

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Книга посвящена проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Изложены как известные, так и ряд новых результатов, связанных со свойствами стохастических интегралов, стохастическими разложениями процессов Ито, аппроксимацией повторных стохастических интегралов, численными методами для нелинейных и линейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито. Книга адресована специалистам по теории случайных процессов, вычислительной математике, программистам, аспирантам и студентам старших курсов.

Оглавление

1. О стохастических дифференциальных уравнениях: определения, свойства, проблемы, применения	19
1.1. О различных численных подходах, применяемых к стохастическим дифференциальным уравнениям	19
1.2. Некоторые сведения из теории вероятностей	20
1.2.1. Сходимость случайных последовательностей	20
1.2.2. Некоторые неравенства для математических	23
1.2.3. Случайные процессы	25
1.2.4. Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс	30
1.3. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения	34
1.3.1. Стохастический интеграл Ито	34
1.3.2. Процессы Ито	40
1.3.3. Формула Ито	42
1.3.4. Стохастические дифференциальные уравнения Ито	44
1.3.5. Стохастический интеграл Стратоновича	49
1.3.6. Стохастические дифференциальные уравнения	55
1.4. Математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений	57
1.4.1. Общий вид нелинейных моделей стохастической динамики	57
1.4.2. Линейные модели стохастической динамики	61
1.5. Примеры стохастических моделей физических и технических систем	67
1.5.1. Стохастическая модель тепловых флуктуации частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста	67
1.5.2. Автоколебательная электрическая система (ламповый генератор)	71
1.5.3. Чандлеровские колебания	74
1.5.4. Стохастические модели химической кинетики и модели регуляции численности конкурирующих видов	76
1.5.5. Модели финансовой математики	78

1.5.6. Солнечная активность	79
1.5.7. Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений	80
1.6. Некоторые задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями	81
1.6.1. Фильтрация	81
1.6.2. Оптимальное стохастическое управление	83
1.6.3. О стохастической устойчивости	85
1.6.4. Оценивание параметров	92
1.7. О неэффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям	93
2. Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	97
2.1. Введение	97
2.2. Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	100
3. Стохастические разложения процессов Ито	113
3.1. Введение	113
3.2. Дифференцируемость по Ито случайных процессов	115
3.3. Унифицированные разложения Тейлора-Ито	119
3.3.1. Первая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито	120
3.3.2. Вторая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито	129
3.4. Разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Сравнение с унифицированными разложениями Тейлора-Ито	132
3.5. Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов	137
3.6. Разложение Тейлора-Стратоновича	141
3.7. Сильная сходимость унифицированного разложения Тейлора-Ито	144
3.8. Сильная сходимость разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора-Стратоновича	146
3.9. Примеры разложений в ряды Тейлора-Ито	150
3.9.1. Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито	150
3.9.2. Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых многомерных стохастических дифференциальных уравнений Ито	153
4. Методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов	159
4.1. Введение	159
4.2. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье	164
4.2.1. Соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича	165
4.2.2. Разложение повторных интегралов Стратоновича в кратные ряды	169

из произведений стандартных гауссовских величин	
4.2.3. Среднеквадратическая аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича	181
4.2.4. Аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью тригонометрической системы функций .	188
4.2.5. Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций	196
4.3. Метод Г.Н.Милыдтейна разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича	200
4.3.1. Введение	200
4.3.2. Примеры разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г.Н.Мильштейна	202
4.4. Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье и метода Г.Н. Мильштейна	203
4.5. Разложение повторных стохастических интегралов с использованием полиномов Эрмита	206
4.6. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах	209
4.7. Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов	213
4.7.1. Введение	213
4.7.2. Аддитивное разделение переменных	215
4.7.3. Мультипликативное разделение переменных	219
4.8. Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам, основанное на кратных рядах Фурье	221
4.8.1. Введение	221
4.8.2. Симметризованный стохастический интеграл по пуассоновским процессам	222
4.8.3. Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам	227
5. Сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	233
5.1. История вопроса	233
5.2. Разложения Тейлора-Ито и общие представления явных сильных численных методов порядка $g/2$	236
5.3. Методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито	244
5.3.1. Метод Мильштейна	244
5.3.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	246
5.3.3. Явный сильный одношаговый численный метод порядка 2.0	252
5.3.4. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	255
5.4. Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме	259

Вагнера и Платена	
5.4.1. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	259
5.4.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0	261
5.4.3. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	263
5.4.4. Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена	267
5.5. Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Стратоновича	68
5.5.1. Явный сильный одношаговый метод порядка $r/2$	268
5.5.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.0	271
5.5.3. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	272
5.5.4. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0	273
5.5.5. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	275
5.6. Конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора-Ито	277
5.6.1. Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций	278
5.6.2. Явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0	280
5.6.3. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5	280
5.6.4. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0	283
5.6.5. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5	286
5.6.6. О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных методов	293
5.7. Неявные одношаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	295
5.7.1. Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.0	296
5.7.2. Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.5	298
5.7.3. Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.0	299
5.7.4. Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.5	300
5.8. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	302
5.8.1. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.0	302
5.8.2. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5	303
5.8.3. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0	304

5.8.4. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5	306
5.9. Явные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	309
5.9.1. Явный двухшаговый сильный метод порядка 1.0	309
5.9.2. Явные двухшаговые сильные методы порядка 1.5	310
5.9.3. Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.0	311
5.9.4. Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.5	312
5.10. Неявные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	314
5.10.1. Неявные двухшаговые сильные методы порядков 1.0 и 1.5	314
5.10.2. Неявные двухшаговые сильные методы порядков 2.0 и 2.5	316
5.11. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	317
5.11.1. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 1.0 и 1.5	317
5.11.2. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 2.0 и 2.5	319
5.12. Общие представления двухшаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито	323
5.13. Об устойчивости численных методов	327
6. Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений	337
6.1. Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты	338
6.1.1. Интегральные представления решений СЛСДУ	339
6.1.2. Моментные характеристики решений СЛСДУ	343
6.1.3. Свойства дискретной системы линейных стохастических уравнений в стационарном случае	346
6.2. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении	348
6.2.1. Введение	348
6.2.2. Общий подход к моделированию и структурирование проблемы	350
6.2.3. Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения стационарной СЛСДУ	351
6.2.4. Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ	353
6.2.5. Алгоритм численного моделирования случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ	359
6.2.6. Алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ и оценка скорости его сходимости	363

6.3. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума	365
6.3.1. Введение	365
6.3.2. Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	367
6.3.3. Оценка скорости сходимости по шагу дискретизации 5 метода численного моделирования решений СЛСДУ, основанного на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума	369
6.4. Библиотека "ИТО-LIN" MatLAB-функций численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	372
6.4.1. Математическая модель объекта моделирования	373
6.4.2. Общая характеристика и сценарий управления библиотекой	374
6.4.3. Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных	380
6.4.4. Функции вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения ССЛСДУ	387
6.4.5. Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия	392
7. Примеры численного моделирования стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений	397
7.1. Выбор числа q при численном моделировании повторных стохастических интегралов	397
7.1.1. Выбор числа q в случае тригонометрического базиса	397
7.1.2. Выбор числа q в случае полиномиального базиса	398
7.1.3. Выбор числа q при аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито с помощью интегральных сумм	402
7.2. Численное интегрирование модели Блэка-Шоулза	403
7.3. Исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца	404
7.4. Численное интегрирование стохастической модели Лотки-Вольтерра второго порядка	419
7.5. Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг	423
7.6. Численное моделирование чандлеровских колебаний	429
7.7. Численное моделирование солнечной активности	432
7.8. Исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера	434
Заключение	444
Библиография	447
Обозначения	456

Предисловие

Настоящая монография посвящена проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Основы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений были заложены в монографиях "Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений" (Г.Н.Мильштейн, 1988), "Numerical Solution of Stochastic Differential Equations" (P.E.Kloeden, E.Platten, 1992), "Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments" (P.E.Kloeden, E.Platten, H.Schurz, 1994), которые обобщили известные результаты по данной проблеме, полученные в основном авторами этих книг в 70-90 годах.

В данной книге, так же как и в перечисленных монографиях, используется подход к численному решению стохастических дифференциальных уравнений, который основан на конечной дискретизации временного интервала и численном моделировании решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора и специальных методов аппроксимации повторных стохастических интегралов. В рамках данного подхода в настоящей монографии предлагается ряд новых методов численного решения систем нелинейных и линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Книга состоит из семи глав.

Первая глава – вводная. В ней рассмотрены математические модели динамических систем, находящихся под действием случайных возмущений. Приведены примеры физических и технических систем, описываемых данными математическими моделями. Рассмотрен ряд задач, в которых встречается необходимость численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Приведены сведения из теории стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов.

Вторая глава посвящена замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. Установлен класс повторных стохастических интегралов Ито, для которого справедливы формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с правилами классического интегрального счисления. Приведены примеры замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

В третьей главе рассматриваются стохастические разложения процессов Ито. Представлены как известные стохастические разложения – Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича, так и новые представления разложения Тейлора-Ито, названные унифицированными разложениями Тейлора-Ито. Унифицированные разложения Тейлора-Ито строятся с использованием формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито, которые получены во второй главе и позволяют существенно уменьшить общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора-Ито, которые изучали Г.Н.Мильштейн, W.Wagner, P.E.Kloeden, E.Platten и другие авторы.

Четвертая глава посвящена проблеме аппроксимации повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича. Сформулирован и доказан новый метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t, T])$ системам функций. Данный метод обладает рядом преимуществ по сравнению с методом Г.Н.Мильштейна [47], который до настоящего времени являлся основой для сильной (среднеквадратической) аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича. Среди этих преимуществ отметим возможность применения различных полных ортонормированных систем функций (а не только тригонометрической системы) для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, а также явный вид коэффициентов разложений указанных интегралов произвольной кратности k . Получено обобщение метода "прямоугольников" аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито на случай произвольной кратности стохастических интегралов. Приведены разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, основанные многочленах Эрмита. С помощью формулы Ито получено два семейства аналитических формул для вычисления стохастических интегралов по процессам Ито. Введено понятие повторного симметризованного стохастического интеграла по пуассоновским процессам и доказана теорема о разложении этого интеграла в кратный ряд из произведений пуассоновских случайных величин.

Пятая глава посвящена построению сильных численных методов

решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые строятся на основе разложения Тейлора-Ито, унифицированных разложений Тейлора-Ито, а также на основе разложения Тейлора-Стратоновича. Часть методов, представленных в пятой главе является известной, например явный и неявный методы Г.Н.Мильштейна порядка 1.0. Другая и большая часть полученных методов является новой. Так, все представленные численные методы порядка точности 2.0 и выше являются новыми, поскольку они используют не встречавшиеся ранее в литературе аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито 4-й и более высоких кратностей. Построены новые явные и неявные сильные конечно разностные методы порядков точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5.

В шестой главе рассматриваются численные методы моделирования решений систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, которые основываются на точном интегральном представлении решений этих систем уравнений. Один из предложенных методов, основан на спектральном разложении дисперсионной матрицы стохастической составляющей решения системы линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений. Другой метод основан на кусочно постоянной гауссовской аппроксимации белого шума. На основе первого из перечисленных методов разработаны алгоритмы численного решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений произвольной фиксированной размерности k . В конце главы 6 приведена библиотека "ITO-LIN" MatLab-функций для численного решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений, которая создана на основе полученных в шестой главе алгоритмов.

В седьмой главе численно решен ряд линейных и нелинейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито 2-го и 3-го порядков. При численном решении нелинейных систем впервые применена аппроксимация повторных стохастических интегралов, основанная на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций. Для решения линейных систем использован полученный в главе 6 эффективный метод, основанный на спектральном разложении дисперсионной матрицы стохастической составляющей решения системы линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений.

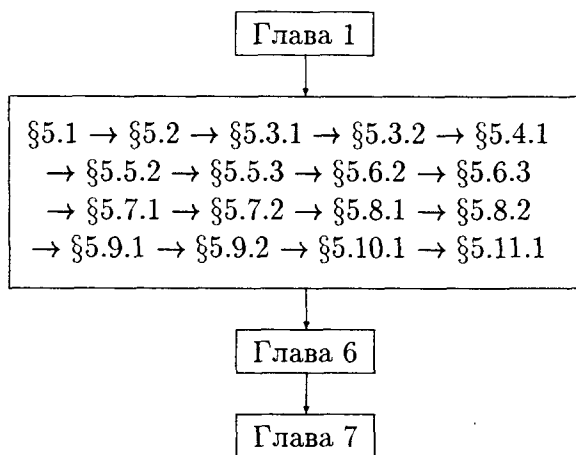
В конце монографии находится перечень используемых обозначений. Там же находится список литературы по проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений, который является очевидно не полным и содержит главным образом цитируемые источники.

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю профессору О.Ю.Кульчицкому, а также Р.П.Филимонову, Г.С.Осипенко, В.Б.Меласу и Я.И.Белопольской, которые ознакомились с текстом книги в рукописи и сделали ряд существенных замечаний по ее содержанию.

Автор также выражает благодарность И.А.Ибрагимову, В.Н.Судакову и другим участникам Санкт-Петербургского городского семинара по теории вероятностей и математической статистике в Санкт-Петербургском отделении математического института им.В.А.Стеклова за ценные замечания по третьей и четвертой главам монографии, частично докладывавшихся на этом семинаре.

Автору представляется, что для прочтения книги могут оказаться полезными следующие рекомендации по выбору материала для различных категорий читателей.

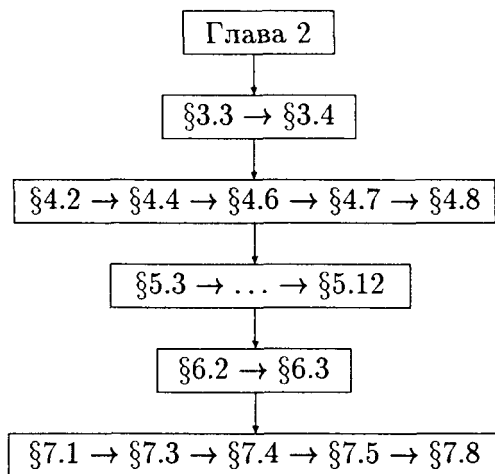
I. Для физиков, инженеров, программистов с целью решения прикладных технических задач стохастической динамики:



II. Для математиков с целью изучения проблемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито:



III. Для математиков, специализирующихся в области численного решения стохастических дифференциальных уравнений, с целью ознакомления с некоторыми новыми результатами в этой области:



Предлагаемая читателю книга является переработанным и дополненным вариантом книги "Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито", СПб: Изд-во СПбГТУ, 1998, 203с. (Электронный журнал "Дифференц. уравн. и проц. управл.", N1, 1998, <http://www.neva.ru/journal>). Настоящее издание существенно переработано и дополнено материалом параграфов 1.5.7, 1.6, 3.7, 3.8, 4.7, 4.8, 5.6.6, 5.7 – 5.13, 6.4, 7.1.3, а также текстами программ на языке MatLab и рядом упражнений. В результате книга может стать полезной для достаточно широкого круга читателей, включая специалистов по теории случайных процессов, вычислительной математике, а также для аспирантов и студентов старших курсов.

Посвящается светлой памяти моего учителя
профессора Олега Юрьевича Кульчицкого

Оглавление

1. О стохастических дифференциальных уравнениях: определения, свойства, проблемы, применения	19
1.1. О различных численных подходах, применяемых к стохастическим дифференциальным уравнениям	19
1.2. Некоторые сведения из теории вероятностей	20
1.2.1. Сходимость случайных последовательностей . . .	20
1.2.2. Некоторые неравенства для математических ожиданий	23
1.2.3. Случайные процессы	25
1.2.4. Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс.	30
1.3. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения	34
1.3.1. Стохастический интеграл Ито	34
1.3.2. Процессы Ито	40
1.3.3. Формула Ито	42
1.3.4. Стохастические дифференциальные уравнения Ито	44
1.3.5. Стохастический интеграл Стратоновича	49
1.3.6. Стохастические дифференциальные уравнения Стратоновича	55
1.4. Математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений	57
1.4.1. Общий вид нелинейных моделей стохастической динамики	57
1.4.2. Линейные модели стохастической динамики . . .	61
1.5. Примеры стохастических моделей физических и технических систем	67

1.5.1.	Стохастическая модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста	67
1.5.2.	Автоколебательная электрическая система (ламповый генератор)	71
1.5.3.	Чандлеровские колебания	74
1.5.4.	Стохастические модели химической кинетики и модели регуляции численности конкурирующих видов	76
1.5.5.	Модели финансовой математики	78
1.5.6.	Солнечная активность	79
1.5.7.	Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений	80
1.6.	Некоторые задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями	81
1.6.1.	Фильтрация	81
1.6.2.	Оптимальное стохастическое управление	83
1.6.3.	О стохастической устойчивости	85
1.6.4.	Оценивание параметров	92
1.7.	О неэффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям	93
2.	Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	97
2.1.	Введение	97
2.2.	Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	100
3.	Стохастические разложения процессов Ито	113
3.1.	Введение	113
3.2.	Дифференцируемость по Ито случайных процессов	115
3.3.	Унифицированные разложения Тейлора-Ито	119
3.3.1.	Первая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито	120
3.3.2.	Вторая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито	129

3.4.	Разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Сравнение с унифицированными разложениями Тейлора-Ито	132
3.5.	Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов	137
3.6.	Разложение Тейлора-Стратоновича	141
3.7.	Сильная сходимость унифицированного разложения Тейлора-Ито	144
3.8.	Сильная сходимость разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора-Стратоновича	146
3.9.	Примеры разложений в ряды Тейлора-Ито	150
3.9.1.	Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито	150
3.9.2.	Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых многомерных стохастических дифференциальных уравнений Ито	153
4.	Методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов	159
4.1.	Введение	159
4.2.	Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье	164
4.2.1.	Соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича	165
4.2.2.	Разложение повторных интегралов Стратоновича в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских величин	169
4.2.3.	Среднеквадратическая аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича	181
4.2.4.	Аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью тригонометрической системы функций	188
4.2.5.	Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций	196

4.3.	Метод Г.Н.Мильштейна разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича	200
4.3.1.	Введение	200
4.3.2.	Примеры разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г.Н.Мильштейна	202
4.4.	Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье, и метода Г.Н.Мильштейна	203
4.5.	Разложение повторных стохастических интегралов с использованием полиномов Эрмита	206
4.6.	Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах	209
4.7.	Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов	213
4.7.1.	Введение	213
4.7.2.	Аддитивное разделение переменных	215
4.7.3.	Мультипликативное разделение переменных	219
4.8.	Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам, основанное на кратных рядах Фурье.	221
4.8.1.	Введение	221
4.8.2.	Симметризованный стохастический интеграл по пуассоновским процессам	222
4.8.3.	Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам	227
5.	Сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	233
5.1.	История вопроса	233
5.2.	Разложения Тейлора-Ито и общие представления явных сильных численных методов порядка $r/2$	236
5.3.	Методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито	244
5.3.1.	Метод Мильштейна	244
5.3.2.	Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	246

5.3.3.	Явный сильный одношаговый численный метод порядка 2.0	252
5.3.4.	Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	255
5.4.	Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена	259
5.4.1.	Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	259
5.4.2.	Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0	261
5.4.3.	Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	263
5.4.4.	Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена	267
5.5.	Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Стратоновича	268
5.5.1.	Явный сильный одношаговый метод порядка $r/2$	268
5.5.2.	Явный сильный одношаговый метод порядка 1.0	271
5.5.3.	Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5	272
5.5.4.	Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0	273
5.5.5.	Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5	275
5.6.	Конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора-Ито	277
5.6.1.	Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций	278
5.6.2.	Явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0	280
5.6.3.	Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5	280
5.6.4.	Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0	283
5.6.5.	Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5	286
5.6.6.	О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных методов	293
5.7.	Неявные одношаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	295
5.7.1.	Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.0	296

5.7.2.	Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.5	298
5.7.3.	Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.0	299
5.7.4.	Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.5	300
5.8.	Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	302
5.8.1.	Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.0	302
5.8.2.	Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5	303
5.8.3.	Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0	304
5.8.4.	Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5	306
5.9.	Явные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	309
5.9.1.	Явный двухшаговый сильный метод порядка 1.0	309
5.9.2.	Явные двухшаговые сильные методы порядка 1.5	310
5.9.3.	Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.0	311
5.9.4.	Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.5	312
5.10.	Неявные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	314
5.10.1.	Неявные двухшаговые сильные методы порядков 1.0 и 1.5	314
5.10.2.	Неявные двухшаговые сильные методы порядков 2.0 и 2.5	316
5.11.	Двухшаговые сильные конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	317
5.11.1.	Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 1.0 и 1.5	317
5.11.2.	Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 2.0 и 2.5	319
5.12.	Общие представления двухшаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито	323
5.13.	Об устойчивости численных методов	327

6. Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений	337
6.1. Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты	338
6.1.1. Интегральные представления решений СЛСДУ .	339
6.1.2. Моментные характеристики решений СЛСДУ . .	343
6.1.3. Свойства дискретной системы линейных стохастических уравнений в стационарном случае . . .	346
6.2. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении	348
6.2.1. Введение	348
6.2.2. Общий подход к моделированию и структурирование проблемы	350
6.2.3. Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения стационарной СЛСДУ	351
6.2.4. Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ	353
6.2.5. Алгоритм численного моделирования случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ. .	359
6.2.6. Алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ и оценка скорости его сходимости	363
6.3. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума	365
6.3.1. Введение	365
6.3.2. Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	367
6.3.3. Оценка скорости сходимости по шагу дискретизации δ метода численного моделирования решений СЛСДУ, основанного на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума	369

6.4.	Библиотека “ИТО-LIN” MatLAB-функций численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	372
6.4.1.	Математическая модель объекта моделирования	373
6.4.2.	Общая характеристика и сценарий управления библиотекой	374
6.4.3.	Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных	380
6.4.4.	Функции вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения ССЛСДУ	387
6.4.5.	Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия	392
7.	Примеры численного моделирования стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений	397
7.1.	Выбор числа q при численном моделировании повторных стохастических интегралов	397
7.1.1.	Выбор числа q в случае тригонометрического базиса	397
7.1.2.	Выбор числа q в случае полиномиального базиса	398
7.1.3.	Выбор числа q при аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито с помощью интегральных сумм	402
7.2.	Численное интегрирование модели Блэка-Шоулза	403
7.3.	Исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца	404
7.4.	Численное интегрирование стохастической модели Лотки-Вольтерра второго порядка	419
7.5.	Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг	423
7.6.	Численное моделирование чандлеровских колебаний	429
7.7.	Численное моделирование солнечной активности	432
7.8.	Исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера	434

Заключение	444
Библиография	447
Обозначения	456

Глава 1

О стохастических дифференциальных уравнениях: определения, свойства, проблемы, применения

1.1. О различных численных подходах, применяе- мых к стохастическим дифференциальным урав- нениям

В настоящем параграфе кратко рассмотрим известные численные подходы, которые применяются к стохастическим дифференциальным уравнениям. Отметим, что существует общий метод Бьюси [1], посредством которого может быть исследован, в принципе, широкий класс случайных систем с помощью метода Монте-Карло. Этот метод является достаточно неэффективным в отношении стохастических дифференциальных уравнений, поскольку он не использует специальную структуру этих уравнений, которая характеризуется коэффициентами сноса и диффузии.

Кушнер [2] предложил численный подход к стохастическим системам, который основывается на дискретизации как времени, так и пространственных переменных. В результате такой дискретизации аппроксимируемые случайные процессы превращаются в цепи Маркова с конечным числом состояний. При численной реализации с помощью этого подхода приходится иметь дело с матрицами перехода цепей Маркова. Они содержат значительное количество излишней информа-

ции, которая многократно перерабатывается в процессе вычислений. Поэтому такой подход марковских цепей применим только для задач с небольшой размерностью. Проблема размерности также возникает при численном решении уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятностей процессов Ито. В настоящей книге, так же как и в монографиях [47, 50], используется другой и более эффективный и естественный подход к численному решению стохастических дифференциальных уравнений. Этот подход основывается на конечной дискретизации временного интервала $[0, T]$ и численном моделировании решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов разложения Тейлора. Важной особенностью этого подхода является то, что переменные состояния в нем не дискретизируются как в подходе Кушнера. Необходимо отметить, что при этом вычислительные затраты (время и память) растут полиномиально [50] с ростом размерности задачи. Это обстоятельство позволяет говорить о некоторых вычислительных резервах данного подхода.

1.2 Некоторые сведения из теории вероятностей

1.2.1 Сходимость случайных последовательностей

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и борелевское измеримое пространство $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B})$. Функцию $\xi(\omega) \in \mathbb{R}^1$, определенную при всех $\omega \in \Omega$, будем называть случайной величиной, если она измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}$ или $\mathcal{F}$ — измерима, т.е. для любого $B \in \mathcal{B}$: $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Определение 1.1. Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется сходящейся с вероятностью 1, в среднем степени p ($0 < p < \infty$), по вероятности или по распределению к случайной величине $\xi(\omega)$, если выполнено соответственно одно из следующих предельных соотношений:

$$P\{\omega : \xi_k \rightarrow \xi \text{ при } k \rightarrow \infty\} = 1,$$

$$M\{|\xi_k - \xi|^p\} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

$$P\{\omega : |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ для всех } \varepsilon > 0,$$

$$F_{\xi_k}(x) \rightarrow F_{\xi}(x) \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^1,$$

где $F_{\xi_k}(x)$, $F_{\xi}(x)$ – функции распределения случайных величин ξ_k и ξ соответственно.

Для обозначения перечисленных в определении 1.1 видов сходимости случайных величин иногда используются следующие обозначения:

1. Для сходимости с вероятностью 1 (почти наверное):

$$\xi_k \xrightarrow{B.1} \xi \text{ или } \xi_k \xrightarrow{П.Н.} \xi,$$

2. Для сходимости в среднем степени p :

$$(p)\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi,$$

3. Для сходимости по вероятности:

$$\xi_k \xrightarrow{P} \xi,$$

4. Для сходимости по распределению:

$$\xi_k \xrightarrow{d} \xi.$$

Отметим, что, если $p=2$, то сходимость в среднем степени 2 называют сходимостью в среднеквадратическом смысле и обозначают в виде: $\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi$.

Определение 1.2. Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется фундаментальной по вероятности, с вероятностью единица, в среднем степени p или по распределению, если выполнено соответственно одно из следующих условий:

$$P \{ |\xi_k - \xi_l| > \varepsilon \} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

$$P \{ \omega : \xi_k - \xi_l \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \} = 1,$$

$$M \{ |\xi_k - \xi_l|^p \} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty,$$

$$|F_{\xi_k}(x) - F_{\xi_l}(x)| \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^1.$$

Отметим, что фундаментальность последовательности случайных величин является необходимым и достаточным условием существования ее предела, что называется критерием Коши [6], т.е. для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась по вероятности, с вероятностью 1, в среднем степени p или по распределению

к некоторой случайной величине $\xi(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной в соответствующем смысле.

Приведем некоторые хорошо известные факты [6], касающиеся сходимости последовательностей случайных величин.

1. Для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась к случайной величине $\xi(\omega)$ с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{k \geq N} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} = 0.$$

2. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1, то она сходится и по вероятности.

3. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится по вероятности, то из нее можно извлечь подпоследовательность случайных величин $\xi_{k_n}(\omega)$, сходящуюся с вероятностью 1 к случайной величине $\xi(\omega)$.

4. Если

$$\xi_k \xrightarrow{P} \xi \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P \{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \} < \infty,$$

то последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине $\xi(\omega)$.

5. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится в среднем степени p ($p > 0$), то она сходится в среднем степени q ($q > 0$) при $q < p$.

6. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится в среднем степени p ($p > 0$), то она сходится по вероятности.

7. Если для некоторого $p > 0$ выполняется условие:

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \{ |\xi_k - \xi|^p \} < \infty,$$

то последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине $\xi(\omega)$.

8. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится к $\xi(\omega)$ по вероятности, то она сходится к $\xi(\omega)$ и по распределению.

9. Для того, чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась по распределению к случайной величине $\xi(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ выполнялось условие:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M \{f(\xi_k)\} = M \{f(\xi)\}.$$

10. Если $\xi_k \xrightarrow{P} \xi$ при $k \rightarrow \infty$ и существует случайная величина η , такая что

$$|\xi_k| \leq \eta \text{ и } M \{\eta\} < \infty,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M \{\xi_k\} = M \{\xi\}.$$

11. Если

$$\xi_k \xrightarrow{c} \xi \text{ при } k \rightarrow \infty$$

и существует случайная величина η , такая что

$$|\xi_k| \leq \eta \text{ и } M \{|\eta|^p\} < \infty \text{ при } p \geq 1,$$

то

$$(p)\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi.$$

12. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится в среднем степени p ($p \geq 1$) к случайной величине $\xi(\omega)$ и для всех k выполнено условие: $M \{|\xi_k|^p\} < \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M \{\xi_k^p\} = M \{\xi^p\}.$$

1.2.2. Некоторые неравенства для математических ожиданий

В дальнейшем для доказательства ряда утверждений нам потребуются различные оценки для математических ожиданий. В связи с этим в этом параграфе приведем основные неравенства для математических ожиданий, которые будут нами использоваться в дальнейшем. Эти неравенства мы приводим без доказательства в силу их широкой известности.

1. Неравенство Чебышева. С вероятностью 1

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{\xi\}}{\varepsilon} \quad \forall \xi(\omega) \geq 0, \quad \forall \varepsilon: 0 < \varepsilon < \infty.$$

Нетрудно видеть, что из неравенства Чебышева с вероятностью 1 следуют неравенства:

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{\xi^2\}}{\varepsilon^2}, \quad P\{|\xi - M\{\xi\}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\{\xi\}}{\varepsilon^2},$$

где $D\{\xi\} \stackrel{\text{def}}{=} M\{(\xi - M\{\xi\})^2\}$ — дисперсия случайной величины ξ .

2. Неравенство Коши-Буняковского.

$$(M\{|\xi\eta|\})^2 \leq M\{\xi^2\} M\{\eta^2\} \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega).$$

3. Неравенство Ляпунова.

$$s\sqrt{M\{|\xi|^s\}} \leq t\sqrt{M\{|\xi|^t\}} \quad \forall \xi(\omega); \quad \forall s, t: 0 < s \leq t.$$

4. Неравенство Гельдера.

$$|M\{\xi\eta\}| \leq \sqrt[p]{M\{|\xi|^p\}} \sqrt[q]{M\{|\eta|^q\}} \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega); \quad \forall p, q: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$1 \leq p, q \leq \infty.$$

5. Неравенство Минковского.

$$\sqrt[p]{M\{|\xi + \eta|^p\}} < \sqrt[p]{M\{|\xi|^p\}} + \sqrt[p]{M\{|\eta|^p\}} \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega); \quad \forall p:$$

$$M\{|\xi|^p\} < \infty, \quad M\{|\eta|^p\} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

6. Неравенство Йенсена. Пусть φ , определенная на множестве значений случайной величины ξ , выпуклая вниз функция. Тогда

$$\varphi(M\{\xi\}) \leq M\{\varphi(\xi)\}.$$

Для функции φ , имеющей противоположный характер выпуклости, неравенство Йенсена имеет вид:

$$\varphi(M\{\xi\}) \geq M\{\varphi(\xi)\}.$$

$$M\{|\xi + \eta|^p\} \leq 2^{p-1} (M\{|\xi|^p\} + M\{|\eta|^p\}) \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega); \quad \forall p: p \geq$$

1.

Наряду с приведенными неравенствами для математических ожиданий будет также неоднократно использоваться неравенство Гронуолла:

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + K \int_{t_0}^t e^{K(t-s)} \beta(s) ds,$$

которое справедливо при всех $t \in [t_0, t]$, если для любого $t \in [t_0, t]$

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + K \int_{t_0}^t \alpha(s) ds,$$

где $K = \text{const} > 0$.

1.2.3. Случайные процессы

Семейство случайных величин, параметризованное параметром t , интерпретируемым как время, будем называть случайным процессом и обозначать в виде: $\xi_t \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t, \omega) \in X \subset \mathbb{R}^1$, где $t \in \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^1$ - временной параметр; $\mathcal{T}$ - множество определения, а X - множество значений случайного процесса ξ_t . Область определения $\mathcal{T}$ случайного процесса может быть конечным, полубесконечным или бесконечным интервалом числовой прямой. В этих случаях $\xi(t, \omega)$ называется случайным процессом с непрерывным временем. Если $\mathcal{T}$ имеет конечное или счетное множество элементов $t_k \in \mathcal{T} : t_k < t_{k+1}; k = 0, 1, 2, \dots$, то ξ_t называется случайным процессом с дискретным временем или случайной последовательностью.

Случайный процесс считается полностью заданным, если заданы его конечномерные распределения – набор функций распределения, которые определены для любого $k \geq 1$ соотношениями:

$$F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = P \left\{ \bigcap_{j=1}^k \{ \xi(t_j, \omega) < x_j \} \right\},$$

где $t_i \in \mathcal{T}$; $x_i \in \mathbb{R}^1$; $i = 1, 2, \dots, k$.

Справедливо и обратное утверждение, установленное Колмогоровым [6]:

Если функции $F(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k)$ при всех $k \geq 1$ удовлетворяют условиям:

1. $F(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k)$ - является совместной функцией распределения k случайных величин;

2. справедливо тождественное равенство:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) \equiv F(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k})$$

для любой перестановки $i_1, i_2, \dots, i_k$ чисел $1, 2, \dots, k$;

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x_k \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}), \end{aligned}$$

тогда существует такой случайный процесс $\xi(t, \omega)$, совместными функциями распределения которого являются функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Таким образом, совокупность совместных функций распределения значений случайного процесса $\xi(t, \omega)$ является его исчерпывающей характеристикой.

Если функции распределения $F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k)$ имеют конечную смешанную k -ую производную, то существуют совместные плотности распределения значений случайного процесса ξ_t в соответствующие моменты времени:

$$p_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \dots \partial x_k} F_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k).$$

Случайный процесс называется гауссовским, если все его совместные плотности распределения являются гауссовскими:

$$p_\xi(x_1, x_2, \dots, x_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2} \right),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)^T$; $m_i \stackrel{\text{def}}{=} M\{x_i\}$; $K = K^T > 0$, $\det(K)$ - определитель матрицы K .

Случайный процесс ξ_t , заданный на $\mathcal{T}$, называется стационарным в узком смысле, если для любых $n \geq 1$ и любых моментов $t_1, t_2, \dots, t_n, t$, таких что $t_i + t \in \mathcal{T}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), совместные функции распределения или плотности распределения совокупности случайных величин $\xi_{t_1+t}, \xi_{t_2+t}, \dots, \xi_{t_n+t}$ не зависят от t .

Будем называть процесс $\overset{\circ}{\xi}_t = \xi_t - M\{\xi_t\}$ центрированной составляющей процесса ξ_t .

Функция: $R_\xi(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} M\left\{\overset{\circ}{\xi}_{t_1}\overset{\circ}{\xi}_{t_2}\right\}$ называется корреляционной функцией процесса ξ_t , причем: $D\{\xi_t\} = R_\xi(t, t)$, где $D\{\xi_t\}$ – дисперсия случайного процесса ξ_t .

Очевидно, что для стационарного в узком смысле случайного процесса ξ_t :

1. $M\{\xi_t\} = \text{const}$,
2. $R_\xi(t_1, t_2) \equiv R_\xi(t_1 - t_2)$,
3. $D\{\xi_t\} \equiv R_\xi(0)$.

Однако выполнение этих условий для случайного процесса ξ_t , вообще говоря, не гарантирует его стационарности в узком смысле. Поэтому процессы ξ_t , удовлетворяющие условиям 1 – 3, называются стационарными в широком смысле. Понятие стационарности в широком и узком смыслах оказываются эквивалентными только на классе гауссовских процессов.

Известно [3], что для того, чтобы функция $R_\xi(t)$ при $t \in (-\infty, \infty)$ была корреляционной функцией стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t , удовлетворяющего условию:

$$M\{(\xi_{t+\tau} - \xi_t)^2\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление:

$$R_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} dF_\xi(w), \quad (1.1)$$

где $F_\xi(w)$ – произвольная неотрицательная ограниченная монотонно неубывающая функция, непрерывная слева.

Функция $F_\xi(w)$, входящая в представление (1.1) корреляционной функции $R_\xi(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t , называется спектральной функцией. Если $F_\xi(w)$ абсолютно непрерывна и допускает представление:

$$F_\xi(w) = \int_{-\infty}^w S_\xi(v) dv,$$

то $S_\xi(w)$ называется спектральной плотностью процесса ξ_t .

Поясним физический смысл спектральной функции. Пусть ξ_t интерпретируется как электрический ток, представимый в виде "континуальной суммы" гармонических колебаний со случайными амплитудами. Тогда приращение $F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1)$ ($w_2 > w_1$) равно средней мощности, рассеиваемой гармониками, частоты которых лежат в полуинтервале $[w_1, w_2)$.

Спектральная функция может быть восстановлена по корреляционной функции. Так, если w_1 и w_2 - точки непрерывности спектральной функции $F_\xi(w)$, то справедливо соотношение [3]:

$$F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itw_1} - e^{-itw_2}}{it} R_\xi(t) dt, \quad (1.2)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле среднего значения.

В точках разрыва спектральной функции $F_\xi(w)$ соотношение (1.2) останется справедливым, если в левую часть вместо $F_\xi(w)$ подставить $\frac{1}{2} (F_\xi(w+0) + F_\xi(w))$.

Если корреляционная функция $R_\xi(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(t)| dt < \infty,$$

то существует спектральная плотность процесса ξ_t , и она определяется равенством:

$$S_\xi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw} R_\xi(t) dt. \quad (1.3)$$

Пользуясь представлением (1.3), нетрудно получить следующие свойства спектральной плотности:

1. $S_\xi(w) \in \mathbb{R}^1$,
2. $S_\xi(w) = S_\xi(-w)$,
3. $S_\xi(w) \geq 0$.

Определение 1.3. Случайный процесс ξ_t , определенный при всех $t \in [0, T]$, называется непрерывным в момент времени $t^* \in [0, T]$ в одном из вышеприведенных вероятностных смыслов, если для любой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, принадлежащей $[0, T]$ и сходящейся к t^* при $k \rightarrow \infty$, справедливо предельное соотношение:

$$\xi_{t_k} \rightarrow \xi_{t^*} \quad \text{при } t_k \rightarrow t^*,$$

понимаемое в соответствующем вероятностном смысле.

Определение 1.4. Процесс ξ_t называется непрерывным на промежутке $[t_1, t_2]$ в данном вероятностном смысле, если он непрерывен в этом смысле при любом $t \in [t_1, t_2]$. Непрерывность в среднем степени 2 случайного процесса ξ_t будем называть среднеквадратической непрерывностью.

Определение 1.5. Случайный процесс ξ_t , определенный для всех $t \in [0, T]$, называется дифференцируемым в момент $t \in [0, T]$ в одном из вероятностных смыслов, если существует правая часть следующего предельного соотношения:

$$\frac{\xi_{t+\Delta} - \xi_t}{\Delta} \rightarrow \frac{d\xi_t}{dt} \text{ при } \Delta \rightarrow 0,$$

понимаемого в этом вероятностном смысле. Процесс ξ_t будем называть дифференцируемым на промежутке $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ в данном вероятностном смысле, если он дифференцируем в этом смысле при всех $t \in [t_1, t_2]$.

Рассмотрим случайный процесс ξ_t , для которого

$$M\{\xi_t | \mathcal{F}_s\} = \xi_s \text{ с в.1} \quad (1.4)$$

для всех $0 \leq s < t$. В теории случайных процессов процессы ξ_t , обладающие свойством (1.4), называются *мартингалами*. Если знак равенства в (1.4) заменить на $\leq$, то процесс ξ_t называется *супермартингалом*, а если на $\geq$, то *субмартингалом*. Большинство из рассматриваемых далее случайных процессов являются мартингалами. Среди многочисленных свойств мартингалов рассмотрим неравенство Дуба.

Пусть ξ_t , $t \geq 0$ — мартингал, для которого $M\{|\xi_t|^p\} < \infty$. Тогда для любого $p > 1$ справедлива оценка:

$$M\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^p\right\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M\{|\xi_t|^p\}.$$

В частности, при $p = 2$ неравенство Дуба имеет вид:

$$M\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2\right\} \leq 4M\{|\xi_t|^2\}$$

и именно в такой форме будет использоваться в дальнейшем.

Отметим, что определения мартингалов в дискретном времени аналогичны соответствующим определениям матрингалов в непрерывном времени.

1.2.4. Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский процесс.

Дадим определение случайного процесса с независимыми приращениями.

Определение 1.6. Случайный процесс ξ_t , определенный на промежутке $[0, T]$, называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $t_0, t_1, \dots, t_k \in [0, T]$, таких что: $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$, случайные величины: ξ_{t_0} , $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\dots$, $\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ стохастически независимы между собой.

Особую роль в дальнейшем изложении будут играть так называемые винеровские случайные процессы, относящиеся к классу гауссовских процессов с независимыми приращениями. Приведем соответствующие определения и свойства этих процессов. Более подробное изложение теории случайных процессов с независимыми приращениями можно найти в монографии А.В.Скоророда [65].

Определение 1.7. Случайный процесс $f_t \in \mathbb{R}^1$ с независимыми приращениями, определенный при $t \in [0, T]$, будем называть винеровским, если он удовлетворяет условиям:

- 1) $M\{f_t\} \equiv 0$,
- 2) $M\{(f_{t_2} - f_{t_1})^2\} = \sigma_f^2 |t_2 - t_1|$, $\sigma_f^2 = \text{const} > 0$,
- 3) f_{t_1} и $f_{t_2} - f_{t_1}$ ($t_2 > t_1$) имеют нормальное распределение при всех $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Часто полагают $\sigma_f^2 = 1$, $f_0 = 0$. В этом случае винеровский процесс называется стандартным. Поскольку приращения $f_{t_2} - f_{t_1}$ ($t_2 > t_1$) винеровского процесса имеют нормальное распределение, то их функция распределения определяется соотношением:

$$P\{f_{t_2} - f_{t_1} < x\} = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2\sigma_f^2(t_2 - t_1)}} du.$$

Известно, что в силу нормальности $f_{t_2} - f_{t_1}$ справедлива формула:

$$M\{(f_{t_2} - f_{t_1})^m\} = \begin{cases} \sigma_f^m (m-1)!! (t_2 - t_1)^{\frac{m}{2}} & \text{при } m = 2k \\ 0 & \text{при } m = 2k + 1 \end{cases},$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$.

Известно, что винеровский случайный процесс является непрерывным с вероятностью 1 случайным процессом.

Далее будем называть случайные величины ξ_j ; $j = 1, \dots, n$ стандартными гауссовскими случайными величинами, если ξ_j ; $j = 1, \dots, n$ распределены по нормальному закону, причем имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии.

Отметим также следующие свойства винеровского процесса:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{t} = 0 \text{ с в.1,}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \text{ с в.1.} \quad (1.5)$$

Равенства (1.5) носят название закона повторного логарифма. Нетрудно показать, что tf_t является винеровским процессом, если f_t – винеровский процесс. Тогда закон повторного логарифма можно записать в виде:

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln(\frac{1}{t})}} = 1, \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln(\frac{1}{t})}} = -1 \text{ с в.1.}$$

С помощью винеровского процесса можно ввести так называемый процесс броуновского моста b_t вида:

$$b_t = x + f_t - \frac{t}{T} (f_T - y + x), \quad t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad (1.6)$$

который играет важную роль в приложениях. Из (1.6), в частности, следует, что $b_0 = x$, $b_T = y$. Известно, что b_t – гауссовский процесс, который имеет следующие математическое ожидание и корреляционную функцию:

$$M\{b_t\} = x - \frac{t}{T} (x - y),$$

$$R_b(t, s) = \min\{s, t\} - \frac{st}{T},$$

где $0 \leq s, t \leq T$.

Хорошо известно, что стандартный винеровский процесс $f(t, \omega)$ может быть представлен на любом конечном промежутке времени $[0, T]$ в виде сходящегося в среднеквадратическом смысле ряда Фурье из независимых стандартных гауссовских величин:

$$f(t, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(\omega) C_j(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.7)$$

где функции $C_j(t)$ имеют вид:

$$C_j(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2j+1)\pi} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi t}{2T}\right),$$

ортогональны, т.е.

$$\int_0^T C_i(t)C_j(t)dt = 0 \text{ при } i \neq j$$

и удовлетворяют условию:

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j(t)C_j(s) = \min\{s, t\} = R_f(s, t);$$

$\xi_j(\omega)$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины вида:

$$\xi_j(\omega) = \frac{2}{T} \left(\frac{(2j+1)\pi}{2\sqrt{2T}} \right)^2 \int_0^T f(t, \omega) C_j(t) dt;$$

$i, j = 0, 1, \dots$

Разложение (1.7) называется в литературе разложением Карунена-Лозва и имеет массу приложений. В частности, оно может быть использовано для приближенного представления винеровского процесса. Г.Н.Мильштейном в [47] был предложен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, который основывается на разложении (1.7) (см. главу 4).

С помощью винеровского процесса может быть введено понятие, так называемого, белого шума. Рассмотрим случайный процесс

$$\Delta \tilde{f}_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{t+\Delta} - f_t}{\Delta}, \quad \Delta \geq 0,$$

где f_t – стандартный винеровский процесс.

Вычисляя корреляционную функцию и спектральную плотность процесса $\Delta \tilde{f}_t$ получим:

$$R_{\Delta \tilde{f}}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta - |t|}{\Delta^2} & \text{при } |t| \leq \Delta \\ 0 & \text{при } |t| \geq \Delta \end{cases},$$

$$S_{\Delta \tilde{f}}(w) = 2 \frac{1 - \cos(w\Delta)}{(w\Delta)^2}.$$

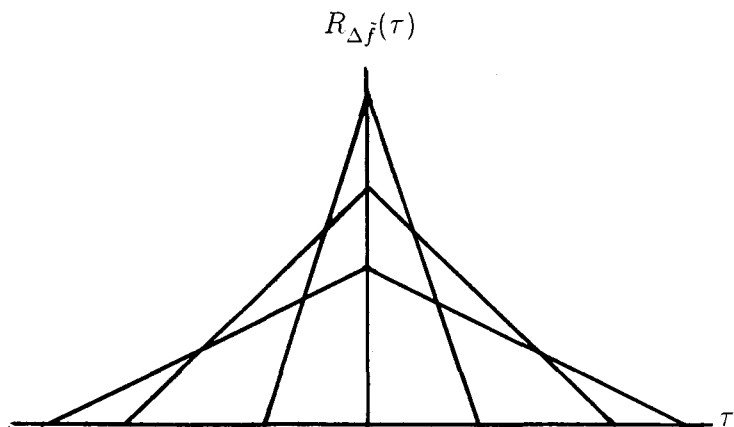


Рис.1.1.График семейства функций $R_{\Delta \tilde{f}}(\tau)$.

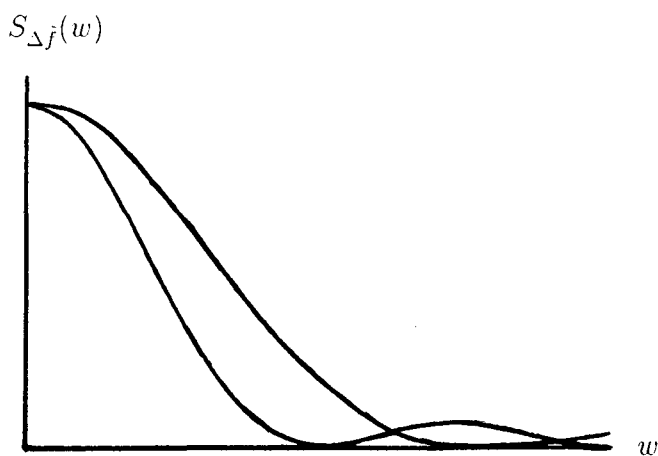


Рис.1.2.График семейства функций $S_{\Delta \tilde{f}}(w)$.

На рис.1.1 и 1.2 показаны семейства графиков функций $R_{\Delta \tilde{f}}(t)$ и $S_{\Delta \tilde{f}}(w)$ соответственно.

Очевидно, что, переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, имеем:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} R_{\Delta \tilde{f}}(t) = \delta(t),$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{\Delta \tilde{f}}(w) = 1,$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, т.е. обобщенная функция, для которой $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0)$$

для любой непрерывной в нуле функции $g(t)$.

Рассмотрим идеализированный случайный процесс f_i , которому соответствуют предельные значения корреляционной функции и спектральной плотности процесса $\Delta \tilde{f}_i$ при $\Delta \rightarrow 0$. Таким образом, случайный процесс f_i имеет δ -образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность, т.е. является белым шумом. Иными словами белый шум f_i можно рассматривать как обобщенную производную случайного процесса $f_t : f_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df_t}{dt}$.

1.3. Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

1.3.1. Стохастический интеграл Ито

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и винеровский случайный процесс $f_t \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и связанную с винеровским процессом f_t так, что

1. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при $s < t$;
2. f_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$ при каждом $t \in [0, T]$;
3. процесс $f_{t+\Delta} - f_t$ при всех $\Delta \geq 0$; $t > 0$ не зависит от событий σ -алгебры $\mathcal{F}_t$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие винеровские процессы f_t , которые удовлетворяют условиям 2 и 3.

Введем в рассмотрение класс $M_2([0, T])$ функций $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(I) функции $\xi(t, \omega)$ измеримы по совокупности переменных (t, ω) ;

(II) функция $\xi(t, \omega) - \mathcal{F}_t$ измерима при всех $t \in [0, T]$, и ее значения $\xi(\tau, \omega)$ не зависят от приращений $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ винеровского процесса при $\Delta \geq \tau$; $t > 0$;

(III) $\int_0^T M \{(\xi(t, \omega))^2\} dt < \infty$;

(IV) $M \{(\xi(t, \omega))^2\} < \infty$ для всех $t \in [0, T]$.

Введем на классе $\mathcal{M}_2([0, T])$ норму вида:

$$\|\xi\|_{2,T} = \sqrt{\int_0^T M \{(\xi(t, \omega))^2\} dt}.$$

Будем отождествлять две функции ξ, η из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$, если $\|\xi - \eta\|_{2,T} = 0$.

Для произвольного разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$, такого что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$, и произвольной последовательности средне-квадратически интегрируемых, $\mathcal{F}_{\tau_j}$, измеримых и независимых от приращений $f_{s+t} - f_t$; $t \geq \tau_j, s > 0$ случайных величин $\xi_j(\omega)$; $j = 0, 1, \dots, N-1$, определим ступенчатую функцию $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ следующим образом: $\xi(t, \omega) = \xi_j(\omega)$ с.в.1 при $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$; $j = 0, 1, \dots, N-1$. При этом интеграл в (III) понимается как

$$\int_0^T M \{(\xi(t, \omega))^2\} dt = \sum_{j=0}^{N-1} M \{(\xi_j)^2\} (\tau_{j+1} - \tau_j).$$

Обозначим через $\mathcal{K}_2([0, T])$ множество всех ступенчатых функций в $\mathcal{M}_2([0, T])$. Для произвольной ступенчатой функции ξ из класса $\mathcal{K}_2([0, T])$ определим стохастический интеграл Ито следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) (f(\tau_{j+1}, \omega) - f(\tau_j, \omega)) \stackrel{def}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл Ито $\int_0^T \xi_\tau df_\tau - \mathcal{F}_T$ измерим, не зависит от приращений $f_{s+\Delta} - f_\Delta$; $\Delta \geq T, s > 0$ и удовлетворяет для любых $\xi, \eta \in \mathcal{K}_2([0, T])$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ соотношениям:

$$A1. M \left\{ \int_0^T \xi_\tau df_\tau \right\} = 0,$$

$$A2. M \left\{ \left(\int_0^T \xi_\tau df_\tau \right)^2 \right\} = \int_0^T M \{\xi_\tau^2\} d\tau,$$

$$A3. \int_0^T (\alpha \xi_\tau + \beta \eta_\tau) d\tau = \alpha \int_0^T \xi_\tau d\tau + \beta \int_0^T \eta_\tau d\tau \text{ с в.1,}$$

$$A4. \mathbf{M} \left\{ \int_0^T \xi_\tau d\tau \int_0^T \eta_\tau d\tau \right\} = \int_0^T \mathbf{M} \{ \xi_\tau \eta_\tau \} d\tau.$$

Рассмотрим разбиение промежутка $[0, T]$ вида, для которого

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = T, \text{ где } \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}| \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Определим последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t, \omega)$ следующим образом: $\xi^{(N)}(t, \omega) = \xi(\tau_j^{(N)}, \omega)$ с в.1 при $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$, где $j = 0, 1, \dots, N-1$; $N = 1, 2, \dots$.

Можно показать (см. например [50], с.82-83), что для фиксированной функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ введенная выше последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t, \omega) \in \mathcal{K}_2([0, T])$ сходится по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t, \omega)$ при $N \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^T \mathbf{M} \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 \right\} dt} = 0. \quad (1.8)$$

Пусть $J_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi^{(N)}(t, \omega) d\tau$. Тогда, согласно свойствам A1 – A4, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{ |J_N - J_{N+M}|^2 \} &= \int_0^T \mathbf{M} \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi^{(N+M)}(t, \omega)|^2 \right\} dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^T \mathbf{M} \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 \right\} dt + \\ &+ 2 \int_0^T \mathbf{M} \left\{ |\xi(t, \omega) - \xi^{(N+M)}(t, \omega)|^2 \right\} dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из (1.8) и (1.9) получаем, что последовательность J_N является фундаментальной в среднеквадратическом смысле, т.е. существует такая случайная величина J , что $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{M} \{ |J_N - J|^2 \} = 0$. Ясно, что J является $\mathcal{F}_T$ измеримой, как предел последовательности $\mathcal{F}_T$ измеримых случайных величин. Кроме этого, J является единственной с вероятностью 1 случайной величиной для любой последовательности ступенчатых функций из $\mathcal{K}_2([0, T])$, сходящейся к функции $\xi(t, \omega)$ по норме

в $\mathcal{M}_2([0, T])$. Действительно, пусть существует такая последовательность $\xi^{(N)} \in \mathcal{K}_2([0, T])$, что $\|\xi^{(N)} - \xi\|_{2,T} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, но при этом $\tilde{J}_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \tilde{\xi}^{(N)}(t, \omega) df_t$ сходится в среднеквадратическом смысле к некоторой случайной величине $\tilde{J}$, отличной от J . Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ |J - \tilde{J}|^2 \right\} \leq 3\mathbb{M} \left\{ |J - J_N|^2 \right\} + 3\mathbb{M} \left\{ |J_N - \tilde{J}_N|^2 \right\} + 3\mathbb{M} \left\{ |\tilde{J}_N - \tilde{J}|^2 \right\}. \quad (1.10)$$

Ясно, что первое и третье слагаемые в правой части (1.10) стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Аналогично (1.9) показывается, что $\mathbb{M} \left\{ |J_N - \tilde{J}_N|^2 \right\} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому $\mathbb{M} \left\{ |J - \tilde{J}|^2 \right\} = 0$, следовательно, $J = \tilde{J}$ с в.1.

Определение 1.8. *Стохастическим интегралом Ито от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ назовем среднеквадратический предел последовательности ступенчатых функций:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left(f(\tau_{j+1}^{(N)}, \omega) - f(\tau_j^{(N)}, \omega) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau, \quad (1.11)$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ — произвольная ступенчатая функция из $\mathcal{K}_2([0, T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t, \omega)$.

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$. Тогда стохастический интеграл Ито, определенный в соответствии с определением 1.8, существует.*

Можно показать (см. например [50]), что стохастический интеграл Ито для всех $\xi, \eta \in \mathcal{M}_2([0, T])$ и всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет свойствам A1 — A4.

Мы рассмотрели стохастический интеграл Ито на фиксированном промежутке $[0, T]$. Рассмотрим теперь фиксированный промежуток $[t_0, t] \subset [0, T]$. Определим стохастический интеграл Ито $\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau$ для $\xi \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$ в соответствии с определением 1.8 путем замены 0 на t_0 и T на t . Тогда очевидно, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_s df_s + \int_{t_1}^t \xi_s df_s = \int_{t_0}^t \xi_s df_s,$$

где $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t \leq T$.

Рассмотрим промежуток $[t_0, t] \subseteq [0, T]$ и будем считать t переменным моментом времени. Определим случайный процесс η_t , $t_0 \leq t \leq T$ следующим образом:

$$\eta_t = \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \text{ с в.1,}$$

где $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$. Можно показать, что $\eta_t - \mathcal{F}_t$ измерим, не зависит от приращений $f_{s+\tau} - f_\tau$; $\tau \geq t, s > 0$ и удовлетворяет соотношениям:

$$B1. \mathbf{M} \{ \eta_t - \eta_s \mid \mathcal{F}_s \} = 0 \text{ с в.1,}$$

$$B2. \mathbf{M} \{ | \eta_t - \eta_s |^2 \} = \int_s^t \mathbf{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau,$$

$$B3. \mathbf{M} \{ (\eta_t - \eta_s) (\eta_\theta - \eta_\tau) \} = 0,$$

где $0 \leq s \leq t \leq \tau \leq \theta \leq T$.

Таким образом η_t — среднеквадратически непрерывный мартингал, неравенство Дуба при $p = 2$ для которого примет вид:

$$\mathbf{M} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} | \eta_s |^2 \right\} \leq 4 \int_{t_0}^t \mathbf{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$$

Определим стохастический интеграл от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ следующим образом.

Определение 1.9. *Стохастическим интегралом от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)} \left(\tau_j^{(N)}, \omega \right) \left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau d\tau, \quad (1.12)$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ — произвольная ступенчатая функция из класса $\mathcal{K}_2([0, T])$, сходящаяся по норме $\| \cdot \|_{2,T}$ к $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Повторяя с незначительными изменениями рассуждения, доказывающие существование стохастического интеграла Ито, можно показать с учетом неравенства:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx},$$

что интеграл $\int_0^T \xi_\tau d\tau$, определенный в соответствии с определением 1.9, существует.

Таким образом, в условиях теоремы 1.1 существуют интегралы $\int_0^T \xi_\tau df_\tau, \int_0^T \xi_\tau d\tau$, определенные в соответствии с определениями 1.8 и 1.9.

Будем определять стохастический интеграл $\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau$ для функции $\xi \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$, где $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$, а t_0, t_1 – фиксированы, в соответствии с определением 1.9 путем замены 0 на t_0 и T на t .

Отметим некоторые свойства стохастического интеграла $\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau$:

$$C1. \mathbb{M}\left\{\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau\right\} = \int_{t_0}^t \mathbb{M}\{\xi_\tau\} d\tau,$$

$$C2. \mathbb{M}\left\{\left(\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau\right)^2\right\} \leq \left(\int_{t_0}^t \sqrt{\mathbb{M}\{\xi_\tau^2\}} d\tau\right)^2 \leq (t - t_0) \int_{t_0}^t \mathbb{M}\{\xi_\tau^2\} d\tau,$$

$$C3. \int_{t_0}^{t_1} \xi_s ds + \int_{t_1}^t \xi_s ds = \int_{t_0}^t \xi_s ds \text{ с в.1 } \forall t_1: 0 \leq t_0 < t_1 < t \leq T,$$

$$C4. \int_{t_0}^t (\alpha \xi_\tau + \beta \eta_\tau) d\tau = \alpha \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau + \beta \int_{t_0}^t \eta_\tau d\tau \text{ с в.1 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$$

Предполагается, что случайные процессы ξ_τ, η_τ , входящие в $C1 - C4$, удовлетворяют условиям теоремы 1.1 на промежутке $[t_0, t]$.

В литературе (см. например [3]) стохастический интеграл Ито чаще определяется для более широкого класса интегрируемых случайных процессов, чем $\mathcal{M}_2([0, T])$.

Так, если определить класс функций $\mathcal{P}_2([0, T])$, получающийся из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$ путем замены условий (III), (IV) на следующее условие:

$$\int_0^T (\xi(t, \omega))^2 dt < \infty \text{ с в.1,} \quad (1.13)$$

то можно показать [3], что стохастический интеграл Ито существует как предел по вероятности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left(f(\tau_{j+1}^{(N)}, \omega) - f(\tau_j^{(N)}, \omega) \right),$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ – произвольная ступенчатая функция из класса $\mathcal{P}_2([0, T])$, сходящаяся к $\xi \in \mathcal{P}_2([0, T])$ в следующем смысле:

$$\int_0^T |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 dt \rightarrow 0$$

по вероятности при $N \rightarrow \infty$.

1.3.2 Процессы Ито

Винеровские случайные процессы порождают широкий класс случайных процессов, называемых в литературе, процессами Ито. Они имеют важное значение для теории случайных процессов с непрерывным временем и оказываются адекватными математическими моделями во многих прикладных задачах. В частности, решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см. параграф 1.3.4), а также достаточно гладкие функциональные преобразования решений этих уравнений являются процессами Ито.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим случайные процессы $a_t \in \mathbb{R}^1$ и $\mathbf{b}_t^{(i)} \in \mathbb{R}^1$ $i = 1, \dots, m$ из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$.

Определим случайный процесс η_t при всех $t \in [0, T]$ в виде:

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int_0^t \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \quad (1.14)$$

где η_0 – случайная величина, стохастически независимая от приращений $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при всех $\tau \in (0, T]$.

Определение 1.10. Процесс η_t , определенный на промежутке $[0, T]$ в виде (1.14), называется процессом Ито, если правая часть (1.14) существует при всех $t \in [0, T]$. При этом процесс a_t называется коэффициентом сноса, а процессы $\mathbf{b}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$ – коэффициентами диффузии процесса η_t .

Нетрудно видеть, что из свойства аддитивности стохастических интегралов вытекает следующее представление для процесса Ито:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ с в.1,} \quad (1.15)$$

справедливое для всех $s, t \in [0, T]$; $s \geq t$.

Пусть процессы a_t , $\mathbf{b}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 при всех $t \in [0, T]$. Тогда очевидно процесс Ито, определенный соотношением (1.14), существует при всех $t \in [0, T]$. Кроме этого, в этих условиях для любых $t, \tau \in [0, T]$; $\tau \geq t$ найдется такая постоянная

$C < \infty$, что выполняется условие Липшица:

$$M\{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq C |\tau - t|. \quad (1.16)$$

Действительно, используя соотношение (1.15) и неравенство Минковского, имеем:

$$M\{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq \left(\left(M \left\{ \left(\int_t^\tau a_s ds \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^m \left(\left(\int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} \cdot d\mathbf{f}_s^{(i)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

В силу свойств B2 и C2 стохастических интегралов имеем:

$$M\{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq \left[K_1(\tau - t) + K_2(\tau - t)^{\frac{1}{2}} \right]^2; \quad K_1, K_2 < \infty,$$

откуда следует оценка (1.16).

Перейдем к рассмотрению многомерного случая. Рассмотрим случайные процессы $\mathbf{a}_t \in \mathbb{R}^n$ и $B_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$, каждая компонента которых принадлежит классу $\mathcal{M}_2([0, T])$.

Определим векторный случайный процесс $\eta_t \in \mathbb{R}^n$ при всех $t \in [0, T]$ в виде:

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau, \quad (1.17)$$

где случайная векторная величина $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ является стохастически независимой от приращений $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при всех $\tau \in (0, T]$.

Определение 1.11. Процесс $\eta_t \in \mathbb{R}^n$ вида (1.17), определенный на промежутке $[0, T]$, называется векторным процессом Ито, если правая часть (1.17) существует при всех $t \in [0, T]$. При этом процессы $\mathbf{a}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, n$ называются коэффициентами сноса, а процессы $B_t^{(ij)}$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ называются коэффициентами диффузии процесса η_t .

Обобщением соотношения (1.15) на случай векторного процесса Ито является следующее равенство:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_t^s B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с в.1,}$$

справедливое для всех $s, t \in [0, T]$; $s \geq t$.

Предположим, что процессы a_t и B_t покомпонентно удовлетворяют условиям теоремы 1.1 на промежутке $[0, T]$. Тогда очевидно векторный процесс Ито, определенный соотношением (1.17), существует при всех $t \in [0, T]$. Кроме этого, для любых $t, \tau \in [0, T]$; $\tau \geq t$ найдется такая постоянная $C < \infty$, что выполняется условие Липшица:

$$M \{ |\eta_\tau - \eta_t|^2 \} \leq C |\tau - t|.$$

Рассмотрим вопрос о преобразовании процесса Ито с помощью замены вероятностной меры.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Рассмотрим скалярный процесс Ито вида:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_s ds + f_t, \quad (1.18)$$

где f_t — стандартный скалярный винеровский процесс относительно вероятностной меры P , a_s — скалярный случайный процесс, удовлетворяющий условиям существования интеграла $\int_0^t a_s ds$. Процесс x_t вида (1.18) иногда называют "винеровским процессом со сносом". В ряде ситуаций бывает удобно рассматривать процесс x_t как винеровский относительно некоей другой меры P_x , т.е. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$. Построение меры P_x возможно с помощью преобразования Гирсанова [39], которое преобразует вероятностную меру P в абсолютно непрерывную относительно P меру P_x с производной Радона-Никодима вида:

$$\frac{dP_x}{dP} = e^{-\int_0^T a_s df_s - \frac{1}{2} \int_0^T |a_s|^2 ds}.$$

При этом процесс x_t будет винеровским процессом на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$.

1.3.3. Формула Ито

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ винеровский процесс $f_t \in \mathbb{R}^1$. Пусть случайные процессы a_s и b_s таковы, что $\sqrt{|a_s|}, b_s \in \mathcal{P}_2([0, T])$ (или

$\mathcal{M}_2([0, T])$). Рассмотрим процесс Ито $x_t; t \in [0, T]$ вида:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \int_0^t b_\tau df_\tau.$$

Используя свойство аддитивности стохастических интегралов представим процесс x_t в виде:

$$x_t = x_s + \int_s^t a_\tau d\tau + \int_s^t b_\tau df_\tau \text{ с в.1,} \quad (1.19)$$

где $0 \leq s \leq t \leq T$.

Если представление (1.19) справедливо с вероятностью 1, то будем говорить, что процесс x_t имеет стохастический дифференциал dx_t , и записывать этот факт в виде:

$$dx_s = a_s ds + b_s df_s. \quad (1.20)$$

Отметим, что запись (1.20) является символической записью формулы (1.19).

Лемма 1.1. Пусть функция $R(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$, а процесс Ито x_t имеет вид (1.19), причем $\sqrt{|a_s|}, b_s \in \mathcal{P}_2([0, T])$ (или $\mathcal{M}_2([0, T])$). Тогда для любых $s, t : 0 \leq s \leq t \leq T$ с вероятностью 1

$$\begin{aligned} R(x_t, t) = R(x_s, s) + \int_s^t \left\{ \frac{\partial R}{\partial t}(x_\tau, \tau) + a_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau, \tau) + \frac{1}{2} b_\tau^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x_\tau, \tau) \right\} d\tau + \\ + \int_s^t b_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau, \tau) df_\tau. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.1 можно найти, например, в [3, 50]. Лемма 1.1 устанавливает формулу Ито в скалярном случае.

Перейдем к рассмотрению векторного случая.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$. Пусть случайные процессы $\mathbf{a}_s^{(i)}$ и $B_s^{(ij)}$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ таковы, что $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$ (или $\mathcal{M}_2([0, T])$) при всех $i = 1, \dots, n$;

$j = 1, \dots, m$. Рассмотрим векторный процесс Ито $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n; t \in [0, T]$ вида:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s + \int_s^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_s^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с в.1,} \quad (1.21)$$

где $0 \leq s \leq t \leq T$.

