению. Сделайте это самостоятельно (это упражнение предназначается тем, кто только начинает осваивать понятие группы). Довольно просто установить, что полученная группа изоморфна $\mathbf{Z}$: при $m > n$ символы $(m + k) \ominus (n + k)$ отождествляются с натуральным числом $m - n$, при $m = n$ — с нулем, а при $m < n$ — с отрицательным числом $m - n$.

Процедура построения мультипликативной группы $\mathbf{Q}^*$ ненулевых рациональных чисел исходя из полугруппы $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ полностью аналогична: мы рассматриваем формальные символы $m : n$, где $m, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, и отождествляем $m_1 : n_1$ с $m_2 : n_2$, если $m_1 n_2 = m_2 n_1$. Ясно, что класс эквивалентности символа $m : n$ можно отождествить с рациональным числом $r = m/n$.

Более интересный пример. Рассмотрим совокупность всех конечных групп Γ. Если Γ_1 — нормальный делитель в Γ и Γ_2 — факторгруппа Γ/Γ_1, то естественно считать, что Γ «делится» на Γ_1 и «частное» равно Γ_2. Попробуем из этого материала построить коммутативную группу $\mathfrak{G}$.

Групповой закон в $\mathfrak{G}$ мы обозначим знаком «$+$» (аддитивная запись). Пусть $[\Gamma]$ обозначает класс конечных групп, изоморфных группе Γ. По определению $\mathfrak{G}$ порождается всеми символами $[\Gamma]$ с соотношениями

$$[\Gamma] = [\Gamma_1] + [\Gamma_2],$$

если Γ_1 — нормальный делитель в Γ, а $\Gamma_2 = \Gamma/\Gamma_1$.

Это значит, что элементом группы $\mathfrak{G}$ является класс эквивалентности выражений вида

$$n_1 \cdot [\Gamma_1] + n_2 \cdot [\Gamma_2] + \ldots + n_k \cdot [\Gamma_k], \qquad (1)$$

где $n_i \in \mathbf{Z}$, а Γ_i — конечные группы. Справедлива

Теорема 1. *Группа $\mathfrak{G}$ — свободная абелева группа со счетным числом образующих. В качестве этих образующих можно выбрать классы $[\Gamma]$, где Γ — либо циклическая*

группа $Ц_p$ простого порядка p, либо простая конечная группа.

Таким образом, каждое выражение вида (1) можно заменить ровно одним эквивалентным ему выражением того же вида, в котором Γ_i принадлежат списку групп, указанному в теореме.

З а д а ч а 1. Покажите, что в группе $\mathfrak{G}$ классы $[Ц_6]$ и $[S_3]$ определяют один и тот же элемент $[Ц_2] + [Ц_3]$, хотя группы $Ц_6$ и S_3 не изоморфны.

З а д а ч а 2. Выразить через образующие следующие элементы группы $\mathfrak{G}$:

а) $[Ц_n]$, n — составное число;

b) $[S_n]$, где S_n — группа перестановок n элементов;

c) $[T(n, \mathbf{F}_q)]$, где $T(n, \mathbf{F}_q)$— группа обратимых верхних треугольных матриц порядка n с элементами из конечного поля $\mathbf{F}_q$, содержащего q элементов.

Во всех рассмотренных случаях мы строили группу по одному и тому же принципу, вводя дополнительные элементы (отрицательные числа, дроби, формальные линейные комбинации и т. п.) и разбивая полученное множество на классы эквивалентности.

Наиболее общим выражением описанного принципа до последнего времени считалось понятие *группы Гротендика*, $\mathfrak{G}(\mathcal{K})$, определенное для любой малой аддитивной категории $\mathcal{K}$ (см. [Э], т. 1)*). Эта группа по определению коммутативна и порождается классами эквивалентности объектов категории с соотношениями $[A] = [B] + [C]$, где B — подобъект A, а C — соответствующий факторобъект. Например, построенная выше группа $\mathfrak{G}$ является группой Гротендика категории конечных групп.

З а д а ч а 3. Показать, что для категории всех счетных абелевых групп с конечным числом образующих группа Гротендика $\mathfrak{G}$ изоморфна $\mathbf{Z}$.

Одно из самых ярких применений этой конструкции — так называемая K-теория, где исходным материалом для построения группы служит категория векторных расслоений над заданным гладким многообразием. Подробное изложение этой молодой, но уже заслуженной теории см. в [Х], [А].

---

*) К сожалению, понятие категории не входит в программу университетского курса, хотя в современной математике оно играет не меньшую роль, чем понятие множества. Первоначальные сведения о категориях приводятся в [К] и [КГ], а более подробные — в [Г], [КЭБ] и [ГМ].

Возможно, однако, дальнейшее обобщение, в котором вводимая операция некоммутативна.

Пример. Пусть $\mathcal{A}$ означает алгебру с единицей над полем C, порожденную элементами p и q с соотношением $pq - qp = 1$. Эту алгебру удобно реализовать в виде алгебры дифференциальных операторов на прямой с полиномиальными коэффициентами: образующим p и q соответствуют операторы дифференцирования $\frac{d}{dx}$ и умножения на x.

Задача 4. Докажите, что в $\mathcal{A}$ нет делителей нуля, т. е. из $ab = 0$ следует, что или $a = 0$ или $b = 0$.

Назовем правой дробью выражение вида ab^{-1} и левой дробью выражение вида $b^{-1}a$, где $a,\ b \in \mathcal{A}$ и $b \neq 0$.

Скажем, что левая дробь $c^{-1}d$ эквивалентна правой дроби ab^{-1}, если $ca = db$. Две левые (соответственно правые) дроби будем считать эквивалентными, если они эквивалентны в указанном выше смысле одной и той же правой (соответственно левой) дроби. Имеет место замечательная

Теорема 2. *В каждом классе эквивалентности есть и правые и левые дроби. В любых двух классах найдутся левые (соответственно правые) дроби с общим знаменателем.*

Доказательство теоремы без труда выводится из следующего факта, представляющего самостоятельный интерес.

Лемма. *Для любых двух ненулевых элементов из $\mathcal{A}$ существует ненулевое общее левое (правое) кратное.*

Доказательство. Пусть L_n означает подпространство в $\mathcal{A}$, состоящее из всех элементов, которые можно записать в виде многочлена степени $\leqslant n$ от образующих p и q. Легко проверить, что $\dim L_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Пусть a и b принадлежат L_m. Тогда пространства $L_n a$ и $L_n b$ содержатся в L_{n+m}*). При достаточно большом n будет справедливо неравенство $\dim L_n a + \dim L_n b > \dim L_{n+m}$. Поэтому $L_n a$ и $L_n b$ имеют общий ненулевой элемент, который и будет общим левым кратным a и b.

Задача 5. Найти общее левое кратное p^n и q^n.

---

*) Мы обозначаем $L_n a$ множество всех элементов вида xa, $x \in L_n$. Вообще, если A и B — множества, а $*$ — некоторая операция над элементами этих множеств, то символом $A * B$ означают множество всех элементов вида $a * b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Теорема 1 позволяет определить для алгебры $\mathscr{A}$ *тело отношений* D. А именно, классы эквивалентности дробей можно складывать, вычитать и делить по правилам

$$a_1b^{-1} \pm a_2b^{-1} = (a_1 \pm a_2)\, b^{-1};\ \ a_1b^{-1} : a_2b^{-1} = a_1a_2^{-1}.$$

Умножение на дробь ab^{-1} можно определить как деление на обратную дробь ba^{-1}.

Построение тела D, описанное здесь, допускает обобщения.

Прежде всего, можно в качестве исходной алгебры взять алгебру $\mathscr{A}_n$, порожденную n парами образующих p_i, q_i, с соотношениями

$$p_iq_j - q_jp_i = \delta_{ij},\ p_ip_j - p_jp_i = q_iq_j - q_jq_i = 0. \quad (2)$$

Соответствующее тело отношений обозначается D_n.

Более существенное обобщение получается следующим образом. Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathscr{A}$, порожденную образующими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые удовлетворяют соотношениям специального вида

$$x_ix_j - x_jx_i = \sum_k c_{ij}^k x_k, \quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n, \quad (3)$$

где c_{ij}^k — некоторые константы.

Левая часть равенства (3) называется *коммутатором* элементов x_i и x_j и обозначается $[x_i, x_j]$.

З а д а ч а 6. Докажите, что в ассоциативной алгебре операция коммутирования удовлетворяет тождеству

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \quad (4)$$

которое называется *тождеством Якоби*.

Здесь уместно сообщить (или напомнить) читателю, что линейное пространство, снабженное билинейной кососимметричной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби, называется *алгеброй Ли*. Название это связано с группами Ли, о которых еще пойдет речь ниже.

Вернемся к нашей ассоциативной алгебре $\mathscr{A}$. Предположим, что образующие $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы. Тогда, как легко выводится из утверждения задачи 6, константы c_{ij}^k обладают свойством

$$\sum_s \left(c_{ij}^s c_{sk}^m + c_{jk}^s c_{si}^m + c_{ki}^s c_{sj}^m\right) = 0. \quad (5)$$

В этом случае линейное пространство $\mathfrak{g}$, натянутое на образующие $x_1, x_2, \ldots, x_n$, будет алгеброй Ли, а ассоциативная алгебра $\mathscr{A}$ — ее так называемой *универсаль-*

ной обертывающей алгеброй или *ассоциативной оболочкой*. Обычно она обозначается $U(\mathfrak{g})$. Замечательно, что утверждения леммы и теоремы 1 остаются в силе для алгебры $U(\mathfrak{g})$. Тем самым они дают возможность определить тело отношений этой алгебры, которое называется *телом Ли* и обозначается $D(\mathfrak{g})$.

Изучение тел D_n и $D(\mathfrak{g})$ составляет один из наиболее интересных разделов нового направления в математике, которое можно назвать *некоммутативной алгебраической геометрией* (см. [К] и [ГК]).

В заключение этого раздела приведем здесь два простых с виду вопроса о структуре алгебры $\mathcal{A}$, ответ на которые до сих пор неизвестен.

1. Разрешимо ли в алгебре $\mathcal{A}$ *уравнение Ферма*

$$X^n + Y^n = Z^n? \tag{6}$$

(Разумеется, имеются в виду нетривиальные решения, когда X, Y и Z не пропорциональны одному многочлену P.)

Известно, что в алгебре $\operatorname{gr}\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0} L_n/L_{n-1} \cong \mathbf{C}[p, q]$ уравнение (6) не имеет нетривиальных решений при $n > 2$. В работе [Д] приведен пример нетривиального решения уравнения (6) при $n = 3$.

З а д а ч а 7. Найти общее решение уравнения (6) в алгебре многочленов для $n = 2$.

2. Пусть $P \in \mathcal{A}$ и $Q \in \mathcal{A}$ обладают свойством

$$PQ - QP = 1. \tag{7}$$

Тогда отображение φ: $p \mapsto P$, $q \mapsto Q$ задает эндоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в себя. Верно ли, что это — изоморфизм? (Другими словами, верно ли, что φ обратимо?)

«Коммутативный аналог» этого вопроса также не решен. Это так называемая *проблема детерминанта*. Ее точная формулировка такова.

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — два многочлена со свойством

$$\begin{vmatrix} \partial P/\partial x & \partial Q/\partial x \\ \partial P/\partial y & \partial Q/\partial y \end{vmatrix} = 1.$$

Верно ли, что полиномиальное отображение φ: $(x, y) \mapsto (P, Q)$ допускает полиномиальное обратное отображение?

В этом же русле идей находится понятие *производной категории*, которое неожиданно оказалось эффективным средством решения трудных конкретных задач из разных

областей математики. Идея перехода к производной категории довольно проста и напоминает одновременно построение группы Гротендика и построение тела частных некоммутативной алгебры. Ввиду недостатка места и компетентности, автор адресует читателя к недавней книге [ГМ] по поводу дальнейших сведений о производных категориях и их применении.

Ответы и указания к задачам

1. В обеих группах есть нормальная подгруппа, изоморфная $\mathcal{U}_3$.

2. а) $[\mathcal{U}_n] = \sum_k a_k [\mathcal{U}_{p_k}]$, если $n = \prod_k p_k^{a_k}$ — разложение n на простые множители; б) $[S_2] = [\mathcal{U}_2]$, $[S_3] = [\mathcal{U}_2] + [\mathcal{U}_3]$, $[S_4] = 3[\mathcal{U}_2] + [\mathcal{U}_3]$, $[S_n] = [\mathcal{U}_2] + [A_n]$ при $n \geqslant 5$ (здесь A_n — простая группа порядка $n!/2$, состоящая из четных перестановок n элементов); с) если $q = p^m$, p — простое и $q - 1 = \prod_k p_k^{a_k}$ — разложение на простые множители, то $[T(n, \mathbb{F}_q)] = \frac{1}{2} mn(n-1)[\mathcal{U}_p] + \sum_k na_k [\mathcal{U}_{p_k}]$.

3. В качестве образующего элемента группы $\mathfrak{S}$ можно взять класс $[\mathbf{Z}]$.

4. Введите для элементов из $\mathscr{A}$ понятие старшего члена таким образом, чтобы выполнялись условия: а) старший член элемента $a \in L_n$ — это однородный многочлен степени n от «обычных» (коммутативных) переменных p и q; б) старший член произведения равен произведению старших членов.

5. $\dfrac{p^{2n}q^n}{(2n)!\,n!} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{q^k p^k}{k!\,(n-k)!\,(n+k)!}\, p^n$.

7. *Ответ*: $X = (A^2 - B^2)C$, $Y = 2ABC$, $Z = (A^2 + B^2)C$, где A, B и C — произвольные многочлены.

§ 2. От Q к R: идея пополнения. *p*-адические числа и адели

В той области, где центра нет,
Где центром служит каждый
пункт случайный...

А. К. Толстой. Дон Жуан

1. Вещественные числа получаются из рациональных с помощью процедуры *пополнения*. Эта процедура применима к любому *метрическому пространству*, т. е. множест-

ву, в котором определены расстояния между точками. Точные определения и формулировки теорем (входящие в обязательный курс функционального анализа для математических факультетов наших университетов) можно посмотреть в [КГ] или [КФ].

Вместо этого зададимся «крамольным» вопросом: а насколько естественно определено обычное расстояние между рациональными числами

$$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|; \tag{1}$$

нет ли других способов описания «близости» между ними? Оказывается есть! Вот пример. Выберем простое число p. Как известно, любое рациональное число r однозначно записывается в виде $r = p^k \cdot \frac{m}{n}$, где $k \in \mathbf{Z}$, а $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, числитель и знаменатель которой взаимно просты с p. Величина p^{-k} называется *p-адической нормой* числа r и обозначается $\|r\|_p$. Можно проверить, что расстояние, определенное формулой

$$d_p(r_1, r_2) = \|r_1 - r_2\|_p, \tag{2}$$

обладает многими привычными нам свойствами обычного расстояния (1), например, оно удовлетворяет аксиоме треугольника:

$$d_p(r_1, r_2) + d_p(r_2, r_3) \geqslant d_p(r_1, r_3).$$

В то же время есть и отличия. Так, в смысле расстояния d_p все треугольники равнобедренны, причем длина основания не превосходит длины боковой стороны (проверьте!). Пространства с таким свойством называют *ультраметрическими*.

З а д а ч а 1. Покажите, что в ультраметрическом пространстве справедлив следующий простой признак сходимости: ряд $\sum x_n$ сходится тогда и только тогда, когда его общий член x_n стремится к нулю.

Еще одно отличие p-адического расстояния от обычного состоит в том, что целые числа образуют ограниченное множество диаметра 1. Если применить к этому множеству процедуру пополнения, мы получим компакт, который обозначается $\mathbf{O}_p$. Элементы $\mathbf{O}_p$ называются *целыми p-адическими числами*. Они допускают удобную запись в виде бесконечнозначных чисел в p-ичной системе счисления. А именно, целое p-адическое число a однозначно записывается в виде бесконечной влево последователь-

ности

$$\dots a_n \dots a_2 a_1 a_0,\ 0 \leqslant a \leqslant p-1. \qquad (3)$$

Эту запись можно понимать как сумму сходящегося ряда

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n + \dots \qquad (4)$$

В самом деле, $\|a_n p^n\| \leqslant p^{-n}$, так что члены ряда (4) стремятся к нулю и согласно критерию из задачи 1 ряд сходится.

З а д а ч а 2. Построить взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $\mathbf{O}_p$ на канторово множество.

Целые p-адические числа образуют кольцо: их можно складывать, вычитать и перемножать. Однако в отличие от $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{O}_p$ нет никакого естественного порядка. *Понятия положительного и отрицательного числа в* $\mathbf{O}_p$ *не имеют смысла.* Это видно, например, из того, что множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел плотно в $\mathbf{O}_p$. (Проверьте, что $-1 = \lim (p^n - 1)$ при $n \to \infty$.)

Тем не менее для целых p-адических чисел можно определить аналог функции «сигнум», принимающий p различных значений.

Напомним, что обычный сигнум

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x \leqslant 0, \end{cases}$$

можно на отрезке $[-1, 1]$ приблизить функцией x^ε, где ε — малое рациональное число (с нечетным знаменателем, чтобы обеспечить вещественность x^ε при отрицательных x). В p-адической ситуации нужно вместо малого ε взять p^n с большим n.

Т е о р е м а. *Для любого* $a \in \mathbf{O}_p$ *существует предел* $\lim a^{p^n}$ *при* $n \to \infty$. *Он обозначается* $\operatorname{sgn}_p a$ *и обладает свойствами:*

a) $\operatorname{sgn}_p (ab) = \operatorname{sgn}_p a \cdot \operatorname{sgn}_p b$;

b) $\operatorname{sgn}_p a$ *зависит лишь от последней цифры* a_0 *числа* a *в записи* (3);

c) $\operatorname{sgn}_p a = 0$, *если* $a_0 = 0$, *и является корнем* $(p-1)$*-й степени из* 1, *если* $a_0 \neq 0$.

Таким образом, на p-адической прямой можно двигаться в $p-1$ различных направлениях.

Для доказательства теоремы полезна

Л е м м а. *Если* $0 < d_p(a, b) < 1$, *то* $d_p(a^p, b^p) < d_p(a, b)$.

В отличие от обычных целых чисел многие целые p-адические числа обратимы. А именно, если $\operatorname{sgn}_p a \neq 0$, то a^{-1} — также целое p-адическое число. В частности, все рациональные числа со знаменателем, взаимно простым с p, являются целыми p-адическими числами.

З а д а ч а 3. Покажите, что число вида (3) рационально тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n\}$ периодична, начиная с некоторого места.

Если процедуру пополнения по расстоянию (2) применить не к $\mathbf{Z}$, а к $\mathbf{Q}$, то мы получим множество всех (не обязательно целых) p-адических чисел. Оно обозначается $\mathbf{Q}_p$. Его элементы удобно записывать в виде бесконечных влево p-ичных дробей:

$$a = \ldots a_n \ldots a_2 a_1 a_0, a_{-1} \ldots a_{-k}. \qquad (5)$$

Мы видим, что всякое p-адическое число имеет вид $a \cdot p^{-k}$, где $a \in \mathbf{Q}_p$.

Правила арифметических действий с p-адическими числами очень похожи на правила действий с обычными десятичными дробями, но с одним дополнительным принципом: все вычисления надо проводить, начиная с последней цифры.

Вот пример вычислений в $\mathbf{Q}_5$:

	...123123123	...123123123	...123123123
+		−	×
	...010101010,1	...010101010,1	...010101010,1
=	...133224133,1	= ...113022112,4	...312312312,3
			...231231230
			...123123000
			...312300000
			.....
			...210022042,3

Фактически, здесь записаны некоторые соотношения между рациональными числами. Какими?)

Вот более сложный пример

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\ldots 44444} = \operatorname{sgn} 2 = \lim_{n \to \infty} 2^{5^n} = \ldots 212.$$

З а д а ч а 4. Как по p-адической записи рационального числа r узнать, положительно r или отрицательно?

2. В множестве $\mathbf{Q}_p$ p-адических чисел определены все операции алгебры и анализа — 4 арифметических действия и предельный переход. Это позволяет перенести на p-адический случай почти весь материал, изучаемый на

младших курсах университетов. Некоторые теоремы при этом переносятся дословно, другие приходится корректировать, а третьи заменять совсем непохожими (и даже противоположными) утверждениями.

Например, естественным аналогом отрезка $[0, 1]$, излюбленного объекта вещественного анализа, служит множество $\mathbf{O}_p$. Этот «p-адический отрезок» так же, как и обычный, является шаром, т. е. множеством точек, удаленных от некоторой точки a (центра шара) на расстояние не более r (радиус шара)*). Кроме того, он является компактом и, следовательно, обладает всеми свойствами обычного отрезка, вытекающими из его компактности (см. [КГ] или [КФ]).

З а д а ч а 5. Докажите, что *всякая непрерывная функция на* $\mathbf{O}_p$ *со значениями в* $\mathbf{O}_p$ *равномерно приближается многочленами с коэффициентами из* $\mathbf{O}_p$.

З а д а ч а 6. Рассмотрим *отображение* $\varphi\colon \mathbf{O}_p \to \mathbf{R}$, которое переводит p-адическое число a вида (5) в вещественное число $\varphi(a) = \sum a_k p^{-k}$. (Таким образом, p-ичная запись числа $\varphi(a)$ получается из p-ичной записи числа a операцией «отражения относительно запятой».) Докажите, что φ непрерывно, отображает $\mathbf{Q}_p$ на множество $\mathbf{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел, а множество $\mathbf{O}_p$ — на отрезок $[0, 1]$.

Может показаться, что отображение $\varphi\colon \mathbf{Q}_p \to \mathbf{R}_+$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Однако это не так ввиду неоднозначности p-ичной записи вещественных чисел! Заметим также, что ограничение φ на $\mathbf{O}_p$ тесно связано с так называемой «канторовой лестницей» (см. [КГ]).

Тем, кто заинтересовался p-адическим анализом, я рекомендую самостоятельно подумать над p-адическими аналогами:

a) сигнатуры квадратичной формы;
b) экспоненты и логарифма;
c) преобразования Фурье;
d) Г-функции и В-функции Эйлера.

Дополнительный материал на эту тему вы можете найти в [К], [КГ], [Ко].

Основные приложения p-адического анализа до сих пор относились к теории чисел. На этом языке удобно формулировать разные вопросы делимости и сравнений по

*) Однако, в отличие от обычного отрезка, роль центра в $\mathbf{O}_p$ играет любая его точка. Не это ли имел в виду А. К. Толстой?

целому модулю. Однако в последнее время все более многочисленны попытки использовать p-адический анализ в современной математической физике. Некоторые из этих попыток основаны лишь на принципе, что любая математическая конструкция должна иметь физический смысл (причем чем проще и красивее конструкция, тем фундаментальнее ее физический смысл). Другие, по существу, идут «от противного»: если обычного анализа недостаточно для современной физики, попробуем p-адический. Наконец, есть еще одно важное соображение, для которого можно искать физическую интерпретацию. Оно состоит в том, что обычное вещественное поле $\mathbf{R}$ вместе с полями $\mathbf{Q}_p$ для всех простых чисел p можно объединить вместе в один красивый объект: кольцо *аделей* $\mathbf{A}$.

Элементами $\mathbf{A}$ являются по определению последовательности вида

$$a = (a_\infty, a_2, a_3, a_5, \ldots, a_p, \ldots), \qquad (6)$$

где $a_\infty \in \mathbf{R}$, $a_p \in \mathbf{Q}_p$, причем для почти всех p (т. е. всех, за исключением конечного числа) $a_p \in \mathbf{O}_p$. Арифметические операции и предельный переход для аделей определяются покомпонентно. На адели переносится весь аппарат алгебры и анализа. Замечательно, что при этом «адельные» теоремы связывают воедино вещественные и p-адические факты. Например, многие элементарные и специальные функции, встречающиеся в математике и в математической физике, имеют интересные p-адические и адельные аналоги. Я расскажу здесь лишь о двух примерах таких аналогов.

3. Числа Тамагавы. Обратимые элементы кольца $\mathbf{A}$ называются *иделями*. Нормой иделя $a \in \mathbf{A}^*$ называется число

$$\|a\| = \prod_p \|a_p\|_p.$$

Это бесконечное произведение на самом деле сводится к конечному, так как почти все сомножители равны 1. Заметим теперь, что поле $\mathbf{Q}$ вкладывается в кольцо $\mathbf{A}$: рациональному числу r соответствует адель $\underline{r} = (r, r, r, \ldots)$, где r на первом месте рассматривается как вещественное число, на втором — как 2-адическое, на третьем — как 3-адическое и т. д.

Адели вида $\underline{r}$, $r \in \mathbf{Q}$, называются *главными*. Ясно, что если $r \neq 0$, то главный адель $\underline{r}$ обратим. Более того, имеет место замечательное соотношение.

Задача 7. Докажите, что адельная норма главного аделя $\underline{r}$ при $r \neq 0$ равна 1.

Пусть теперь M — гладкое алгебраическое многообразие, определенное над полем $\mathbf{Q}$ (т. е. задаваемое системой алгебраических уравнений с коэффициентами из $\mathbf{Q}$). Тогда имеет смысл говорить о точках M над любым кольцом K, содержащим $\mathbf{Q}$. Обозначим M_K множество точек M над K. Если $K = \mathbf{R}$, то, как известно из курса анализа, по каждой дифференциальной форме старшей степени на M можно определить меру μ_K на M_K. При этом если форма умножается на рациональное число r, то мера $\mu_{\mathbf{R}}$ умножается на $|r|$.

Оказывается, эту конструкцию можно обобщить и на случай $K = \mathbf{Q}_p$ или $\mathbf{A}$. При этом если форма умножается на r, то мера $\mu_{\mathbf{Q}_p}$ умножается на $\|r\|_p$, а мера $\mu_{\mathbf{A}}$ — на $\|\underline{r}\| = 1$.

Предположим теперь, что на M естественно выделяется класс форм старшей степени, определенных с точностью до рационального множителя. Например, если многообразие M однородно (т. е. на нем действует достаточно большая группа преобразований, способная перевести любую точку M в любую другую), то инвариантная рациональная дифференциальная форма старшей степени, если она существует, определяется однозначно с точностью до умножения на рациональное число. Таким образом, соответствующая адельная инвариантная мера $\mu_{\mathbf{A}}$ определена однозначно. Она называется *мерой Тамагавы*.

Важным примером описанной ситуации являются многообразия $M = G_{\mathbf{A}}/G_{\mathbf{Q}}$, где G — алгебраическая группа. Интеграл меры $\mu_{\mathbf{A}}$ по многообразию M в этом случае называется *числом Тамагавы* группы G и является очень интересной характеристикой этой группы. Можно показать, что число Тамагавы $\tau(G)$ для широкого класса групп G равно произведению вещественного объема многообразия $G_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{Z}}$ и p-адических объемов многообразий $G_{\mathbf{Q}_p}$. Тем более удивительно, что $\tau(G)$ обычно оказывается очень простой константой, чаще всего единицей. Разберем для иллюстрации два простейших примера.

Пусть сначала G — аддитивная группа поля, так что $G_K = K$. Инвариантная форма равна dx, а соответствующая мера μ — это обычная мера Лебега $\mu_{\mathbf{R}}$ на $\mathbf{R}$, или мера μ_p на $\mathbf{Q}_p$, принимающая значение r на шаре радиуса r, или мера $\mu_{\mathbf{A}}$ на $\mathbf{A}$, которая является произведением меры

$\mu_{\mathbf{R}}$ и всех мер μ_p. В этом случае все объемы, о которых говорилось выше, равны 1. В самом деле, $G_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{Z}}$ отождествляется с единичным отрезком, а $G_{\mathbf{O}_p}$ — с p-адическим отрезком $\mathbf{O}_p$.

Теперь в качестве G возьмем окружность на плоскости, задаваемую уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Групповая операция определяется отождествлением точки (x, y) либо с комплексным числом $x + iy$, либо с матрицей

$$\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}.$$

Инвариантная форма имеет вид $dx/y = -dy/x$. Пространство $G_{\mathbf{R}}/G_{\mathbf{Z}}$ в этом случае получается факторизацией вещественной окружности со стандартной мерой $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ по подгруппе $\mathcal{U}_4$. Его объем равен $2\pi : 4 = \pi/2$.

Пространство $G_{\mathbf{O}_p}$ — «p-адическая окружность» — устроено по-разному в зависимости от вычета $p \bmod 4$.

З а д а ч а 8. Докажите, что p-адическая окружность состоит из:

а) четырех непересекающихся шаров радиуса 1/4, если $p = 2$;

b) $p - 1$ шаров радиуса p^{-1}, если $p \equiv 1 \bmod 4$;

c) $p + 1$ шаров радиуса p^{-1}, если $p \equiv -1 \bmod 4$.

Таким образом, число Тамагавы и в этом случае равно 1, так как

$$\prod_{p=4k+1} (1 - p^{-1})^{-1} \cdot \prod_{p=4k-1} (1 + p^{-1})^{-1} = \\ = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots = \pi/4.$$

(Первое равенство проверяется непосредственно с помощью тождества $(1 - p^{-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k}$, а второе доказывается в курсе анализа.)

Наиболее подготовленным читателям можно попытаться решить более сложную задачу.

З а д а ч а 9. Вычислите число Тамагавы для трехмерной сферы S^3, групповая структура на которой возникает при отождествлении S^3 с множеством кватернионов единичной нормы (см. ниже § 4).

4. p-адическая ζ-функция. Классическая ζ-функция Римана определяется как сумма ряда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad (7)$$

который сходится при $\operatorname{Re} s > 1$. Мы увидим сейчас, что эта функция может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость и что ее значения в целых отрицательных точках имеют очень интересные арифметические свойства. Для этого нам понадобятся элементы комплексного анализа (понятие голоморфной функции и аналитического продолжения, теорема Коши о вычетах, свойства элементарных функций).

Рассмотрим интеграл

$$I(s) = \int \frac{z^s}{e^z - 1} \cdot \frac{dz}{z}$$

по контуру C, показанному на рис. 1.

Здесь под z^s понимается величина $\exp(s(\ln|z| + i \arg z))$, где $0 < \arg z < 2\pi$. Таким образом, подынтегральное выражение голоморфно по s и по z при всех

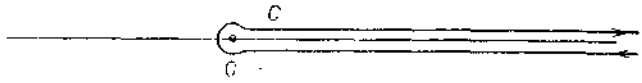

Рис. 1

s и при всех z, кроме точек луча $[0, \infty]$. Интеграл сходится при всех $s \in \mathbf{C}$ и определяет голоморфную функцию $I(s)$ на всей плоскости $\mathbf{C}$.

Вычислим этот интеграл двумя способами. Во-первых, стягивая контур C к дважды проходимому лучу $[0, \infty)$, мы получаем, что при $\operatorname{Re} s > 1$ (при этом условии сходится интеграл в правой части)

$$I(s) = \left(1 - e^{2\pi i s}\right) \int_0^\infty \frac{x^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}.$$

Далее, так как

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

(формула суммы геометрической прогрессии) и

$$\int_0^\infty x^{s-1} e^{-nx} dx = n^{-s} \Gamma(s)$$

(заменой $y = nx$ сводится к определению Г-функции), мы получаем

$$I(s) = (1 - e^{2\pi i s}) \Gamma(s) \zeta(s) \quad \text{при } \operatorname{Re} s > 1. \qquad (8)$$

Это равенство показывает, что $\zeta(s)$ голоморфно продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением точки $s = 1$.

Во-вторых, при $\operatorname{Re} s < 0$ мы можем дополнить контур C контуром C_N (рис. 2), интеграл по которому стремится

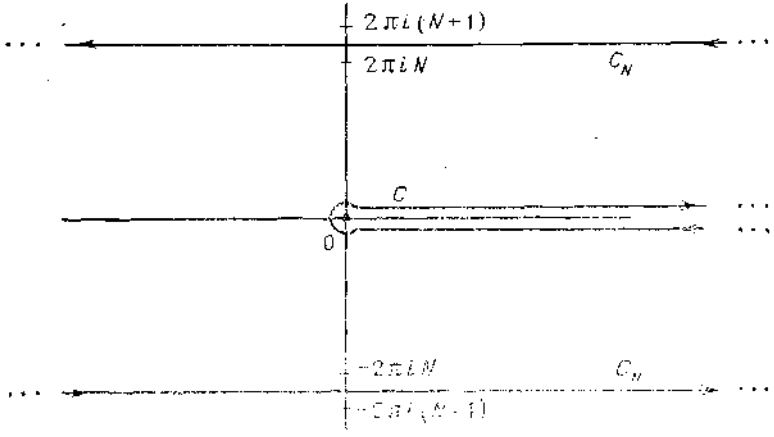

Рис. 2

к 0 при $N \to \infty$, и вычислить полученный интеграл с помощью вычетов.

Получим

$$I(s) = 2\pi i \sum_{n \neq 0} (2\pi i n)^{s-1}.$$

Вспомнив определение z^s и $\zeta(s)$, имеем

$$I(s) = (2\pi)^s e^{\pi i s/2}(1 - e^{\pi i s})\zeta(1 - s) \text{ при } \operatorname{Re} s < 1. \quad (9)$$

Наконец, сравнивая (8) и (9), приходим к равенству

$$2 \cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s) = (2\pi)^s \zeta(1 - s),$$

откуда, в частности, при $s = 2k$, $k \in \mathbf{N}$ следует, что

$$\zeta(1 - 2k) = (-1)^k (2k - 1)! 2^{1-2k} \pi^{-2k} \zeta(2k). \quad (10)$$

Оказывается, правая часть в (10)— рациональное число! Чтобы убедиться в этом, нам понадобятся некоторые элементарные сведения о многочленах и числах Бернулли.

Рассмотрим функцию $f_k(x)$, задаваемую суммой ряда

$$f_k(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k}. \quad (11)$$

Этот ряд сходится в обычном смысле при $k \geqslant 2$ и его сумма является периодической функцией x с периодом 1. (При $k = 1$ ряд сходится условно, если x — не целое число.) Оказывается, эта функция на интервале $(0, 1)$ совпадает с некоторым многочленом степени k:

$$f_k(x) = -B_k(x)/k! \qquad (12)$$

Многочлены $B_k(x)$ называются *многочленами Бернулли*. Их можно определить условиями:

a) $B_0(x) \equiv 1$;

b) $B_k'(x) = kB_{k-1}(x)$;

c) $\int_0^1 B_k(x)\,dx = 0$ при $k \geqslant 1$ *).

Величины $B_k(0)$ обозначаются просто B_k и называются *числами Бернулли*. Легко убедиться, что все они рациональны и что $B_{2k-1} = 0$ при $k > 1$. Из (11) и (12) вытекает, что

$$\zeta(2k) = (2\pi i)^{2k} f_{2k}(0) = -(2\pi i)^{2k} B_{2k}/(2k)!$$

и, следовательно, в силу (10)

$$\zeta(1-2k) = -B_{2k}/2k. \qquad (13)$$

Имеет место замечательная

Теорема (*сравнения Куммера*). *Если $p-1$ не делит k, то*:

a) $\|B_k\|_p \leqslant 1$;

b) при $k \equiv m \bmod (p-1)p^N$ справедливо сравнение

$$(1-p^k)B_k/k \equiv (1-p^m)B_m/m \bmod p^{N+1}. \qquad (14)$$

Определим p-адическую ζ-функцию $\zeta_p(k)$ формулой

$$\zeta_p(k) = (1-p^{k-1})\zeta(1-k). \qquad (15)$$

Из сравнений Куммера вытекает, что функция $\zeta_p(k)$ равномерно непрерывна на каждом множестве M_a вида $a + (p-1)\mathbf{N}$, $a = 1, 2, \ldots, p-2$. Поэтому она продолжается по непрерывности на пополнение M_a, совпадающее с $\mathbf{O}_p$. Кульминацией всей этой красивой теории Куботы — Леопольдта является интегральное представление продолженной функции, которое является p-адическим аналогом формулы (8)

$$\zeta(k) = \int_{\mathbf{O}_p} x^{-k}\,d\mu(x),$$

*) Доказательство равенства (12) проще всего получить с помощью теории обобщенных функций (см. [КГ]).

где μ — некоторая мера на $\mathbf{O}_p$, сосредоточенная на множестве обратимых чисел. Подробности теории Куботы — Леопольдта читатель может найти в [Ко].

Помимо теоретико-числовых и возможных физических приложений, наличие полей $\mathbf{Q}_p$ существенно расширяет кругозор и интуицию математиков. В принципе для любого определения, теоремы, формулы можно поставить вопрос: а какой у этого факта p-адический аналог? Нередко сама возможность постановки такого вопроса позволяет лучше понять исходную ситуацию. Стоит также отметить, что в последнее время все больший интерес к p-адическому анализу проявляют специалисты по математической физике.

На этом я кончаю экскурс в p-адический анализ и адресую заинтересовавшихся читателей к [Ко], [ГГПШ] и [В] (см. также некоторые упражнения в [КГ] и [К]).

Ответы и указания

1. Вытекает из неравенства $\|a_1 + a_2 + \ldots + a_n\|_p \leqslant \max_i \|a_i\|_p$.

2. Разберите сначала случай $p = 2$.

3. Вспомните доказательство аналогичного свойства десятичных дробей.

4. Если $r = \ldots aaaaab$, где фрагменты a и b имеют одинаковую длину, то $r > 0$ равносильно $b > a$ в обычном смысле.

5. Выразите характеристическую функцию шара через p-адический сигнум.

6. Вытекает из определения сходимости.

7. Воспользуйтесь мультипликативностью нормы и проверьте утверждение для простых чисел и для -1.

8. Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ решается разложением левой части на множители. При $p = 4k + 1$ это можно сделать над полем $\mathbf{Q}_p$, а при $p = 4k - 1$ — над его квадратичным расширением.

9. $\tau(S^3) = 1$.

§ 3. От Q к R: идея порядка; нестандартный анализ

> Взгляни в любую лужу и в ней узришь гада, который пройством своим всех прочих гадов превосходит и затемняет.
>
> *М. Е. Салтыков-Щедрин.* Сказки

Есть еще один способ перейти от рациональных чисел к вещественным. Он не использует понятия расстояния, а опирается на естественный порядок в множестве $\mathbf{Q}$. В этом подходе вещественное число c определяется как

сечение в множестве рациональных чисел, т. е. разбиение $\mathbf{Q}$ на два подмножества A и B так, что все числа $a \in A$ меньше всех чисел $b \in B$. Если в A есть максимальный элемент $a_{\max}$ или в B есть минимальный элемент $b_{\min}$, то c отождествляется с одним из этих элементов (оба случая сразу осуществиться не могут, так как между $a_{\max}$ и $b_{\min}$ нашлись бы другие рациональные числа, которые не входили бы ни в A, ни в B). Если же ни $a_{\max}$, ни $b_{\min}$ не существуют, то c — новое число, не входящее в $\mathbf{Q}$. Оно по определению считается большим, чем все числа из A, и меньшим, чем все числа из B. Для введенных таким образом сечений можно определить все арифметические действия и получить поле, изоморфное $\mathbf{R}$.

Однако здесь также есть повод для размышления. А именно, почему теперь нельзя пойти дальше и рассматривать сечения поля $\mathbf{R}$ как элементы еще большего поля? Формально этому мешает известная теорема о верхней грани, утверждающая, что для любого сечения $\mathbf{R} = A \cup B$ существует либо $a_{\max} \in A$, либо $b_{\min} \in B$.