В покомпонентной форме равенство (1.21) примет вид:

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \mathbf{x}_s^{(i)} + \int_s^t \mathbf{a}_\tau^{(i)} d\tau + \sum_{j=1}^m \int_s^t B_\tau^{(ij)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} \text{ с в.1,}$$

где $0 \leq s \leq t \leq T; i = 1, \dots, n$.

Лемма 1.2. Пусть функция $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}, \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}; i, j = 1, \dots, n$, процесс Ито $\mathbf{x}_t$ имеет вид (1.21), причем $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$ (или $\mathcal{M}_2([0, T])$); $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$, а процесс η_t имеет вид: $\eta_t = R(\mathbf{x}_t, t)$. Тогда для любых $s, t: 0 \leq s \leq t \leq T$ с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \eta_t = \eta_s + \int_s^t \left\{ \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_\tau^{(i)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n B_\tau^{(ij)} B_\tau^{(kj)} \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) \right\} d\tau + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_s^t B_\tau^{(ij)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(j)}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.2 можно найти, например, в [3, 50]. Лемма 1.2 устанавливает формулу Ито в векторном случае.

1.3.4. Стохастические дифференциальные уравнения Ито

В этом параграфе придадим строгий математический смысл понятию стохастического дифференциального уравнения.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ винеровский процесс $f_t \in \mathbb{R}^1$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t; x_0 = x(0, \omega), \quad (1.22)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ – случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.22); $a(x, t)$ и $\sigma(x, t) \in \mathbb{R}^1$ – измеримые при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$ функции. Уравнение (1.22) может быть переписано в интегральном виде:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau, \tau) d\tau + \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau; \quad x_0 = x(0, \omega). \quad (1.23)$$

Второй интеграл в правой части (1.23) может пониматься, например, в смысле Ито, Стратоновича или как θ -интеграл (см. параграф 1.3.5). Пусть интеграл $\int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau$ является стохастическим интегралом Ито, тогда уравнение (1.22) и соответствующее ему уравнение (1.23) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Если же интеграл $\int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau$ является стохастическим интегралом Стратоновича (далее для него будет введено специальное обозначение: $\int_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau$), то уравнение (1.22) и соответствующее ему уравнение (1.23) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Стратоновича.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида (1.22). Будем далее предполагать, что x_0 и $f_t - f_0$ при $t > t_0$ являются стохастически независимыми.

Будем говорить, что случайный процесс $x_t \in \mathbb{R}^1$ является решением уравнения Ито (1.22), если $x_t - \mathcal{F}_t$ измерим при всех $t \in [0, T]$, интегралы в правой части (1.23) существуют и равенство (1.23) имеет место при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

В частности в [3] показано, что если выполнены условия:

1. $a(x, t)$ и $\sigma(x, t) \in \mathbb{R}^1$ – измеримые при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$ функции,

2. для всех $x, y \in \mathbb{R}^1$ существует такая постоянная $K < \infty$, что:

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K |x - y|,$$

и

$$|a(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq K^2 (1 + |x|^2),$$

3. $x_0 - \mathcal{F}_0$ измерима и $M\{|x_0|^2\} < \infty$,

то существует непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.23),

и если x_{1t}, x_{2t} — два непрерывных решения при фиксированном x_0 , то

$$P\{x_{1t} = x_{2t}\} = 1, \quad P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |x_{1t} - x_{2t}| > 0\right\} = 0.$$

Кроме этого, плотность распределения $p(y, t); y \in \mathbb{R}^1, t \in [0, T]$ решения уравнения (1.23) удовлетворяет уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(y, t) = -\frac{\partial}{\partial y} (a(y, t)p(y, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2(y, t)p(y, t)). \quad (1.24)$$

Предполагается, что входящие в (1.24) частные производные существуют и непрерывны для всех $(y, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$.

Перейдем теперь к рассмотрению многомерного случая. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.25)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.25); $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$); $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\Sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $\mathbf{x}_0$ — начальное условие.

Уравнение (1.25) эквивалентно уравнению:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (1.26)$$

Будем далее предполагать, что $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > t_0$ являются стохастически независимыми.

Аналогично одномерному случаю будем говорить, что случайный процесс $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ является решением уравнения Ито (1.26), если каждая компонента $x_t - \mathcal{F}_t$ измерима при всех $t \in [0, T]$, интегралы в правой части (1.26) существуют и равенство (1.26) имеет место при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

В [3] показано, что если выполнены следующие условия:

АI. $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ и $\Sigma_k(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$; $k = 1, \dots, m$ — измеримые при всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ функции,

АII. для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $K < \infty$, что:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)| \leq K |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

$$|a(\mathbf{x}, t)|^2 + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t)|^2 \leq K^2 (1 + |\mathbf{x}|^2),$$

где $\Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)$ — k -ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)$,

АIII. $\mathbf{x}_0 - \mathcal{F}_0$ -измерима и $M\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$,

то существует единственное в смысле стохастической эквивалентности и непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.26).

Кроме этого плотность распределения $p(\mathbf{y}, t)$; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ решения уравнения (1.26) удовлетворяет уравнению Колмогорова-Фоккера-Планка вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{y}, t) = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} (a^{(i)}(\mathbf{y}, t) p(\mathbf{y}, t)) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} \left((\Sigma(\mathbf{y}, t) \Sigma^T(\mathbf{y}, t))^{(ij)} p(\mathbf{y}, t) \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Предполагается, что входящие в (1.27) частные производные существуют и непрерывны для всех $(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$.

Рассмотрим вариант формулы Ито для процесса, который задается нелинейным безынерционным преобразованием от решения стохастического дифференциального уравнения Ито.

Рассмотрим процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида (1.25).

Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество, для которого

$$P\{\mathbf{x}_s \in Y \text{ при всех } s \in [0, T]\} = 1.$$

Сформулируем утверждение о формуле Ито для процесса η_s .

Лемма 1.3 Пусть выполнены условия:

1° Функция $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial}{\partial t} R(\mathbf{x}, t)$; $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} R(\mathbf{x}, t)$; $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} R(\mathbf{x}, t)$; $i, j = 1, 2, \dots, n$ при всех $(\mathbf{x}, t) \in Y \times [0, T]$.

2° Функции $a(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ таковы, что $L_{\mathbf{x}_t, t}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $G_{0, \mathbf{x}_t, t}^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} \in \mathcal{M}_2([0, T])$; $i = 1, \dots, m$.

3° Выполнены условия AI-АIII.

Тогда для всех $s, t \in [0, T]$, таких, что $s \geq t$, справедливо с вероятностью 1 равенство:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s L_{\mathbf{x}_\tau, \tau} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_{0_{\mathbf{x}_\tau, \tau}}^{(i)} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)},$$

где интегралы существуют в среднеквадратическом смысле,

$$L_{\mathbf{x}, t} \{\cdot\} = \frac{\partial \{\cdot\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 \{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}},$$

$$G_{0_{\mathbf{x}, t}}^{(i)} \{\cdot\} = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}; \quad i = 1, \dots, m.$$

Далее с целью сокращения записей положим:

$$L_{\mathbf{x}, t} \{R(\mathbf{x}, t)\} \stackrel{\text{def}}{=} L \{R(\mathbf{x}, t)\}, \quad G_{0_{\mathbf{x}, t}}^{(i)} \{R(\mathbf{x}, t)\} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)} \{R(\mathbf{x}, t)\}.$$

Будем говорить, что процесс Ито $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$; $t \geq 0$ является эргодическим, если он имеет единственный инвариантный вероятностный закон ν , такой что:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\mathbf{x}_s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}) \text{ с в.1}$$

для любой ν -интегрируемой функции $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ и любого неслучайного начального условия $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим процесс Ито вида:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) ds + \int_0^t B(\mathbf{x}_s) d\mathbf{f}_s,$$

где $\mathbf{a}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – векторный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Следующая теорема, доказанная Хасьминским [31], дает достаточные условия эргодичности процесса $\mathbf{x}_t$.

Терема 1.2. Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ – гладкие функции с ограниченными производными любого порядка, причем функция $B(\mathbf{x})$ – ограничена и существует постоянная $C > 0$ и компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$, такое что:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) < -C|\mathbf{x}|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Тогда процесс $\mathbf{x}_t$ – эргодический.

1.3.5. Стохастический интеграл Стратоновича

Стохастический интеграл Стратоновича или симметризованный интеграл в литературе обычно определяется по-разному для различных классов интегрируемых случайных процессов [9, 50].

Введем класс $Q_{2m}([t, T])$ процессов Ито $\eta_\tau \in \mathbb{R}^1$, $\tau \in [t, T]$ вида:

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s df_s, \quad (1.28)$$

где процессы a_s , $b_s \in \mathbb{R}^1$ таковы, что выполняются следующие условия:

(DI) a_s^m , $b_s^m \in \mathcal{M}_2([t, T])$;

(DII) при всех s , $\tau \in [t, T]$ и некоторых положительных C , $\gamma < \infty$ процесс b_s удовлетворяет условию:

$$M\{|b_s - b_\tau|^4\} \leq C|s - \tau|^\gamma,$$

где $f_s \in \mathbb{R}^1 - \mathcal{F}_s$ измеримый при всех $s \in [t, T]$ стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим функцию $F(x, \tau) : \mathbb{R}^1 \times [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, которая является дважды непрерывно дифференцируемой по x при всех $x \in \mathbb{R}^1$ и для которой

$$\left| \frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial^2 F(x, \tau)}{\partial x^2} \right| < \infty$$

при всех $x \in \mathbb{R}^1$.

Определение 1.12. *Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса $F(\eta_\tau, \tau)$; $\tau \in [t, T]$ назовем следующий среднеквадратический предел:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{1}{2}(\eta_{\tau_j^{(N)}} + \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}), \tau_j^{(N)}\right) (f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}) \stackrel{def}{=} \int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau, \quad (1.29)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.11).

Более общая конструкция стохастического интеграла может быть определена следующим образом:

Определение 1.13. *Стохастическим θ -интегралом от процесса*

$F(\eta_\tau, \tau)$; $\tau \in [t, T]$ назовем следующий среднеквадратический предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\theta \eta_{\tau_j^{(N)}} + (1-\theta) \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}, \tau_j^{(N)}\right) \left(f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T F(\eta_\tau, \tau) df_\tau, \quad (1.30)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.30), а $\theta \in [0, 1]$.

Далее с целью сокращения записей будем писать τ_j вместо $\tau_j^{(N)}$.

Очевидно, что при $\theta = 1$ стохастический θ -интеграл переходит в стохастический интеграл Ито, а при $\theta = 1/2$ в стохастический интеграл Стратоновича. Ниже будут рассмотрены соотношения между стохастическим интегралом Ито и стохастическими θ -интегралом и интегралом Стратоновича, а также приведены достаточные условия существования стохастического θ -интеграла и стохастического интеграла Стратоновича.

Рассмотрим интегральную версию неравенства Гельдера:

$$\left| \int_{t_0}^t h(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_{t_0}^t h^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t_0}^t g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.31)$$

где $1/p + 1/q = 1$; $p, q > 1$ и интегралы, входящие в (1.31), существуют. Используем неравенство (1.31) для доказательства следующих оценок [4, 50] четных моментов стохастических интегралов:

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{n-1} (n(2n-1))^n \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau, \quad (1.32)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau, \quad (1.33)$$

где случайный процесс ξ_τ таков, что $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$, $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; $n = 1, 2, \dots$.

Докажем сначала равенство (1.32). Применяя формулу Ито к $\left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n}$; $n = 1, 2, \dots$, получим:

$$\left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} = 2n \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-1} \xi_s df_s +$$

$$+\frac{1}{2}2n(2n-1)\int_{t_0}^t\left(\int_{t_0}^s\xi_udf_u\right)^{2n-2}\xi_s^2ds. \quad (1.34)$$

Тогда

$$M\left\{\left(\int_{t_0}^t\xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}=n(2n-1)\int_{t_0}^tM\left\{\left(\int_{t_0}^s\xi_udf_u\right)^{2n-2}\xi_s^2\right\}ds. \quad (1.35)$$

Из (1.35) следует, что $M\left\{\left(\int_{t_0}^t\xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}$ растет с ростом t . Используя этот факт и неравенство Гельдера (1.31), получим из (1.35) следующие неравенства:

$$\begin{aligned} M\left\{\left(\int_{t_0}^t\xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} &\leq n(2n-1)\left(\int_{t_0}^tM\left\{\left(\int_{t_0}^s\xi_udf_u\right)^{2n}\right\}ds\right)^{\frac{2n-2}{2n}} \times \\ &\quad \times \left(\int_{t_0}^tM\{|\xi_s|^{2n}\}ds\right)^{\frac{2}{2n}} \leq \\ &\leq n(2n-1)\left(\int_{t_0}^tM\left\{\left(\int_{t_0}^t\xi_udf_u\right)^{2n}\right\}ds\right)^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_{t_0}^tM\{|\xi_s|^{2n}\}ds\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

После возведения левой и правой частей (1.36) в степень n и сокращения обеих частей полученного неравенства на $\left(M\left\{\left|\int_{t_0}^t\xi_\tau df_\tau\right|^{2n}\right\}\right)^{n-1}$ получим (1.32).

Докажем неравенство (1.33). Применяя неравенство Гельдера (1.31) к левой части (1.32), получим:

$$\begin{aligned} M\left\{\left|\int_{t_0}^t\xi_\tau d\tau\right|^{2n}\right\} &\leq M\left\{\int_{t_0}^t\xi_\tau^{2n}d\tau\right\}\left(\int_{t_0}^td\tau\right)^{2n-1} = \\ &= (t-t_0)^{2n-1}\int_{t_0}^tM\{|\xi_\tau|^{2n}\}d\tau. \end{aligned}$$

Неравенства (1.32), (1.33) доказаны. Приведенное доказательство можно найти, например, в [4].

Используем приведенные оценки моментов стохастических интегралов для доказательства следующей леммы о связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Лемма 1.4. Пусть $\eta_\tau \in Q_8([t, T])$, $F(\eta_\tau, \tau) \in \mathcal{M}_2([t, T])$, где функция $F(x, \tau) : \mathbb{R}^1 \times [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ является дважды непрерывно дифференцируемой по x при всех $x \in \mathbb{R}^1$, причем

$$\left| \frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x} \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial^2 F(x, \tau)}{\partial x^2} \right| < \infty$$

при всех $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда

$$\int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau = \int_t^T F(\eta_\tau, \tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_\tau, \tau) b_\tau d\tau \quad \text{с в.1.}$$

Доказательство: С помощью формулы Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}(\eta_{\tau_{j+1}} + \eta_{\tau_j}), \tau_j\right) &= F(\eta_{\tau_j}, \tau_j) + \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \frac{1}{2}(\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) \frac{1}{4}(\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^2, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где $\xi_j = \eta_{\tau_j} + \frac{\theta_j}{2}(\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})$, $\theta_j \in [0, 1]$ – случайная величина.

Далее согласно (1.28), неравенствам (1.32), (1.33) при $n = 4$, условиям леммы 1.4, неравенству $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$; $a, b \in \mathbb{R}^1$, а также согласно неравенствам Минковского и Коши-Буняковского имеем:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^2 (f_{\tau_{j+1}} - f_\tau) \right)^2 \right\} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbf{M} \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) \right)^2 (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^4 (f_{\tau_{j+1}} - f_\tau)^2 \right\} \right)^{1/2} \right)^2 \leq \\ &\leq C \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\left(\mathbf{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^8 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\mathbf{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} b_s df_s \right|^8 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} \right) 3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Delta \tau_j} \right)^2 \leq \\ &\leq C_1 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left((\Delta \tau_j)^7 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M} \{ |a_s|^8 \} ds \right)^{\frac{1}{4}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(28^4 (\Delta\tau_j)^3 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M} \{ |b_s|^8 \} d\tau \right)^{\frac{1}{4}} \left(3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Delta\tau_j} \right)^2 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty; \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \left((\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}) (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) - b_{\tau_j} \Delta\tau_j \right) \right)^2 \right\} \leq \\ & \leq 2\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} + \\ & + 2\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} b_s df_s (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) - b_{\tau_j} \Delta\tau_j \right) \right)^2 \right\} \leq \\ & \leq 2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbf{M} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \right)^2 \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right)^2 (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 \right\}^{1/2} \right) \right)^2 + \\ & + 4\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) b_{\tau_j} \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right) \right)^2 \right\} + \\ & + 4\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} \leq \\ & \leq 2C_2'^2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbf{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^4 \right\} \right)^{1/4} 3^{1/4} \sqrt{\Delta\tau_j} \right)^2 + \\ & + 4C_2'^2 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \left\{ b_{\tau_j}^2 \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right)^2 \right\} + \\ & + 8 \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{M} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_i}, \tau_i) b_{\tau_j} b_{\tau_i} \times \right. \\ & \times \left. \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right) \left((f_{\tau_{i+1}} - f_{\tau_i})^2 - \Delta\tau_i \right) \right\} + \\ & + 4C_2'^2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbf{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s \right|^4 \right\} \right)^{1/4} 3^{1/4} \sqrt{\Delta\tau_j} \right)^2, \quad (1.39) \end{aligned}$$

где $C, C_1, C_2 < \infty$; $\Delta\tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Поскольку в условиях леммы 1.4

$$\mathbb{M} \left\{ \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right)^2 \right\} = 2(\Delta\tau_j)^2,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s \right|^4 \right\} \leq 36 \Delta\tau_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{ |b_s - b_{\tau_j}|^4 \} ds \leq 36 (\Delta\tau_j)^{2+\gamma},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^4 \right\} \leq (\Delta\tau_j)^3 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{ |a_s|^4 \} ds,$$

то правая часть (1.39) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Используя этот факт, а также равенства (1.38), (1.37) и определение 1.12 приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

Нетрудно видеть, что из леммы 1.4 вытекает следующее утверждение при $F(x, \tau) \equiv x$.

Лемма 1.5. Пусть $\eta_\tau \in Q_4([t, T])$. Тогда

$$\int_t^{*T} \eta_\tau df_\tau = \int_t^T \eta_\tau df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^T b_\tau d\tau \text{ с в.1.}$$

Утверждение леммы 1.5 можно несколько модифицировать.

Лемма 1.6. Пусть $\eta_\tau^{(i)} \in Q_4([t, T])$; $i = 1, 2$. Тогда

$$\int_t^{*T} \eta_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} = \int_t^T \eta_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^T b_\tau d\tau \text{ с в.1,}$$

где процесс $\eta_\tau^{(i)}$ имеет вид:

$$\eta_\tau^{(i)} = \eta_t^{(i)} + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

где $\mathbf{f}_\tau^{(j)} \in \mathbb{R}^1$; $j = 1, 2$ - независимые стандартные винеровские процессы.

Замечание 1.1. Отметим, что утверждения типа лемм 1.4 - 1.6 сохраняют силу для стохастических θ -интегралов при условии, что в формулировках лемм 1.4 - 1.6 интегралы Стратоновича заменяются на θ -интегралы, а $\frac{1}{2}$ на $\theta \in [0, 1]$.

Следствием леммы 1.6 является следующее утверждение

Лемма 1.7 Пусть процесс Ито $\eta_\tau \in \mathbb{R}^1$, $\tau \in [t, T]$ имеет вид:

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \sum_{i=1}^m \int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)}, \quad (1.40)$$

где $\mathbf{f}_s^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$ – независимые стандартные винеровские процессы; процессы a_s , $\mathbf{b}_s^{(i)}$ удовлетворяют условиям (DI), (DII).

Тогда выполнено с вероятностью 1 следующее равенство:

$$\int_t^{*T} \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} = \int_t^T \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_t^T \mathbf{b}_s^{(i)} ds; \quad i = 1, \dots, m.$$

1.3.6. Стохастические дифференциальные уравнения Стратоно- новича

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоно-
вича вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)d^*f_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.41)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ – случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.41); $a(x, t)$ и $\sigma(x, t) \in \mathbb{R}^1$ – измеримые при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$ функции; обозначение d^*f_t указывает на то, что уравнение (1.41) является стохастическим дифференциальным уравнением Стратоновича.

Уравнение (1.41) может быть переписано в эквивалентной интегральной форме:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau, \tau) d\tau + \int_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau; \quad x_0 = x(0, \omega). \quad (1.42)$$

В многомерном случае стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega)$$

или в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.25) и (1.26).

Рассмотрим вопрос о связи стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.41). Пусть условия леммы 1.3 выполнены при $n = 1$ для функции $\sigma(x, t)$. Тогда для случайного процесса $\sigma(x_t, t)$ справедлива с вероятностью 1 формула Ито:

$$\sigma(x_s, s) = \sigma(x_t, t) + \int_t^s L \{ \sigma(x_\tau, \tau) \} d\tau + \int_t^s \sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau,$$

где дифференциальный оператор $L \{ \cdot \}$ имеет вид:

$$L \{ \cdot \} = \frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial \tau} + a(x, \tau) \frac{\partial \{ \cdot \}}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, \tau) \frac{\partial^2 \{ \cdot \}}{\partial x^2}.$$

Таким образом случайный процесс $\sigma(x_t, t)$ является процессом Ито с коэффициентом сноса $L \{ \sigma(x_\tau, \tau) \}$ и коэффициентом диффузии

$$\sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma(x_\tau, \tau)}{\partial x}.$$

Пусть эти коэффициенты диффузии и сноса удовлетворяют условиям леммы 1.5. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$\int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau = \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma(x_\tau, \tau)}{\partial x} d\tau. \quad (1.43)$$

Согласно (1.43) можно перейти от стохастического дифференциального уравнения Стратоновича к соответствующему ему стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dx_t = a^*(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.44)$$

где

$$a^*(x_t, t) = a(x_t, t) + \frac{1}{2} \sigma(x_t, t) \frac{\partial \sigma(x_t, t)}{\partial x}.$$

Таким образом, если функции $a^*(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения уравнения Ито (1.44), то существует единственное, в смысле стохастической эквивалентности, решение стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (1.41).

Перейдем к рассмотрению многомерного случая. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega) \quad (1.45)$$

или в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Обобщая (1.43) на многомерный случай с вероятностью 1, получим:

$$\int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau = \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^t \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) \frac{\partial \Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} d\tau,$$

где $\Sigma_k(\mathbf{x}, \tau)$ – k -ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, \tau)$.

Таким образом, стохастическому дифференциальному уравнению Стратоновича вида (1.45) соответствует стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.46)$$

где

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_k(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}.$$

Поэтому, если матричные функции $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t)$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям AI–AIII существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.46), то и соответствующее ему стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.45) имеет единственное, в смысле стохастической эквивалентности, решение.

1.4. Математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений

1.4.1. Общий вид нелинейных моделей стохастической динамики

Анализ динамики управляемых механических, электромеханических и ряда других систем при случайных внешних воздействиях сводится к

исследованию вероятностных и статистических свойств решений систем дифференциальных уравнений, возмущенных случайными процессами. В достаточно общем случае такие системы описываются уравнением вида:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \mathbf{r}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.47)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^k$ – управляющее неслучайное воздействие; $\mathbf{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ – стохастическое возмущение, представляющее собой векторный случайный процесс; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матричные функции своих аргументов; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор начальных условий.

К исследованию систем уравнений вида (1.47) сводится решение широкого класса задач статистической механики, электродинамики, теории управления, финансовой математики, протеиновой кинетики и других дисциплин. Первая из таких задач была рассмотрена Л.Башелье [10] в связи с изучением одномерного броуновского движения частицы. Результаты Л.Башелье были обобщены А.Эйнштейном и М.Смолуховским [11] на многомерный случай. Более широкая постановка задачи о стохастическом рассмотрении динамических систем содержится в работе А.А.Андропова, А.А.Витта и Л.С.Понтрягина [12]. Эти фундаментальные работы положили начало статистическому описанию динамических систем, получившему в настоящее время широкое применение и развитие.

Корреляционные или спектральные свойства решений системы (1.47) существенным образом зависят от взаимосвязи динамических характеристик системы и частотных свойств возмущающего случайного процесса. Если полоса пропускания динамической системы (1.47) по входу значительно уже полосы частот равномерности спектра стационарного возмущающего процесса $\mathbf{r}_t$, то этот процесс может считаться белым шумом по отношению к данной системе, т.е. имеющим постоянную спектральную плотность в диапазоне частот существенном для динамики системы (1.47).

Белый шум является обобщенным случайным процессом с δ -образной корреляционной функцией и постоянной спектральной плотностью во всем частотном диапазоне, т.е. $R_r(\tau) = I\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = I$, где $\delta(\tau)$ – обобщенная δ -функция Дирака, I – единичная матрица.

Понятие белозумности случайного процесса условно. Один и тот же случайный процесс может считаться белозумным по отношению к одной динамической системе и небелозумным ("цветным") по отношению к другой, имеющей более широкую полосу пропускания. Р.Л.Стратоновичем была предложена параметризованная модель белозумного случайного процесса. Если ввести малый параметр $\mu > 0$ таким образом, что: $\mathbf{r}_t = \frac{1}{\mu} \xi_{\frac{t}{\mu^2}}$, где $\xi_t \in \mathbb{R}^m$ – стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$, такой что: $\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(t, t + \tau) d\tau = I$, и спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$, то процесс $\mathbf{r}_t$ будет иметь корреляционную функцию $R_r(\tau)$ и спектральную плотность $S_r(\omega)$, такие что при $\mu \rightarrow 0$: $R_r(\tau) = \frac{1}{\mu^2} R_\xi\left(\frac{\tau}{\mu^2}\right) \rightarrow I\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = S_\xi(\mu^2\omega) \rightarrow S_\xi(0)$.

Система дифференциальных уравнений (1.47) для таким образом параметризованных случайных возмущающих процессов принимает вид:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \frac{1}{\mu} \xi_{\frac{t}{\mu^2}}; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (1.48)$$

При достаточно малом μ процесс $\frac{1}{\mu} \xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ может считаться белозумным по отношению к данной динамической системе, так как полоса равномерности спектра возмущающего процесса $\frac{1}{\mu} \xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ неограниченно расширяется при $\mu \rightarrow 0$, а полоса пропускания системы остается постоянной.

Если полоса пропускания системы (1.47) не достаточно узка по отношению к полосе равномерности спектра возмущающего процесса $\mathbf{r}_t$, то белозумная аппроксимация этого процесса не адекватна исходной постановке задачи стохастической динамики. В этих случаях существен учет свойств "цветности" процесса $\mathbf{r}_t$, для чего спектральная плотность этого процесса покомпонентно представляется или аппроксимируется следующим образом:

$$S_r(\omega) = H_r(j\omega) H_r(-j\omega) = \frac{F_r(j\omega)}{A_r(j\omega)} \frac{F_r(-j\omega)}{A_r(j\omega)}, \quad (1.49)$$

где $H_r(p) = \frac{F_r(p)}{A_r(p)}$ – дробно-рациональная передаточная функция устойчивой системы, т.е. $F_r(p)$ и $A_r(p)$ – полиномы конечных степеней m и n ($m < n$), причем полином $A_r(p)$ – гурвицев; j – мнимая единица.

Известно, что спектральной плотностью (1.49) обладают установившиеся выходные процессы линейной стохастической системы, представленной в пространстве состояний в виде:

$$\frac{dz_t}{dt} = A_r z_t + F_r f_t; \quad r_t = H z_t, \quad (1.50)$$

для матриц A_r , F_r , H которой справедливо равенство:

$$H_r(p) = H (pI - A_r)^{-1} F_r = \frac{F_r(p)}{A_r(p)},$$

где f_t – белозумный процесс; I – единичная матрица. Система (1.50) называется формирующим фильтром процесса r_t , который может быть также задан в операторной форме в виде:

$$r_t = H_r(D) f_t,$$

где D – оператор дифференцирования, или в интегральной форме в виде

$$r_t = \int_{-\infty}^t h_r(t - \tau) f_t d\tau,$$

где $h_r(t)$ – оригинал $H_r(p)$:

$$\int_0^{\infty} h_r(t) e^{-pt} dt = H_r(p).$$

Если расширить систему уравнений (1.47), дополнив их уравнениями (1.50), то в этом расширенном виде математическое описание динамической системы сводится к стохастической системе дифференциальных уравнений с белозумным возмущением.

Таким образом, достаточно универсальной математической моделью, описывающей стохастическую динамику систем, является модель нелинейной системы дифференциальных уравнений, возмущенных векторным белозумным случайным процессом:

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, u(t), t) + \Sigma(x_t, t) f_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.51)$$

где сохранены все обозначения формулы (1.47), но коррелированное возмущение r_t заменено на белозумное f_t .

Необходимо отметить, что белозумный процесс является обобщенным случайным процессом, имеющим бесконечную дисперсию. Поэтому обращаться с этим процессом нужно с большой осторожностью, придавая точный математический смысл преобразованиям, включающим белозумный процесс. Известно, что система уравнений (1.51) с белозумным возмущением может рассматриваться в различных математических смыслах, приводящихся друг к другу, например, в смысле Ито или в смысле Стратоновича, которые наиболее употребимы в литературе. При этом систему уравнений вида (1.51) в ряде случаев бывает удобно приводить к форме Ито при проведении аналитических вычислений. В то же время зачастую формой, адекватной математическому описанию конкретных физических или технических систем, является форма Стратоновича. Поскольку эти формы приводятся друг к другу, то возможно их разумное сочетание при математическом моделировании динамических стохастических систем.

1.4.2. Линейные модели стохастической динамики

Рассуждения о соответствии частотных свойств случайного возмущения и частотных характеристик динамического объекта, приведенные выше, носили чисто качественный характер из-за большой общности рассматриваемых моделей. Если теперь из всего множества моделей (1.47)-(1.51) выделить класс линейных моделей, то эти качественные соображения можно перевести в количественные оценки. Проделаем это.

Пусть система (1.47) линейна и стационарна так, что:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{r}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega); \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t, \quad (1.52)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ – решение системы (1.52), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{r}_t \in \mathbb{R}^m$ – стохастическое возмущение, $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^l$ – выходной процесс; A , B , Σ , H – постоянные числовые матрицы соответствующих размеров, причем матрица A – гурвицева; $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор начальных условий со средним $\bar{\mathbf{x}}_0$ и центрированной составляющей $\dot{\mathbf{x}}_0$.

Система уравнений (1.52) может быть представлена в эквивалентной операторной форме в виде

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t, \quad (1.53)$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $y_0(t)$ – переходный процесс, соответствующий начальному условию x_0 ; $H_u(D)$, $H_r(D)$ – передаточные операторы от управления $u(t)$ к выходу y_t и от стохастического возмущения r_t к выходу y_t соответственно.

Процесс y_t и операторы $H_u(D)$, $H_r(D)$ определяются из (1.52) в виде:

$$y_0(t) = H(DI - A)^{-1} x_0 \delta(t),$$

$$H_u(D) = H(DI - A)^{-1} B = \frac{B(D)}{A(D)},$$

$$H_r(D) = H(DI - A)^{-1} \Sigma = \frac{\Sigma(D)}{A(D)},$$

где $\delta(t)$ – δ -функция Дирака, $A(D)$, $B(D)$, $\Sigma(D)$ – полиномиальные операторы; $A(p) = \det(pI - A)$ – гурвицев полином.

Процесс y_t имеет систематическую составляющую $\bar{y}(t)$ и чисто случайную составляющую $\dot{\bar{y}}_t$:

$$y_t = \bar{y}(t) + \dot{\bar{y}}_t,$$

причем

$$\bar{y}(t) = \bar{y}_0(t) + H_u(D)u(t), \quad (1.54)$$

$$\dot{\bar{y}}_t = \dot{\bar{y}}_0(t) + H_r(D)r_t. \quad (1.55)$$

В дальнейших рассуждениях будем считать случайный процесс r_t скалярным.

В силу устойчивости системы (1.52) и стационарности возмущения r_t процесс $\dot{\bar{y}}_t$ является асимптотически стационарным и обладающим следующей спектральной плотностью:

$$S_y(\omega) = |H_r(j\omega)|^2 S_r(\omega),$$

где $S_r(\omega)$ – спектральная плотность возмущения r_t .

Определим количественные характеристики полосы пропускания системы (1.53) и полосы равномерности спектра процесса r_t .

Под полосой пропускания системы (1.53) будем понимать полосу частот, удовлетворяющую условию:

$$\Omega_{\text{sys}} = \{\omega : \omega_0 \leq \omega \leq \bar{\omega}_{\text{sys}}\},$$

где

$$\bar{\omega}_{syst} = \operatorname{argmax}_{\omega} \{ \omega - \omega_0 > 0 :$$

$$\frac{k_s^2}{\omega - \omega_0} \int_{\omega_0}^{\omega} |H_r(ju)|^2 du \leq \max \{ |H_r(j\omega)|^2, |H_r(j\omega_0)|^2 \} \}$$

при некотором $k_s = 0.1 \div 0.3$; $\omega_0 \geq 0$.

Коэффициент k_s задает относительный пороговый уровень амплитудно-частотной характеристики системы по отношению к ее среднему значению, что означает гашение сигналов системой (1.53) в частотном диапазоне $\omega > \bar{\omega}_{syst}$ не менее чем в k_s раз по отношению к среднему гашению в полосе частот Ω_{syst} .

Полосой частот равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$ будем называть следующую полосу частот:

$$\Omega_r = \{ \omega : \omega_0 \leq \omega \leq \bar{\omega}_r \},$$

где

$$\bar{\omega}_r = \operatorname{argmax}_{\omega', \omega''} \{ \omega - \omega_0 > 0 :$$

$$\max_{\omega' < \omega''} |S_r(\omega') - S_r(\omega'')| \leq k_r \min \{ S_r(\omega'), S_r(\omega'') \} \}$$

при некотором $k_r = 0.05 \div 0.2$; $\omega_0 \geq 0$.

Коэффициент k_r задает относительный пороговый уровень равномерности спектральной плотности $S_r(\omega)$ процесса $\mathbf{r}_t$. В диапазоне частот Ω_r спектральная плотность $S_r(\omega)$ изменяется в пределах $k_r \cdot 100\%$ от своих значений, что позволяет приближенно считать ее константой в этом диапазоне.

Рассмотрим теперь два характерных случая, часто встречающихся в приложениях.

1. Белшумное возмущение. Предположим, что стохастическое возмущение $\mathbf{r}_t$ скалярно и полоса пропускания системы (1.53) Ω_{syst} значительно уже полосы частот Ω_r равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$:

$$\Omega_{syst} \subset \Omega_r. \quad (1.56)$$

В этом случае процесс $\mathbf{r}_t$ может считаться широкополосным по отношению к системе (1.53), что соответствует гипотезе о его белшумности в системе (1.52) или (1.53). Эта ситуация изображена на рис.1.3.

Необходимо отметить, что белозумная аппроксимация процесса $\mathbf{r}_t$ в данном случае тесно связана со свойствами самой системы. Для одной системы процесс $\mathbf{r}_t$ может считаться белозумным, а по отношению к другой системе тот же процесс $\mathbf{r}_t$ может быть уже небелозумным.

В рассмотренном случае $\mathbf{r}_t = \mathbf{f}_t$ – белый шум (в общем случае векторный), и система уравнений (1.52) запишется в виде:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega); \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t, \quad (1.57)$$

что соответствует частному случаю универсальной модели (1.51).

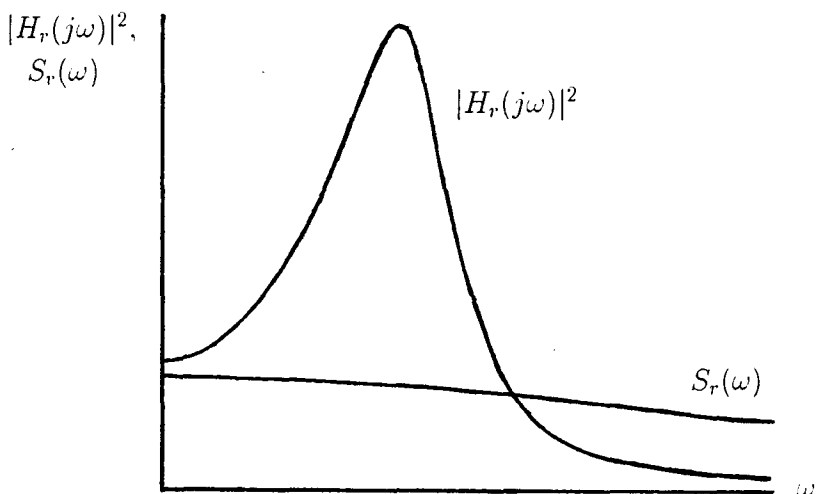


Рис.1.3. Частотная характеристика и спектральная плотность при белозумном возмущении.

2. "Цветное" возмущение. Полоса пропускания системы (1.53) не уже полосы Ω_r частот равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$:

$$\Omega_{syst} \supseteq \Omega_r. \quad (1.58)$$

В этом случае процесс $\mathbf{r}_t$ (здесь он также предполагается скалярным) является узкополосным по отношению к системе (1.53), и учет его "цветности" обязателен. Эта ситуация изображена на рис.1.4. Спектральную плотность $S_r(\omega)$ в этом случае можно представить или аппроксимировать дробно-рациональной функцией вида (1.49), а процесс $\mathbf{r}_t$ считать выходом формирующего фильтра (1.50). Совокупность уравнений (1.50), (1.52) является системой линейных стохастических дифференциальных уравнений с белым шумным процессом в правой части.

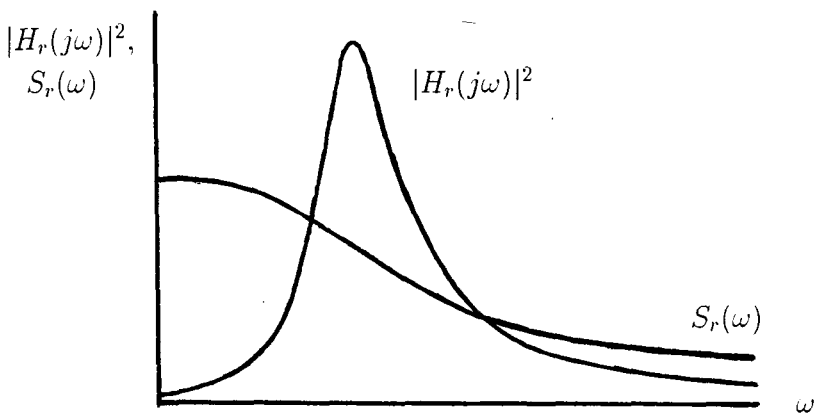


Рис.1.4. Частотная характеристика и спектральная плотность при "цветном" возмущении.

В заключение параграфа покажем, как система линейных стохастических дифференциальных уравнений, заданная в операторной форме, может быть приведена к системе линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространстве состояний.

Предположим, что полезный сигнал $s_t \in \mathbb{R}^1$ в системе формируется из управляемой и случайной компонент:

$$s_t = H_u(D)u_t + H_f(D)f_t, \quad (1.59)$$

где передаточные операторы $H_u(D)$ и $H_f(D)$ имеют дробно-рациональную структуру:

$$H_u(D) = \frac{B(D)}{A(D)}, \quad H_f(D) = \frac{C(D)}{A(D)};$$

$B(D)$, $C(D)$, $A(D)$ – полиномиальные операторы; $f_i \in \mathbb{R}^1$ – белом шумный процесс; $u_i \in \mathbb{R}^1$ – управление.

Эквивалентным (1.59) является задание системы в виде следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$A(D)s_t = B(D)u_t + C(D)f_t. \quad (1.60)$$

Рассмотрим один из способов приведения дифференциального уравнения (1.60) к системе уравнений в пространстве состояний.

Перепишем уравнение (1.60) в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^n \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t)}{dt^i} = 0, \quad (1.61)$$

где a_i , b_i , c_i – коэффициенты полиномов $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ соответственно, $a_0 = 1$.

Обозначая

$$\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} s_t - b_0 u_t - c_0 f_t,$$

получаем из (1.61) следующие равенства:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^n \mathbf{x}_t^{(1)}}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t)}{dt^i} = \\ &= \frac{d^{n-1} \mathbf{x}_t^{(2)}}{dt^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t)}{dt^i}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{x}_t^{(1)}}{dt} + a_1 \mathbf{x}_t^{(1)} + (a_1 b_0 - b_1) u_t + (a_1 c_0 - c_1) f_t.$$

Продолжая начатый процесс, получим следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = (H - \mathbf{a}e_1^T) \mathbf{x}_t - (b_0 \mathbf{a} - \mathbf{b}) u_t - (c_0 \mathbf{a} - \mathbf{c}) f_t, \quad (1.62)$$

$$s_t = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_t + b_0 u_t + c_0 f_t, \quad (1.63)$$

где $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $e_1 \in \mathbb{R}^n$ матрицы вида:

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ & & & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$a, b, c \in \mathbb{R}^n$ – векторы, составленные из коэффициентов полиномов $A(p), B(p), C(p)$, начиная с a_1, b_1 и c_1 соответственно.

Таким образом, линейная стохастическая модель системы управления вида (1.59) приводится к системе стохастических уравнений (1.62), (1.63), которая является частным случаем системы уравнений вида (1.51).

1.5. Примеры стохастических моделей физических и технических систем

1.5.1. Стохастическая модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста

В 20-х годах техника физического эксперимента достигла настолько высокого уровня, что флуктуационный предел чувствительности электроизмерительных приборов оказался легко достижимым. В 1928 г. Найквист дал количественную характеристику тепловых электрических флуктуаций в цепях, установив равномерность спектра их колебаний, т.е. белое шумение, а также зависимость их интенсивности от температуры. Аналогичный результат имеет место и для флуктуаций мельчайших частиц, взвешенных в жидкости или газе, т.е. по существу для характеристик броуновского движения. Опишем эти результаты, придерживаясь их изложения в работах [13] и [14].

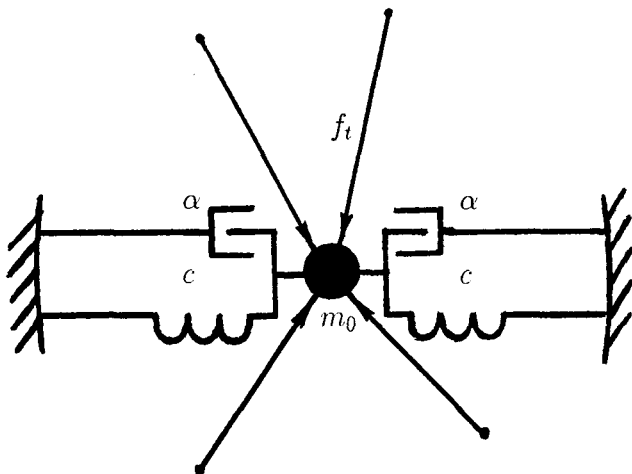


Рис.1.5. Модель движения частицы.

Тепловое движение частиц. Рассмотрим линейное по оси x движение частицы массой m_0 , взвешенной в жидкости или газе. Будем предполагать, что эта частица находится под действием случайных стационарных сил взаимодействия с молекулами окружающей среды f_t , упругой возвращающей силы $-cx_t$ и вязкого трения $-\alpha \frac{dx_t}{dt}$. Уравнение движения частицы запишется тогда в виде:

$$m_0 \frac{d^2 x_t}{dt^2} + \alpha \frac{dx_t}{dt} + cx_t = f_t, \quad (1.64)$$

где f_t – стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S_f(\omega)$:

$$S_f(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

где $R_f(\tau)$ – корреляционная функция процесса f_t .

Нетрудно показать, что спектральная плотность $S_v(\omega)$ установившегося процесса $v_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx_t}{dt}$ определяется по формуле:

$$S_v(\omega) = \frac{\omega^2 S_f(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m_0^2 + \alpha \omega^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{c}{m_0}$.

В соответствии с постулатом молекулярной физики о равнораспределении энергии по степеням свободы, можно написать следующее уравнение для средней кинетической энергии частицы:

$$\frac{kT}{2} = M \left\{ \frac{m_0 v_t^2}{2} \right\} = \frac{m_0}{2} M \{v_t^2\} = \frac{m_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S_f(\omega) d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m_0^2 + \alpha \omega^2}, \quad (1.65)$$

где T – абсолютная температура среды в градусах; $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ – постоянная Больцмана.

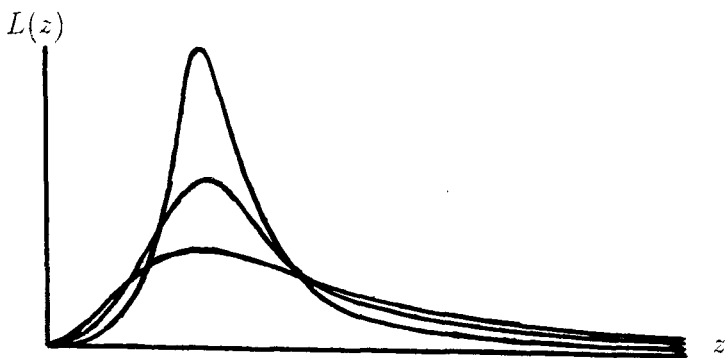


Рис.1.6. График семейства функций $L(z)$.

Сделав в правой части (1.65) замену переменных: $z = \omega/\omega_0$, преобразуем уравнение (1.65) к виду:

$$kT = \frac{1}{\pi \sqrt{m_0 c}} \int_0^{\infty} \frac{S_f(\omega_0 z) dz}{(z^2 - 1)^2 + \gamma^2},$$

где $\gamma = \alpha/\sqrt{m_0 c}$.

Учитывая, что:

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(z - z^{-1})^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

и то, что функция $L(z) = 1/((z - z^{-1})^2 + \gamma^2)$ является δ -образной в окрестности $z = 1$ (см. рис.1.6), из (1.65) при $\gamma \ll 1$ получаем формулу Найквиста [15]:

$$S_f(\omega) = 2kT\alpha. \quad (1.66)$$

Непосредственной подстановкой (1.66) в (1.65) нетрудно проверить, что $S_f(\omega) = 2kT\alpha$ является решением уравнения (1.65) и в общем случае, а не только при $\gamma \ll 1$.

Таким образом, согласно формуле Найквиста процесс внешнего воздействия на рассматриваемую частицу со стороны окружающей среды является белым шумом с интенсивностью $2kT\alpha$.

Тепловая флуктуация зарядов. Рассмотрим электрическую цепь [17], состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , резистора с сопротивлением R и индуктивности L (рис.1.7). Тогда разность потенциалов (ЭДС) в разрыве цепи можно представить через мгновенный заряд конденсатора в виде

$$u_t = \frac{q_t}{C} + R \frac{dq_t}{dt} + L \frac{d^2 q_t}{dt^2}. \quad (1.67)$$

Для такой электрической цепи можно провести аналогию с только что рассмотренной механической системой. Аналогом силового воздействия f_t здесь является ЭДС u_t ; массы m_0 – индуктивность L ; жесткости c – величина, обратная электрической емкости $1/C$; коэффициента вязкого трения α – активное сопротивление R .

Учитывая эти аналогии и идентичность уравнений (1.64) и (1.67), можно проделать приведенные выше выкладки и получить формулу Найквиста для электрических цепей:

$$S_u(\omega) = 2kTR.$$

Согласно этой формуле, процесс u_t является белым шумом с интенсивностью $2kTR$ [15].

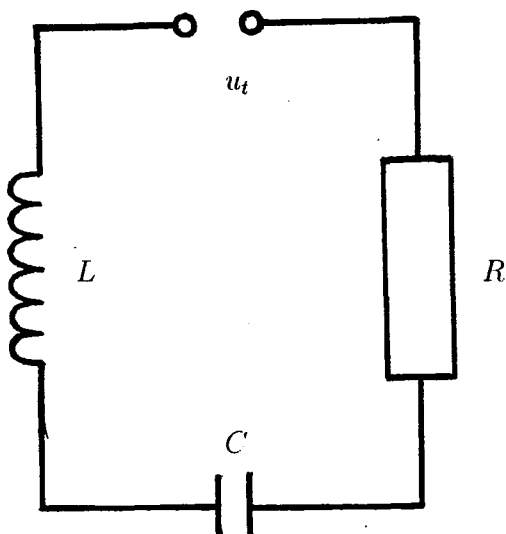


Рис.1.7. Электрическая цепь.

1.5.2. Автоколебательная электрическая система (ламповый генератор)

Рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода, упрощенная принципиальная схема которого изображена на рисунке 1.8 [16]. На схеме не изображены, но подразумеваются постоянное сеточное смещение и анодное напряжение. В автоколебательной системе, изображенной на рисунке 1.8, мгновенное значение анодного тока I_a вследствие дробовых флуктуаций отличается от среднего тока I_a^* на случайную величину $I_f(t)$ (флуктуационная компонента анодного тока). Если пренебречь реакцией анодной нагрузки ($D = 0$, D – коэффициент проницаемости) и сеточным током ($I_c = 0$), то можно

получить [16] следующее уравнение колебаний рассматриваемой автоколебательной системы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0 \left(1 - \frac{4(\frac{d}{dt}x)^2}{3\omega_0^2 A_0^2} \right) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \varepsilon \xi(t). \quad (1.68)$$

В (1.68) введены следующие обозначения:

1. $x = \omega_0 M (I - I_-)$, где M – индуктивная связка, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, I_- – постоянная составляющая анодного тока, I – ток индуктивной ветви контура,

2. $\varepsilon = \omega_0 (MS - RC)$ – малый параметр, где S – крутизна характеристики лампы $F(U) \stackrel{\text{def}}{=} I_a^*$, которая, например, может иметь следующий вид:

$$F(U) = I_- + SU - \frac{\gamma}{3} U^3,$$

где $U = U_c + LU_a$ (в нашем случае $D = 0$), γ – параметр,

3. U_a – анодное напряжение; U_c – сеточное напряжение, которое, в пренебрежении сеточным током I_c , имеет вид:

$$U_c = M \frac{dI}{dt},$$

4. $A_0 = 2\sqrt{\varepsilon/(\omega_0 M \gamma)}$ – амплитуда колебаний сеточного напряжения,

5. $\xi(t) = (\omega_0 M/\varepsilon) I_f(t)$ – случайная функция, происхождение которой обусловлено дробовыми флуктуациями анодного тока:

$$I_a = F(U) + I_f(t),$$

6. $\varepsilon \xi(t)$ – флуктуационный член.

Важно отметить, что происхождение флуктуационного члена $\varepsilon \xi(t)$ может обуславливаться не дробовыми флуктуациями анодного тока, а внешними шумами. Введем внешнее воздействие $u_k(t)$ в индуктивную ветвь контура. Тогда случайная функция $\xi(t)$ будет иметь вид [16]:

$$\xi(t) = \frac{\omega_0 M C' \frac{d}{dt} u_k(t)}{\varepsilon}.$$

Введем предположение о малости времени корреляции τ_{cor} случайной функции $\xi(t)$. Время корреляции τ_{cor} сравнивается с временем релаксации амплитуды, которое по порядку величины равно $1/(\omega_0 \varepsilon)$ [16]. Потребуем выполнения неравенства:

$$\tau_{cor} << \frac{1}{\omega_0 \varepsilon}.$$

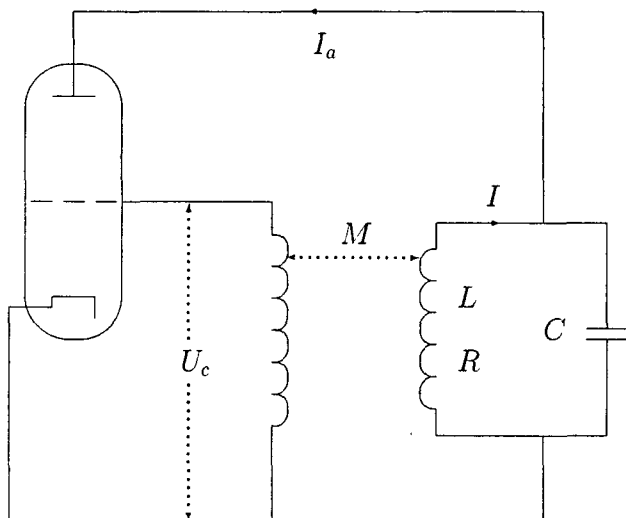


Рис.1.8. Упрощенная схема лампового генератора.

Это условие означает, что воздействующий на генератор шум является значительно более широкополосным, чем генерируемый сигнал, что выполняется во многих практических случаях. В предположении об отсутствии корреляции моментов пролета различных электронов или в предположении о кратковременности этих корреляций корреляционная функция флуктуационной составляющей анодного тока имеет δ -образный вид [16]:

$$R_{I_{cor}}(t, \tau) = \Gamma^2 e I_a^* \delta(t - \tau), \quad (1.69)$$

где Γ^2 – коэффициент депрессии дробового шума, e – заряд электрона. Пользуясь соотношением (1.69), находим корреляционную функцию и спектральную плотность величины $\xi(t)$:

$$R_{\xi}(\tau) = \Gamma^2 e I_a^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon} \right)^2 \delta(\tau),$$

$$S_{\xi}(\omega) = 2\Gamma^2 e I_a^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon} \right)^2.$$

Это означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является белым шумом, действующим на рассматриваемую систему, поскольку $\xi(t)$ имеет δ -образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность.

1.5.3. Чандлеровские колебания

Хорошо известно, что с течением времени мгновенная ось вращения Земли постоянно меняет свое положение по отношению к малой оси земного эллипсоида. Эти колебания полюса вокруг условного полюса вращения, принятого Международной Службой Широты, имеют составляющие в 1 год и 14 месяцев. Составляющая этих колебаний, имеющая период приблизительно в 435 дней, называется чандлеровским колебанием. Это колебание не является в точности периодическим. Его существование было предсказано еще Л.Эйлером в 1765г., однако он рассматривал колебания положения полюса на основе свободной нутации твердого тела. В результате он получил, что период указанных блужданий составляет 305 дней, что не соответствует многочисленным экспериментальным данным. Чандлер в 1891г. предположил, что движение полюса имеет две составляющие с периодами 1 год и 428 дней соответственно, что соответствует современным представлениям о проблеме чандлеровских колебаний.

На рис.1.9 и 1.10, которые взяты из книги [17], изображены движения полюса относительно своего среднего значения в периоды с 1900 по 1912 годы (по Ванаху) и с 1900 по 1970 годы (по данным Международной Службы Широты).

Рассмотрим математическую модель чандлеровских колебаний, предложенную Колмогоровым в 1960г. (Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. [19], 1962):

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + d \begin{bmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad (1.70)$$

где $x_t, y_t \in \mathbb{R}^1$ – случайные процессы, описывающие положение полюса; λ – затухание, а ω – частота чандлеровского колебания; ϕ_t и ψ_t – процессы возбуждения; величины $d\phi_t$ и $d\psi_t$ – описывают изменение тензора инерции Земли во временном интервале $[t, t + dt]$.

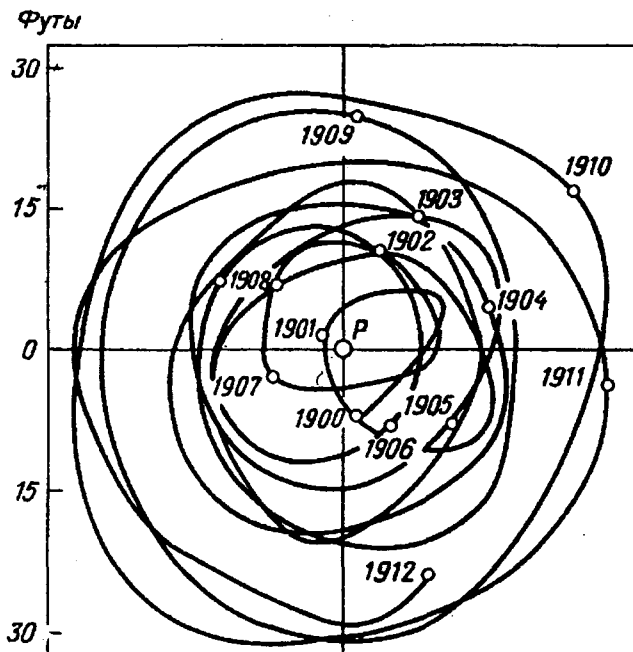


Рис.1.9. Движение северного полюса относительно своего среднего положения (данные по Ванаксу за 1900-1912 гг.). Маленькими кружками около дат обозначено положение северного полюса в начале каждого года.

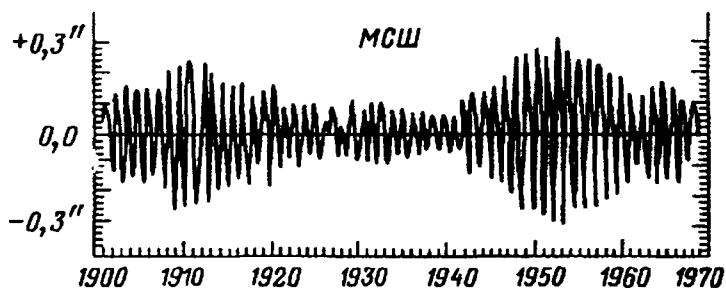


Рис.1.10. Изменения амплитуды чандлеровского колебания (с 1900 по 1970 гг.) по данным Международной Службы Широты.

Оказывается, что ряд экспериментальных данных (Орлов [18], 1958) свидетельствует в пользу того, что значения $d\phi_t$ и $d\psi_t$ в периоды времени, разделенные несколькими годами, практически независимы. В настоящее время принято, что наилучшая оценка периода чандлеровских колебаний составляет 435 дней. Предположение о нормальном распределении этой оценки (Колмогоров, 1966) и линейном затухании ковариационной функции, приводит к тому, что время релаксации составляет 15-30 лет. Этот промежуток времени является много большим, чем промежутки в несколько лет, на которых значения чандлеровских колебаний являются независимыми. Поэтому случайные процессы $\frac{d}{dt}\phi_t$ и $\frac{d}{dt}\psi_t$ являются широкополосными по отношению к полосе пропускания системы (1.70) и, следовательно, могут считаться гауссовскими белыми шумами.

1.5.4. Стохастические модели химической кинетики и модели регуляции численности конкурирующих видов

В 1951г. Б.П.Белоусовым была экспериментально открыта колебательная химическая реакция в гомогенной системе. Результаты его исследований были опубликованы несколько позже в работе [23].

После этого было открыто достаточно много различных колебательных реакций [24, 25]. Для исследования этих химических реакций предлагались различные математические модели. В частности, в 1920г. Лотка [21] предложил гипотетическую химическую реакцию, в которой возможны колебания концентраций реагирующих веществ. Уравнения этой реакции имеют вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k_1x(t) + a_1x(t)y(t), \quad (1.71)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_2y(t) + a_2x(t)y(t), \quad (1.72)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – концентрации реагирующих веществ, k_1 , k_2 , a_1 , a_2 – постоянные. Аналогичная модель в дальнейшем была использована Вольтерра для объяснения численности конкурирующих видов животных. При этом $x(t)$ и $y(t)$ – численности двух конкурирующих видов, k_1 , k_2 – коэффициенты роста, а a_1 и a_2 – коэффициенты гибели.

Предположим, что параметры роста k_1 и k_2 или соответствующие коэффициенты колебательной химической реакции имеют случайную составляющую, т.е. могут быть представлены в виде:

$$k_1(t) = k_1' + \sigma_1 \xi^{(1)}(t)$$

$$k_2(t) = k_2' + \sigma_2 \xi^{(2)}(t),$$

где $\sigma_1, \sigma_2, k_1', k_2'$ – постоянные, а $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$ – случайные процессы, которые при определенных условиях течения химических реакций или при определенных условиях проживания конкурирующих видов могут считаться независимыми гауссовскими белыми шумами. Таким образом в стохастическом варианте модель (1.71), (1.72) примет вид:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (k_1' + a_1 y(t))x(t) + \sigma_1 x(t) \xi^{(1)}(t), \quad (1.73)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = (k_2' + a_2 x(t))y(t) + \sigma_2 y(t) \xi^{(2)}(t). \quad (1.74)$$

Более общая модель, получившая название модели Лотки-Вольтерра [22], имеет вид:

$$\frac{d}{dt}x^{(i)}(t) = x^{(i)}(t) \left(\gamma_i + \sum_{j=1}^m \nu_{ij} x^{(j)}(t) \right) \quad (1.75)$$

или в стохастическом варианте

$$\frac{d}{dt}x^{(i)}(t) = x^{(i)}(t) \left(\gamma_i' + \sum_{j=1}^m \nu_{ij} x^{(j)}(t) \right) + \sigma_i x^{(i)} \xi^{(i)}(t), \quad (1.76)$$

где $x^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) – численность i -й популяции или концентрация i -го вещества. Оправданность стохастических моделей вида (1.73), (1.74) и (1.76), например, для колебательных химических реакций заключается, в частности, в том, что для химических реакций, протекающих в протяженных объемах, существенную роль играет диффузия веществ. Если же для описания такой химической реакции выбрана модель типа (1.71), (1.72), то ясно, что явление диффузии не будет в ней учитываться, поскольку в системе двух уравнений первого порядка возможны только периодические колебания.

1.5.5. Модели финансовой математики

Проблема рационального назначения премии за опцион является одной из наиболее сложных в теории фондового рынка. Хорошо известно [26], что эффективность безрисковых вложений определяется постоянной силой роста δ , так что цена вклада $S_0(t)$ определяется следующим уравнением:

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = \delta dt. \quad (1.77)$$

Однако эффективность вклада в акции (или любые ценные бумаги, на которые выпускается опцион) случайна [26], и цена акции S_t удовлетворяет скалярному стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t df_t, \quad (1.78)$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; μ, σ – параметры.

В качестве еще одного примера простой линейной стохастической модели приведем модель Башелье динамики цены акции S_t :

$$dS_t = a dt + b df_t,$$

где $a, b \in \mathbb{R}^1$ – постоянные.

В финансовой математике, наряду с многочисленными математическими моделями, встречается также следующая модель динамики доходности портфеля ценных бумаг в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ \dots \\ d\mathbf{x}_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{m}^{(n)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} \dots B^{(1m)} \\ \dots \\ B^{(n1)} \dots B^{(nm)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ \dots \\ d\mathbf{f}_t^{(m)} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_t^{(i)}$ – доходность i -й ценной бумаги; $\mathbf{m}^{(i)}$ – средний уровень доходности i -й ценной бумаги; γ – эмпирический коэффициент; $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}$ – средняя доходность по множеству ценных бумаг; $\|B^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$ – числовая матрица, характеризующая перемешивание; $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ – независимые стандартные винеровские процессы.

1.5.6. Солнечная активность

Систематические наблюдения за солнечной активностью начались с 1610г. Многочисленные наблюдения свидетельствуют в пользу того, что солнечная активность, измеряемая количеством солнечных пятен и групп пятен, ведет себя как случайный процесс с систематической

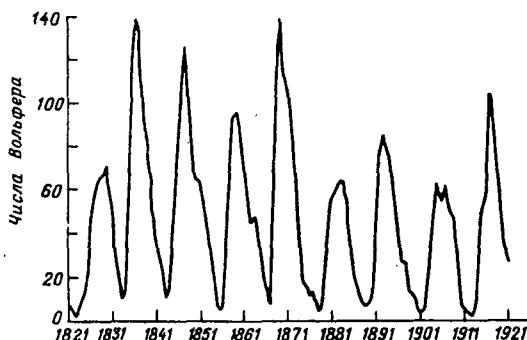


Рис.1.11. Годичная солнечная активность (числа Вольфера означают число солнечных пятен).

осцилляцией с периодом приблизительно в 11 лет [27]. В настоящее время считается, что не существует убедительных теоретических оснований для объяснения этой 11 летней периодичности. На рис.1.11, который взят из книги [17], изображена зависимость количества солнечных пятен от времени, которая известна под названием чисел Вольфера.

В книге М. Арато [17] предложена непрерывная математическая модель солнечной активности. Эта модель, без учета среднего значения солнечной активности, представляет собой следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (1.79)$$

где x_t – количество солнечных пятен, $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; a_1, a_2, c – постоянные.

1.5.7. Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)dt; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.80)$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что функция $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)$ является непрерывно дифференцируемой необходимое число раз. Уравнение (1.80) с начальным условием имеет в этом случае единственное решение.

Рассмотрим одношаговую численную схему для численного решения уравнения (1.80):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta), \quad t_k = t_0 + \Delta k \quad (1.81)$$

с ошибкой дискретизации $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k$ и шагом дискретизации Δ . Известно, что на значительных промежутках времени интегрирования ошибки округления (они зависят от особенностей конкретного компьютера и особенностей конкретного численного метода) накапливаются и приводят к значительным потерям точности вычислений. Рассмотрим как ведут себя эти ошибки. Пусть $\hat{\mathbf{x}}_k$ означает численное приближение $\mathbf{x}_k$. Тогда вместо (1.81) получим:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) + \mathbf{s}_{k+1}, \quad (1.82)$$

где $\mathbf{s}_k$ – ошибка округления на шаге с номером k . Накопленная ошибка округления $\mathbf{r}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ удовлетворяет уравнению:

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \Delta (\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)) + \mathbf{s}_{k+1},$$

из которого видно, что накопленная ошибка округления является не просто суммой локальных ошибок округления. Если предположить, что приращение $\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)$ линейно по $\mathbf{r}_k$, то можно получить [29] следующее уравнение:

$$\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k = \Delta G(t_k) \mathbf{r}_k + \mu(\Delta) \mathbf{p}(t_{k+1}) + B_s(t_k) \mathbf{s}_{k+1}, \quad \mathbf{r}_0 = 0, \quad (1.83)$$

где $G, B_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mu \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$; $M\{\mathbf{s}_k\} = 0$, $M\{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T\} = I$, I – единичная матрица.

Уравнение (1.83) может рассматриваться как дискретный аналог стохастического дифференциального уравнения Ито вида:

$$d\mathbf{r}_t = G(t)\mathbf{r}_t dt + \mu \mathbf{p}(t)dt + B_f(t)d\mathbf{f}_t; \mathbf{r}_0 = 0, \quad (1.84)$$

где $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами. Теория интегральных представлений решений уравнений типа (1.84) будет подробно рассматриваться в главе 6.

1.6. Некоторые задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями

1.6.1. Фильтрация

Рассмотрим вектор состояния $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, который является гауссовским и удовлетворяет системе линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B d\mathbf{w}_t; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.85)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – числовые матрицы, $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$), $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ – гауссовская случайная величина. Предположим, что измерение вектора $\mathbf{x}_t$ невозможно, но допустимо измерять наблюдаемый процесс $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^k$; $1 \leq k \leq n$, который удовлетворяет следующей системе линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(0), \quad (1.86)$$

где $H \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times l}$ – числовые матрицы, $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^l$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, l$), который не зависит от винеровского процесса $\mathbf{w}_t$; $\mathbf{y}_0 = 0$.

Далее будем считать, что $\mathcal{F}_t; t \geq 0$ – σ -алгебра, порожденная $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_s, \mathbf{w}_s; 0 \leq s \leq t$ и $\mathcal{Y}_t; t \geq 0$ – σ -алгебра, порожденная $\mathbf{y}_s; 0 \leq s \leq t$. Запишем уравнение фильтра Калмана-Бьюси:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = M\{\mathbf{x}_t | \mathcal{Y}_t\},$$

где $\hat{\mathbf{x}}_t$ – наилучшая оценка вектора состояния $\mathbf{x}_t$, которая доставляет минимум функционалу:

$$M\{|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t|^2\},$$

причем $M\{\mathbf{x}_t\} = M\{\hat{\mathbf{x}}_t\}$ и

$$\frac{dR(t)}{dt} = AR(t) + R(t)A^T + BB^T - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} HR(t), \quad (1.87)$$

где $R(0) = M\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T\}$, $R(t) = M\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T\}$ – ковариационная матрица ошибки оценивания $\mathbf{e}_t \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$. Известно также, что $\hat{\mathbf{x}}_t$ – гауссовский процесс, удовлетворяющий следующей системе линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = \left(A - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H \right) \hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} d\mathbf{y}_t. \quad (1.88)$$

Отметим, что получение соотношений (1.87), (1.88) осуществляется с помощью равенства

$$M\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T \hat{\mathbf{x}}_t\} = 0.$$

Используя (1.86) и (1.88), получаем:

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = A\hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H \mathbf{e}_t dt + R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} \Sigma d\mathbf{f}_t. \quad (1.89)$$

Вычитая (1.89) из (1.85), получаем следующее дифференциальное уравнение для ошибки оценивания $\mathbf{e}_t$:

$$d\mathbf{e}_t = \left(A - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H \right) \mathbf{e}_t dt - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H d\mathbf{f}_t + B d\mathbf{w}_t. \quad (1.90)$$

Объединяя уравнения (1.89) и (1.90), получаем:

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H & O \\ R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} H & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} \Sigma \\ O & R(t)H^T (\Sigma\Sigma^T)^{-1} \Sigma \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.91)$$

где O – нулевые матрицы соответствующих размеров.

Система уравнений (1.91) представляет собой систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которая может быть решена численно с помощью методов, которые обсуждаются в этой книге, если предварительно численно решено уравнение Риккати (1.87) и известна матрица $R(t)$ в дискретные моменты времени.

Отметим, что второе уравнение (1.91) может быть заменено на уравнение состояния. Тогда система (1.91) преобразуется к виду:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - R(t)H^T (\Sigma \Sigma^T)^{-1} H & O \\ O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} dt + \\ + \begin{bmatrix} B & -R(t)H^T (\Sigma \Sigma^T)^{-1} \Sigma \\ B & O \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix}.$$

Нами была рассмотрена задача линейной фильтрации. Следует отметить, что задача нелинейной фильтрации также может быть сведена к проблеме численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см. например [50]).

1.6.2. Оптимальное стохастическое управление

В ряде задач, например в задачах об управлении портфелем ценных бумаг, управлении движением динамического объекта и т.д., возникает необходимость выбирать управляющее воздействие из какого-либо оптимального критерия. Предположим, что уравнение состояния представляет собой систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)d\mathbf{f}_t, \quad (1.92)$$

где используются ранее неоднократно встречавшиеся обозначения, а $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ — управляющее воздействие, которое выбирается из условия минимизации функционала вида:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = M \left\{ Q(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \int_s^\tau F(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt | \mathbf{x}_s = \mathbf{x} \right\}, \quad (1.93)$$

где Q, F — известные функции, а τ , например, постоянный момент времени.

Известны различные типы управляющих воздействий, которые могут использовать или не использовать информацию о векторе состояния системы в предшествующие моменты времени. Рассмотрим управление $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$ марковского типа. Тогда для него минимальная по $\mathbf{u}$ величина функционала $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$, которую обозначим через $H(\mathbf{x}, s)$, удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана вида:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k} \{ F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) + L_u H(\mathbf{x}, s) \} = 0; \quad H(\mathbf{x}, T) = Q(\mathbf{x}, T),$$

где предполагается, что $\tau = T$, а оператор $L_u\{\cdot\}$ имеет вид:

$$L_u\{\cdot\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial s} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) \frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}},$$

где $D = \Sigma \Sigma^T$.

Отметим, что приведенные выше условия являются необходимыми условиями, которым удовлетворяет минимум функционала, если он существует.

Рассмотрим линейно-квадратичную проблему стохастического управления, т.е. проблему нахождения управления $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$ марковского типа, которое доставляет минимум следующему функционалу:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = M \left\{ \mathbf{x}_T^T R \mathbf{x}_T^T + \int_s^T (\mathbf{x}_t^T C(t) \mathbf{x}_t + \mathbf{u}^T P(t) \mathbf{u}) | \mathbf{x}_s = \mathbf{x} \right\},$$

где $C(t), R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P(t) \in \mathbb{R}^{k \times k}$, а $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ – решение следующей системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + B(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)) dt + \Sigma(t) d\mathbf{w}_t,$$

где $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $\Sigma(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$. Кроме этого, предполагается, что все зависящие от t матрицы – непрерывны, $C(t)$ и R – симметричные неотрицательно определенные матрицы, а матрица $P(t)$ – симметричная положительно определенная.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана для данной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s} + \mathbf{x}^T C(s) \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n (A(s)\mathbf{x})^{(j)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D^{(ij)} \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \\ + \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k} \left\{ \mathbf{u}^T P(t) \mathbf{u} + \sum_{j=1}^n (B(s)\mathbf{u})^{(j)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

где $D = \Sigma(t)\Sigma^T(t)$, а граничное условие имеет вид:

$$H(T, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T R \mathbf{x}.$$

В [50], в частности, показано, что оптимальное управление и минимальное значение функционала $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$ имеют в этой задаче следующий вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, s) = -P(s)^{-1}B(s)\mathbf{x}, \quad (1.94)$$

$$H(\mathbf{x}, s) = \mathbf{x}^T S(s) \mathbf{x} + \int_s^T \text{tr} \{ \Sigma(t) \Sigma^T(t) S(t) \} dt, \quad (1.95)$$

где tr – след (сумма диагональных элементов) матрицы; $S(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица, которая удовлетворяет следующему матричному уравнению Риккати:

$$\frac{dS(s)}{ds} = -A(s)^T S(s) - S(s)A(s) + S(s)B(s)P(s)^{-1}B(s)S(s) - C(s); \quad (1.96)$$

$$S(T) = R.$$

Таким образом, если мы решили (вообще говоря, численно) уравнение Риккати (1.96), то можем найти по формулам (1.94) и (1.95) оптимальное управление и минимальное значение функционала.

Если вместо вектора состояния $\mathbf{x}_t$ мы можем использовать лишь процесс наблюдения вида (1.86), где матрицы могут зависеть от времени, то с помощью фильтра Калмана-Бьюси можно построить оценку $\hat{\mathbf{x}}_t$ и использовать ее в оптимальном управлении $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_t, t)$ для линейно квадратичной задачи. В книге [50] обсуждаются также вопросы, связанные с другими задачами стохастического оптимального управления.

1.6.3. О стохастической устойчивости

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.97)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.25). Будем считать, что $\mathbf{x}_t \equiv 0$ является невозмущенным движением динамической системы, а возмущенное движение описывается уравнением (1.97). В соответствии с этим положим:

$$\mathbf{a}(0, t) \equiv 0, \quad \Sigma(0, t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Пусть также выполнены условия AI-АIII, которые гарантируют существование и единственность решения уравнения (1.97).

Приведем некоторые определения основных типов устойчивости для стохастических систем.

Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ будем называть устойчивым по вероятности или стохастически устойчивым при $t \geq t_0$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{t \geq t_0} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

где $\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}$ — такое решение уравнения (1.97), что $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0$.

Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым по вероятности или асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и, кроме того,

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| = 0 \right\} = 1.$$

Приведенные определения являются обобщением классических определений устойчивости в малом по Ляпунову на случай стохастических систем.

Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется асимптотически стохастически устойчивым в целом, если оно стохастически устойчиво и, кроме того, для всех $|\mathbf{x}_0| < \infty$

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| = 0 \right\} = 1.$$

Приведем некоторые определения устойчивости, которые связаны с моментными характеристиками процесса $\mathbf{x}_t$.

Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется устойчивым в среднем степени p ($p > 0$) или p -устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что

$$M \left\{ |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}|^p \right\} < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \text{ и } |\mathbf{x}_0| < \delta.$$

Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым в среднем степени p ($p > 0$) или асимптотически

p -устойчивым, если оно p -устойчиво и существует $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$, такое что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M \{ |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}|^p \} = 0 \quad \forall |\mathbf{x}_0| < \delta_0.$$

Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$ называется экспоненциально p -устойчивым, если существуют постоянные $\gamma > 0$ и $\alpha > 0$, такие что

$$M \{ |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}|^p \} < \gamma |\mathbf{x}_0|^p e^{-\alpha(t-t_0)}; \quad t \geq t_0.$$

Следует отметить, что существуют и другие определения стохастической устойчивости [31 – 33].

Как известно, одним из методов исследования устойчивости детерминированных систем является метод функций Ляпунова. Достоинство этого метода заключается в том, что он позволяет (в том случае, если соответствующая функция Ляпунова найдена) делать заключения о характере поведения решения дифференциального уравнения, не требуя при этом знания точного решения этого дифференциального уравнения. Обобщения метода функций Ляпунова на класс стохастических дифференциальных уравнений были в основном получены в 60–80 годах благодаря главным образом усилиям Г.Дж.Кушнера [2] и Р.З.Хасьминского [31].

Рассмотрим кратко суть метода стохастических функций Ляпунова. Рассмотрим функцию $V(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \{t > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^1$, которая при всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U} \times \{t > 0\}$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $(0, \dots, 0) \in \mathcal{U}$) является непрерывной и положительно определенной. Пусть также $V(\mathbf{x}, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ и один раз по t , за исключением может быть множества $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Кроме этого, предположим, что $V(\mathbf{0}, t) = 0$. Далее через $\mathcal{C}_2^0(\mathcal{U})$ будем обозначать множество функций дважды непрерывно дифференцируемых по $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ и один раз по t , за исключением может быть множества $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В силу формулы Ито имеем:

$$V(\mathbf{x}_t, t) - V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) = \int_{t_0}^t L \{ V(\mathbf{x}_\tau, \tau) \} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t G_0^{(i)} \{ V(\mathbf{x}_\tau, \tau) \} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \quad \text{с в.1,} \quad (1.98)$$

где

$$L\{\cdot\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}},$$

$$G^{(i)}\{\cdot\} = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}; \quad i = 1, \dots, m.$$

Нетрудно понять, что роль первой производной $V(\mathbf{x}, t)$ по $\mathbf{x}$ в силу уравнения движения играет в стохастическом случае $L\{V(\mathbf{x}_s, s)\}$. Будем считать, что при $\mathbf{x} \neq 0; t \geq 0$ выполняется неравенство:

$$L\{V(\mathbf{x}, t)\} \leq 0. \quad (1.99)$$

Функцию $V(\mathbf{x}, t)$, обладающую перечисленными выше свойствами, будем называть стохастической функцией Ляпунова. На стохастическую функцию Ляпунова могут также накладываться и некоторые дополнительные требования. Далее, используя (1.98), (1.99) и свойство интеграла Ито, получаем:

$$\mathbf{M}\{V(\mathbf{x}_t, t) | \mathcal{F}_{t_0}\} \leq V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \text{ с в.1.}$$

Таким образом $V(\mathbf{x}_t, t)$ – супермартингал. Если $y_s; s \geq 0$ – мартингал и $\mathbf{M}\{|y_s|^p\} < \infty$, то справедливо хорошо известное неравенство:

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t} |y(s, \omega)| \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \mathbf{M}\{|y_t|^p\} \quad \forall \alpha$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} \leq \frac{1}{\delta} V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \quad \forall \delta > 0, \quad \forall T > t_0.$$

Из последнего неравенства, непрерывности $V(\mathbf{x}, t)$ и того, что $V(0, t) = 0$, получаем:

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \mathbf{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} = 0. \quad (1.100)$$

Далее, если предположить, что при некоторых постоянных p, k_1, k_2

$$k_1 |\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2 |\mathbf{x}|^p,$$

то согласно (1.100) получим, что невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ стохастически устойчиво.

Приведем некоторые хорошо известные факты (см., например, [31 – 33]), касающиеся различных видов стохастической устойчивости.

Пусть в области $\{t > 0\} \times \mathcal{U}$, включающей множество $\mathbf{x} \equiv 0$, существует непрерывная, положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\mathcal{U})$ и пусть

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \sup_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) = 0,$$

а $L\{V(\mathbf{x}, t)\} < 0$ в этой области. Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x}_t \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво.

Пусть для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \sup_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) = 0,$$

$$\inf_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

$$L\{V(\mathbf{x}, t)\} < 0.$$

Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x}_t \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво в целом.

Для экспоненциальной p -устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x}_t \equiv 0$ при $t > 0$ достаточно, чтобы при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ существовала функция $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 неравенствам:

$$k_1 |\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2 |\mathbf{x}|^p,$$

$$L\{V(\mathbf{x}, t)\} \leq -k_3 |\mathbf{x}|^p.$$

Другой метод детерминистской теории устойчивости заключается в линеаризации дифференциального уравнения в окрестности невозмущенного движения и анализе устойчивости нулевого решения линеаризованного дифференциального уравнения. Известно, что в ряде случаев устойчивость нулевого решения линеаризованной системы влечет устойчивость невозмущенного решения соответствующей нелинейной системы. Особую роль при анализе устойчивости с помощью этого подхода играют так называемые ляпуновские экспоненты или ляпуновские показатели. Оказывается, что упомянутый метод линеаризации может быть обобщен на случай стохастических систем. Впервые роль стохастических ляпуновских экспонент была прояснена в работе [34]. Ряд

примеров точного вычисления стохастических ляпуновских экспонент можно найти в работах [35, 36], а численные методы для их вычисления содержатся в книгах [50, 51]. Кратко рассмотрим указанный подход, опираясь главным образом на работу [50].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \sum_{k=1}^m \mathbf{b}_k(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (1.101)$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}_k : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(k)}$; $k = 1, \dots, m$. Предположим, что $\hat{\mathbf{x}}_t$ – стохастически стационарное решение уравнения (1.101). Линеаризуем уравнение (1.101) в окрестности $\hat{\mathbf{x}}_t$:

$$d\mathbf{z}_t = \mathbf{A}_t\mathbf{z}_tdt + \sum_{k=1}^m \mathbf{B}_t^k\mathbf{z}_td^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (1.102)$$

где $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{A}_t, \mathbf{B}_t^1, \dots, \mathbf{B}_t^m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – случайные матрицы, покомпонентно определяемые следующими соотношениями:

$$(\mathbf{A}_t)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t, t),$$

$$(\mathbf{B}_t^k)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{b}_k^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t, t),$$

где $i, j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$. Можно показать [50], что с в.1 существуют n неслучайных ляпуновских экспонент:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$$

и разбиение $\mathbb{R}^n$ на случайные множества $\Lambda_n(\omega), \dots, \Lambda_1(\omega)$, такие что для стартовавших из этих множеств решений уравнения (1.102) пределы вида

$$\lambda(\mathbf{z}_0, t_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln |\mathbf{z}_t^{\mathbf{z}_0, t_0}|,$$

где $\mathbf{z}_{t_0} = \mathbf{z}_0$, будут равны $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ соответственно. Тогда можно показать, что стохастическая асимптотическая устойчивость нулевого решения $\mathbf{z}_t \equiv 0$ уравнения (1.102) будет иметь место тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 0$. В [50, 51] предложен метод получения λ_1 и получена соответствующая формула в случае $\hat{\mathbf{x}}_t \equiv 0$ и автономной системы

типа (1.101). В этих работах также предложен численный метод для вычисления λ_1 .

В заключение этого параграфа покажем, как можно решить вопрос о среднеквадратической устойчивости систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{k=1}^m B_k(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (1.103)$$

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{b}(t)) dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \quad (1.104)$$

где $A, B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\mathbf{x}_t, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$; $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $k = 1, \dots, m$. В главе 6 будут приведены (см. также [90], [50]) уравнения для матрицы $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T\}$ для уравнений вида (1.103), (1.104). Эти уравнения имеют соответственно вид:

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + \sum_{k=1}^m B_k(t)P(t)B_k^T(t), \quad (1.105)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + \Sigma(t)\Sigma^T(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^T(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^T(t), \quad (1.106)$$

где $\mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t\}$ и

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{b}(t).$$

Можно показать, что уравнения (1.105) и (1.106) могут быть приведены соответственно к следующим уравнениям (близкий по структуре алгоритм приведения описан в главе 6):

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = C(t)\mathbf{p}(t), \quad (1.107)$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = D(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{d}(t), \quad (1.108)$$

где $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n \times (n+1))}$ – вектор состоящий из элементов симметричной матрицы $P(t)$, которые стоят в ней над (под) главной диагональю, включая главную диагональ; $C(t), D(t)$ – квадратные матрицы; $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}(n \times (n+1))}$ – столбец, который состоит из элементов симметричной матрицы $\Sigma(t)\Sigma^T(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^T(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^T(t)$, которые стоят в ней

над (под) главной диагональю, включая главную диагональ. Заключение о поведении $P(t)$ и, следовательно, о среднеквадратической устойчивости нулевых решений уравнений (1.103), (1.104) можно сделать теперь по характеру поведения решений уравнений (1.107) и (1.108), которые могут быть легко найдены.

1.6.4. Оценивание параметров

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$dx_t = \mu a(x_t)dt + df_t, \quad (1.109)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ – решение уравнения (1.109), $a(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс относительно вероятностной меры P , $\mu \in \mathbb{R}^1$ – оцениваемый вещественный параметр, $t \in [0, T]$. Оказывается, что если процесс x_t является асимптотически устойчивым эргодическим стационарным решением уравнения (1.109), то, производя наблюдения за отдельной траекторией процесса x_t и строя определенным образом на основе x_t оценку $\hat{\mu}(T)$ параметра μ , можно получить, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}(T) = \mu$ с в.п. Рассмотрим этот подход подробнее (см. также [7, 38, 50]). Оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}(T)$ ищется из условия максимума по μ функции правдоподобия $L(\mu, T)$ вида:

$$L(\mu, T) = \frac{dP_x}{dP} = e^{\frac{1}{2}\mu^2 \int_0^T a^2(x_t)dt - \mu \int_0^T a(x_t)dx_t}, \quad (1.110)$$

где $\frac{dP_x}{dP}$ – производная Радона-Никодима мер P_x , P , которые соответствуют процессам x_t и f_t . Решая относительно μ уравнение

$$\frac{dL(\mu, T)}{d\mu} = 0,$$

найдем, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}(T)$ имеет вид:

$$\hat{\mu}(T) = \frac{\int_0^T a(x_t)dx_t}{\int_0^T a^2(x_t)dt} = \mu + \frac{\int_0^T a(x_t)df_t}{\int_0^T a^2(x_t)dt}. \quad (1.111)$$

Если $M \left\{ \int_0^T a^2(x_t) dt \right\} < \infty \forall T$ и если стохастическое дифференциальное уравнение (1.109) имеет стационарное решение с плотностью $p = p(x)$, которая является решением уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка, то из теоремы 1.2 получаем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_t) df_t = 0 \text{ с в.1.}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2(x_t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) p(x) dx \text{ с в.1.}$$

Поэтому $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}(T) = \mu$ с в.1. Кроме этого, согласно центральной предельной теореме $\sqrt{T}(\hat{\mu}(T) - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$, где $\sigma^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) p(x) dx \right)^{-1}$. Используя этот факт, можно определять доверительный интервал для μ и оценивать величину T для этого интервала.

1.7. О неэффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям

В этом параграфе поясним, на примере численных методов, основанных на разложении Тейлора, почему формальное использование численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений является неэффективным в отношении стохастических дифференциальных уравнений.

Отметим, что достаточно большое количество численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений строятся так или иначе с помощью разложения Тейлора. К этим методам можно отнести методы, являющиеся непосредственно отрезками ряда Тейлора на дискретной временной сетке, конечно-разностные методы типа Рунге-Кутты, всевозможные многошаговые численные методы, строящиеся с использованием формулы Тейлора.

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравне-

ние вида:

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t, \quad (1.112)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ -решение уравнения (1.112); $a : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $b : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; f_t – гауссовский белозумный случайный процесс.

Запишем уравнение (1.112) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t, \quad (1.113)$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс.

Попробуем применить идеологию численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям (1.112) и (1.113). Согласно формуле Тейлора при $s > t$ имеем:

$$x_s = x_t + \frac{dx_t}{dt}(s-t) + \frac{d^2x_t}{dt^2} \frac{(s-t)^2}{2} + O((s-t)^3), \quad (1.114)$$

где запись $\xi_t = O((s-t)^\gamma)$ понимается следующим образом:

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{M\{\xi_t^2\}}}{(s-t)^\gamma} = C = \text{const} < \infty.$$

Используя (1.112) и (1.114), получаем:

$$\begin{aligned} x_s &= x_t + a(x_t, t)(s-t) + b(x_t, t)(s-t)f_t + \\ &+ \frac{d}{dt} [a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t] \frac{(s-t)^2}{2} + O((s-t)^3). \end{aligned} \quad (1.115)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (1.115) неопределена. Это связано с тем, что белый шум f_t является не дифференцируемым в каком-либо вероятностном смысле случайным процессом, а в правую часть (1.115) входит величина $\frac{d}{dt}f_t$.

Рассмотрим теперь эту же идеологию в отношении уравнения (1.113). При этом будем формально использовать для случайных процессов $a(x_t, t)$, $b(x_t, t)$ такие же правила дифференцирования, как и для неслучайных функций, т.е.

$$da(x_t, t) = \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial t} dt, \quad (1.116)$$

$$db(x_t, t) = \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} dt. \quad (1.117)$$

Запишем (1.113), (1.116), (1.117) в интегральной форме:

$$x_s = x_t + \int_t^s a(x_\tau, \tau) d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) df_\tau, \quad (1.118)$$

$$\begin{aligned} a(x_s, s) = a(x_t, t) + \int_t^s \left[a(x_\tau, \tau) \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau + \\ + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau, \end{aligned} \quad (1.119)$$

$$\begin{aligned} b(x_s, s) = b(x_t, t) + \int_t^s \left[a(x_\tau, \tau) \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau + \\ + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau, \end{aligned} \quad (1.120)$$

где $s > t$. Объединяя (1.118)-(1.120), приходим к равенству:

$$\begin{aligned} x_s = x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t) \int_t^s df_\tau + b(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} df_\tau + \\ + \left[a(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} \right] \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau + O((s - t)^2). \end{aligned} \quad (1.121)$$

Поскольку для случайных процессов $a(x_t, t)$, $b(x_t, t)$ справедливы, при определенных условиях, отличные от (1.116), (1.117) правила дифференцирования (см. формулу Ито), то разложение решения x_t уравнения (1.113) в окрестности момента времени t будет иметь другой вид, нежели (1.121). Так, по формуле Ито с вероятностью 1 имеем:

$$\begin{aligned} da(x_t, t) = \left[\frac{\partial a(x_t, t)}{\partial t} + a(x_t, t) \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x_t, t) \frac{\partial^2 a(x_t, t)}{\partial x^2} \right] dt + \\ + b(x_t, t) \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} df_t, \end{aligned} \quad (1.122)$$

$$db(x_t, t) = \left[\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} + a(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x_t, t) \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2} \right] dt +$$

$$+b(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} df_t. \quad (1.123)$$

Записывая (1.122), (1.123) в интегральной форме и подставляя результат в (1.118), приходим с вероятностью 1 к разложению:

$$\begin{aligned} x_s = & x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t) \int_t^s df_\tau + \\ & + b(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} df_\tau + b(x_t, t) \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} d\tau + \\ & + \left[\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} + a(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{1}{2} b^2(x_t, t) \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2} \right] \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau + \\ & + O((s - t)^2). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Сопоставляя разложения (1.121) и (1.124), приходим к выводу, что в правой части (1.121) отсутствует часть слагаемых, которые входят в правую часть (1.124). При этом эти слагаемые порядка $O((s - t)^{3/2})$.

Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что формальное применение правил дифференцирования для неслучайных функций к случайным процессам приводит либо к неопределенности, либо к неверному результату. При этом ошибка будет уже в членах порядка $O((s - t)^{3/2})$.

Глава 2

Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

В настоящей главе установлен класс повторных стохастических интегралов Ито, для которого справедливы с вероятностью 1 формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с правилами классического интегрального счисления. Доказана теорема о замене порядка интегрирования для указанного класса повторных стохастических интегралов. Рассмотрен ряд следствий и примеров применения этой теоремы.

2.1 Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$, определенная на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Рассмотрим винеровский процесс f_τ , который $\mathcal{F}_\tau$ измерим при всех $\tau \in [0, T]$.

Введем класс $\mathcal{S}_2([0, T])$ функций $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ (определение этого класса дано в главе 1) и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке $[0, T]$, т.е. для любых $t, \tau \in [0, T]$ выполняется предельное соотношение:

$$M\{|\xi_t - \xi_\tau|^2\} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \tau.$$

В главе 1 было дано определение стохастического интеграла Ито и приведены достаточные условия его существования в среднеквадра-

тическом смысле (теорема 1.1). Согласно теореме 1.1 стохастический интеграл Ито существует в среднеквадратическом смысле, если интегранд $\xi_t \in \mathcal{M}_2([0, T])$, т.е., вообще говоря, не является среднеквадратически непрерывным на промежутке $[0, T]$. В настоящей главе будут рассматриваться теоремы о замене порядка интегрирования для специального класса повторных стохастических интегралов Ито, при этом условие среднеквадратической непрерывности интегранда во "внутреннем" стохастическом интеграле будет существенным.

В данной главе рассматривается следующий класс повторных стохастических интегралов:

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)},$$

где $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t, T])$; здесь и далее: $w_\tau^{(l)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(l)} = \tau$ при $\tau \in [t, T]$; $l = 1, \dots, k+1$; $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_1, \dots, \psi_k)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$. В дальнейшем стохастические интегралы $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ будем называть повторными стохастическими интегралами Ито.

Хорошо известно, что для повторного интеграла Римана, при определенных условиях, справедлива формула замены порядка интегрирования. В частности, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) \int_a^x g(y) dy dx = \int_a^b g(y) \int_y^b f(x) dx dy. \quad (2.1)$$

Если бы для стохастического интеграла Ито $J[\phi, \psi_1]_{T,t}$ была справедлива формула замены порядка интегрирования, аналогичная (2.1), то мы имели бы

$$J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \int_t^T \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(s) dw_s^{(1)} dw_\tau^{(2)}. \quad (2.2)$$

Если вдобавок в (2.2) $w_s^{(1)}, w_s^{(2)} = f_s$ при $s \in [t, T]$, то случайный процесс $\eta_\tau = \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(\tau) dw_\tau^{(1)}$ не будет принадлежать классу $\mathcal{M}_2([t, T])$ и, следовательно, для стохастического интеграла Ито $\int_t^T \eta_\tau dw_\tau^{(2)}$ в правой части (2.2) не будут выполнены условия его существования. В то же

время справедлива формула, известная как лемма Ито:

$$\int_t^T df_s \int_t^T ds = \int_t^T (s-t) df_s + \int_t^T (f_s - f_t) ds \text{ с в.1,}$$

которую можно получить, например, с использованием формулы Ито, но можно рассматривать и как следствие замены порядка интегрирования. Действительно, можно показать, что

$$\int_t^T (f_s - f_t) ds = \int_t^T \int_t^s df_\tau ds = \int_t^T \int_\tau^T ds df_\tau \text{ с в.1.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_t^T (s-t) df_s + \int_t^T (f_s - f_t) ds &= \int_t^T \int_t^\tau ds df_\tau + \int_t^T \int_\tau^T ds df_\tau = \\ &= \int_t^T df_s \int_t^T ds \text{ с в.1.} \end{aligned}$$

Цель настоящей главы заключается в том, чтобы установить строгий математический смысл формулы (2.2), а также ее аналога для повторного стохастического интеграла Ито $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$; $k \geq 2$. При этом будет использоваться более общее, чем (1.11), определение стохастического интеграла Ито.

В [9] Стратонович ввел определение так называемого "смешанного" стохастического интеграла для определенного класса интегрируемых процессов. Беря за основу это определение, рассмотрим следующую конструкцию стохастического интеграла:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau, \quad (2.3)$$

где $\phi_\tau, \theta_\tau \in S_2([t, T])$; здесь и далее $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ - разбиение промежутка $[t, T]$, для которого:

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем будет доказано существование интегралов вида (2.3) для $\phi_\tau \in S_2([t, T])$ и θ_τ из несколько более узкого класса процессов,

чем $\mathcal{S}_2([t, T])$. Кроме этого, интеграл вида (2.3) будет использоваться для формулировки и доказательства теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$; $k \geq 1$.

Рассмотрим некоторые справедливые с вероятностью 1 и достаточно очевидные свойства стохастических интегралов, определенных формулой (2.3):

1. $\int_t^T \phi_\tau df_\tau g(\tau) = \int_t^T \phi_\tau g(\tau) df_\tau$, где $g(\tau)$ – непрерывная на промежутке $[t, T]$ функция;
2. $\int_t^T (\phi_\tau + \psi_\tau) df_\tau \theta_\tau = \int_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau + \int_t^T \psi_\tau df_\tau \theta_\tau$;
3. $\int_t^T \phi_\tau df_\tau (\theta_\tau + \psi_\tau) = \int_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau + \int_t^T \phi_\tau df_\tau \psi_\tau$.

При этом предполагается, что случайные процессы ϕ_τ , θ_τ и ψ_τ таковы, что все интегралы, входящие в перечисленные свойства, существуют.

2.2. Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

Определим стохастические интегралы $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$; $k \geq 1$ вида:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)}$$

в соответствии с определением (2.3) следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k)} \hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{T, \tau_{l+1}}, \quad (2.4)$$

где $k \geq 1$; $\hat{I}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $[s, T] \subset [t, T]$; здесь и далее $\Delta w_{\tau_l}^{(i)} = w_{\tau_{l+1}}^{(i)} - w_{\tau_l}^{(i)}$; $i = 1, \dots, k+1$; $l = 0, 1, \dots, N-1$. Затем определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$; $k \geq 1$ вида:

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \phi_s dw_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

также в соответствии с определением (2.3):

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}}.$$

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

Теорема 2.1 Пусть $\phi_{\tau} \in \mathcal{S}_2([t, T])$ и $\psi_l(\tau); l = 1, \dots, k$ – непрерывные на промежутке $[t, T]$ неслучайные функции. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ и $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ с вероятностью 1.

Доказательство: Сначала докажем теорему при $k = 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} J[\phi, \psi_1]_{T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \int_t^{\tau_{l+1}} \phi_{\tau} dw_{\tau}^{(2)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi_{\tau} dw_{\tau}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)} \int_{\tau_{j+1}}^T \psi_1(s) dw_s^{(1)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее ясно, что если разность ε_N допредельных выражений в правых частях (2.5) и (2.6) стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \rightarrow \infty$, то стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$ существует и $J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$ с вероятностью 1. Эта разность ε_N представима в виде: $\varepsilon_N = \varepsilon'_N + \varepsilon''_N$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon'_N &= \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_{\tau} - \phi_{\tau_j}) dw_{\tau}^{(2)}, \\ \varepsilon''_N &= \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\psi_1(\tau_l) - \psi_1(s)) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}. \end{aligned}$$

Покажем, что с вероятностью 1 $\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon'_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим 4 случая:

1. $dw_s^{(0)} = df_s, \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta f_{\tau_k};$
2. $dw_s^{(0)} = ds, \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta f_{\tau_k};$
3. $dw_s^{(0)} = df_s, \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta \tau_k;$
4. $dw_s^{(0)} = ds, \Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta \tau_k.$

Для первого случая с использованием свойств B2 и B3 (см. главу 1) стохастического интеграла Ито, теоремы о среднем значении и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} &= \sum_{k=0}^{N-1} \psi^2(\tau_k) \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M} \left\{ |\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} d\tau \\ &\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{M} \left\{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Рассмотрим второй случай. С использованием неравенства Минковского, свойства C2 стохастического интеграла (см. главу 1), теоремы о среднем значении и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} &= \sum_{k=0}^{N-1} \psi^2(\tau_k) \Delta \tau_k \mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \psi^2(\tau_k) \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ &\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{M} \left\{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

В третьем случае с использованием неравенства Минковского, свойств B2 и B3 стохастического интеграла Ито, теоремы о среднем значении и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ имеем:

$$\mathbf{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} |\psi(\tau_k)| \Delta \tau_k \left(\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) df_\tau \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} |\psi(\tau_k)| \Delta\tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbf{M} \{ |\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2 \} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{M} \{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Наконец, для четвертого случая с использованием неравенства Минковского, свойства C^2 стохастического интеграла, теоремы о среднем значении и среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_τ получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \{ |\varepsilon'_N|^2 \} &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} |\psi(\tau_k)| \Delta\tau_k \left(\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{M} \{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j \right)^2 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$, $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Таким образом, мы доказали, что с вероятностью 1 $\text{l.i.m.} \varepsilon'_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что с вероятностью 1 $\text{l.i.m.} \varepsilon''_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому с вероятностью 1 $\text{l.i.m.} \varepsilon_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Теорема доказана для случая $k = 1$.

Замечание 2.1. При доказательстве теоремы 2.1 при $k = 1$ использовался тот факт, что в ее условиях:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{M} \{ |\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j}|^2 \} = 0, \quad (2.7)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq N-1} |\psi(t_j) - \psi(\theta_j)|^2 = 0, \quad (2.8)$$

где $t_j, \theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Действительно, пусть последовательность

$$a_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbf{M} \{ |\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j}|^2 \}$$

не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Тогда по некоторому $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное $N(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) > 0$ и $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, такие что при $N > N(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства:

$M\{|\phi_{t_i} - \phi_{\theta_i}|^2\} \geq \varepsilon$, $|t_i - \theta_i| < \delta(\varepsilon)$, из которых следует, что нарушается условие среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_t . Поэтому в силу противоречивости сделанного предположения равенство (2.7) справедливо. Аналогично доказывается и равенство (2.8).

Перейдем к доказательству теоремы 2.1 в случае $k > 1$.

Введем обозначения:

$$I[\psi_q^{(r+1)}]_{\theta,s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \dots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \dots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$J[\phi, \psi_q^{(r+1)}]_{\theta,s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \dots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) \int_s^{t_{r+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(q+r+1)} dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \dots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$G[\psi_q^{(r+1)}]_{n,m} = \sum_{j_q=m}^{n-1} \sum_{j_{q+1}=m}^{j_q-1} \dots \sum_{j_{q+r}=m}^{j_{q+r-1}-1} \prod_{l=q}^{r+q} I[\psi_l]_{\tau_{j_{l+1}}, \tau_{j_l}},$$

где $\psi_q^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_q, \dots, \psi_{q+r})$; $\psi_q^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_q$; $\psi_1^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(r+1)} = (\psi_1, \dots, \psi_{r+1})$.

Для доказательства теоремы 2.1 при $k > 1$ достаточно показать, что

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} S[\phi, \psi^{(k)}]_N = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \text{ с в.1,} \quad (2.9)$$

где

$$S[\phi, \psi^{(k)}]_N = G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}.$$

Докажем сначала правое равенство в (2.9). Имеем:

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}}. \quad (2.10)$$

Из предположения индукции следует, что

$$I[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}} = \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}} \text{ с в.1,} \quad (2.11)$$

где $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$ определен в соответствии с (2.4) и

$$I[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_1(t_1) \dots \int_s^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)}.$$

Заметим, что при $k \geq 4$ (при $k = 2, 3$ рассуждения аналогичны) в силу свойства аддитивности стохастического интеграла Ито справедливы

равенства:

$$\begin{aligned}
I[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}} &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \int_{\tau_{l+1}}^{t_1} \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2, \tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} = \\
&= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \left(\sum_{j_2=l+1}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} + \int_{\tau_{j_1}}^{t_1} \right) \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2, \tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} = \\
&= \dots = G[\psi^{(k)}]_{N, l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N, l+1}, \tag{2.12}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
H[\psi^{(k)}]_{N, l+1} &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(s) \int_{\tau_{j_1}}^s \psi_2(\tau) I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau, \tau_{l+1}} dw_{\tau}^{(2)} dw_s^{(1)} + \\
&+ \sum_{r=2}^{k-2} G[\psi^{(r-1)}]_{N, l+1} \sum_{j_r=l+1}^{j_{r-1}-1} \int_{\tau_{j_r}}^{\tau_{j_r+1}} \psi_r(s) \int_{\tau_{j_r}}^s \psi_{r+1}(\tau) I[\psi_{r+2}^{(k-r-1)}]_{\tau, \tau_{l+1}} dw_{\tau}^{(r+1)} dw_s^{(r)} + \\
&+ G[\psi^{(k-2)}]_{N, l+1} \sum_{j_{k-1}=l+1}^{j_{k-2}-1} I[\psi_{k-1}^{(2)}]_{\tau_{j_{k-1}+1}, \tau_{j_{k-1}}}. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Подставим (2.12) в (2.11), а (2.11) в (2.10). Тогда

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T, t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} (G[\psi^{(k)}]_{N, l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N, l+1}). \tag{2.14}$$

Поскольку

$$\sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1} a_{j_1 \dots j_k} = \sum_{j_k=0}^{N-1} \sum_{j_{k-1}=j_k+1}^{N-1} \dots \sum_{j_1=j_2+1}^{N-1} a_{j_1 \dots j_k}, \tag{2.15}$$

где $a_{j_1 \dots j_k}$ — скаляры, то

$$G[\psi^{(k)}]_{N, l+1} = \sum_{j_k=l+1}^{N-1} \dots \sum_{j_1=j_2+1}^{N-1} \prod_{l=1}^k I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}}. \tag{2.16}$$

Подставим (2.16) в $\sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} G[\psi^{(k)}]_{N, l+1}$ и снова воспользуемся формулой (2.15). Тогда

$$\sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} G[\psi^{(k)}]_{N, l+1} = S[\phi, \psi^{(k)}]_N. \tag{2.17}$$

Предположим, что предел $\text{l.i.m.} S[\phi, \psi^{(k)}]_N$ при $N \rightarrow \infty$ существует (его существование будет доказано ниже). Тогда из (2.17) и (2.14) следует, что для доказательства правого равенства в (2.9) остается показать, что

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\eta} \Delta w_{\eta}^{(k+1)} H[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = 0 \text{ с в.1.} \quad (2.18)$$

Оценивая второй момент допредельного выражения в левой части (2.18) с учетом (2.13), независимости ϕ_{η} , $\Delta w_{\eta}^{(k+1)}$ и $H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и неравенства Минковского, убеждаемся, что (2.18) справедливо. Таким образом, в предположении о существовании предела $\text{l.i.m.} S[\phi, \psi^{(k)}]_N$ при $N \rightarrow \infty$ мы получили, что правое равенство в (2.9) справедливо. Покажем теперь, что справедливо левое равенство в (2.9). Имеем

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\eta}^{(1)} J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\eta,t}. \quad (2.19)$$

Применим теперь к интегралу $J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\eta,t}$ в (2.19) те же рассуждения, что и к интегралу $I[\psi^{(k)}]_{T,\eta+1}$, которые привели к соотношению (2.12) и подставим получившееся в результате выражение для $J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\eta,t}$ в (2.19). Далее с помощью неравенства Минковского и стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов нетрудно показать, что:

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} R[\phi, \psi^{(k)}]_N \text{ с в.1,} \quad (2.20)$$

где

$$R[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \phi_{\tau} dw_{\tau}^{(k+1)}.$$

Покажем, что:

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} R[\phi, \psi^{(k)}]_N = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} S[\phi, \psi^{(k)}]_N \text{ с в.1.} \quad (2.21)$$

Нетрудно видеть, что

$$R[\phi, \psi^{(k)}]_N = U[\phi, \psi^{(k)}]_N + V[\phi, \psi^{(k)}]_N + S[\phi, \psi^{(k)}]_N, \quad (2.22)$$

где

$$U[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} I[\Delta \phi]_{\eta+1,\eta},$$

$$V[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1+1}, \tau_{j_1}} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1, 0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}$$

и

$$I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1+1}, \tau_{j_1}} = \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\psi_1(\tau_{j_1}) - \psi_1(\tau)) dw_{\tau}^{(1)},$$

$$I[\Delta\phi]_{\tau_{l+1}, \tau_l} = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\phi_{\tau} - \phi_{\tau_l}) dw_{\tau}^{(k+1)}.$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов, а также непрерывности функции $\psi_1(\tau)$ и принадлежности процесса ϕ_{τ} классу $S_2([t, T])$ убеждаемся, что: $\text{l.i.m.} V[\phi, \psi^{(k)}]_N = \text{l.i.m.} U[\phi, \psi^{(k)}]_N = 0$ с в.1 при $N \rightarrow \infty$. Тогда, учитывая (2.22), получим (2.21). Из (2.21) и (2.20) следует левое равенство в (2.9). При этом предел $\text{l.i.m.} S[\phi, \psi^{(k)}]_N$ при $N \rightarrow \infty$ существует, поскольку он равен интегралу $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T, t}$, который существует в условиях настоящей теоремы. Таким образом, цепочка равенств (2.9) доказана. Теорема доказана. $\square$

Пусть $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$ и выполнены следующие условия:

АI. $\xi_t \in S_2([t, T])$.

АII. $\Phi(t_1, \dots, t_k) : \mathcal{D}_{k-1} \times \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1$ — непрерывная по первым $k-1$ -й переменным в области $\mathcal{D}_{k-1}$ неслучайная функция, причем $\forall \tau, \theta \in \mathcal{R}^1$ и $\forall (t_1, \dots, t_{k-1}) \in \mathcal{D}_{k-1}$ существует такая постоянная $K < \infty$, что: $|\Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \tau) - \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \theta)| \leq K|\tau - \theta|$.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\hat{J}[\Phi]_{T, t}^{(k)} = \int_t^T d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots \int_{t_{k-2}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \int_{t_{k-1}}^T \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \int_{\tau_{j_1+1}}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \dots \int_{t_{k-2}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \int_{t_{k-1}}^T \Phi(\tau_{j_1}, t_2, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

при $k \geq 3$ и

$$\hat{J}[\Phi]_{T, t}^{(2)} = \int_t^T d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \int_{t_1}^T \Phi(t_1, t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \int_{\tau_{j_1+1}}^T \Phi(\tau_{j_1}, t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)},$$

где $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$ – независимые и $\mathcal{F}_\tau$ измеримые при всех $\tau \in [t, T]$ винеровские процессы.

Обозначим

$$J[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) dw_{t_1}^{(i_1)} \dots dw_{t_k}^{(i_k)}; \quad k \geq 2, \quad (2.23)$$

где правая часть (2.23) понимается как повторный стохастический интеграл Ито. Рассмотрим одно из обобщений теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия AI, AII. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{J}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ и $J[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \hat{J}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ с вероятностью 1 ($k \geq 2$).

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству теоремы 2.1.

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и $h(\tau)$ – непрерывная на промежутке $[t, T]$ функция. Тогда

$$\int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} \quad \text{с в.1} \quad (2.24)$$

и интегралы в левой и правой частях (2.24) существуют.

Доказательство: Согласно теореме 2.1, повторный стохастический интеграл в правой части (2.24) существует. Кроме этого,

$$\begin{aligned} \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} &= \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} - \\ &- \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta h(\tau_j) \Delta w_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{j+1}} \quad \text{с в.1,} \end{aligned}$$

где $\Delta h(\tau_j) = h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)$. Используя рассуждения, которые привели к правому равенству в (2.9), получаем:

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \quad \text{с в.1.} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и непрерывности функции $h(\tau)$ получаем, что второй момент допредельного выражения в правой части (2.25) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим одно из следствий теоремы 2.1.

Теорема 2.4. *В условиях теоремы 2.3*

$$\begin{aligned} & \int_t^T h(t_1) \int_t^{t_1} \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, t_1} = \\ & = \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, t_1} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (2.26)$$

причем левая и правая части (2.26) существуют.

Доказательство: Применяя дважды теорему 2.1, получим:

$$\begin{aligned} & \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, t_1} = \\ & = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)} = \\ & = \int_t^T \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} \int_\tau^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)} \text{ с в.1,} \end{aligned}$$

где $\rho_\tau \stackrel{\text{def}}{=} h(\tau) \int_t^\tau \phi_s dw_s^{(k+2)}$. Теорема доказана. $\square$

Упражнение 2.1. С помощью теоремы 2.1 о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито показать, что следующие равенства справедливы с вероятностью 1:

$$\begin{aligned} & \int_t^T \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T (T - t_1) df_{t_1}, \\ & \int_t^T \cos(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T \sin(T - t_1) df_{t_1}, \\ & \int_t^T \sin(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T (\cos(T - t_1) - 1) df_{t_1}, \end{aligned}$$

$$\int_t^T e^{\alpha(t_2-T)} \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \frac{1}{\alpha} \int_t^T (1 - e^{\alpha(t_1-T)}) df_{t_1}; \quad \alpha \neq 0,$$

$$\int_t^T (t_2 - T)^\alpha \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = -\frac{1}{\alpha + 1} \int_t^T (t_1 - T)^{\alpha+1} df_{t_1}; \quad \alpha \neq -1,$$

$$J_{(10)T,t} + J_{(01)T,t} = (T - t)J_{(1)T,t} \quad (\text{лемма Ито}),$$

$$J_{(100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 df_{t_1}, \quad J_{(010)T,t} = \int_t^T (t_1 - t)(T - t_1) df_{t_1},$$

$$J_{(110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1011)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \quad J_{(1101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} (t_3 - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3},$$

$$J_{(1110)T,t} = \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \quad J_{(1100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_2)^2 \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1001)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^2 df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(1010)T,t} = \int_t^T (T - t_2)^2 \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_1 - t) df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(0101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)(t_1 - t) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0010)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)(t_1 - t)^2 df_{t_1}, \quad J_{(0100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 (t_1 - t) df_{t_1},$$

$$J_{(1000)T,t} = \frac{1}{3!} \int_t^T (T - t_1)^3 df_{t_1}, \quad J_{(1\underbrace{0\dots 0}_{k-1})T,t} = \frac{1}{(k-1)!} \int_t^T (T - t_1)^{k-1} df_{t_1},$$

$$J_{(11\underbrace{0\dots 0}_{k-2})T,t} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^T (T - t_2)^{k-2} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-1}0)T,t} = \int_t^T (T - t_1) J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-2})_{t_1,t}} df_{t_1},$$

$$J_{(\underbrace{10\dots0}_{k-2}1)T,t} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^{k-2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(10\underbrace{1\dots1}_{k-2})T,t} = \int_t^T \dots \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} \dots df_{t_{k-1}},$$

$$J_{(\underbrace{1\dots1}_{k-2}01)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_{k-1}} (t_{k-1} - t_{k-2}) \int_t^{t_{k-2}} \dots \int_t^{t_2} df_{t_1} \dots df_{t_{k-3}} df_{t_{k-2}} df_{t_{k-1}};$$

обобщения леммы Ито:

$$J_{(110)T,t} + J_{(101)T,t} + J_{(011)T,t} = (T - t)J_{(11)T,t},$$

$$J_{(001)T,t} + J_{(010)T,t} + J_{(100)T,t} = \frac{(T - t)^2}{2} J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1100)T,t} + J_{(1010)T,t} + J_{(1001)T,t} + J_{(0110)T,t} +$$

$$+ J_{(0101)T,t} + J_{(0011)T,t} = \frac{(T - t)^2}{2} J_{(11)T,t},$$

$$J_{(1000)T,t} + J_{(0100)T,t} + J_{(0010)T,t} + J_{(0001)T,t} = \frac{(T - t)^3}{3!} J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1110)T,t} + J_{(1101)T,t} + J_{(1011)T,t} + J_{(0111)T,t} = (T - t)J_{(111)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^k J_{(\underbrace{0\dots0}_{l-1}1\underbrace{0\dots0}_{k-l})T,t} = \frac{1}{(k-1)!} (T - t)^{k-1} J_{(1)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^k J_{(\underbrace{1\dots1}_{l-1}0\underbrace{1\dots1}_{k-l})T,t} = (T - t)J_{(\underbrace{1\dots1}_{k-1})T,t},$$

$$\sum_{\substack{l_1+\dots+l_k=m \\ l_i \in \{0, 1\}; i=1,\dots,k}} J_{(l_1\dots l_k)T,t} = \frac{(T - t)^{k-m}}{(k - m)!} J_{(\underbrace{1\dots1}_m)T,t},$$

где введены обозначения:

$$J_{(l_1\dots l_k)T,t} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} dw_{t_1}^{(1)} \dots dw_{t_k}^{(k)},$$

$l_i = 1$ при $w_{t_i}^{(i)} = f_{t_i}$ и $l_i = 0$ при $w_{t_i}^{(i)} = t_i$; $i = 1, \dots, k$; $f_\tau \in \mathfrak{R}^1$ - винеровский процесс.

Глава 3

Стохастические разложения процессов Ито

С помощью формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито в этой главе получены унифицированные разложения Тейлора-Ито. Эти разложения содержат существенно меньшее число различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной проблемой, которой, в частности, целиком посвящена четвертая глава монографии. Поэтому унифицированные разложения Тейлора-Ито могут оказаться в ряде случаев более удобными при численном решении стохастических дифференциальных уравнений, чем разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Кроме унифицированных разложений Тейлора-Ито приводятся в новых обозначениях разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора-Стратоновича. Изучается сильная сходимость рассмотренных стохастических разложений. В конце главы 3 приведены примеры разложений решений некоторых скалярных и векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито в унифицированные ряды Тейлора-Ито.

3.1. Введение

В настоящей главе рассматривается проблема стохастических разложений процессов Ито в ряды Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича. Эта проблема является достаточно новой в теории случайных процес-

сов, так как первые работы, посвященные ей, относятся к 70-80 годам (Г.Н.Мильштейн (1974), W.Wagner и E.Platten (1978, 1982), E.Platten (1981,1982)). В частности, разложение Тейлора-Ито, представляющее собой разложение гладкого безынерционного нелинейного преобразования от решения стохастического дифференциального уравнения Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам с использованием формулы Ито, было впервые получено и использовано в работах [42, 44] (W.Wagner, E.Platten).

Настоящая глава главным образом посвящена построению унифицированных разложений Тейлора-Ито. Поясним, что здесь имеется в виду. Дело в том, что повторные стохастические интегралы, входящие в разложение Тейлора-Ито из [42, 44], преобразуются к системам канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности с полиномиальными весовыми функциями. Эти преобразования осуществляются на основе формул замены порядка интегрирования для повторных стохастических интегралов Ито, полученных во второй главе. Результат, получающийся после приведения подобных слагаемых и является упомянутым выше унифицированным разложением Тейлора-Ито. Важно отметить, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора-Ито определяются рекуррентными соотношениями. Другой важной особенностью унифицированных разложений Тейлора-Ито является то, что они содержат значительно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, нежели разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена [42, 44]. Для сравнения отметим, что унифицированные разложения Тейлора-Ито до членов третьего порядка малости содержат только 12 различных повторных стохастических интегралов, в то время как аналогичное разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена содержит уже 17 различных повторных стохастических интегралов. При этом, чем больше удерживается членов в разложении, тем существеннее проявляется различие в количестве различных повторных стохастических интегралов. Эта особенность унифицированных разложений Тейлора-Ито является особенно важной, поскольку аппроксимация повторных стохастических интегралов является сложной теоретической и вычислительной проблемой [47, 50, 57 – 63]. Этой проблеме будет посвящена практически вся четвертая глава книги. Кроме этого, в настоящей главе приводят-

ся в новых обозначениях разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора-Стратоновича. В конце главы 3 изучается сильная сходимость стохастических разложений процессов Ито и рассматриваются примеры разложений решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений Ито в унифицированные ряды Тейлора-Ито.

3.2. Дифференцируемость по Ито случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$.

Определение 3.1 Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.25), называется непрерывно дифференцируемым по Ито в среднееквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25), если для всех $s, t \in [0, T]$, таких что $s \geq t$, следующее представление:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \quad (3.1)$$

справедливо с вероятностью 1, стохастические интегралы в правой части (3.1) существуют в среднееквадратическом смысле, а $B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$; $i = 1, \dots, m$ — непрерывные в среднееквадратическом смысле случайные процессы на промежутке $[0, T]$, называемые производными процесса η_s по Ито.

Замечание 3.1. Отметим, что если в определении 3.1 процессы $B_0\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$; $i = 1, \dots, m$ удовлетворяют условиям принадлежности к классу $\mathcal{M}_2([0, T])$, но не являются среднееквадратически непрерывными на промежутке $[0, T]$, то в этом случае процесс η_s из определения 3.1 будем называть дифференцируемым по Ито в среднееквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25).

Из леммы 1.3 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1 Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ дифференцируем по Ито в среднее квадратическом смысле на промежутке $[0, T]$, его производные по Ито: $B_0\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$; $i = 1, \dots, m$ имеют вид: $B_0\{R(\mathbf{x}_t, t)\} = L\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, $B_1^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\} = G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_t, t)\}$, где

$$L\{\cdot\} = \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}, \quad (3.2)$$

$$G_0^{(i)}\{\cdot\} = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial\{\cdot\}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}; \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

причем для всех $s, t \in [0, T]$, таких что $s \geq t$, равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s L\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)}\{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$$

справедливо с вероятностью 1 и интегралы в его правой части существуют в среднее квадратическом смысле.

В дальнейшем будут широко использоваться многоиндексные обозначения. Для унификации преобразований многоиндексных величин целесообразно ввести понятие матрицы произвольного ранга (размера) как совокупности многоиндексных элементов. Совокупность k -индексных элементов

$$\{A^{(i_1, \dots, i_k)}; i_1 = 1, \dots, m_1; \dots; i_k = 1, \dots, m_k\},$$

где $m_1, \dots, m_k \in \mathcal{N}$ будем называть матрицей k -го ранга $^{(k)}A$:

$$^{(k)}A = \|A^{(i_1, \dots, i_k)}\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}.$$

Очевидно, что $^{(0)}A$ — скаляр; $^{(1)}A$ — матрица-столбец размера $m_1 \times 1$; $^{(2)}A$ — прямоугольная матрица размера $m_1 \times m_2$ и т.д. Далее, с целью сокращения записи, ранг матриц-столбцов, равный 1, и ранг скаляров, равный нулю, указывать не будем, если в этом не будет особой необходимости. Обозначение

$$^{(k)}A = \|^{(k-1)}A^{(i_1)}\|_{i_1=1}^{m_1}$$

следует понимать как блочную матрицу k -го ранга с элементами — матрицами $(k-1)$ -го ранга:

$$^{(k-1)}A^{(i_1)} = \|A^{(i_1, \dots, i_k)}\|_{i_2, \dots, i_k=1}^{m_2, \dots, m_k}.$$

Аналогично, обозначение

$${}^{(k)}A = \left\| {}^{(k-l)}A^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_1, \dots, i_l=1}^{m_1, \dots, m_l}, \quad k > l$$

следует понимать как блочную матрицу k -го ранга с элементами - матрицами $(k-l)$ -го ранга:

$${}^{(k-l)}A^{(i_1, \dots, i_l)} = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_{l+1}, \dots, i_k=1}^{m_{l+1}, \dots, m_k}.$$

Пусть

$${}^{(k)}A = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}, \quad {}^{(k)}B = \left\| B^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}.$$

Очевидно, что ${}^{(k)}A = {}^{(k)}B$ тогда и только тогда, когда $A^{(i_1 \dots i_k)} = B^{(i_1 \dots i_k)}$ для всех $1 \leq i_p \leq m_p$; $p = 1, \dots, k$. Ясно также, что

$$\alpha {}^{(k)}A + \beta {}^{(k)}B = \left\| \alpha A^{(i_1 \dots i_k)} + \beta B^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$.

Матрицу ${}^{(k)}C$ - k -го ранга, определенную равенством:

$${}^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{m_1, \dots, m_l} A^{(i_1 \dots i_{k+l})} B^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_{l+1}, \dots, i_{k+l}=1}^{m_{l+1}, \dots, m_{k+l}},$$

будем называть сверткой порядка l матриц ${}^{(k+l)}A$ и ${}^{(l)}B$ и обозначать в виде:

$${}^{(k)}C = {}^{(k+l)}A \overset{!}{:} {}^{(l)}B.$$

В силу своего определения операция свертки обладает, в частности, следующими достаточно очевидными свойствами:

1. Коммутативность:

$${}^{(k+l)}A \overset{!}{:} {}^{(l)}B = {}^{(l)}B \overset{!}{:} {}^{(k+l)}A.$$

2. Дистрибутивность:

$$(\alpha {}^{(k+l)}A + \beta {}^{(k+l)}B) \overset{!}{:} {}^{(l)}C = \alpha {}^{(k+l)}A \overset{!}{:} {}^{(l)}C + \beta {}^{(k+l)}B \overset{!}{:} {}^{(l)}C,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$.

Далее мы будем рассматривать преимущественно матрицы ${}^{(k)}A$, для которых $m_1 = \dots = m_k = m$.

Определение 3.2 Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, называется N раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25), если $\forall l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $\forall s, t \in [0, T] : s \geq t$ справедливо с вероятностью 1 представление

$$\begin{aligned} {}^{(r_l)}B_{\gamma_l \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\} &= {}^{(r_l)}B_{\gamma_l \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_t, t)\} + \int_t^s {}^{(r_l)}B_{0\gamma_l \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} d\tau + \\ &+ \int_t^s {}^{(r_l+1)}B_{1\gamma_l \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\} \cdot d\mathbf{f}_\tau, \end{aligned}$$

где интегралы в правой части существуют в среднеквадратическом смысле; $\gamma_q = 0, 1$; $r_l = \sum_{i=1}^l \gamma_i$; ${}^{(r_q)}B_{\gamma_q \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$ ($q = 1, 2, \dots, N$) – покомпонентно непрерывные в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ матричные случайные процессы, называемые q -ми производными процесса η_s по Ито. При этом полагаем

$$\begin{aligned} r_0 &\equiv 0, \quad {}^{(r_0)}B_{\gamma_0 \dots \gamma_1} \{\cdot\} \stackrel{\text{def}}{=} \cdot, \\ {}^{(r_0)}B_{0\gamma_0 \dots \gamma_1} \{\cdot\} &\stackrel{\text{def}}{=} {}^{(0)}B_0 \{\cdot\}, \quad {}^{(r_0+1)}B_{1\gamma_0 \dots \gamma_1} \{\cdot\} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(1)}B_1 \{\cdot\}. \end{aligned}$$

Замечание 3.2. Отметим, что если в определении 3.2 процессы ${}^{(r_q)}B_{\gamma_q \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_\tau, \tau)\}$; $q = 1, 2, \dots, N$ покомпонентно принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$, но не являются покомпонентно среднеквадратически непрерывными на промежутке $[0, T]$, то в этом случае процесс η_s из определения 3.2 будем называть N раз дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25).

Пусть ${}^{(1)}D_j \{\cdot\} = \left\| D_j^{(i)} \{\cdot\} \right\|_{i=1}^m$; $j = 1, \dots, k$ – векторные дифференциальные операторы, а $A_p \{\cdot\} = \cdot$, $C_p \{\cdot\}$ ($p = 1, \dots, k+1$) – скалярные дифференциальные операторы. Далее будем обозначать:

$$\begin{aligned} &\left\| A_{k+1} D_k^{(i_k)} A_k \dots D_1^{(i_1)} A_1 \{\cdot\} \dots \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)}A_{k+1} D_k A_k \dots D_1 A_1 \{\cdot\} = A_{k+1} {}^{(k)}D_k A_k \dots D_1 A_1 \{\cdot\} = \dots \end{aligned}$$

$$\dots = A_{k+1} {}^{(1)}D_k A_k \dots {}^{(1)}D_1 A_1 \{\cdot\}.$$

Рассмотрим функцию $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ и сформулируем утверждение о N кратной непрерывной дифференцируемости по Ито случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Лемма 3.2 Пусть условия леммы 1.3 выполнены. Пусть для всех $l = 2, \dots, N$ матричная функция ${}^{(r_{l-1})}Q_{l-1} \dots Q_1 \{R(\mathbf{x}, s)\}$ покомпонентно удовлетворяет условию 1° леммы 1.3 и такова, что матричный процесс ${}^{(r_l)}Q_l \dots Q_1 \{R(\mathbf{x}_s, s)\}$ покомпонентно удовлетворяет условиям теоремы 1.1 на промежутке $[0, T]$, где $Q_p^{(i_p)}\{\cdot\} = G_0^{(i_p)}\{\cdot\}$ и $i_p = 1, \dots, t$ при $\gamma_p = 1$; $Q_p^{(0)}\{\cdot\} = L\{\cdot\}$ и $i_p = 0$ при $\gamma_p = 0$; $p = 1, \dots, l$; дифференциальные операторы ${}^{(1)}G_0\{\cdot\}$ и $L\{\cdot\}$ такие же, как в лемме 1.3. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ и его производные по Ито имеют вид:

$${}^{(r_l)}B_{\gamma_l \dots \gamma_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\} = {}^{(r_l)}Q_l \dots Q_1 \{R(\mathbf{x}_s, s)\}, \quad (3.4)$$

где $l = 1, \dots, N$; $r_l = \sum_{p=1}^l \gamma_p$.

Соотношение (3.4) может быть переписано в покомпонентной форме:

$$B_{\gamma_l \dots \gamma_1}^{(i_l, \dots, i_1)} \{R(\mathbf{x}_s, s)\} = Q_l^{(i_l)} \dots Q_1^{(i_1)} \{R(\mathbf{x}_s, s)\}, \quad (3.5)$$

где предполагается, что

$$(i_l, \dots, i_p, 0, i_{p-1}, \dots, i_1) \stackrel{\text{def}}{=} (i_l, \dots, i_p, i_{p-1}, \dots, i_1).$$

Далее будем считать случайный процесс η_s N раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25), если он удовлетворяет определению 3.2 и его производные по Ито определяются соотношениями (3.4) или (3.5).

3.3. Унифицированные разложения Тейлора-Ито*

* Материалом для написания параграфов 3.3.1 и 3.3.2 послужили работы [53], [52].

3.3.1. Первая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито

Введем следующие обозначения:

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (s - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

$${}^{(k)}J_{l_1 \dots l_{k,s,t}} = \left\| J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Из теоремы 2.1 и свойств повторных стохастических интегралов, рассмотренных во второй главе, вытекают существование и следующие свойства интегралов $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ при $k > 0$:

$$\mathbb{M} \left\{ J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(s - t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_k + 1)(2(l_k + l_{k-1}) + 2) \dots (2(l_k + \dots + l_1) + k)}, \quad (3.6)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\mathbf{f}_{\tau}^{(p)} J_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} = J_{j l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(p i_1 \dots i_k)}; \quad p = 1, \dots, m, \quad (3.7)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\tau J_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{(s - t)^{j+1}}{j+1} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} - \frac{1}{j+1} J_{l_1+j+1 \ l_2 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, \quad (3.8)$$

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_{k-1}} (s - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)},$$

где последние три свойства справедливы с вероятностью 1.

Введем в рассмотрение матрицу k -го ранга вида:

$${}^{(k)}(s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k} = \left\| (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s - t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m$$

и рассмотрим совокупность матриц k -го ранга:

$$C^B = \{ {}^{(k)}C_{j l_1 \dots l_k} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in B \},$$

где B – некоторое подмножество множества наборов $(k, j, l_1, \dots, l_k)$ целых неотрицательных чисел.

Введем следующую операцию над множеством матриц k -го ранга

$$(C^B \odot D^B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in B} {}^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \cdot {}^{(k)}D_{jl_1 \dots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами. Далее будем обозначать

$$(s \ominus t)^B = \{ {}^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in B \}.$$

Докажем теорему о разложении процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Теорема 3.1. Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, порожденный решением уравнения (1.25), $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ он разлагается в ряд вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{A_q} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{A_q}) + D_{r+1, s, t}, \quad (3.9)$$

причем равенство (3.9) справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения:

$$\begin{aligned} D_{r+1, s, t} &= \int_t^s (Q^{A_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r}) + \\ &+ \int_t^s \left(\left(H^{A_r} \{ \eta_\tau \} \right)^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} C^{A_q} \{ \eta_\tau \} &= \{ {}^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} : (j, l_1, \dots, l_k) \in A_q \}, \\ Q^{A_q} \{ \eta_\tau \} &= \{ L^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} : (j, l_1, \dots, l_k) \in A_q \}, \\ H^{A_q} \{ \eta_\tau \} &= \{ {}^{(1)}G_0^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} : (j, l_1, \dots, l_k) \in A_q \}, \\ {}^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_t \} &= \begin{cases} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_t \} & \text{при } k > 0 \\ L^j \{ \eta_t \} & \text{при } k = 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

$$A_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$L^j\{\cdot\} \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{L\cdots L\{\cdot\}}{j} & \text{при } j > 0 \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases},$$

$$^{(1)}G_p\{\cdot\} = \frac{1}{p} \left(^{(1)}G_{p-1}L\{\cdot\} - ^{(1)}LG_{p-1}\{\cdot\} \right); \quad p = 1, 2, \dots,$$

операторы $^{(1)}G_0\{\cdot\}$ и $L\{\cdot\}$ такие же, как в лемме 3.1.