Но остается вопрос, нельзя ли все-таки вставить между A и B еще одно число c? Например, нельзя ли знаменитый символ ε в анализе считать реально существующей бесконечно малой величиной, удовлетворяющей неравенству

$$0 < \varepsilon < 1/n \text{ для всех } n \in \mathbf{N}? \qquad (1)$$

Оказывается, это вполне возможно, если отказаться от одной из аксиом, входящих в описание поля $\mathbf{R}$. Речь идет об аксиоме Архимеда, утверждающей, что «как бы ни было мало положительное число ε и как бы ни было велико число N, складывая много раз величину ε саму с собой, мы получим число, превосходящее N».

Ясно, что неравенства (1) несовместимы с аксиомой Архимеда. Если же пожертвовать этой аксиомой, то можно построить много «неархимедовых» полей, содержащих $\mathbf{R}$. До некоторого времени эти поля рассматривались как забавные примеры, а соответствующий «нестандартный анализ»— как не имеющий существенных приложений в математике. Однако в 1966 году с помощью нестандартного анализа А. Робинсону и А. Р. Бернстейну удалось решить трудную проблему функционального анализа — доказать существование нетривиального инвариантного замкнутого подпространства для полиномиально компактного оператора в гильбертовом пространстве. Хотя вскоре это решение было переведено на обычный математи-

ческий язык П. Халмошем (а более общий результат проще доказан В. И. Ломоносовым — см. примечание редактора Е. А. Горина к русскому переводу книги Р у д и н а У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975, или оригинальную статью Ломоносова (Функцион. анализ и его прил.— 1973.— Т. 7, № 30)), уже нельзя отрицать плодотворность применения «нестандартного» подхода к классическим задачам. Сейчас появилось много популярных изложений этого подхода — см., например, [Дэ] или [У], где указана также и дополнительная литература.

Здесь я расскажу только об одном оригинальном подходе к построению неархимедова расширения поля $\mathbf{R}$. Этот подход принадлежит английскому математику Дж. Конвею. Он настолько «ничего не требует» от читателя, что уже послужил основой статьи для школьников [ККС] и научно-популярного фантастического рассказа. Конвей называет построенные им числа сюрреальными (сверхвещественными), а мы будем их называть К-числами или *числами Конвея*.

Прежде всего — о записи чисел. В арифметике Конвея используются только два знака: $\uparrow$ и $\downarrow$ (по-английски — «up» и «down»). Вполне упорядоченный набор из этих знаков и есть К-число. Наборы могут быть любой мощности *). Например, пустой набор, как мы увидим ниже, играет роль нуля, и мы будем обозначать его 0.

На множестве всех К-чисел есть два отношения порядка. Одно задается обычным лексикографическим упорядочением. Для него используются термины «больше» и «меньше» и знаки $>$ и $<$. Тот факт, что наборы вполне упорядочены, гарантирует сравнимость любых двух К-чисел.

Для другого отношения Конвей предлагает термины «раньше» и «позже». По определению более раннее число a получается из более позднего b «обрезанием хвоста», т. е. отбрасыванием всех знаков, начиная с некоторого места. Это записывается символом $a \leftarrow b$.

При определении арифметических действий над К-числами используется.

О с н о в н а я л е м м а. *Если A и B — два множества К-чисел, такие что все $a \in A$ меньше всех $b \in B$, то*

---

*) Чтобы избежать теоретико-множественных трудностей, нужно ограничить сверху мощность допустимых наборов. Уже счетные наборы включают в себя все обычные вещественные числа и много «нестандартных».

существует единственное К-*число* c, *обладающее свойствами*:

1) c *разделяет* A *и* B (*т. е.* $a < c < b$ *для всех* $a \in A$, $b \in B$);

2) c — *самое раннее из всех* К-*чисел, разделяющих* A *и* B. *В дальнейшем это число будет обозначаться* $(A : B)$.

Конвей задает правила действия над К-числами, руководствуясь двумя принципами: очередности и простоты. Согласно первому принципу правила действий определяются не сразу для всех К-чисел, а постепенно, начиная с более ранних. Согласно второму принципу результат действия должен быть самым простым из возможных (т. е. самым ранним числом из тех, которые не противоречат ранее полученным результатам).

Пример. Найдем сумму $0 + 0$. Поскольку 0 является самым ранним числом, никаких более ранних результатов у нас нет. Значит, ответ может быть любым К-числом; из всех возможностей мы должны выбрать самую раннюю, а это число 0. Значит, $0 + 0 = 0$.

Конечно, этот пример любопытен, но читателю, привыкшему к строгим определениям анализа, он может показаться легкомысленным. Мы покажем сейчас, что можно строго определить сумму любых К-чисел, следуя принципам Конвея. Для этого введем некоторые обозначения.

Назовем *верхним срезом* x и обозначим $x\urcorner$ множество чисел, более ранних, чем x и больших x; аналогично определяется *нижний срез* $x\llcorner$.

Например, если $x = \uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$, то

$$x\urcorner = \{\uparrow\},\quad x\llcorner = \{\uparrow\downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow, 0\},$$

а *если* $x = 0$, *то* $x\llcorner = x\urcorner = \varnothing$.

Определим теперь сумму двух К-чисел формулой

$$x + y = \{(x\llcorner + y) \cup (x + y\llcorner) : (x\urcorner + y) \cup (x + y\urcorner)\}. \quad (2)$$

Здесь $x\llcorner + y$ означает множество всех чисел вида $a + y$, где $a \in x\llcorner$; аналогичный смысл имеют выражения $x + y\llcorner$, $x\urcorner + y$ и $x + y\urcorner$.

Формула (2) определяет $x + y$ при условии, что уже известны суммы всех более ранних слагаемых (принцип очередности), и делает это наиболее простым способом (см. основную лемму).

Задача 1. Пусть $\uparrow^n$ и $\downarrow^n$, $n \in \mathbf{N}$ означает К-число, записываемое n символами $\uparrow$ или $\downarrow$. Докажите равенства:

a) $\uparrow^m + \uparrow^n = \uparrow^{m+n}$;

b) $\downarrow^m + \downarrow^n = \downarrow^{m+n}$;

c) $\uparrow^m + \downarrow^n = \begin{cases} \uparrow^{m-n} & \text{при } m > n, \\ 0 & \text{при } m = n, \\ \downarrow^{n-m} & \text{при } m < n. \end{cases}$

Утверждение задачи 1 показывает, что совокупность К-чисел содержит аддитивную подгруппу, изоморфную Z.

З а д а ч а 2. Докажите равенство $\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow = \uparrow$.

Таким образом, К-число $\uparrow\downarrow$ играет роль «половинки» К-числа $\uparrow$. Аналогично можно установить, что $\uparrow\downarrow\downarrow$ — это «четвертинка», $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$ — «восьмушка» и т. д.

После этих простейших примеров можно догадаться, что все конечные К-числа образуют аддитивную группу, изоморфную группе Z [1/2] двоично-рациональных чисел. При этом запись двоично-рационального числа r в виде последовательности $\uparrow$ и $\downarrow$ есть не что иное, как «протокол поиска» этого числа в следующем смысле. Мы стартуем из точки 0 на вещественной оси (удобно считать ее расположенной вертикально, так чтобы числа возрастали снизу вверх) и двигаемся вверх или вниз шагами единичной длины. Каждый такой шаг отмечается в протоколе символом $\uparrow$ или $\downarrow$. Так продолжается до тех пор, пока мы не «перешагнем» r. После этого каждый новый шаг по длине делается вдвое короче предыдущего, а его направление по-прежнему отмечается в протоколе символом $\uparrow$ или $\downarrow$. Например, для числа $r = 2\frac{3}{16}$ процесс поиска равносилен записи $r = 3 - 1/2 - 1/4 - 1/8 + 1/16$ и дает К-число $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow$.

Тот же принцип применим ко всем вещественным числам и приводит к их записи в виде бесконечных К-чисел.

З а д а ч а 3. Докажите, что рациональные, но не двоично-рациональные числа соответствуют периодическим (начиная с некоторого места) К-числам.

Для записи периодических К-чисел удобно использовать знак $\frown$ для обозначения периода. Например, запись $\uparrow\uparrow\overbrace{\downarrow}$ означает К-число $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\ldots$, что соответствует вещественному числу 5/3.

Все встреченные нами до сих пор К-числа можно было рассматривать как некоторый своеобразный способ записывать обычные вещественные числа. Этот способ хотя и отличается некоторой наглядностью, но менее удобен для вычислений по сравнению с обычной записью,

Преимущества его выясняются при переходе к нестандартным числам, которые записываются не сложнее обычных.

Рассмотрим, например, К-числа $\omega = \widehat{\uparrow}$ и $\varepsilon = \uparrow \widehat{\downarrow}$.

З а д а ч а 4. Докажите, что для любого $n \in \mathbf{N}$ справедливы неравенства

$$\omega > n, \quad 0 < n\varepsilon < 1.$$

Таким образом, ω — «бесконечно большое», а ε — «бесконечно малое» число. Можно проверить, определив умножение положительных К-чисел формулой

$$x \cdot y = \{(x \cdot y \rfloor) \cup (x \rfloor \cdot y) : (x \cdot y \rceil) \cup (x \rceil \cdot y)\}, \qquad (3)$$

что произведение ω и ε равно $\uparrow$.

К сожалению, эта проверка довольно громоздка, так как в ходе ее придется вычислить произведение всех более ранних чисел. Однако это полезно для того, чтобы освоиться с К-числами.

Теперь, пожалуй, пора вспомнить, что в определении К-чисел говорилось о *вполне упорядоченном* множестве символов $\uparrow$ и $\downarrow$. Напомним, что упорядоченное множество называется вполне упорядоченным, если в любом его подмножестве есть минимальный элемент. Например, множество $\mathbf{N}$ с естественным порядком вполне упорядочено (принцип математической индукции), а множества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ — нет. Замечательно, что счетное множество может быть вполне упорядочено разными способами *). Более того, этих способов несчетное множество! Подробнее об этом можно прочитать в учебниках по теории множеств (см. также некоторые задачи в [К] и [КГ]).

Отметим, что все до сих пор встречавшиеся нам К-числа соответствовали вполне упорядоченному множеству типа $\mathbf{N}$. Вот пример другого типа: число $\widehat{\uparrow}\uparrow$. Казалось бы, это то же самое, что и $\widehat{\uparrow}$: и там, и там — счетное множество символов $\uparrow$. Однако эти множества по-разному упорядочены: первое имеет максимальный элемент, а второе — нет.

З а д а ч а 5. Докажите равенства:

а) $\widehat{\uparrow}\uparrow_n = \omega + n$;

b) $\widehat{\uparrow} = \omega^2$.

*) Читатель, конечно, может спросить, а что это значит «разные способы»? Проще всего ответить так: упорядоченные множества образуют категорию (морфизмы — монотонные отображения), а в любой категории есть понятие эквивалентных объектов.

На этом я закапчиваю краткий экскурс в нестандартный анализ. Те читатели, которым он показался любопытным, могут либо поэкспериментировать с числами Конвея, либо познакомиться с более серьезной литературой (см., например, [КЭШ]).

Ответы и указания

1. Непосредственная проверка по индукции.

2. Проверьте сначала, что $\uparrow\downarrow + \uparrow = \uparrow\uparrow\downarrow$.

3. Доказательство практически то же, что и для периодических десятичных дробей, и основано на формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

4. Первое неравенство следует из определения порядка для К-чисел. Второе следует из неравенства $\varepsilon < 2^{-n}$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

5. a) Применить индукцию. b) Воспользуйтесь формулой (3).

§ 4. От R к C, H и O: алгебры Клиффорда, уравнение Дирака и проективная плоскость над полем из двух элементов

Большинство несведущих людей под словом оккультизм подразумевает столоверчение. Это не так.

Арк. Аверченко. Оккультные науки

1. Комплексные числа играют в математике выдающуюся роль. Во-первых, это простейший (и единственный известный студентам) пример *алгебраически замкнутого поля*. Это значит, что любой многочлен с комплексными коэффициентами от одного неизвестного имеет комплексный корень и, следовательно, разлагается на линейные множители *).

Во-вторых, комплексный анализ, т. е. теория комплексно-значных функций одной или нескольких комп-

*) К сожалению, алгебраические замыкания других полей устроены более сложно. Например, алгебраическое замыкание $\mathbf{Q}_p$ не является полным относительно естественного продолжения p-адического расстояния. Его пополнение C_p описано в [Ко]. Это поле все чаще используется в современной алгебраической теории чисел, но, конечно, его роль не сравнима с полем комплексных чисел.

Сравнительно просто устроено алгебраическое замыкание конечного поля $\mathbf{F}_p$ из p элементов. Это объединение полей $\mathbf{F}_q$, $q = p^n$, $n \in \mathbf{N}$ (см. конструкцию полей $\mathbf{F}_q$ в главе 2). Однако в этом поле нет никакой естественной топологии, кроме дискретной.

лексных переменных, это естественная область изучения аналитических функций. Многие «чисто вещественные» факты теории аналитических функций невозможно понять без рассмотрения их продолжения в комплексную область *).

Наконец, переход от вещественных чисел к комплексным числам и кватернионам допускает обобщения, одно из которых — общая теория *алгебр Клиффорда*.

Изобретатель кватернионов знаменитый ирландский математик У. Гамильтон потратил много лет, пытаясь построить закон умножения трехмерных векторов по образцу умножения комплексных чисел, изображаемых двумерными векторами. Эти попытки, как мы теперь знаем, были обречены на неудачу. И только когда Гамильтон решился отбросить гипотезу о трехмерности новых чисел, ему удалось найти их реализацию. Она оказалась четырехмерной, и поэтому новые числа получили название *кватернионов*. Алгебра кватернионов $\mathbf{H}$ порождается как вещественное пространство обычной единицей 1 и тремя мнимыми единицами i, j, k, связанными соотношениями

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \qquad (1)$$

Именно эти соотношения Гамильтон, говорят, вырезал на перилах моста, через который он переходил во время своих математических прогулок-размышлений.

Однако алгебраическое строение $\mathbf{H}$, пожалуй, лучше отражает другая система соотношений, эквивалентная (1):

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij + ji = jk + kj = ki + ik = 0. \qquad (2)$$

Эта система в свою очередь эквивалентна тождеству

$$(ai + bj + ck)^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) \text{ для всех } a, b, c \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

Гамильтон выделял в кватернионе $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ *скалярную* часть $x_0 \in \mathbf{R}$ и *векторную* часть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

Произведение двух векторных кватернионов распадалось при этом на два слагаемых: *скалярное произведение*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

---

*) Например, почему ряды для $\sin x$ и $\cos x$ сходятся для всех x, а ряд для $\operatorname{arctg} x$ — только для $|x| < 1$? Или почему неопределенный интеграл $\int (1 - x^2)^\alpha dx$ вычисляется явно при $\alpha = 1/2$, но не вычисляется при $\alpha = 1/3$, $1/4$ и т. д.?

и *векторное произведение*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ i & j & k \end{Vmatrix}.$$

Эти операции нашли применения далеко за пределами теории кватернионов. Скалярное произведение вошло в структуру евклидовых и гильбертовых пространств (см. главу 2), а векторное произведение явилось первым примером *операции коммутирования в алгебре Ли* (ср. § 1).

2. Тождество (3) подсказывает общее определение *алгебры Клиффорда* $\mathrm{Cl}(V, Q)$, связанной с линейным пространством V над полем K и квадратичной формой Q в этом пространстве. По определению, $\mathrm{Cl}(V, Q)$ — алгебра над K, порожденная единицей 1 и пространством V с соотношениями

$$v^2 = Q(v) \cdot 1 \quad \text{для всех } v \in V. \tag{4}$$

Задача 1. Проверьте, что алгебры $\mathbf{C}$ и $\mathbf{H}$ являются алгебрами Клиффорда соответственно для $V = \mathbf{R}$, $Q(x) = -x^2$ и $V = \mathbf{R}^2$, $Q(x, y) = -x^2 - y^2$.

Задача 2. Покажите, что комплексная алгебра Клиффорда, соответствующая пространству $\mathbf{C}^n$ и невырожденной квадратичной форме Q, изоморфна при $n = 2k$ алгебре матриц порядка 2^k с комплексными коэффициентами, а при $n = 2k + 1$ — прямой сумме двух таких алгебр.

Вещественные алгебры Клиффорда более разнообразны. Я приведу здесь таблицу алгебр $C_{p,q} = \mathrm{Cl}(\mathbf{R}^{p+q}, Q_{p,q})$, где $Q_{p,q}$ — квадратичная форма вида

$$Q_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2;$$

q/p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	**R**	2**R**	**R**(2)	**C**(2)	**H**(2)	2**H**(2)	**H**(4)	**C**(8)
1	**C**	**R**(2)	2**R**(2)	**R**(4)	**C**(4)	**H**(4)	2**H**(4)	**H**(8)
2	**H**	**C**(2)	**R**(4)	2**R**(4)	**R**(8)	**C**(8)	**H**(8)	2**H**(8)
3	2**H**	**H**(2)	**C**(4)	**R**(8)	2**R**(8)	**R**(16)	**C**(16)	**H**(16)
4	**H**(2)	2**H**(2)	**H**(4)	**C**(8)	**R**(16)	2**R**(16)	**R**(32)	**C**(32)
5	**C**(4)	**H**(4)	2**H**(4)	**H**(8)	**C**(16)	**R**(32)	2**R**(32)	**R**(64)
6	**R**(8)	**C**(8)	**H**(8)	2**H**(8)	**H**(16)	**C**(32)	**R**(64)	2**R**(64)
7	2**R**(8)	**R**(16)	**C**(16)	**H**(16)	2**H**(16)	**H**(32)	**C**(64)	**R**(128)
8	**R**(16)	2**R**(16)	**R**(32)	**C**(32)	**H**(32)	2**H**(32)	**H**(64)	**C**(128)

Здесь для краткости алгебра матриц порядка n над полем или телом K обозначена символом $K(n)$, а прямая сумма двух таких алгебр — символом $2K(n)$.

Доказательство этих утверждений, а также роль алгебр Клиффорда в решении известной задачи о касательных векторных полях на n-мерной сфере описаны в [X] (см. также [K], упражнения в гл. 1).

До сих пор мы рассматривали лишь алгебры Клиффорда, связанные с невырожденными квадратичными формами. Представляет интерес и другой крайний случай — нулевой формы Q. Соответствующая алгебра — это так называемая *внешняя* или *грассманова* алгебра, о которой пойдет речь в главе 2.

3. Одна из алгебр Клиффорда примерно через три четверти столетия после ее открытия была использована замечательным английским физиком Дираком в квантовой теории электромагнетизма. Пытаясь заменить волновое уравнение

$$\Box f := (\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2 - \partial^2/\partial z^2)f = 0^*) \qquad (5)$$

эквивалентным ему уравнением первого порядка по времени (именно такими уравнениями описываются квантовые системы), Дирак предположил, что оператор (5) можно записать в виде квадрата оператора первого порядка:

$$\Box = (\gamma_0\partial/\partial t + \gamma_1\partial/\partial x + \gamma_2\partial/\partial y + \gamma_3\partial/\partial z)^2. \qquad (6)$$

Разумеется, коэффициенты γ_i в этом равенстве не могут быть обычными числами. Они являются образующими алгебры Клиффорда $C_{1,3}$ (см. выше п. 2) или ее комплексной оболочки.

Уравнение Дирака, описывающее элементарные частицы фермионного типа (электроны, мюоны, нейтрино), имеет вид

$$(\gamma_0\partial/\partial t + \gamma_1\partial/\partial x + \gamma_2\partial/\partial y + \gamma_3\partial/\partial z)\vartheta = \mu\vartheta. \qquad (7)$$

Обычно в физической интерпретации предполагается, что γ_i — комплексные матрицы четвертого порядка (ср. утверждение задачи 2), а ϑ — комплексный 4-вектор (так называемый *дираковский спинор*).