Доказательство: Доказательство проведем по индукции. Применим к процессу η_s формулу Ито. Тогда с вероятностью 1

$$\eta_s = \eta_t + D_{1,s,t} = (C^{A_0}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_0}) + D_{1,s,t}, \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} D_{1,s,t} &= \int_t^s L\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s G_0\{\eta_\tau\}^\perp d\mathbf{f}_\tau = \\ &= \int_t^s (Q^{A_0}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_0}) + \int_t^s \left((H^{A_0}\{\eta_\tau\}^\perp d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{A_0} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Соотношения (3.11) и (3.12) являются частными случаями (3.9) и (3.10) при $r = 0$. Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в $D_{1,s,t}$. Тогда с вероятностью 1 имеем:

$$D_{1,s,t} = D_{1,s,t}^* + D_{2,s,t}, \quad (3.13)$$

$$D_{1,s,t}^* = (s - t)L\{\eta_t\} + G_0\{\eta_t\}^\perp J_{0,s,t} = (C^{A_1}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_1}), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} D_{2,s,t} &= \int_t^s \left(\int_t^{s_1} L^2\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^{s_1} G_0 L\{\eta_\tau\}^\perp d\mathbf{f}_\tau \right) ds_1 + \\ &+ \int_t^s \left(\int_t^{s_1} L G_0\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^{s_1} {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\}^\perp d\mathbf{f}_\tau \right)^\perp d\mathbf{f}_{s_1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Заменим с вероятностью 1 порядки интегрирования в (3.15) согласно теореме 2.1:

$$\begin{aligned} D_{2,s,t} &= \int_t^s L^2\{\eta_\tau\} d\tau (s - \tau) + \int_t^s L G_0\{\eta_\tau\} d\tau^\perp J_{0,s,\tau} + \\ &+ \int_t^s G_0 L\{\eta_\tau\}^\perp d\mathbf{f}_\tau (s - \tau) + \int_t^s \left({}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\}^\perp d\mathbf{f}_\tau \right)^\perp J_{0,s,\tau} = \end{aligned}$$

$$= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_1} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1}) + \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_1} \{\eta_\tau\})^{\perp} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1}. \quad (3.16)$$

Объединяя соотношения (3.11)-(3.16), придем с вероятностью 1 к представлению:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^1 (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{2,s,t}, \quad (3.17)$$

$$D_{2,s,t} = \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_1} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1}) + \\ + \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_1} \{\eta_\tau\})^{\perp} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1}. \quad (3.18)$$

Нетрудно видеть, что (3.17) и (3.18) являются частными случаями (3.9) и (3.10) при $r = 1$. Таким образом, утверждение теоремы справедливо для $r = 0, 1$. Продолжая начатый процесс разложения, получим с вероятностью 1 на следующем шаге соотношения:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^1 (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + \frac{1}{2}(s-t)^2 L^2 \{\eta_t\} + \\ + (G_0 L \{\eta_t\} - L G_0 \{\eta_t\})^{\perp} J_{1,s,t} + {}^{(2)}G_0 G_0 \{\eta_t\}^{\perp} {}^{(2)}J_{00,s,t} + \\ + (s-t) L G_0 \{\eta_t\}^{\perp} J_{0,s,t} + D_{3,s,t} = \\ = \sum_{q=0}^1 (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + (C^{\mathcal{A}_2} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_2}) + D_{3,s,t} = \\ = \sum_{q=0}^2 (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{3,s,t}, \quad (3.19)$$

где

$$D_{3,s,t} = \int_t^s L^3 \{\eta_\tau\} d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \int_t^s L^2 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau^{\perp} J_{0,s,\tau}(s-\tau) + \\ + \int_t^s (L G_0 L \{\eta_\tau\} - L^2 G_0 \{\eta_\tau\}) d\tau^{\perp} J_{1,s,\tau} + \\ + \int_t^s {}^{(2)}L G_0 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau^{\perp} {}^{(2)}J_{00,s,\tau} + \int_t^s (G_0 L^2 \{\eta_\tau\})^{\perp} d\mathbf{f}_\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^s \left({}^{(2)}G_0 L G_0 \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \stackrel{!}{\cdot} J_{0,s,\tau} + \\
& + \int_t^s \left(\left({}^{(2)}G_0 G_0 L \{ \eta_\tau \} - {}^{(2)}G_0 L G_0 \{ \eta_\tau \} \right) \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \stackrel{!}{\cdot} J_{1,s,\tau} + \\
& + \int_t^s \left({}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \stackrel{!}{\cdot} {}^{(2)}J_{00,s,\tau} = \\
& = \int_t^s (Q^{A_2} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_2}) + \int_t^s \left(\left(H^{A_2} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_2} \right). \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Следовательно, утверждение теоремы справедливо и при $r = 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $n = r$, и докажем его справедливость при $n = r + 1$. Применяя формулу Ито к подынтегральным процессам в (3.10), получим с вероятностью 1 следующие соотношения:

$$D_{r+1,s,t} = D_{r+1,s,t}^* + D_{r+2,s,t}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
D_{r+1,s,t}^* &= \left(Q^{A_r} \{ \eta_t \} \odot \int_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{A_r} \right) + \\
&+ \left(\left(H^{A_r} \{ \eta_t \} \stackrel{!}{\cdot} \int_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r} \right), \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{r+2,s,t} &= \int_t^s \left(\int_t^{\tau_1} dU^{A_r} \{ \eta_\tau \} d\tau_1 \odot (s \ominus \tau_1)^{A_r} \right) + \\
&+ \int_t^s \left(\left(\int_t^{\tau_1} dV^{A_r} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{A_r} \right), \quad (3.23)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
dU^{A_r} \{ \eta_\tau \} &= \\
&= \left\{ {}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}, \\
dV^{A_r} \{ \eta_\tau \} &= \\
&= \left\{ {}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\},
\end{aligned}$$

где

$${}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} = {}^{(k)}L^{j+2} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \},$$

$$\begin{aligned}
^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= ^{(k+1)}LG_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}, \\
^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= ^{(k+1)}G_0 L^{j+1} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}, \\
^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= ^{(k+2)}G_0 G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}.
\end{aligned}$$

Заменим с вероятностью 1, согласно теореме 2.4, порядки интегрирования в повторных стохастических интегралах в (3.23):

$$\begin{aligned}
D_{r+2,s,t} &= \int_t^s \left(\left(dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \int_\tau^s d\tau_1 \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\
&+ \int_t^s \left(\left(dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right). \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующие стохастические интегралы:

$$\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)}, \quad \int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} d\tau_1; \quad q = 1, \dots, m.$$

Согласно свойствам (3.7) и (3.8) с вероятностью 1 имеем

$$\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} (s \ominus \tau)_{j+1 \ l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} - \frac{1}{(s-\tau)^{j+1}} (s \ominus \tau)_{j+1 \ l_1+j+1 \ l_2 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \\ \text{при } k > 0 \\ \frac{(s-\tau)^{j+1}}{(j+1)!} \text{ при } k = 0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

$$\int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{1}{(s-\tau)^j} (s \ominus \tau)_{jjl_1 \dots l_k}^{(qi_1 \dots i_k)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.26)$$

Подставим (3.25) и (3.26) в (3.24) и заметим, что получающийся результат с вероятностью 1 запишется в виде:

$$\begin{aligned}
D_{r+2,s,t} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_{r+1}} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}}) + \\
&+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_{r+1}} \{ \eta_\tau \} \int_\tau^s d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right). \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Таким образом (3.10) доказано.

После подстановки (3.25) и (3.26) при $\tau = t$ в (3.22) с вероятностью 1 получим

$$D_{r+1,s,t}^* = (C^{\mathcal{A}_{r+1}} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_{r+1}}). \quad (3.28)$$

Таким образом соотношения (3.21), (3.27) и (3.28) доказывают соотношение (3.9). Теорема доказана. $\square$

Нетрудно видеть, что часть членов в сумме в правой части (3.9) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \rightarrow t$, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1,s,t}$. Это заключение вытекает из свойства (3.6). Следующая теорема показывает, как необходимо видоизменить разложение (3.9), чтобы упорядочить его члены по порядкам малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь наибольший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \rightarrow t$.

Теорема 3.2. Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r + 1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ он разлагается в унифицированный ряд Тейлора-Ито вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1,s,t} \text{ с в.1,} \quad (3.29)$$

причем существует такая постоянная $C_r < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (H_{r+1,s,t})^2 \right\}} \leq C_r (s - t)^{(r+1)/2}; \quad r = 0, 1, \dots,$$

где

$$H_{r+1,s,t} \stackrel{\text{def}}{=} (C \{ \eta_t \}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t},$$

$$D_{r+1,s,t} = \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ + \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \}^\perp d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right),$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$\mathcal{U}_r = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p \leq r; \right.$$

$$\left. k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) \geq r + 1; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

а другие обозначения такие же, как в теореме 3.1.

Доказательство: Нетрудно видеть, что разложение (3.9) может быть представлено с вероятностью 1 в следующей форме:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1,s,t},$$

где

$$H_{r+1,s,t} \stackrel{\text{def}}{=} (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t}.$$

С помощью неравенства Минковского имеем:

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1,s,t})^2 \right\}} \leq \sqrt{\mathbb{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\}} + \sqrt{\mathbb{M} \left\{ (D_{r+1,s,t})^2 \right\}}. \quad (3.30)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < s - t \leq 1$ и рассмотрим величины в правой части (3.30). Поскольку

$$\begin{aligned} (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) &= \\ &= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_t\} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, \end{aligned}$$

то при $0 < s - t \leq 1$ из свойства (3.6) и неравенства Минковского получаем

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\}} \leq C'_r (s-t)^z, \quad C'_r = \text{const} < \infty,$$

где

$$z = \min_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \left\{ \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом, при $0 < s - t \leq 1$ имеем

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r})^2 \right\}} \leq C'_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C'_r = \text{const} < \infty. \quad (3.31)$$

Рассмотрим $D_{r+1,s,t}$:

$$\begin{aligned} D_{r+1,s,t} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ &+ \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\})^\dagger d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \left(I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} + \sum_{p=1}^m J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} \right), \quad (3.32)$$

где

$$I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} = \int_t^s L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\tau J_{l_1\dots l_k, s, \tau}^{(i_1\dots i_k)},$$

$$J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} = \int_t^s G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1\dots l_k, s, \tau}^{(i_1\dots i_k)}.$$

Согласно теореме о замене порядка интегрирования с вероятностью 1 имеем:

$$I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} = \frac{1}{j!} \int_t^s (s-\tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s-\tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s-\tau)^j \times$$

$$\times L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} d\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, \quad (3.33)$$

$$J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} = \frac{1}{j!} \int_t^s (s-\tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s-\tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s-\tau)^j \times$$

$$\times G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \quad (3.34)$$

Далее, применяя неравенство Минковского к (3.32), используя соотношения (3.33), (3.34), неравенства (1.32), (1.33) при $n = 1$, а также свойство (3.6), получим при $0 < s - t \leq 1$ следующую оценку:

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (D_{r+1, s, t})^2 \right\}} \leq C_r'' (s-t)^{z'}, \quad C_r'' = \text{const} < \infty,$$

где

$$z' = \min_{\substack{k+j+\sum_{p=1}^k l_p = r \\ 0 \leq k \leq r}} \left\{ 1 + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом, при $0 < s - t \leq 1$ имеем

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (D_{r+1, s, t})^2 \right\}} \leq C_r'' (s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_r'' = \text{const} < \infty. \quad (3.35)$$

Из (3.30)-(3.35) получаем, что при $0 < s - t \leq 1$

$$\sqrt{\mathbf{M} \left\{ (H_{r+1, s, t})^2 \right\}} \leq C_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_r = \text{const} < \infty.$$

Теорема доказана при $0 < s - t \leq 1$. Рассмотрим теперь случай $s - t > 1$; $s, t \in [0, T]$. Ясно, что в этом случае неравенства (3.31), (3.35) сохраняют силу при некоторых постоянных C_r^*, C_r^{**} , которые возможно отличаются от постоянных C_r', C_r'' . Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения для случая $0 < s - t \leq 1$. Теорема доказана. $\square$

3.3.2. Вторая форма унифицированного разложения Тейлора-Ито

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ вида:

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (t - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \quad (3.36)$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$. Далее обозначим:

$${}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k,s,t}} = \left\| I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Поскольку между повторными стохастическими интегралами $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ и $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ в силу свойства аддитивности справедливо с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_k=0}^{l_k} C_{l_1}^{j_1} \dots C_{l_k}^{j_k} (s - t)^{l_1 + \dots + l_k - j_1 - \dots - j_k} I_{j_1 \dots j_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)},$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент, то разложение процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ можно проводить как по повторным стохастическим интегралам $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$, что было сделано ранее, так и по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$.

Рассмотрим некоторые свойства повторных стохастических интегралов $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$, вытекающие из результатов главы 2:

$$\mathbf{M} \left\{ I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0,$$

$$\mathbf{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(s - t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_1 + 1)(2(l_1 + l_2) + 2) \dots (2(l_1 + \dots + l_k) + k)}, \quad (3.37)$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)} I_{l_1 \dots l_{k,s}, \tau}^{(i_1 \dots i_k)} = I_{jl_1 \dots l_{k,s}, t}^{(pi_1 \dots i_k)}, \quad p = 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$\int_t^s (s - \tau)^j d\tau I_{l_1 \dots l_{k,s}, \tau}^{(i_1 \dots i_k)} = -\frac{1}{j+1} I_{l_1+j+1 \dots l_{k,s}, t}^{(i_1 \dots i_k)}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$I_{l_1 \dots l_{k,s}, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (t - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_{k-1}} (t - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)},$$

где последние три свойства справедливы с вероятностью 1.

Пусть

$$(s \hat{\ominus} t)^B = \{^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in B\}$$

и пусть

$$^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k} = \left\| (s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

где

$$(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{(s - t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k,s}, t}^{(i_1 \dots i_k)},$$

B - некоторое подмножество множества наборов $(j, l_1, \dots, l_k, k)$ целых неотрицательных чисел.

Сформулируем теорему о разложении процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ в ряд по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k,s}, t}^{(i_1 \dots i_k)}$.

Теорема 3.3. Пусть случайный процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднее квадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ он разлагается в ряд по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k,s}, t}^{(i_1 \dots i_k)}$ вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{ \eta_t \} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1, s, t}, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1, s, t} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ &+ \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \cdot d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

причем равенство (3.38) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.38) и (3.39) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения:

$$\hat{C}^{A_q}\{\eta_t\} = \left\{ {}^{(k)}\hat{C}_{j l_1 \dots l_k}\{\eta_t\} : (j, k, l_1, \dots, l_k) \in A_q \right\},$$

где

$${}^{(k)}\hat{C}_{j l_1 \dots l_k}\{\cdot\} = \begin{cases} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j\{\cdot\} & \text{при } k > 0 \\ L^j\{\cdot\} & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 3.1.

Доказательство: Используя комбинаторные соображения нетрудно убедиться, что при $q = 0, 1, \dots$ выполняются с вероятностью 1 равенства:

$$(C^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q}) = (\hat{C}^{A_q}\{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{A_q}). \quad (3.40)$$

Используя (3.40) и теорему 3.1, приходим к утверждению настоящей теоремы. Теорема доказана. $\square$.

Сформулируем теперь теорему о разложении процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ в унифицированный ряд Тейлора-Ито по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$.

Теорема 3.4. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ непрерывно дифференцируем $r + 1$ раз по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ он разлагается в унифицированный ряд Тейлора-Ито вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \left(\hat{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q} \right) + H_{r+1, s, t}, \quad (3.41)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1, s, t})^2 \right\}} \leq C_{r+1} (s - t)^{(r+1)/2}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

где

$$H_{r+1, s, t} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{C}\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r} \right) + D_{r+1, s, t}, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1, s, t} = & \int_t^s (Q^{A_r}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r}) + \\ & + \int_t^s \left(\left(H^{A_r}\{\eta_\tau\} \right)^1 d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

равенство (3.41) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.41)-(3.43) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены такие же обозначения, как в теоремах 3.1, 3.2 и 3.3.

Доказательство теоремы 3.4 аналогично доказательству теоремы 3.2, поэтому не будем на нем останавливаться.

3.4. Разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Сравнение с унифицированными разложениями Тейлора-Ито

Как уже отмечалось ранее, разложения Тейлора-Ито были впервые получены Вагнером и Платеном в [42, 44]. Эти результаты содержатся также в монографии [50]. В настоящем параграфе произведем сопоставление разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена с унифицированными разложениями Тейлора-Ито, полученными в предыдущем параграфе. Сначала приведем результаты, полученные Вагнером и Платеном в [42, 44]. При этом будем придерживаться принятых в данной монографии обозначений и терминов.

Теорема 3.5. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T]: s > t$ он разлагается в ряд вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \cdot^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t} + D_{r+1, s, t}, \quad (3.44)$$

$$D_{r+1, s, t} =$$

$$= \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1)} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_r} Q_{\lambda_{r+1}} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_{r+1}}\} \cdot^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots \cdot^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \quad (3.45)$$

равенство (3.44) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.44) и (3.45) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения: $\lambda_l = 1, 0; p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j; Q_{\lambda_l}^{(0)}\{\cdot\} = L\{\cdot\}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0; Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\{\cdot\} = G_0^{(i_l)}\{\cdot\}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$;

$$(i_k, \dots, i_{l-1}, 0, i_{l+1}, \dots, i_1) \stackrel{\text{def}}{=} (i_k, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_1);$$

$\sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}$ – сумма по всем перестановкам в наборе $(\lambda_k, \dots, \lambda_1)$; $\cdot^0$ – означает умножение на скаляр;

$$^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l},$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{T_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \text{ при } k \geq 1 \text{ и } J_{(\lambda_0 \dots \lambda_1)s,t}^{(i_0 \dots i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1;$$

$$\mathbf{w}_{\tau}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau}^{(i)} \text{ при } i = 1, \dots, m \text{ и } \mathbf{w}_{\tau}^{(0)} = \tau.$$

Нетрудно понять, что (3.44) получается путем $r+1$ кратного последовательного применения формулы Ито к процессу $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Упорядочим члены разложения (3.44) по возрастанию порядков малости при $s \rightarrow t$ в среднеквадратическом смысле. В результате будет получаться ряд, который в нашей терминологии будет называться разложением Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена.

Теорема 3.6 Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ $r+1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T]: s > t$ он разлагается в ряд Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} ^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \cdot ^{p_k} ^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} + H_{r+1,s,t}, \quad (3.46)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1,s,t})^2 \right\}} \leq C_{r+1} (s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

где

$$\begin{aligned} H_{r+1,s,t} = \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} ^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} \cdot ^{p_k} ^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} + \\ + D_{r+1,s,t}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

равенство (3.46) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.46) и (3.47) существуют в среднеквадратическом смысле, множества $\mathcal{E}_{qk}$ и $\mathcal{G}_{qk}$ имеют вид:

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q\},$$

$$G_{rk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : r+1 \leq 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k \leq 2r\};$$

остальные обозначения этой теоремы такие же, как в теореме 3.5.

Доказательство теоремы сводится к пересортировке членов разложения (3.44), после чего приходим к (3.46).

Произведем анализ унифицированных разложений Тейлора-Ито и разложения Тейлора-Ито (3.46). Наиболее важным отличием унифицированных разложений Тейлора-Ито от разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена вида (3.46) является то, что они содержат существенно меньшее количество различных повторных стохастических интегралов, и при том большая часть из них имеет меньшую кратность. Это особенно важно, поскольку проблема совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито из разложений Тейлора-Ито является сложной с теоретической и вычислительной точки зрения. Вопросы, связанные с численным моделированием указанных повторных стохастических интегралов, будут рассматриваться в главе 4. Ряд результатов, связанных с этой проблемой, содержится также в [47, 50, 57 – 63].

Рассмотрим насколько существенно различие в количестве различных повторных стохастических интегралов Ито в указанных выше разложениях. Унифицированное разложение Тейлора-Ито (3.41) до малых $O((s-t)^{\frac{3}{2}})$ содержит 4 различных повторных стохастических интеграла: $I_{0,s,t}^{(i_1)}$, $I_{00,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1,s,t}^{(i_1)}$, $I_{000,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$. В то же время разложение (3.46) содержит 5 различных повторных стохастических интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$. Унифицированное разложение Тейлора-Ито (3.41) до малых $O((s-t)^2)$ содержит 7 различных повторных стохастических интегралов Ито: $I_{0,s,t}^{(i_1)}$, $I_{00,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1,s,t}^{(i_1)}$, $I_{000,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000,s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. Аналогичное разложение (3.46) содержит уже 9 различных повторных стохастических интегралов Ито: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}$, $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)}$, $J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. Для унифицированного разложения Тейлора-Ито (3.41) и разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена до малых $O((s-t)^{\frac{5}{2}})$ имеем соответственно следующие наборы, входящих в них различных повторных стохастических интегралов: $I_{0,s,t}^{(i_1)}$, $I_{00,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1,s,t}^{(i_1)}$, $I_{000,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10,s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000,s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$, $I_{2,s,t}^{(i_1)}$, $I_{010,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{100,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{001,s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{00000,s,t}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$ и $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$

γ	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	...
N	2	4	7	12	20	33	...
M	2	5	9	17	29	51	...
Δ	0	1	2	5	9	18	...

Таблица 3.1 Сравнение количества различных повторных стохастических интегралов в разложениях (3.41) и (3.46).

$$J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}, J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)}, J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)}, J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, J_{(1110)s,t}^{(i_4 i_3 i_2)}, J_{(1101)s,t}^{(i_4 i_3 i_1)}, J_{(1011)s,t}^{(i_4 i_2 i_1)}, J_{(0111)s,t}^{(i_4 i_2 i_1)}, \\ J_{(001)s,t}^{(i_1)}, J_{(010)s,t}^{(i_2)}, J_{(100)s,t}^{(i_3)}, J_{(11111)s,t}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}.$$

Пусть N – число различных повторных стохастических интегралов, входящих в унифицированное разложение Тейлора-Ито (3.41) до малых $O((s-t)^\gamma)$, M – аналогичное число для разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, а $\Delta = M - N$. В таблице 3.1 помещены значения N , M и Δ при $\gamma = (r+1)/2$; $r = 1, \dots, 6$. Нетрудно видеть, что точно такую же таблицу можно получить при сравнении разложений (3.29) и (3.46).

Важно отметить, что унифицированные разложения Тейлора-Ито могут быть получены без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s . Поясним это более подробно. Заметим, что разложения, полученные в теоремах 3.1-3.4, строились с применением теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на каждом шаге разложения. В результате при построении этих разложений было необходимо выполнение условия среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s . Однако можно поступить иначе, т.е. разложив процесс η_s в ряд Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена (без требования условия среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s), а затем унифицировав с вероятностью 1 сумму:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(p_k)} \quad (3.48)$$

с помощью теорем о замене порядка интегрирования в повторных сто-

хастических интегралах Ито к виду:

$$\sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}),$$

или к виду:

$$\sum_{q=0}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}).$$

Эти преобразования осуществлены в работе [52]. При этом производные по Ито процесса η_s не входят в повторные стохастические интегралы $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{(i_k \dots i_1)}$ в сумме (3.48) и, следовательно, достаточно потребовать от них лишь покомпонентной принадлежности классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ при унификации с помощью теорем о замене порядка интегрирования суммы (3.48). В результате мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.7. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ он разлагается в ряды вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

а также в унифицированные ряды Тейлора-Ито вида:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r (\hat{C}^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q}) + \hat{H}_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

где

$$H_{r+1,s,t} = (C\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t},$$

$$\hat{H}_{r+1,s,t} = (\hat{C}\{\eta_t\}^{\mathcal{U}_r} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t},$$

$$D_{r+1,s,t} = \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1)} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_r} Q_{\lambda_{r+1}} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_{r+1}}\}^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1},$$

а остальные обозначения, соответствуют обозначениям, введенным в теоремах 3.1-3.5.

3.5. Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов

Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $\mathbf{x}_s$ – решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.25), дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда, согласно определению 3.1, он представим с вероятностью 1 при всех $s, t \in [0, T]$, таких что $s > t$, в виде:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_0\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s {}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau, \quad (3.49)$$

где случайные процессы $B_0\{\eta_\tau\}$ и ${}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}$, называемые производными по Ито процесса η_s , принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$. Рассмотрим стохастический интеграл Ито $\int_t^s {}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau$ из правой части (3.49).

Будем предполагать, что процесс ${}^{(1)}B_1\{\eta_\tau\}$, также как и процесс η_s , является дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда $\forall s, t \in [0, T]: s > t$ имеем покомпонентно справедливое с вероятностью 1 представление:

$${}^{(1)}B_1\{\eta_s\} = {}^{(1)}B_1\{\eta_t\} + \int_t^s {}^{(1)}B_{01}\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s {}^{(2)}B_{11}\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau.$$

Пусть случайные процессы ${}^{(1)}B_{01}\{\eta_\tau\}$ и ${}^{(2)}B_{11}\{\eta_\tau\}$ покомпонентно удовлетворяют условиям леммы 1.6, накладываемым на процессы a_τ и $b_\tau^{(i)} i = 1, \dots, m$ соответственно. Тогда, согласно лемме 1.6, справедливо с вероятностью 1 равенство:

$$\int_t^s B_1^{(i_1)}\{\eta_\tau\} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \int_t^s B_1^{(i_1)}\{\eta_\tau\} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} - \frac{1}{2} \int_t^s B_{11}^{(i_1 i_1)}\{\eta_\tau\} d\tau. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.50) в (3.49) с вероятностью 1, получим:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_\alpha\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s {}^{(1)}B_\beta\{\eta_\tau\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{f}_\tau, \quad (3.51)$$

где введены обозначения:

$$B_\alpha\{\eta_\tau\} = B_0\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m B_{11}^{(i_1 i_1)}\{\eta_\tau\}, \quad B_\beta^{(i_1)}\{\eta_\tau\} = B_1^{(i_1)}\{\eta_\tau\}. \quad (3.52)$$

Далее будем называть процессы $B_\alpha\{\eta_\tau\}$ и $^{(1)}B_\beta\{\eta_\tau\}$, входящие в представление (3.51), производными по Стратоновичу случайного процесса η_s в каком-либо (в данном случае в среднеквадратическом) вероятностном смысле. Сам же процесс η_s , удовлетворяющий представлению (3.51), будем называть дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25).

Дадим определение многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Определение 3.3. Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s) \in \mathbb{R}^1$ называется N раз дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25), если соотношение (3.51) справедливо с вероятностью 1 и при $k = 2, 3, \dots, N$; $\forall s, t \in [0, T] : s > t$ справедливо с вероятностью 1 представление:

$$\begin{aligned} {}^{(p_k-1)}B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}\{\eta_s\} &= {}^{(p_k-1)}B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}\{\eta_t\} + \int_t^s {}^{(p_k-1)}B_{\alpha\mu_{k-1}\dots\mu_1}\{\eta_\tau\} d\tau + \\ &+ \int_t^{*s} {}^{(p_{k-1}+1)}B_{\beta\mu_{k-1}\dots\mu_1}\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau, \end{aligned} \quad (3.53)$$

причем правая часть (3.53) существует в среднеквадратическом смысле, матричные случайные процессы ${}^{(p_l)}B_{\mu_l\dots\mu_1}\{\eta_\tau\}$ ($l = 1, \dots, N$) называются l -ми производными процесса η_s по Стратоновичу и в (3.53) введены следующие обозначения:

$${}^{(p_l)}B_{\mu_l\dots\mu_1}\{\eta_\tau\} = \|B_{\mu_l\dots\mu_1}^{(i_l\dots i_1)}\{\eta_\tau\}\|_{i_l=\delta_l, \dots, i_1=\delta_1}^{m\delta_l \quad m\delta_1};$$

$\mu_l = \alpha, \beta$; $\delta_l = 0$ при $\mu_l = \alpha$ и $\delta_l = 1$ при $\mu_l = \beta$; $p_l = \sum_{j=1}^l \delta_j$.

Приведем достаточные условия N кратной дифференцируемости по Стратоновичу.

Лемма 3.3. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\eta_s = \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ - решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.25);
2. Выполнены условия AI-AIII (см. главу 1);
3. $M\{|\mathbf{x}_0|^4\} < \infty$;
4. процесс η_s $N+1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25);

5. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \bigcup_{g=1}^{N+1} \mathcal{T}_g$, где $\mathcal{T}_g = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_g) : \gamma_i = 0, 1; i = 1, \dots, g\}$, $\forall t \in [0, T]$ функции $B_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}\{\mathbf{x}\} \stackrel{\text{def}}{=} Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{x}, t)$, определенные соотношением (3.5), удовлетворяют условиям:

$$|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{x}, t) - Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{y}, t)| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{x}, t)| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|),$$

где $K_1, K_2 = \text{const} < \infty$;

6. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \bigcup_{g=1}^{N+1} \mathcal{T}_g, \forall t, \tau \in [0, T]$ выполнено условие:

$$|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{x}, t) - Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(\mathbf{y}, \tau)| \leq K_3 |t - \tau|^\nu,$$

где $\nu > 0, K_3 = \text{const} < \infty$.

Тогда процесс η_s N раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25) и его производные по Стратоновичу при $k = 2, 3, \dots, r$ покомпонентно определяются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} B_{\alpha_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}}^{(i_{k-1} \dots i_1)}\{\eta_\tau\} &= L B_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_{k-1} \dots i_1)}\{\eta_\tau\} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i_k=1}^m G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_{k-1} \dots i_1)}\{\eta_\tau\}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$B_{\beta_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}}^{(i_{k-1} \dots i_1)}\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_{k-1} \dots i_1)}\{\eta_\tau\} \quad (3.55)$$

а при $k = 1$ определяются соотношениями:

$$B_\alpha\{\eta_\tau\} = L\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)}\{\eta_\tau\}, \quad B_\beta\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_1)}\{\eta_\tau\}, \quad (3.56)$$

где операторы $L\{\cdot\}$ и $G_0^{(i)}\{\cdot\}$; $i = 1, \dots, m$ такие же, как в лемме 3.1.

Доказательство: Для доказательства воспользуемся следующим утверждением, доказанным в [50].

Лемма 3.4. Пусть условия AI-III главы 1 выполнены и $M\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\} < \infty; n \geq 1$. Тогда решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.25) удовлетворяет следующим оценкам:

$$M\{|\mathbf{x}_t|^{2n}\} \leq (1 + M\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\})e^{C(t-t_0)},$$

$$M\{|x_t - x_{t_0}|^{2n}\} \leq C_1(1 + M\{|x_{t_0}|^{2n}\})(t - t_0)^n e^{C(t-t_0)},$$

где $t \in [t_0, T]$, $T < \infty$, $C = 2n(2n+1)K^2$, C_1 — положительная постоянная, зависящая только от $n, K, T - t_0$; $K = \text{const} < \infty$.

С использованием условий 5 и 6 леммы 3.3 и неравенства $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ получаем:

$$\begin{aligned} & M\{|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_t, t) - Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_s, s)|^4\} \leq \\ & \leq 8M\{|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_t, t) - Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_s, t)|^4\} + \\ & + 8M\{|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_s, t) - Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_s, s)|^4\} \leq \\ & \leq 8K_1^4 M\{|x_t - x_s|^4\} + 8K_3^4 |t - s|^{4\nu}; \quad t \geq s. \end{aligned}$$

Поскольку согласно лемме 3.4

$$\begin{aligned} M\{|x_t - x_s|^4\} & \leq C_1(1 + M\{|x_s|^4\})(t - s)^2 e^{C(t-s)} \leq \\ & \leq C_1(1 + (1 + M\{|x_0|^4\})e^{C_s})|t - s|^2 e^{C(t-s)}, \end{aligned}$$

то

$$M\{|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_t, t) - Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_s, s)|^4\} \leq C_2 |t - s|^\gamma,$$

где $\gamma > 0$, $C_2 = \text{const} < \infty$.

Далее с учетом условия 5 леммы 3.3 и леммы 3.4 имеем:

$$\begin{aligned} & M\{|Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_s, s)|^4\} \leq K_2^4 M\{(1 + |x_s|^4)\} \leq \\ & \leq 8K_2^4 (1 + M\{|x_s|^4\}) \leq 8K_2^4 (1 + (1 + M\{|x_0|^4\})e^{C_s}) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $\forall (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \in \bigcup_{g=1}^{N+1} \mathcal{T}_g$ процессы $Z_{\gamma_1 \dots \gamma_l}^{(i_1 \dots i_l)}(x_t, t)$ удовлетворяют условиям леммы 1.6. Применяя теперь многократно формулу Ито и лемму 1.6, убеждаемся, что процесс η_s N раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25) и его производные по Стратоновичу имеют вид (3.54), (3.55), (3.56). Лемма доказана. $\square$

Отметим, что нетрудно указать достаточные условия N кратной дифференцируемости по Стратоновичу для случайных процессов η_s более общего вида. Однако мы не будем этого делать, поскольку для дальнейшего изложения будет достаточна формулировка леммы 3.4.

3.6. Разложение Тейлора-Стратоновича

Пользуясь связью между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича, можно получить разложение процесса Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам Стратоновича. Такое разложение для процессов Ито, представляющих собой гладкое безынерционное преобразование от решения стохастического дифференциального уравнения Ито, впервые было получено в [48] (P.E.Kloeden, E.Platen) и было названо разложением Стратоновича-Тейлора. Мы же будем придерживаться следующей терминологии. Термин „разложение Тейлора-Стратоновича” мы будем употреблять только к тому разложению процесса Ито по повторным стохастическим интегралам Стратоновича, члены которого упорядочены в порядке возрастания порядков малости при $s \rightarrow t$ в среднеквадратическом смысле, а остаточный член имеет наибольший порядок малости по сравнению с членами указанного разложения. При получении разложений процессов Ито в ряд по повторным стохастическим интегралам Стратоновича и, в частности, в ряд Тейлора-Стратоновича будем придерживаться обозначений, принятых в данной монографии.

Пользуясь интегральными представлениями (3.51) и (3.53), сформулируем теорему о разложении дифференцируемого по Стратоновичу случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ в ряд по интегралам Стратоновича.

Теорема 3.8. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T]: s > t$ он разлагается в ряд по интегралам Стратоновича вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1)}^{(p_k)} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{ \eta_t \} \stackrel{p_k}{\cdot} J_{(\mu_k \dots \mu_1) s, t}^* + D_{r+1, s, t}, \quad (3.57)$$

$$D_{r+1, s, t} = \sum_{(\mu_{r+1}, \dots, \mu_1)} \int_t^{*s} \dots \left(\int_t^{*\tau_r} {}^{(p_{r+1})} B_{\mu_{r+1} \dots \mu_1} \{ \eta_{\tau_{r+1}} \} \stackrel{\delta_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots \stackrel{\delta_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \quad (3.58)$$

равенство (3.57) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.57) и (3.58) существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения: $\mu_i = \alpha, \beta$; $p_i = \sum_{j=1}^l \delta_j$; $\delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при

$\mu_l = \alpha$; $\delta_l = 1$ и $i_l = 1, \dots, t$ при $\mu_l = \beta$; $\sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1)}$ — сумма по всем перестановкам в наборе $(\mu_k, \dots, \mu_1)$; $\cdot^0$ — умножение на скаляр;

$$(i_k, \dots, i_{l+1}, 0, i_{l-1}, \dots, i_1) \stackrel{def}{=} (i_k, \dots, i_{l+1}, i_{l-1}, \dots, i_1);$$

$$^{(p_k)} J_{(\mu_k \dots \mu_1) s, t}^* = \left\| J_{(\mu_k \dots \mu_1) s, t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1 = \delta_1, \dots, i_k = \delta_k}^{m \delta_1 \quad m \delta_k},$$

$$J_{(\mu_k \dots \mu_1) s, t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \text{ при } k \geq 1 \text{ и } J_{(\mu_0 \dots \mu_1) s, t}^{*(i_0 \dots i_1)} = 1,$$

где введено обозначение: $\mathbf{w}_{\tau}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$ при $i = 1, \dots, t$ и $\mathbf{w}_{\tau}^{(0)} = \tau$; производные по Стратоновичу при $k = 2, 3, \dots, r$ покомпонентно определяются рекуррентными соотношениями:

$$B_{\alpha \mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_k-1 \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\} = L B_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_k-1 \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i_k=1}^m G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_k-1 \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\},$$

$$B_{\beta \mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_k i_{k-1} \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\} = G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1} \dots \mu_1}^{(i_{k-1} \dots i_1)} \{\eta_{\tau}\}$$

а при $k = 1$ определяются соотношениями:

$$B_{\alpha} \{\eta_{\tau}\} = L \{\eta_{\tau}\} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)} \{\eta_{\tau}\}, \quad B_{\beta} \{\eta_{\tau}\} = G_0^{(i_1)} \{\eta_{\tau}\},$$

где операторы $L\{\cdot\}$ и $G_0^{(i)}\{\cdot\}$; $i = 1, \dots, t$ такие же, как в лемме 3.1.

Порядок малости при $s \rightarrow t$ в среднеквадратическом смысле общего члена разложения (3.57) определяется только порядком малости повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{(\mu_k \dots \mu_1) s, t}^{*(i_k \dots i_1)}$. В главе 4 будет показано, что этот повторный стохастический интеграл Стратоновича имеет такой же порядок малости при $s \rightarrow t$ в среднеквадратическом смысле, что и соответствующий ему стохастический интеграл Ито. Поэтому общий член разложения (3.57) будет иметь порядок малости, равный порядку малости повторного стохастического интеграла:

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) s, t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)},$$

где $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$. Нетрудно видеть, что:

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) s, t}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\}} \leq C_k (s - t)^{k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j},$$

где $C_k = \text{const} < \infty$. В силу сказанного, видно, что часть слагаемых разложения (3.57) имеет больший порядок малости при $s \rightarrow t$ в среднеквадратическом смысле, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1, s, t}$ разложения (3.57), для которого справедлива оценка:

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left(D_{r+1, s, t} \right)^2 \right\}} \leq C_{r+1} (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_{r+1} = \text{const} < \infty.$$

Сформулируем теорему о разложении дифференцируемого по Стратоновичу процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ в упорядоченный по порядкам малости в среднеквадратическом смысле ряд по интегралам Стратоновича или ряд Тейлора-Стратоновича.

Теорема 3.9. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.25). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ он разлагается в ряд Тейлора-Стратоновича вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1) \in \mathcal{B}_{qk}} {}^{(p_k)} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{ \eta_t \} {}^{p_k} J_{(\mu_k \dots \mu_1) s, t}^* + H_{r+1, s, t}, \quad (3.59)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left(H_{r+1, s, t} \right)^2 \right\}} \leq C_{r+1} (s - t)^{\frac{r+1}{2}},$$

где

$$H_{r+1, s, t} = D_{r+1, s, t} + \sum_{k=1}^r \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1) \in \mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{ \eta_t \} {}^{p_k} J_{\mu_k \dots \mu_1, s, t}^*, \quad (3.60)$$

равенство (3.59) справедливо с вероятностью 1, правые части (3.59) и (3.60) существуют в среднеквадратическом смысле, множества $\mathcal{B}_{qk}$ и $\mathcal{G}_{rk}$ имеют вид:

$$\mathcal{B}_{qk} = \{ (\mu_k, \dots, \mu_1) : 2k - \delta_1 - \dots - \delta_k = q \};$$

$$\mathcal{G}_{rk} = \{ (\mu_k, \dots, \mu_1) : r + 1 \leq 2k - \delta_1 - \dots - \delta_k \leq 2r \},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 3.8.

3.7. Сильная сходимость унифицированного разложения Тейлора-Ито

Предположим, что условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда справедливо с вероятностью 1 разложение (3.9). Рассмотрим на основе разложения (3.9) усеченное унифицированное разложение Тейлора-Ито вида:

$$\eta_{s,t}^{(r)} = \sum_{q=0}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}),$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.9).

Согласно доказательству теоремы 3.2 при всех $s, t \in [0, T] : s > t$ существует такая постоянная $C_r < \infty$, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\eta_s - \eta_{s,t}^{(r)} \right)^2 \right\} \leq C_r^2 (s - t)^{r+1}.$$

В настоящем параграфе покажем, что при достаточно малой величине $s - t$ справедливы следующие предельные соотношения:

$$\text{l.i.m.} \eta_{s,t}^{(r)} = \eta_s \text{ при } r \rightarrow \infty,$$

$$\lim \eta_{s,t}^{(r)} = \eta_s \text{ при } r \rightarrow \infty \text{ с в.1.}$$

Теорема 3.10. Пусть условия теоремы 3.1 выполнены при $r = 0, 1, \dots$. Пусть также для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r; r = 0, 1, \dots$, всех $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m; p = 0, 1, \dots, m$ и любого $\theta \in [t, s]$ выполнено условие:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(H^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\theta\} \right)^2 \right\} \leq C < \infty, \quad (3.61)$$

где $H^{(p)} \{\cdot\} = L \{\cdot\}$ при $p = 0$ и $H^{(p)} \{\cdot\} = G_0^{(p)} \{\cdot\}$ при $p = 1, \dots, m$. Тогда для достаточно малого $s - t$ существует такая постоянная $C_1 < \infty$, что выполняется следующая оценка:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\eta_s - \eta_{s,t}^{(r)} \right)^2 \right\} \leq C_1 (4m^2)^{r+1} \frac{(s - t)^{r+1}}{(r + 1)!}, \quad (3.62)$$

где m – размерность винеровского процесса $\mathbf{f}_r$.

Доказательство: Согласно равенству (3.32) (см. теорему 3.2) и теореме о замене порядка интегрирования величина $\eta_s - \eta_{s,t}^{(r)}$ представима

с вероятностью 1 в виде:

$$\eta_s - \eta_{s,t}^{(r)} = \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \left(I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} + \sum_{p=1}^m J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} \right), \quad (3.63)$$

где

$$I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} = \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\ \times L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} d\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, \quad (3.64)$$

$$J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} = \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\ \times G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \quad (3.65)$$

Используя соотношения (3.64), (3.65), неравенства (1.32), (1.33) при $n = 1$, а также свойство (3.6), получим следующие неравенства:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} \right)^2 \right\} \leq \\ \leq \frac{C(s-t)^{2(j+l_1+\dots+l_k)+k+1}}{(j!)^2 (2l_k+1) \dots (2(l_k+\dots+l_1)+k)(2(l_k+\dots+l_1+j)+k+1)}, \quad (3.66)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} \right)^2 \right\} \leq \\ \leq \frac{C(s-t)^{2(j+l_1+\dots+l_k)+k+2}}{(j!)^2 (2l_k+1) \dots (2(l_k+\dots+l_1)+k)(2(l_k+\dots+l_1+j)+k+1)}. \quad (3.67)$$

Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{A}_r$ имеет ровно 2^r элементов. Далее, применяя неравенство Минковского к (3.63), используя оценки (3.66), (3.67), а также считая величину $s - t$ достаточно малой и учитывая, что $k + j + l_1 + \dots + l_k = r$, получим следующую оценку:

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left(\eta_s - \eta_{s,t}^{(r)} \right)^2 \right\}} \leq \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \left[\sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t} \right)^2 \right\}} + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^m \sqrt{\mathbb{M} \left\{ \left(J_{l_1\dots l_k, i_1\dots i_k, j, s, t}^{(p)} \right)^2 \right\}} \right] \leq$$

$$\leq (2m)^r \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\sqrt{(r+1)!}} \left((s-t)^{\frac{1}{2}} + m \right) \leq (2m)^{r+1} \sqrt{C_1} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\sqrt{(r+1)!}}, \quad (3.68)$$

где $C_1 = \text{const} < \infty$. Возводя левую и правую части (3.68) в квадрат, получим (3.62). Теорема доказана. $\square$

Таким образом, в условиях теоремы 3.10 в достаточно малой окрестности момента t имеем:

$$\text{l.i.m.} \eta_{s,t}^{(r)} = \eta_s \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Согласно (3.62) получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} M \left\{ \left(\eta_s - \eta_{s,t}^{(r)} \right)^2 \right\} &\leq C_1 \sum_{r=0}^{\infty} (4m^2)^{r+1} \frac{(s-t)^{r+1}}{(r+1)!} = \\ &= C_1 \left[e^{4m^2(s-t)} - 1 \right] < \infty, \end{aligned}$$

поэтому (см. сходимости случайных последовательностей, § 1.2.1) в достаточно малой окрестности момента t имеем:

$$\lim \eta_{s,t}^{(r)} = \eta_s \text{ при } r \rightarrow \infty \text{ с в.1.}$$

Отметим, что аналоги теоремы 3.10 для разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора-Стратоновича установлены в работе [44]. В теореме 3.10 делается существенное предположение о малости величины $s-t$. В [44] это допущение не делается, однако оценка типа (3.62) в [44] значительно грубее и, кроме того, наложены более ограничительные условия на коэффициентные функции разложений Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича. В следующем параграфе будут приведены результаты, связанные с сильной сходимостью разложений Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича, которые установлены в [44].

3.8. Сильная сходимость разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора-Стратоновича

В этом параграфе рассмотрим результаты, которые получены в [44] и связаны с сильной сходимостью разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора-Стратоновича.

Введем ряд обозначений. Пусть множество Λ_r определяется следующим образом:

$$\Lambda_r = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \leq r; \lambda_p \in \{0, 1\}; p = 1, \dots, k\},$$

где $n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – число нулей среди $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Введем множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}(\Lambda_r)$ вида:

$$\mathcal{M} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_p \in \{0, 1\}; p = 1, \dots, k; k = 1, 2, \dots\},$$

$$\mathcal{B}(\Lambda_r) =$$

$$= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M} \setminus \Lambda_r : -(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_r; \lambda_p \in \{0, 1\}; p = 1, \dots, k\},$$

где $-(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

В условиях теоремы 3.5, согласно введенным обозначениям, с вероятностью 1 имеем:

$$\eta_s = \eta_{s,t}^{(k)} + R_{k+1,s,t},$$

где

$$\eta_{s,t}^{(k)} = \eta_t + \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t},$$

$$R_{k+1,s,t} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{B}(\Lambda_k)} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_{k-1}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_k}\} {}^{\lambda_k} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \dots {}^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в теорему 3.5.

Теорема 3.11.[44] Пусть условия теоремы 3.5 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \left[\frac{1}{2} (k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \right]!$$

для любого $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{B}(\Lambda_k)$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$. Тогда для всех $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \eta_t - \eta_{t,t_0}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_3 \frac{(C_4(t - t_0))^{k+1}}{\left[\frac{1}{2}(k+1) \right]!},$$

где $[x]$ – целая часть числа x ; $C_1, C_2, C_3, C_4 < \infty$ – постоянные, не зависящие от k .

Из теоремы 3.11 следует, что усеченное разложение Тейлора-Ито $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито η_t :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t$$

для всех $t \in [t_0, T]$.

Следующая теорема устанавливает равномерную по $t \in [t_0, T]$ сходимость с вероятностью 1 усеченного разложения Тейлора-Ито $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ к процессу Ито η_t .

Теорема 3.12. [44] Пусть условия теоремы 3.11 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} M \left\{ \left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{ \eta_t \} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$$

для любого $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}$. Тогда усеченное разложение Тейлора-Ито $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ сходится при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1 к процессу Ито η_t :

$$\eta_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{t,t_0}^{(k)} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{ \eta_{t_0} \} \cdot {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)t, t_0}.$$

В [44] также сформулированы и доказаны аналоги теорем 3.11 и 3.12 о сильной сходимости разложения Тейлора-Стратоновича. Прежде, чем привести их формулировки, введем необходимые обозначения. Определим множества $\tilde{\Lambda}_k, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{B}(\tilde{\Lambda}_k)$ следующим образом:

$$\tilde{\Lambda}_k = \{ (\mu_1, \dots, \mu_k) : k + \tilde{n}(\mu_1, \dots, \mu_k) \leq k; \mu_p = \alpha, \beta; p = 1, \dots, k \},$$

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{ (\mu_1, \dots, \mu_k) : \mu_p = \alpha, \beta; p = 1, \dots, k; k = 1, 2, \dots \},$$

$$\tilde{B}(\Lambda_k) =$$

$$= \{ (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{\mathcal{M}} \setminus \tilde{\Lambda}_k : -(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{\Lambda}_k; \mu_p = \alpha, \beta; p = 1, \dots, k \},$$

где $\tilde{n}(\mu_1, \dots, \mu_k)$ — число символов α среди $\mu_1, \dots, \mu_k$; $-(\mu_1, \dots, \mu_k) \stackrel{def}{=} (\mu_2, \dots, \mu_k)$.

В условиях теоремы 3.8, согласно введенным обозначениям, с вероятностью 1 имеем:

$$\eta_s = \tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} + \tilde{R}_{k+1,s,t},$$

где

$$\tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} = \eta_t + \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{\Lambda}_k} {}^{(p_k)} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{ \eta_t \} \cdot {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\mu_k \dots \mu_1)s, t}^*,$$

$$\tilde{R}_{k+1,t} = \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{B}(\tilde{\Lambda}_k)} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_{k-1}} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{ \eta_{\tau_k} \}^{\delta_k} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \dots^{\delta_1} d\mathbf{w}_{\tau_1},$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в теореме 3.8.

Теорема 3.13 [44]. Пусть условия теоремы 3.8 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| B_{\mu_k \dots \mu_1}^{(i_k \dots i_1)} \{ \eta_t \} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+\tilde{n}(\mu_1, \dots, \mu_k)} \left[\frac{1}{2} (k + \tilde{n}(\mu_1, \dots, \mu_k)) \right]!$$

для любого $(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{B}(\tilde{\Lambda}_k)$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$. Тогда для всех $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \eta_t - \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_3 \frac{(C_4(t - t_0))^{k+1}}{\left[\frac{1}{2}(k+1) \right]!}.$$

Из теоремы 3.13 следует, что усеченное разложение Тейлора-Стратоновича $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$ сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито η_t :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t$$

для всех $t \in [t_0, T]$.

Следующая теорема устанавливает равномерную по $t \in [t_0, T]$ сходимости с вероятностью 1 усеченного разложения Тейлора-Стратоновича $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ к процессу Ито η_t .

Теорема 3.14 [44]. Пусть условия теоремы 3.13 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| B_{\mu_k \dots \mu_1}^{(i_k \dots i_1)} \{ \eta_t \} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+\tilde{n}(\mu_1, \dots, \mu_k)}$$

для любого $(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{\mathcal{M}}$. Тогда усеченное разложение Тейлора-Стратоновича $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$ сходится при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1 к процессу Ито η_t :

$$\eta_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \sum_{(\mu_1, \dots, \mu_k) \in \tilde{\mathcal{M}}} B_{\mu_k \dots \mu_1}^{(p_k)} \{ \eta_{t_0} \}^{\cdot p_k} J_{(\mu_k \dots \mu_1)t, t_0}^*.$$

В заключение этого параграфа отметим, что на практике для построения численных методов обычно используются несколько первых

приближений разложения Тейлора-Ито или Тейлора-Стратоновича, т.е. число k невелико (обычно $k \leq 5$). Поэтому наиболее важной характеристикой отдельного члена стохастического разложения является его малость по приращению времени, а не по индексу k . Несмотря на это обстоятельство, результаты, приведенные в этом и предыдущем параграфах, представляют интерес с теоретической точки зрения.

3.9. Примеры разложений в ряды Тейлора-Ито

3.9.1. Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито

Приведем примеры разложений решений скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито в ряды Тейлора-Ито, используя следующее обозначение:

$$I_{t_1 \dots t_{k,s,t}} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - \tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \dots df_{\tau_k} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (3.69)$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ – случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (3.69); $a, b \in \mathbb{R}^1$ – постоянные; $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный скалярный винеровский процесс.

Упражнение 3.1. Показать, что унифицированное разложение Тейлора-Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t – решение стохастического дифференциального уравнения (3.69), до малых $O(t^3)$ при $t \rightarrow 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_t = x_0 \{ & 1 + bI_{0,t,0} + at + b^2I_{00,t,0} + \\ & + abtI_{0,t,0} + b^3I_{000,t,0} + 2^{-1}a^2t^2 + \\ & + ab^2tI_{00,t,0} + b^4I_{0000,t,0} + ab^3tI_{000,t,0} + \end{aligned}$$

$$+2^{-1}ba^2t^2I_{0,t,0} + b^5I_{00000,t,0}\} + \\ +H_{6,t,0} \text{ с в.1,} \quad (3.70)$$

где случайный процесс $H_{6,t,0}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\sqrt{M\{(H_{6,t,0})^2\}} \leq C_6t^3; \quad C_6 = \text{const} < \infty.$$

Разложение (3.70) может быть получено и другим способом. Поскольку решение стохастического дифференциального уравнения (3.69) имеет вид:

$$x_t = x_0 e^{(a-\frac{1}{2}b^2)t+bf_t}, \quad (3.71)$$

где $t \in [0, T]$, то в предположении о том, что момент времени t находится в малой окрестности нуля, мы можем разложить правую часть (3.71) в ряд Тейлора вблизи нуля. Соответствующее разложение имеет вид:

$$x_t = x_0 e^{(a-\frac{1}{2}b^2)t+bf_t} = x_0 e^{(a-\frac{1}{2}b^2)t} e^{bf_t} = \\ = x_0 \left(1 + \left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)^2 t^2 + \dots\right) \times \\ \times \left(1 + bf_t + \frac{1}{2}b^2 f_t^2 + \frac{1}{6}b^3 f_t^3 + \frac{1}{24}b^4 f_t^4 + \frac{1}{120}b^5 f_t^5 + \dots\right) \text{ с в.1.} \quad (3.72)$$

Перепишем (3.72) в виде:

$$x_t = x_0 \left(1 + bf_t + at + \frac{1}{2!}b^2(f_t^2 - t) + \right. \\ + abf_t + \frac{1}{3!}b^3(f_t^3 - 3tf_t) + \frac{1}{2}a^2t^2 + \\ + \frac{1}{2}ab^2t(f_t^2 - t) + \frac{1}{4!}b^4(f_t^4 - 6tf_t^2 + 3t^2) + \\ + \frac{1}{3!}ab^3t(f_t^3 - 3tf_t) + \frac{1}{2}a^2bt^2f_t + \\ \left. + \frac{1}{5!}b^5(f_t^5 - 10f_t^3t + 15t^2f_t)\right) + H_{6,t,0} \text{ с в.1.} \quad (3.73)$$

В конце главы 4, в частности, будут с вероятностью 1 получены следующие формулы для повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_{0,t,0} = f_t,$$

$$I_{00t,0} = \frac{1}{2!} b^2 (f_t^2 - t),$$

$$I_{000t,0} = \frac{1}{3!} b^3 (f_t^3 - 3t f_t),$$

$$I_{0000t,0} = \frac{1}{4!} b^4 (f_t^4 - 6t f_t^2 + 3t^2),$$

$$I_{00000t,0} = \frac{1}{5!} b^5 (f_t^5 - 10f_t^3 t + 15t^2 f_t).$$

Подставляя эти формулы в (3.73), придем к разложению Тейлора-Ито (3.70). Важно отметить, что рассмотренный пример представляет собой тот случай, когда унифицированное разложение Тейлора-Ито и разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена идентичны.

Рассмотрим линейное стационарное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$dx_t = ax_t dt + b df_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (3.74)$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ – случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ как решение стохастического дифференциального уравнения Ито (3.74); $a, b \in \mathbb{R}^1$ – постоянные; $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный скалярный винеровский процесс.

Упражнение 3.2. Показать, что унифицированное разложение Тейлора-Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t – решение стохастического дифференциального уравнения (3.74), до малых $O(t^{r+1})$ при $t \rightarrow 0$ имеет вид:

$$x_t = \sum_{j=0}^r \frac{a^j (s-t)^j}{j!} x_t + b \sum_{l=0}^r \frac{a^l}{l!} I_{l,0} + H_{r+1,0} \quad \text{с в.1}, \quad (3.75)$$

где случайный процесс $H_{r+1,0}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\sqrt{M \left\{ (H_{r+1,0})^2 \right\}} \leq C_{r+1} t^{(r+1)/2}; \quad C_{r+1} = \text{const} < \infty.$$

Нетрудно видеть, что решение стохастического дифференциального уравнения Ито (3.74) имеет вид:

$$x_t = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} df_\tau. \quad (3.76)$$

Будем предполагать, что момент времени t принадлежит малой окрестности нуля. Тогда разложив экспоненты, входящие в (3.76), в ряд Тейлора в окрестности момента времени t , получим в точности разложение Тейлора-Ито вида (3.75).

3.9.2. Разложения Тейлора-Ито для решений некоторых многомерных стохастических дифференциальных уравнений Ито

Приведем примеры многомерных стохастических систем и разложений Тейлора-Ито их решений.

Рассмотрим стохастический вариант уравнения Матье в технической форме записи:

$$\frac{d^2\varphi_t}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d\varphi_t}{dt} + (c + \varepsilon \mathbf{f}_t^{(1)}) = \mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (3.77)$$

где $\varphi_t \in \mathbb{R}^1$ – случайный процесс, являющийся решением уравнения (3.77); $\mathbf{f}_t^{(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{(2)}$ – скалярные независимые гауссовские белые шумы; c и ε – постоянные. Перепишем (3.77) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} \\ -c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} & 1 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.78)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{d\varphi_t}{dt}$, $\mathbf{x}_t^{(2)} = \frac{d^2\varphi_t}{dt^2}$; $\mathbf{f}_t^{(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{(2)}$ – скалярные независимые стандартные винеровские процессы.

Упражнение 3.3. Показать, что унифицированное разложение Тейлора-Ито для компонент $\mathbf{x}_t^{(1)}$ и $\mathbf{x}_t^{(2)}$ решения системы (3.78) до малых $O((s-t)^{\frac{5}{2}})$ при $s \rightarrow t$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t)\mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{1,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(2)} - \\ & - \varepsilon (s-t)\mathbf{x}_t^{(1)} I_{0,s,t}^{(1)} + (s-t)I_{0,s,t}^{(2)} + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left(-c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + H_{5,s,t}^{(1)} \text{ с в.1,} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{0,s,t}^{(1)} + I_{0,s,t}^{(2)} + (s-t) \left(-c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\varepsilon \mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) I_{1s,t}^{(1)} - \varepsilon^2 I_{1s,t}^{(2)} + \varepsilon^3 (s-t) \mathbf{x}_t^{(1)} I_{0s,t}^{(1)} - \varepsilon^2 (s-t) I_{0s,t}^{(2)} + \\
& + \frac{(s-t)^2}{2} \left(-c \mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^2 \left(c \mathbf{x}_t^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right) - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{01s,t}^{(11)} + \\
& + \varepsilon I_{01s,t}^{(21)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{10s,t}^{(11)} - \varepsilon I_{10s,t}^{(21)} + H_{5s,t}^{(2)} \text{ с в.1.}
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений Лоренца со стохастическим возмущением в форме многомерного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \mathbf{x}_t^{(1)} + a \mathbf{x}_t^{(2)} \\ r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \\ -b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$ – компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathfrak{R}^3$ уравнения (3.79); $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, 2, 3$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы; a , r , b , c – постоянные.

Упражнение 3.4. Показать, что унифицированное разложение Тейлора-Ито для компонент $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ и $\mathbf{x}_t^{(3)}$ решения системы (3.79) до малых $O((s-t)^{\frac{7}{2}})$ при $s \rightarrow t$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(1)} &= \mathbf{x}_t^{(1)} + a(s-t) \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \\
& + a \frac{(s-t)^2}{2} \left[-a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right] - \\
& - a c \mathbf{x}_t^{(1)} \left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1s,t}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2s,t}^{(3)} \right] + \\
& + a \frac{(s-t)^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(a + r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - \right. \\
& \left. - (a+1) \left(r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - \mathbf{x}_t^{(1)} \left(-b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + H_{7s,t}^{(1)} \text{ с в.1,} \\
& (3.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(2)} &= \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t) \left(r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - c \mathbf{x}_t^{(1)} \left(I_{1s,t}^{(3)} + (s-t) I_{0s,t}^{(3)} \right) + \\
& + \frac{(s-t)^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - r \mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \left(-b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \Big] + \\
& + \left(a \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + c(1+b) \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\
& + ac \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(I_{2,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} \right) + \\
& + \frac{(s-t)^3}{6} \left\{ a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left[-(a+1) \left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) + b \mathbf{x}_t^{(3)} - 2 \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right] + \right. \\
& + \left(r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left(\left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) a + 1 - \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) + \\
& + \left. \left(-b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(a \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \mathbf{x}_t^{(1)} (1+b) \right) \right\} + H_{7,s,t}^{(2)} \text{ с в.1, (3.81)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(3)} &= \mathbf{x}_t^{(3)} + c I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) \left(-b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) - bc \left(I_{1,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{0,s,t}^{(3)} \right) + \\
& + \frac{(s-t)^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} + \left(r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} - \right. \\
& - \left. b \left(-b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + \\
& + c \left(b^2 - \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) \left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\
& + \frac{(s-t)^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(-a \mathbf{x}_t^{(2)} + r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \right. \right. \\
& - \left. \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - b \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \\
& + \left(r \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left(-a \mathbf{x}_t^{(1)} + 2a \mathbf{x}_t^{(2)} - (1+b) \mathbf{x}_t^{(1)} \right) + \\
& + \left. \left(-b \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(b^2 - \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) \right] + H_{7,s,t}^{(3)} \text{ с в.1. (3.82)}
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений Ресслера [30] со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e \mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \quad (3.83)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \mathbf{x}_t^{(3)} \in \mathbb{R}^1$ – компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ системы (3.83); $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; e, f, μ, c – постоянные.

Упражнение 3.5. Показать, что унифицированное разложение Тейлора-Ито для компонент решения $\mathbf{x}_t$ системы (3.83) до малых порядка $O((s-t)^{5/2})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t) \left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) + c\mathbf{x}_t^{(3)} \left[(s-t)I_{0,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(1)} \right] + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[-\mathbf{x}_t^{(1)} - e\mathbf{x}_t^{(2)} - f - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} + \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \right] - \\ & - c^2\mathbf{x}_t^{(3)} \left[I_{01,s,t}^{(11)} + (s-t)I_{00,s,t}^{(11)} \right] + H_{5,s,t}^{(1)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(2)} = & \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t) \left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \frac{(s-t)^2}{2} \left[-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} + \right. \\ & \left. + e \left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + H_{5,s,t}^{(2)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(3)} = & \mathbf{x}_t^{(3)} - c\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0,s,t}^{(1)} + (s-t) \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \right) + \\ & + c^2\mathbf{x}_t^{(3)}I_{00,s,t}^{(11)} + c\mathbf{x}_t^{(3)} \left(\mu - \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[(s-t)I_{0,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(1)} \right] + \\ & + c \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \right) I_{1,s,t}^{(1)} - c^3\mathbf{x}_t^{(3)}I_{000,s,t}^{(111)} + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[\left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \mathbf{x}_t^{(3)} + \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mu \right) \right] + \\ & + c^2\mathbf{x}_t^{(3)} \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mu \right) \left[I_{10,s,t}^{(11)} - I_{01,s,t}^{(11)} \right] - c^2 \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \right) I_{10,s,t}^{(11)} - \\ & - c^2\mathbf{x}_t^{(3)} \left(\mu - \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[I_{01,s,t}^{(11)} + (s-t)I_{00,s,t}^{(11)} \right] + c^4\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0000,s,t}^{(1111)} + H_{5,s,t}^{(3)} \text{ с в.1.} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки-Вольтерра для динамики численностей двух конкурирующих видов или для динамики концентраций двух реагирующих химических веществ:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(k_1 + a_1\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \left(k_2 + a_2\mathbf{x}_t^{(1)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1\mathbf{x}_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ – численности видов (концентрации веществ); k_1, k_2 – коэффициенты роста численностей видов (концентраций веществ); a_1, a_2 – коэффициенты гибели видов (уменьшения концентраций веществ); σ_1, σ_2 – коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}$, $\mathbf{f}_t^{(2)}$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы.

Упражнение 3.6. Показать, что унифицированное разложение Тейлора-Ито до малых 2-го порядка для процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ в окрестности момента времени t имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} \left[1 + \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) (s - t) + \right. \\ & + \sigma_1 \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left((s - t) I_{0,s,t}^{(1)} + 2 I_{1,s,t}^{(1)} \right) + \\ & + a_1 \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \left((s - t) I_{0,s,t}^{(2)} + I_{1,s,t}^{(2)} \right) + \sigma_1 I_{0,s,t}^{(1)} + \\ & \left. + \sigma_1^2 I_{00,s,t}^{(11)} + \sigma_1^3 I_{000,s,t}^{(111)} \right] + H_{4,s,t}^{(1)} \text{ с.в.1,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(2)} = & \mathbf{x}_t^{(2)} \left[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) (s - t) + \right. \\ & + \sigma_2 \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left((s - t) I_{0,s,t}^{(2)} + 2 I_{1,s,t}^{(2)} \right) + \\ & + a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} \left((s - t) I_{0,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(1)} \right) + \sigma_2 I_{0,s,t}^{(2)} + \\ & \left. + \sigma_2^2 I_{00,s,t}^{(22)} + \sigma_2^3 I_{000,s,t}^{(222)} \right] + H_{4,s,t}^{(2)} \text{ с.в.1.} \end{aligned}$$

Глава 4

Методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов

В данной главе в основном рассматриваются методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Рассмотрен метод разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье, который позволяет представлять эти интегралы в виде кратных рядов из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Произведено сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье, с менее общими методами – методом Г.Н.Мильштейна и методом, основанном на многочленах Эрмита. Выведено два семейства аналитических формул для вычисления стохастических интегралов по процессам Ито. Рассмотрен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах.

4.1. Введение

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ – случайный процесс, являющийся решением уравнения (4.1); неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям AI–AIII (см. главу 1) существования и единственности, в смысле стохастической эквивалент-

ности, решения уравнения (4.1); $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m - \mathcal{F}_t$ измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$; случайная величина $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ стохастически независима от приращений $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$.

Из результатов главы 3 следует, что при определенных условиях гладкости функций $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ и при выполнении определенных моментных условий для процессов $\mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}_t, t)$ решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4.1) разлагается [52, 53] в унифицированные ряды Тейлора-Ито, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито:

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} \quad (4.2)$$

или

$$J_{l_1 \dots l_k T, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (T - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.3)$$

где $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$; $k = 1, 2, \dots$; $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$, а также разлагается [42, 44, 50] в ряды Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и ряды Тейлора-Стратоновича, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) T, t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)} \quad (4.4)$$

и

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) T, t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (4.5)$$

соответственно, где здесь и далее $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_l = 1$ при $i_l = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$ и $\lambda_l = 0$ при $i_l = 0$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$.

В связи с этим проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, возникающая при решении широкого круга задач электродинамики, стохастической механики, финансовой математики, теории управления и других дисциплин [50] (см. также главу 1), сводится к совместному численному моделированию систем повторных стохастических интегралов вида (4.2) – (4.5).

Учитывая все сказанное, мы будем интересоваться в данной главе в основном аппроксимацией систем повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито вида:

$$\int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.6)$$

$$\int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.7)$$

где $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \dots, k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Кратко коснемся истории вопроса о методах аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (4.6) и (4.7).

В литературе [47] (см. также [54]) известен, предложенный Г.Н.Мильштейном, метод разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (4.6) в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Этот метод основывается на покомпонентном разложении так называемого процесса "броуновского моста" вида: $\mathbf{f}_t - \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta \in \mathcal{R}^m$, определенного при $t \in [0, \Delta]$, $\Delta > 0$ в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами. Для получения разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.6) в кратный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин по методу Г.Н.Мильштейна необходимо осуществить итеративный процесс, начиная с внутренних интегралов в (4.6), подстановки с последующим интегрированием разложений Фурье компонент винеровского процесса $\mathbf{f}_t$. Эта процедура является достаточно сложной и не приводит [47, 54] к общей формуле разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича произвольной кратности k . В результате в [47, 54] известны лишь разложения повторных стохастических интегралов вида (4.5) кратностей $1 \div 3$, при этом в работе [47] – кратностей 1 и 2, а в работе [54] – кратностей $1 \div 3$.

В работах [57 – 63] получен другой и существенно более общий метод разложения повторных стохастических интегралов вида (4.6) в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских случайных величин, который основан на представлении повторного стохастического интеграла вида (4.6) в виде кратного стохастического интеграла от специальной разрывной неслучайной функции многих переменных с

последующим разложением этой функции в кратный ряд Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t, T])$ системам функций. В результате можно получить общую формулу разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.6) произвольной кратности k в кратный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Далее будем называть описанный метод – методом, основанным на кратных рядах Фурье. В дальнейшем будет показано, что метод, основанный на кратных рядах Фурье, дает, в случае тригонометрической системы функций, такие же разложения стохастических интегралов вида (4.6), как и метод Г.Н.Мильштейна, а в случае полиномиальной системы функций дает разложения стохастических интегралов вида (4.6), которые сходятся в среднеквадратическом смысле существенно быстрее и гораздо проще по виду, чем аналогичные разложения, полученные методом Г.Н.Мильштейна.

Отметим некоторые преимущества метода, основанного на кратных рядах Фурье.

1. Метод, основанный на кратных рядах Фурье, допускает применение различных полных ортонормированных в пространстве $L_2([t, T])$ систем функций, а метод Г.Н.Мильштейна – только тригонометрической системы.

2. Метод, основанный на кратных рядах Фурье, дает возможность получить явную общую формулу для коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича произвольной кратности k . Метод Г.Н.Мильштейна допускает лишь возможность получения такой формулы, однако из-за громоздкости преобразований, на которых он основан, она не была получена. В результате в [47, 50, 54] известны разложения методом Г.Н.Мильштейна лишь для повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (4.5) кратностей $1 \div 3$.

3. Метод, основанный на кратных рядах Фурье, сводит проблему разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича к вычислению по явным формулам коэффициентов Фурье для специальных разрывных функций многих переменных. Эти коэффициенты могут вычисляться как аналитически, так и численно. Метод Г.Н.Мильштейна практически исключает возможность применения вычислительных процедур для определения коэффициентов разложе-

ния.

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида (4.7) в литературе иногда применяют методы "прямоугольников" или "трапеций" (см. например [47]). Однако эти методы сходятся в несколько раз медленнее в среднеквадратическом смысле, чем метод Г.Н.Мильштейна [47] и тем более, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье. В конце главы 4 будет рассматриваться обобщение при $k > 2$ метода "прямоугольников" [47] для стохастических интегралов вида (4.7), которое называется здесь методом, основанным на кратных интегральных суммах.

В литературе [37, 38, 50] известен метод представления стохастических интегралов (4.6), (4.7) при $i_1 = \dots = i_k \neq 0$, $\psi_1(\tau) = \dots = \psi_k(\tau)$, а также стохастических интегралов несколько более общего вида, в виде многочленов конечных степеней от одной гауссовской случайной величины. Этот метод рассматривается в конце данной главы и является, в случае стохастических интегралов (4.6), частным случаем метода Г.Н.Мильштейна и метода, основанного на кратных рядах Фурье.

В ряде задач требуется вычислить стохастический интеграл, берущийся не по винеровскому процессу, а по процессу Ито более общего вида, например, решению некоторого стохастического дифференциального уравнения Ито. В работе [64] получено два семейства аналитических формул для вычисления таких стохастических интегралов по процессам Ито. Большинство из этих формул приводится в данной главе.

В конце четвертой главы введено понятие повторного симметризованного стохастического интеграла по пуассоновским процессам и доказана теорема о его разложении в кратный ряд из произведений пуассоновских случайных величин. Введенный интеграл можно рассматривать как пуассоновский аналог повторного стохастического интеграла Стратоновича.

Отметим также, что в главе 4 рассматриваются только методы сильной аппроксимации стохастических интегралов (методы слабой аппроксимации см. например в [47, 50]).

4.2. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье

Из названия настоящего параграфа ясно, что в нем речь пойдет о разложении функционалов интегрального типа от винеровского процесса в ряды из произведений стандартных гауссовских величин. Однако предлагаемый здесь подход отличается от известного подхода, позволяющего разложить гильбертов случайный процесс, т.е. среднеквадратически непрерывный процесс с конечным вторым моментом, в ряд из некоррелированных случайных величин. Сначала напомним суть этого подхода и поясним, почему его прямое использование является неэффективным для наших дальнейших целей.

Известно (см. например [3]), что измеримый, среднеквадратически непрерывный и имеющий конечный второй момент случайный процесс ξ_τ , $\tau \in [t, T]$ может быть разложен в ряд вида:

$$\xi_\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \phi_j(\tau), \quad (4.8)$$

сходящийся в $L_2([t, T])$ при всех $\tau \in [t, T]$. В разложении (4.8): ζ_j – некоррелированные случайные величины, $M\{|\xi_\tau|^2\} = \lambda_j$, λ_j – собственные числа, а $\phi_j(\tau)$ – собственные функции ковариации $R_\xi(t_1, t_2)$ процесса ξ_τ . При этом, если процесс ξ_τ гауссовский и $M\{\xi_\tau\} = 0$, то ζ_j в (4.8) – независимые гауссовские случайные величины и ряд (4.8) сходится с вероятностью 1 при всех $\tau \in [t, T]$.

Из сказанного следует, что если мы хотим разложить с помощью изложенного подхода совокупность из нескольких зависимых случайных процессов $\xi_\tau^{(1)}, \dots, \xi_\tau^{(n)}$ и притом негауссовских в ряды типа (4.8), то системы случайных величин, соответствующие разным процессам $\xi_\tau^{(j)}$, будут зависимыми и притом, возможно, сложным образом. Это обстоятельство, а также то, что нахождение собственных функций ковариаций процессов $\xi_\tau^{(j)}$ далеко не всегда возможно аналитически, делает затруднительным прямое применение данного подхода для моделирования совокупностей повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича.

Несмотря на описанные трудности в попытке "напрямую" применить ряды типа (4.8) для аппроксимации совокупностей повторных

стохастических интегралов, существует метод Г.Н.Мильштейна, который позволяет определенным образом использовать ряды типа (4.8) для процесса "броуновского моста" с целью аппроксимации повторных стохастических интегралов. Этот метод будет рассматриваться в конце данной главы.

Далее же в настоящем параграфе будет рассматриваться другой подход, названный методом, основанным на кратных рядах Фурье, который позволит разлагать любую конечную совокупность повторных стохастических интегралов из разложений Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича в кратные ряды по системе $\{\zeta_j^{(i)}\}_{j=0}^{\infty}; i = 1, \dots, m$ из независимых при различных i или j стандартных гауссовских случайных величин.

4.2.1. Соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича

Пусть выполнены условия:

AI. $\mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m - \mathcal{F}_\tau$ измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}; i = 1, \dots, m$.

AII. $\psi_j(\tau); j = 1, \dots, k$ - непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_l, \dots, s_1} &\stackrel{def}{=} \prod_{p=1}^l \mathbf{1}_{\{i_{s_p} = i_{s_p+1} \neq 0\}} \times \\
 &\times \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times \\
 &\times \int_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1}) \psi_{s_1+1}(t_{s_1+1}) \times \\
 &\times \int_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} dt_{s_1+1} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \dots \\
 &\dots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l+1} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.10)$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.11)$$

где в (4.9)-(4.11) введены обозначения: $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_k, \dots, \psi_1)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$,

$$\mathcal{A}_{k,l} = \{(s_l, \dots, s_1) : s_l > s_{l-1} + 1, \dots, s_2 > s_1 + 1; \\ s_l, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1\}, \quad (4.12)$$

$(s_l, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,l}$; $l = 1, \dots, [\frac{k}{2}]$; $i_s = 0, 1, \dots, m$; $s = 1, \dots, k$; $[x]$ — целая часть числа x . Отметим, что далее наряду с этими сокращенными обозначениями, там где это необходимо, будут использоваться более развернутые обозначения.

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ произвольной кратности k .

Теорема 4.1. Пусть условия AI и AII выполнены. Тогда справедливо следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \text{ с в.п.} \quad (4.13)$$

Доказательство: Нетрудно по индукции проверить, что в условиях теоремы существуют повторные стохастические интегралы $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}$, входящие в (4.13). Докажем равенство (4.13) по индукции. Рассмотрим случай $k = 1$. Согласно (4.13) с вероятностью 1 имеем:

$$J[\psi_1]_{T,t} = J^*[\psi_1]_{T,t}. \quad (4.14)$$

Соотношение (4.14) является очевидным. При $k = 2$ из (4.13) с вероятностью 1 получаем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} J[\psi^{(2)}]_{T,t}^1. \quad (4.15)$$

Покажем, что равенство (4.15) справедливо с вероятностью 1. Для этого рассмотрим процесс $\eta_{t_2,t} = \psi_2(t_2)J[\psi_1]_{t_2,t}$ и найдем с помощью

формулы Ито (лемма 1.1) его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2,t} = J[\psi_1]_{t_2,t} d\psi_2(t_2) + \psi_1(t_2)\psi_2(t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}. \quad (4.16)$$

Из равенства (4.16) следует, что диффузионный коэффициент процесса $\eta_{t_2,t}$ равен $\mathbf{1}_{\{i_1 \neq 0\}} \psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Далее непосредственно с помощью леммы 1.6 получаем с вероятностью 1 соотношение (4.15). Таким образом, утверждение теоремы доказано при $k = 1, 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k > 2$, и докажем его справедливость при значении k на единицу больше. Воспользовавшись предположением индукции с вероятностью 1 имеем:

$$\begin{aligned} & J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = \\ &= \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) \left\{ J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} \right\} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k+1})} = \\ &= \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k+1})} + \\ &+ \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k+1})}. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Используя формулу Ито (лемма 1.1) и лемму 1.6 с вероятностью 1, получаем:

$$\int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k+1})} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \frac{1}{2} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^k, \quad (4.18)$$

$$\int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_{k+1})} = \begin{cases} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} & \text{при } s_r = k-1 \\ J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} + \frac{1}{2} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{k, s_r, \dots, s_1} & \text{при } s_r < k-1 \end{cases} \quad (4.19)$$

После подстановки (4.18) и (4.19) в (4.17) и перегруппировки слагаемых приходим к справедливым с вероятностью 1 соотношениям:

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \quad (4.20)$$

при k -четном и

$$J^*[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k'}{2}\right]+1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k'+1,r}} J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \quad (4.21)$$

при $k' = k+1$ - нечетном. Из (4.20) и (4.21) с вероятностью 1 получаем:

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 4.1. Результат теоремы 4.1 при $k=1-4$ для стохастических интегралов несколько иного вида, чем $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ является известным [50]. Обобщение этих результатов на случай произвольного k приводится здесь впервые.

Замечание 4.2. Результат теоремы 4.1 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ в (4.13) может быть заменена на случайный процесс ϕ_s из класса $\mathcal{M}_2([t, T])$.

Замечание 4.3. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 4.1 с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \theta^r \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}, \quad (4.23)$$

где $\theta \in [0, 1]$; $J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t}$ - повторный стохастический θ - интеграл вида:

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{\circ T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{\circ t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

а остальные обозначения, входящие в (4.23), такие же, как в теореме 4.1.

Доказательство (4.23) повторяет доказательство теоремы 4.1 с заменой, в соответствующих местах, $\frac{1}{2}$ на θ .

4.2.2. Разложение повторных интегралов Стратоновича в кратные ряды из произведений стандартных гауссовских величин

Определим на гиперкубе $[t, T]^k$ функцию:

$$K(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \quad k \geq 2. \quad (4.24)$$

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$.

Определим класс $H([t, T]) \subset L_2([t, T])$ кусочно-гладких на открытом интервале (t, T) и ограниченных на промежутке $[t, T]$ функций $f(x)$, для которых ряд Фурье $\sum_{j=0}^\infty C_j \phi_j(x)$ с коэффициентами $C_j = \int_t^T f(x) \phi_j(x) dx$ сходится во всякой внутренней точке x промежутка $[t, T]$ к величине $\frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0))$ и равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$, а также сходится при $x = t, T$.

Замечание 4.4. *Здесь и далее сходимость рядов Фурье понимается в смысле нормы в пространстве $L_2([t, T])$.*

Определим функции $C_{j_{q-1} \dots j_1}(t_q, \dots, t_k)$; $q = 1, \dots, k$ следующим образом:

$$C_{j_{q-1} \dots j_1}(t_q, \dots, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[t, T]^{q-1}} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^{q-1} \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_{q-1}; \quad 2 \leq q \leq k,$$

$$C_{j_0 \dots j_1}(t_1, \dots, t_k) \stackrel{\text{def}}{=} K(t_1, \dots, t_k).$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия:*

1. $\psi_i(\tau)$; $i = 1, \dots, k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции;

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$;

3. $G_{j_{q-1} \dots j_1}(t_q, \dots, t_k) \in H([t, T])$ по переменной t_q ; $q = 1, \dots, k$.

Тогда повторный интеграл Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ разлагается

в следующий сходящийся в среднем степени n ; $n \in N$ кратный ряд

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \quad (4.25)$$

где $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ – стандартные гауссовские величины при различных i_l или j_l (если $i_l \neq 0$);

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k. \quad (4.26)$$

Для доказательства теоремы 4.2 докажем ряд утверждений.

Определим функцию $B_{k-1}^{\pm}\{K(t_1, \dots, t_k)\}$ на гиперкубе $[t, T]^k$ следующим образом:

$$B_{k-1}^{\pm}\{K(t_1, \dots, t_k)\} = K(t_1, \dots, t_k) + \\ + \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} \frac{1}{g(s_1, \dots, s_r)} \prod_{l=1}^r \mathbf{1}_{\{t_l=t_{s_l+1}\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_1, \dots, s_r}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \quad (4.27)$$

где $g(s_1, \dots, s_r) = (q_1 + 1)! \dots (q_{p_k} + 1)!$; $p_k = 1, 2, \dots, [\frac{k}{2}]$; $q_1, \dots, q_{p_k}$ – длины всех возможных подпоследовательностей типа g , $g = 1, \dots, k-1$; $m = 0, 1, \dots, k-2$, входящих в последовательность $s_r, \dots, s_1$; $s_r > \dots > s_1$; $s_r, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1$.

В частности, из (4.27) при $k = 2$ и 3 получаем:

$$B_1^{\pm}\{K(t_1, t_2)\} = \prod_{l=1}^2 \psi_l(t_l) \left(\mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \right), \\ B_2^{\pm}\{K(t_1, t_2, t_3)\} = \prod_{l=1}^3 \psi_l(t_l) \left(\mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} + \frac{1}{6} \mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} \right).$$

Теорема 4.3. В условиях теоремы 4.2 функция $B_{k-1}^{\pm}\{K(t_1, \dots, t_k)\}$ разлагается в любой внутренней точке гиперкуба $[t, T]^k$ в следующий кратный ряд Фурье

$$B_{k-1}^{\pm}\{K(t_1, \dots, t_k)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l), \quad (4.28)$$

где $C_{j_k \dots j_1}$ имеет вид (4.26). При этом кратный ряд (4.28) сходится на границе Γ_k гиперкуба $[t, T]^k$ и сходится равномерно к функции $B_{k-1}^\pm \{K(t_1, \dots, t_k)\}$ в областях ее непрерывности.

Доказательство: Рассмотрим случаи $k = 2$ и 3. Введем следующие функции:

$$K'(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases}; \quad t_1, t_2 \in [t, T],$$

$$K_1(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 \leq t_3 \\ \psi_1(t_3)\psi_3(t_2)\psi_2(t_1), & t_3 \leq t_1 \leq t_2 \\ \psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_3 \leq t_2 \\ \psi_1(t_3)\psi_2(t_2)\psi_3(t_1), & t_3 \leq t_2 \leq t_1 \\ \psi_2(t_3)\psi_1(t_2)\psi_3(t_1), & t_2 \leq t_3 \leq t_1 \end{cases}; \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T],$$

$$K_2(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 \leq t_3 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T],$$

$$K_3(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_3 \leq t_2 \\ \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 \leq t_3 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}; \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T].$$

Докажем теорему при $k = 2$. Очевидно, что ряд Фурье $S(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \prod_{l=1}^2 \phi_{j_l}(t_l)$ равномерно сходится к функции $K(t_1, t_2)$ при $t_1 \neq t_2$; $t_1, t_2 \in (t, T)$, т.е. в точках непрерывности функции $K(t_1, t_2)$ и конечен на границе $[t, T]^2$. Таким образом, остается показать, что $S(t_1, t_1) = \frac{1}{2} \prod_{l=1}^2 \psi_l(t_1)$; $t_1 \in (t, T)$. Рассмотрим разложение Фурье $S'(t_1, t_2)$ функции $K'(t_1, t_2)$:

$$S'(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} C'_{j_2 j_1} \prod_{l=1}^2 \phi_{j_l}(t_l), \quad (4.29)$$

где $C'_{j_2 j_1} = \int_{[t, T]^2} K'(t_1, t_2) \prod_{l=1}^2 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2$. Ясно, что $S'(t_1, t_2)$ сходится равномерно к $K'(t_1, t_2)$ во всех внутренних точках $[t, T]^2$, т.к. там $K'(t_1, t_2)$ непрерывна. Кроме этого, в силу замены порядка интегрирования имеем:

$$C'_{j_2 j_1} = C_{j_2 j_1} + C_{j_1 j_2}. \quad (4.30)$$

Подставляя (4.30) в (4.29) и полагая $t_1 = t_2$ в (4.29), получим, что $S'(t_1, t_1) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_1) = 2S(t_1, t_1)$, т.е. $S(t_1, t_1) = \frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)$; $t \in (t, T)$. Теорема доказана при $k = 2$.

Очевидно, что ряд Фурье $S(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l)$ равномерно сходится к функции $K(t_1, t_2, t_3)$ при $t_1 \neq t_2, t_2 \neq t_3, t_1 \neq t_3$; $t_1, t_2, t_3 \in (t, T)$, т.е. в точках непрерывности функции $K(t_1, t_2, t_3)$ и конечен на границе $[t, T]^3$. Таким образом, остается показать, что

$$S(t_1, t_1, t_1) = \frac{1}{6} \prod_{l=1}^3 \psi_l(t_1), \quad (4.31)$$

$$S(t_2, t_2, t_3) = \frac{1}{2} \psi_3(t_3) \prod_{l=1}^2 \psi_l(t_2), \quad (4.32)$$

$$S(t_1, t_3, t_3) = \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \prod_{l=2}^3 \psi_l(t_3). \quad (4.33)$$

Запишем разложения Фурье $S_i(t_1, t_2, t_3)$ функций $K_i(t_1, t_2, t_3)$; $i = 1, 2, 3$ соответственно:

$$S_i(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1}^{(i)} \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l), \quad (4.34)$$

где $C_{j_3 j_2 j_1}^{(i)} = \int_{[t, T]^3} K_i(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3$. Заметим, что $S_1(t_1, t_2, t_3)$ сходится равномерно к $K_1(t_1, t_2, t_3)$ в любой внутренней точке $[t, T]^3$, т.к. там $K_1(t_1, t_2, t_3)$ непрерывна, а ряды $S_2(t_1, t_2, t_3)$, $S_3(t_1, t_2, t_3)$ сходятся равномерно к $K_2(t_1, t_2, t_3)$ и $K_3(t_1, t_2, t_3)$ соответственно в областях их непрерывности, исключая точки границы $[t, T]^3$.

В силу замены порядка интегрирования имеем:

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} = C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_2 j_3 j_1} + C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2}, \quad (4.35)$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(2)} = C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2}, \quad (4.36)$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(3)} = C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_2 j_3 j_1}. \quad (4.37)$$

Подставляя (4.35), (4.36) и (4.37) поочередно в (4.34) при $i = 1, 2, 3$ соответственно и полагая в (4.34) $t_1 = t_2 = t_3$ при $i = 1$, $t_1 = t_2$ при $i = 2$ и $t_2 = t_3$ при $i = 3$, получим путем несложных преобразований

равенства (4.31) – (4.33). Теорема доказана при $k = 3$. Доказательство при $k > 3$ аналогично. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[t, T]$, такое что:

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

Лемма 4.1. *В условиях теоремы 4.1*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \quad (4.39)$$

где $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} = \mathbf{w}_{\tau_{j_l+1}}^{(i_l)} - \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$; $i_l = 0, 1, \dots, m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ – разбиение промежутка $[t, T]$, удовлетворяющее условию (4.38).

Доказательство: Согласно (2.9), имеем:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \psi_1(\tau_l) \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_1)} \text{ с в.1,} \quad (4.40)$$

где

$$G[\psi^{(k)}]_{N,0} = \sum_{j_1=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{j_{k-2}-1} \prod_{p=1}^{k-1} J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}}, \quad J[\psi_p]_{s,\theta} = \int_{\theta}^s \psi_p(\tau) d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_p)}. \quad (4.41)$$

Представим $J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}}$ в виде:

$$J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}} = \psi_p(\tau_{j_p}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_p}}^{(i_p)} + \int_{\tau_{j_p}}^{\tau_{j_p+1}} (\psi_p(\tau) - \psi_p(\tau_{j_p})) d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_p)}$$

и подставим в (4.41), а (4.41) в (4.40). После этого нетрудно заметить, что преобразованное допредельное выражение в правой части (4.40) представимо в условиях леммы в виде допредельного выражения в правой части (4.39) и величины, которая стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ в среднеквадратическом смысле. Лемма доказана. $\square$

Замечание 4.5. *Результат леммы 4.1 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ в (4.39) может быть заменена на случайный процесс ϕ_s из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$.*

Замечание 4.6. *Нетрудно видеть, что если $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (4.39) при некотором $l \in \{1, \dots, k\}$ заменить на $(\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)})^p$, $i_l \neq 0$, то в интеграле*

$J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ дифференциал $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ заменится на dt_l при $p = 2$. Если же $p = 3, 4, \dots$, то правая часть (4.39) обратится с вероятностью 1 в ноль. Если $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (4.39) при некотором $l \in \{1, \dots, k\}$ заменить на $(\Delta \tau_{j_l})^p$: $p = 2, 3, \dots$, то правая часть в (4.39) также обратится с вероятностью 1 в ноль.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{(k)}, \quad (4.42)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} - \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{N-2} \right\} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k}. \quad (4.43)$$

Пусть $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$, а $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$ — граница $\mathcal{D}_k$. Будем писать $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(\mathcal{D}_k)$, если выполнены условия:

VI $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ непрерывно дифференцируема в $\mathcal{D}_k$;

VII $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ ограничена на $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$;

VIII $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ непрерывно продолжима на $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$.

Используя рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства леммы 4.1, нетрудно показать, что если $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(\mathcal{D}_k)$, то

$$\begin{aligned} I[\Phi]_{T,t}^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (4.44)$$

где интеграл в левой части равенства (4.44) понимается как повторный стохастический интеграл Ито.

Введем обозначения:

$$S_N^{(k)}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, \dots, j_k)} a_{(j_1, \dots, j_k)},$$

$$\begin{aligned} C_{s_r}^+ \dots C_{s_1}^+ \{S_N^{(k)}(a)\} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1} \sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1} \dots \sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1} \sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \times \\ &\times \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ i_1, \dots, i_k}} a_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ i_1, \dots, i_k}} \prod_{l=1}^k \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k), \end{aligned}$$

$$\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_{j_{s_r}, j_{s_r+1}} \dots \mathbf{I}_{j_{s_1}, j_{s_1+1}}(j_1, \dots, j_k),$$

$$C_{s_r}^* C_{s_{r-1}}^+ \dots C_{s_1}^+ \{S_N^{(k)}(a)\} \stackrel{\text{def}}{=} C_{s_{r-1}}^+ \dots C_{s_1}^+ \{S_N^{(k)}(a)\} + C_{s_r}^+ \dots C_{s_1}^+ \{S_N^{(k)}(a)\},$$

где

$$C_0^+ \dots C_{s_1}^+ \{S_N^{(k)}(a)\} = S_N^{(k)}(a), \quad \prod_{l=1}^0 \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k) = (j_1, \dots, j_k),$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{I}_{j_l, j_{l+1}}(j_{q_1}, \dots, j_{q_2}, j_l, j_{q_3}, \dots, j_{q_{k-2}}, j_l, j_{q_{k-1}}, \dots, j_{q_k}) \\ & \stackrel{\text{def}}{=} (j_{q_1}, \dots, j_{q_2}, j_{l+1}, j_{q_3}, \dots, j_{q_{k-2}}, j_{l+1}, j_{q_{k-1}}, \dots, j_{q_k}), \end{aligned} \quad (4.45)$$

где $l \in N$; $l \neq q_1, \dots, q_2, q_3, \dots, q_{k-2}, q_{k-1}, \dots, q_k \in N$; $s_1, \dots, s_r = 1, \dots, k-1$; $s_r > \dots > s_1$; $a_{(j_{q_1} \dots j_{q_k})}$ — скаляры; $q_1, \dots, q_k \in \{1, \dots, k\}$; $\sum_{(j_{q_1}, \dots, j_{q_k})}$ — сумма по перестановкам $(j_{q_1}, \dots, j_{q_k})$.

По индукции нетрудно доказать следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1, \dots, j_k)} = C_{k-1}^* \dots C_1^* \{S_N^{(k)}(a)\} = \\ & = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} C_{s_r}^+ \dots C_{s_1}^+ \{S_N^{(k)}(a)\}; \quad k \geq 1, \quad \sum_{\emptyset} \stackrel{\text{def}}{=} 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

В частности, из (4.46) при $k = 2$ получаем хорошо известную формулу:

$$\begin{aligned} & \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1, j_2)} = C_1^* \{S_N^{(2)}(a)\} = S_N^{(2)}(a) + C_1^+ \{S_N^{(2)}(a)\} = \\ & = \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{(j_1 j_2)} + a_{(j_2 j_1)}) + \sum_{j_2=0}^{N-1} a_{(j_2 j_2)}. \end{aligned}$$

Положим $a_{(j_1, \dots, j_k)} = \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$. Тогда из (4.42) и (4.46) имеем:

$$J[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r}+2-1} \sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r}+1-1} \dots \sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1}+2-1} \sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1}+1-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{j_{s_l}, j_{s_l+1}}(j_1, \dots, j_k)} \\
& \times \left[\Phi \left(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_{s_1-1}}, \tau_{j_{s_1+1}}, \tau_{j_{s_1+1}}, \dots, \tau_{j_{s_r-1}}, \tau_{j_{s_r+1}}, \tau_{j_{s_r+1}}, \dots, \tau_{j_k} \right) \right. \\
& \quad \times \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1-1}}}^{(i_{s_1-1})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1+1})} \dots \\
& \quad \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r-1}}}^{(i_{s_r-1})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r})} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r+1})} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)} \left. \right] = \\
& = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \text{ с в.1,} \tag{4.47}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} &= \int_t^T \dots \int_t^{t_{s_r}+3} \int_t^{t_{s_r}+2} \int_t^{t_{s_r}} \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \int_t^{t_{s_1+2}} \int_t^{t_{s_1}} \dots \int_t^{t_2} \sum_{\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)} \\
& \times \left[\Phi \left(t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k \right) \right. \\
& \quad \times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1+1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \dots \\
& \quad \dots d\mathbf{w}_{t_{s_r-1}}^{(i_{s_r-1})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r+1})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+2}}^{(i_{s_r+2})} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \left. \right], \tag{4.48}
\end{aligned}$$

и $\sum_{\emptyset}^{def} 1, k \geq 2$.

Замечание 4.7. Слагаемые в правой части (4.48) следует понимать так: для каждой перестановки из набора $\prod_{l=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)$ следует осуществить замену в правой части (4.48) всех пар (их ровно r штук) дифференциалов с одинаковыми нижними индексами вида $d\mathbf{w}_{t_p}^{(i)} d\mathbf{w}_{t_p}^{(j)}$ на величины $\mathbf{1}_{\{i=j \neq 0\}} dt_p$.

Лемма 4.2. Пусть $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(\mathcal{D}_k)$. Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} \leq C_{nk} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi^{2n}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k; \quad C_{nk} < \infty; \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.49}$$

Доказательство: Используя стандартные оценки стохастических интегралов (см. главу 1) при $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$, имеем

$$\mathbf{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{n-1} (n(2n-1))^n \int_{t_0}^t \mathbf{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t \mathbf{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau. \quad (4.51)$$

Пусть $\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(l)} = \int_t^{t_{l+1}} \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ при $l = 1, \dots, k-1$ и $\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t_1, \dots, t_k)$. По индукции нетрудно показать, что $(\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(l)})^n \in \mathcal{M}_2([t, T])$ по t_{l+1} . Тогда, применяя многократно оценки (4.50), (4.51), придем к утверждению леммы. $\square$

Используя неравенство Минковского и лемму 4.2, получаем из (4.47) следующие оценки:

$$\left(\mathbf{M} \left\{ \left| J[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} \right)^{\frac{1}{2n}} \leq \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \left(\mathbf{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \right|^{2n} \right\} \right)^{\frac{1}{2n}}, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1, \dots, s_r} \right|^{2n} \right\} \right)^{\frac{1}{2n}} \leq \\ & \leq C_{nk}^{s_1 \dots s_r} \left[\int_t^T \dots \int_t^{t_{s_r+3}} \int_t^{t_{s_r+2}} \int_t^{t_{s_r}} \dots \int_t^{t_{s_1+3}} \int_t^{t_{s_1+2}} \int_t^{t_{s_1}} \dots \int_t^{t_2} \sum_{\prod_{i=1}^r \mathbf{I}_{t_{s_i}, t_{s_i+1}}(t_1, \dots, t_k)} \right. \\ & \quad \times \Phi^{2n}(t_1, \dots, t_{s_1-1}, t_{s_1+1}, t_{s_1+1}, \dots, t_{s_r-1}, t_{s_r+1}, t_{s_r+1}, \dots, t_k) \\ & \quad \left. \times dt_1 \dots dt_{s_1-1} dt_{s_1+1} dt_{s_1+2} \dots dt_{s_r-1} dt_{s_r+1} dt_{s_r+2} \dots dt_k \right]^{\frac{1}{2n}}, \quad (4.53) \end{aligned}$$

где перестановки при суммировании в (4.53) осуществляются только в $\Phi^{2n}(\dots)$; $C_{nk}^{s_1 \dots s_r} < \infty$.

Лемма 4.3. В условиях теоремы 4.1

$$J[\mathcal{B}_{k-1}^\pm \{K\}]_{T,t}^{(k)} = J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} \text{ с в.1.} \quad (4.54)$$

Доказательство: Подставляя (4.27) в (4.54), используя лемму 4.1 и замечание 4.6 нетрудно увидеть, что с вероятностью 1

$$J[\mathcal{B}_{k-1}^\pm \{K\}]_{T,t}^{(k)} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}. \quad (4.55)$$

Из (4.55), согласно теореме 4.1, вытекает утверждение леммы. $\square$.

Лемма 4.4. Пусть $|\Phi(t_1, \dots, t_k)| < \infty$ при $(t_1, \dots, t_k) \in [t, T]^k$. Тогда $J[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k} = 0$ с вероятностью 1.

Доказательство: Предположим сначала, что

$$\Phi(t_1, \dots, t_k) = \Phi_1(t_1) \dots \Phi_k(t_k).$$

Тогда интегральная сумма $J[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k}$ состоит из конечной суммы случайных величин $A[\Phi]_N^{(p)} B[\Phi]_N^{(k-p)}$, где

$$A[\Phi]_N^{(p)} = \sum_{s_1, \dots, s_p=1}^{N-2} \prod_{l=1}^p \Phi_{g_l}(\tau_{s_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{s_l}}^{(r_l)},$$

$$B[\Phi]_N^{(k-p)} = \prod_{l=1}^{k-p} \left(\Phi_{g_{l+p}}(\tau_0) \Delta \mathbf{w}_{\tau_0}^{(r_{p+l})} + \Phi_{g_{l+p}}(\tau_{N-1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{N-1}}^{(r_{p+l})} \right),$$

где $A[\Phi]_N^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $\{r_1, \dots, r_k\} = \{i_1, \dots, i_k\}$; $p = 0, 1, \dots, k-1$; $k-p = 1, \dots, k$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\{g_1, \dots, g_k\} = \{1, \dots, k\}$ и при этом

$$\mathbb{M} \left\{ \left| A[\Phi]_N^{(p)} \right|^2 \right\} < \infty.$$

Далее, используя неравенство Минковского и независимость случайных величин $A[\Phi]_N^{(p)}$ и $B[\Phi]_N^{(k-p)}$, нетрудно показать, что $J[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k} = 0$ с вероятностью 1. Если же функция $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ является произвольной ограниченной функцией на $[t, T]^k$, то очевидно доказательство проводится аналогично. $\square$.

Лемма 4.5. Пусть $\varphi_i(s)$; $i = 1, \dots, k$ – непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции. Тогда

$$\prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = J[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в. 1,} \quad (4.56)$$

где

$$J[\varphi_l]_{T,t} = \int_t^T \varphi_l(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}, \quad \Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \varphi_l(t_l).$$

Доказательство: Пусть сначала $i_l \neq 0$; $l = 1, \dots, k$. Обозначим:

$$J[\varphi_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j) \Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i_l)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = \\ & = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{g=1}^{l-1} J[\varphi_g]_{T,t} \right) (J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}) \left(\prod_{g=l+1}^k J[\varphi_g]_N \right), \end{aligned}$$

то в силу неравенств Минковского и Коши-Буняковского

$$\left(\mathbf{E} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} \right|^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \sum_{l=1}^k (\mathbf{M} \{ |J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}|^4 \})^{\frac{1}{4}}, \quad (4.57)$$

где $C_k < \infty$.

Заметим, что

$$J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t} = \sum_{g=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g},$$

где $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g} = \int_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} (\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s)) d\mathbf{w}_s^{(il)}$. Поскольку $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g}$ независимы при различных g , то [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ |J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ |J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbf{M} \{ |J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}|^2 \}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

В силу гауссовости $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}$ имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{ |J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \} &= \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds, \\ \mathbf{M} \{ |J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \} &= 3 \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \right)^2. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и непрерывную дифференцируемость функций $\varphi_i(s)$, получаем, что правая часть (4.58) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Используя этот факт, а также (4.57), приходим к (4.56). Если при некоторых $l \in \{1, \dots, k\}$: $\mathbf{w}_{t_l}^{(il)} = t_l$, то доказательство леммы проводится аналогично. $\square$

В силу лемм 4.3 – 4.5 и теоремы 4.3 имеем:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} + J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1,} \quad (4.59)$$

где $J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)}$ определен в соответствии с (4.42) и

$$R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) = \left\{ \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} \right\} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l), \quad (4.60)$$

$$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}.$$

При этом согласно теореме 4.3 при $(t_1, \dots, t_k) \in [t, T]^k \setminus \Gamma_k$

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty} R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) = 0. \quad (4.61)$$

Замечание 4.8. Равенство (4.61) выполняется согласно теореме 4.3 равномерно в областях непрерывности функции $R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k)$ и предел в левой части (4.61) конечен на Γ_k .

Лемма 4.6 В условиях теоремы 4.2

$$\lim_{p_1 \rightarrow \infty} \dots \lim_{p_k \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left\{ \left| J[R_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} = 0, \quad n \in N. \quad (4.62)$$

Доказательство: Согласно (4.27), (4.28) и (4.60) имеем:

$$\begin{aligned} R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) &= K(t_1, \dots, t_k) + \\ &+ \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} \frac{1}{g(s_1, \dots, s_r)} \prod_{l=1}^r \mathbf{1}_{\{t_{s_l}=t_{s_l+1}\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_1, \dots, s_r}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} - \\ &- \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l). \end{aligned} \quad (4.63)$$

В силу (4.63) функция $R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k)$ удовлетворяет условиям VI–VIII в областях интегрирования стохастических интегралов в правой части (4.47). Тогда, беря $R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k)$ вместо $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ в (4.52), (4.53) и осуществляя предельный переход под знаками интегралов в (4.52) и (4.53), получим с учетом (4.61) и замечания 4.8 требуемое. Лемма 4.6, а вместе с ней и теорема 4.2 доказаны. $\square$

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная тригонометрическая система или система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([-1, 1])$. Сформулируем следующую теорему о сходимости ряда Фурье по системе функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

Теорема 4.4. Пусть $f(x)$ – ограниченная на промежутке $[-1, 1]$ функция, которая является кусочно-гладкой на открытом интервале $(-1, 1)$. Тогда ряд Фурье $\sum_{j=0}^{\infty} C_j \phi_j(x)$ с коэффициентами $C_j = \int_{-1}^1 f(x) \phi_j(x) dx$ сходится во всякой внутренней точке x промежутка $[-1, 1]$ к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ и равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$. При этом ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится в точках $x = -1$ и $x = 1$ к $f(-1+0)$ и $f(1-0)$ соответственно, а тригонометрический ряд Фурье сходится в точках $x = -1$ и $x = 1$ в случае периодического продолжения функции $f(x)$ к $\frac{1}{2}(f(-1+0) + f(1-0))$.

Теорема 4.4 установлена при более слабых условиях для тригонометрического ряда Фурье, в частности, в [66], а для ряда Фурье по полиномам Лежандра в [67].

Замечание 4.9. Результат теоремы 4.4 легко обобщается на случай произвольного промежутка $[t, T]$, где $-\infty < t < T < \infty$.

Из теоремы 4.4 и замечания 4.9 следует, что полные ортонормированные в пространстве $L_2([t, T])$ тригонометрическая и полиномиальная системы функций удовлетворяют условию 2 теоремы 4.2. Поэтому повторные стохастические интегралы Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ могут быть разложены, в условиях теоремы 4.2, в кратный ряд вида (4.25) с использованием полных ортонормированных в пространстве $L_2([t, T])$ тригонометрической или полиномиальной систем функций. В дальнейшем будут широко использоваться разложения вида (4.25) именно по этим двум системам функций.

4.2.3. Среднеквадратическая аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича

Будем искать аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ в виде усеченных кратных рядов, в которые они разлагаются согласно теореме 4.2.

Пусть $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q$ – аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$, которая имеет вид

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \quad (4.64)$$

где сохранен смысл обозначений формулы (4.25), а число $q < \infty$ удовлетворяет следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} \leq \varepsilon, \quad (4.65)$$

ε – заданное малое положительное число.

Формула (4.64) представляет собой общую формулу для аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ кратности k . При этом в (4.64) может использоваться не только тригонометрическая, но и любая другая, удовлетворяющая условию 2 теоремы 4.2, полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ система функций.

Сформулируем следующее утверждение.

Лемма 4.7. Пусть $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, t$ и попарно различны. Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ определяется формулой:

$$M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1}^2. \quad (4.66)$$

Доказательство: В силу среднеквадратической сходимости ряда (4.25) имеем:

$$M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q \right) C_{j_k \dots j_1}^2. \quad (4.67)$$

Для доказательства леммы осталось показать, что

$$\int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1}^2. \quad (4.68)$$

Заметим, что справедливо равенство:

$$\int_{[t,T]^k} (\mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{K(t_1, \dots, t_k)\})^2 dt_1 \dots dt_k = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \quad (4.69)$$

Поскольку функция $\mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{K(t_1, \dots, t_k)\}$ разлагается в любой внутренней точке $(t_1, \dots, t_k)$ гиперкуба $[t, T]^k$, согласно теореме 4.3, в следующий кратный ряд:

$$\mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{K(t_1, \dots, t_k)\} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l), \quad (4.70)$$

то

$$\begin{aligned} & \int_{[t,T]^k} (\mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{K(t_1, \dots, t_k)\})^2 dt_1 \dots dt_k = \\ & = \sum_{j_1, r_1, \dots, j_k, r_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} C_{r_k \dots r_1} \prod_{l=1}^k \int_t^T \phi_{j_l}(\tau) \phi_{r_l}(\tau) d\tau + J_q^{(k)}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

где

$$J_q^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{[t,T]^k} G_q(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k,$$

$$G_q(t_1, \dots, t_k) = 2F_q(t_1, \dots, t_k)R_q(t_1, \dots, t_k) + R_q^2(t_1, \dots, t_k),$$

$$F_q(t_1, \dots, t_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l),$$

$$R_q(t_1, \dots, t_k) = \mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{K(t_1, \dots, t_k)\} - F_q(t_1, \dots, t_k).$$

В силу ортонормированности системы функций $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([t, T])$ следует, что первое слагаемое в правой части (4.71) равно $\sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1}^2$. Поэтому для доказательства (4.68) осталось показать, что $\lim_{q \rightarrow \infty} J_q^{(k)} = 0$ при $q \rightarrow \infty$. Отметим, что

$$J_q^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left(\sum_{(t_1, \dots, t_k)} G_q(t_1, \dots, t_k) \right) dt_1 \dots dt_k. \quad (4.72)$$

Если в перестановке $(t_1, \dots, t_k)$ взята комбинация $t_1, \dots, t_k$, то

$$G_q(t_1, \dots, t_k) = 2F_q(t_1, \dots, t_k) \left(\prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) - F_q(t_1, \dots, t_k) \right) +$$

$$+ \left(\prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) - F_q(t_1, \dots, t_k) \right)^2.$$

Если же в перестановке $(t_1, \dots, t_k)$ взята любая комбинация $t_{r_1}, \dots, t_{r_k}$, отличная от $t_1, \dots, t_k$, то

$$G_q(t_{r_1}, \dots, t_{r_k}) dt_1 \dots dt_k = -F_q^2(t_1, \dots, t_k).$$

Таким образом, мы получили, что интеграл $J_q^{(k)}$ равен конечной сумме интегралов от функций, удовлетворяющих условиям VI-VIII в областях интегрирования этих интегралов и, в силу теоремы 4.3, равномерно стремящихся в этих областях к нулю при $p \rightarrow \infty$ и стремящихся к конечным величинам в граничных точках этих областей. Поэтому, осуществляя предельный переход под знаками римановых интегралов в (4.72), получим, что

$$\lim J_q^{(k)} = 0 \text{ при } q \rightarrow \infty. \quad (4.73)$$

Таким образом из (4.69), (4.71), (4.73) получаем (4.68).

Лемма 4.7 может быть доказана и из других соображений. Так, из теоремы 4.1 следует, что для попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ справедлива с вероятностью 1 формула:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t}.$$

Поэтому в этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} &= \mathbf{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} = \int_t^T \psi_k^2(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q)^2 \right\} &= \mathbf{M} \left\{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t})^2 \right\} - \\ &- 2\mathbf{M} \left\{ J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q \right\} + \mathbf{M} \left\{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Поскольку, согласно теореме 4.2, с вероятностью 1

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \left\{ \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q \right\} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} + J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q,$$

то

$$M \{ J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q \} = M \{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q)^2 \}. \quad (4.76)$$

Подставляя (4.74) и (4.76) в (4.75), получаем:

$$M \{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q)^2 \} = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\ - M \{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q)^2 \}. \quad (4.77)$$

Учитывая (4.77) и соотношение

$$M \{ (J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q)^2 \} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1}^2,$$

которое справедливо для попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$, приходим к утверждению леммы 4.7. Лемма доказана. $\square$

Предположим теперь, что $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ и не являются попарно различными. В этом случае вычисление среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича существенно сложнее, чем в случае попарно различных i_l ; $l = 1, \dots, k$.

Обозначим, через

$$\sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \quad (4.78)$$

сумму по всем различным наборам вида $\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}$ из k двоек чисел $r_i \in \{1, \dots, 2k\}$; $r_i \neq r_j (i \neq j)$. При этом $(r_i, r_{i+1}) \stackrel{\text{def}}{=} (r_{i+1}, r_i)$; $i = 1, \dots, 2k-1$ и наборы, состоящие из одних и тех же двоек, но расположенных в различном порядке, считаются тождественными.

Через

$$\sum_{((r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k}))} \quad (4.79)$$

будем обозначать сумму по всем различным наборам вида $\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}$, которые считаются различными для различных составов и для различного порядка следования в них пар $(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})$. Остальные обозначения, входящие в (4.79), такие же, как в (4.78).

Лемма 4.8. Пусть $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс, а $\phi_j(\tau)$; $j = 1, 2, \dots, 2k$ – непрерывно дифференцируемые на промежут-

ке $[t, T]$ функции. Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{j=1}^{2k} \int_t^T \phi_j(\tau) d\tau \right\} = \sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \prod_{j=1}^k \int_t^T \phi_{r_{2j}}(\tau) \phi_{r_{2j-1}}(\tau) d\tau. \quad (4.80)$$

Доказательство: Пусть

$$J[\varphi_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j) \Delta f_{\tau_j}, \quad J[\varphi_l]_{T,t} = \int_t^T \varphi_l(s) df_s;$$

$\Delta f_{\tau_j} = f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}$; $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ – такое разбиение промежутка $[t, T]$, которое удовлетворяет условию (4.38).

Используя результат леммы 4.5 и соотношение (4.46), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J[\varphi_l]_{T,t} \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J[\varphi_l]_N \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \sum_{r=0}^{2k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{2k,r}} \mathcal{C}_{s_r}^+ \dots \mathcal{C}_{s_1}^+ \left\{ \sum_{j_{2k}=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_{2-1}-1} \sum_{(j_1, \dots, j_{2k})} \prod_{q=1}^{2k} \phi_q(\tau_{j_q}) \Delta f_{\tau_{j_q}} \right\} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_{2-1}-1} \left(\sum_{(j_1, j_1, \dots, j_k, j_k)} \prod_{q=1}^k \phi_{2q}(\tau_{j_q}) \phi_{2q-1}(\tau_{j_q}) \right) \Delta \tau_{j_1} \dots \Delta \tau_{j_k} \\ &= \int_t^T \int_t^{t_k} \dots \int_t^{t_2} \left(\sum_{(t_1, t_1, \dots, t_k, t_k)} \prod_{q=1}^k \phi_{2q}(t_q) \phi_{2q-1}(t_q) \right) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k \\ &= \int_t^T \int_t^{t_k} \dots \int_t^{t_2} \left(\sum_{((r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k}))} \prod_{q=1}^k \phi_{r_{2q}}(t_q) \phi_{r_{2q-1}}(t_q) \right) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k \\ &= \int_{[t, T]^k} \left(\sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \prod_{q=1}^k \phi_{r_{2q}}(t_q) \phi_{r_{2q-1}}(t_q) \right) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k \\ &= \sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \prod_{q=1}^k \int_t^T \phi_{r_{2q}}(\tau) \phi_{r_{2q-1}}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4.81)$$

где $\sum_{(x_1, \dots, x_k)}$ – сумма по всем возможным перестановкам $(x_1, \dots, x_k)$. Соотношение (4.81) доказывают лемму. Лемма доказана. $\square$.

Упражнение 4.1. Проверить, что из (4.80) при $k = 1, 2, 3$ следуют равенства:

$$M \left\{ \prod_{l=1}^2 \eta_{T,t}^{(l)} \right\} = \zeta_{T,t}^{(12)},$$

$$M \left\{ \prod_{l=1}^4 \eta_{T,t}^{(l)} \right\} = \zeta_{T,t}^{(12)} \zeta_{T,t}^{(34)} + \zeta_{T,t}^{(32)} \zeta_{T,t}^{(14)} + \zeta_{T,t}^{(13)} \zeta_{T,t}^{(24)},$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \prod_{l=1}^6 \eta_{T,t}^{(l)} \right\} = & \zeta_{T,t}^{(65)} \zeta_{T,t}^{(43)} \zeta_{T,t}^{(21)} + \zeta_{T,t}^{(65)} \zeta_{T,t}^{(31)} \zeta_{T,t}^{(42)} + \zeta_{T,t}^{(65)} \zeta_{T,t}^{(32)} \zeta_{T,t}^{(41)} + \\ & + \zeta_{T,t}^{(63)} \zeta_{T,t}^{(54)} \zeta_{T,t}^{(21)} + \zeta_{T,t}^{(62)} \zeta_{T,t}^{(54)} \zeta_{T,t}^{(13)} + \zeta_{T,t}^{(32)} \zeta_{T,t}^{(61)} \zeta_{T,t}^{(54)} + \zeta_{T,t}^{(64)} \zeta_{T,t}^{(53)} \zeta_{T,t}^{(21)} + \\ & + \zeta_{T,t}^{(64)} \zeta_{T,t}^{(51)} \zeta_{T,t}^{(32)} + \zeta_{T,t}^{(64)} \zeta_{T,t}^{(52)} \zeta_{T,t}^{(31)} + \zeta_{T,t}^{(62)} \zeta_{T,t}^{(53)} \zeta_{T,t}^{(41)} + \zeta_{T,t}^{(61)} \zeta_{T,t}^{(53)} \zeta_{T,t}^{(42)} + \\ & + \zeta_{T,t}^{(61)} \zeta_{T,t}^{(52)} \zeta_{T,t}^{(43)} + \zeta_{T,t}^{(62)} \zeta_{T,t}^{(51)} \zeta_{T,t}^{(43)} + \zeta_{T,t}^{(63)} \zeta_{T,t}^{(51)} \zeta_{T,t}^{(42)} + \zeta_{T,t}^{(63)} \zeta_{T,t}^{(52)} \zeta_{T,t}^{(41)}, \end{aligned}$$

где $\eta_{T,t}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_l(\tau) d\tau$, $\zeta_{T,t}^{(lk)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_l(\tau) \phi_k(\tau) d\tau$.

Из леммы 4.8 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.9. Пусть $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс, а $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$. Тогда

$$\begin{aligned} M \left\{ \prod_{i=1}^{2k} \int_t^T \phi_{r_i}(\tau) d\tau \right\} = \\ = \begin{cases} (2g+1)!! \text{ при } \{r_1, \dots, r_{2k}\} = \{q_1, q_1, \dots, q_k, q_k\}, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}, \end{aligned}$$

где g – количество совпадений чисел в наборе $\{q_1, \dots, q_k\}$; $g \geq 0$; $r_i = 0, 1, \dots$; $r_i \neq r_j (i \neq j)$; $i, j = 1, \dots, 2k$; $\{x_1, \dots, x_k\}$ – неупорядоченный набор чисел $x_1, \dots, x_k$.

Из леммы 4.9 при $r_1 = \dots = r_{2k} = r$ следует хорошо известное равенство:

$$M \left\{ \left(\int_t^T \phi_r(\tau) d\tau \right)^{2k} \right\} = (2k+1)!!,$$

где $\int_t^T \phi_r^2(\tau) d\tau = 1$.

4.2.4. Аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью тригонометрической системы функций

Согласно теореме 4.4 следует, что полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ тригонометрическая система функций удовлетворяет условиям теоремы 4.2.

Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_k T, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

полученные, согласно теореме 4.2, с использованием тригонометрической системы функций:

$$I_{0T, t}^{*(i_1)} = \sqrt{T - t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (4.82)$$

$$I_{1T, t}^{*(i_1)q} = -\frac{(T - t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right], \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} I_{00T, t}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T - t) & \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right], \quad (4.84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{000T, t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} = (T - t)^{\frac{3}{2}} & \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\ & + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \Big] + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r, l=1 \\ r \neq l}}^q \left[\frac{1}{r^2 - l^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_3)} \right\} + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2 - l^2)l} \right) \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \frac{r}{(l^2 - r^2)l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Big] + \\
& + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - 6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)} - 2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} \right\} \Big] + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \sum_{r,m=1}^q \frac{2}{rm} \left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \\
& + \sum_{l,m=1}^q \frac{1}{m(l+m)} \left[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} - \zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(m+l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{m=1}^q \sum_{l=m+1}^q \frac{1}{m(l-m)} \left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{l=1}^q \sum_{m=l+1}^q \frac{1}{m(m-l)} \left[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2(m-l)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] \Big\}, \tag{4.85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[-\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right\} \right. \\
& + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + 2\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} \right) \Big] \\
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[-\frac{k}{(l^2 - k^2)l} \zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)} \right], \tag{4.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ -\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left(-\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right) \right] \right. \\
&\left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[\left(\frac{k}{(l^2 - k^2)l} + \frac{1}{kl} \right) \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \right] \right), \quad (4.87)
\end{aligned}$$

$$I_{2T,t}^{*(i_1)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left(\frac{1}{\pi^2 r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right) \right]. \quad (4.88)$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_0^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид:

$$\phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0 \\ \sqrt{2} \sin \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r-1, \\ \sqrt{2} \cos \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r \end{cases} \quad (4.89)$$

где $r = 1, 2, \dots, i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$.

Рассмотрим вопрос о среднеквадратической сходимости аппроксимаций (4.83)-(4.88). Из соотношений (4.83)-(4.88) при $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3$ непосредственным вычислением получаем:

$$M \left\{ \left(I_{1T,t}^{*(i_1)} - I_{1T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^3}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \quad (4.90)$$

$$M \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \quad (4.91)$$

$$\begin{aligned}
&M \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
&= (T-t)^3 \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \frac{79}{32\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\pi^4} \left(\sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \right) \frac{5l^4 + 4r^4 - 3l^2 r^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} \right\}. \quad (4.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{2T,t}^{*(i_1)} - I_{2T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^5}{2} \left\{ \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} &= (T-t)^4 \left\{ \frac{3}{4\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{25}{32\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{4\pi^4} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= (T-t)^4 \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{25}{32\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{4\pi^4} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{l^2(l^2 - k^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

С помощью соотношений (4.90)-(4.95) может быть определена среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича при заданном q или число q при заданной точности среднеквадратической аппроксимации ε повторного стохастического интеграла Стратоновича в смысле соотношения (4.65).

Упражнение 4.2. Показать, что соотношения (4.92), (4.94) и (4.95) могут быть представлены с помощью леммы 4.7 в виде:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= (T-t)^3 \left\{ \frac{5}{36} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{79}{32\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2 l^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{2}{9} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{25}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{k^2 + l^2}{l^2 (l^2 - k^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{5}{9} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \frac{25}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2 (l^2 - k^2)^2} \right\}. \quad (4.98)$$

Сопоставляя (4.96)-(4.98) и (4.92), (4.94), (4.95), замечаем, что

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{l^2 + k^2}{k^2 (l^2 - k^2)^2} = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{l^2 + k^2}{l^2 (l^2 - k^2)^2} = \frac{\pi^4}{48}, \quad (4.99)$$

$$\sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2 l^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} = \frac{9\pi^4}{80}.$$

Рассмотрим аппроксимации стохастических интегралов $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}$ и условия для выбора числа q с использованием тригонометрической системы функций:

$$\begin{aligned} I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{6} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[-\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \right)^2 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[-\frac{k}{(l^2 - k^2)l} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_1)} \right] \right), \\ I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[-\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left(-\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \right)^2 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[\left(\frac{k}{(l^2 - k^2)l} + \frac{1}{kl} \right) \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_1)} \right] \right). \end{aligned}$$

С использованием леммы 4.9 получаем:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(T-t)^4}{4} \left[\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \frac{5}{2\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right]. \quad (4.100)
\end{aligned}$$

Далее с учетом (4.99) перепишем соотношение (4.100) в виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbf{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{(T-t)^4}{4} \left[\frac{23}{144} - \frac{5}{6\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \frac{5}{2\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right]. \quad (4.101)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (4.5) с использованием соотношения (4.64) и тригонометрической системы. Имеем:

$$\begin{aligned}
J_{(\lambda_2 \lambda_1)T,t}^{*(i_2 i_1)q} &= \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right], \quad (4.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{(\lambda_3 \lambda_2 \lambda_1)T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} &= (T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2 \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[\frac{1}{r^2 - l^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_3)} \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2 - l^2)l} \right) \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \frac{r}{(l^2 - r^2)l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{8\pi 2r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 6\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} - 2\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \Big] + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \sum_{r,m=1}^q \frac{2}{rm} \left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \\
& + \sum_{l,m=1}^q \frac{1}{m(l+m)} \left[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(m+l)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{m=1}^q \sum_{l=m+1}^q \frac{1}{m(l-m)} \left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{l=1}^q \sum_{m=l+1}^q \frac{1}{m(m-l)} \left[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2(m-l)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] \Big\}, \quad (4.103)
\end{aligned}$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (4.89); $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m$.

Упражнение 4.3. Используя соотношение

$$\int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(0)} = \begin{cases} \sqrt{T-t} & \text{при } j = 0 \\ 0 & \text{при } j \neq 0 \end{cases},$$

получить из (4.102), (4.103) следующее семейство формул:

$$J_{(00)T,t}^* = \frac{1}{2}(T-t)^2,$$

$$J_{(10)T,t}^{*(i_2)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right],$$

$$J_{(01)T,t}^{*(i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right],$$

$$J_{(11)T,t}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right],$$

$$J_{(000)T,t}^* = \frac{1}{6}(T-t)^3,$$

$$J_{(001)T,t}^{*(i_1)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left(\frac{1}{\pi^2 r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right) \right],$$

$$J_{(010)T,t}^{*(i_2)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \frac{1}{\pi^2 r^2} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right],$$

$$J_{(100)T,t}^{*(i_3)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left(\frac{1}{\pi^2 r^2} \zeta_{2r}^{(i_3)} - \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \right) \right],$$

$$J_{(011)T,t}^{*(i_2 i_1)q} = (T-t)^2 \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - 2 \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[\frac{1}{r^2 - l^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} - \frac{r}{(l^2 - r^2)l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3 \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} \right] \right),$$

$$J_{(110)T,t}^{*(i_3 i_2)q} = (T-t)^2 \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[-\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ -2 \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \right\} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[-\frac{1}{r^2 - l^2} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2 - l^2)l} \right) \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ -\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{(101)T,t}^{*(i_3 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \left. \right] - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \\
& - \sum_{r=1}^q \frac{1}{4\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \right\} \left. \right),
\end{aligned}$$

$$J_{(111)T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} = I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q},$$

где $I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q}$ определяется формулой (4.85); $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (4.89); $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$.

Упражнение 4.4. Для приведенного семейства формул непосредственным вычислением получить условия для выбора числа q типа (4.90)-(4.95) при $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3$.

4.2.5. Аппроксимация повторных стохастических интегралов с помощью полиномиальной системы функций

Согласно теореме 4.4 полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t, T])$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2. Эта система имеет вид:

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty, \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left(\left(x - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right), \quad (4.104)$$

где $P_j(x)$ – полином Лежандра. Известно [67], что $P_j(x)$ представим, например, в виде:

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j,$$

который именуется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов $P_j(x)$:

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{j-1}(x)}{dx} = (2j+1)P_j(x); \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{-1}^1 x^k P_j(x) dx = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1,$$

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j \\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k = j \end{cases},$$

$$jP_j(x) - (2j-1)xP_{j-1}(x) + (j-1)P_{j-2}(x) = 0; \quad j = 2, 3, \dots$$

Используя эти свойства и систему функций (4.104), получим, с использованием теоремы 4.2, следующие справедливые с вероятностью 1 разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича:

$$I_{0T,t}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (4.105)$$

$$I_{1T,t}^{*(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \quad (4.106)$$

$$I_{2T,t}^{*(i_1)} = \frac{(T-t)^{5/2}}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right), \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} &= \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2i+1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2i+3}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+1}^{(i_1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{2i-1}} \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} \right\} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} \right] = \\ &= \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} \right\} \right], \quad (4.108) \end{aligned}$$

$$I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{4}{3} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{2}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_2^{(i_1)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)} - \right. \\
& \left. -\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \left((i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} \right) \right\}, \quad (4.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10T,t}^{*(i_2i_1)} = & -\frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{2}{3}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)} + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \left((i+1)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+2)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} \right) + \\
& \left. \left. + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\zeta_i^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} \right\} \right]. \quad (4.110)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученные с помощью системы полиномиальных функций, существенно проще по виду, чем соответствующие разложения, полученные с помощью тригонометрической системы функций.

Рассмотрим аппроксимацию повторного стохастического интеграла $I_{00T,t}^{*(i_2i_1)}$, используя соотношение (4.108):

$$I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)} \right\} \right].$$

Упражнение 4.5. Показать, что среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла $I_{00T,t}^{*(i_2i_1)}$ при $i_1 \neq i_2$ определяется равенством:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^2}{4} \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2-1} = \\
&= \frac{(T-t)^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2-1} \right). \quad (4.111)
\end{aligned}$$

Если в (4.108) или в (4.84) положить $i_1 = i_2$, то получим справедливую с вероятностью 1 хорошо известную формулу:

$$I_{00T,t}^{*(i_1 i_1)} = \frac{\left(I_{0T,t}^{*(i_1)}\right)^2}{2},$$

которая может быть получена другим способом. Этот способ будет рассмотрен ниже.

Упражнение 4.6. Показать, что среднеквадратическая погрешность аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)}$ при $i_1 \neq i_2$ определяется равенством:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{(T-t)^4}{16} \sum_{i=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4i^2 - 1} + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Вместо равенства (4.112) можно с помощью леммы 4.7 записать более удобное соотношение:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\ &= \frac{(T-t)^4}{16} \left\{ \frac{7}{9} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{4i^2 - 1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Равенство (4.112) может быть заменено на следующую оценку

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} \leq \\ &\leq \frac{5(T-t)^4}{16} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (4.113)$$

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)}$, $I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)}$ и выражения для среднеквадратических погрешности

этих аппроксимаций, полученные с использованием полиномиальной системы функций:

$$\begin{aligned}
 I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} &= -\frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{4}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\} \right], \\
 I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} &= -\frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{2}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\
 &+ \left. \sum_{i=1}^q \left\{ -\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\} \right].
 \end{aligned}$$

Далее с использованием леммы 4.7 получаем:

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{M} \left\{ \left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \mathbf{M} \left\{ \left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
 &= \frac{(T-t)^4}{16} \left[\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right] \leq \\
 &\leq \frac{(T-t)^4}{16} \left[\frac{3}{16} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{i^4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

4.3. Метод Г.Н.Мильштейна разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича

4.3.1. Введение

Г.Н.Мильштейном в [47] был предложен метод разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на разложении, так называемого процесса "броуновского моста" в ряд Фурье со случайными коэффициентами.

Рассмотрим процесс "броуновского моста" вида:

$$f_t - \frac{t}{\Delta} f_{\Delta}, \quad (4.114)$$

определенный при $t \in [0, \Delta]$, $\Delta > 0$, где $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$. Рассмотрим справедливое с вероятностью 1 покомпонентное разложение процесса (4.114) в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} - \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} = \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (4.115)$$

где

$$a_{i,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\Delta} \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} \right) \cos \frac{2\pi r s}{\Delta} ds,$$

$$b_{i,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^{\Delta} \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} \right) \sin \frac{2\pi r s}{\Delta} ds,$$

где $r = 0, 1, \dots$; $i = 1, \dots, m$. Нетрудно показать, что случайные величины $a_{i,r}, b_{i,r}$ – гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям [47, 54]:

$$\mathbb{M} \{a_{i,r} b_{i,r}\} = \mathbb{M} \{a_{i,r} b_{i,k}\} = 0, \quad (4.116)$$

$$\mathbb{M} \{a_{i,r} a_{i,k}\} = \mathbb{M} \{b_{i,r} b_{i,k}\} = 0, \quad (4.117)$$

$$\mathbb{M} \{a_{i_1,r} a_{i_2,r}\} = \mathbb{M} \{b_{i_1,r} b_{i_2,r}\} = 0, \quad (4.118)$$

$$\mathbb{M} \{a_{i,r}^2\} = \mathbb{M} \{b_{i,r}^2\} = \frac{\Delta}{2\pi^2 r^2}, \quad (4.119)$$

где $i, i_1, i_2 = 1, \dots, m$; $r \neq k$; $i_1 \neq i_2$.

Согласно (4.115) с вероятностью 1 имеем:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} \frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right). \quad (4.120)$$

Далее путем подстановки (4.120) в повторный стохастический интеграл и проведения ряда непростых преобразований можно в принципе получить его разложение в кратный ряд по системе стандартных независимых гауссовских величин. Это разложение будет сходиться к повторному стохастическому интегралу Стратоновича (см. например [47, 50]), поскольку случайный процесс $\mathbf{f}_t^{(i)}$ из (4.120) является дифференцируемым.

4.3.2. Примеры разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г.Н.Мильштейна

Используя соотношение (4.120), нетрудно получить с вероятностью 1 следующие соотношения [47, 54]:

$$\int_0^t d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau &= \frac{t^2}{2\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{t}{2} a_{i,0} + \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - \right. \\ &\quad \left. - b_{i,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\tau d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} &= t \int_0^t d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int_0^t \int_0^\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \\ &= \frac{t^2}{2\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + t \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right\} - \\ &\quad - \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - b_{i,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.123)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} &= \frac{1}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} \int_0^t \int_0^\tau d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} + \frac{1}{2} a_{i_1,0} \int_0^t d\mathbf{f}_t^{(i_2)} + \\ &\quad + \frac{t\pi}{\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} r (a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r}) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (a_{i_1,r} a_{i_2,r} - b_{i_1,r} b_{i_2,r}) \left(1 - \cos \frac{4\pi r t}{\Delta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (a_{i_1,r} b_{i_2,r} + b_{i_1,r} a_{i_2,r}) \sin \frac{4\pi r t}{\Delta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi r} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} \left(a_{i_1,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i_1,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right) \right\} + \\ &\quad + \sum_{\substack{k,r=1 \\ k \neq r}}^{\infty} k \left\{ a_{i_1,r} a_{i_2,k} \left[\frac{\cos \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} + \frac{\cos \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} - \frac{k}{k^2 - r^2} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +a_{i_1,r}b_{i_2,k} \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} + \frac{\sin \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} \right] + \\
& +b_{i_1,r}b_{i_2,k} \left[\frac{\cos \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} - \frac{\cos \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} - \frac{r}{k^2 - r^2} \right] + \\
& + \frac{\Delta}{2\pi} b_{i_1,r} a_{i_2,k} \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} - \frac{\sin \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} \right] \Bigg\}. \quad (4.124)
\end{aligned}$$

Положим в соотношениях (4.121)-(4.124) $t = \Delta$. В результате получим следующие справедливые с вероятностью 1 равенства:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}, \quad (4.125)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta \left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + a_{i,0} \right), \quad (4.126)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta \left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} - a_{i,0} \right), \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} &= \frac{1}{2}\mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} - \frac{1}{2} \left(a_{i_2,0} \mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} - a_{i_1,0} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} \right) + \\
&+ \pi \sum_{r=1}^{\infty} r (a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r}). \quad (4.128)
\end{aligned}$$

При получении (4.125)-(4.128) использовалось соотношение:

$$a_{i,0} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{i,r}, \quad (4.129)$$

которое следует из (4.115) при $t = \Delta$.

4.4. Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье, и метода Г.Н.Мильштейна

В начале главы 4 указывались отличительные особенности метода, основанного на кратных рядах Фурье, и метода Г.Н.Мильштейна. В

частности, отмечалось, что метод, основанный на кратных рядах Фурье, допускает применение различных полных ортонормированных в пространстве $L_2([t, T])$ систем функций, а метод Г.Н.Мильштейна – только тригонометрической системы. Кроме этого, метод, основанный на кратных рядах Фурье, дает возможность получить явную общую формулу для коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (4.6) кратности k . Метод Г.Н.Мильштейна допускает лишь возможность получения такой формулы, однако из-за громоздкости преобразований, на которых он основан, она не была получена. В результате в [47, 50, 54] известны разложения методом Г.Н.Мильштейна лишь повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (4.5) кратностей $1 \div 3$. Также отмечалось, что метод, основанный на кратных рядах Фурье, сводит проблему разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича к вычислению коэффициентов Фурье специальных разрывных функций многих переменных. Эти коэффициенты могут вычисляться по явным формулам как аналитически, так и численно. Метод Г.Н.Мильштейна практически исключает возможность применения вычислительных процедур для определения коэффициентов разложения.

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученных методом Г.Н.Мильштейна и методом, основанным на кратных рядах Фурье.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовские величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_\Delta^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}; \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r b_{i,r}, \quad (4.130)$$

где $i = 1, \dots, m$; $r = 1, 2, \dots$. В силу (4.129) имеем:

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\pi r} \rho_{i,r}. \quad (4.131)$$

Подставляя соотношения (4.130) и (4.131) в (4.125)-(4.128), получим следующие справедливые с вероятностью 1 равенства:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta} \xi_i, \quad (4.132)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rho_{i,r} \right), \quad (4.133)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rho_{i,r} \right), \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} &= \frac{\Delta}{2} \left\{ \xi_{i_1} \xi_{i_2} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} (\rho_{i_1,r} \eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r} \rho_{i_2,r} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2} (\rho_{i_2,r} \xi_{i_1} - \rho_{i_1,r} \xi_{i_2})) \right\}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов, можно записать:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0\Delta,0}^{*(i)} = J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (4.136)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0\Delta,0}^{*(i)} + I_{1\Delta,0}^{*(i)} = J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (4.137)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1\Delta,0}^{*(i)} = J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (4.138)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00\Delta,0}^{*(i_1 i_2)} = J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}. \quad (4.139)$$

Подставляя разложения интегралов $I_{0\Delta,0}^{*(i)}$, $I_{1\Delta,0}^{*(i)}$, $I_{00\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$ или интегралов $J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$, полученные с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье, и тригонометрической системы функций (см. параграф 4.2.4) в представления (4.136)-(4.139), получим с точностью до обозначений разложения (4.132)-(4.135). Это говорит о том, что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы функций метод Г.Н.Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье, дают один и тот же результат. По-видимому, можно показать, что этот вывод будет справедлив и для других повторных стохастических интегралов Стратоновича. В результате можно считать, что

метод Мильштейна является частным случаем (в случае тригонометрической системы функций) метода, основанного на кратных рядах Фурье.

Сопоставление результатов параграфов 4.2.4 и 4.2.5 приводит к выводу, что разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученные методом, основанным на кратных рядах Фурье с использованием полиномиальной системы функций сходятся в среднеквадратическом смысле существенно быстрее и, кроме того, гораздо проще по виду, чем аналогичные разложения, полученные с помощью тригонометрической системы функций. В результате применение метода, основанного на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций дает ощутимый выигрыш в сравнении применением метода Г.Н.Мильштейна.

4.5. Разложение повторных стохастических интегралов с использованием полиномов Эрмита

В предыдущих параграфах данной главы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от одной стандартной гауссовской случайной величины. Этому вопросу будет посвящен настоящий параграф. Результаты, излагающиеся в нем, можно встретить, например, в [47, 50, 68].