4. Среди вещественных алгебр Клиффорда лишь три являются телами: **R**, **C** и **H**. Теорема Фробениуса утверж-

---

*) Знак =: или := показывает, что равенство является определением той части, к которой направлено двоеточие. В нашем случае — определением символа $\Box f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

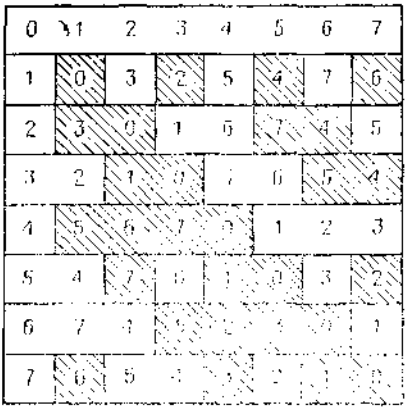

Рис. 3

дает, что других ассоциативных алгебр с делением над **R** нет. Однако если отказаться от ассоциативности, то можно построить весьма любопытный пример алгебры с делением размерности 8 над **R**.

Это алгебра **O** так называемых *чисел Кэли*, или октав, или октонионов. Как линейное пространство над **R**, эта алгебра порождена обычной единицей 1 и семью мнимыми единицами $e_1, \ldots, e_7$ с соотношениями

$$e_i^2 = -1, \quad 1 \leqslant i \leqslant 7; \quad e_i e_j = \pm e_{k(i,j)}. \tag{8}$$

Таким образом, произведение двух базисных единиц с точностью до знака снова является базисной единицей. Выбор знаков и значений $k(i, j)$ изображается таблицей (рис. 3).

Эта таблица обладает замечательными свойствами симметрии (позволяющими ее почти однозначно восстановить по первой строке и первому столбцу):

1) В каждой строке и в каждом столбце встречаются по одному разу все цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

2) В каждой строке и в каждом столбце, кроме первых, половина чисел заштрихована, половина — не заштрихована.

3) В каждом фрагменте вида

$$\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$$

количество заштрихованных и незаштрихованных чисел нечетно (т. е. заштрихованные числа встречаются три раза, незаштрихованные один или наоборот).

Геометрическую интерпретацию этой таблицы мы обсудим ниже, а пока приведем еще одну реализацию алгебры **O**. В ней элемент **O** изображается парой кватернионов, сложение покомпонентно, а умножение задается формулой

$$(q_1, r_1)(q_2, r_2) = (q_1 q_2 - \bar{r}_2 r_1, \; r_2 q_1 + r_1 \bar{q}_2). \tag{9}$$

Здесь черта означает кватернионное сопряжение: если $q = (x_0, \mathbf{x})$, то $\bar{q} = (x_0, -\mathbf{x})$.

Распределение знаков и индексов в формуле (8) связано с красивой геометрической конфигурацией — проективной плоскостью над полем $\mathbf{F}_2$ из двух элементов. Напомним, что проективная плоскость над полем K — это совокупность $P^2(K)$ всех прямых (= одномерных подпространств) в трехмерном пространстве над K. Обычно

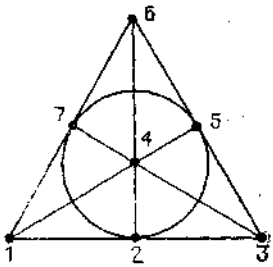

Рис. 4

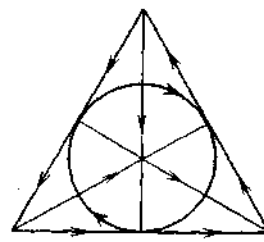

Рис. 5

точку $x \in P^2(K)$ задают набором трех однородных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$, определенных с точностью до умножения на элемент из $K^* = K \setminus \{0\}$. В нашем случае K^* состоит из одной единицы, так что $P^2(\mathbf{F}_2)$ отождествляется с $\mathbf{F}_2^3 \setminus \{0\}$ и, стало быть, состоит из семи точек.

Прямой на $P^2(\mathbf{F}_2)$ называется совокупность α точек x, однородные координаты которых удовлетворяют линейному соотношению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 в этой формуле можно считать координатами точки a на другой проективной плоскости, дуальной к исходной. Итак, мы имеем 7 точек и 7 прямых. Взаимное расположение их можно изобразить схемой (рис. 4).

Таблица умножения в алгебре O связана со схемой рис. 4 таким образом: точки (i), (j) и $(k(i, j))$ лежат на одной прямой в $P^2(\mathbf{F}_2)$, а знак $\pm$ определяется взаимным расположением этих точек. А именно, назовем *ориентацией* прямой l циклический порядок ее точек (т. е. порядок с точностью до циклической перестановки). Будем изображать этот порядок стрелкой на отрезке или окружности, изображающей эту прямую. Зададим ориентацию как на рис. 5.

Правило знаков формулируется так: $e_ie_j = +e_{k(i,j)}$ тогда и только тогда, когда точки (i), (j) и $(k(i, j))$ определяют ориентацию соответствующей прямой.

В заключение предлагаю читателю следующую тему для размышления. На проективной плоскости лежат проективные пространства меньшей размерности: прямые и точки. Заметим, что подалгебра в $\mathbf{O}$, порожденная мнимыми единицами, соответствующими точками некоторой прямой $l \subset P^2(\mathbf{F}_2)$, изоморфна $\mathbf{H}$, а подалгебра, порожденная одной мнимой единицей, изоморфна $\mathbf{C}$. Интересно выяснить, какие алгебры соответствуют проективным пространствам более высоких размерностей.

Введем обозначение

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\ldots(q-1)}{(q^k-1)\ldots(q-1)\cdot(q^{n-k}-1)\ldots(q-1)}.$$

Эта величина является так называемым *q-аналогом* биномиального коэффициента C_n^k (и превращается в него при $q \to 1$).

Задача 3. Сколько точек, прямых, плоскостей и т. д. имеется в n-мерном проективном пространстве над полем $\mathbf{F}_q$?

Ответы и указания

1. Непосредственная проверка.

2. Воспользуйтесь понятием дифференциального оператора с нечетными переменными — см. § 3 главы 2.

3. Докажите, что число k-мерных пространств в $p^n(\mathbf{F}_q)$ равно $\binom{n}{k}_q$.

Глава 2. ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ ЧИСЕЛ

Роль чисел могут играть не только элементы поля или тела. В этой главе я расскажу о других математических объектах, также выступающих в роли чисел. Интересно, что все они возникли сначала в «чистой» математике, а потом были использованы как заменители чисел в математической физике.

§ 5. Матрицы в роли чисел

Экзаменатор: Что такое кратный корень многочлена?

Абитуриент: Ну, это когда мы подставляем число в многочлен — получаем нуль; опять подставляем — опять получаем нуль... И так k раз. А на $(k+1)$-й раз нуля не получаем.

Из мехматского фольклора

1. Замечательным обобщением понятия числа являются матрицы. Мы будем обозначать $\mathrm{Mat}_n(K)$ множество квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из поля K. Элементы матрицы A обозначаются A_{ij} (или a_{ij}), где i — номер строки, а j — номер столбца, в котором стоит элемент. Как известно, $\mathrm{Mat}_n(K)$ — алгебра над полем K: сложение, вычитание и умножение на число производятся поэлементно:

$$(A \pm B)_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}, \quad (\lambda \cdot A)_{ij} = \lambda \cdot A_{ij},$$

а произведение двух матриц задается формулой

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} A_{ik} B_{kj}. \tag{1}$$

Это правило на первый взгляд кажется не очень естественным. Иногда спрашивают, не лучше ли определить умножение матриц поэлементно, как и прочие операции? Нет! Формула (1) задает гораздо более важную и интересную алгебру, чем прямое произведение n^2 экземпляров поля K. Дело в том, что правило (1) вытекает из геометрической интерпретации матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ как линейного преобразования n-мерного пространства V над полем K *). В самом деле, если $\{v_i\}$ — координаты

*) Отметим, что это не единственный способ придать матрицам геометрический смысл. Можно, например, рассматривать матрицу $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ как билинейную форму на V (т. е. отображение $V \times V$ в K, линейное по обоим аргументам). При замене базиса в V матрица A преобразуется по-разному, в зависимости от того, какой ей придается смысл. Матрица линейного оператора меняется по правилу $A \mapsto Q^{-1}AQ$, а матрица билинейной формы — по правилу $A \mapsto Q'AQ$, где Q — матрица замены базиса, Q^{-1} — обратная, а Q' — транспонированная матрица (т. е. $Q'_{ij} = Q_{ji}$). У нас матрица всегда будет отождествляться с линейным оператором.

вектора $\mathbf{v} \in V$, то матрица A задает преобразование $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, где

$$(A\mathbf{v})_i = \sum_j A_{ij} v_j, \tag{2}$$

и непосредственное вычисление показывает, что произведению (т. е. последовательному выполнению) преобразований (2) соответствует произведение матриц по формуле (1).

Итак, матрицы, подобно числам, можно складывать, вычитать и умножать. Что касается деления, то здесь положение более сложное, чем для чисел. Известно, что деление на матрицу A возможно и однозначно лишь в том случае, если она не вырождена, т. е. ее определитель $\det A$ не равен нулю.

Задача 1. Пусть $\mathbf{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Сколько в $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{F}_q)$ обратимых элементов?

Главное же отличие матриц от обычных чисел состоит в том, что операция умножения некоммутативна: AB, как правило, не равно BA. По этой причине использование матриц в роли чисел стало популярным лишь сравнительно недавно, после того как к этому пришли физики в процессе построения квантовой теории. Подробнее об этом можно прочитать в [КГ] (второе издание), а сейчас мы поговорим о другом важном свойстве чисел. А именно, числа можно подставлять в функции в качестве аргумента. Посмотрим, насколько матрицы способны выполнять эту роль чисел.

2. Простейшие функции — это многочлены. Пусть $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Ясно, как придать смысл выражению $P(A)$, где $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$. Надо положить

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k, \tag{3}$$

где A^0 по определению равно единичной матрице, которую мы будем обозначать просто 1 (или 1_n, если важно указать размер матрицы).

Задача 2. Пусть $\mathscr{P} = \mathbf{R}[x]$ — алгебра многочленов от x с вещественными коэффициентами. Найти все гомоморфизмы φ алгебры $\mathscr{P}$ в $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ как алгебры с единицей (т. е. такие, что $\varphi(1) = 1_n$).

Одна из самых старых задач математики — отыскание корней многочленов, т. е. решение уравнений вида

$P(x) = 0$. С течением времени выяснилось, что не менее интересна обратная задача: описать те многочлены, для которых данное число является корнем. Ответ дается известной теоремой Безу: искомое множество многочленов является идеалом в алгебре $\mathscr{P}$, порожденным $x - a$ *).

Посмотрим, какие условия на многочлен $P \in \mathscr{P}$ налагает равенство

$$P(A) = 0. \tag{4}$$

Ответ довольно прост, если матрица A диагональна:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} =: \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

В этом случае $P(A) = \operatorname{diag}(P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n))$. Поэтому равенство (4) равносильно системе уравнений

$$P(a_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5}$$

Таким образом, одна матрица A заменяет собой целый набор чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Пусть теперь матрица A не диагональна, но приводится к диагональному виду: $A = Q^{-1}\Lambda Q$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Легко проверить (но еще важнее понять), что справедливо тождество

$$P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q. \tag{6}$$

Поэтому условие (4) равносильно системе уравнений $P(\lambda_i) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Опять мы видим, что матрица A заменяет набор из n чисел. Из курса линейной алгебры вы знаете, что эти числа суть *собственные значения* матрицы A (т. е. корни *характеристического уравнения* $\det(A - \lambda \cdot 1) = 0$), а их совокупность составляет *спектр* матрицы A. Если все собственные значения A различны, то говорят, что A имеет *простой спектр*. Известно, что если $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ имеет простой спектр, содержащийся в K, то A приводится к диагональному виду. Из всего сказанного вытекает

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы многочлен $P \in K[x]$ обращался в нуль на матрице A с простым спектром, содержащимся в K, необходимо и достаточно, чтобы он обращался в нуль на спектре A.*

---

*) Более привычная для школьников формулировка: «$P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$».

З а д а ч а 3. Докажите, что теорема 1 верна и в том случае, когда спектр A не содержится в K.

Утверждение теоремы 1 является одним из проявлений общего принципа: *матричные элементы составляют лишь бренное тело преобразования A, в то время как спектр выражает его бессмертную душу.*

С другими проявлениями этого принципа мы встретимся ниже, а пока я предлагаю читателю следующую тему для размышления.

З а д а ч а 4. Пусть $[A]$ означает точку проективного пространства $P^{n^2-1}(\mathbf{R})$, соответствующую матрице $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Описать поведение последовательности $\{[A^k]\}$ (в частности, выяснить, когда эта последовательность имеет предел и какой; каково может быть множество ее предельных точек).

3. Рассмотрим теперь для $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ совокупность $K[A]$ всех матриц вида $P(A)$, $P \in K[x]$. Ясно, что $K[A]$ — подалгебра в $\mathrm{Mat}_n(K)$, порожденная A, как алгебра с единицей. С другой стороны, $K[A]$ — факторалгебра $K[x]$ по идеалу $I(A)$, задаваемому условием (4).

Т е о р е м а 2. *Если A — матрица с простым спектром, лежащим в K, то алгебра $K[A]$ изоморфна алгебре всех функций на спектре A со значениями в K.*

В самом деле, из (6) следует, что искомый изоморфизм можно задать соответствием

$$K[A] \ni P(A) \mapsto (P(\lambda_1),\ P(\lambda_2),\ \ldots,\ P(\lambda_n)) \in K^n.$$

Более интересная ситуация возникает, когда спектр матрицы A не прост или не содержится в K.

Модельный пример матрицы с непростым спектром — это «жорданова клетка»:

$$J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$$

З а д а ч а 5. *Докажите, что для $A = J_n(\lambda)$ идеал $I(A)$ состоит из тех многочленов P, для которых*

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{(n-1)}(\lambda) = 0. \qquad (7)$$

Как известно (и легко проверить), спектр $J_n(\lambda)$ состоит из одной точки λ. Это значит, что аналоги теорем 1 и 2 для этой матрицы неверны.

Однако с интуитивной точки зрения удобно считать, что эти теоремы верны всегда, если только правильно понимать, что такое спектр матрицы и какие функции на спектре нужно рассматривать *). Например, будем считать, что спектр $J_n(\lambda)$ состоит не из одной точки λ, а включает и ее *бесконечно малую окрестность порядка* $n-1$, которую мы обозначим $U_{n-1}(\lambda)$.

Теорема 2 подсказывает, что нужно называть ограничением многочлена P на $U_{n-1}(\lambda)$: надо разложить P по степеням $x-\lambda$ и оборвать это разложение на члене $(n-1)$-й степени. Равенства (7) будут тогда условием того, что многочлен P обращается в нуль на $U_{n-1}(\lambda)$. В случае $K=\mathbf{R}$ эта конструкция хорошо известна в анализе и применима к любым гладким функциям, определенным в (обычной) окрестности точки λ. А именно, *n-струей функции* f *в точке* λ называется выражение

$$\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(\lambda)\cdot\frac{(x-\lambda)^k}{k!},$$

которое мы и предлагаем считать ограничением функции f на $U_n(\lambda)$.

Разумеется, $U_n(\lambda)$ нельзя рассматривать как обычную окрестность (ср. § 3). Например, многочлен $(x-\lambda)^{n+1}$ обращается в нуль на этой окрестности, но не имеет других «обычных» нулей, кроме $x=\lambda$.

Разберем теперь ситуацию, когда спектр A не содержится в K. Так будет, если характеристический многочлен этой матрицы A

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda\cdot 1) \tag{8}$$

не разлагается на линейные множители. Пусть, например, χ_A неприводим, т. е. вообще не разлагается на множители меньшей степени в $K[\lambda]$. В этом случае идеал $I(A)$ прост и порождается элементом χ_A. Поэтому алгебра $K[A]$ не имеет делителей нуля и, следовательно, является полем, содержащим K. Обозначим это поле $\tilde{K}$. Его размерность над K равна n, так как, с одной стороны, элементы $1, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ независимы над K (в $I(A)$ нет элементов степени меньше n), а с другой стороны,

*) Здесь, как и в других случаях, можно предложить принцип: если определение мешает справедливости красивой теоремы, измени определение. Особенно полезен этот принцип при переходе от конечномерной ситуации к бесконечномерной.

в силу *тождества Кэли*

$$\chi_A(A) = 0 \tag{9}$$

каждый элемент алгебры $\widetilde{K}$ записывается в виде

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot A + \ldots + a_{n-1} \cdot A^{n-1}, \tag{10}$$

где $a_i \in K$. Таким образом, алгебра $K[A]$ и в этом случае конечномерна над K. Чтобы теорема 2 была справедлива, можно поступить двояко.

Во-первых, можно считать, что спектр A состоит из одной точки, не принадлежащей K, алгебра $K[A]$ состоит из всех функций на спектре со значениями в $\widetilde{K}$.

Во-вторых, можно считать, что спектр A состоит из всех собственных значений A, лежащих в $\widetilde{K}$, а алгебра $K[A]$ состоит из $\widetilde{K}$-значных функций на спектре, обладающих свойством

$$f(\gamma(\lambda)) = \gamma(f(\lambda)),$$

где γ пробегает *группу Галуа* $\mathrm{Gal}\,(\widetilde{K}/K)$ поля $\widetilde{K}$ над K (т. е. совокупность автоморфизмов поля $\widetilde{K}$, оставляющих на месте каждый элемент из K).

Пример 1. Если $K = \mathbf{R}$, $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, то $I(A)$ порождается неприводимым над $\mathbf{R}$ многочленом $x^2 + 1$, а поле K изоморфно $\mathbf{C}$. Мы получили хорошо известную реализацию поля $\mathbf{C}$ вещественными матрицами вида

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot A = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{Vmatrix}.$$

Задача 6. Найти группу $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{C}/\mathbf{R})$.

Пример 2. Если $K = \mathbf{F}_2$, $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$, то $I(A)$ порождается неприводимым над $\mathbf{F}_2$ многочленом $x^2 + x + 1$, а поле K изоморфно $\mathbf{F}_4$. Таким образом, мы получаем простейшую реализацию поля $\mathbf{F}_4$ с помощью четырех матриц второго порядка с элементами из $\mathbf{F}_2$:

$$0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad 1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad x + 1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Задача 7. Найти группу Галуа $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{F}_4/\mathbf{F}_2)$.

4. Мы разобрались более или менее с полиномиальными функциями матриц. Посмотрим, можно ли определить более общие функции матричного аргумента? Для этого вспомним, что в анализе помимо арифметиче-

ских действий есть еще операция предельного перехода. Как известно, многие функции в том или ином смысле приближаются многочленами. Так, аналитическая функция на прямой приближается частичными суммами своего ряда Тейлора, любая непрерывная функция на отрезке равномерно приближается многочленами, а непрерывная функция на окружности $x^2 + y^2 = 1$ — многочленами от x и y (или, что то же, тригонометрическими многочленами от $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$).

Выберем теперь класс функций F, приближаемых многочленами в каком-нибудь смысле и попробуем определить $f(A)$ для $f \in F$ следующим образом. Пусть $\{P_n\}$ — последовательность многочленов, сходящаяся к f. Если последовательность матриц $\{P_n(A)\}$ имеет предел, то этот предел мы и примем за значение $f(A)$. Чтобы это определение было корректным (т. е. не зависело от выбора приближающей последовательности $\{P_n\}$), нужно, чтобы для любой последовательности многочленов P_n, стремящейся к нулю в выбранном нами смысле, последовательность матриц $P_n(A)$ также стремилась к нулю. Разумеется, это зависит и от матрицы A, и от понятия предельного перехода.