Рассмотрим семейство производящих многочленов $H_n(x, y)$; $n = 0, 1, \dots$ вида:

$$H_n(x, y) = \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y} \Big|_{\alpha=0}. \quad (4.140)$$

Нетрудно видеть, что многочлены $H_n(x, y)$ связаны с многочленами Эрмита $h_n(x)$ формулой: $H_n(x, y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right)$. Используя рекуррентные формулы [69]:

$$\frac{dh_n(z)}{dz} = 2nh_{n-1}(z); \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$h_n(z) = 2zh_{n-1}(z) - 2(n-1)h_{n-2}(z); \quad n = 2, 3, \dots$$

нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для много-
членов $H_n(x, y)$:

$$\frac{\partial H_n(x, y)}{\partial x} = nH_{n-1}(x, y); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.141)$$

$$\frac{\partial H_n(x, y)}{\partial y} = \frac{n}{2y}H_n(x, y) - \frac{nx}{2y}H_{n-1}(x, y); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.142)$$

$$\frac{\partial H_n(x, y)}{\partial y} = -\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x, y); \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.143)$$

Из (4.141)-(4.143) следует, что:

$$\frac{\partial H_n(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n(x, y)}{\partial x^2} = 0; \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.144)$$

По формуле Ито с вероятностью 1 имеем:

$$H_n(f_t, t) - H_n(0, 0) = \int_0^t \frac{\partial H_n(f_s, s)}{\partial x} df_s + \int_0^t \left(\frac{\partial H_n(f_s, s)}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n(f_s, s)}{\partial x^2} \right) ds, \quad (4.145)$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс. С учетом (4.144) и того, что $H_n(0, 0) = 0$; $n = 2, 3, \dots$ из (4.145) с вероятностью 1 получим:

$$H_n(f_t, t) = \int_0^t nH_{n-1}(f_s, s) df_s; \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.146)$$

Далее по индукции нетрудно получить с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$I_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dots \int_0^{t_2} df_{t_1} \dots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(f_t, t); \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.147)$$

Рассмотрим одно из обобщений [68] формулы (4.147).

$$J_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_{t_n} \dots \int_0^{t_2} \psi_{t_1} df_{t_1} \dots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(\delta_t, \Delta_t); \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.148)$$

где $\delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_s df_s$, $\Delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_s^2 ds$, $\psi_t \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Упражнение 4.7. Проверить, что первые восемь формул из семейства (4.148) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} J_t^{(1)} &= \frac{1}{1!} \delta_t, \quad J_t^{(2)} = \frac{1}{2!} (\delta_t^2 - \Delta_t), \quad J_t^{(3)} = \frac{1}{3!} (\delta_t^3 - 3\delta_t \Delta_t), \\ J_t^{(4)} &= \frac{1}{4!} (\delta_t^4 - 6\delta_t^2 \Delta_t + 3\Delta_t^2), \quad J_t^{(5)} = \frac{1}{5!} (\delta_t^5 - 10\delta_t^3 \Delta_t + 15\delta_t \Delta_t^2), \\ J_t^{(6)} &= \frac{1}{6!} (\delta_t^6 - 15\delta_t^4 \Delta_t + 45\delta_t^2 \Delta_t^2 - 15\Delta_t^3), \\ J_t^{(7)} &= \frac{1}{7!} (\delta_t^7 - 21\delta_t^5 \Delta_t + 105\delta_t^3 \Delta_t^2 - 105\delta_t \Delta_t^3), \\ J_t^{(8)} &= \frac{1}{8!} (\delta_t^8 - 28\delta_t^6 \Delta_t + 210\delta_t^4 \Delta_t^2 - 420\delta_t^2 \Delta_t^3 + 105\Delta_t^4), \end{aligned}$$

где равенства справедливы с вероятностью 1.

Докажем с вероятностью 1 следующее соотношение для повторных стохастических интегралов Стратоновича:

$$I_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} f_t^n, \quad (4.149)$$

где

$$I_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{*t} \dots \int_0^{*t_2} df_{t_1} \dots df_{t_n}.$$

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. По теореме 4.1

$$I_t^{*(2)} = I_t^{(2)} + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \text{ с в.1.} \quad (4.150)$$

Из соотношения (4.147) при $n = 2$ следует, что с вероятностью 1

$$I_t^{(2)} = \frac{1}{2} f_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t dt_1. \quad (4.151)$$

Подставляя (4.151) в (4.150) с вероятностью 1 получим: $I_t^{*(2)} = \frac{1}{2!} f_t^2$. Таким образом формула (4.149) справедлива при $n = 2$. Предположим, что формула (4.149) справедлива при $n = k$, т.е. с вероятностью 1 $I_t^{*(k)} = \frac{1}{k!} f_t^k$ и рассмотрим $I_t^{*(k+1)} = \int_0^{*t} I_\tau^{*(k)} df_\tau$. По леммам 1.2, 1.5 и предположению индукции с вероятностью 1 получаем:

$$I_t^{*(k+1)} = \int_0^t \frac{f_\tau^k}{k!} df_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f_\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau. \quad (4.152)$$

Рассмотрим случайный процесс ξ_t вида: $\xi_t = \frac{f_t^{k+1}}{(k+1)!}$ и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\xi_t = \frac{1}{2} \frac{f_t^{k-1}}{(k-1)!} dt + \frac{f_t^k}{k!} df_t. \quad (4.153)$$

Поскольку $\xi_0 = 0$, то из (4.152) и (4.153) следует с вероятностью 1, что $I_t^{*(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!} f_t^{k+1}$. Таким образом соотношение (4.149) доказано по индукции.

Нетрудно видеть, что формула (4.149) допускает следующее обобщение:

$$J_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} \delta_t^n,$$

где $J_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi(t_n) \dots \int_0^{t_2} \psi(t_1) df_{t_1} \dots df_{t_n}$, $\delta_t = \int_0^t \psi(s) df_s$, а $\psi(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0, T]$ функция.

4.6. Метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах

Пусть функции $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \dots, k$ удовлетворяют на промежутке $[t, T]$ условиям Липшица с постоянными C_l , т.е.

$$|\psi_l(\tau_1) - \psi_l(\tau_2)| \leq C_l |\tau_1 - \tau_2| \text{ при всех } \tau_1, \tau_2 \in [t, T]. \quad (4.154)$$

Тогда согласно лемме 4.1 с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \prod_{j_1=0}^k \psi_l(\tau_{j_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_l)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в формулу (4.39).

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ в виде:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_2=0}^{j_2-1} \prod_{j_1=0}^k \psi_l(\tau_{j_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_l)}. \quad (4.155)$$

Соотношение (4.155) может быть переписано в следующей форме:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \sqrt{\Delta \tau_{j_l}} \psi_l(\tau_{j_l}) \mathbf{u}_{j_l}^{(i)}, \quad (4.156)$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}) / \sqrt{\Delta \tau_j}$; $i = 1, \dots, m$ — независимые при $i \neq 0$ и различных j гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; $\mathbf{u}_j^{(0)} = \sqrt{\Delta \tau_j}$. Пусть

$$\tau_j = t + j\Delta; \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad \tau_N = T; \quad \Delta > 0. \quad (4.157)$$

Тогда формула (4.156) примет вид:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \Delta^{k/2} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(t + j_l \Delta) \mathbf{u}_{j_l}^{(i)}, \quad (4.158)$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{w}_{t+j\Delta}^{(i)}) / \sqrt{\Delta}$; $i = 1, \dots, m$.

Теорема 4.5. Пусть функции $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \dots, k$ удовлетворяют условию Липшица (4.154), а $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ — разбиение промежутка $[t, T]$ вида (4.157). Тогда при достаточно малой величине $T-t$ существует постоянная $H_k = \text{const} < \infty$, такая что выполняется следующая оценка:

$$\mathbf{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N)^2 \right\} \leq \frac{H_k (T-t)^2}{N}. \quad (4.159)$$

Доказательство: Нетрудно видеть, что при достаточно малой величине $T-t$ найдется такая постоянная C_k , что

$$\mathbf{M} \left\{ (J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N)^2 \right\} \leq C_k \mathbf{M} \left\{ (J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N)^2 \right\}. \quad (4.160)$$

Заметим, что

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N = \sum_{j=1}^3 S_j^N,$$

где

$$S_1^N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_2(t_2) \int_{\tau_{j_1}}^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)},$$

$$S_2^N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\psi_2(t_2) - \psi_2(\tau_{j_1})) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

$$S_3^N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_2(\tau_{j_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} (\psi_1(t_1) - \psi_1(\tau_{j_2})) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}.$$

Поэтому

$$\left(\mathbf{M} \left\{ \left(J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^3 \sqrt{\mathbf{M} \left\{ (S_j^N)^2 \right\}}. \quad (4.161)$$

Оценим с помощью моментных свойств стохастических интегралов (см. главу 1) величину $\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\}$. Для этого рассмотрим 4 случая.

1. $i_1 \neq 0, i_2 \neq 0$:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} \leq \sup_{s \in [t, T]} \{ \psi_1^2(s) \psi_2^2(s) \} \frac{\Delta}{2} (T - t). \quad (4.162)$$

2. $i_1 = 0, i_2 \neq 0$:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} \leq \sup_{s \in [t, T]} \{ \psi_1^2(s) \psi_2^2(s) \} \frac{\Delta^2}{3} (T - t). \quad (4.163)$$

3. $i_1 \neq 0, i_2 = 0$:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} \leq \sup_{s \in [t, T]} \{ \psi_1^2(s) \psi_2^2(s) \} \frac{4\Delta^2}{9} (T - t). \quad (4.164)$$

4. $i_1 = i_2 = 0$:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} \leq \sup_{s \in [t, T]} \{ \psi_1^2(s) \psi_2^2(s) \} \frac{\Delta^2}{4} (T - t)^2. \quad (4.165)$$

Объединяя (4.162)-(4.165), получаем:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} \leq L_1 \Delta (T - t), \quad L_1 < \infty. \quad (4.166)$$

Согласно условию (4.154) и формулам (4.162)-(4.165) имеем:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_j^N)^2 \right\} \leq L_j \Delta^3 (T - t), \quad L_j < \infty; \quad j = 2, 3. \quad (4.167)$$

Наконец, согласно (4.160), (4.161), (4.166), (4.167), приходим к неравенству:

$$\mathbf{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\} \leq H_k (T - t) \Delta = \frac{H_k (T - t)^2}{N},$$

где $H_k < \infty$. Теорема доказана. $\square$

Упражнение 4.8. Показать, что справедливо следующее соотношение:

$$M \left\{ \left(I_{00T,t}^{(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{(i_2 i_1)N} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2N}, \quad (4.168)$$

где $i_1, i_2 = 1, \dots, m$, а $I_{00T,t}^{(i_2 i_1)N}$ — аппроксимация стохастического интеграла $I_{00T,t}^{(i_2 i_1)}$ вида (4.2), полученная по формуле (4.158).

Отметим, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, сходится в среднеквадратическом смысле медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье (см. (4.168), (4.91), (4.111)).

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о том, каким образом могут быть аппроксимированы повторные стохастические θ -интегралы и интегралы Стратоновича с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

В условиях теоремы 4.1 с вероятностью 1 справедливы соотношения:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}, \quad (4.169)$$

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \theta^r \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}. \quad (4.170)$$

Применяя ко всем стохастическим интегралам в правых частях (4.169), (4.170) метод, основанный на кратных интегральных суммах, получаем:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1; N},$$

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \theta^r \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1; N},$$

где $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1; N}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}$, найденные методом, основанным на кратных интегральных суммах.

4.7. Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов

4.7.1. Введение

Настоящий параграф посвящен получению, на основе формулы Ито, двух семейств аналитических формул для вычисления стохастических интегралов.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Рассмотрим процесс Ито $\eta_\tau \in \mathbb{R}^n$, определенный при $\tau \in [0, T]$, $T < \infty$, как решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\eta_\tau = a(\eta_\tau, \tau)d\tau + \Sigma(\eta_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau, \quad \eta_0 = \eta(0, \omega), \quad (4.171)$$

где $a(\eta, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\eta, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — неслучайные функции, $\mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_\tau$ измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами; случайная величина η_0 не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$. Относительно функций $a(\eta, \tau)$ и $\Sigma(\eta, \tau)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям AI-АIII главы 1. Если это не так, то будем приводить точные решения конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (4.171) с целью демонстрации существования их решений.*

Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество, для которого

$$P\{\eta_\tau \in Y \text{ при всех } \tau \in [0, T]\} = 1, \quad (4.172)$$

а функция $R(\eta, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau)$, $\frac{\partial R}{\partial \eta^{(i)}}(\eta, \tau)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}(\eta, \tau)$; $i, j = 1, \dots, n$ при всех $(\eta, \tau) \in Y \times [0, T]$.

Запишем формулу Ито для процесса $R(\eta_s, s)$

$$\int_t^s \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau)^\top d\eta_\tau = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s L_{\tau, \eta} \{R(\eta_\tau, \tau)\} d\tau \text{ с в.1,} \quad (4.173)$$

где $s, t \in [0, T]$; $s > t$; $L_{\tau, \eta}$ — оператор вида:

$$L_{\tau, \eta} \{\cdot\} = \frac{\partial \{\cdot\}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \Sigma^{(ir)}(\eta, \tau) \Sigma^{(jr)}(\eta, \tau) \frac{\partial^2 \{\cdot\}}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}.$$

*Большая часть приведенных в данном параграфе точных решений стохастических дифференциальных уравнений взяты из книги [50].

Пусть функция $R(\eta, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$L_{\tau, \eta} \{R(\eta, \tau)\} = \varphi(\tau), \quad (4.174)$$

где $\varphi(\tau)$ – некоторая скалярная неслучайная интегрируемая на промежутке $[0, T]$ функция. Тогда (4.173) примет вид:

$$\int_t^s \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau) \cdot d\eta_\tau = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s \varphi(\tau) d\tau \text{ с в.1.} \quad (4.175)$$

Соотношение (4.175) можно интерпретировать как аналитическую формулу для вычисления интеграла в левой части (4.175). В литературе известны лишь несколько формул типа (4.175) для конкретных функций $a(\eta, \tau)$, $\Sigma(\eta, \tau)$, $R(\eta, \tau)$, $\varphi(\tau)$. Приведем некоторые из них:

$$\int_t^s (f_\tau - f_s) df_\tau = -\frac{1}{2}(s - t) + \frac{1}{2}(f_s - f_t)^2 \text{ с в.1, } f_\tau \in \mathbb{R}^1, \quad (4.176)$$

$$\int_t^s \mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau = -\frac{m}{2}(s - t) + (|\mathbf{f}_s|^2 - |\mathbf{f}_t|^2) \text{ с в.1, } \mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m, \quad (4.177)$$

$$\int_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^m} = \frac{1}{2 - m} (|\mathbf{f}_s|^{2-m} - |\mathbf{f}_t|^{2-m}) \text{ с в.1, } m \geq 3, \mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m, \quad (4.178)$$

$$\int_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^2} = \ln |\mathbf{f}_s| - \ln |\mathbf{f}_t| \text{ с в.1, } \mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^2. \quad (4.179)$$

Формулу (4.176) можно найти в [9], а формулы (4.177)-(4.179) в [70].

Отметим, что для стохастических интегралов Стратоновича от случайных процессов специального вида справедливы аналитические формулы для их вычисления, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Так, предположим, что функция $F(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условиям леммы 1.6. Тогда, согласно лемме 1.6, имеем:

$$\int_t^{*s} F(f_\tau) df_\tau = \int_t^s F(f_\tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau) d\tau \text{ с в.1,} \quad (4.180)$$

где $f_\tau \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс.

С другой стороны, по формуле Ито

$$G(f_s) - G(f_t) = \frac{1}{2} \int_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau) d\tau + \int_t^s F(f_\tau) df_\tau \text{ с в.1,} \quad (4.181)$$

где $dG(x)/dx = F(x)$. Объединяя (4.180) и (4.181), получаем:

$$\int_t^{*s} F(f_\tau) df_\tau = G(f_s) - G(f_t) \text{ с в.1.} \quad (4.182)$$

Формулу (4.182) можно найти, например в [50].

Предлагаемый далее подход основывается на решении дифференциального уравнения (4.174) при некоторых допущениях относительно функций $R(\eta, \tau)$ и $\Sigma(\eta, \tau)$. Так пусть $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\Sigma(\eta, \tau) = \theta(\eta)\sigma(\tau)$, где $\theta(\eta) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma(\tau) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда дифференциальное уравнение (4.174) примет вид:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau) + \frac{1}{2} \sigma^2(\tau) \beta^2(\eta) \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}(\eta, \tau) = \varphi(\tau), \quad (4.183)$$

где $\beta^2(\eta) = \sum_{r=1}^m (\theta^{(r)}(\eta))^2$.

Решение уравнения (4.183) может быть найдено, например, методом аддитивного разделения переменных ($R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$) или мультипликативного разделения переменных ($R(\eta, \tau) = \rho(\eta)\psi(\tau)$).

4.7.2. Аддитивное разделение переменных

Пусть $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$, $\eta \in \mathbb{R}^1$. Тогда уравнение (4.183) примет вид:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{2} \sigma^2(\tau) \beta^2(\eta) \frac{d^2 \rho(\eta)}{d\eta^2} = \varphi(\tau). \quad (4.184)$$

После разделения переменных в (4.184) при $\sigma(\tau) \neq 0$ получим:

$$\frac{1}{2} \beta^2(\eta) \frac{d^2 \rho(\eta)}{d\eta^2} = \left(\varphi(\tau) - \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \right) \frac{1}{\sigma^2(\tau)} = \lambda = \text{const.} \quad (4.185)$$

Если $\beta^2(\eta) > 0$, то из (4.185) получим два дифференциальных уравнения: $d\psi(\tau)/d\tau = \varphi(\tau) - \lambda\sigma^2(\tau)$, $d^2\rho(\eta)/d\eta^2 = 2\lambda/\beta^2(\eta)$, решения которых имеют вид:

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_0^\tau (\varphi(u) - \lambda\sigma^2(u)) du, \quad (4.186)$$

$$\rho(\eta) = \rho_0 + \rho_1\eta + 2\lambda \int_{y_0}^{\eta} g(u)du, \quad (4.187)$$

где $g(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y_0}^u dz/\beta^2(z)$; $\rho_0, \rho_1, y_0, \psi_0$ – постоянные, $\beta^2(u) > 0$ при $u \in [y_0, \eta]$.

Подстановка (4.186) и (4.187) в $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, а $R(\eta, \tau)$ в (4.175) дает при $\lambda \neq 0$:

$$\int_t^s g(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + \int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u) du \text{ с в.1.} \quad (4.188)$$

При определенном выборе функции $\beta(z)$ интеграл $\int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u) du$ может быть вычислен аналитически. Тогда формула (4.188) будет определять при различных $\beta(z)$ целое семейство аналитических формул для вычисления стохастического интеграла $\int_t^s g(\eta_\tau) d\eta_\tau$.

Рассмотрим ряд примеров выбора функций $\beta(z)$ и соответствующих им формул из семейства (4.188). При этом, если выбираемая функция $\beta(z)$ такова, что функция $\Sigma(\eta, \tau)$ не удовлетворяет условию АII главы 1, или такова, что накладывает ограничения на область определения или область значений процесса η_τ , то в этом случае будем приводить примеры стохастических дифференциальных уравнений Ито и их точных решений η_τ с целью демонстрации существования процессов η_τ , удовлетворяющих формуле (4.188):

1. $\beta^2(\eta) = 1$:

$$\int_t^s \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s^2}{2} - \frac{\eta_t^2}{2} \text{ с в.1.}$$

2. $\beta^2(\eta) = \sqrt{y(\eta)}$, $y(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} a\eta^2 + b\eta + c$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s Arsh \frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}} d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \sqrt{a} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ с в.1,} \quad (4.189)$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x + b/2a) Arsh((2ax + b)/\sqrt{\Delta}) - \sqrt{y(x)}/\sqrt{a}$.

3. $\beta^2(\eta) = y(\eta)$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s arctg \frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}} d\eta_\tau = -\frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{def}{=} (x + b/2a) \arctg((2ax + b)/\sqrt{\Delta}) - (\sqrt{\Delta}/4a) \ln y(x)$.

$$4. \beta^2(\eta) = 1/\sqrt{y(\eta)}, \Delta = 4ac - b^2 > 0; a > 0 :$$

$$\int_t^s F_1(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F_2(\eta_s) - F_2(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $F_1(x) \stackrel{def}{=} ((2ax + b)/4a)\sqrt{y(x)} + (\Delta/(8a\sqrt{a})) \operatorname{Arsh}((2ax + b)/\sqrt{\Delta})$,
 $F_2(x) \stackrel{def}{=} (\Delta/(8a\sqrt{a}))F(x) + y^{3/2}(x)/6a$; функция $F(x)$ такая же, как
в формуле (4.189).

5. $\beta^2(\eta) = 1/P_{n-1}(\eta)$, где $P_{n-1}(\eta) > 0$ — многочлен степени $n - 1$ с вещественными коэффициентами:

$$\int_t^s Q_n(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + H_{n+1}(\eta_s) - H_{n+1}(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $Q_n(x) = \sum_{l=0}^n \beta_l x^{n-l}$, $P_{n-1}(x) = dQ_n(x)/dx$, $H_{n+1}(x) = \int Q_n(x) dx$, а
 $\beta_l \in \mathbb{R}^1$ — постоянные.

Далее будем считать η_0 постоянной.

$$6. \beta^2(\eta) = e^{-2\eta} :$$

$$\int_0^t e^{2\eta_\tau} d\eta_\tau = -t + \frac{1}{2} (e^{2\eta_t} - 1) \text{ с в.1,}$$

где, например: $\eta_t = \ln(f_t + e^{\eta_0})$ (решение уравнения: $d\eta_t = -0.5e^{-2\eta_t} dt + e^{-\eta_t} df_t$), $0 \leq |\eta_0| < \infty$, $t \leq \min\{t \geq 0 : f_t + e^{\eta_0} = 0\}$.

$$7. \beta^2(\eta) = \eta^2 :$$

$$\int_0^s \frac{d\eta_\tau}{\eta_\tau} = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \ln \eta_s - \ln \eta_0 \text{ с в.1,} \quad (4.190)$$

где, например: $\eta_t = \eta_0 e^{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma f_t}$ (решение уравнения: $d\eta_t = a\eta_t dt + \sigma\eta_t df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$; $a, \sigma = \text{const}$.

$$8. \beta^2(\eta) = \eta > 0 :$$

$$\int_0^s \ln \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \eta_s \ln \eta_s - \eta_s - \eta_0 \ln \eta_0 + \eta_0 \text{ с в.1,}$$

где, например: $\eta_t = (f_t + \sqrt{\eta_0})^2$ (решение уравнения: $d\eta_t = dt + 2\sqrt{\eta_t}df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$.

$$9. \beta^2(\eta) = \eta^2(\eta^2 - 1), \quad |\eta| > 1 :$$

$$\int_0^s \left(-\frac{1}{\eta_\tau} + \frac{1}{2} \ln \frac{\eta_\tau + 1}{\eta_\tau - 1} \right) d\eta_\tau = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \operatorname{Arctgh} x + 0.5 \ln(x^2 - 1) - \ln x$ и, например: $\eta_t = \sec(\sigma f_t + \operatorname{arcsec} \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt + \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$) или $\eta_t = \operatorname{cosec}(\sigma f_t + \operatorname{arccosec} \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt - \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$), $1 < \eta_0 < \infty$; для приведенных процессов η_t : $s \leq \max \{t \geq 0 : \eta_t > 0\}$, $\sigma = \text{const}$.

$$10. \beta^2(\eta) = \cos^4 \eta :$$

$$\int_0^s \left(\frac{\sin \eta_\tau}{\cos^3 \eta_\tau} + 2t \operatorname{tg} \eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1} \cos^{-2} x - 2 \ln \cos x$ и, например: $\eta_t = \operatorname{arctg}(e^{-t}(\operatorname{tg} \eta_0 + \sqrt{2} \int_0^t e^s df_s))$ (решение уравнения: $d\eta_t = -(\sin 2\eta_t + 0.25 \sin 4\eta_t) dt + \sqrt{2} \cos^2 \eta_t df_t$) или $\eta_t = \operatorname{arctg}(\sigma f_t + \operatorname{tg} \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -\sigma^2 \sin \eta_t \cos^3 \eta_t dt + \sigma \cos^2 \eta_t df_t$), $\cos \eta_0 > 0$; для приведенных процессов η_t : $s \leq \min \{t \geq 0 : \cos \eta_t = 0\}$, $\sigma = \text{const}$.

$$11. \beta^2(\eta) = \sin^4 \eta :$$

$$\int_0^s \left(-\frac{\cos \eta_\tau}{\sin^3 \eta_\tau} - 2ct \operatorname{tg} \eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1} \sin^{-2} x - 2 \ln \sin x$ и, например: $\eta_t = \operatorname{arccctg}(\sigma f_t + ct \operatorname{tg} \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2 \cos \eta_t \sin^3 \eta_t dt - \sigma \sin^2 \eta_t df_t$); для приведенного процесса η_t : $s \leq \min \{t \geq 0 : \sin \eta_t = 0\}$, $\sin \eta_0 > 0$, $\sigma = \text{const}$.

$$12. \beta^2(\eta) = (1 - \eta^2)^2.$$

$$\int_0^s \left(\frac{\eta_\tau}{2(1 - \eta_\tau^2)} + \frac{1}{4} u(\eta_\tau) \right) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s}{4} u(\eta_s) - \frac{\eta_0}{4} u(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

(4.191)

где $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|(1+x)/(1-x)|$ и, например: $\eta_t = th(\sigma f_t + Arth\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = -\sigma^2\eta_t(1-\eta_t^2)dt + \sigma(1-\eta_t^2)df_t$), $|\eta_0| < 1$ или $\eta_t = cth(\sigma f_t + Arch\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1-\eta_t^2)dt - \sigma(1-\eta_t^2)df_t$), $1 < |\eta_0| < \infty$, $\sigma = const$.

$$13. \beta^2(\eta) = |1 - \eta^2|, \quad |\eta| < 1 :$$

$$\int_0^s u(\eta_\tau) d\eta_\tau = - \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \eta_s u(\eta_s) + u_1(\eta_s) - \eta_0 u(\eta_0) - u_1(\eta_0), \quad (4.192)$$

где $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|(1+x)/(1-x)|$, $u_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|1-x^2|$ и, например: $\eta_t = ch(\sigma f_t + Arch\eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$), $\eta_t = \frac{\cos(\sigma f_t + arccos\eta_0)}{\cos\sigma f_t}$ (решение уравнения: $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt - \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$) или $\eta_t = \frac{\sin(\sigma f_t + arcsin\eta_0)}{\sin\sigma f_t}$ (решение уравнения: $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$), $\sigma = const$.

4.7.3. Мультипликативное разделение переменных

Пусть $R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$, где $\psi(\tau) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\rho(\eta) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда, подставляя $R(\eta, t) = \psi(\tau)\rho(\eta)$ в (4.183) и полагая в (4.183) $\varphi(\tau) \equiv 0$, получим:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\rho(\eta) + \frac{1}{2}\beta^2(\eta)\sigma^2(\tau)\psi(\tau)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = 0. \quad (4.193)$$

Разделив левую и правую части (4.193) на $\rho(\eta)\psi(\tau)\sigma^2(\tau)$ в предположении, что $\psi(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $\rho(\eta) \neq 0$, получим:

$$\frac{1}{\psi(\tau)\sigma^2(\tau)} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = - \frac{1}{2} \frac{\beta^2(\eta)}{\rho(\eta)} \frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \lambda = const. \quad (4.194)$$

Уравнение (4.194) эквивалентно двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \lambda\sigma^2(\tau)\psi(\tau), \quad (4.195)$$

$$\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} + \mu\rho(\eta) = 0, \quad \mu = 2\lambda. \quad (4.196)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4.195) имеет вид:

$\psi(\tau) = \psi_0 e^{\lambda \int_0^\tau \sigma^2(u) du}$, где ψ_0 – произвольная постоянная. Нетрудно видеть, что частным решением дифференциального уравнения (4.183)

является интеграл: $\int_0^\tau \varphi(u) du$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (4.183) с учетом сделанных допущений имеет вид:

$$R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta) + \int_0^\tau \varphi(u) du, \quad (4.197)$$

где $\rho(\eta)$ – решение дифференциального уравнения (4.196).

Подставляя (4.197) при $\psi_0 \neq 0$ в (4.175), получим, в рамках сделанных предположений, следующую формулу:

$$\int_t^s \psi(\tau) \frac{d\rho}{d\eta}(\eta_\tau) d\eta_\tau = \psi(s)\rho(\eta_s) - \psi(t)\rho(\eta_t) \text{ с в.1} \quad (4.198)$$

Рассмотрим примеры выбора $\beta(\eta)$, μ и $\rho(\eta)$ [71], которые могут быть использованы в формуле (4.198). Далее C_1, C_2, σ – постоянные.

1. $\beta^2(\eta) = 1$.

1.1 $\mu < 0$, $\rho(\eta) = C_1 e^{-\sqrt{|\mu|\eta}} + C_2 e^{\sqrt{|\mu|\eta}}$.

1.2 $\mu > 0$, $\rho(\eta) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}\eta) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}\eta)$.

2. $\beta^2(\eta) = 4(\eta^2 + 1)^2(a\eta^2 + a - 3)^{-1}$, $a > 3$, $\mu = 1$, $\rho(\eta) = (\eta^2 + 1)^{1/4} (C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta))$, где $u(\eta) = 0.5\sqrt{a-1} \operatorname{Arsh}(\eta)$.

3. $\beta^2(\eta) = (a^2\eta^2 + a)^{-1}$, $a > 0$, $\mu = -1$, $\rho(\eta) = e^{a\eta^2/2} (C_1 + C_2 F(\eta))$, где $F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} e^{-ax^2} dx$.

4. $\beta^2(\eta) = (\eta^2 + 1)^2$.

4.1 $\mu + 1 = \alpha^2 > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta))$.

4.2 $\mu + 1 = -\alpha^2 < 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 \operatorname{ch} u(\eta) + C_2 \operatorname{sh} u(\eta))$.

В примерах 4.1, 4.2 полагается $u(\eta) = \alpha \arctg \eta$.

4.3 $\mu = -1$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 + C_2 \arctg \eta)$.

Процесс η_t в примерах 4.1-4.3, например, имеет вид: $\eta_t = tg(t + f_t + \arctg \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = (1 + \eta_t)(1 + \eta_t^2)dt + (1 + \eta_t^2)df_t$), $\eta_t = tg(\sigma f_t + \arctg \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2 \eta_t(1 + \eta_t^2)dt + \sigma(1 + \eta_t^2)df_t$) или $\eta_t = ctg(\sigma f_t + \arctg \eta_0)$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2 \eta_t(1 + \eta_t^2)dt - \sigma(1 + \eta_t^2)df_t$), $\sigma = const$.

5. $\beta^2(\eta) = \eta^2 - 1 > 0$, $\mu = -6$, $\rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta$ – частное решение. При этом, например: $\eta_t = ch(\sigma f_t + \operatorname{Arch} \eta_0)$ (см. (4.192)).

6. $\beta^2(\eta) = 1 - \eta^2 > 0$, $\mu = 6$, $\rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta$ – частное решение. При этом, например: $\eta_t = \cos(\sigma f_t + \arccos \eta_0)$ или $\eta_t = \sin(\sigma f_t + \arcsin \eta_0)$ (см. (4.192)).

$$7. \beta^2(\eta) = \eta^4.$$

$$7.1 \mu < 0, \rho(\eta) = \eta (C_1 e^{\sqrt{|\mu|/\eta}} + C_2 e^{-\sqrt{|\mu|/\eta}}).$$

7.2 $\mu > 0, \rho(\eta) = \eta (C_1 \cos(\sqrt{|\mu|} |\eta^{-1}|) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|} |\eta^{-1}|))$. При этом, например: $\eta_t = \eta_0(1 - \eta_0 \sigma f_t)^{-1}$ (решение уравнения: $d\eta_t = \sigma^2 \eta_t^3 dt + \sigma \eta_t^2 df_t$).

$$8. \beta^2(\eta) = \eta^2.$$

$$8.1 c^2 = 0.25 - \mu > 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 \eta^c + C_2 \eta^{-c}).$$

$$8.2 c^2 = \mu - 0.25 > 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 \cos(c \ln \eta) + C_2 \sin(c \ln \eta)).$$

$$8.3 \mu = 0.25, \rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 + C_2 \ln \eta).$$

В примерах 8.1-8.3 процесс η_t может быть, например, такой же, как в формуле (4.190).

9. $\beta^2(\eta) = -\eta^2 \ln \eta > 0$ ($0 < \eta < 1$), $\mu = -1$, $\rho(\eta) = C_1 \ln \eta + C_2 \left(\eta - \ln \eta \int_{\eta_0}^{\eta} dy / \ln y \right)$. При этом, например: $\eta_t = e^{-(f_t + \sqrt{-\ln \eta_0})^2}$ (решение уравнения: $d\eta_t = -\eta_t (2 \ln \eta_t + 1) dt - 2 \eta_t \sqrt{-\ln \eta_t} df_t$), где $0 < \eta_0 < 1$.

$$10. \beta^2(\eta) = \eta^4 / (2\eta^2 + 1), \rho(\eta) = C_1 (\eta^2 - \eta) e^{1/\eta} + C_2 (\eta^2 + \eta) e^{-1/\eta}, \mu = -1.$$

$$11. \beta^2(\eta) = (\eta^2 - 1)^2.$$

$$11.1 \mu - 1 = 4\alpha^2 > 0, \rho(\eta) = \sqrt{|\eta^2 - 1|} (C_1 \cos(\alpha G(\eta)) + C_2 \sin(\alpha G(\eta))).$$

$$11.2 \mu - 1 = -4\alpha^2 < 0, \rho(\eta) = (\eta + 1) (C_1 u(\eta)^{\alpha-1/2} + C_2 u(\eta)^{-\alpha-1/2}).$$

$$11.3 \mu = 1, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 - 1} (C_1 + C_2 G(\eta)).$$

В примерах 11.1-11.3 полагается $u(\eta) = |(\eta+1)/(\eta-1)|$, а в примерах 11.1 и 11.3 полагается $G(\eta) = \ln(u(\eta))$.

Процесс η_t в примерах 11.1, 11.2 может быть, например, таким же, как в формуле (4.191), а в примере 11.3, например: $\eta_t = \text{cth}(\sigma f_t + \text{Arcth} \eta_0)$ (см. (4.191)).

4.8. Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам, основанное на кратных рядах Фурье

4.8.1. Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Рассмотрим неубывающую совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, определенную на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon$ - σ -алгебра борелевских множеств $\mathbb{R}^1$, лежащих в множестве $\{x : \varepsilon \leq |x| \leq 1/\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$; $\mathcal{B}_0$ - сумма всех

$\mathcal{B}_\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$. Рассмотрим заданную на $[0, T] \times \mathbb{R}^1$ пуассоновскую меру ν , значения которой на множестве $\Delta \times \mathcal{A}$ обозначим через $\nu(\Delta, \mathcal{A})$, где $\Delta \subset [0, T]$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0$. Предположим, что $M\{\nu(\Delta, \mathcal{A})\} = |\Delta|\Pi(\mathcal{A})$, где $|\Delta|$ – лебегова мера Δ , а $\Pi(\mathcal{A})$ – мера на σ -алгебре борелевских множеств $\mathbb{R}^1$, которая конечна при $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_0$. Положим $\tilde{\nu}(\Delta, \mathcal{A}) = \nu(\Delta, \mathcal{A}) - |\Delta|\Pi(\mathcal{A})$. Будем считать, что процесс Пуассона $\nu([0, t], \mathcal{A})$ $\mathcal{F}_t$ -измерим при всех $t \in [0, T]$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_0$, а его приращения $\nu([t, t+s], \mathcal{A})$, $s > 0$, не зависят от событий σ -алгебры $\mathcal{F}_t$.

Будем обозначать через $H_n([0, T], \mathbb{R}^1)$ класс измеримых по совокупности переменных (t, y, ω) и $\mathcal{F}_t$ -измеримых при всех $(t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^1$ случайных функций $\varphi(t, y, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t, y)$ таких, что

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^1} M\{|\varphi^n(t, y)|\} \Pi(dy) dt < \infty.$$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$, которое удовлетворяет условию (4.38) и определим на этом разбиении ступенчатую функцию $\varphi_N(t, y)$ следующим образом: $\varphi_N(t, y) = \varphi(\tau_{j-1}, y)$ с в.1 при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$; $j = 1, \dots, N$. Определим стохастический интеграл по мартингальной мере $\tilde{\nu}$ равенством [4]:

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^1} \varphi_N(\tau_{k-1}, y) \tilde{\nu}([\tau_{k-1}, \tau_k), dy) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(\tau, y) \tilde{\nu}(d\tau, dy),$$

где $\varphi_N(t, y)$ – произвольная последовательность ступенчатых функций из $H_2([0, T], \mathbb{R}^1)$, для которой $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^1} M\{|\varphi(t, y) - \varphi_N(t, y)|^2\} \Pi(dy) dt \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

4.8.2. Симметризованный стохастический интеграл по пуассоновским процессам

Введем в рассмотрение следующий повторный стохастический интеграл:

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \chi_k(t_k, y_k) \dots \int_t^{t_2} \int_{\mathbb{R}^1} \chi_1(t_1, y_1) \tilde{\nu}_{dt_1, dy_1}^{(i_1)} \dots \tilde{\nu}_{dt_k, dy_k}^{(i_k)}, \quad (4.199)$$

где $P[\chi^{(0)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $\tilde{\nu}^{(i)}(dt, dy) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_{dt, dy}^{(i)}$, $\nu^{(i)}(dt, dy) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{dt, dy}^{(i)}$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\nu^{(i)}(i = 1, \dots, m)$ – независимые пуассоновские меры, заданные на $[0, T] \times \mathbb{R}^1$; $\tilde{\nu}_{dt, dy}^{(0)} = \Pi(dy)dt$; неслучайные функции $\chi_l(s, y) \in H_2([t, T], \mathbb{R}^1)$, $C([t, T] \times \mathbb{R}^1)$ (здесь и далее $C(D)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций в D); $l = 1, \dots, k$, $\chi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\chi_1, \dots, \chi_k)$, $\chi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \chi_1$, $\chi_l(\tau, y) = \psi_l(\tau)\varphi_l(y)$, $\psi_l(\tau) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi_l(y) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Определим стохастические интегралы $P[\chi^{(k)}]_{T,t}^{s_l, \dots, s_1}$ следующим образом: для каждой подпоследовательности $s_{p+q}, s_{p+q-1}, \dots, s_p$ встречающейся в последовательности $s_l, \dots, s_1$ и такой, что $s_{p+q} = s_{p+q-1} + 1, \dots, s_{p+1} = s_p + 1$ ($2 \leq p+q \leq l$; $p, q = 1, 2, \dots$) заменить в интеграле $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ последовательность дифференциалов $\tilde{\nu}_{dt_p, dy_p}^{(i_p)} \dots \tilde{\nu}_{dt_{p+q+1}, dy_{p+q+1}}^{(i_{p+q+1})}$ на $\nu_{dt_{p+q+1}, dy_{p+q+1}}^{(i_{p+q+1})}$ (количество символов интегралов при этом уменьшится соответствующим образом).

Приведем пример, поясняющий способ построения $P[\chi^{(k)}]_{T,t}^{s_l, \dots, s_1}$ из $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$:

$$P[\chi^{(4)}]_{t,T}^{2,1} = \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \chi_4(t_4, y_4) \int_t^{t_4} \int_{\mathbb{R}^1} \prod_{l=1}^3 \chi_l(t_3, y_3) \nu_{dt_3, dy_3}^{(i_3)} \tilde{\nu}_{dt_4, dy_4}^{(i_4)}.$$

Введем повторный симметризованный стохастический интеграл по пуассоновским процессам следующим образом:

$$P^*[\chi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} P[\chi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} \frac{1}{g(s_1, \dots, s_r)} \prod_{l=1}^r \mathbf{1}_{\{i_{s_l} = i_{s_l+1} \neq 0\}} P[\chi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}, \quad (4.200)$$

где $g(s_1, \dots, s_r) = (q_1 + 1)! \dots (q_{p_k} + 1)!$; $p_k = 1, 2, \dots, [\frac{k}{2}]$; $q_1, \dots, q_{p_k}$ – длины всех возможных подпоследовательностей типа g , $g-1, \dots, g-m$; $g = 1, \dots, k-1$; $m = 0, 1, \dots, k-2$, входящих в последовательность $s_r, \dots, s_1$, для которой $s_r > \dots > s_1$; $s_r, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1$.

В настоящем параграфе будет показано, что стохастический интеграл $P^*[\chi^{(k)}]_{T,t}$ разлагается в сходящийся в среднем степени n ; $n \in N$ кратный ряд из произведений пуассоновских случайных величин.

В дальнейшем нам потребуются стандартные оценки моментов сто-

$$\mathbf{M} \left\{ \left| \int_t^T \xi_\tau d\tau \right|^{2m} \right\} \leq (T-t)^{2m-1} \int_t^T \mathbf{M} \{ |\xi_\tau|^{2m} \} d\tau, \quad (4.201)$$

$$a_n(t, T) \leq \max_{j \in \{n, 1\}} \left\{ \left[\int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \left((b_n(\tau, y))^{1/n} + 1 \right)^n - 1 \right) \Pi(dy) d\tau \right]^j \right\}, \quad (4.202)$$

$$\mathbf{M} \{ |\tilde{\Psi}_{\tau, t}|^2 \} = \int_t^\tau \int_{\mathbb{R}^1} \mathbf{M} \{ |\varphi^2(s, y)| \} \Pi(dy) d\tau, \quad (4.203)$$

где $a_n(t, T) = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbf{M} \{ |\Psi_{\tau, t}|^n \}$, $\Psi_{\tau, t} = \int_t^\tau \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(s, y) \nu_{ds, dy}$, $b_n(\tau, y) = \mathbf{M} \{ |\varphi(\tau, y)|^n \}$, $\tilde{\Psi}_{\tau, t} = \int_t^\tau \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(s, y) \tilde{\nu}_{ds, dy}$; $m, n \in N$. При этом предполагается, что $\xi_\tau^m \in \mathcal{M}_2([t, T])$ в (4.201), $\varphi(\tau, y) \in H_n([t, T], \mathbb{R}^1)$ в (4.202) и $\varphi(\tau, y) \in H_2([t, T], \mathbb{R}^1)$ в (4.203). Здесь $\mathcal{M}_2([t, T])$ – класс измеримых по совокупности переменных (τ, ω) , $\mathcal{F}_\tau$ измеримых при всех $\tau \in [t, T]$ случайных процессов, для которых $\int_t^T \mathbf{M} \{ |\xi_\tau|^2 \} d\tau < \infty$.

Отметим также, что в силу соотношения $\nu_{ds, dy} = \tilde{\nu}_{ds, dy} + \Pi(dy)ds$ и неравенства Минковского имеем:

$$\left(\mathbf{M} \{ |\tilde{\Psi}_{\tau, t}|^{2m} \} \right)^{1/2m} \leq \left(\mathbf{M} \{ |\Psi_{\tau, t}|^{2m} \} \right)^{1/2m} + \left(\mathbf{M} \{ |\hat{\Psi}_{\tau, t}|^{2m} \} \right)^{1/2m}, \quad (4.204)$$

где $m \in N$, $\hat{\Psi}_{\tau, t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^\tau \int_{\mathbb{R}^1} \varphi(s, y) \Pi(dy)ds$. При этом предполагается, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(s, y) \Pi(dy) \right)^m \in \mathcal{M}_2([t, T]), \quad \varphi^m(\tau, y) \in H_2([t, T], \mathbb{R}^1).$$

Рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 4.10. Пусть для $l = 1, \dots, k$ выполнены следующие условия:

1. $\chi_l(\tau, y) \in C([t, T] \times \mathbb{R}^1)$, $H_2([t, T], \mathbb{R}^1)$;
2. Для всех $\tau \in [t, T]$ $\int_{\mathbb{R}^1} \left| \frac{\partial \chi_l(\tau, y)}{\partial t} \right|^2 \Pi(dy) < \infty$;
3. Для всех $\tau \in [t, T]$ $\int_{\mathbb{R}^1} |\chi_l(\tau, y)|^2 \Pi(dy) < \infty$.

Тогда

$$P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T, t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \int_{\mathbb{R}^1} \chi_l(\tau_{j_l}, y_l) \bar{\nu}_{((\tau_{j_l}, \tau_{j_{l+1}}), dy)}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \quad (4.205)$$

где $\{\tau_{ji}\}_{ji=0}^{N-1}$ – разбиение промежутка $[t, T]$, которое удовлетворяет условию (4.38), $\tilde{\nu}^{(i)}([t_1, t_2], dy) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_{([t_1, t_2], dy)}^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$; $\tilde{\nu}_{([\tau, s], dy)}^{(i)} = \tilde{\nu}_{([\tau, s], dy)}^{(i)}$ или $\nu_{([\tau, s], dy)}^{(i)}$; интеграл $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T, t}$ отличается от интеграла $P[\chi^{(k)}]_{T, t}$ тем, что в $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T, t}$ вместо $\tilde{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i)}$ стоят $\tilde{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i)}$, равные $\tilde{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i)}$ или $\nu_{dt_l, dy_l}^{(i)}$; $l = 1, \dots, k$.

Доказательство: Используя (4.201) при $m = 1$ и (4.203), а также условия леммы 4.10 нетрудно заметить, что интегральная сумма интеграла $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T, t}$ может быть представлена в условиях леммы 4.10 в виде допредельного выражения в правой части (4.205) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \rightarrow \infty$. $\square$

В дальнейшем будет использоваться следующее утверждение.

Лемма 4.11. Пусть для всех $l = 1, \dots, k$ и $s = 1, \dots, 2^k$ выполнены условия:

1. $\chi_l(\tau, y) \in C([t, T] \times \mathbb{R}^1)$, $H_s([t, T], \mathbb{R}^1)$;
2. Для всех $\tau \in [t, T]$ $\int_{\mathbb{R}^1} |\chi_l(\tau, y)|^s \Pi(dy) < \infty$;
3. Для всех $(\tau, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}^1$ $|\chi_l(\tau, y)| < \infty$.

Тогда

$$\begin{aligned} M\{|\varepsilon_k|^2\} &\stackrel{\text{def}}{=} M\left\{\left|\prod_{l=1}^k \int \chi_l(\tau, y) \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], dy)} - \int \prod_{l=1}^k \chi_l(\tau, y) \nu_{([\tau, \theta], dy)}\right|^2\right\} \leq \\ &\leq C_k |\theta - \tau|^2, \end{aligned}$$

где ν – скалярная пуассоновская мера на $[t, T] \times \mathbb{R}^1$; $C_k < \infty$ – постоянная; $\tau, \theta \in [t, T]$, $\theta > \tau$.

Доказательство: Выберем последовательности ступенчатых функций $\chi_l^{(p)}(\tau, y)$; $l = 1, \dots, k$ вида:

$$\chi_l^{(p)}(\tau, y) = \sum_{r=1}^p \alpha_r^{(l)}(\tau) \mathbf{1}_{A_r}(y), \quad (4.206)$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|\chi_l^{(p)}(\tau, y)| < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^1} |\chi_l^{(p)}(\tau, y)|^s \Pi(dy) < \infty, \quad (4.207)$$

$$\int_{\mathbb{R}^1} |\chi_l(\tau, y) - \chi_l^{(p)}(\tau, y)|^s \Pi(dy) \rightarrow 0 \quad (4.208)$$

при $p \rightarrow \infty$; $s = 1, \dots, 2^k$; $l = 1, \dots, k$, где множества A_r попарно без общих точек и ограничены ($r = 1, \dots, p$), $p < \infty$, $\alpha_r^{(l)}(\tau)$ – не зависят от y , $1_A(y) = 1$ при $y \in A$ и $1_A(y) = 0$ иначе.

Рассмотрим случай $k = 2$. Заметим, что $\varepsilon_2 = \tilde{\varepsilon}_2^{(p)} + \hat{\varepsilon}_2^{(p)} + \bar{\varepsilon}_2^{(p)}$, где $\tilde{\varepsilon}_2^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} J_{\tau, \theta}^{(1)} J_{\tau, \theta}^{(2)} - J_{\tau, \theta}^{(1)p} J_{\tau, \theta}^{(2)p}$, $\hat{\varepsilon}_2^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} J_{\tau, \theta}^{(1)p} J_{\tau, \theta}^{(2)p} - J_{\tau, \theta}^{(1,2)p}$, $\bar{\varepsilon}_2^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} J_{\tau, \theta}^{(1,2)p} - J_{\tau, \theta}^{(1,2)}$ и $J_{\tau, \theta}^{(l)} = \int_{\mathbb{R}^1} \chi_l(\tau, y) \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], dy)}$, $J_{\tau, \theta}^{(l)p} = \int_{\mathbb{R}^1} \chi_l^{(p)}(\tau, y) \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], dy)}$; $l = 1, 2$; $J_{\tau, \theta}^{(1,2)p} = \int_{\mathbb{R}^1} \chi_1^{(p)}(\tau, y) \chi_2^{(p)}(\tau, y) \nu_{([\tau, \theta], dy)}$, $J_{\tau, \theta}^{(1,2)} = \int_{\mathbb{R}^1} \chi_1(\tau, y) \chi_2(\tau, y) \nu_{([\tau, \theta], dy)}$.

В силу предположений о ступенчатых функциях $\chi_l^{(p)}(\tau, y)$; $l = 1, 2$ и условий леммы имеем: $\text{l.i.m.} \tilde{\varepsilon}_2^{(p)} = \text{l.i.m.} \bar{\varepsilon}_2^{(p)} = 0$ при $p \rightarrow \infty$.

Таким образом для доказательства леммы в случае $k = 2$ остается показать, что $\mathbf{M} \left\{ |\hat{\varepsilon}_2^{(p)}|^2 \right\} \leq C_2 |\theta - \tau|^2$, $C_2 < \infty$.

С использованием свойств мер ν и $\tilde{\nu}$ [4] имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ |\hat{\varepsilon}_2^{(p)}|^2 \right\} &\leq 2\mathbf{M} \left(\sum_{r=1}^p \alpha_r^{(1)}(\tau) \alpha_r^{(2)}(\tau) (\tilde{\nu}_{([\tau, \theta], A_r)}^2 - \nu_{([\tau, \theta], A_r)}) \right)^2 + \\ &+ 2\mathbf{M} \left(\sum_{\substack{r, l=1 \\ r \neq l}}^p \alpha_r^{(1)}(\tau) \alpha_r^{(2)}(\tau) \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], A_r)} \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], A_l)} \right)^2 = \\ &= 2|\theta - \tau|^2 \left\{ 2 \sum_{r=1}^p (\alpha_r^{(1)}(\tau))^2 (\alpha_r^{(2)}(\tau))^2 \Pi^2(A_r) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{r, l=1 \\ r \neq l}}^p (\alpha_r^{(1)}(\tau))^2 (\alpha_l^{(2)}(\tau))^2 \Pi(A_r) \Pi(A_l) \right\} \leq \\ &\leq 4|\theta - \tau|^2 \int_{\mathbb{R}^1} \left(\chi_1^{(p)}(\tau, y) \right)^2 \Pi(dy) \int_{\mathbb{R}^1} \left(\chi_2^{(p)}(\tau, y) \right)^2 \Pi(dy) \leq C_2 |\theta - \tau|^2, \end{aligned}$$

где $C_2 < \infty$.

При $k > 2$ имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(p)} &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{l=1}^k \int_{\mathbb{R}^1} \chi_l^{(p)}(\tau, y) \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], dy)} - \int_{\mathbb{R}^1} \prod_{l=1}^k \chi_l^{(p)}(\tau, y) \nu_{([\tau, \theta], dy)} = \\ &= \sum_{r=1}^p \prod_{l=1}^k \alpha_r^{(l)} (\tilde{\nu}_{([\tau, \theta], A_r)}^k - \nu_{([\tau, \theta], A_r)}) + \sum_{(r_1, \dots, r_k) \in \mathcal{C}_{k,p} \setminus \mathcal{D}_{k,p}} \prod_{l=1}^k \alpha_{r_l}^{(l)} \tilde{\nu}_{([\tau, \theta], A_{r_l})}, \end{aligned} \quad (4.209)$$

где $C_{k,p} = \{(r_1, \dots, r_k) : r_1, \dots, r_k = 1, \dots, p\}$, $\mathcal{D}_{k,p} = \{(r_1, \dots, r_k) : r_1 = \dots = r_k = 1, \dots, p\}$. С использованием моментных свойств мер ν и $\tilde{\nu}$ [4] нетрудно убедиться, что, согласно предположениям о ступенчатых функциях $\chi_l^{(p)}(\tau, y)$; $l = 1, \dots, k$, второй момент правой части (4.209) не превосходит величины $C_k |\theta - \tau|^2$, $C_k < \infty$ и, кроме того, в условиях леммы левая часть (4.209) стремится к ε_k в среднеквадратическом смысле при $p \rightarrow \infty$. Лемма доказана. $\square$

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{R}^k} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, y_1, \dots, \tau_{j_k}, y_k) \prod_{l=1}^k \tilde{\nu}_{(\tau_{j_l}, \tau_{j_l+1}), dy_l}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} P[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{R}^k} \left\{ \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} - \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{N-2} \right\} \Phi(\tau_{j_1}, y_1, \dots, \tau_{j_k}, y_k) \times \\ \times \prod_{l=1}^k \tilde{\nu}_{(\tau_{j_l}, \tau_{j_l+1}), dy_l}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} P[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k}, \end{aligned}$$

$$\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_{\mathfrak{R}^1} \dots \int_t^{t_2} \int_{\mathfrak{R}^1} \Phi(\tau_{j_1}, y_1, \dots, \tau_{j_k}, y_k) \tilde{\nu}_{dt_1, dy_1}^{(i_1)} \dots \tilde{\nu}_{dt_k, dy_k}^{(i_k)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (4.205), Γ_k – граница гиперкуба $[t, T]^k$.

Далее через $\hat{P}[\bar{\Phi}]_{T,t}^{(k)}$, $P[\bar{\Phi}]_{T,t}^{(k)}$ будем обозначать повторные стохастические интегралы, которые отличаются соответственно от интегралов $\hat{P}[\Phi]_{t,T}^{(k)}$, $P[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ тем, что величины $\tilde{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i_l)}$ в $\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ и $P[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ заменяются на $\bar{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i_l)}$, где $\bar{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i_l)} = \tilde{\nu}_{dt_l, dy_l}^{(i_l)}$ или $\nu_{dt_l, dy_l}^{(i_l)}$; $l = 1, \dots, k$.

Замечание 4.10. Заметим, что если функция $\Phi(\tau_{j_1}, y_1, \dots, \tau_{j_k}, y_k)$ удовлетворяет условиям леммы 4.10 по каждой паре переменных (t_l, y_l) ; $l = 1, \dots, k$, то для интеграла $\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ справедливо с вероятностью 1 равенство типа (4.205).

4.8.3. Разложение повторных симметризованных стохастических интегралов по пуассоновским процессам

В настоящем параграфе докажем следующую теорему.

Теорема 4.6. Пусть для $l = 1, \dots, k$ и $s = 1, \dots, \max\{2^k, 2m\}$ ($m \in \mathbb{N}$) выполнены условия:

1. $\chi_l(\tau, y) \in C([t, T] \times \mathbb{R}^1)$, $H_s([t, T], \mathbb{R}^1)$;
2. Для всех $\tau \in [t, T]$ $\int_{\mathbb{R}^1} |\chi_l(\tau, y)|^s \Pi(dy) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^1} \left| \frac{\partial \chi_l(\tau, y)}{\partial t} \right|^p \Pi(dy) < \infty$; $p = 2, 4$;
3. Для всех $(\tau, y) \in [t, T] \times \mathbb{R}^1$ $|\chi_l(\tau, y)| < \infty$;
4. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$;
5. Выполнено условие 3 теоремы 4.2.

Тогда повторный симметризованный стохастический интеграл $P^*[\chi^{(k)}]_{T,t}$ разлагается в следующий, сходящийся в среднем степени $2m$; $m \in N$ кратный ряд:

$$P^*[\chi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^\infty \dots \sum_{j_k=0}^\infty C_{j_k \dots j_1} \prod_{s=1}^k \pi_{(j_s)_{T,t}}^{(i_s)},$$

где $C_{j_k \dots j_1}$ имеют вид (4.26); $\pi_{(j_s)_{T,t}}^{(i_s)} = \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \phi_{j_s}(\tau) \varphi_s(y) \tilde{\nu}_{d\tau, dy}^{(i_s)}$ — независимые при различных i_s и некоррелированные при различных j_s пуассоновские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\int \varphi_s^2(y) \Pi(dy)$.

Для доказательства теоремы 4.6 докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.12. Пусть выполнены условия лемм 4.10 и 4.11. Тогда

$$P[B_{k-1}^\pm \{\tilde{K}\}]_{T,t}^{(k)} = P^*[\chi^{(k)}]_{T,t} \text{ с в.1,} \quad (4.210)$$

где $B_{k-1}^\pm \{\tilde{K}(t_1, y_1, \dots, t_k, y_k)\} = B_{k-1}^\pm \{K(t_1, \dots, t_k)\} \prod_{l=1}^k \varphi_l(y_l)$, где функция $B_{k-1}^\pm \{K(t_1, \dots, t_k)\}$ имеет вид (4.27).

Доказательство: Подстановка (4.27) в интегральную сумму интеграла $P[B_{k-1}^\pm \{\tilde{K}\}]_{T,t}^{(k)}$ и учет лемм 4.10 и 4.11 приводит к тому, что интеграл $P[B_{k-1}^\pm \{\tilde{K}\}]_{T,t}^{(k)}$ равен с вероятностью 1 правой части (4.200). Поэтому согласно определению интеграла $P^*[\chi^{(k)}]_{T,t}$ получаем (4.210). Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.13. Пусть для $l = 1, \dots, k$ выполнены условия:

1. $g_l(\tau, y) \in C([t, T] \times \mathbb{R}^1)$, $H_p([t, T], \mathbb{R}^1)$; $p = 2^k$;
2. Для всех $\tau \in [t, T]$ $\int_{\mathbb{R}^1} \left| \frac{\partial g_l(\tau, y)}{\partial t} \right|^p \Pi(dy) < \infty$; $p = 2, 4$.

Тогда

$$\prod_{l=1}^k \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} g_l(s, y) \bar{\nu}_{ds, dy}^{(i)} = P[\bar{\Phi}]_{T, t}^{(k)} c \text{ в.1,}$$

где $\Phi(t_1, y_1, \dots, t_k, y_k) = \prod_{l=1}^k g_l(t_l, y_l)$; $g_l(t, y)$ – неслучайна.

Доказательство: Обозначим: $J[\bar{g}_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^1} g_l(\tau_j, y) \bar{\nu}_{([\tau_j, \tau_{j+1}), dy)}^{(i)}$,
 $J[\bar{g}_l]_{T, t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} g_l(s, y) \bar{\nu}_{ds, dy}^{(i)}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_{T, t} = \\ & = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{q=1}^{l-1} J[\bar{g}_q]_{T, t} \right) (J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T, t}) \left(\prod_{q=l+1}^k J[\bar{g}_q]_N \right). \end{aligned}$$

Используя неравенства Минковского и Коши-Буняковского вместе с (4.201), (4.202), (4.204) и условиями леммы 4.13 получаем:

$$\left(\mathbf{M} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_{T, t} \right|^2 \right\} \right)^{1/2} \leq C_k \sum_{l=1}^k (\mathbf{M} \{ |J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T, t}|^4 \})^{1/4}, \quad (4.211)$$

где $C_k < \infty$. Поскольку $J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T, t} = \sum_{q=0}^{N-1} J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$, где
 $J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} = \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} \int_{\mathbb{R}^1} (g_l(\tau_q, y) - g_l(s, y)) \bar{\nu}_{ds, dy}^{(i)}$, то в силу независимости
 $J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$ при различных q имеем [65]:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ |J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \} + \\ & + 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{M} \{ |J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbf{M} \{ |J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}|^2 \}. \end{aligned} \quad (4.212)$$

Далее используя (4.201)-(4.204) и условия леммы 4.13 получаем, что правая часть (4.212) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Учитывая этот факт и (4.211) приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 4.14. Пусть неслучайные функции $\Phi_l(\tau, y) : [t, T] \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ принадлежат классу $H_s([t, T], \mathbb{R}^1)$ и для всех $\tau \in [t, T] \int_{\mathbb{R}^1} |\Phi(\tau, y)|^s \Pi(dy)$

$< \infty$ $s = 1, \dots, 2^k$; $l = 1, \dots, k$. Тогда $P[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k} = 0$ с вероятностью 1, где $\Phi(t_1, y_1, \dots, t_k, y_k) = \prod_{l=1}^k \Phi_l(t_l, y_l)$.

Доказательство: Согласно определению интегральная сумма для $P[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k}$ состоит из конечной суммы слагаемых вида: $A[\Phi]_{1,N-1}^{(p)} B[\Phi]_{0;N}^{(k-p)}$, где

$$A[\Phi]_{1,N-1}^{(p)} = \sum_{s_1, \dots, s_p=1}^{N-2} \prod_{l=1}^p \int_{\mathbb{R}^1} \Phi_{g_l}(\tau_{s_l}, y) \tilde{\nu}_{([\tau_{s_l}, \tau_{s_l+1}), dy)}^{(r_l)}$$

$$B[\Phi]_{0;N}^{(k-p)} = \prod_{l=1}^{k-p} \left(\int_{\mathbb{R}^1} \Phi_{g_{l+p}}(\tau_0, y) \tilde{\nu}_{([\tau_0, \tau_1), dy)}^{(r_{p+l})} + \int_{\mathbb{R}^1} \Phi_{g_{l+p}}(\tau_{N-1}, y) \tilde{\nu}_{([\tau_{N-1}, \tau_N), dy)}^{(r_{p+l})} \right),$$

где $A[\Phi]_{1,N-1}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, $\{r_1, \dots, r_k\} = \{i_1, \dots, i_k\}$; $p = 0, 1, \dots, k-1$; $k-p = 1, \dots, k$; $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$; $\{g_1, \dots, g_k\} = \{1, \dots, k\}$. Используя (4.201)-(4.204) и условия леммы убеждаемся, что $M \left\{ \left| A[\Phi]_{1,N-1}^{(p)} \right|^2 \right\} < \infty$. Далее используя неравенство Минковского, условия леммы и независимость $A[\Phi]_{1,N-1}^{(p)}$ и $B[\Phi]_{0;N}^{(k-p)}$ нетрудно убедиться в том, что $P[\Phi]_{t,T}^{\Gamma_k} = 0$ с вероятностью 1. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.15. Пусть выполнены условия теоремы 4.6. Тогда справедливо следующее представление:

$$P^*[\chi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{s=1}^k \pi_{(j_s)T,t}^{(i_s)} + P[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1,} \quad (4.213)$$

где

$$\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k, y_1, \dots, y_k) = R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k) \prod_{s=1}^k \varphi_s(y_s),$$

где $R_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k)$ имеет вид (4.60), а остальные обозначения такие же, как в теореме 4.6.

Доказательство: Нетрудно показать, с использованием леммы 4.14, что в условиях теоремы 4.6 $P[\mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{\tilde{K}\}]_{T,t}^{\Gamma_k} = 0$ с вероятностью 1. Кроме этого в тех же условиях справедливо разложение (4.28), любой набор функций вида: $g_s(\tau, y) = \phi_{j_s}(\tau) \varphi_s(y)$; $s = 1, \dots, k$; $j_s < \infty$ удовлетворяет условиям леммы 4.13, а также справедлива лемма 4.12. Таким образом, применяя лемму 4.12, разложение (4.28), лемму 4.13 ко всем наборам функций $g_s(\tau, y) = \phi_{j_s}(\tau) \varphi_s(y)$; $s = 1, \dots, k$; $j_s < \infty$ и равенство $P[\mathcal{B}_{k-1}^{\pm} \{\tilde{K}\}]_{T,t}^{\Gamma_k} = 0$ с в.1, получим представление (4.213). $\square$

Следует отметить, что согласно (4.61) и замечанию 4.8 имеем

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{p_k \rightarrow 0} \tilde{R}_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k, y_1, \dots, y_k) = 0, \quad (4.214)$$

где $(t_1, \dots, t_k, y_1, \dots, y_k) \in (t, T)^k \times \mathbb{R}^k$.

Лемма 4.16. В условиях теоремы 4.6

$$\lim_{p_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{p_k \rightarrow 0} \mathbf{M} \left\{ \left| P[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2m} \right\} = 0, \quad m \in N. \quad (4.215)$$

Доказательство: Введем обозначение:

$$\tilde{\mathbf{I}}_{b_l, b_{l+1}} F(b_1, \dots, b_{q_1}, b_l, b_{q_2}, \dots, b_{q_{k-2}}, b_l, b_{q_{k-1}}, \dots, b_{q_k}) \\ \stackrel{\text{def}}{=} F(b_1, \dots, b_{q_1}, b_{l+1}, b_{q_2}, \dots, b_{q_{k-2}}, b_{l+1}, b_{q_{k-1}}, \dots, b_{q_k}),$$

где $F(b_1, \dots, b_k)$ – некоторое буквенное выражение, зависящее от списка букв: $b_1, \dots, b_k$; $1 \leq l \leq k-1$; $l, q_1, \dots, q_k \in N$ (q_1 может быть равно 0); $l \neq 1, \dots, q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, q_{k-1}, \dots, q_k$. Пусть также

$$\prod_{l=1}^r \tilde{\mathbf{I}}_{b_{s_l}, b_{s_l+1}} F(b_1, \dots, b_k) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{I}}_{b_{s_r}, b_{s_r+1}} \dots \tilde{\mathbf{I}}_{b_{s_1}, b_{s_1+1}} F(b_1, \dots, b_k),$$

где $s_r > \dots > s_1$; $s_1, \dots, s_r = 1, \dots, k-1$; $r \geq 1$.

Заменяя в равенстве (4.46) величины $a_{(j_1 \dots j_k)}$ на

$$\int_{\mathbb{R}^k} \tilde{R}_{p_1 \dots p_k}(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}, y_1, \dots, y_k) \prod_{l=1}^k \tilde{\nu}_{((\tau_{j_l}, \tau_{j_l+1}), dy_l)},$$

и переходя к среднеквадратическому пределу при $N \rightarrow \infty$ получим, с учетом лемм 4.10 и 4.11, следующее равенство:

$$P[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} \hat{P}[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \text{ с в.1.}, \quad (4.216)$$

где

$$\hat{P}[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} = \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \int_t^{t_k} \int_{\mathbb{R}^1} \dots \int_t^{t_2} \int_{\mathbb{R}^1} \sum_{l=1}^r \tilde{\mathbf{I}}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k) \times \\ \times \prod_{l=1}^r \tilde{\mathbf{I}}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}} \left(\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k, y_1, \dots, y_k) \tilde{\nu}_{dt_1, dy_1}^{(i_1)} \dots \tilde{\nu}_{dt_k, dy_k}^{(i_k)} \right). \quad (4.217)$$

Замечание 4.11. Обозначения, введенные в (4.217) следует понимать так: для каждой перестановки $\prod_{l=1}^r \tilde{I}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1, \dots, t_k)$ при суммировании в правой части (4.217) следует заменить все комбинации с одинаковыми нижними индексами, содержащими букву t , вида: $\tilde{\nu}_{dt_1, dy_{p_1}}^{(i_{p_1})} \dots \tilde{\nu}_{dt_l, dy_{p_q}}^{(i_{p_q})}$ ($p_1 < \dots < p_q$) на величины: $\prod_{s=1}^{q-1} \mathbf{1}_{\{i_{p_s} = i_{p_s+1}\}} \nu_{dt_l, dy_{p_q}}^{(i_{p_q})}$. При этом соответствующим образом уменьшится количество символов интегралов в каждом слагаемом в правой части (4.217).