Пример 3. Назовем последовательность многочленов сходящейся, если она сходится в каждой точке некоторого конечного множества $M \subset \mathbf{R}$. Из сказанного в п. 3 следует, что выражение $f(A)$ имеет смысл для любой функции f на M и для любой матрицы A с простым спектром, содержащимся в M. При этом если $A = Q^{-1}\Lambda Q$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, то $f(A) = Q^{-1} \operatorname{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n))Q$.

Пример 4. Назовем последовательность многочленов сходящейся, если сами многочлены и все их производные до порядка n имеют предел в каждой точке множества $M \subset \mathbf{C}$. Тогда выражение $f(A)$ имеет смысл для любой гладкой функции f на M и для любой матрицы A порядка $\leqslant n + 1$, спектр которой лежит в M.

Пример 5. Функция $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ может быть приближена многочленами на любом отрезке вещественной оси равномерно вместе с любым числом производных. Однако для матрицы $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ выражение $f(A)$ не определено, так как $1 + A^2 = 0$.

Эти примеры показывают, что понятие функции от матрицы довольно деликатно и требует осторожного обращения. В то же время есть замечательный класс матриц A, для которых выражение $f(A)$ имеет смысл практически для всех функций f на $\mathbf{R}$. Это класс *эрмитовых матриц*, т. е. таких $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$, для которых $A = A^*$. (Напомним, что символ * означает эрмитово сопряжение: $(A^*)_{ij} = \overline{A}_{ji}$.) В частности, эрмитовыми являются все вещественные симметрические матрицы.

З а д а ч а 8. Пусть последовательность многочленов $\{P_n\}$ стремится к нулю в каждой точке вещественной оси. Докажите, что $P_n(A) \to 0$ для любой эрмитовой матрицы A.

5. Описанное выше свойство функций от эрмитовых матриц переносится на матрицы бесконечного порядка. Этот факт играет первостепенную роль в построении математической модели квантовой механики, поскольку физические величины в этой модели изображаются эрмитовыми матрицами бесконечного порядка.

Нужно, однако, уточнить, что мы называем матрицами бесконечного порядка и как определяются действия над ними. Поскольку матрица для нас — это форма записи линейного оператора над векторами, то сначала надо выяснить, что такое бесконечномерный вектор. По аналогии с конечномерным случаем можно было бы назвать бесконечномерным вещественным (соответственно комплексным) вектором любую бесконечную последовательность $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где x_i — вещественные (соответственно комплексные) числа. Такие векторы действительно образуют бесконечномерное линейное пространство. Однако если мы хотим сохранить и в бесконечномерной ситуации такие геометрические понятия, как длина, перпендикулярность, скалярное произведение векторов, то придется ограничить класс рассматриваемых последовательностей. А именно, назовем *допустимой* последовательность $\mathbf{x} = \{x_i\}$, если конечна сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$. Основные свойства допустимых последовательностей мы изложим в виде задачи.

З а д а ч а 9. Докажите, что

а) Для любых допустимых $\mathbf{x} = \{x_i\}$ и $\mathbf{y} = \{y_i\}$ сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$.

b) Допустимые последовательности образуют линейное пространство относительно покомпонентного сложения и умножения на число.

c) Справедливо *неравенство Коши — Буняковского — Шварца*

$$|(\mathbf{x},\ \mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|, \qquad (11)$$

где символом $(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ обозначено *скалярное произведение* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, задаваемое рядом из а), а символом $|\mathbf{x}|$ — *длина* вектора $\mathbf{x}$, равная $(\mathbf{x},\ \mathbf{x})^{1/2}$.

Пространство всех допустимых последовательностей обычно обозначается H и называется *гильбертовым пространством* в честь знаменитого немецкого математика Давида Гильберта, который ввел это пространство для решения интегральных уравнений математической физики. Подробнее об этом см., например, в [КГ], где приведено также несколько красивых задач по геометрии гильбертова пространства.

Теперь можно сказать, какие бесконечные матрицы мы будем рассматривать: те, которые задают непрерывные линейные операторы в гильбертовом пространстве. К сожалению, этот класс матриц не так легко описать в терминах матричных элементов. Достаточным, но не необходимым условием является сходимость двойного ряда $\sum\limits_{i,j} |A|_{ij}^2$, а необходимым, но не достаточным условием — сходимость рядов $\sum\limits_i |A|_{ij}^2$ и $\sum\limits_j |A|_{ij}^2$ при всех j и i соответственно.

Каким же может быть спектр бесконечной эрмитовой матрицы *). Легко привести пример (диагональной) матрицы, имеющей счетное множество собственных значений. Более поучителен следующий пример, показывающий, что спектр может заполнять целый отрезок вещественной оси.

Пример 6. Рассмотрим матрицу A с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } |i-j| = 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для выяснения свойств оператора, задаваемого этой матрицей, установим соответствие между допустимыми

*) Читатель, воспитанный на строгих принципах математического анализа, возможно, откажется обсуждать этот вопрос, пока не будет дано точное определение спектра. Я полагаю, однако, что важнее иметь интуитивное представление о понятии спектра, чем выучить его определение.

последовательностями $\mathbf{x} = \{x_i\}$ и нечетными 2π-периодическими функциями на прямой, полагая

$$\{x_n\} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin(nt). \qquad (12)$$

Можно показать, что образом пространства H при этом соответствии будет совокупность $\widetilde{H}$ всех нечетных 2π-периодических функций φ на прямой, для которых конечен интеграл (в смысле Лебега — см. [КГ])

$$\int_0^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt.$$

При этом скалярное произведение в пространстве H переходит в скалярное произведение в $\widetilde{H}$, задаваемое формулой

$$(\varphi, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t)\overline{\vartheta(t)}\, dt.$$

Задача 10. Найти в пространстве $\widetilde{H}$ длину вектора $\varphi(t) = t$ (при $-\pi < t < \pi$, а далее по 2π-периодичности), а также его разложение по базисным векторам $\varphi_n(t) = \sin nt$; что означает в этом случае равенство $|\varphi|^2 = |\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$?

Задача 11. Докажите, что линейный оператор, задаваемый матрицей A в пространстве H, переходит при соответствии (12) в оператор умножения на $2\cos t$ в пространстве $\widetilde{H}$.

Из утверждения последней задачи вытекает, что выражение $f(A)$ имеет смысл для всех непрерывных функций на отрезке $[-2, 2]$ и что соответствующий оператор в пространстве $\widetilde{H}$ является оператором умножения на $f(2\cos t)$.

Задача 12. Докажите, что матрица A не имеет ни одного допустимого собственного вектора.

Мы видим, что в бесконечномерном случае плохо определять спектр как совокупность собственных значений. «Правильное» определение спектра, пригодное и в конечномерной и в бесконечномерной ситуации, а также обеспечивающее справедливость аналогов теорем 1 и 2 (для эрмитовых матриц), можно найти в учебниках функционального анализа (см., например, [КГ] или [КФ]).

Ответы и указания

1. Первая строчка матрицы может быть любым ненулевым n-вектором с координатами из $\mathbf{F}_q$; это дает $q^n - 1$ возможностей. Вторая строчка может быть любым вектором, линейно независимым с первой строчкой; это дает $q^n - q$ возможностей и т. д. *Ответ*:
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(q^n - q^k\right) = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(q^k - 1\right).$$

2. Гомоморфизм φ полностью определяется матрицей $A = \varphi(x)$, которая может быть произвольной. Явная формула для φ: $\varphi(P) = P(A)$.

3. Пусть $\widetilde{K}$ — расширение K, содержащее спектр A. Примените теорему 1 к A, рассматриваемой как элемент $\mathrm{Mat}_n(\widetilde{K})$.

4. Докажите равенство
$$P\left(J_n(\lambda)\right) = \begin{Vmatrix} P(\lambda) & P'(\lambda) & \frac{1}{2}P''(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}P^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & P(\lambda) & P'(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}P^{(n-2)}(\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}P^{(n-3)}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P(\lambda) \end{Vmatrix}.$$

6. Искомая группа содержит два преобразования поля $\mathbf{C}$: тождественное преобразование и комплексное сопряжение.

7. Группа Галуа состоит из двух преобразований: тождественного и преобразования $x \mapsto x^2$ (проверьте, что это автоморфизм поля $\mathbf{F}_4$).

8. Воспользуйтесь тем, что любая эрмитова матрица приводится к вещественному диагональному виду (см. [КГ] или [КФ]).

9. a) Следует из числового неравенства $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$;

b) вытекает из a): для доказательства c) в вещественном случае воспользуйтесь тем, что квадратный трехчлен
$$P(t) = t^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y})$$
принимает неотрицательные значения (поскольку он равен скалярному квадрату вектора $t \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}$) и, следовательно, имеет неположительный дискриминант.

10. $|\varphi|^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\varphi(t)|^2\, dt = \frac{2}{3}$; $\qquad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\varphi_n$;
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2}{3}\cdot\pi^2.$$

11. Воспользуйтесь тождеством
$$\sin(n+1)t + \sin(n-1)t = 2\cos t \cdot \sin nt.$$

12. Первый способ: непосредственно из определения собственного вектора с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$ выведите равенство $x_n = c \cdot \sin nt$, где $t = \arccos(\lambda/2)$; проверьте, что эта последовательность либо нулевая, либо недопустимая. Второй способ: убедитесь, что оператор умножения на $2\cos t$ в пространстве $\widetilde{H}$ не имеет собственных векторов.

§ 6. Непрерывные матрицы и факторы фон Неймана

> Все разумное действительно,
> все действительное разумно.
>
> *Гегель.* Предисловие
> к «Основаниям философии права».

Понятие матрицы допускает несколько вариантов перехода к бесконечности. Один из них мы разобрали в § 4; в нем элементы матрицы нумеруются индексами i, j, пробегающими все натуральные значения *).

Другой вариант — считать индекс непрерывным, например пробегающим вещественные числа. Тогда векторы превращаются в функции φ вещественной переменной t, матрицы — в функции A двух вещественных переменных t и s, суммирование по дискретному индексу — в интегрирование по непрерывному индексу, а соответствующие линейные преобразования — в интегральные операторы вида

$$A\varphi(t) = \int A(t, s)\,\varphi(s)\,ds. \qquad (1)$$

Разумеется, чтобы все это имело смысл, нужно уточнить, какие функции φ и A мы рассматриваем и как понимаем сам интеграл. Оказывается, что при самом удобном и естественном выборе всех уточнений мы приходим к той же самой теории гильбертовых пространств, о которой говорилось выше. Дело в том, что между пространствами функций и пространствами последовательностей иногда можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее все операции гильбертова пространства: сложение, умножение на число, скалярное произведение и переход к пределу. Пример такого соответствия приведен в § 4 (см. формулу (12) в примере 6).

*) Разумеется, вместо множества $\mathbb{N}$ можно использовать и любое другое счетное множество. Часто бывает удобно вместо $\mathbb{N}$ взять множество $\mathbb{Z}_+$ всех неотрицательных целых чисел, или множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел, или n-мерную решетку $\mathbb{Z}^n$ и т. п.

Несмотря на простоту формулировки, это соответствие является очень сильным и глубоким результатом, имеющим важные математические и физические следствия. Примером первых является тождество $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2} = \pi^2/6$ (см. задачу 9 из § 1 и серию подобных задач в [КГ]), примером вторых — так называемый дуализм «волна — частица» в квантовой механике.

Наконец, есть еще один способ построения бесконечных аналогов матриц. Этот способ принадлежит Дж. фон Нейману, одному из создателей математических основ квантовой теории. Он приводит к удивительным обобщениям линейных пространств, в которых размерность может принимать не натуральные, как обычно, а любые вещественные значения. При жизни фон Неймана это его открытие не получило дальнейшего развития и рассматривалось скорее как математический курьез, вроде неизмеримых по Лебегу множеств. Сейчас теория факторов Неймана стала рабочим аппаратом функционального анализа и математической физики (см., например, [БР]).

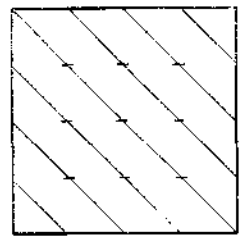

Рис. 6

Я расскажу об этой теории немного подробнее, так как популярных изложений ее (по крайней мере на русском языке) еще не было.

Пример 1. *Непрерывные матрицы.* Мы будем рассматривать матрицы размера $n \times n$ при увеличивающемся n. Попробуем записать их в виде таблиц фиксированного размера (но со все более мелкими строчками и столбцами). Удобно при этом полагать $n = 2^k$, так как алгебра $\mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbf{C})$ вкладывается в $\mathrm{Mat}_{2^l}(\mathbf{C})$ при $k \leqslant l$. Мы естественно придем к следующей интерпретации получающихся объектов.

Проведем в стандартном единичном квадрате главную диагональ (из левого верхнего в правый нижний угол), а также параллельные линии, делящие горизонтальные стороны квадрата на 2^k равных частей. Полученное множество обозначим X_k. Каждую из линий, составляющих X_k, разделим на равные части так, чтобы их горизонтальные проекции имели длину 2^{-k}. Множество X_k разделится при этом на 2^{2k} частей (см. рис. 6 для $k = 2$). Каждую матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbf{C})$ можно рассматривать как кусоч-

но постоянную функцию на множестве X_k. Совокупность этих функций обозначим F_k. Это комплексное линейное пространство размерности 2^{2k}. Пусть $X = \bigcup\limits_k X_k$. Продолжим функции, заданные на X_k, на все множество X нулевыми значениями. Мы получим реализацию объединения $\bigcup\limits_k \mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbf{C})$ всех матричных алгебр порядка 2^k в виде пространства $F = \bigcup\limits_k F_k$ кусочно постоянных функций на X. Иногда удобно вместо множества X рассматривать его модификацию $\widetilde{X}$, которая получается, если расщепить на две точки каждую «двоично-рациональную» точку X *). Преимущество $\widetilde{X}$ состоит в том, что все функции из F становятся непрерывными. Кроме того, множество $\widetilde{X}$ само естественно превращается в абелеву группу. А именно, пусть Γ означает полное, а Γ_0 — ограниченное произведение счетного множества групп $\mathbf{Z}_2$. По определению элементы Γ — произвольные последовательности нулей и единиц, а элементы Γ_0 — финитные последовательности (*содержащие лишь конечное число* единиц). Групповой закон задается компонентным сложением по модулю 2. Множество $\widetilde{X}$ отождествляется с $\Gamma \times \Gamma_0$ (элемент Γ_0 задает «диагональ», а элемент Γ фиксирует точку на этой диагонали).

Описываемая ниже конструкция допускает многочисленные обобщения, в которых роль Γ и Γ_0 могут играть другие группы.

Вернемся к пространству F. В нем можно определить несколько естественных понятий сходимости.

1. Введем в F скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int\limits_X f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx, \qquad (2)$$

где dx означает меру на X, которая на каждом интервале равна длине горизонтальной проекции этого интервала.

*) Эта операция расщепления выглядит очень естественно, если записывать вещественное число $x \in [0, 1]$ с помощью бесконечной двоичной дроби: $x = 0, x_1 x_2 x_3 \ldots = \sum\limits_{k \geqslant 1} 2^{-k} \cdot x_k$. Как хорошо известно, такая запись неоднозначна; любое двоично-рациональное число допускает ровно две записи. Например, $\frac{1}{2} = 0{,}1 = 0{,}01111\ldots$. Если считать, что разным записям соответствуют различные точки, то это и приведет к искомому расщеплению.

Задача 1. Докажите, что на подпространстве $F_k \approx \mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbb{C})$ скалярное произведение (2) можно задать формулой

$$(A, B) = 2^{-k} \operatorname{tr}(AB^*) = \frac{\operatorname{tr}(AB^*)}{\operatorname{tr}(1)}, \qquad (3)$$

где tr означает след матрицы (сумму ее диагональных элементов), а $*$ — переход к эрмитово сопряженной матрице (см. § 4).

Как всегда, имея скалярное произведение, можно определить длину вектора $|f| = (f, f)^{1/2}$, расстояние между векторами $d(f, g) = |f - g|$ и, наконец, понятие предела, считая, что $f_n \to f$, если $|f_n - f| \to 0$.

Пополнение F относительно этой сходимости мы обозначим H. Можно показать, что H — гильбертово пространство, состоящее из функций f на X, квадратично интегрируемых по Лебегу *). Скалярное произведение в H задается той же формулой (2), только интеграл в ней надо понимать в смысле Лебега.

2. Вспомним теперь, что пространство F является алгеброй: любые два элемента $f, g \in F$ принадлежат некоторому F_k и поэтому их можно перемножить как матрицы из $\mathrm{Mat}_{2^k}(\mathbb{C})$. Этот закон умножения допускает наглядную интерпретацию. Будем рассматривать элементы F как функции на всем единичном квадрате, равные нулю вне множества X. Тогда правило умножения запишется так:

$$AB = C, \quad \text{где} \quad C(x, y) = \sum_t A(x, t) B(t, y). \qquad (4)$$

Суммирование в (4) идет по всем вещественным t из отрезка $[0, 1]$. Чтобы понять осмысленность этой процедуры, нужно заметить, что выражение под знаком суммы отлично от нуля лишь для тех t, для которых $x - t$ и $t - y$ имеют вид $n \cdot 2^{-k}$ (так как A и B принадлежат некоторому F_k). Поэтому фактически в сумме (4) лишь конечное число ненулевых слагаемых. Обратите внимание на сходство формулы (4) с обычным правилом матричного умножения!

---

*) Точнее, из классов эквивалентности таких функций: две функции считаются эквивалентными, если они совпадают всюду, кроме точек некоторого множества нулевой меры Лебега. По традиции это уточнение лишь молчаливо подразумевают, а точки H называют просто функциями.

Определим теперь в F норму $\|\cdot\|$, полагая

$$\|A\| = \sup_{B \neq 0} \frac{\|AB\|}{|B|}, \tag{5}$$

где $|\cdot|$ — длина, определенная выше через скалярное произведение (3). Из этого определения ясно, что $\|A\| \geqslant |A|$.

Задача 2. Докажите, что для матриц второго порядка

$$\|A\|^2 = |A|^2 + \sqrt{|A|^4 - |\det A|^2}.$$

Задача 3. Докажите, что для матриц любого порядка N

$$|A| \leqslant \|A\| \leqslant |A| \cdot \sqrt{N}. \tag{6}$$

Пополнение F по норме $\|\cdot\|$ обозначим C. Это некоторая алгебра операторов в H, *симметричная* (т. е. вместе с любым оператором A в C входит и сопряженный оператор A^*) и замкнутая по норме. Поскольку сходимость в C сильнее, чем в H, мы можем рассматривать C как подпространство в H. Пространство C содержится в пространстве $C_0(\widetilde{X})$ всех непрерывных функций на $\widetilde{X}$, стремящихся к нулю на бесконечности. (В самом деле, функции из F_k обладают обоими указанными свойствами, а равномерный предельный переход их не нарушает.)

3. Наконец, введем в F еще одно понятие сходимости. А именно, будем считать, что последовательность $\{A_n\}$ стремится к пределу A (лежащему в некотором пополнении F), если для любого $B \in H$ последовательность $\{A_nB\}$ сходится в H к элементу, который мы обозначим AB. Можно показать, что в этом случае нормы всех матриц A_n ограничены в совокупности и предельный оператор A также ограничен (т. е. имеет конечную норму) в H. Пополняя F в смысле этой сходимости, мы получим некоторую алгебру операторов в H, которую мы обозначим M.

Сходимость, которую мы только что ввели, называется *сильной операторной сходимостью*. Она слабее, чем сходимость по норме, но сильнее, чем сходимость в H. Поэтому имеют место непрерывные вложения

$$C \subset M \subset H.$$

Все три пространства естественно реализуются как пространства функций на X (или на $\widetilde{X}$). Самое широкое пространство H мы уже описали выше как пространство

функций с интегрируемым квадратом в смысле Лебега, а самое узкое — как часть пространства непрерывных функций, равных нулю на бесконечности.

К сожалению, пространство M до сих пор не получило прозрачного описания, а именно это пространство (вернее, алгебра) представляет для нас основной интерес.

Лемма 1. *Пространство M состоит из всех элементов $A \in H$, для которых*

$$\|A\| = \sup_{B \in C} \frac{|AB|}{|B|} \leqslant \infty. \tag{7}$$

Следствие. *Для $A \in M$ и $B \in H$ определены произведения AB и BA, причем*

$$|AB| \leqslant \|A\| \cdot |B|, \quad |BA| \leqslant \|A\| \cdot |B|. \tag{8}$$

Теперь мы изготовим из M две алгебры операторов в пространстве H. Первая алгебра $L(M)$ состоит из операторов левого умножения $L(A)$: $B \mapsto AB$, а вторая $R(M)$ — из операторов правого умножения $R(A)$: $B \mapsto BA$. Здесь A пробегает M, а $B \in H$.

Для любого множества S операторов в гильбертовом пространстве условимся символом $S^!$ обозначать *коммутант* S, т. е. множество операторов в H, перестановочных со всеми операторами из S. Справедлива замечательная

Теорема (фон Нейман). *Если S симметрично (т. е. вместе с любым оператором A содержит и сопряженный оператор A^*), то $S^! = S^{!!!}$, а $S^{!!}$ совпадает с замыканием алгебры операторов, порожденной множеством S, в смысле сильной операторной сходимости.*

Задача 4. Докажите теорему фон Неймана для конечномерных гильбертовых пространств.

Первое основное свойство нашей конструкции описывает

Лемма 2. $L(M)^! = R(M)$, $R(M)^! = L(M)$.

Доказательство. Пусть C — оператор в H и $C \in L(M)^!$. Тогда для любого $B \in M \subset H$ мы имеем

$$C(B) = C(B \cdot 1) = CL(B)(1) = L(B)C(1) = BC(1) = R(C(1))(B) \tag{9}$$

и лемма доказана, если только $C(1) \in M$. Последнее можно установить, пользуясь леммой 1.

Итак, алгебры $L(M)$ и $R(M)$ являются взаимными коммутантами.

Второе основное свойство состоит в том, что пересечение алгебр $L(M)$ и $R(M)$, которое, как легко видеть, совпадает с центром каждой из них, состоит из *скалярных* операторов (т. е. операторов умножения на число). Такие алгебры фон Нейман назвал *факторами*. Это название происходит из замечательного свойства факторов, напоминающего свойство простых чисел или простых групп. А именно, можно показать, что всякая симметричная алгебра операторов, содержащая единицу и замкнутая в сильной операторной топологии, в определенном смысле разлагается на факторы.

З а д а ч а 5. Докажите, что если M — фактор в конечномером гильбертовом пространстве H, а M^1 — его коммутант, то H можно реализовать в виде пространства матриц размера $k \times l$ так, что M будет состоять из операторов умножения слева на квадратные матрицы размера $k \times k$, а M^1 — из операторов умножения справа на квадратные матрицы размера $l \times l$.

Этот результат допускает лишь частичное обобщение на случай бесконечномерных пространств. А именно, можно показать, что если M — фактор в гильбертовом пространстве H и если M как топологическая алгебра с инволюцией изоморфен алгебре $L(H_1)$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H_1, то двойственный фактор M^1 изоморфен алгебре $L(H_2)$, а пространство H отождествляется с гильбертовым тензорным произведением $H_1 \boxtimes H_2$. Такие факторы получили название факторов *типа* I.

Заслуга фон Неймана состоит в том, что он открыл новый тип факторов, которые не изоморфны $L(H)$ ни для какого H. Примерами таких факторов являются как раз построенные выше алгебры $L(M)$ и $R(M)$.

Чтобы показать, что они не принадлежат типу I, введем важное понятие *относительной размерности* двух подпространств V_1 и V_2 в гильбертовом пространстве H, где действует некоторый фактор M. Это понятие вводится только для подпространств, инвариантных относительно всех операторов $A \in M$. Будем называть такие пространства *допустимыми*.

З а д а ч а 6. Докажите, что пространство PH инвариантно относительно M тогда и только тогда, когда ортопроектор P принадлежит M^1.

В дальнейшем мы часто будем отождествлять допустимые пространства с соответствующими ортопроекторами.

Назовем два допустимых подпространства V_1 и V_2 *эквивалентными*, если существует такой элемент $u \in M^1$, для которого

$$u^*u = P_1, \quad uu^* = P_2, \tag{10}$$

где P_i — ортопроектор на V_i.

Задача 7. Докажите, что равенства (10) равносильны утверждению, что оператор u отображает V_1 изометрично на V_2, а на $V_1^\perp$ обращается в нуль.

Будем говорить, что допустимое пространство V_1 *больше* V_2, если в V_1 есть собственное подпространство, эквивалентное V_2.

Теорема (Меррей — фон Нейман). *Для пары допустимых подпространств V_1 и V_2 имеет место одна из трех возможностей:*

a) V_1 *эквивалентно* V_2;

b) V_1 *больше* V_2;

c) V_2 *больше* V_1.

Доказательство этой теоремы использует рассуждение, аналогичное тому, с помощью которого доказывается знаменитая теорема Кантора — Бернштейна о сравнении мощности двух множеств. А именно, таким образом устанавливается, что если для V_1 и V_2 справедливы и b) и c), то верно a). Кроме того, оно опирается на следующий факт.

Лемма 3. *Любые два ненулевых допустимых пространства содержат ненулевые эквивалентные части.*

Доказательство. Пусть V_1 и V_2 — ненулевые допустимые пространства. Для любого унитарного оператора $u \in M^1$ рассмотрим пространства $H_2 = uV_1 \cap V_2$ и $H_1 = u^{-1}H_2$. Ясно, что $H_i \subseteq V_i$ и что H_1 и H_2 эквивалентны. Однако они могут быть нулевыми. Если $uV_1 \cap V_2 = 0$ для всех $u \in M^1$, то пространство $M^1 \cdot V_1$ будет нетривиальным (т. е. отличным от 0 и H) пространством, инвариантным относительно и M и M^1. Но тогда соответствующий проектор P принадлежит пересечению $M \cap M^1$ и, следовательно, равен 0 или 1. Полученное противоречие доказывает лемму.

Я предоставлю читателям самостоятельно закончить доказательство теоремы Меррея — фон Неймана (полезно привлечь лемму Цорна — см. [КГ]) и перейду к определению относительной размерности. Для этого понадобится еще одно определение: допустимое пространство V называется *конечным*, если оно не эквивалентно своему

собственному подпространству (сравните это с определением бесконечных множеств).

Пусть теперь V_1 и V_2 — два конечных допустимых пространства. Будем сравнивать их по аналогии с тем, как это делается с отрезками на вещественной прямой. А именно, если V_1 больше, чем V_2, то выделим в V_1 часть V_2', эквивалентную V_2, и пусть V_3 — ортогональное дополнение к V_2' в V_1. Тогда V_3 — также допустимое конечное подпространство (почему?) и мы можем с парой V_2, V_3 повторить ту же процедуру. Этот процесс может за конечное число шагов привести к нулевому пространству. В этом случае наши исходные пространства «соизмеримы» в следующем смысле:

$$V_1 = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{1i}, \quad V_2 = \bigoplus_{i=1}^{l} V_{2i}$$

и все V_{ij} попарно эквивалентны. Назовем относительной размерностью пары V_1, V_2 число k/l и обозначим его $V_1 : V_2$. Если же процесс сравнения исходных пространств продолжается до бесконечности, то мы определим величину $V_1 : V_2$ как иррациональное число, равное отношению длин таких двух отрезков, сравнение которых приводит к тому же «протоколу», что и сравнение наших пространств.

З а д а ч а 8. Докажите, что $V_1 : V_2$ равно нижней грани множества чисел m/n, для которых

$$V_1 \subseteq \bigoplus_{i=1}^{m} H, \quad V_2 \supseteq \bigoplus_{i=1}^{n} H_i'$$

и все H_i и H_i' эквивалентны друг другу.

Наиболее интересен случай, когда все пространство H конечно (и бесконечномерно в обычном смысле). Такие факторы M получили название факторов *типа* II_1. Для них все допустимые подпространства конечны и можно определить *факторную размерность* $\dim_M V = V : H$, принимающую значения в отрезке $[0, 1]$. Далее, для любого оператора $A \in M$ можно определить его *факторный след* $\mathrm{tr}_M A$, полагая для ортопроектора P

$$\mathrm{tr}_M P = \dim_M PH \tag{11}$$

и распространяя его на остальные операторы по комплексной линейности и сильной непрерывности. Этот «след» сохраняет основное свойство обычного следа

$$\mathrm{tr}_M AB = \mathrm{tr}_M BA. \tag{12}$$

В случае, когда A — частичная изометрия, а $B = A^*$, это следует из определения эквивалентности и относительной размерности допустимых пространств; общий случай выводится из этого.

Теперь вернемся к нашему примеру фактора.

З а д а ч а 9. Докажите, что для $A \in M$ справедливо равенство

$$\mathrm{tr}_M A = \int_X A(x, x)\, dx. \tag{13}$$

З а д а ч а 10. Представьте H в виде ортогональной суммы:

а) двух допустимых относительно $L(M)$ подпространств размерности 1/2;

b) трех подпространств размерности 1/3.

З а д а ч а 11. Установите явно эквивалентность подпространств, построенных в b) задачи 10.

П р и м е р 2. *Квантовый тор* $\mathbf{T}^2$. Название этого примера отражает общую тенденцию связывать с квантовой теорией всякий переход от коммутативных объектов к некоммутативным. Хорошо известно, что каждый компакт X характеризуется алгеброй $C(X)$ непрерывных функций на нем, а гладкое компактное многообразие M — алгеброй $C^\infty(M)$ гладких функций *). Соответствующие квантовые объекты получаются, если перейти к некоммутативным алгебрам.

В случае тора алгебра $C^\infty(\mathbf{T}^2)$ состоит из функций вида

$$\sum c_{k,l} \exp 2\pi i\,(kx + ly), \tag{14}$$

где суммирование идет по двумерной решетке $\mathbf{Z}^2$, а коэффициенты удовлетворяют для любого $N \in \mathbf{N}$ условиям

$$|c_{k,l}| \leqslant \text{const} \cdot (1 + k^2 + l^2)^{-N}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь алгебру с инволюцией A_q, порожденную единицей и двумя элементами u и v с соотношениями

$$u^*u = uu^* = 1,\ v^*v = vv^* = 1,\ uv = qvu, \tag{16}$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$ — комплексное число с $|q| = 1$.

Общий элемент этой алгебры имеет вид

$$\sum_{k,l \in \mathbf{Z}} c_{k,l} u^k v^l, \tag{17}$$

*) Например, точки M восстанавливаются как максимальные идеалы в $C^\infty(M)$, векторные поля на M — как дифференцирования $C^\infty(M)$ и т. п. (ср. § 7).

где лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля. Обычно рассматривают несколько большую алгебру, состоящую из сумм вида (17), где коэффициенты подчинены условиям (15), и называют ее «алгеброй гладких функций на квантовом торе $\mathbf{T}^2_q$». Ясно, что при $q = 1$ определенный таким образом квантовый тор совпадает с обычным.

Оказывается, из алгебры A_q можно, как и в примере 1, изготовить гильбертово пространство H, алгебру M и два ее представления L и R в пространстве H, причем в случае иррационального τ (т. е. в случае, когда q не является корнем из 1) $L(M)$ и $R(M)$ будут факторами типа II_1.

Читателю, желающему овладеть теорией факторов, будет очень полезна

З а д а ч а 12. Докажите, что факторы примера 1 и 2 изоморфны. (Эта задача существенно сложнее предыдущих.)

П р и м е р 3. *Квантовые сферы S^2 и S^3.* Как известно, сфера S^3 является группой (см. § 4), а сфера S^2 — однородным пространством для этой группы. Все эти факты можно сформулировать в терминах гладких функций на них. Например, тот факт, что S^3 действует на S^2, описывается гладким отображением $S^3 \times S^2 \to S^2$, а это отображение, в свою очередь, определяется гомоморфизмом алгебры $C^\infty(S^2)$ в алгебру $C^\infty(S^3 \times S^2) \cong C^\infty(S^3) \mathbin{\widehat{\otimes}} C^\infty(S^2)$. Оказывается, существуют такие некоммутативные деформации A_q и B_q алгебр $C^\infty(S^3)$ и $C^\infty(S^2)$, зависящие от параметра q, что для них по-прежнему имеют смысл все нужные гомоморфизмы. Это позволяет рассматривать A_q и B_q как «алгебры функций» на квантовой группе S^3_q и ее квантовом однородном пространстве S^2_q. Детальное описание этих деформаций и общее введение в теорию квантовых групп можно найти в [РТФ].

О т в е т ы и у к а з а н и я

1. Проверьте, что матричные единицы E_{ij} образуют ортогональную систему относительно обоих скалярных произведений и что $|E_{ij}| = 2^{-k}$ для матриц порядка 2^k.

2, 3. Проверьте, что норма и длина матрицы не меняются при умножении слева или справа на унитарную матрицу. Далее воспользуйтесь тем, что любая матрица записывается в виде $A = U \cdot \Lambda \cdot V$, где U и V — унитарные матрицы, а Λ — диагональ-

ная матрица с неотрицательными элементами. Для таких матриц выведите формулу $\|\Lambda\| = \max_i \lambda_{ii}$.

4. Достаточно доказать, что если S — симметричная алгебра с единицей, то $S^{!!} = S$. Включение $S \subseteq S^{!!}$ очевидно из определения коммутанта. Для доказательства обратного включения введем вспомогательное гильбертово пространство H', состоящее из операторов в исходном гильбертовом пространстве H. Каждому оператору A в пространстве H поставим в соответствие оператор $L(A)$ в пространстве H', действующий по формуле $L(A)B = AB$. Проверьте, что $L(S)^{!!} = L(S^{!!})$. Далее докажите, что ортогональный проектор P_S из H на S принадлежит $L(S)^!$ и, следовательно, перестановочен с $L(S^{!!})$. Поэтому, если $A \in S^{!!}$, то $P_S L(A) = L(A)P_S$, откуда $P_S(A) = A$.

5. Пусть $\mathscr{A}$ — максимальная коммутативная симметричная подалгебра в M, а $\mathscr{B}$ — такая же подалгебра в $M^!$. Спектральная теория операторов (см. [КГ]) утверждает, что существуют такие ортопроекторы $P_1, P_2, \ldots, P_k$ в H, что

$$P_i P_j = \delta_{ij} \cdot P_i, \quad \sum_i P_i = 1 \quad \text{и} \quad A = \left\{ \sum_i \lambda_i \cdot P_i, \ \lambda_i \in \mathbf{C} \right\}.$$

Аналогичный набор проекторов для B обозначим $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$. Докажите, что в пространствах $P_i H$ неприводимо действует алгебра $M^!$, а в пространствах $P_j H$ — алгебра M. Выведите отсюда, что пространства $P_i Q_j H$ одномерны.

6. Если $P \in M$, $A \in M^!$, то $APH = PAH \subseteq PH$. Обратно, если $APH \subseteq PH$ для всех $A \in M^!$, то для $v \in PH$ имеем $APv = PAPv = PAv$, а для $v \perp H$ имеем $APv = 0 = PAv$, ибо $PH^\perp$, как и PH, инвариантно относительно A.

7. Для $v \in V_1$ имеем $uv \in V_2$, ибо $P_2 uv = uu^* uv = uP_1 v = uv$. Далее $|uv|^2 = (uv, uv) = (u^* uv, v) = (P_1 v, v) = |v|^2$. Наконец, для $v \in V_1^\perp$ имеем $|uv|^2 = (uv, uv) = (u^* uv, v) = (P_1 v, v) = 0$.

8. Докажите сначала, что из включений, приведенных в условии, следует, что $V_1 : V_2 \leqslant m/n$. Затем рассмотрите случай соизмеримых пространств, а потом и общий случай.

9. Пусть сначала $A \in F_k$. Тогда легко проверить, что $\mathrm{tr}_M A = 2^{-k} \mathrm{tr}\, A$.

10. a) $H_1 = \{A \in H \mid A(x, y) = 0 \text{ при } x \geqslant 1/2\}$, $H_2 = H_2^\perp$.
b) $H_1 = \{A \in H \mid A(x, y) = 0 \text{ при } x \geqslant 1/3\}$, $H_3 = \{A \in H \mid A(x, y) = 0 \text{ при } x \leqslant 2/3\}$, $H_2 = H_1^\perp \cap H_3^\perp$.

11. В случае a) эквивалентность устанавливается оператором U, где $U(x, y) = \delta\left(x - y - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(x - y + \frac{1}{2}\right)$; в случае b) воспользуйтесь тождеством $\frac{1}{3} = \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{1}{4}\right)^k$.

12. Постройте в алгебре M из примера 1 пару элементов, удовлетворяющий соотношениям (15). В качестве u можно взять диагональный оператор, соответствующий функции $u(x, y) = \varphi(x) \cdot \delta(x - y)$; тогда функция $v(x, y)$ будет сосредоточена на множестве $X_\tau = \{(x, y) \in X \mid \varphi(x) - \varphi(y) \equiv \tau \bmod 1\}$. Простая явная конструкция такой функции автору неизвестна, однако ее существование можно вывести из более общих теорем эргодической теории.

§ 7. Что такое суперсимметрия?

> Я открыл, что Китай и Испания *совершенно одна и та же земля*, и только по невежеству считают их за разные государства. Я советую всем нарочно написать на бумаге Испания, то и выйдет Китай.
>
> *Н. В. Гоголь.* Записки сумасшедшего

1. В математике, как и во всех науках, большую роль играет понятие симметрии. Чаще всего свойства симметрии выражаются на языке групп, однородных пространств и представлений (см. [К1]). Однако в последние 10—15 лет в математике и математической физике все большую роль приобретает новый тип симметрии, который получил название *суперсимметрии*. В математике суперсимметрия означает в каком-то смысле равноправие между плюсом и минусом, четным и нечетным, симметрическим и антисимметрическим и т. д. В физике — это равноправие между фермионами и бозонами.

В двух словах, идеология суперсимметрии состоит в следующем. Каждому «обычному», или «четному», понятию (определению, теореме, конструкции и т. д.) должен соответствовать «нечетный» аналог, который вместе с исходным понятием объединяется в «суперобъект».

Формализм суперсимметрии требует чисел нового сорта, которые отличаются от обычных тем, что умножение не коммутативно, а *антикоммутативно*: $xy = -yx$,

В частности, $x^2 = 0$. Эти новые числа должны использоваться так же широко и на тех же правах, как и обычные числа. Например, они могут играть роль локальных координат на многообразии, и таким образом возникает понятие *супермногообразия* (см., например, [M]).

Для некоторых математических понятий нечетные аналоги достаточно очевидны, для других — более сложны, а порой и неожиданны. Я приведу здесь лишь несколько сравнительно элементарных примеров, предоставляя читателю самому продолжить этот список. Попробуйте, например, ответить на вопрос: что означает суперсимметрия в той задаче, над которой вы сейчас думаете (или думали недавно)?

2. Суперсимметрия в алгебре. Начнем с линейной алгебры. Супераналогом линейного пространства является так называемое $\mathbf{Z}_2$-градуированное линейное пространство, т. е. пространство V, разбитое в прямую сумму $V = V_0 \oplus V_1$, причем элементы V_0 *считаются четными*, а элементы V_1 — *нечетными*. Пару $(\dim V_0, \dim V_1)$ назовем *размерностью* V (точнее, суперразмерностью, но я не хочу злоупотреблять приставкой «супер»).