С использованием неравенства Минковского получаем, согласно (4.216), следующую оценку:

$$\left(M \left\{ \left| P[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2m} \right\} \right)^{1/2m} \leq \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{\substack{s_r, \dots, s_1=1 \\ s_r > \dots > s_1}}^{k-1} \left(M \left\{ \left| \hat{P}[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \right|^{2m} \right\} \right)^{1/2m}, \quad (4.218)$$

где $m \in N$. Из (4.63) следует, что в областях интегрирования повторных стохастических интегралов $\hat{P}[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}$ в правой части (4.218) функция $\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}(t_1, \dots, t_k, y_1, \dots, y_k)$ непрерывно дифференцируема по $t_1, \dots, t_k$, и следовательно, согласно замечанию 4.8, она равномерно по $t_1, \dots, t_k$ стремится к нулю в этих областях интегрирования и сходится на границах этих областей при $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$. Используя этот факт и многократно применяя в условиях леммы 4.16 оценки (4.201), (4.202) и (4.204) для оценивания величин $M \left\{ \left| \hat{P}[\tilde{R}_{p_1 \dots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2m} \right\}$ приходим, с использованием (4.218) к (4.214). Лемма 4.16, а вместе с ней и теорема 4.6 доказаны. $\square$

В частности, при $i_1 \neq i_2$; $i_1, i_2 \neq 0$ с использованием системы функций (4.104) и теоремы 4.6 имеем:

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \varphi_2(y_1) \int_t^{t_1} \int_{\mathbb{R}^1} \varphi_1(y_2) \tilde{\nu}_{dt_2, dy_2}^{(i_2)} \tilde{\nu}_{dt_1, dy_1}^{(i_1)} &= \frac{T-t}{2} \left(\pi_{(0)T,t}^{(i_1)} \pi_{(0)T,t}^{(i_2)} + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left(\pi_{(i-1)T,t}^{(i_2)} \pi_{(i)T,t}^{(i_1)} - \pi_{(i-1)T,t}^{(i_1)} \pi_{(i)T,t}^{(i_2)} \right) \Bigg), \\ \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \varphi_1(y_1) \tilde{\nu}_{dt_1, dy_1}^{(i_1)} &= \sqrt{T-t} \pi_{(0)T,t}^{(i_1)}, \end{aligned}$$

где $\pi_{(j)T,t}^{(i)} = \int_t^T \int_{\mathbb{R}^1} \phi_j(\tau) \varphi_l(y) \tilde{\nu}_{d\tau, dy}^{(i)}$; $l = 1, 2$; $\phi_j(\tau)$ имеют вид (4.104).

Глава 5

Сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

Настоящая глава посвящена построению сильных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанных на разложениях Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича. Приводятся новые представления некоторых известных численных методов, а также строится ряд новых численных методов, в том числе конечно-разностных, для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

5.1. История вопроса

Приведем краткую историческую справку по численным методам для стохастических дифференциальных уравнений. Первые работы, посвященные этой тематике, относятся, по-видимому, к 50-м годам. G.Maruwama [72](1955) одним из первых использовал и исследовал метод Эйлера для стохастических дифференциальных уравнений и доказал его среднеквадратическую сходимость. В 1973 году D.J.Clements, B.D.O.Anderson [73] и в 1974 году D.J.Wright [74] показали посредством численных экспериментов, что не любые эвристические стохастические обобщения хорошо известных численных методов сходятся к решениям стохастических дифференциальных уравнений. W.Rumelin [75] исследовал сильные схемы типа Рунге-Кутты порядка 1.0 для стохастических дифференциальных уравнений. В работе [76](E.Platten) построе-

на явная сильная порядка 1.0 конечно-разностная численная схема для скалярного и векторного стохастических дифференциальных уравнений Ито со скалярным и аддитивным шумом. Аналогичная численная схема для стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича построена в работе [77](Т.С.Gard). Двухшаговый сильный порядка 1.5 численный метод для стохастических дифференциальных уравнений Ито с аддитивным шумом построен Г.Н.Мильштейном в [47]. В [76](Е.Platen) и [50](Р.Е.Kloeden, Е.Platen) содержатся явные сильные порядка 1.5 одношаговые и многошаговые конечно-разностные численные схемы для скалярного и векторного стохастических дифференциальных уравнений со скалярными, аддитивными, коммутативными и диагональными шумами. В [50] также содержится явная сильная одношаговая схема порядка 2.0 для скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным шумом, а также общий вид аналогичной схемы для векторного стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом. В [78](С.С.Chang) построен явный сильный порядка 2.0 конечно-разностный метод для скалярного стохастического дифференциального уравнения со скалярным шумом и $\Sigma(\mathbf{x}, t) = \Sigma = \text{const} \in \mathbb{R}^1$. Аналогичная схема для векторного стохастического дифференциального уравнения со скалярным шумом и $\Sigma = \Sigma(t)$ содержится в работе [50](Р.Е.Kloeden, Е.Platen). Необходимо отметить, что известны также и другие работы, посвященные численному решению стохастических дифференциальных уравнений. Например, D.Talay [79], Р.Е.Kloeden, Е.Platen [81], D.B.Hernandez, R.Spigler [83], D.Talay, L.Tubaro [80], Р.Е.Kloeden, Е.Platen, N.Hofmann [82] исследовали различные неявные сильные, неявные и явные слабые численные схемы для стохастических дифференциальных уравнений. Перечисленные работы являются далеко не полным перечнем работ по численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений.

Настоящая глава посвящена построению методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, сходящихся в сильном смысле (определение сильной сходимости численной схемы будет дано ниже) к решениям этих уравнений. Строятся явные и неявные сильные одношаговые и двухшаговые численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито, разложении Тейлора-

Ито в форме Вагнера и Платена и разложении Тейлора-Стратоновича, а также на методах аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах. Некоторые из представленных методов являются новыми версиями методов, полученных в работах [47] (Г.Н.Мильштейн), [50, 51] (Р.Е.Kloeden, Е.Platen, Н.Schurz), другая часть полученных методов является новой. Новизна представленных методов по отношению к известным численным методам заключается, во-первых, в том, что часть из них содержит меньшее число различных повторных стохастических интегралов, аппроксимация которых на каждом шаге интегрирования, необходимая для реализации численных методов, является сложной теоретической и вычислительной проблемой и, во-вторых, главным образом в том, что в полученных методах для аппроксимации входящих в них повторных стохастических интегралов используется полученный в главе 4 новый метод, основанный на кратных рядах Фурье. С помощью данного метода аппроксимации повторных стохастических интегралов получены формулы для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности k и повторных стохастических интегралов Ито кратностей 1 – 5. В литературе [47, 50, 54] присутствуют аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича кратностей не выше третьей. Таким образом, численные методы порядков 2.0, 2.5 и $r/2$; $r = 6, 7, \dots$, представленные в данной главе, можно считать новыми (хотя общие представления некоторых из них были известны ранее [50]), поскольку в эти методы входят аппроксимации повторных стохастических интегралов 4-й и более высоких кратностей. На основе некоторых из построенных численных методов строятся их конечно-разностные модификации. Среди них явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядков точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Численные методы порядков 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем последние два из них не имеют аналогов в литературе для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

5.2. Разложения Тейлора-Ито и общие представления явных сильных численных методов порядка $r/2$

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида:

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \Sigma(x_t, t)d\mathbf{f}_t; \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (5.1)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ – случайный процесс, являющийся решением уравнения (5.1); $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$; $a : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ – неслучайные функции, удовлетворяющие условиям AI-III (см. главу 1); x_0 – начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$.

Предположим, что условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда процесс $\eta_s = R(x_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а x_s – решение стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1) разлагается в следующий унифицированный ряд Тейлора-Ито:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\eta_t\} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k, s, t} + H_{r+1, s, t}, \quad (5.2)$$

причем существует такая постоянная $C_r < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1, s, t})^2 \right\}} \leq C_r (s-t)^{(r+1)/2},$$

равенство (5.2) справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k, s, t} &= \left\| I_{l_1 \dots l_k, s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \\ I_{l_1 \dots l_k, s, t}^{(i_1 \dots i_k)} &= \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \\ {}^{(1)}G_p \{\cdot\} &= \frac{1}{p} \left[{}^{(1)}G_p L \{\cdot\} - {}^{(1)}L G_p \{\cdot\} \right]; \quad p = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

а остальные обозначения такие же, как в теоремах 3.1, 3.2 и 3.3.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$. Тогда из (5.2) получаем общее представление явной численной схемы для стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1):

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \quad (5.3)$$

где

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

а $\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$ – аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$, которая удовлетворяет следующему условию на средне-квадратическую точность аппроксимации:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^{r+1}, \quad C = \text{const} < \infty,$$

где $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}_q$ и

$$\hat{I}_{l_1 \dots l_0 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_0)} = I_{l_1 \dots l_0 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_0)} \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$ можно, например, воспользоваться методом, основанным на кратных интегральных суммах. Согласно этому методу имеем:

$$\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} = \delta^{k/2} \sum_{j_k=0}^{M-1} (-j_k \delta)^{l_k} \mathbf{u}_{j_k, p}^{(i_k)} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} (-j_1 \delta)^{l_1} \mathbf{u}_{j_1, p}^{(i_1)},$$

где $\delta = (\tau_{p+1} - \tau_p)/M = \Delta/M$; $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ и

$$\mathbf{u}_{j, p}^{(i)} = \frac{\mathbf{f}_{\tau_p + (j+1)\delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p + j\delta}^{(i)}}{\sqrt{\delta}}.$$

В главе 4 также было показано, что для метода аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на кратных интегральных суммах при достаточно малом $\Delta = \tau_{p+1} - \tau_p$, справедлива оценка:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} \leq \frac{H_k \Delta^2}{M}, \quad H_k = \text{const} < \infty.$$

Определение 5.1. Численная схема $y_{\tau_{p+1}} = F(y_{\tau_p}, \omega)$ сходится к решению стохастического дифференциального уравнения (5.1) сильно с порядком точности $\gamma > 0$ в момент $T = \tau_N$, если существует положительная постоянная C , которая не зависит от Δ и такая, что $M\{|x_T - y_T|\} \leq C\Delta^\gamma$.

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть условия теоремы 3.1 выполнены при $R(x, t) \equiv x$. Пусть также выполнены следующие условия:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m, \forall (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}_q$ и $\forall t \in [0, T]$

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \{x\} - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \{y\} \right| \leq K_1 |x - y|.$$

2. $\forall (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}_q, \forall i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ и $\forall p \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$M \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^{r+1}, \quad C = \text{const} < \infty. \quad (5.4)$$

3. $\forall (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{A}_q, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$ и $\forall i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$

$$\left| Q G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \{x\} \right| \leq K_0 (1 + |x|),$$

где $Q\{\cdot\} = \cdot, L\{\cdot\}$ или $G_0^{(q)}\{\cdot\}; q = 1, \dots, m$ и

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

4. $x_0, y_0 - F_0$ измеримы и $M\{|x_0 - y_0|^2\} \leq K_2 \Delta^r, M\{|x_0|^2\} < \infty$, где постоянные K_0, K_1, K_2, C не зависят от Δ .

Тогда справедлива оценка:

$$M \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x_t - y_t|^2 \right\} \leq K_3 \Delta^r,$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ .

Доказательство: При $R(x, t) \equiv x, s = \tau_{p+1}, t = \tau_p, \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} p\Delta, \Delta > 0, p \in \{0, 1, \dots, N\}, T = \tau_N$ получаем с вероятностью 1 из (5.2) следующее точное представление:

$$x_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{x_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} +$$

$$+H_{r+1\tau_{p+1},\tau_p}. \quad (5.5)$$

Нетрудно видеть, что $\forall s \in [0, T]$ из (5.3) и (5.5) с вероятностью 1 получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s - \mathbf{y}_s &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + \\ &+ \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \left\{ \sum_{p=0}^{n_s-1} \left[X_{jl_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} + Y_{jl_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} \right] + \right. \\ &\quad \left. + X_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} + Y_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right\} + \\ &+ \sum_{p=0}^{n_s-1} H_{r+1\tau_{p+1},\tau_p} + H_{r+1s, \tau_{n_s}}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$X_{jl_1\dots l_k\theta,t} = \frac{(\theta-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1}\dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_t\}^k \left({}^{(k)}I_{l_1\dots l_k\theta,t} - {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\dots l_k\theta,t} \right),$$

$$Y_{jl_1\dots l_k\theta,t} = \frac{(\theta-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1}\dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\} - {}^{(k)}G_{l_1}\dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_t\}^k {}^{(k)}I_{l_1\dots l_k\theta,t},$$

$$n_s = \max_j \{j : \tau_j \leq s\}.$$

Далее

$$z_T \stackrel{def}{=} \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} |\mathbf{x}_s - \mathbf{y}_s|^2 \right\} \leq$$

$$\leq C_0 \left\{ \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2 \} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} [V_{jl_1\dots l_k}(T) + W_{jl_1\dots l_k}(T) + U(T)] \right\}, \quad (5.7)$$

где

$$V_{jl_1\dots l_k}(T) = \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} X_{jl_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} + X_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\},$$

$$W_{jl_1\dots l_k}(T) = \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} Y_{jl_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} + Y_{jl_1\dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\},$$

$$U(T) = \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} H_{r+1\tau_{p+1},\tau_p} + H_{r+1s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\}.$$

Оценим поочередно величины $V_{jl_1\dots l_k}(T)$, $W_{jl_1\dots l_k}(T)$, $U(T)$.

Используя неравенство Дуба, а также условие 1 теоремы 5.1 и (3.37), имеем:

$$\begin{aligned}
 W_{j l_1 \dots l_k}(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \mathbf{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} Y_{j l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{j l_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \leq \\
 &\leq C_1 \sup_{0 \leq s \leq T} \left\{ \Delta^q \sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbf{M} \{ |\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \} + \mathbf{M} \{ |\mathbf{x}_{\tau_{n_s}} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}|^2 \} (s - \tau_{n_s})^q \right\} \leq \\
 &\leq C_2 \Delta \sum_{p=0}^{n_T-1} \mathbf{M} \{ |\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \} \leq C_3 \int_0^T z_u du. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Оценим $U(T)$. Для этого вспомним (см. главу 3), что

$$\begin{aligned}
 H_{r+1, s, t} &\stackrel{def}{=} (C^{\mathcal{U}_r} \{ \mathbf{x}_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{ \mathbf{x}_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\
 &+ \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_r} \{ \mathbf{x}_\tau \} \cdot d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) = \\
 &= \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \mathbf{x}_t \} J_{l_1 \dots l_k, s, t}^{(i_1 \dots i_k)} + \\
 &+ \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \left(I_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j, s, t} + \sum_{p=1}^m J_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j, s, t}^{(p)} \right), \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j, s, t} &= \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\
 &\times L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \mathbf{x}_\tau \} d\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, \\
 J_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j, s, t}^{(p)} &= \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\
 &\times G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \mathbf{x}_\tau \} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}.
 \end{aligned}$$

Согласно (5.9)

$$\mathbf{M} \{ H_{r+1, s, t} H_{r+1, \theta, \tau}^T \} = 0$$

при $s \geq t \geq \theta \geq \tau$. Поэтому, согласно неравенству Дуба, получаем:

$$U(T) \leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left\{ \sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbf{M} \{ |H_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p}|^2 \} + \mathbf{M} \{ |H_{r+1, s, \tau_{n_s}}|^2 \} \right\}. \quad (5.10)$$

Согласно лемме 3.4 в условиях AI-AIII (см. главу 1) при $M\{|x_0|^{2n}\} < \infty$, $n \geq 1$ справедлива оценка:

$$M\{|x_t|^{2n}\} \leq (1 + M\{|x_0|^{2n}\}) e^{C(t-t_0)}, \quad (5.11)$$

где $t \in [0, T]$, $C = 2n(2n+1)K^2$, $K = \text{const} < \infty$.

Используя представление (5.9), неравенства (1.32), (1.33) при $n = 1$, условие 3 теоремы 5.1 и неравенства (5.10), (5.11), получаем:

$$U(T) \leq C_4 (1 + M\{|x_0|^2\}) \sum_{p=0}^{n_T-1} \Delta^{r+1} \leq C_5 \Delta^r. \quad (5.12)$$

Оценим теперь $V_{jl_1 \dots l_k}(T)$. Используя неравенство Дуба, а также условия 2 и 3 теоремы 5.1, имеем:

$$\begin{aligned} V_{jl_1 \dots l_k}(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} M \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + X_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq C_5 \sup_{0 \leq s \leq T} \left\{ \left(\sum_{p=0}^{n_s-1} M\{1 + |y_{\tau_p}|^2\} + M\{1 + |y_{\tau_{n_s}}|^2\} \right) \Delta^{r+1} \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} M\{|y_{\tau_p}|^2\} &\leq 2M\{|x_{\tau_p}|^2\} + 2M\{|y_{\tau_p} - x_{\tau_p}|^2\}, \\ M\{|y_{\tau_{n_s}}|^2\} &\leq 2M\{|x_{\tau_{n_s}}|^2\} + 2M\{|y_{\tau_{n_s}} - x_{\tau_{n_s}}|^2\}. \end{aligned}$$

Тогда, используя приведенные ранее рассуждения, получим из (5.13) следующую оценку:

$$\begin{aligned} V_{jl_1 \dots l_k}(T) &\leq C_6 \Delta^r + C_7 (1 + M\{|x_0|^2\}) \Delta^r + C_8 \int_0^T z_u du \leq \\ &\leq C_9 \Delta^r + C_8 \Delta^r \int_0^T z_u du. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Объединяя неравенства (5.7), (5.8), (5.12), (5.14) и используя условие 4 теоремы 5.1, получаем:

$$z_T \leq C_{10} \Delta^r + C_{11} \int_0^T z_u du. \quad (5.15)$$

Согласно неравенству Гронуолла и (5.15) имеем:

$$z_T \leq K_3 \Delta^r, \quad (5.16)$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ . Теорема доказана. $\square$

Из неравенства (5.16) и неравенства Ляпунова следует, что явный одношаговый численный метод (5.3) сходится сильно, в условиях теоремы 5.1, с порядком точности $r/2$ к решению стохастического дифференциального уравнения (5.1). Далее такие численные методы будем называть явными одношаговыми сильными численными методами порядка $r/2$.

Предположим, что условия теоремы 3.6 выполнены. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, где $\mathbf{x}_s$ – решение стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1) разлагается в ряд Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(pk)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{pk} J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)s, t} + H_{r+1s, t}, \quad (5.17)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1s, t})^2 \right\}} \leq C_{r+1} (s - t)^{(r+1)/2},$$

равенство (5.17) справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле и

$${}^{(pk)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t} = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1 = \lambda_1, \dots, i_l = \lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l},$$

где

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)},$$

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q\},$$

а остальные обозначения такие же, как в теоремах 3.5 и 3.6.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$. Тогда из (5.17) получаем общее представление явной численной схемы для стохастического дифференциального

уравнения Ито (5.1), основанной на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{y_{\tau_p}\} \cdot {}^{p_k} {}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}, \quad (5.18)$$

где

$${}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \quad m\lambda_l},$$

а $\hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)}$, которая удовлетворяет условию:

$$M \left\{ \left(J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)} \right)^2 \right\} \leq C^* \Delta^{r+1}, \quad C^* = \text{const} < \infty,$$

где $(\lambda_k \dots \lambda_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r \mathcal{E}_{qg}$, $\hat{J}_{(\lambda_0, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_0, \dots, i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)}$ можно, например, воспользоваться методом, основанным на кратных интегральных суммах. Согласно этому методу имеем:

$$\hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)} = \delta^{k/2} \sum_{j_k=0}^{M-1} \mathbf{u}_{j_k, p}^{(i_k)} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \mathbf{u}_{j_1, p}^{(i_1)},$$

где $\delta = \Delta/M$; $\Delta = \tau_{p+1} - \tau_p$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ и

$$\mathbf{u}_{j, p}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{f}_{\tau_p + (j+1)\delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p + j\delta}^{(i)}}{\sqrt{\delta}} & \text{при } i = 1, \dots, m \\ \sqrt{\delta} & \text{при } i = 0 \end{cases}.$$

В главе 4 было показано, что для метода аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на кратных интегральных суммах при достаточно малом $\Delta = \tau_{p+1} - \tau_p$, справедлива оценка:

$$M \left\{ \left(J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k, \dots, i_1)} \right)^2 \right\} \leq \frac{H_k \Delta^2}{M}, \quad H_k = \text{const} < \infty.$$

Теорема 5.2. Пусть условия теоремы 3.6 выполнены при $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$. Пусть также выполнены следующие условия:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall (\lambda_k \dots \lambda_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r \mathcal{E}_{qg}$, и $\forall t \in [0, T]$

$$\left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\mathbf{x}\} - Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\mathbf{y}\} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

$$2. \forall (\lambda_k \dots \lambda_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r \mathcal{E}_{qg}, \text{ и } \forall p \in \{0, 1, \dots, N\}$$

$$\mathbf{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C^* \Delta^{r+1}, \quad C^* = \text{const} < \infty. \quad (5.19)$$

$$3. \forall (\lambda_k \dots \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^{r+1} \mathcal{M}_g, \quad \mathcal{M}_g = \{(\lambda_g, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1, 0; l = 1, \dots, g\}, \\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$$

$$\left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{ \mathbf{x} \} \right| \leq K_2 (1 + | \mathbf{x} |).$$

$$4. \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 - \mathcal{F}_0 \text{ измеримы и } \mathbf{M} \{ |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2 \} \leq K_3 \Delta^r, \quad \mathbf{M} \{ |\mathbf{x}_0|^2 \} < \infty. \\ \text{Тогда}$$

$$\mathbf{M} \{ |\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|^2 \} \leq K_4 \Delta^r,$$

где постоянные K_1, K_2, K_3, K_4, C^* не зависят от Δ .

Доказательство теоремы 5.2 можно найти в [50].

Из теоремы 5.2 следует, что численная схема (5.18) является явной сильной одношаговой численной схемой порядка $r/2$ для стохастического дифференциального уравнения (5.1).

5.3. Методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито

5.3.1. Метод Мильштейна

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r = 2$. Тогда из (5.3) при $r = 2$ получаем метод Мильштейна:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (5.20)$$

где здесь и далее приняты следующие сокращенные обозначения:
 $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ – i -ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$;
 $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

Согласно формулам связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (теорема 4.1) с вероятностью 1 получаем

$$I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} = I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}, \quad (5.21)$$

$$I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (5.22)$$

где

$$I_{l_1 \dots l_{k s}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^{*s} (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{*r_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}.$$

Согласно методу аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанному на кратных рядах Фурье (см. главу 4), имеем следующие формулы для совместного моделирования стохастических интегралов Ито $I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}$, $I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2)}$:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.23)$$

$$\hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1}^{00} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (5.24)$$

где

$$C_{j_2 j_1}^{00} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{00}(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2, \\ K_{00}(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}, \\ \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)},$$

$t_1, t_2 \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$; $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.2. В (5.23), (5.24) предполагается, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, что справедливо, в частности для полных ортонормированных тригонометрической и полиномиальной систем функций в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$. Число q в (5.24) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.4) в теореме 5.1 при $r = 2$. Пусть в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^\infty$ в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ взята тригонометрическая система. Тогда формулы (5.23), (5.24) преобретут согласно разложениям, полученным в главе 4, следующий вид:

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.25)$$

$$\hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right.$$

$$+ \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \Big] - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (5.26)$$

где число q при $i_1 \neq i_2$ выбирается из следующего условия:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right)^2 \right\} = \frac{3\Delta^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq C\Delta^3, \quad (5.27)$$

где постоянная C входит в условие (5.4) теоремы 5.1.

Для полиномиальной системы функций, согласно результатам главы 4, имеем следующие соотношения:

$$I_{0\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$\hat{I}_{00\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \frac{\Delta}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i-1}^{(i_1)} \right\} \right] - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta,$$

где число q выбирается при $i_1 \neq i_2$ из следующего условия:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right)^2 \right\} &= \frac{\Delta^2}{4} \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2 - 1} = \\ &= \frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq C\Delta^3, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где постоянная C входит в условие (5.4) теоремы 5.1.

Необходимо отметить, что на каждом шаге интегрирования с номером p система случайных гауссовских величин $\zeta_j^{(i)}$ должна генерироваться так, чтобы она была независимой относительно аналогичных систем гауссовских величин на всех предшествующих шагах интегрирования.

Согласно определению 5.1 метод Мильштейна является явным одношаговым сильным методом порядка 1.0.

5.3.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r = 3$. Тогда из (5.3) при $r = 3$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 1.5 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}\tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_1^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Согласно формулам (5.21), (5.22) и соотношениям:

$$I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} = I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} - \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3)} \right), \quad (5.31)
\end{aligned}$$

которые вытекают с вероятностью 1 из теорем о замене порядка интегрирования (см. главу 2) и теоремы 4.1, а также согласно формулам для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича $I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}$, $I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}$, $I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, полученным в главе 4 с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье, имеем следующие формулы для совместного моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}$, $I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}$, $I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}$, $I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}$:

$$I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.32)$$

$$I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^1 \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \quad (5.33)$$

$$I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1}^{00} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{000} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \left(\Delta \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_3)} + \sum_{j_3=0}^q C_{j_3}^1 \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right), \quad (5.35)
\end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$C_{j_1}^1 = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1, \quad K(t_1) = \tau_p - t_1,$$

$$C_{j_2 j_1}^{00} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{00}(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2, \quad K_{00}(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}},$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{000} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{000}(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3,$$

$$K_{000}(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}},$$

$$\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)},$$

$t_1, t_2, t_3 \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$, $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.2. В (5.32)–(5.35) предполагается, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, что справедливо, в частности для полных ортонормированных тригонометрической и полиномиальной систем функций на промежутке $[\tau_p, \tau_{p+1}]$. Число q в (5.33) – (5.35) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.4) в теореме 5.1 при $r = 3$. Пусть в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^\infty$ в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ взята тригонометрическая система. Тогда формулы (5.32)–(5.35) преобретут согласно разложениям, полученным в главе 4, следующий вид:

$$I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.36)$$

$$\hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right], \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} &= \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right] - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[\frac{1}{r^2 - l^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_3)} \right\} + \right. \\
& + \left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2 - l^2)l} \right) \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \frac{r}{(l^2 - r^2)l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \\
& \quad \left. - \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 6\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} - 2\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \Big] + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \sum_{r,m=1}^q \frac{2}{rm} \left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \\
& + \sum_{l,m=1}^q \frac{1}{m(l+m)} \left[-\zeta_{2(m+l)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(m+l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(m+l)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{m=1}^q \sum_{l=m+1}^q \frac{1}{m(l-m)} \left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{l=1}^q \sum_{m=l+1}^q \frac{1}{m(m-l)} \left[-\zeta_{2(m-l)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \\
& \quad \left. - \zeta_{2(m-l)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2(m-l)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] \Big\} - \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \Delta^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right] - \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_3)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \right]. \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Рассмотрим более детально вопрос о выборе числа q . Вычисляя при $i_1 \neq i_2, i_2 \neq i_3, i_1 \neq i_3$ величины $M \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right)^2 \right\}$, $M \left\{ \left(I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right)^2 \right\}$, $M \left\{ \left(I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right)^2 \right\}$ и подставляя их в условие (5.4) теоремы 5.1 при $r = 3$, получим:

$$\frac{3\Delta^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq C\Delta^4, \quad (5.40)$$

$$\frac{\Delta^3}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq C\Delta^4, \quad (5.41)$$

$$\Delta^3 \left\{ \frac{5}{36} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \frac{79}{32\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r, l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2 l^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} \right\} \leq C\Delta^4. \quad (5.42)$$

Число q в (5.40)-(5.42) должно быть выбрано таким, чтобы оно одновременно удовлетворяло всем трем условиям (5.40)-(5.42). Допускается также, что в каждом из условий (5.40)-(5.42) число q может быть свое.

Отметим, что если $i_1 = i_2$, то справедлива с вероятностью 1 хорошо известная формула:

$$I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 i_1)} = \frac{1}{2} \left(I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2} \Delta,$$

которая может быть получена без разложений в ряды (см. главу 4), хотя и следует из (5.38). Условие типа (5.42) может быть получено и в том случае, когда i_1, i_2, i_3 не являются попарно различными. Если речь идет об аппроксимации повторных стохастических интегралов кратности выше третьей, то получение условий типа (5.40)-(5.42) становится затруднительным. Поэтому целесообразно воспользоваться более грубыми, но вместе с тем более простыми условиями выбора верхних пределов суммирования в рядах, аппроксимирующих повторные стохастические интегралы. Для получения таких простых условий воспользуемся рекомендациями, приведенными в [50]. Перепишем равенство (5.28) в следующем виде:

$$M \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right)^2 \right\} = \frac{3\Delta^2}{2\pi^2} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \quad (5.43)$$

Поскольку $\sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \leq \int_p^{\infty} \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{q}$, то из (5.43) получаем следующую оценку:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right)^2 \right\} \leq \frac{C_0 \Delta^2}{q}, \quad (5.44)$$

где $C_0 = 3 \frac{1}{2\pi^2}$. Далее нетрудно показать, что при достаточно малом Δ найдется такая постоянная C_1 , что справедлива оценка:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} \leq \frac{C_1 \Delta^2}{q}, \quad (5.45)$$

где

$$\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_l)}$$

$C_{j_k \dots j_1}, \zeta_{(j_l) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_l)}$ такие же, как в теореме 4.2; $(l_1, \dots, l_k, j, k) \in \bigcup_{g=1}^r \mathcal{D}_g$; $r = 2, 3, \dots$

Можно показать, что в силу связи между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича существует такая постоянная $C' < \infty$, что выполнено условие:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} \leq \frac{C' \Delta^2}{q}, \quad (5.46)$$

где $(l_1, \dots, l_k, j, k) \in \bigcup_{g=1}^r \mathcal{D}_g$; $r = 2, 3, \dots$. Поскольку должно выполняться условие (5.4) в теореме 5.1 при выполнении условия (5.46), то

$$q \geq \frac{C'}{C} \Delta^{1-r}; \quad r = 2, 3, \dots \quad (5.47)$$

Условие (5.47) достаточно грубое, но вместе с тем очень простое и универсальное.

Полностью аналогичными рассуждениями приходим к тому, что найдутся такие постоянные C^{**} и C'' , что для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q, g=1}^r \mathcal{E}_{qg}$; $(\mu_k, \dots, \mu_1) \in \bigcup_{q, g=1}^r \mathcal{B}_{qg}$; $r = 2, 3, \dots$ выполнены следующие условия:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C^{**} \frac{\Delta^2}{q}, \quad (5.48)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\mu_k \dots \mu_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C'' \frac{\Delta^2}{q}, \quad (5.49)$$

где множества $\mathcal{E}_{qg}$, $\mathcal{B}_{qg}$ такие же, как в теоремах 3.6 и 3.9.

Из (5.48) и (5.19), например, получаем, что

$$q \geq \frac{C^{**}}{C^*} \Delta^{1-r}; \quad r = 2, 3, \dots \quad (5.50)$$

5.3.3. Явный сильный одношаговый численный метод порядка 2.0

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r = 4$. Тогда из (5.3) при $r = 4$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.0 вида:

$$\begin{aligned} y_{p+1} = & y_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta a + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} a \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L a + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} a \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

Согласно соотношениям (5.21), (5.22), (5.30), (5.31), а также соотношениям:

$$I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^2, \quad (5.52)$$

$$I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^2, \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} = & I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \left(-I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_1)} + I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_1)} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \left(\Delta I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3)} + I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3)} \right) + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \Delta^2, \end{aligned} \quad (5.54)$$

которые вытекают с вероятностью 1 из теорем о замене порядка интегрирования (см. главу 2) и теоремы 4.1 делаем вывод, что для совместного моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}$, $I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}$, $I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$ необходимо уметь совместно моделировать повторные стохастические интегралы Стратоновича $I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}$, $I_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}$, $I_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}$, $I_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}$.

Согласно методу разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанному на кратных рядах Фурье, в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ имеем следующие формулы для совместного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (5.51):

$$I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.55)$$

$$I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^1 \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \quad (5.56)$$

$$\hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1}^{00} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} = & \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{000} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^1 \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \left(\Delta \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_3)} + \sum_{j_3=0}^q C_{j_3}^1 \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1}^{10} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^2, \quad (5.59)$$

$$\hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1}^{01} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^2, \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \hat{I}_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} = & \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0000} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1}^{10} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1, j_4=0}^q (-C_{j_4 j_1}^{01} + C_{j_4 j_1}^{10}) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
& -\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_3, j_4=0}^q (\Delta C_{j_4 j_3}^{00} + C_{j_4 j_3}^{01}) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
& + \frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \Delta^2,
\end{aligned} \tag{5.61}$$

где $\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{def}{=} \zeta_j^{(i)}$ и

$$C_{j_1}^1 = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1, \quad K(t_1) = \tau_p - t_1,$$

$$C_{j_2 j_1}^{00} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{00}(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2, \quad K_{00}(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}},$$

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{000} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{000}(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3,$$

$$C_{j_2 j_1}^{10} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{10}(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2,$$

$$K_{000}(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}}, \quad K_{10}(t_1, t_2) = (\tau_p - t_1) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}},$$

$$C_{j_2 j_1}^{01} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{01}(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2,$$

$$C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0000} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{0000}(t_1, \dots, t_4) \prod_{l=1}^4 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_4,$$

$$K_{01}(t_1, t_2) = (\tau_p - t_2) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}, \quad K_{0000}(t_1, \dots, t_4) = \prod_{l=1}^3 \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}},$$

где $t_1, \dots, t_4 \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$, $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^\infty$ – полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ система непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющая условию 2 теоремы 4.2. Число q в (5.56)-(5.61) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.47) при $r = 4$.

Следует отметить, что (5.51), (5.55)-(5.61) определяют явный одношаговый сильный метод порядка 2.0. Этот метод является новым, поскольку в литературе [47, 50, 54] присутствуют представления аналогичного метода с общими рекомендациями по аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито 4-й кратности, входящих в указанный метод, а собственно аппроксимации таких интегралов в литературе не представлены.

Замечание 5.1. В качестве альтернативы аппроксимациям (5.56)-(5.61) можно предложить аппроксимировать повторные стохастические интегралы в левых частях (5.56)-(5.61) с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

5.3.4. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5

Пусть условия теоремы 5.1 выполнены при $r = 5$. Тогда из (5.3) при $r = 5$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.5 вида:

$$\begin{aligned}
 y_{p+1} = & y_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta a + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} a \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L a + \\
 & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
 & \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} a \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L a \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} a \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} a \left(\Delta \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.62}
\end{aligned}$$

С помощью теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито (см. главу 2) и с помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича (теорема 4.1) можно получить с вероятностью 1 следующие соотношения:

$$I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} = I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} &= I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left(\Delta I_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3)} + I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3)} \right) + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)}. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} &= I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3)} - I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3)} \right) + \\
&+ \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} &= I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3)} - I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3)} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{5.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} &= I_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \left(-I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_2 i_1)} + I_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_2 i_1)} \right) - \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \left(I_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_1)} - I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_1)} \right) - \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \left(\Delta I_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3)} + I_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_5 i_4 i_3)} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(\Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3)}+I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3)}\right)+ \\
& +\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}\left(2\Delta I_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5)}+I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5)}+\Delta^2 I_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5)}\right)+ \\
& +\frac{1}{8}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}}I_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}. \tag{5.67}
\end{aligned}$$

Согласно формулам (5.63)-(5.67), а также согласно методу разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанному на кратных рядах Фурье, получаем:

$$\hat{I}_{2\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}=\sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^2 \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{100\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{100} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \\
& -\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\sum_{j_3=0}^q (\Delta C_{j_3}^1 + C_{j_3}^2) \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& +\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^2 \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{010\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{010} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& +\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta^2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_3)} - \sum_{j_3=0}^q C_{j_3}^2 \zeta_{j_3}^{(i_3)}\right) + \\
& +\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^2 \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{001\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{001} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& +\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\Delta^2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_3)} - \sum_{j_3=0}^q C_{j_3}^2 \zeta_{j_3}^{(i_3)}\right) + \\
& +\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\sum_{j_1=0}^q C_{j_1}^2 \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.71}
\end{aligned}$$

$$\hat{I}_{00000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}=\sum_{j_1, \dots, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{00000} \prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1}^{100} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^q (-C_{j_5 j_2 j_1}^{010} + C_{j_5 j_2 j_1}^{100}) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1, j_4, j_5=0}^q (C_{j_5 j_4 j_1}^{010} - C_{j_5 j_4 j_1}^{001}) \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_3, j_4, j_5=0}^q (\Delta C_{j_5 j_4 j_3}^{000} + C_{j_5 j_4 j_3}^{001}) \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
& - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_3=0}^q (\Delta C_{j_3}^1 + C_{j_3}^2) \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \left(\sum_{j_5=0}^q (2\Delta C_{j_5}^1 + C_{j_5}^2) \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \Delta^2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_5)} \right) + \\
& + \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1=0}^q \Delta C_{j_1}^2 \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \tag{5.72}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{j_1}^2 &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_2(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1, \\
C_{j_3 j_2 j_1}^{100} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{100}(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3, \\
C_{j_3 j_2 j_1}^{010} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{010}(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3, \\
C_{j_3 j_2 j_1}^{001} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{001}(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3, \\
C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{00000} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K_{00000}(t_1, \dots, t_5) \prod_{l=1}^5 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_5, \\
K_2(t_1) &= (\tau_p - t_1)^2, \quad K_{100}(t_1, t_2, t_3) = (\tau_p - t_1) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}}, \\
K_{010}(t_1, t_2, t_3) &= (\tau_p - t_2) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}}, \\
K_{00000}(t_1, \dots, t_5) &= \prod_{l=1}^4 \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \\
K_{001}(t_1, t_2, t_3) &= (\tau_p - t_3) \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}},
\end{aligned}$$

где $t_1, \dots, t_5 \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$, а остальные обозначения такие же, как в (5.55)-(5.61). Совокупность соотношений (5.62), (5.55)-(5.61), (5.68)-(5.72) определяет явный сильный одношаговый метод порядка 2.5. Этот метод является новым, поскольку он основывается на унифицированном разложении Тейлора-Ито и, кроме того, в литературе [47, 50, 54] есть лишь представление метода такого же порядка точности, основанного на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, с общими рекомендациями по аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито 4-й и 5-й кратности, входящих в него, а собственно сами аппроксимации этих интегралов не представлены. Число q в (5.56)-(5.61), (5.68)-(5.72) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.47) при $r = 5$.

Замечание 5.2. В качестве альтернативы аппроксимациям (5.56)-(5.61), (5.68)-(5.72) можно предложить аппроксимировать повторные стохастические интегралы в левых частях (5.56)-(5.61), (5.68)-(5.72) с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

5.4. Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена

5.4.1. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5

Рассмотрим в условиях теоремы 5.2 при $r = 3$ явный сильный одношаговый метод порядка 1.5, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и вытекающий из (5.18) при $r = 3$:

$$\begin{aligned} y_{p+1} = & y_p + {}^{(1)}G_0\{y_p\} \stackrel{!}{:} {}^{(1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{y_p\}\Delta + \\ & + {}^{(2)}G_0G_0\{y_p\} \stackrel{!}{:} {}^{(2)}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{y_p\} \stackrel{!}{:} {}^{(1)}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(1)}G_0L\{y_p\} \stackrel{!}{:} {}^{(1)}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(3)}G_0G_0G_0\{y_p\} \stackrel{!}{:} {}^{(3)}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Аппроксимируем следующий набор повторных стохастических интегралов Ито:

$$J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m.$$

Для этого рассмотрим, вытекающие с вероятностью 1 из теоремы 4.1 соотношения:

$$J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)},$$

$$J_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = J_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta,$$

$$J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, \quad J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)} = J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)},$$

$$J_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} = J_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)},$$

где

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$$(i_k, \dots, i_{l+1}, 0, i_{l-1}, \dots, i_1) \stackrel{def}{=} (i_k, \dots, i_{l+1}, i_{l-1}, \dots, i_1);$$

$k \geq 1, i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$.

Аппроксимируем теперь повторные стохастические интегралы, входящие в правые части этих соотношений, с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. В результате получим:

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.74)$$

$$\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (5.75)$$

$$\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)}, \quad (5.76)$$

$$\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \sum_{j_1, j_3=0}^q C_{j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

где

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$\bar{K}(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}},$$

где $k = 2, 3$, а остальные обозначения такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в соотношениях (5.75)-(5.78) выбирается из условия (5.50) при $r = 3$.

Совокупность соотношений (5.73), (5.74)-(5.78) и (5.50) при $r = 3$ определяют явный сильный одношаговый метод порядка 1.5.

Замечание 5.3. Следует отметить, что при $r = 2$ из (5.18) следует метод Мильштейна, который был подробно рассмотрен ранее.

5.4.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0

Рассмотрим в условиях теоремы 5.2 при $r = 4$ явный сильный одношаговый метод порядка 2.0, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и вытекающий из (5.18) при $r = 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ & + {}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(3)}G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(3)}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + L^2\{\mathbf{y}_p\} \frac{\Delta^2}{2} + {}^{(2)}G_0G_0L\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(2)}G_0LG_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(2)}LG_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(4)}G_0G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(4)}\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Аппроксимируем следующий набор повторных стохастических интегралов Ито

$$J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)},$$

$$J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2)}, J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_1)}, J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, J_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}; i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m.$$

Для этого рассмотрим, вытекающие с вероятностью 1 из теоремы 4.1 соотношения:

$$\begin{aligned} J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_1)} &= J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_1)}, \\ J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} &= J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^2, \end{aligned}$$

$$J_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2)} = J_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \Delta^2,$$

$$\begin{aligned} J_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} &= J_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} J_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} J_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \\ &+ \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \Delta^2. \end{aligned}$$

Аппроксимируем теперь повторные стохастические интегралы, входящие в правые части этих соотношений, с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. В результате получим:

$$\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \Delta^2, \quad (5.80)$$

$$\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_1)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.81)$$

$$\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)} - \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta^2, \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \sum_{j_1, j_3, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^q C_{j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)} + \\ &+ \frac{1}{8} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \Delta^2, \end{aligned} \quad (5.83)$$

где

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^{k-1} 1_{\{t_l < t_{l+1}\}},$$

где $k = 3, 4$, а остальные обозначения такие же, как и предыдущих параграфах этой главы. Соотношения (5.79), (5.74)-(5.78), (5.80)-(5.83), где в (5.75)-(5.78), (5.80)-(5.83) число q выбирается из условия (5.50) при $r = 4$, определяют явный сильный одношаговый метод порядка 2.0. Выражение (5.79) является известным [50], однако описанный в этом параграфе метод можно считать в определенном смысле новым, так как в литературе не представлены аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$; $i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m$, необходимые для реализации этого метода.

Отметим, что для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (5.79), можно также использовать метод, основанный на приближении интегральными суммами.

5.4.3. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5

Рассмотрим в условиях теоремы 5.2 при $r = 5$ явный сильный одношаговый метод порядка 2.5, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned} y_{p+1} = & y_p + {}^{(1)}G_0\{y_p\} \cdot {}^1 (1) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{y_p\}\Delta + \\ & + {}^{(2)}G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^2 (2) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}L G_0\{y_p\} \cdot {}^1 (1) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(1)}G_0 L\{y_p\} \cdot {}^1 (1) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(3)}G_0 G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^3 (3) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + L^2\{y_p\} \frac{\Delta^2}{2} + {}^{(2)}G_0 G_0 L\{y_p\} \cdot {}^2 (2) \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(2)}G_0 L G_0\{y_p\} \cdot {}^2 (2) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(2)}L G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^2 (2) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(4)}G_0 G_0 G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^4 (4) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}G_0 L^2\{y_p\} \cdot {}^1 (1) \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(1)}L G_0 L\{y_p\} \cdot {}^1 (1) \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}L^2 G_0\{y_p\} \cdot {}^1 (1) \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(3)}G_0 G_0 G_0 L\{y_p\} \cdot {}^3 (3) \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(3)}G_0 G_0 L G_0\{y_p\} \cdot {}^3 (3) \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(3)}G_0 L G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^3 (3) \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(3)}L G_0 G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^3 (3) \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(5)}G_0 G_0 G_0 G_0 G_0\{y_p\} \cdot {}^5 (5) \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Аппроксимируем следующий набор повторных стохастических интегралов Ито

$$\begin{aligned}
& J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \\
& J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2)}, J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, J_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_2 i_1)}, J_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \\
& J_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3)}, J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_1)}, J_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_1)}, \\
& J_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2)}, J_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}.
\end{aligned}$$

Для этого рассмотрим вытекающие с вероятностью 1 из теоремы 4.1 соотношения:

$$\begin{aligned}
J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)} &= J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2)}, \quad J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3)} = J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3)}, \\
J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} &= J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}, \\
J_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2)} &= J_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2)} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4)}, \\
J_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_1)} &= J_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}, \\
J_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_2 i_1)} &= J_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4)}, \\
J_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= J_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3)}, \\
J_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} &= J_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} J_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} J_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_4 i_1)} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3)} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3)} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}}J_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_5)}.$$

Аппроксимируем теперь повторные стохастические интегралы, входящие в правые части этих соотношений, с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. В результате получим:

$$\hat{J}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)}, \quad (5.85)$$

$$\hat{J}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.86)$$

$$\hat{J}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(0)}, \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2)} &= \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^q C_{j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_1)} &= \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \sum_{j_1, j_2, j_4=0}^q C_{j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(0)} - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(0)} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_1, j_3, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(0)}, \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} &= \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(0)} - \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \sum_{j_1, j_2, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(0)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1, j_2, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ &-\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_1, j_3, j_4, j_5=0}^q C_{j_5 j_4 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ &+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(0)} + \\ &+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ &+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_4=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \sum_{j_1, j_2, j_5=0}^q C_{j_5 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_5}^{(i_5)}, \quad (5.92) \end{aligned}$$

где

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k, \\ K(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}},$$

где $k = 3, 4, 5$, а остальные обозначения такие же, как в предыдущих параграфах этой главы. Соотношения (5.84), (5.74)-(5.78), (5.80)-(5.83), (5.85)-(5.92), где в (5.75)-(5.78), (5.80)-(5.83), (5.85)-(5.92) число q выбирается из условия (5.50) при $r = 5$, определяют явный овношаговый сильный метод порядка 2.5.

Выражение (5.84) является известным [50], однако описанный в этом параграфе метод можно считать в некотором смысле новым, так как в литературе не представлены аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$; $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$, необходимые для реализации этого метода.

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (5.84), можно также использовать метод, основанный на кратных интегральных суммах.

5.4.4. Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена

Рассмотрим некоторые особенности численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Ранее отмечалось, что численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито содержат меньшее число различных повторных стохастических интегралов, нежели методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Однако затраты на аппроксимацию повторных стохастических интегралов $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$, входящих в численные методы, основанные на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и полученные с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье несколько меньше, чем аналогичные затраты на аппроксимацию повторных стохастических интегралов $I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$ из численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито. Так, для реализации явного сильного одношагового метода, порядка 2.5, основанного на унифицированном разложении Тейлора-Ито в предположении, что $\phi_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, требуется вычисление одиннадцати различных коэффициентов Фурье: $C_{j_1}^1$, $C_{j_2 j_1}^{00}$, $C_{j_3 j_2 j_1}^{000}$, $C_{j_2 j_1}^{01}$, $C_{j_2 j_1}^{10}$, $C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0000}$, $C_{j_1}^2$, $C_{j_3 j_2 j_1}^{100}$, $C_{j_3 j_2 j_1}^{010}$, $C_{j_3 j_2 j_1}^{001}$, $C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{000000}$. Для реализации аналогичного численного метода, основанного на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, требуется вычисление четырех коэффициентов Фурье: $C_{j_2 j_1}$, $C_{j_3 j_2 j_1}$, $C_{j_4 j_3 j_2 j_1}$, $C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}$.

Следует также отметить, что аппроксимации указанных повторных стохастических интегралов универсальны для любых стохастических дифференциальных уравнений Ито и могут быть построены заранее. Поэтому на стадии численной реализации, возможно, удобнее иметь дело с меньшим количеством различных повторных стохастических интегралов, при условии, что их аппроксимации уже построены.

По-другому обстоит дело, если для аппроксимации повторных сто-

хастических интегралов Ито используется метод, основанный на кратных интегральных суммах, поскольку данный метод не требует вычисления коэффициентов кратных рядов Фурье.

5.5. Численные методы, основанные на разложении Тейлора-Стратоновича

5.5.1. Явный сильный одношаговый метод порядка $r/2$

Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1) $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (5.1). Тогда, согласно теореме 3.9, он разлагается при всех $s, t \in [0, T]: s > t$ в ряд Тейлора-Стратоновича вида:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1) \in B_{qk}} {}^{(p_k)}B_{\mu_k \dots \mu_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} J_{(\mu_k \dots \mu_1)s, t}^* + H_{r+1, s, t}, \quad (5.93)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\sqrt{\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1, s, t})^2 \right\}} \leq C_{r+1} (s - t)^{(r+1)/2}.$$

Равенство (5.93) справедливо с вероятностью 1, его правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$B_{qk} = \{(\mu_k, \dots, \mu_1): 2k - \delta_1 - \dots - \delta_k = q\};$$

$${}^{(p_k)} J_{(\mu_k \dots \mu_1)s, t}^* = \left\| J_{(\mu_k \dots \mu_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1 = \delta_1, \dots, i_l = \delta_k}^{m\delta_1 \dots m\delta_k},$$

$$J_{(\mu_k \dots \mu_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$$(i_k, \dots, i_{l+1}, 0, i_{l-1}, \dots, i_1) \stackrel{def}{=} (i_k, \dots, i_{l+1}, i_{l-1}, \dots, i_1);$$

$\mu_l = \alpha, \beta; \delta_l = 0$ и $i_l = 0$ при $\mu_l = \alpha; \delta_l = 1$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\mu_l = \beta; p_l = \sum_{j=1}^l \delta_j; \cdot^0$ — умножение на скаляр; производные по Стратоновичу при $k = 2, 3, \dots, r$ покомпонентно определяются рекуррентными

соотношениями:

$$\begin{aligned} B_{\alpha\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)}\{\eta_\tau\} &= LB_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)}\{\eta_\tau\} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i_k=1}^m G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)}\{\eta_\tau\}, \\ B_{\beta\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)}\{\eta_\tau\} &= G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)}\{\eta_\tau\}, \end{aligned}$$

а при $k = 1$ соотношениями:

$$B_\alpha\{\eta_\tau\} = L\{\eta_\tau\} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)}\{\eta_\tau\}; \quad B_\beta^{(i_1)}\{\eta_\tau\} = G_0^{(i_1)}\{\eta_\tau\},$$

где операторы $L\{\cdot\}$ и $G_0^{(i)}\{\cdot\}$; $i = 1, \dots, m$ такие же, как в лемме 3.1.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$. Тогда из (5.93) получаем общее представление явной численной схемы для стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1):

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{q=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{(\mu_k, \dots, \mu_1) \in B_{qk}} {}^{(p_k)} B_{\mu_k \dots \mu_1} \{\mathbf{y}_p\} {}^{p_k} \hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^*, \quad (5.94)$$

где обозначено: $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$,

$${}^{(p_k)} \hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\delta_1, \dots, i_l=\delta_k}^{m\delta_1 \quad m\delta_k},$$

а $\hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)}$ – аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)}$.

Теорема 5.3 Пусть условия теоремы 3.9 выполнены при $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$. Пусть также выполнены следующие условия:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall (\mu_k, \dots, \mu_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r B_{qg}$ и $\forall t \in [0, T]$

$$|B_{\mu_k \dots \mu_1}^{(i_k, \dots, i_1)}\{\mathbf{x}\} - B_{\mu_k \dots \mu_1}^{(i_k, \dots, i_1)}\{\mathbf{y}\}| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

2. $\forall (\mu_k, \dots, \mu_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r B_{qg}$, $\forall p \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C' \Delta^{r+1}, \quad C' = \text{const} < \infty. \quad (5.95)$$

3. $\forall (\mu_k, \dots, \mu_1) \in \bigcup_{g=1}^{r+1} \mathcal{M}_g$, где

$$\mathcal{M}_g = \{(\mu_g, \dots, \mu_1) : \mu_l = \alpha, \beta; l = 1, \dots, g\},$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$

$$|B_{\mu_k \dots \mu_1}^{(i_k, \dots, i_1)}\{\mathbf{x}\}| \leq K_0(1 + |\mathbf{x}|).$$

4. $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 - \mathcal{F}_0$ измеримы и $M\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} \leq K_2 \Delta^r$, $M\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$, где постоянные K_0, K_1, K_2, C не зависят от Δ .

Тогда

$$M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|^2\} \leq K_3 \Delta^r,$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ .

Доказательство аналогичной теоремы можно найти в [50].

Таким образом, если условия теоремы 5.3 выполнены, то численный метод (5.94) является явным одношаговым сильным методом порядка $r/2$.

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (5.94), методом, основанным на кратных рядах Фурье:

$$\hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^q C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_l)}, \quad (5.96)$$

где

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k,$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} \text{ при } k \geq 2 \text{ и } K(t_1) \equiv 1,$$

$$\zeta_{(j_l)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_l)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)},$$

$\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ система непрерывно дифференцируемых функций, которая удовлетворяет условию 2 теоремы 4.2. Это может быть, например, тригонометрическая или полиномиальная система функций.

Поскольку, как уже отмечалось ранее, для достаточно малых Δ существует такая постоянная C''' , что

$$M \left\{ \left(J_{(\mu_k \dots \mu_1)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq \frac{C'' \Delta^2}{q}, \quad (5.97)$$

то согласно (5.95), (5.97) получаем следующее условие для выбора q :

$$q \geq \frac{C'' \Delta^{1-r}}{C'}; \quad r = 2, 3, \dots \quad (5.98)$$

Таким образом, соотношения (5.94), (5.96) и (5.98) определяют явный одношаговый сильный метод численного решения стохастического дифференциального уравнения (5.1) порядка $r/2$. Этот метод в некотором смысле является новым, так как в литературе не представлены аппроксимации повторных стохастических интегралов кратностей выше третьей, необходимые для реализации численной схемы (5.94), хотя само представление (5.94) в других обозначениях содержится, например, в [50].

5.5.2. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.0

Пусть условия теоремы 5.3 выполнены при $r = 2$. Тогда из (5.94) при $r = 2$ получаем следующий явный одношаговый сильный метод порядка 1.0:

$$\begin{aligned} y_{p+1} = y_p + {}^{(1)}B_{\beta} \{y_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*} + B_{\alpha} \{y_p\} \Delta + \\ + {}^{(2)}B_{\beta\beta} \{y_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*}, \end{aligned} \quad (5.99)$$

где

$$B_{\alpha} \{\cdot\} = L \{\cdot\} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)} \{\cdot\}, \quad B_{\beta}^{(i_1)} \{\cdot\} = G_0^{(i_1)} \{\cdot\}, \quad (5.100)$$

$$B_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)} \{\cdot\} = G_0^{(i_2)} B_{\beta}^{(i_1)} \{\cdot\}. \quad (5.101)$$

Аппроксимируем следующие повторные стохастические интегралы Стратоновича $J_{(\beta)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)}$, $J_{(\beta\beta)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)}$; $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ согласно методу, основанному на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\hat{J}_{(\beta)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.102)$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2i_1)} = \sum_{j_1,j_2=0}^q C_{j_2j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \quad (5.103)$$

где

$$C_{j_2j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2, \\ \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)}, \quad K(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}.$$

Число q в (5.103) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.98) при $r = 2$. В случае тригонометрической системы функций можно предложить вместо (5.98) более точное условие:

$$\frac{3\Delta^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq C' \Delta^3, \quad (5.104)$$

а в случае полиномиальной системы функций условие вида:

$$\frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq C' \Delta^3, \quad (5.105)$$

где постоянная C' в (5.104), (5.105) входит в условие (5.95) теоремы 5.3.

5.5.3. Явный сильный одношаговый метод порядка 1.5

Предположим, что условия теоремы 5.3 выполнены при $r = 3$. Тогда из (5.94) при $r = 3$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}B_{\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + B_{\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ + {}^{(2)}B_{\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(1)}B_{\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + \\ + {}^{(1)}B_{\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(3)}B_{\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(3)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^*, \quad (5.106)$$

где

$$B_{\alpha\beta}^{(i_1)}\{\cdot\} = LB_{\beta}^{(i_1)}\{\cdot\} - \frac{1}{2} \sum_{i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_2)} B_{\beta}^{(i_1)}\{\cdot\}, \quad B_{\beta\alpha}^{(i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_1)} B_{\alpha}\{\cdot\}, \quad (5.107)$$

$$B_{\beta\beta}^{(i_3 i_2 i_1)} \{ \cdot \} = G_0^{(i_3)} B_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)} \{ \cdot \}, \quad (5.108)$$

где $B_\alpha \{ \cdot \}$, $B_\beta^{(i_1)} \{ \cdot \}$, $B_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)} \{ \cdot \}$ определяются соотношениями (5.100), (5.101). Аппроксимируем повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$J_{(\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}, J_{(\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)}, J_{(\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)}, J_{(\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2)}, J_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$$

методом, основанным на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\hat{J}_{(\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (5.109)$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \quad (5.110)$$

$$\hat{J}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)}, \quad (5.111)$$

$$\hat{J}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \quad (5.112)$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.113)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3,$$

$$K(t_1, t_2, t_3) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}},$$

а остальные обозначения, входящие в (5.109)-(5.113), такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в (5.110)-(5.113) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.98) при $r = 3$.

5.5.4. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.0

Предположим, что условия теоремы 5.3 выполнены при $r = 4$. Тогда из (5.94) при $r = 4$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + {}^{(1)}B_\beta \{ \mathbf{y}_p \} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + B_\alpha \{ \mathbf{y}_p \} \Delta + \\ & + {}^{(2)}B_{\beta\beta} \{ \mathbf{y}_p \} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + {}^{(1)}B_{\alpha\beta} \{ \mathbf{y}_p \} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + {}^{(1)}B_{\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(3)}B_{\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(3)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + \\
& + {}^{(2)}B_{\beta\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(2)}B_{\alpha\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + \\
& + {}^{(2)}B_{\beta\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^* + B_{\alpha\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \frac{\Delta^2}{2} + \\
& + {}^{(4)}B_{\beta\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(4)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^*, \tag{5.114}
\end{aligned}$$

где

$$B_{\alpha\alpha}\{\cdot\} = LB_{\alpha}\{\cdot\} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)} B_{\alpha}\{\cdot\},$$

$$B_{\alpha\beta\beta}^{(i_2 i_1)}\{\cdot\} = LB_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)}\{\cdot\} - \frac{1}{2} \sum_{i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_3)} B_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)}\{\cdot\},$$

$$B_{\beta\beta\alpha}^{(i_3 i_2)}\{\cdot\} = G_0^{(i_3)} B_{\beta\alpha}^{(i_2)}\{\cdot\}, \quad B_{\beta\alpha\beta}^{(i_3 i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_3)} B_{\alpha\beta}^{(i_1)}\{\cdot\},$$

$$B_{\beta\beta\beta\beta}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}\{\cdot\} = G_0^{(i_4)} B_{\beta\beta\beta}^{(i_3 i_2 i_1)}\{\cdot\},$$

где $B_{\alpha}\{\cdot\}$, $B_{\beta\beta}^{(i_2 i_1)}\{\cdot\}$, $B_{\beta\alpha}^{(i_2)}\{\cdot\}$, $B_{\alpha\beta}^{(i_1)}\{\cdot\}$, $B_{\beta}^{(i_1)}\{\cdot\}$, $B_{\beta\beta\beta}^{(i_3 i_2 i_1)}\{\cdot\}$ определяются соотношениями (5.100), (5.101), (5.107), (5.108).

Аппроксимируем повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$J_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, \quad J_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, \quad J_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)}, \quad J_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)}, \quad J_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}, \quad J_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2)}$$

$$J_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_1)}, \quad J_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)}, \quad J_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \dots, m$$

методом, основанным на кратных рядах Фурье в предположении, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$:

$$\hat{J}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.115}$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{5.116}$$

$$\hat{J}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_1)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)}, \tag{5.117}$$

$$\hat{J}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{5.118}$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{5.119}$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3i_2)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^q C_{j_3j_2j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.120)$$

$$\hat{J}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_3i_1)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^q C_{j_3j_2j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \quad (5.121)$$

$$\hat{J}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_2i_1)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^q C_{j_3j_2j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)}, \quad (5.122)$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^{*(i_4i_3i_2i_1)} = \sum_{j_1,\dots,j_4=0}^q C_{j_4j_3j_2j_1} \prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)}, \quad (5.123)$$

где

$$C_{j_4j_3j_2j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \dots, t_4) \prod_{l=1}^4 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_4,$$

$$K(t_1, \dots, t_4) = \prod_{l=1}^3 \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}},$$

а остальные обозначения, входящие в (5.115)-(5.123), такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в (5.115)-(5.123) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.98) при $r = 4$.

Совокупность соотношений (5.114)-(5.123) и (5.98) при $r = 4$ определяет явный одношаговый сильный метод порядка 2.0. Он является новым, так как аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 4-й кратности, необходимые для реализации этого метода, не представлены в литературе, хотя соотношение (5.114) содержится, например, в [50].

5.5.5. Явный сильный одношаговый метод порядка 2.5

Предположим, что условия теоремы 5.3 выполнены при $r = 5$. Тогда из (5.94) при $r = 5$ получаем явный одношаговый сильный метод порядка 2.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + {}^{(1)}B_{\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + B_{\alpha}\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ & + {}^{(2)}B_{\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(1)}B_{\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + \\ & + {}^{(1)}B_{\beta\alpha}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}\hat{J}_{(\beta\alpha)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(3)}B_{\beta\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(3)}\hat{J}_{(\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + \\ & + {}^{(2)}B_{\beta\alpha\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\beta\alpha\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + {}^{(2)}B_{\alpha\beta\beta}\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}\hat{J}_{(\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^* + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +^{(2)} B_{\beta\beta\alpha} \{y_p\}^2 \cdot^{(2)} \hat{J}_{(\beta\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + B_{\alpha\alpha} \{y_p\} \frac{\Delta^2}{2} + \\
& +^{(4)} B_{\beta\beta\beta\beta} \{y_p\}^4 \cdot^{(4)} \hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(1)} B_{\beta\alpha\alpha} \{y_p\}^1 \cdot^{(1)} \hat{J}_{(\beta\alpha\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + \\
& +^{(1)} B_{\alpha\beta\alpha} \{y_p\}^1 \cdot^{(1)} \hat{J}_{(\alpha\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(1)} B_{\alpha\alpha\alpha} \{y_p\}^1 \cdot^{(1)} \hat{J}_{(\alpha\alpha\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + \\
& +^{(3)} B_{\beta\beta\beta\alpha} \{y_p\}^3 \cdot^{(3)} \hat{J}_{(\beta\beta\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(3)} B_{\beta\beta\alpha\beta} \{y_p\}^3 \cdot^{(3)} \hat{J}_{(\beta\beta\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + \\
& +^{(4)} B_{\beta\alpha\beta\beta} \{y_p\}^3 \cdot^{(3)} \hat{J}_{(\beta\alpha\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + ^{(3)} B_{\alpha\beta\beta\beta} \{y_p\}^3 \cdot^{(3)} \hat{J}_{(\alpha\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^* + \\
& +^{(5)} B_{\beta\beta\beta\beta\beta} \{y_p\}^5 \cdot^{(5)} \hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^*, \tag{5.124}
\end{aligned}$$

где при $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} \{ \cdot \} &= L B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} \{ \cdot \} - \\
&- \frac{1}{2} \sum_{i_k=1}^m G_0^{(i_k)} G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} \{ \cdot \}, \\
B_{\beta\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_k i_{k-1}\dots i_1)} \{ \cdot \} &= G_0^{(i_k)} B_{\mu_{k-1}\dots\mu_1}^{(i_{k-1}\dots i_1)} \{ \cdot \},
\end{aligned}$$

а при $k = 1$:

$$B_{\alpha} \{ \cdot \} = L \{ \cdot \} - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)} \{ \cdot \}, \quad B_{\beta}^{(i_1)} \{ \cdot \} = G_0^{(i_1)} \{ \cdot \}.$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов, входящих в (5.124), воспользуемся соотношениями (5.115)-(5.123), а также следующими соотношениями:

$$\hat{J}_{(\beta\alpha\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{5.125}$$

$$\hat{J}_{(\alpha\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)}, \tag{5.126}$$

$$\hat{J}_{(\alpha\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(0)}, \tag{5.127}$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\beta\alpha)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2)} = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(0)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \tag{5.128}$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\alpha\beta)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_1)} = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(0)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \tag{5.129}$$

$$\hat{J}_{(\beta\alpha\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^*(i_4 i_2 i_1) = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(0)} \zeta_{j_4}^{(i_4)}, \quad (5.130)$$

$$\hat{J}_{(\alpha\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^*(i_3 i_2 i_1) = \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^q C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(0)}, \quad (5.131)$$

$$\hat{J}_{(\beta\beta\beta\beta)\tau_{p+1},\tau_p}^*(i_5 \dots i_1) = \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^q C_{j_5 \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)}, \quad (5.132)$$

где

$$C_{j_5 \dots j_1} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} K(t_1, \dots, t_5) \prod_{l=1}^5 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_5,$$

$$K(t_1, \dots, t_5) = \prod_{l=1}^4 1_{\{t_l < t_{l+1}\}},$$

а остальные обозначения, входящие в (5.125)-(5.132) такие же, как в предыдущем параграфе. Число q в (5.115)-(5.123), (5.125)-(5.132) должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.98) при $r = 5$.

Совокупность соотношений (5.124), (5.115)-(5.123), (5.125)-(5.132) и (5.98) при $r = 5$ определяет явный одношаговый сильный метод порядка 2.5. Он является новым, так как аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 4-й и 5-й кратности, необходимые для реализации этого метода, в литературе не представлены, несмотря на то что соотношение (5.124) содержится, например, в [50].

Замечание 5.4. Отметим, что если в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ взята тригонометрическая или полиномиальная системы, то $\zeta_j^{(0)} = 0$ при $j \neq 0$ и $\zeta_0^{(0)} = \sqrt{\Delta}$ что существенно упрощает формулы для аппроксимаций повторных стохастических интегралов.

5.6. Конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора-Ито

В этом параграфе будут рассматриваться явные одношаговые сильные конечно-разностные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора-Ито и разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Идея построения таких методов заключается в конечно-разностной аппроксимации частных производных $H_l^{(i_1)} \dots H_1^{(i_l)} \{\mathbf{y}_p\}$, где

$H_j^{(0)}\{\cdot\} = L\{\cdot\}$, $H_j^{(i_j)}\{\cdot\} = G_0^{(i_j)}\{\cdot\}$ при $i_j = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, l$, входящих в унифицированное разложение Тейлора-Ито и разложение Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена. Для осуществления этих конечно-разностных аппроксимаций нам потребуются некоторые соотношения, основывающиеся на формуле Тейлора.