Задача 1. Определите прямую сумму и тензорное произведение $\mathbf{Z}_2$-градуированных пространств так, чтобы их размерности соответственно складывались и умножались. (Заодно читателю придется определить и правила сложения и умножения для размерностей.)

Задача 2. Назовем индексом $\mathbf{Z}_2$-градуированного пространства $V = V_0 \oplus V_1$ число $i(V) = \dim V_0 - \dim V_1$. Докажите, что $i(V \oplus W) = i(V) + i(W)$; $i(V \otimes W) = i(V)i(W)$.

Замечание 1. Иногда именно индекс считают правильным супераналогом понятия размерности линейного пространства. Единственным недостатком индекса в роли суперразмерности является нарушение принципа: два пространства изоморфны, если их размерности совпадают.

Замечание 2. Понятие индекса $\mathbf{Z}_2$-градуированного пространства уже давно употреблялось в алгебраической топологии. В самом деле, эйлерова характеристика, число Лефшеца и другие альтернированные суммы — все это примеры индексов.

Перейдем теперь к линейным операторам. Если V и W — $\mathbf{Z}_2$-градуированные пространства, то совокупность $L(V, W)$ линейных операторов из V в W также снабжается естественной $\mathbf{Z}_2$-градуировкой. А именно, оператор

$A \in L(V, W)$ записывается блочной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где A_{ij} — оператор из V_j в W_i. Блоки, стоящие на главной диагонали, будем считать четными, а остальные — нечетными. Таким образом, если обозначить $p(x)$ *четность* объекта x (принимающую значения 0 и 1 mod 2), то для оператора A и вектора v будет справедливо соотношение

$$p(Ax) = p(A) + p(x). \tag{2}$$

Этот принцип принимается и для других мультипликативных операций: умножения операторов, тензорного умножения, скалярного умножения векторов и т. д.

Правило 1. *При умножении четности складываются.*

Кроме того, во всех определениях супералгебры, содержащих мультипликативные операции, появляются дополнительные множители ± 1 согласно следующему принципу *):

Правило 2. *Если в какой-то формуле обычной алгебры появляется несколько одночленов с переставленными членами, то в соответствующей формуле супералгебры каждая перестановка соседних членов, скажем x и y, сопровождается добавлением к этому одночлену множителя* $(-1)^{p(x)p(y)}$.

Задача 3. Сформулируйте супераналоги:

a) условия коммутативности $xy = yx$;

b) условия ассоциативности $(xy)z = x(yz)$;

c) тождества Якоби $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Важную роль в линейной алгебре играет понятие следа линейного оператора, действующего из V в V. Напомним, что с точностью до числового множителя след характеризуется свойством $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$, или $\mathrm{tr}\,[A, B] = 0$, где $[A, B] = AB - BA$. В супералгебре коммутатор задается формулой **)

$$[A, B] = AB - (-1)^{p(A)p(B)}BA. \tag{3}$$

*) Нижеследующая формулировка заимствована из [М]. Физики предпочитают более сочную фразу: если что-то четности a течет мимо чего-то четности b, то возникает знак $(-1)^{ab}$.

**) Формула (3) применима лишь к однородным (четным или нечетным) операторам A и B. На общий случай она распространяется по линейности. Это замечание относится и к другим аналогичным формулам.

Определим *суперслед* оператора, записанного в виде (1), формулой

$$\operatorname{str} A = \operatorname{tr} A_{00} - \operatorname{tr} A_{11}. \qquad (4)$$

Задача 4. Докажите, что $\operatorname{str}[A, B] = 0$ для всех A и B.

Задача 5. Докажите, что пространство $L(V, V)$ с операцией суперкоммутирования является *супералгеброй Ли* (проверьте выполнение тождества Якоби).

Результат задачи 5 можно сформулировать так: суперслед задает гомоморфизм супералгебры Ли $L(V, V)$ в супералгебру $\mathbf{R}$ с нулевым коммутатором.

Далее хорошо было бы попытаться определить супераналог определителя и установить тождество

$$\operatorname{sdet}(\exp A) = \exp(\operatorname{str} A), \qquad (5)$$

хорошо известное в четном случае. Это действительно можно сделать, однако далеко не так прямолинейно, как мы рассуждали до сих пор.

Дело в том, что свойства определителя естественно изучать на языке теории групп Ли *), а эта теория существенно нелинейна.

Попробуйте, например, определить понятие супергруппы так, чтобы совокупность $\mathrm{GL}(V)$ обратимых операторов в суперпространстве V была примером такого объекта. Правильный ответ не прост и формулируется на языке теории супермногообразий, которой посвящен последний раздел этого параграфа.

3. **Суперсимметрия в анализе.** Назовем функцией четных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и нечетных переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ выражение

$$f(x, \xi) = \sum_I f_I(x_1, \ldots, x_n)\,\xi_I, \qquad (6)$$

где суммирование ведется по всем наборам $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots i_k \leqslant n$, ξ_I означает $\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}$, а $f_I(x_1, \ldots, x_n)$ — обычные функции вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Мы будем считать их вещественными, гладкими и финитными (т. е. равными нулю вне некоторого компакта). Выражения (6) образуют, очевидно, алгебру относительно обычных операций сложения и умноже-

*) Группой Ли называется группа, являющаяся также гладким многообразием, причем структуры группы и многообразия согласованы естественным образом: групповые операции являются гладкими отображениями. Большинство групп, используемых в приложениях, — группы Ли.

ния (с учетом соотношений антикоммутации $\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$). Обозначим эту алгебру $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n,m})$. Как известно, основные операции анализа — дифференцирование и интегрирование — можно определить в чисто алгебраических терминах, используя структуру алгебры гладких функций. Этот способ легко поддается «суперизации».

Напомним, что *дифференцированием* алгебры $\mathcal{A}$ называется линейное отображение $\partial\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, обладающее свойством (правило Лейбница)

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b).$$

Задача 6. Докажите, что всякое дифференцирование алгебры $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ имеет вид

$$\partial f = \sum_{k=1}^{n} a_k \partial_k f,$$

где $a_k \in C^\infty(\mathbf{R})$, а $\partial_k = \partial/\partial x_k$ — оператор частной производной по x_k.

Для супералгебры $\mathcal{A}$ естественно определить *супердифференцирование* как отображение $\partial\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, удовлетворяющее аналогичному условию («суперправило Лейбница»)

$$\partial(ab) = \partial(a)b + (-1)^{p(a)p(\partial)} a\partial(b),$$

где $p(\partial)$ — четность супердифференцирования ∂.

В алгебре $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n,m})$ можно определить операторы частных производных ∂_k (соответственно δ_k) как четные (соответственно нечетные) супердифференцирования, нормированные условиями

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}, \quad \partial_i \xi_j = 0, \ \delta_i x_j = 0, \quad \delta_i \xi_j = \delta_{ij}.$$

Я оставлю читателям определение общих дифференциальных операторов в $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n,m})$ и проверку того, что они образуют ассоциативную некоммутативную супералгебру.

Задача 7. Докажите, что любой линейный оператор в пространстве $C_0^\infty(\mathbf{R}^{0,m})$ может быть записан как дифференциальный:

$$A = \sum_{I,J} c_{I;J} \xi_I \cdot \delta_J, \tag{7}$$

где $I = \{i_1 < \ldots < i_k\}$, $J = \{j_1 < \ldots < j_l\}$, а $c_{I;J}$ — вещественные коэффициенты.

Перейдем к интегрированию по суперпространству $\mathbf{R}^{n,m}$. Обычный определенный интеграл по пространству $\mathbf{R}^n$ с точностью до числового множителя характеризуется свойствами:

1) интеграл является линейным функционалом на $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$;

2) интеграл обращается в нуль на образах операторов ∂_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Поэтому естественно определить интеграл по суперпространству так, чтобы он обладал аналогичными свойствами. Мы приходим к формуле

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n,m}} f(x, \xi)\, d^n x\, d^m \xi = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f_{12\ldots m}(x)\, d^n x. \tag{8}$$

Именно с этой формулы началась теория интегрирования на супермногообразиях.

З а д а ч а 8. *Докажите, что любой линейный оператор в пространстве* $C_0^\infty(\mathbf{R}^{0,m})$ *может быть записан как интегральный:*

$$(Af)(\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^{0,m}} A(\xi, \eta)\, f(\eta)\, d^m \eta, \tag{9}$$

где $A(\xi, \eta)$— функция $2m$ нечетных переменных, а интеграл по переменным η предполагается перестановочным с умножением слева на переменные ξ.

З а д а ч а 9. *Докажите, что след оператора* A, *заданного равенством* (9), *можно вычислять по формуле*

$$\operatorname{tr} A = \int\limits_{\mathbf{R}^{0,m}} \overset{\vee}{A}(\xi, \xi)\, d^m \xi, \tag{10}$$

где операция $^\vee$ *переводит одночлен* $\xi_I \eta_J$ *в* $\eta_J \xi_I$.

Очень важным свойством интеграла является его поведение при замене переменных. Для обычного четного интеграла это поведение по существу закодировано в форме записи (в случае одной переменной предложенной еще Лейбницем): интегрируется не функция $f(x)$, а *дифференциальная форма* $f(x)d^n x$. Здесь $d^n x$ — краткое обозначение n-формы $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Если переменные x^i выражены через другие переменные y^j, то форма $d^n x$ переходит в $\dfrac{D(x)}{D(y)}\, d^n y$, где $\dfrac{D(x)}{D(y)}$ — якобиан замены переменных, т. е. определитель матрицы Якоби

$\left\|\begin{matrix}\partial x^1/\partial y^1 & \dots & \partial x^1/\partial y^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial x^n/\partial y^1 & \dots & \partial x^n/\partial y^n\end{matrix}\right\|$. Заметим, что это довольно громоздкое правило замены переменных в интеграле (вспомните упражнения по анализу на вычисление кратных интегралов) является непосредственным следствием двух простых принципов:

1) правило замены для дифференциала:

$$dx^i = \sum_j \partial x^i/\partial y^j \cdot dy^j;$$

2) свойства внешнего произведения $\wedge$: $a \wedge b = -b \wedge a$.

В нечетном случае выражение $d^m\xi$ уже не является тензором! Это новый геометрический объект, который получил название *интегральной формы* или *формы Березина* в честь одного из основоположников теории суперсимметрии Ф. А. Березина (1931—1980). Общее определение интегральных форм естественно давать в контексте теории супермногообразий. Здесь я отмечу только, что уже при линейных заменах переменных величина $d^m\xi$, в отличие от $d^n x$, *не умножается*, а *делится* на определитель соответствующей матрицы, как видно из простейшего примера:

$$\xi_i \to \eta_i = a_i \cdot \xi_i, \quad \int \xi_1 \dots \xi_m d^m\xi = \int \eta_1 \dots \eta_m d^m\eta = 1\ *).$$

Задача 10. а) Вычислите интеграл $\int\limits_{\mathbf{K}^{0,n}} \exp \sum\limits_{i,j} A_{ij}\xi_i\xi_j d^n\xi$.

b) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы A размера $2m \times 2m$ является квадратом некоторого многочлена $Pf(A)$ степени m от коэффициентов этой матрицы.

4. Поговорим теперь о супергеометрии. Как мы видели выше, и алгебра и анализ подводят к необходимости определения понятия *супермногообразия*.

Я не буду здесь давать строгого определения супермногообразия, отсылая читателя к [М], [Л] и [ВВ]. Скажу лишь, что это можно сделать по аналогии с понятием алгебраического многообразия в его современной форме.

---

*) Этот факт имеет принципиальное значение в квантовой теории поля, где с его помощью успешно борются с расходимостями. Тем, кто хочет познакомиться с этим подробнее, я советую прочитать предисловие и введение к [М], а затем указанную там литературу (см., например, [СФ]).

Наивное определение алгебраического многообразия M как множества в аффинном или проективном пространстве над полем K, задаваемого системой алгебраических уравнений, в современной математике сменилось на функторпальное. А именно, M определяется как функтор из категории коммутативных K-алгебр в категорию множеств: каждой алгебре $\mathscr{A}$ над K соответствует множество $M_{\mathscr{A}}$ *$\mathscr{A}$-точек* M, т. е. решений соответствующей системы уравнений с координатами из алгебры $\mathscr{A}$. Если в этом определении заменить термин «коммутативная алгебра» на «суперкоммутативная супералгебра», мы получим определение супермногообразия.

Таким образом, мы отказываемся от теоретико-множественного подхода и описываем все свойства супермногообразий в терминах функций на них. В частности, вместо отображения $M \to N$ мы рассматриваем соответствующий гомоморфизм алгебр $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, а роль точки $m \in M$ играет максимальный идеал в алгебре функций на M. Отметим, что в отличие от обычных многообразий супермногообразие *не определяется* множеством своих точек.

Приведу один простой, но важный пример супермногообразия. Рассмотрим алгебру $\mathscr{A}$ гладких функций $f(t, \tau)$ одной четной переменной t и одной нечетной переменной τ. Эту алгебру можно рассматривать как алгебру гладких функций на супермногообразии M размерности (1, 1), которое является супераналогом обычной прямой. По аналогии с четным случаем назовем *векторным полем на M* дифференцирование алгебры $\mathscr{A}$.

З а д а ч а 11. Докажите, что каждое четное (соответственно нечетное) поле имеет вид

$$v = f(t)\partial/\partial t + g(t)\tau\partial/\partial\tau \text{ (соответственно } \xi = \varphi(t)\tau\partial/\partial t + \vartheta(t)\partial/\partial\tau). \quad (11)$$

Совокупность векторных полей на M образует супералгебру Ли относительно операции суперкоммутирования

$$[v_1, v_2] = v_1 v_2 - (-1)^{p(v_1)p(v_2)}[v_1, v_2]. \quad (12)$$

Замечательно, что привычное нам четное поле $v_0 = \partial/\partial t$ является квадратом нечетного поля $\xi_0 = \partial/\partial\tau + \tau\partial/\partial t$. Это имеет принципиальное значение для теоретической физики. В самом деле, пусть переменная t озна-

чает время. Все законы изменения физических величин со временем формулируются в терминах поля v_0 и, следовательно, должны быть следствиями более фундаментальных законов, формулируемых в терминах поля ξ_0.

Изменение со временем — это специальный случай *действия группы* — в данном случае аддитивной группы $\mathbf{R}$ на многообразии, играющем роль фазового пространства (или пространства состояний) физической системы. Другие примеры возникают при наличии разного рода симметрий у рассматриваемой системы. Роль группы симметрии, как правило, играет некоторая группа Ли (группа параллельных переносов, группа вращений, группа Лоренца, группа Пуанкаре и т. д.). Идея *суперсимметрии в физике* состоит в том, что вместо этой группы Ли нужно рассматривать более широкую *супергруппу Ли*. При этом оказалось, что большинство рассматривавшихся ранее групп симметрий (в частности, все перечисленные выше) обладают естественными расширениями до супергрупп.

Пример. Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированное векторное пространство. Определим супергруппу $\mathrm{GL}(V)$ следующим образом. Для любой суперкоммутативной ассоциативной супералгебры $\mathscr{A}$ определим множество $\mathrm{GL}(V)_{\mathscr{A}}$ как совокупность обратимых матриц вида (1), у которых четные блоки состоят из четных элементов алгебры $\mathscr{A}$, а нечетные блоки — из нечетных. Тем самым мы определили супермногообразие $\mathrm{GL}(V)$. Чтобы ввести на нем структуру группы, нужно определить морфизмы $\mathrm{GL}(V)\times\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ и $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$, задающие закон умножения и переход к обратному элементу. Мы не будем этого делать, поскольку не определили аккуратно, что такое морфизм супермногообразий. Читатель может попытаться восстановить детали самостоятельно или обратиться к [Л] и [М].

Задача 12. Докажите, что формула

$$\operatorname{sdet} A = \det\left(A_{00} - A_{01}A_{11}^{-1}A_{10}\right)\cdot \det\left(A_{11}^{-1}\right) \qquad (13)$$

задает гомоморфизм группы $\mathrm{GL}(V)_{\mathscr{A}}$ в группу $\mathrm{GL}(1)_{\mathscr{A}}$ обратимых элементов алгебры $\mathscr{A}$.

Этот гомоморфизм называют *супердетерминантом* или *березинианом* оператора $\mathscr{A}$ и обозначают также $\operatorname{Ber}\mathscr{A}$.

Задача 13. Сформулируйте правило линейной замены переменных в интеграле (8).

Задача 14. Докажите формулу (5).

Задача 15. Докажите, что Ber определяет гомоморфизм супергруппы $\mathrm{GL}(V)$ в супергруппу $\mathrm{GL}(1)$.

5. Суперсимметрия и арифметика. Это — новый сюжет в математике, которому посвящено пока не так много работ. Интересным примером является недавняя статья голландского математика Д. Спектора «Суперсимметрия и функция Мёбиуса», опубликованная в журнале «Сообщения математической физики» в 1980 г. В ней речь идет о физической интерпретации некоторых теоретико-числовых функций n, в частности, *функции Мёбиуса* *)

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{если } n \text{ является произведением} \\ & k \text{ различных простых чисел,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Главным предметом изучения в статистической механике является так называемая *статистическая сумма* как функция температуры системы. В квантовой теории эта величина равна $\mathrm{tr}\, e^{-\beta P}$, где P — оператор энергии, а β — параметр, обратно пропорциональный температуре ($\beta^{-1} = kT$, где k — постоянная Больцмана). В системе с суперсимметрией основное гильбертово пространство H является суперпространством, а оператор энергии P имеет вид Q^2, где Q — нечетный антиэрмитов оператор. В такой ситуации справедлива *формула Виттена*

$$\mathrm{str}\, e^{-\beta P} = \mathrm{ind}\, \ker P, \qquad (14)$$

где $\ker P = \{x \in H | Px = 0\}$, а ind означает разность размерностей четной и нечетной компоненты (см. п. 1). В частности, левая часть на самом деле не зависит от β! Переходя в (14) к пределу при $\beta \to 0$ или $\beta \to \infty$, можно получить много красивых и важных соотношений (которые, разумеется, зависят от рассматриваемой системы).

В статье Спектора рассматривается модельная система, в которой участвуют бозонные и фермионные частицы, пумеруемые простыми числами. Каждое чистое состояние системы (такие состояния соответствуют векторам ортонормированного базиса в H) определяется наличием заданного числа частиц каждого сорта. Пусть, например, имеется k_i бозонных и ε_i фермионных частиц сорта p_i (напомним, что сорта частиц соответствуют про-

*) Основные свойства этой функции и ее обобщений см. в [КГ], задачи к § 1 гл. 1.

стым числам). Здесь k_i — целое неотрицательное число, а ε_i — либо 0, либо 1 в силу *принципа Паули*. Это состояние удобно нумеровать парой (N, d), где

$$N = \prod_i P_i^{k_i}, \quad d = \prod_i p_i^{\varepsilon_i}.$$

Приведем математическую формулировку того, что физики называют статистикой Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака. Пусть $L_{\pm}$ — пространство одночастичных (соответственно бозонных или фермионных состояний). Тогда полное пространство H имеет вид $S(L_+) \otimes \Lambda(L_-)$, где S означает симметрическую, а Λ — внешнюю алгебру.

Ясно, что N может быть любым натуральным числом, а d — любым делителем N, свободным от квадратов (т. е. не делящимся ни на какой квадрат, отличный от 1). Четность состояния (N, d) определяется числом простых сомножителей в d. А именно, $(-1)^{p(N,d)} = \mu(d)$.

Задача 16. Выведите из формулы Виттена соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \zeta(s)^{-1}. \qquad (15)$$

Ответы и указания

1. Положите $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$, $i = 0, 1$; $(V \otimes W)_i = \bigoplus_j (V_j \otimes W_{j+1})$. Сложение размерностей определяется покомпонентно, а умножение — формулой $(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$. Таким образом, размерность — это элемент алгебры Клиффорда $C_{1,0}$!

2. Отображение $(a, b) \mapsto a - b$ является гомоморфизмом алгебры Клиффорда $C_{1,0}$ в $\mathbf{R}$. Укажите другие гомоморфизмы.

3. a) $xy = (-1)^{p(x)p(y)} yx$; другими словами, четный элемент коммутирует с любым другим, а два нечетных элемента антикоммутируют;

b) формулировка не меняется;

c) $(-1)^{p(x)p(z)} [x, [y, z]] + (-1)^{p(y)p(x)} [y, [z, x]] + (-1)^{p(z)p(y)} [z, [x, y]] = 0.$

Иногда эту формулу называют «правилом крайних членов», поскольку дополнительные множители определяются четностями крайних членов в каждом одночлене. Практически, однако, удобнее использовать другую запись этого тождества: $\operatorname{ad} x[y, z] = [\operatorname{ad} xy, z] + (-1)^{p(x)p(y)} [y, \operatorname{ad} xz]$, где $\operatorname{ad} x$: $y \to [x, y]$.

4. Рассмотрите отдельно случаи двух четных операторов, четного и нечетного оператора и двух нечетных операторов. В последнем случае не забудьте, что коммутатор задается формулой $[A, B] = AB + BA$.

5. См. указание к задаче 4.

6. Непосредственная проверка соответствующих тождеств.

7. Докажите, что операторы-одночлены, входящие в правую часть (7), линейно независимы. Воспользуйтесь так же тем, что $\dim C^{\infty}(\mathbf{R}^{0,m}) = 2^m$.

8. См. указание к задаче 7.

9. Проверьте (10) для случая, когда A — одночлен.

10. a) С помощью линейной замены переменных ξ можно привести матрицу A к блочно-диагональному виду с нулевыми блоками размера 1×1 и невырожденными блоками размера 2×2. *Ответ* $(\det A)^{1/2}$. b) Выражение под знаком интеграла является многочленом от коэффициентов A_{ij}.

11. Векторное поле (как дифференциальный оператор) определяется своими значениями на образующих t и τ алгебры $\mathscr{A}$.

12. Подробное доказательство приведено в [М].

13. $$\int f(x, \xi)\, d^n x d^m \xi = \int f(x(y, \eta), \xi(y, \eta)) \cdot \operatorname{Ber} \frac{D(x, \xi)}{D(y, \eta)}\, d^n y d^m \eta,$$

где $\dfrac{D(x, \xi)}{D(y, \eta)}$ — матрица замены переменных. В такой форме результат справедлив и для широкого класса нелинейных замен, см. [Л].

14. *Один из способов:* замените A на tA, $t \in \mathbf{R}$, и рассмотрите зависимость правой и левой части в (5) от t.

15. Следует из задачи 12 и определения понятия гомоморфизма для супергрупп как групповых объектов в категории супермногообразий.

16. Возьмите в качестве оператора P диагональную матрицу с собственными значениями $\lambda(N, d) = N^{-s}$. (Ср. также вычисление числа Тамагавы для окружности в § 2.)

§ 8. Решеточное дифференциальное и интегральное исчисление

Элементарная длина — то же, что и фундаментальная длина.

Физический энциклопедический словарь, Москва, СЭ, 1983.

1. Физики до сих пор спорят о том, как устроено наше пространство на очень малых расстояниях: является ли оно безгранично делимым, или существует некоторая «элементарная длина». В последнем случае роль число-

вой прямой должно играть некоторое дискретное (т. е. состоящее из изолированных точек) множество. По разным соображениям в качестве такого множества удобно взять бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $h > 0$ или геометрическую прогрессию со знаменателем $q > 1$.

Оказывается, на такой «дискретной прямой» или «решетке» существует красивый аналог классического математического анализа.

2. Рассмотрим сначала случай арифметической прогрессии и предположим для упрощения формул, что $h = 1$. Другими словами, вместо обычной прямой $\mathbf{R}$ мы будем рассматривать «дискретную прямую» $\mathbf{Z}$. Пусть f — вещественная функция на $\mathbf{Z}$ (т. е. бесконечная в обе стороны последовательность вещественных чисел). Все такие функции автоматически непрерывны. Более того, все они дифференцируемы, если определить *решеточную производную* Δf функции f формулой

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n). \tag{1}$$

Решеточным интегралом функции f назовем величину

$$\int_m^n f(k)\,\Delta k =: \sum_{k=m}^{n-1} f(k). \tag{2}$$

Из этих определений немедленно вытекает решеточный аналог формулы Ньютона — Лейбница: если $\Delta f = F$, то

$$\int_m^n f(k)\,\Delta k = F(n) - F(m). \tag{3}$$

Далее, в обычном анализе важную роль играют многочлены

$$P_n(x) = x^n/n!.$$

Они характеризуются следующими свойствами:

$$DP_0 = 0,$$

$$DP_n = P_{n-1} \text{ при } n \geqslant 1$$

и

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $D = d/dx$ — оператор дифференцирования. Решеточным аналогом этих многочленов являются многочлены

$\Pi_n(x)$, характеризуемые условиями:

$$\Delta\Pi_0 = 0,$$
$$\Delta\Pi_n = \Pi_{n-1} \text{ при } n \geqslant 1$$

и

$$\Pi_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4'}$$

где Δ — оператор решеточного дифференцирования.

Задача 1. Вычислить $\Pi_n(x)$.

Задача 2. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n, который принимает целые значения при всех целых x. Доказать, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Pi_k(x), \tag{5}$$

где c_k — целые числа, вычисляемые по формуле

$$c_k = \Delta^k f(0).$$

Формула (5) — решеточный аналог формулы Тейлора.

С помощью многочленов Π_k можно вывести полезные формулы суммирования. Например, чтобы вычислить сумму $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, достаточно заметить, что $x^2 = 2\Pi_2(x) + \Pi_1(x)$ и поэтому

$$S_2(n) = \int_1^{n+1} k^2 \Delta k = \int_1^{n+1} (2\Pi_2(k) + \Pi_1(k))\,\Delta k =$$
$$= 2(\Pi_3(n+1) - \Pi_3(1)) + \Pi_2(n+1) - \Pi_2(1) =$$
$$= 1/3 \cdot (n+1)\,n(n-1) + 1/2 \cdot (n+1)\,n =$$
$$= 1/6 \cdot n(n+1)(2n+1).$$

Для вычисления более общих сумм $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ нужно уметь выражать многочлены $P_m(x)$ через $\Pi_n(x)$ и обратно. Из задачи 2 вытекает, что для каждого n набор $(\Pi_k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n}$, как и $(P_k(x))_{0 \leqslant k \leqslant n}$, является базисом в пространстве всех многочленов степени $\leqslant n$. Поэтому существуют такие коэффициенты (a_{ni}) и (b_{nj}), что

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{ni} P_i(x),$$
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_{nj} \Pi_j(x). \tag{6}$$

Задача 3. Докажите, что при $n \geqslant 1$

$$a_{n1} = (-1)^{n-1}/n,$$
$$b_{n1} = 1/n!.$$

Чтобы полностью вычислить коэффициенты $\{a_{ni}\}$ и $\{b_{nj}\}$, мы воспользуемся тем, что операторы обычного и решеточного дифференцирования связаны формулой

$$\Delta = e^D - 1. \tag{7}$$

Я надеюсь, что у читателя, который хотя бы бегло просмотрел § 5, не возникнет недоумений по поводу смысла выражения e^D (экспоненты от оператора) в правой части равенства (7). Прежде чем доказывать это равенство, уместно вспомнить о шаге решетки h, который мы положили равным 1. В общем случае решеточная производная определяется формулой

$$\Delta_h f(x) = (f(x+h) - f(x))/h. \tag{1'}$$

Задача 4. Докажите, что формула Тейлора для многочленов эквивалентна равенству

$$\Delta_h = (e^{hD} - 1)/h, \tag{7'}$$

которое при $h = 1$ превращается в (7).

Вместо того чтобы вычислять отдельно каждый коэффициент a_{ni} и b_{nj}, мы вычислим их все сразу, найдя так называемые *производящие функции*

$$A(x, y) = \sum_{n \geqslant k \geqslant 0} a_{nk} x^n y^k$$

и

$$B(x, y) = \sum_{n \geqslant k \geqslant 0} b_{nk} x^n y^k.$$

Задача 5. Докажите, что

$$A(x, y) = (1 - y(e^x - 1))^{-1},$$
$$B(x, y) = (1 - \ln(1+x))^{-1}.$$

Вернемся теперь к формулам суммирования. Нас интересуют суммы вида (2), т. е. решеточные интегралы. Поскольку при $h \to 0$ формулы решеточного анализа переходят в формулы обычного анализа, естественно попытаться выразить сумму (2) через обычную первообраз-

ную $\mathscr{F}(x)$ функции f. Такое выражение было найдено два с половиной века тому назад Маклореном и, по-видимому, еще раньше было известно Эйлеру. Оно называется формулой суммирования Эйлера — Маклорена. Идея его вывода (по Эйлеру) чрезвычайно проста. Пусть $F(x)$ — решеточная первообразная функции f. Тогда $\Delta F = f = D\mathscr{F}$, откуда $F = D/(e^D - 1)\mathscr{F}$. Используя числа Бернулли (см. § 2), можно показать, что $x/(e^x - 1) = \sum\limits_{n\geqslant 0} B_n x^n/n!$, и поэтому $F = \sum\limits_{n\geqslant 0} B_n \mathscr{F}^{(n)}/n!$. Отсюда следует искомое равенство:

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = \sum_{s\geqslant 0} B_s \left(\mathscr{F}^{(s)}(n) - \mathscr{F}^{(s)}(m)\right)/s!. \qquad (8)$$

Задача 6. Выведите из формулы Эйлера — Маклорена (8) следующие символические равенства:

$$S_k(n) = ((B+n+1)^{k+1} - (B+1)^{k+1})/(k+1), \qquad (9)$$

$$(B+1)^k = B^k \text{ при } k \geqslant 2. \qquad (10)$$

Понимать эти равенства надо так: после раскрытия скобок все выражения B^k надо заменить на B_k. Заметим, что (10) удобно использовать для рекуррентного вычисления чисел Бернулли. Например, при $k = 2$ мы имеем $B_2 + 2B_1 + 1 = B_2$, откуда $B_1 = -1/2$.

Задача 7. Докажите формулы:

$$\operatorname{ctg} x = 1/x - \sum_{k\geqslant 1} |B_{2k}| \cdot 2^{2k} \cdot x^{2k-1}/(2k)!,$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k\geqslant 1} |B_{2k}| \cdot 2^{2k}\left(2^{2k} - 1\right) \cdot x^{2k-1}/(2k)!.$$

Рассмотрим решеточный аналог экспоненты $e^{\lambda x}$. В обычном анализе эту функцию можно определить либо как сумму ряда $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda^n P_n(x)$, либо как решение дифференциального уравнения $Df(x) = \lambda \cdot f(x)$ с начальным условием $f(0) = 1$.

Задача 8. а) Для каких x сходится ряд

$$E(x) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n \Pi_n(x)$$

и какова его сумма?

б) Покажите, что $E(x)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\Delta E = \lambda \cdot E.$$

3. Перейдем к случаю геометрической прогрессии. Теперь переменная x пробегает множество

$$q^{\mathbf{Z}} = \{q^n \mid n \in \mathbf{Z}\}\ ^*).$$

Обозначим через D_q решеточную производную:

$$D_q f(x) := \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}. \qquad (1'')$$

Продолжая аналогию с п. 2, определим семейство многочленов $\{Q_n(x)\}_{n \geqslant 0}$ условиями:

$$DQ_0 = 0,$$

$$DQ_n = Q_{n-1} \text{ при } n \geqslant 1$$

и

$$Q_n(1) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \geqslant 1. \end{cases} \qquad (1'')$$

Задача 9. Покажите, что

$$Q_n(x) = x^n/(n_q)!,$$

где $(n_q)! = 1_q \cdot 2_q \cdot \ldots \cdot n_q$, а

$$n_q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = (q^n - 1)/(q - 1).$$

Таким образом, многочлены $Q_n(x)$ получаются из $P_n(x)$ заменой знаменателя $n!$ на его «квантовый аналог» (или «q-аналог») $(n_q)!$, в то время как $\Pi_n(x)$ получались из $P_n(x)$ заменой числителя x^n на его решеточный аналог $x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h)$.

Рассмотрим теперь q-экспоненту

$$\exp_q(\lambda x) = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n \cdot Q_n(x). \qquad (11)$$

Из определения $Q_n(x)$ легко выводится, что $\exp_q(\lambda x)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$D_q \exp_q(\lambda x) = \lambda \cdot \exp_q(\lambda x). \qquad (12)$$

которое можно переписать так:

$$\exp_q(qx) = \exp_q(x) \cdot (1 + (q-1)x).$$

---

*) Буква q в различных приложениях имеет разный смысл. Можно, например, считать ее еще одним независимым переменным, пробегающим вещественные или комплексные ненулевые значения; в другом контексте q означает число элементов конечного поля. Есть интересные теории, в которых q — корень из единицы. Наконец, можно считать q просто буквой и рассматривать многочлены, рациональные функции или формальные степенные ряды от q и q^{-1}.

Заменяя здесь x последовательно на qx, q^2x, ..., $q^{n-1}x$ и перемножая эти равенства, мы приходим к соотношению

$$\exp_q(q^n x) = \exp_q(x) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (1 + (q-1)q^k x).$$

Заметим, что в кольце формальных степенных рядов от q (а также, при малых q, в кольце аналитических функций от x) бесконечное произведение

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + (q-1)\, q^k x)^{-1}$$

сходится и удовлетворяет тому же уравнению (12), что и $\exp_q(x)$, с тем же начальным условием $f(0) = 1$ *). Поэтому

$$\exp_q(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + (q-1)\, q^k x)^{-1}.$$

Подставляя вместо x величину $x/(1-q)$, мы получаем замечательное тождество

$$\exp_q\left(\frac{x}{1-q}\right) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k x)^{-1},$$

которое, если вспомнить определение $\exp_q(x)$, записывается в виде

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^k x)^{-1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n/(1-q)^n}{(n_q)!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{(1-q)\ldots(1-q^{n-1})}. \tag{13}$$

В настоящее время для многих элементарных и специальных функций обнаружены нетривиальные q-аналоги. Они естественно появляются в связи с квантовыми группами, теорией чисел, комбинаторикой и топологией. К сожалению, весь этот материал разбросан по многим статьям и препринтам, а частично существует в виде фольклора. Я приведу здесь лишь три интерпретации q-аналога биномиальных коэффициентов

$$\binom{n}{k}_q := \frac{(n_q)!}{(k_q)!\,(n-k)_q)!}.$$

*) Это рассуждение не вполне корректно, так как точка $x = 0$ не лежит в множестве $q\mathbb{Z}$. Однако этот пробел можно устранить.

1. Если q — число элементов конечного поля $\mathbf{F}_q$, то $\binom{n}{k}_q$ — число k-мерных пространств в n-мерном пространстве над $\mathbf{F}_q$ (см. задачу 3 гл. 1).

2. Если q — комплексное число, $|q| = 1$, а u, v — координатные функции квантового тора (см. § 7), связанные соотношением $vu = quv$, то $\binom{n}{k}_q$ — коэффициент в разложении «квантового бинома»:

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q u^k \cdot v^{n-k}.$$

3. Пусть q — формальная переменная. Величина $\binom{n}{k}_q$ является многочленом степени $k(n-k)$ от q:

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{s=0}^{k(n-k)} m^s_{n,k} \cdot q^s.$$

Оказывается, коэффициенты $m^s_{n,k}$ допускают следующую замечательную интерпретацию. Рассмотрим два пространства, в которых естественно действует симметрическая группа S_n: пространство $L^- = \Lambda^k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ однородных гармонических многочленов степени k от антикоммутирующих переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и пространство $L^+ = \mathcal{H}^s_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однородных гармонических многочленов степени s от обычных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Термин «гармонический» здесь означает, что рассматриваемый многочлен аннулируется всеми S_n-инвариантными дифференциальными операторами вида

$$\Delta_h = \partial_1^h + \partial_2^h + \ldots + \partial_n^h,$$

где ∂_i означает оператор дифференцирования по i-й переменной, а в качестве k достаточно взять значения $1, 2, \ldots, n$ в случае L^+ и значение 1 в случае L^-. Пусть $\mathrm{Hom}_{S_n}(L^+, L^-)$ означает пространство линейных операторов из L^+ в L^-, перестановочных с действием S_n. Тогда

$$\dim \mathrm{Hom}_{S_n}(L^+, L^-) = m^s_{n,k}.$$

Ответы и указания

1. $\Pi_n(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)/n!$.

2. Применить Δ^k к обеим частям равенства (5) и положить $x = 0$.

3. Индукция по n (см. также последующий текст).

4. Непосредственная проверка.

5. Выведите рекуррентные соотношения:

$$a_{n,k+1} = \sum_{n \geqslant s \geqslant 1} (-1)^{s-1} a_{n-s,k}/s$$

и

$$b_{n,k+1} = \sum_{n \geqslant s \geqslant 1} b_{n-s,k}/s!.$$

6. а) Прямое вычисление.

б) Следует из а).

7. Для вывода первой формулы запишите котангенс в виде

$$i \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}};$$

для второй воспользуйтесь тождеством

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

8. а) Для $x \geqslant 0$

$$E(x) = (1 + h)^{x/h}.$$

9. Индукция по n.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[А] Атья М. Лекции по К-теории.— М.: Мир, 1967.

[Б] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.—2-е изд.— М.: Наука, 1986.

[БР] Браттели О., Робинсон Д. В. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.— М.: Мир, 1985.

[В] Вейль А. Основы теории чисел.— М.: Мир, 1972.

[ВВ] Владимиров В. С., Волович И. В. Введение в суперанализ // Теорет. и мат. физика.— 1984.— Т. 59, № 1.— С. 3—27; Т. 60, № 2.— С. 169—198.

[ГГПШ] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И. Теория представлений и автоморфные функции.— М.: Наука, 1966.— (Обобщенные функции.— Вып. 6.)

[ГК] Гельфанд И. М., Кириллов А. А. Структура тела, связанного с полупростой расщепимой алгеброй Ли // Функцион. анализ и его прил.— 1969.— Т. 3, № 1.— С. 7—26.

[ГМ] Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. 1: Введение в теорию когомологий и производные категории.— М.: Наука, 1988.

[Д] Диксмье Ж. Об алгебрах Вейля // Математика (сб. переводов).— 1969.— Т. 13, № 4.— С. 16—44.

[К] Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.—2-е изд.— М.: Наука, 1978.

[Ко] Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функция.— М.: Мир, 1981.

[КГ] Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа.— М.: Наука, 1979.— 2-е изд.— М.: Наука, 1988.

[КЭШ] Картье П. Сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений и нестандартный анализ // УМН.— 1984.— Т. 39, № 6.— С. 57—76;
Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1984.— Т. 39, № 6.— С. 57—127.

[ККС] Кириллов А. А., Клумова И. Н., Сосинский А. Б. Сюрреальные числа // Квант.— 1979.— № 11.— С. 2—9.

[Л] Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий // УМН.— 1980.— Т. 35.— № 1.— С. 3—57.

[М] Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия.— М.: Наука, 1984.

[РТФ] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ.— 1989.— Т. 1,— № 1.— С. 178—206.

[СФ] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.

[У] Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ?— М.: Наука, 1987.

[ФН] Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.

[Х] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1977.

[Э] Математическая энциклопедия. Т. 1—5.— М.: Советская энциклопедия, 1982—1985.

ОГЛАВЛЕНИЕ