5.6.1. Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций

Рассмотрим функции $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Через $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ будем обозначать i -ые компоненты $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$; $i = 1, \dots, n$. Для произвольного $\Delta > 0$ с помощью формулы Тейлора получаем следующие соотношения:

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^2 \pi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \sigma_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^2), \quad (5.133)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \beta_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \quad (5.134)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^4 \eta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \omega_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \quad (5.135)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^4 \theta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \quad (5.136)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^3 \varrho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varpi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \quad (5.137)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^4 \mu_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \lambda_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \quad (5.138)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^5 \psi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \phi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \quad (5.139)$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i) = \sum_{i=1}^2 \zeta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta_i \Delta \mathbf{g}, t + \gamma_i \Delta) + O(\Delta^2), \quad (5.140)$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \chi_i \Delta \mathbf{g}, t + \kappa_i \Delta) + O(\Delta^3), \quad (5.141)$$

$$2\mathbf{f} + \Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i) = \sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \nu_i \Delta \mathbf{g}, t + \xi_i \Delta) + O(\Delta^2), \quad (5.142)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^{(i)}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{f}}$, $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}'_i$, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}''_{ij}$, где $\mathbf{u} = \mathbf{f}, \mathbf{g}$ и коэффициенты $\pi_i, \sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \eta_i, \omega_i, \theta_i, \varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i, \psi_i, \phi_i, \zeta_i, \delta_i, \gamma_i, \varphi_i, \chi_i, \kappa_i, \rho_i, \nu_i, \xi_i, \varrho_i, \varpi_i$ удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \mu_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\lambda_i^2}{2} = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i^3 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \eta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i = 1 \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i^3 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0 \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i = 1 \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i^2 = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 \psi_i = 0 \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i = 0 \\ \sum_{i=1}^5 \frac{\psi_i \phi_i^2}{2} = 1 \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i^3 = 0 \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i^4 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \theta_i = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i = 1 \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^3 = 0 \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^4 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \varphi_j = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_j \kappa_j = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_j \kappa_j^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \chi_j \varphi_j = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_j \chi_j \kappa_j = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_j \chi_j^2 = 0 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \zeta_j = 0 \\ \sum_{i=1}^2 \zeta_j \gamma_j = 1 \\ \sum_{i=1}^2 \zeta_j \delta_j = 1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \rho_j = 2 \\ \sum_{i=1}^2 \xi_j \rho_j = 1 \\ \sum_{i=1}^2 \nu_j \rho_j = 1 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \varrho_j = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \varrho_j \varpi_j = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \varrho_j \frac{\varpi_j^2}{2} = 1 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \pi_i = 0 \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i \sigma_i = 1 \end{array} \right\}.$$

Упражнение 5.5. Проверить, что следующий набор коэффициентов является решением данных систем уравнений: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -\frac{1}{2}, \mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_3 = -2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 2, \varepsilon_3 = -2, \varepsilon_4 = -1, \theta_1 = \frac{2}{3}, \theta_2 = -\frac{1}{12}, \theta_3 = \frac{1}{12}, \theta_4 = -\frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{48}, \eta_2 = -\frac{1}{48}, \eta_3 = \frac{27}{48}, \eta_4 = -\frac{27}{48}, \omega_1 = -3, \omega_2 = 3, \omega_3 = 1, \omega_4 = -1, \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}, \varphi_3 = -1, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = \kappa_3 = -1, \chi_1 = 1, \chi_2 = \chi_3 = -1,$

$\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 1$, $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = -1$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = -\frac{1}{2}$, $\psi_1 = -\frac{65}{60}$, $\psi_2 = \frac{66}{60}$, $\psi_3 = -\frac{14}{60}$, $\psi_4 = -\frac{1}{60}$, $\psi_5 = \frac{14}{60}$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 2$, $\phi_3 = 3$, $\phi_4 = -3$, $\phi_5 = -2$, $\pi_1 = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = -\frac{1}{2}$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, $\varrho_3 = -2$, $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 2$, $\varpi_3 = 1$.

5.6.2. Явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0

В качестве основы для построения явного сильного конечно-разностного метода порядка 1.0 возьмем соотношение (5.20) (метод Мильштейна). Аппроксимируем величину $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, где $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$ с помощью соотношения (5.133) следующим образом:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.143)$$

где $\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Подставляя (5.143) в (5.20) и отбрасывая величину большего порядка малости, чем $O(\Delta)$, получаем явный сильный одношаговый конечно-разностный метод порядка 1.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (5.144)$$

где аппроксимации $\hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}$, $\hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}$ определяются соотношениями (5.23), (5.24), при этом число q в (5.24) выбирается из условия (5.47) при $r = 2$. В качестве альтернативы условию (5.47) можно предложить условие (5.27) в случае тригонометрической системы функций и условие (5.28) в случае полиномиальной системы функций.

5.6.3. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5

Согласно (5.29) или аналогичному представлению, основанному на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена следует, что для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных методов

порядка 1.5 необходимо аппроксимировать конечными разностями величины $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_1)} \mathbf{a}$, $L \Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}$ в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{p\delta}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta \delta_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{p\gamma}^{(j)} = \tau_p + \gamma_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \sigma_j, \varpi_j$. С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее имеем:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (5.145)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.146)$$

$$L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.147)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.148)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (5.145)-(5.148) в (5.29) и отбрасывания величин большего порядка малости, чем $O(\Delta^{3/2})$, получаем следующий явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - \right.$$

$$- \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{f}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{f}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.149)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

где в (5.149) аппроксимации

$$\hat{f}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{f}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{f}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{f}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}$$

определяются соотношениями (5.32)-(5.35). При этом в (5.34), (5.35) число q выбирается из условия (5.47) при $r = 3$ или в случае $i_1 \neq i_2$, $i_1 \neq i_3$, $i_2 \neq i_3$ и тригонометрической системы функций из условий (5.40), (5.42).

Рассмотрим численный метод, аналогичный (5.149) и основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.150)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

где в (5.150) аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}$$

определяются соотношениями (5.74)-(5.78), при этом в (5.75)-(5.78) число q выбирается из условия (5.50) при $r = 3$.

5.6.4. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0

Согласно соотношениям (5.51), (5.79) для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных методов порядка 2.0 необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ следующие величины:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, L \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (5.151)$$

$$\mathbf{a} \Delta + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}. \quad (5.152)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p); \quad \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{ps}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \lambda_j, \sigma_j, \varpi_j$; $q_j = \delta_j, \nu_j$ и $h_j = \gamma_j, \xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем следующие аппроксимации для величин (5.151):

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{pw}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (5.153)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{ps}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (5.154)$$

$$L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \quad (5.155)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{pw}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (5.156)$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим аппроксимации величин (5.152) с помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее:

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) =$$

$$= \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + O(\Delta^3), \quad (5.157)$$

$$G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.158)$$

где

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.159)$$

где

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p),$$

$$L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.160)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.161)$$

где

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (5.153)-(5.161) в (5.51) и отбрасывания величин большего порядка малости, чем $O(\Delta^2)$, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 2.0 вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.162)
\end{aligned}$$

где аппроксимации

$$\begin{aligned}
& \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \\
& \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}
\end{aligned}$$

определяются соотношениями (5.55)-(5.61), где число q выбирается из условия (5.47) при $r = 4$.

Рассмотрим численный метод, аналогичный (5.162) и основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.163)
\end{aligned}$$

где аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

$$\begin{aligned}
& \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, \quad \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2)}, \\
& \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_1)}, \quad \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}
\end{aligned}$$

определяются соотношениями (5.74)-(5.78), (5.80)-(5.83), где число q выбирается из условия (5.50) при $r = 4$.

Представленные в параграфе 5.6.4 методы аппроксимируют решение стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1) с учетом слагаемых 2-го порядка малости по систематической составляющей. Поэтому эти методы могут рассматриваться как обобщения метода Рунге-Кутты 2-го порядка на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

5.6.5. Явные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5

Для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных методов порядка 2.5 необходимо аппроксимировать, согласно (5.62) и (5.84), конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ следующие величины:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}; \quad G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (5.164)$$

$$\mathbf{a} \Delta + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, \quad G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (5.165)$$

$$G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}, L^2 \Sigma_{i_1}, L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}, \\ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}. \quad (5.166)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{ps}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta s_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \varepsilon_j, \lambda_j, \phi_j$; $q_j = \chi_j, \nu_j, \delta_j$; $s_j = \sigma_j, \beta_j$; $h_j = \gamma_j, \chi_j, \xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций (5.133)-(5.142) имеем следующие аппроксимации величин (5.164):

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^2), \quad (5.167)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (5.168)$$

$$L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta^{3/2}), \quad (5.169)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (5.170)$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим тейлоровские аппроксимации величин (5.165) с помощью соотношений (5.133)-(5.142):

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \\ = \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^4 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + O(\Delta^3), \quad (5.171)$$

$$G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (5.172)$$

где

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (5.173)$$

где

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p),$$

$$LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \quad (5.174)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (5.175)$$

где

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p),$$

Рассмотрим конечно-разностные аппроксимации величин (5.166) с помощью тейлоровских аппроксимаций (5.133)-(5.142):

$$L^2 \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.176)$$

$$LG_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.177)$$

$$G_0^{(i_1)} La(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.178)$$

где

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.179)$$

где

$$\mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.180)$$

где

$$\mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{o}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p),$$

$$\mathbf{o}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.181)$$

где

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (5.182)$$

где

$$\mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

$$\begin{aligned} L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (5.183)$$

где

$$\mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (5.167)-(5.183) в (5.62) и отбрасывания величин большего порядка малости, чем $O(\Delta^{5/2})$, получаем явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 2.5 вида:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\mu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) \\
& - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \Bigg] \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{5.184}
\end{aligned}$$

где аппроксимации

$$\begin{aligned}
& \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \\
& \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \\
& \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}
\end{aligned}$$

определяются соотношениями (5.55)-(5.61), (5.68)-(5.72), в которых число q должно выбираться так, чтобы выполнялось условие (5.47) при $r = 5$.

Рассмотрим теперь метод, аналогичный (5.184) и основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} &= \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Bigg] \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(j i_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Bigg] \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \Bigg] \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(j i_5)}, \tau_p) \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.185)
\end{aligned}$$

где аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

$$\begin{aligned}
& \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, \quad \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \\
& \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2)}, \quad \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_1)}, \quad \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2)}, \\
& \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3)}, \quad \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_1)}, \\
& \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2)}, \quad \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}
\end{aligned}$$

определяются соотношениями (5.74)-(5.78), (5.80)-(5.83), (5.85)-(5.92). Соотношения (5.185), (5.74)-(5.78), (5.80)-(5.83), (5.85)-(5.92), в которых число q выбирается из условия (5.50) при $r = 5$ определяют явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка 2.5.

5.6.6. О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных методов

В заключение параграфа 5.6 коснемся вопроса о сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов. Для этого запишем общее представление такой численной схемы, основанной на унифицированном разложении Тейлора-Ито, и точное представление решения стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1):

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}F_{l_1\dots l_k,j} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \quad (5.186)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = & \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}I_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} + \\ & + H_{r+1\tau_{p+1},\tau_p} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (5.187)$$

где

$${}^{(k)}F_{l_1\dots l_k,j} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} = \left\| F_{l_1\dots l_k,j}^{(i_1\dots i_k)} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \right\|_{i_1,\dots,i_k=1}^m,$$

$F_{l_1\dots l_k,j}^{(i_1\dots i_k)} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}$ – конечно-разностная аппроксимация коэффициентной функции

$$G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\},$$

а остальные обозначения, входящие в (5.186), (5.187), соответствуют обозначениям формул (5.3), (5.5).

Сформулируем утверждение о сходимости численной схемы (5.186).

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и пусть случайные величины $F_{l_1\dots l_k,j}^{(i_1\dots i_k)} \{\mathbf{y}_{\tau_g}\}$ – $\mathcal{F}_{\tau_g}$ -измеримы и удовлетворяют при всех $g = 0, 1, \dots, N$; $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$; $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}_q$ следующему условию:

$$\mathbf{M} \left\{ \max_{0 \leq p \leq N} \left| F_{l_1\dots l_k,j}^{(i_1\dots i_k)} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \right|^2 \right\} \leq C_0 \Delta^{r+1-k-2 \left(j + \sum_{i=1}^k l_i \right)}, \quad (5.188)$$

где $C_0 = \text{const} < \infty$.

Тогда справедлива оценка:

$$z_T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} \left\{ \max_{0 \leq p \leq N} |\mathbf{y}_{\tau_p} - \mathbf{x}_{\tau_p}|^2 \right\} \leq C_1 \Delta^r,$$

где $C_1 = \text{const} < \infty$, $\mathbf{x}_t$ – решение стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1), т.е. метод (5.186) является методом с порядком сильной сходимости равным $r/2$.

Доказательство:

Согласно (5.186), (5.187) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_p} - \mathbf{x}_{\tau_p} = & \sum_{q=0}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \sum_{g=0}^{p-1} \left[X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + \right. \\ & \left. + Y_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Z_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right] - \sum_{g=0}^{p-1} H_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_{jl_1 \dots l_k \theta, t} &= \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[{}^{(k)}F_{l_1 \dots l_k, j} \{ \mathbf{y}_t \} - {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{y}_t \} \right] \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t}, \\ Y_{jl_1 \dots l_k \theta, t} &= \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[{}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{y}_t \} - {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} \right] \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t}, \\ Z_{jl_1 \dots l_k \theta, t} &= \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{x}_t \} \cdot \left({}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t} - {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \theta, t} \right), \end{aligned}$$

$H_{r+1, s, t}$ – имеет вид (5.9).

Далее, используя мартингалльное свойство величин $X_{jl_1 \dots l_k \theta, t}$, $Y_{jl_1 \dots l_k \theta, t}$, $Z_{jl_1 \dots l_k \theta, t}$, $H_{r+1, s, t}$ и несколько модифицируя доказательство теоремы 5.1, приходим в условиях теоремы 5.4 к следующему неравенству:

$$z_T \leq C_2 \Delta^r + C_3 \int_0^T z_u du; \quad C_2, C_3 = \text{const} < \infty,$$

из которого, согласно неравенству Гронуолла, получаем:

$$z_T \leq C_1 \Delta^r.$$

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что аналоги теоремы 5.4 могут быть сформулированы для явных одношаговых конечно-разностных методов, основанных на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и разложении Тейлора-Стратоновича. Эти теоремы могут быть найдены, например, в [50].

Отметим также, что проверка условия (5.188) для каждого конкретного конечно-разностного метода не представляет особого труда, если коэффициенты диффузии и сноса стохастического дифференциального уравнения Ито (5.1) являются достаточно гладкими функциями своих аргументов. Необходимая для сходимости метода степень гладкости этих функций определяется очевидно структурой конкретных конечно-разностных аппроксимаций $F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)} \{ \mathbf{y}_{\tau_j} \}$ и может быть потребована в каждом конкретном случае.

Полученные в параграфах 5.6.4 и 5.6.5 методы аппроксимируют решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.25) с учетом слагаемых 2-го порядка малости по систематической составляющей. Поэтому эти методы могут рассматриваться как обобщения метода Рунге-Кутты 2-го порядка на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Следует отметить, что приведенные в параграфах 5.6.3, 5.6.4 и 5.6.5 явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядков 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем два последних из них не имеют аналогов в литературе для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

5.7. Неявные одношаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В этом параграфе рассмотрим неявные сильные одношаговые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Отличительной особенностью неявных численных методов от явных является то, что вычисляемая на шаге интегрирования с номером k неизвестная величина входит как левую, так и в правую части неявной численной схемы. Таким образом, для определения этой величины приходится дополнительно решать на каждом шаге интегрирования алгебраическое уравнение. Это уравнение может быть решено одним из известных стандартных численных методов, например, методом Ньютона-Рафсона. Потребность в неявных численных методах, в частности, для стохастических дифференциальных уравнений, объясняется тем, что эти методы обладают большей устойчивостью [47,

50], нежели явные численные методы. Следует отметить, что мы будем рассматривать, так же как и в [47, 50], только такие неявные численные методы, в которых „неявность”, т.е. вычисляемая на шаге интегрирования с номером k неизвестная величина, входит только в систематические члены разложения Тейлора-Ито ($a\Delta$, $\frac{1}{2}La\Delta^2$) в правой части неявной численной схемы. Это обстоятельство связано с тем, что если „неявность” входит не только в систематические, но и в стохастические члены разложения Тейлора-Ито в правой части неявной численной схемы, то для таких численных схем, вообще говоря, не существуют моментные характеристики, что делает невозможным применение таких численных методов. В частности, это показано в [50] на примере тестовых линейных стохастических дифференциальных уравнений.

5.7.1. Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.0

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных методов Мильштейна [47]. В покомпонентной форме записи эти методы имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(i_1)} \hat{f}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(i_1)} \hat{f}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (5.189)$$

где здесь и далее в этом параграфе $\mathbf{a}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, $\mathbf{y}_p^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)}$, $\Sigma^{(ik)} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^{(ik)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, $\tau_p \stackrel{\text{def}}{=} p\Delta$; $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$; $l = 1, \dots, n$.

Следует отметить, что при $\tilde{\alpha}_l = 0$ из (5.189) получаем явный метод Мильштейна (5.20). Если $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, то (5.189) можно рассматривать как обобщение детерминированного метода трапеций.

Далее будем предполагать, что повторные стохастические интегралы, входящие в метод (5.189), и рассматриваемые далее численные методы аппроксимированы одним из рассмотренных в главе 4 численных методов с точностью, необходимой для выполнения условий (5.4), (5.19) теорем 5.1 и 5.2 о сильной сходимости численных методов при соответствующих значениях r .

Поясним, как может быть обоснована сходимость метода (5.189). Если разложить величину $\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})$ в ряд Тейлора-Ито в окрестности точки $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ и подставить результат в правую часть (5.189),

то очевидно мы получим представление, отличающееся от явного метода Мильштейна лишь наличием остаточного члена в интегральной форме. Если дополнительно к условиям теоремы 5.1 при $r = 2$ наложить ограничение типа условия 3 теоремы 5.1 на рост коэффициентов функций указанного остаточного члена, то можно практически, повторяя доказательство теоремы 5.1, показать, что метод (5.189) имеет порядок сильной сходимости, равный 1.0. Предоставим проделать это читателю.

Далее в этой главе будут рассматриваться различные неявные и явные одношаговые или двухшаговые численные методы. Обоснование сходимости этих методов может быть проведено по аналогии с вышеприведенными рассуждениями. Так, рассматриваемый метод с помощью разложения Тейлора-Ито (если он не конечно-разностный) и с помощью разложения Тейлора-Ито и обычного разложения Тейлора (если он конечно-разностный) может быть приведен к представлению, отличающемуся от явного одношагового метода соответствующего порядка точности только наличием остаточного члена. Если рассматриваемый метод не конечно-разностный, то, дополняя условия теоремы 5.1 условием типа условия 3 теоремы 5.1 на коэффициенты функции указанного остаточного члена в интегральной форме, мы можем практически, повторяя доказательство теоремы 5.1, доказать сходимость рассматриваемого численного метода. Если рассматриваемый метод является конечно-разностным, то для доказательства его сходимости необходимо кроме вышеприведенных условий потребовать такой степени гладкости коэффициентов диффузии и сноса стохастического дифференциального уравнения Ито, чтобы выполнялось условие типа условия (5.188) теоремы 5.4 для конечно-разностных аппроксимаций, входящих в рассматриваемый конечно-разностный метод. Далее, модифицируя доказательства теорем 5.1 и 5.4, мы можем доказать сходимость рассматриваемого конечно-разностного метода. Мы привели рассуждения о сходимости численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора-Ито. Однако если в этих рассуждениях заменить теоремы 5.1 и 5.4 на их аналоги для методов, основанных на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена или разложении Тейлора-Стратоновича (см., например, [50]), то мы можем обосновать сходимость численных методов, основанных на соответствующих

5.7.2. Неявные одношаговые сильные методы порядка 1.5

Рассмотрим двухпараметрическое семейство неявных сильных методов порядка 1.5 [50]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{j}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{j}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + L \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{5.190}
 \end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0, 1]$.

Вариант численного метода (5.190), основанный на унифицированном разложении Тейлора-Ито, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.191}
 \end{aligned}$$

Обоснование сходимости методов (5.190), (5.191) может быть проведено с помощью рассуждений, приведенных в начале этого параграфа.

Перейдем к рассмотрению более точных неявных сильных численных методов.

5.7.3. Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.0

Двухпараметрическое семейство неявных сильных численных методов порядка 2.0 имеет вид [50]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{j}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{j}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + L \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
 & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{j}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{j}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.192)
 \end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0, 1]$.

Рассмотрим вариант численной схемы (5.192), который основан на унифицированном разложении Тейлора-Ито:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(l i_1)} \left(\hat{I}_{10 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{10 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}_{01 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{00 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{0000 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.193}
\end{aligned}$$

Отметим, что в численную схему (5.193) входит 7 различных повторных стохастических интегралов, а в схему (5.192) их входит уже 9.

5.7.4. Неявные одношаговые сильные методы порядка 2.5

Для построения неявных сильных численных методов порядка 2.5 дополним, с учетом „неявности”, правые части (5.193) и (5.192) членами разложения Тейлора-Ито, имеющими порядок малости $O(\Delta^{5/2})$. Таким образом, неявный сильный численный метод порядка 2.5, основанный на унифицированном разложении Тейлора-Ито, примет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l \mathbf{L} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) \mathbf{L} \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{0 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{00 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{1 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{000 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(l i_1)} \left(\hat{I}_{10 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{10 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}_{01 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{00 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{0000 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{L} \mathbf{a}^{(l)} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{1 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta^2 \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l - \tilde{\beta}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) + \\
& + \frac{1}{2} L \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \Delta (1 + \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(l i_1)} \left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.194}
\end{aligned}$$

Аналог численной схемы (5.194), который основан на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(1)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(11)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(10)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(1)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) + L \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(01)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(111)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(101)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(011)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(110)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(11)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(1111)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(100)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(10)_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta^2 \tilde{\beta}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + LL \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + LG_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} LG_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p} + \right. \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(-\Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \left. + LG_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(l i_1)} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.195}
\end{aligned}$$

Для реализации численного метода (5.194) необходимо аппроксимировать на каждом шаге интегрирования 12 различных повторных стохастических интегралов, а для реализации схемы (5.195) их требуется уже 17.

В заключение этого параграфа отметим, что если в (5.189)-(5.195) положить $\tilde{\alpha}_l = \tilde{\beta}_l = 0$, то из (5.189)-(5.195) будут вытекать рассматривавшиеся ранее явные сильные одношаговые численные методы.

5.8. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В качестве основы для построения неявных сильных конечно-разностных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито возьмем методы, построенные в предыдущем параграфе и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

5.8.1. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.0

Рассмотрим семейство (5.189) неявных методов Мильштейна и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в

правую часть (5.189). В результате получим следующее однопараметрическое семейство неявных сильных конечно-разностных методов порядка 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\ + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (5.196)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (5.144).

5.8.2. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 1.5

Аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правые части (5.190), (5.191). Тогда из (5.190) и (5.191) следуют, в пренебрежении слагаемым

$$\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2,$$

следующие два однопараметрических семейства неявных сильных конечно-разностных методов порядка 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\ + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.197)$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\ + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \tilde{\alpha}_l \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.198)
\end{aligned}$$

где в (5.198), (5.197) сохранен смысл обозначений, введенных в (5.149), (5.150).

Перейдем к рассмотрению более точных неявных сильных конечно-разностных методов.

5.8.3. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.0

Аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (5.193) и беря $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$ в (5.193) получим следующую неявную конечно-разностную схему порядка 2.0:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} &= \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \left. \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Bigg] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.199)
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (5.162). Аналог схемы (5.199), который основан на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Bigg] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Bigg] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.200)
\end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как и в (5.162).

5.8.4. Неявные сильные одношаговые конечно-разностные методы порядка 2.5

Для построения неявных сильных конечно-разностных методов порядка 2.5 используем схемы (5.194) и (5.195) при $\bar{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, а также конечно-разностные аппроксимации, полученные в параграфе 5.6.5. В результате из (5.194) получаем следующую неявную сильную численную схему порядка 2.5:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{f}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(j i_2)}, \tau_p) \hat{f}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(j i_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{f}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{f}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
 & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{f}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(j i_3)}, \tau_p) \hat{f}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(j i_2)}, \tau_p) \left(\hat{f}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{f}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(j i_2)}, \tau_p) \left(\hat{f}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{f}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
 & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{f}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(j i_4)}, \tau_p) \hat{f}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
 & + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(j i_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \hat{f}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{f}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{f}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \\
 & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(j r)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{3}{2} \Delta \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.201)
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (5.184).

Если в качестве основы взять схему (5.195) при $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, то получим следующую неявную сильную численную схему порядка 2.5:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \quad \times \left(\hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{5.202}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (5.185).

В заключение параграфа отметим, что полученные в параграфах 5.7 и 5.8 неявные сильные численные методы представляют интерес с той точки зрения, что в них используются конечно-разностные аппроксимации частных производных, отличающиеся от соответствующих аналогов, полученных в [47, 50], применяются унифицированные разложения Тейлора-Ито, а также предлагается использовать в построенных численных методах новый метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, полученный в главе 4.

5.9. Явные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

Далее в этой главе будут рассматриваться, на примере двухшаговых, многошаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. С вычислительной точки зрения многошаговые численные методы являются в ряде случаев более эффективными, нежели одношаговые методы таких же порядков точности. Это обстоятельство связано с тем, что многошаговые методы используют для вычисления решения на шаге интегрирования с номером k информацию об этом решении на нескольких предшествующих шагах интегрирования, в то время как одношаговые методы используют информацию о решении только на предыдущем шаге интегрирования. Кроме этого, в ряде случаев многошаговые методы являются более устойчивыми, чем одношаговые методы таких же порядков точности. Отметим, что начальные шаги, необходимые для старта многошаговой схемы (в случае двухшаговых методов требуется один начальный шаг), могут, например, осуществляться с помощью явных методов таких же порядков точности, как и рассматриваемый многошаговый метод.

5.9.1. Явный двухшаговый сильный метод порядка 1.0

Рассмотрим следующий двухшаговый явный сильный метод порядка 1.0:

$$y_{p+1} = y_{p-1} + 2a\Delta + v_p + v_{p-1}, \quad (5.203)$$

где

$$v_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{f}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{f}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}. \quad (5.204)$$

Обоснование сходимости метода (5.203) может быть проведено согласно рекомендациям, приведенным в начале параграфа 5.7. Предоставим проделать это читателю в качестве упражнения.

Упражнение 5.6. Показать, что справедливо с вероятностью 1 представление:

$$y_{p+1} = y_{p-1} + 2a\Delta + v_p + v_{p-1} = y_{p-1} + a\Delta + v_p + v_{p-1} +$$

$$+ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})\Delta + O(\Delta^{3/2}) = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + O(\Delta^{3/2}). \quad (5.205)$$

Записать в интегральной форме остаточный член в (5.205), сформулировать условия, при которых метод (5.203) сходится сильно с порядком точности 1.0, и доказать эту сходимость.

5.9.2. Явные двухшаговые сильные методы порядка 1.5

Рассмотрим явный двухшаговый сильный метод порядка 1.5, полученный в [50]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (5.206)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Аналог метода (5.206), который основывается на унифицированном разложении Тейлора-Ито, имеет вид:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (5.208)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (5.209)$$

Обоснование сходимости методов (5.206), (5.208), а также численных методов, рассматриваемых далее в этой главе, осуществляется путем алгебраических преобразований правых частей этих методов с применением разложения Тейлора-Ито к некоторым слагаемым в их правых частях (см. (5.205)).

5.9.3. Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.0

Дополнив величину $\mathbf{v}_p$ вида (5.209) стохастическими слагаемыми порядка $O(\Delta^2)$ из разложения Тейлора-Ито, получим следующую явную двухшаговую схему порядка 2.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(11)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} \right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned} \quad (5.210)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (5.211)$$

Вариант численной схемы (5.210), основанный на унифицированном разложении Тейлора-Ито, запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{00\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} \right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned} \quad (5.212)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{01, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.213}
\end{aligned}$$

5.9.4. Явные двухшаговые сильные методы порядка 2.5

Добавим к величинам $\mathbf{v}_p$ в правых частях (5.211) и (5.213) стохастические слагаемые порядка $O(\Delta^{5/2})$ из разложения Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена и унифицированного разложения Тейлора-Ито соответственно. В результате получим два явных двухшаговых сильных численных метода порядка 2.5. Первый из них имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m \left\{ G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right. \right. \\
& + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(01)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \\
& \left. + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \left(\hat{J}_{(10)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} \right) \right\} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(11)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} + \\
& \left. + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(111)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{5.214}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad \left. + L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.215}
\end{aligned}$$

Второй явный двухшаговый сильный численный метод, который основывается на унифицированном разложении Тейлора-Ито, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m \left\{ G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} - \right. \right. \\
& - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{1\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \\
& \left. + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} \right) \right\} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{00\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} + \\
& \left. + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{000\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{5.216}
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta^2 \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} L L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.217}
\end{aligned}$$

5.10. Неявные двухшаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

5.10.1. Неявные двухшаговые сильные методы порядков 1.0 и 1.5

Рассмотрим трехпараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных методов порядка 1.0 [50]:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\
& + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)},
\end{aligned} \tag{5.218}$$

где $\tilde{\gamma}_l, \tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$, а $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ и имеет вид (5.204).

Нетрудно видеть, что при $\tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1, \tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$ метод (5.218) примет вид (5.203), т.е. превратится в явный двухшаговый сильный метод порядка 1.0. Если в (5.218) положить $\tilde{\gamma}_l = 0, \tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}$, то (5.218) превратится в неявный одношаговый метод, который совпадет с методом (5.189), если в (5.189) положить $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных методов порядка 1.5 [50]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \\
& + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\
& + \tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)},
\end{aligned} \tag{5.219}$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$, а $\tilde{\mathbf{v}}_p$ имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)},$$

где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (5.207).

Версия метода (5.219), основанная на унифицированном разложении Тейлора-Ито, включает в себя величины $\tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)}, \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}$, которые определяются равенством

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)},$$

где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (5.209).

Отметим, что если $\tilde{\gamma}_l = 0$ в (5.219), то (5.219) превратится в неявный одношаговый метод, который совпадет с методом (5.190) или (5.191), если в (5.190) или (5.191) положить $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}, \tilde{\beta}_l \in [0, 1]$.

5.10.2. Неявные двухшаговые сильные методы порядков 2.0 и 2.5

Рассмотрим следующий неявный двухшаговый сильный метод порядка 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2}\Delta \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \tilde{\mathbf{v}}_p + \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}, \quad (5.220)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta \left\{ \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right\}, \quad (5.221)$$

где $\mathbf{v}_p$ имеет вид (5.211).

Если при построении метода (5.220) используется унифицированное разложение Тейлора-Ито, то $\tilde{\mathbf{v}}_p$ в (5.220) имеет вид (5.221), где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (5.213).

Для построения неявного двухшагового сильного метода порядка 2.5 можно воспользоваться схемой (5.220), но величину $\tilde{\mathbf{v}}_p$ необходимо взять в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta \left[\sum_{i_1=1}^m \left(G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ \left. + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right], \quad (5.222) \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (5.215).

Если для построения неявного двухшагового сильного метода порядка 2.5 используется (5.220) и унифицированное разложение Тейлора-Ито, то $\tilde{\mathbf{v}}_p$ в (5.220) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta \left[\sum_{i_1=1}^m \left(G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ \left. + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right], \quad (5.223) \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (5.217).

5.11. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В качестве основы для построения двухшаговых сильных методов возьмем численные схемы, рассмотренные в параграфах 5.9, 5.10, и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

5.11.1. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 1.0 и 1.5

Рассмотрим явный двухшаговый конечно-разностный метод порядка 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2a\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1},$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{(i_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma^{(l_{i_1})}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(j_{i_2})}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \quad (5.224)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (5.144).

В качестве примера неявного двухшагового конечно-разностного метода приведем следующее однопараметрическое семейство численных методов:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \\ & + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\ & + \tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}, \end{aligned} \quad (5.225)$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$, а $\tilde{\mathbf{v}}_p$ имеет вид (5.224).

Перейдем к рассмотрению двухшаговых конечно-разностных методов порядка 1.5.

Используя численную схему (5.208) и аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в ее правую часть, получим следующий явный двухшаговый конечно-разностный метод порядка 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2a\Delta - \sum_{i_1=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p-1, \sigma}^{(j_{i_1})}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{f}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{f}_{00\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{f}_{0\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \hat{f}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{(i_1)} (\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{(i_1)} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{f}_{1\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1i_2} (\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{f}_{000\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}, \quad (5.226)
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (5.149).

Рассмотрим, на основе численной схемы (5.219), однопараметрическое семейство неявных двухшаговых конечно-разностных методов порядка 1.5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \\
& + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\
& + \mathbf{v}_p^{(l)} + \gamma_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)},
\end{aligned}$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$, а $\tilde{\mathbf{v}}_p$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p^{(l)} = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{j}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)} (\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{j}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{j}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{j}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(li_1)} (\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(li_1)} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{j}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1i_2}^{(l)} (\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{j}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)},
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (5.150).

5.11.2. Двухшаговые сильные конечно-разностные методы порядков 2.0 и 2.5

Рассмотрим в качестве двухшагового конечно-разностного метода порядка 2.0 следующий неявный метод:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (5.227)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\ & + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Big] + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ & + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Big] + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (5.228) \end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как и в (5.200).

В качестве явной двухшаговой конечно разностной схемы порядка 2.0, которая основывается на унифицированном разложении Тейлора-Ито, рассмотрим следующую схему:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \sum_{i_1=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p-1, \sigma}^{(ji_1)}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p-1, \omega}^{(ji_2)}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{00\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\ & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (5.229)$$

где введены такие же обозначения, как и в (5.199).

Рассмотрим двухшаговый неявный конечно-разностный метод порядка 2.5, основанный на разложении Тейлора-Ито в форме Вагнера и Платена, а также на конечно-разностных аппроксимациях, полученных в параграфе 5.6.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\ & + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{j}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{j}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{j}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{j}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{j}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{j}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{j}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{j}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{j}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{j}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{j}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{j}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \times \left(\hat{j}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{j}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{j}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{j}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{j}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{j}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{j}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} \quad (5.230)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (5.185).

Построим явный двухшаговый конечно-разностный метод порядка 2.5, основанный на унифицированном разложении Тейлора-Ито. В рамках обозначений, введенных в формуле (5.184), этот метод будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1=1}^m \left[- \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p-1, \beta}^{(ji_1)}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right. \\ & + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p-1, \phi}^{(jr)}, \tau_{p-1}) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p-1, \chi}^{(j)}, \Delta_{p-1, \kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} - \\ & - \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p-1, \beta}^{(ji_1)}, \tau_{p-1}) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} \right) \Big] - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p-1, \varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{00\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} - \\ & - \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p-1, \varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{000\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_3 i_2 i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ & - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Big] + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Big] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta^2 \hat{I}_{0, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{2, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \quad \times \left(\hat{I}_{2, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{100, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{010, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{000, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \Big] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{5.231}
\end{aligned}$$

5.12. Общие представления двухшаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящем параграфе рассмотрим принцип, по которому можно строить многопараметрические семейства двухшаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений.

Предположим, что мы хотим построить некоторый неявный двухшаговый численный метод порядка 1.0. Тогда в его правую часть

должна входить некоторая линейная комбинация величин $\mathbf{y}_p$, $\mathbf{y}_{p-1}$, $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})$, $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})$. Запишем эту линейную комбинацию в виде:

$$(1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\}, \quad (5.232)$$

где $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$; $l = 1, \dots, n$.

Нетрудно видеть, что если воспользоваться разложением Тейлора-Ито, то (5.232) можно привести к виду:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} - \mathbf{v}_p^{(l)} - \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)} + O(\Delta^{3/2}),$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}. \quad (5.233)$$

Таким образом, мы приходим к трехпараметрическому семейству (5.218) неявных двухшаговых методов порядка 1.0. Это семейство впервые было получено в работе [50]. Варьируя параметры $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$ и $\tilde{\alpha}_l^{(2)}$, мы можем получать различные как явные, так и неявные численные схемы порядка 1.0. В частности, при $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\gamma}_l = 1$ из (5.218) мы получаем метод (5.204).

В [50] приведено пятипараметрическое разложение, которое строится согласно изложенному выше принципу и позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые численные методы порядка 2.0. Приведем это разложение в принятых в данной монографии обозначениях:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ + \Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ \left. + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \right\} L \mathbf{a}^{(l)} + \right. \\ \left. + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(1)}) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right] -$$

$$-\Delta \left(\tilde{\alpha}_l^{(2)} G_p^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l G_{p-1}^{(l)} \right) + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)}, \quad (5.234)$$

где

$$G_p = \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (5.235)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ & \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (5.236)$$

где $\tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)}, \tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$.

Отметим, что из (5.234) при $\tilde{\gamma}_l = 1, \tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0, 1]$ получаем неявный двухшаговый метод (5.220). Если в (5.234) взять $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0, \tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1, \tilde{\beta}_l^{(1)} = 1, \tilde{\beta}_l^{(2)} = 0$, то из (5.234) получим явный двухшаговый метод (5.210).

Построим обобщение разложения (5.234), которое позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые численные схемы порядка 2.5.

Такое обобщение может, например, иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)} (\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)} (\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \left. \right\} + \\ & + \Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} L \mathbf{a}^{(l)} (\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \right\} L \mathbf{a}^{(l)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(1)}) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \Big] - \\
& - \Delta \left(\tilde{\alpha}_l^{(2)} \tilde{G}_p^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{G}_{p-1}^{(l)} \right) + \tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)} - \\
& - \Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} \tilde{Q}_p^{(l)} + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{Q}_{p-1}^{(l)} \right], \quad (5.237)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_p &= \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \\
\tilde{G}_p &= G_p + \sum_{i_1=1}^m \left[L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{\hat{J}(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{\hat{J}(i_1)} \right] + \\
&+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{\hat{J}(i_3 i_2 i_1)}, \\
\tilde{\mathbf{v}}_p &= \mathbf{v}_p + \\
&+ \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{\hat{J}(i_1)} + L L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{\hat{J}(i_1)} \right] + \\
&+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
&+ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{\hat{J}(i_3 i_2 i_1)} + \\
&+ \left. L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
&+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(i_1)} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)},
\end{aligned}$$

где G_p и $\mathbf{v}_p$ определяются соответственно равенствами (5.235), (5.236); $\tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)}, \tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$; $l = 1, \dots, n$.

Отметим, что, в частности, при $\tilde{\gamma}_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}$, $\tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0, 1]$ из (5.237) следует неявный двухшаговый метод (5.220) с $\tilde{\mathbf{v}}_p$, определяемой равенством (5.222). Если в (5.237) взять $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$, $\tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1$, $\tilde{\beta}_l^{(1)} = 1$, $\tilde{\beta}_l^{(2)} = 0$, то из (5.237) получим явный двухшаговый метод (5.214).

В заключение параграфа отметим, что рассмотренный подход получения различных параметрических семейств численных методов для

стохастических дифференциальных уравнений по сути является обобщением аналогичного подхода для детерминированных дифференциальных уравнений.

Свойства численных методов, в частности их устойчивость, существенно зависят от выбора входящих в них параметров. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий параграф. Отметим также, что, составляя линейные комбинации систематических членов:

$$\begin{aligned} & y_{p+1}, y_p, \dots, y_{p-k}, \\ & \Delta a(y_{p+1}, \tau_{p+1}), \Delta a(y_p, \tau_p), \dots, \Delta a(y_{p-k}, \tau_{p-k}), \\ & \Delta^2 La(y_{p+1}, \tau_{p+1}), \Delta^2 La(y_p, \tau_p), \dots, \Delta^2 La(y_{p-k}, \tau_{p-k}), \\ & \dots, \end{aligned}$$

где $k \geq 1$, выбирая определенным образом коэффициенты перед этими членами и дополняя эти комбинации специально подобранными стохастическими членами из разложения Тейлора-Ито, можно строить различные многошаговые численные схемы для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

5.13. Об устойчивости численных методов

Известно, что проблема устойчивости численных методов заключается в том, что ошибка, даваемая численной схемой, может расти в процессе вычислений и в результате может превысить допустимые значения. Однако в ряде случаев удастся гарантировать выполнение требуемого ограничения сверху на ошибку численного метода. Как правило, достижение этого происходит за счет выбора подходящего шага интегрирования, параметров численной схемы и промежутка интегрирования. Существенную роль в устойчивости численных методов также играют особенности конкретных стохастических дифференциальных уравнений, к которым эти методы применяются. Рассмотрим вопросы устойчивости численных методов более подробно.

Пусть y_p ; $p = 0, 1, \dots$ – дискретная аппроксимация решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.25), которая стартует в момент t_0 из точки y_0 . Через y'_p ; $p = 0, 1, \dots$ обозначим эту же дискретную аппроксимацию, но стартующую в момент t_0 из точки

y'_0 . Выберем некоторый конечный промежуток интегрирования $[t_0, T]$ и покроем его сеткой $\{\tau_j\}_{j=0}^{N_T}$, такой что

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N_T} = T, \Delta = \max_{0 \leq j < N_T} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Для любого $t \in [t_0, T]$ определим натуральное число N_t следующим образом:

$$N_t = \max_j \{j : \tau_j \leq t\}.$$

Определение 5.2 [50]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация y_p ; $p = 0, 1, \dots$ стохастически численно устойчива для данного стохастического дифференциального уравнения, если для любого конечного интервала $[t_0, T]$ существует такое постоянное число $\Delta_0 > 0$, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \Delta \in (0, \Delta_0)$ выполняется условие:

$$\lim_{|y_0 - y'_0| \rightarrow 0} \sup_{t_0 \leq t \leq T} P \{ |y_{N_t} - y'_{N_t}| \geq \varepsilon \} = 0.$$

Определение 5.3 [50]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация y_p ; $p = 0, 1, \dots$ стохастически численно устойчива или просто численно устойчива, если она стохастически численно устойчива для такого стохастического дифференциального уравнения, что y_p ; $p = 0, 1, \dots$ сходится к решению этого уравнения.

Отметим, что в определение численной устойчивости входит ограничение Δ_0 на шаг интегрирования Δ . Обычно Δ_0 зависит от промежутка интегрирования $[t_0, T]$ и рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения. Известно [50], что даже для численно устойчивой схемы при увеличении промежутка интегрирования ошибка численной схемы может расти и превышать допустимые пределы, хотя теоретически она остается ограниченной. Эта проблема становится особенно актуальной в тех задачах, где промежуток интегрирования $[t_0, T]$ заранее неизвестен, например, при моделировании момента первого выхода. В связи с этим рассмотрим следующее определение.

Определение 5.4 [50]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация y_p ; $p = 0, 1, \dots$ асимптотически численно устойчива, если она численно устойчива и для любого конечного интервала $[t_0, T]$ существует такое постоянное число $\Delta_a > 0$, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \Delta \in (0, \Delta_a)$ выполняется условие:

$$\lim_{|y_0 - y'_0| \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |y_{N_t} - y'_{N_t}| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Отметим, что представленные в настоящей книге одношаговые численные методы являются численно устойчивыми, если коэффициенты диффузии и сноса стохастических дифференциальных уравнений, к которым применяются эти методы, удовлетворяют определенным условиям гладкости. Покажем это на примере явного метода Мильштейна в скалярном случае, т.е. когда $m = n = 1$. В этом случае явный метод Мильштейна имеет вид:

$$y_{p+1} = y_p + a(y_p, \tau_p) \Delta + b(y_p, \tau_p) \Delta f_{\tau_p} + c(y_p, \tau_p) J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}},$$

где $a, b : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\Delta f_{\tau_p} = f_{\tau_{p+1}} - f_{\tau_p}$; $J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \int_t^s \int_t^\tau df_\theta df_\tau$; $c(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} b(x, t)$; $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; $a(x_t, t)$, $b(x_t, t)$ – коэффициенты сноса и диффузии соответствующего скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито.

Относительно функций $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям Липшица. Пусть

$$z_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \{ |y_{N_s} - y'_{N_s}|^2 \},$$

тогда

$$\begin{aligned} z_t &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| y_0 - y'_0 + \sum_{j=0}^{N_s-1} (y_{j+1} - y_j - y'_{j+1} + y'_j) \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq 4 \left\{ |y_0 - y'_0|^2 + z_t^{(1)} + z_t^{(2)} + z_t^{(3)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.238)$$

где

$$\begin{aligned} z_t^{(1)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N_s-1} (a(y_j, \tau_j) - a(y'_j, \tau_j)) \Delta \right|^2 \right\}, \\ z_t^{(2)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N_s-1} (b(y_j, \tau_j) - b(y'_j, \tau_j)) \Delta f_{\tau_j} \right|^2 \right\}, \\ z_t^{(3)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N_s-1} (c(y_j, \tau_j) - c(y'_j, \tau_j)) J_{00_{\tau_{j+1}, \tau_j}} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

С использованием условия Липшица и неравенства (1.33) при $n = 1$ получаем:

$$z_t^{(1)} \leq K_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N_s-1} |y_j - y'_j| \Delta \right|^2 \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_1 \mathbf{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N_t-1} |y_j - y'_j| \Delta \right|^2 \right\} \leq K_1 \mathbf{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t |y_s - y'_s| ds \right|^2 \right\} \leq \\
&\leq K_1(t - t_0) \int_{t_0}^t \mathbf{M} \{ |y_s - y'_s|^2 \} ds \leq K_1(t - t_0) \int_{t_0}^t z_s ds, \quad (5.239)
\end{aligned}$$

где $K_1 = \text{const} < \infty$.

С использованием условия Липшица и неравенства (1.32) при $n = 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
z_t^{(2)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ \sum_{j=0}^{N_s-1} \mathbf{M} \{ |b(y_j, \tau_j) - b(y'_j, \tau_j)|^2 \} \Delta \right\} \leq \\
&\leq K_2 \sum_{j=0}^{N_t-1} \mathbf{M} \{ |y_j - y'_j|^2 \} \Delta \leq K_2 \int_{t_0}^t z_s ds, \quad (5.240)
\end{aligned}$$

где $K_2 = \text{const} < \infty$.

Аналогично (5.240) получаем:

$$z_t^{(3)} \leq K_3 \Delta \int_{t_0}^t z_s ds, \quad (5.241)$$

где $K_3 = \text{const} < \infty$.

Подставляя (5.239)-(5.241) в (5.238), приходим к следующему неравенству:

$$z_t \leq 4 \left(|y_0 - y'_0|^2 + (K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) \int_0^t z_s ds \right). \quad (5.242)$$

Применение неравенства Гронуолла к (5.242) дает

$$\begin{aligned}
z_t &\leq 4 |y_0 - y'_0|^2 \left\{ 1 + 4(K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) \times \right. \\
&\quad \times \left. \int_{t_0}^t e^{4(K_1(t-t_0) + K_2 + K_3 \Delta)(t-s)} ds \right\}. \quad (5.243)
\end{aligned}$$

Используя неравенство Чебышева и (5.243), получаем:

$$\lim_{|y_0 - y'_0| \rightarrow 0} \mathbf{P} \{ z_t \geq \varepsilon \} \leq \frac{1}{\varepsilon} \lim_{|y_0 - y'_0| \rightarrow 0} \mathbf{M} \{ z_t \} = 0. \quad (5.244)$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений явный метод Мильштейна является стохастически численно устойчивым. Поскольку в условиях теорем 5.1 или 5.2 этот метод сходится сильно с порядком 1.0 к решению рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения, то согласно (5.244) и определению 5.3 явный метод Мильштейна является численно устойчивым.

Аналогичные рассуждения можно применить для обоснования численной устойчивости явного метода Мильштейна в векторном случае, а также более точных одношаговых численных методов, рассмотренных в настоящей монографии.

Обычно изучение асимптотической численной устойчивости одношаговых детерминированных численных методов проводится на примере определенного класса тестовых уравнений, например, класса линейных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где x , λ – комплексные числа. Для изучения асимптотической численной устойчивости одношаговых стохастических методов выберем класс комплексно-значных линейных стохастических дифференциальных уравнений вида:

$$dx_t = \lambda x_t dt + df_t, \quad (5.245)$$

где $x_t = x_t^{(1)} + ix_t^{(2)}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; i – мнимая единица.

Применяя одношаговую дискретную аппроксимацию y_p ; $p = 0, 1, \dots$ к уравнению (5.245), получим следующее равенство:

$$y_{p+1} = G(\lambda\Delta)y_p + z_p, \quad (5.246)$$

где G – отображение комплексной плоскости в себя; z_p – случайные величины, которые не зависят от λ и y_p ; $p = 0, 1, \dots$

Определение 5.5 [50]. Множество комплексных чисел $\lambda\Delta$, для которых $\text{Re}(\lambda) < 0$ и $|G(\lambda\Delta)| < 1$, называется областью абсолютной устойчивости численной схемы.

Известно, что в детерминированном случае A -устойчивой численной схемой называется такая численная схема, для которой ее область абсолютной устойчивости совпадает с левой полуплоскостью комплексной

плоскости. В стохастическом случае также будем называть численную схему A -устойчивой, если ее область абсолютной устойчивости есть следующее множество:

$$\{\lambda\Delta \in C : \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \Delta > 0\},$$

где C – множество комплексных чисел.

Рассмотрим области абсолютной устойчивости некоторых численных методов, представленных в главе 5.

В [50] показано, что для неявных методов Мильштейна (5.189) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$ (здесь и далее в этом параграфе рассматривается случай $y_p \in \mathbb{R}^2$) отображение G имеет вид:

$$G(\lambda\Delta) = (1 - \alpha\lambda\Delta)^{-1}(1 + (1 - \alpha)\lambda\Delta).$$

Поэтому неравенство $|G(\lambda\Delta)| < 1$ в этом случае преобразуется к виду [50]:

$$(1 - 2\alpha)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \quad (5.247)$$

Если $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ и $\lambda_1 < 0$, то неравенство (5.247) выполнено и рассматриваемые неявные методы Мильштейна являются A -устойчивыми. Если $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, то (5.247) можно записать в виде:

$$(\lambda_1\Delta + A)^2 + (\lambda_2\Delta)^2 < A^2,$$

где $A = (1 - 2\alpha)^{-1}$, т.е. область абсолютной устойчивости – внутренность круга с центром в точке $(-A, 0)$ и радиусом A .

Если в методах (5.190) и (5.191) пренебречь слагаемым

$$\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l La^{(l)}(y_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l)La^{(l)}\} \Delta^2,$$

то очевидно порядок их сходимости не изменится, т.е. будет равен 1.5. Ясно, что в этом случае при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$ область абсолютной устойчивости методов (5.190), (5.191) будет такой же, как и неявного метода Мильштейна.

В [50] показано, что для схем (5.190) и (5.192) при $y_p \in \mathbb{R}^2$; $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta \in [0, 1]$ отображение G имеет следующий вид:

$$G(\lambda\Delta) = \left(1 - \alpha\lambda\Delta - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\beta\lambda^2\Delta^2\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(1 + (1 - \alpha) \lambda \Delta + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) (1 - \beta) \lambda^2 \Delta^2\right)$$

и область их абсолютной устойчивости определяется в полярных координатах следующим неравенством:

$$(2 + (1 - \alpha - \beta)(1 - 2\alpha)r^2) \cos \theta + 2(1 - 2\alpha)r \cos^2 \theta + \\ + \frac{1}{4}(1 - 2\alpha)^2(1 - 2\beta)r^3 < 0, \quad (5.248)$$

где $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Отсюда следует, что схемы (5.190) и (5.192) А-устойчивы тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta \in [0, 1]$ или $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Нетрудно видеть, что эти выводы справедливы и для версий (5.191), (5.193) численных методов (5.190), (5.192).

Предположим теперь, что параметры неявности, входящие в численные схемы, различны для различных компонент этих схем. В этом случае определение областей абсолютной устойчивости численных схем становится существенно более сложным. Рассмотрим случай $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^2$ и рассмотрим тестовое стохастическое дифференциальное уравнение (5.245) в виде следующей системы:

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} df_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. В этом случае уравнение (5.246) примет вид:

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta) \mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p,$$

где $G(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\mathbf{z}_p \in \mathbb{R}^2$ и область абсолютной устойчивости одношаговой численной схемы определяется неравенствами:

$$\lambda_1 < 0, \quad \|G(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta)\| < 1,$$

где $\|G\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 (G^{(ij)})^2}$ — норма матрицы G .

В [50] показано, что для неявной схемы Мильштейна (5.189) матрица G имеет вид:

$$G(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta) = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{\alpha}_1 \lambda_1 \Delta & \tilde{\alpha}_1 \lambda_2 \Delta \\ -\tilde{\alpha}_2 \lambda_2 \Delta & 1 - \tilde{\alpha}_2 \lambda_1 \Delta \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 + (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta & - (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta \\ (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta & 1 + (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta \end{pmatrix},$$

а область абсолютной устойчивости определяется следующим неравенством:

$$(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \quad (5.249)$$

Из (5.249) следует, что неявная схема Мильштейна (5.189) A -устойчива, когда $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in [0, 1]$ и связаны неравенством $1 \leq \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \leq 2$. Если $0 \leq \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 < 1$, то область абсолютной устойчивости этого метода является внутренностью круга радиуса $A = (1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)^{-1}$ с центром в точке $(-A, 0)$.

В [50] также получено выражение для матрицы $G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$ и исследована абсолютная устойчивость численных методов (5.190) и (5.192) при $\tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_2$. Приведем эти соотношения:

$$G = A^{-1}B,$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ – матрицы со следующими компонентами:

$$A^{(11)} = 1 - \tilde{\alpha}_1\lambda_1\Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

$$A^{(12)} = \tilde{\alpha}_1\lambda_2\Delta + (1 - 2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$A^{(21)} = -\tilde{\alpha}_2\lambda_2\Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$A^{(22)} = 1 - \tilde{\alpha}_2\lambda_1\Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

$$B^{(11)} = 1 + (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta + \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\beta}_1)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2,$$

$$B^{(12)} = - (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\beta}_1)\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$B^{(21)} = (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\beta}_2)\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$B^{(22)} = 1 + (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta + \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\beta}_2)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\Delta^2.$$

Область абсолютной устойчивости методов (5.190), (5.192) в полярных координатах $r \cos \theta = \lambda_1\Delta$, $r \sin \theta = \lambda_2\Delta$ определяется следующим неравенством [50]:

$$\frac{1}{8} [(1 - 2\tilde{\alpha}_1)^2(1 - 2\tilde{\beta}_1) + (1 - 2\tilde{\alpha}_2)^2(1 - 2\tilde{\beta}_2)] r^3 +$$

$$+ \left[2 + \frac{1}{2} \{ (1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1) + (1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2) \} r^2 \right] \cos \theta + \\ + 2(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) r \cos^2 \theta < 0. \quad (5.250)$$

Если в (5.250) положить $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta$, то (5.250) преобразуется в неравенство (5.248).

В заключение отметим, что метод (5.195) обладает такой же областью абсолютной устойчивости, как и методы (5.190), (5.192), поскольку методы (5.190), (5.192) и (5.195) имеют одинаковую систематическую часть и отличаются только стохастическими членами. Этот вывод справедлив, очевидно, для версий (5.191), (5.193), (5.194) численных методов (5.190), (5.192), (5.195).

Глава 6

Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Линейные стохастические системы занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Прикладная значимость линейных систем определяется тем, что они являются универсальным средством математического описания малых отклонений поведения реальных систем от номинальных режимов их функционирования. Теория стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений основывается на точных интегральных представлениях их решений и допускает применение специальных, особенно эффективных методов численно-статистического моделирования. В связи с этим настоящая глава посвящена специальным методам численного моделирования стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений и их практической реализации.

6.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений общего вида (СЛСДУОВ):

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))dt + \sum_{j=1}^m B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)} + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (6.1)$$

где $t \in [0, T]$; $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ – случайный процесс, являющийся решением СЛСДУОВ (6.1) с начальным условием $\mathbf{x}_0$; $\mathbf{f}_t = \mathbf{f}(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$); $A(t), B_1(t), \dots, B_m(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{g}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ – матричные функции, удовлетворяющие условиям AI–AIII (см. главу 1) существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Если все матричные функции $B_1(t), \dots, B_m(t)$ в (6.1) равны нулевой матрице, то система (6.1) примет вид:

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega) \quad (6.2)$$

и будет в дальнейшем называться системой линейных стохастических дифференциальных уравнений (СЛСДУ).

Если матричные функции $\mathbf{g}(t)$ и $\Sigma(t)$ в (6.1) равны нулевым матрицам соответствующих размеров, то СЛСДУОВ (6.1) преобразуется к следующей однородной системе линейных стохастических дифференциальных уравнений (ОСЛСДУ):

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{j=1}^m B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)}; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (6.3)$$

Систему (6.2) можно рассматривать как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито, Стратоновича или в другом смысле, поскольку эта система, в силу своей структуры, имеет одно и то же решение в каком бы смысле она не рассматривалась (имеется в виду способ определения стохастического интеграла $\int_0^t \Sigma(\tau) d\mathbf{f}_\tau$ в соответствии с определениями 1.8, 1.12 или 1.13 при интегральной форме

записи уравнения (6.2)). В связи с этим часто применяемая в технической литературе форма описания системы (6.2) в виде:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t) + \Sigma(t)\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega)$$

с белым шумом $\mathbf{f}_t$ в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы (6.2).

Линейные стохастические дифференциальные уравнения (ЛСДУ) рассматривались рядом авторов. Так, в работах Арнольда [85], Ричардсона [86], Маккинна и Моррисона [87, 88], а также Клоедена и Платена [50] рассматривались скалярные ЛСДУ. В этих работах получено интегральное представление решения скалярного ЛСДУ через фундаментальное решение, а также изучены свойства решений скалярных ЛСДУ. Точные решения некоторых скалярных ЛСДУ можно найти у Арнольда [85], Гарда [77], Хорстхемке и Лофевера [89], Пугачева и Синицина [90], Клоедена и Платена [50]. В работах Микулевичуса [91], Струка и Варадана [92], Клоедена и Платена [50], Пугачева и Синицина [90] получены интегральные представления решений СЛСДУ и СЛСДУОВ через фундаментальную матрицу решений. В книге Арато [17] дано интегральное представление решений СЛСДУ с постоянными коэффициентами через матричную экспоненту и рассмотрены основные свойства этих систем. Кроме этого, в [17] изучены дискретные линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами, для которых построен алгоритм численного моделирования. Вопросы численного моделирования СЛСДУ рассматривались также в работе Шкурко [93].

Настоящая глава посвящена построению численных методов решения стационарных СЛСДУ (их определение будет дано ниже), основанных на точном интегральном представлении решений этих систем. При этом рассматривается ряд вопросов, связанных непосредственно с особенностями численной реализации построенных численных методов.

6.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ

Рассмотрим хорошо известные результаты (см., например, [17, 50, 90]) по интегральному представлению решений СЛСДУОВ.

Сначала рассмотрим скалярный случай:

$$dx_t = (a(t)x_t + g(t))dt + (b(t)x_t + \sigma(t))df_t, \quad (6.4)$$

где $a(t), b(t), g(t), \sigma(t), x_t, f_t \in \mathbb{R}^1$. Пусть $X_{t,t_0} \in \mathbb{R}^1$; $0 \leq t_0 \leq t \leq T$ — фундаментальное решение однородного уравнения:

$$dx_t = a(t)x_t dt + b(t)x_t df_t, \quad (6.5)$$

которое удовлетворяет условию $X_{t_0,t_0} = 1$.

Тогда

$$dX_{t,t_0} = a(t)X_{t,t_0}dt + b(t)X_{t,t_0}df_t. \quad (6.6)$$

Рассмотрим случайный процесс $\ln(X_{t,t_0})$ и найдем с помощью формулы Ито и соотношения (6.6) его стохастический дифференциал:

$$d\ln(X_{t,t_0}) = \left(a(t) - \frac{1}{2}b^2(t)\right)dt + b(t)df_t. \quad (6.7)$$

Правая часть (6.7) содержит только известные функции и потому X_{t,t_0} может быть найдено из (6.7):

$$X_{t,t_0} = e^{\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_{t_0}^t b(s)df_s}. \quad (6.8)$$

Воспользовавшись фундаментальным решением X_{t,t_0} однородного уравнения (6.5), найдем интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения (6.4). С этой целью рассмотрим случайный процесс $X_{t,t_0}^{-1}x_t$, где x_t — решение линейного стохастического дифференциального уравнения (6.4), и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал. Поскольку из формулы Ито и (6.6) следует равенство:

$$dX_{t,t_0}^{-1} = (-a(t) + b^2(t))X_{t,t_0}^{-1}dt - b(t)X_{t,t_0}^{-1}df_t, \quad (6.9)$$

то с помощью формулы Ито и (6.4), (6.9) получаем:

$$d(X_{t,t_0}^{-1}x_t) = (g(t) - b(t)\sigma(t))X_{t,t_0}^{-1}dt + \sigma(t)X_{t,t_0}^{-1}df_t.$$

Из последнего равенства с учетом того, что $X_{t_0,t_0} = 1$, получаем следующее интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения (6.4):

$$x_t = X_{t,t_0} \left(x_{t_0} + \int_{t_0}^t (g(s) - b(s)\sigma(s))X_{s,t_0}^{-1}ds + \int_{t_0}^t \sigma(s)X_{s,t_0}^{-1}df_s \right), \quad (6.10)$$

где

$$X_{t,t_0} = e^{\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_{t_0}^t b(s)df_s}.$$

Перейдем к рассмотрению СЛСДУОВ (6.1). Обобщая формулу (6.10) на случай СЛСДУОВ (6.1), получим:

$$\mathbf{x}_t = X_{t,t_0} \left(\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t X_{s,t_0}^{-1} \left(\mathbf{g}(s) - \sum_{j=1}^m B_j(s) \Sigma_j(s) \right) ds + \int_{t_0}^t X_{s,t_0}^{-1} \Sigma(s) d\mathbf{f}_s \right), \quad (6.11)$$

где $0 \leq t_0 \leq t \leq T$; $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ – решение СЛСДУОВ (6.1); $X_{t,t_0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (6.3); $\Sigma_j(t)$ – j -ый столбец матрицы $\Sigma(t)$; $\mathbf{f}_s \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_s^{(i)} (i = 1, \dots, m)$; остальные обозначения, входящие в (6.11), такие же, как в (6.1). Таким образом, проблема отыскания решения СЛСДУОВ (6.1) свелась к отысканию фундаментальной матрицы решений ОСЛСДУ (6.3). Известно (см. например [50]), что фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (6.3) может быть найдена в том случае, когда матрицы $A(t), B_j(t); j = 1, \dots, m$ постоянны и попарно коммутируют, т.е.:

$$AB_j = B_jA, B_iB_j = B_jB_i; i, j = 1, \dots, m.$$

В этом случае фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (6.3) имеет вид:

$$X_{t,t_0} = e^{\left(A - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m B_j^2 \right) (t-t_0) + \sum_{j=1}^m B_j (\mathbf{f}_t^{(j)} - \mathbf{f}_{t_0}^{(j)})}, \quad (6.12)$$

где e^C – матричная экспонента:

$$e^C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!},$$

C – квадратная матрица, $C^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ – единичная матрица.

Если матрицы $B_j(t); j = 1, \dots, m$ нулевые, то из (6.12) получаем:

$$X_{t,t_0} = e^{A(t-t_0)}.$$

Стационарной СЛСДУ будем называть систему (6.2), если: $A(t) \equiv A, \Sigma(t) \equiv \Sigma$:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (6.13)$$

В этом случае фундаментальная матрица решений X_{t,t_0} представляет собой матричную экспоненту:

$$X_{t,t_0} = e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}.$$

Формула (6.11) запишется при этом в виде:

$$\mathbf{x}_t = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{g}(s)ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\Sigma d\mathbf{f}_s; \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T. \quad (6.14)$$

Формулу (6.14) в дальнейшем иногда будем называть формулой Коши в силу ее некоторого внешнего сходства с формулой Коши для решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, если в случае стационарной СЛСДУ (6.13) взять эквидистантную временную сетку $\{\tau_k\}_{k=0}^K$, такую что

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_K = T, \quad k = 1, \dots, K,$$

где Δ – шаг сетки, и ввести обозначения:

$$\tilde{A}(\Delta) = e^{A\Delta},$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(k, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\mathbf{g}(k\Delta + s)ds, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

то решение системы (6.13) в дискретные моменты времени τ_k может быть найдено с помощью рекуррентной формулы:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}(\Delta)\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k, \Delta) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (6.15)$$

где $\mathbf{x}_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$, $\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)$ – векторный гауссовский дискретный случайный процесс, такой что

$$\mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\} = 0, \quad \mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_l^T(\Delta)\} = 0 \quad \text{при } k \neq l,$$

с дисперсионной матрицей

$$D_f(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_k^T(\Delta)\} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\Sigma\Sigma^T e^{A^T(\Delta-s)}ds, \quad (6.16)$$

равной при $t = \Delta$ решению матричного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{D_f(t)}{dt} = AD_f(t) + D_f(t)A^T + \Sigma\Sigma^T; \quad D_f(0) = 0, \quad (6.17)$$

которое может быть получено с использованием формулы Ито.

Если все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости: $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, где $\lambda_i(A)$ – собственные числа матрицы A , то уравнение (6.17) имеет стационарное решение $D(\infty)$, удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$0 = AD(\infty) + D(\infty)A^T + \Sigma\Sigma^T. \quad (6.18)$$

6.1.2. Моментные характеристики решений СЛСДУ

Приведем сводку известных в литературе (см., например, [17, 50, 90]) уравнений, которым удовлетворяют моментные характеристики решений СЛСДУ. Введем обозначения:

$$\mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t\}; \quad \overset{\circ}{\mathbf{x}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t), \quad Q_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T\},$$

$$R_x(t, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} M\left\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\tau^T\right\}, \quad D_x(t) = R_x(t, t).$$

В случае СЛСДУОВ из (6.1) с учетом введенных обозначений получаем:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\};$$

2. Для $Q_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x(t)}{dt} = & A(t)Q_x(t) + Q_x(t)A^T(t) + \sum_{i=1}^m B_i(t)Q_x(t)B_i^T(t) + \mathbf{g}(t)\mathbf{m}_x^T(t) + \\ & + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{g}^T(t) + \sum_{i=1}^m (B_i(t)\mathbf{m}_x(t)\Sigma_i^T(t) + \Sigma_i(t)\mathbf{m}_x^T(t)B_i(t) + \Sigma_i(t)\Sigma_i^T(t)), \end{aligned} \quad (6.19)$$

где $Q_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T\}$, $\mathbf{m}_x(0) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_0\}$. Отметим, что уравнение (6.19) может быть получено с использованием формулы Ито.

Рассмотрим СЛСДУ (6.2). В этом случае имеем:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\};$$

2. Для $D_x(t)$ при $t \geq 0$:

$$\frac{D_x(t)}{dt} = A(t)D_x(t) + D_x(t)A(t)^T + \Sigma(t)\Sigma^T(t), \quad D_x(0) = M\{\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{x}}_0^T\};$$

3. Для $R_x(t, \tau)$ при $t, \tau \geq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}R_x(t, \tau) = A(t)R_x(t, \tau) \text{ при } t \geq \tau; \quad R_x(\tau, \tau) = D_x(\tau),$$

$$R(t, \tau) = R^T(\tau, t) \text{ при } t \leq \tau.$$

В случае стационарной СЛСДУ (6.13) имеем:

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\}$$

или в интегральной форме

$$\mathbf{m}_x(t) = e^{At}\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)d\tau;$$

$$\frac{D_x(t)}{dt} = AD_x(t) + D_x(t)A^T + \Sigma\Sigma^T, \quad D_x(0) = M\{\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{x}}_0^T\}, \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}R_x(t, \tau) = AR_x(t, \tau) \text{ при } t \geq \tau, \quad R_x(\tau, \tau) = D_x(\tau),$$

$$R(t, \tau) = R^T(\tau, t) \text{ при } t \leq \tau.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае:

$$R_x(t, \tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\tau) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(t)e^{A^T(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t \end{cases}.$$

Для гурвицевой матрицы A матричное уравнение (6.20) имеет стационарное решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$0 = AD_x(\infty) + D_x(\infty)A^T + \Sigma\Sigma^T.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(t) = D_x(\infty) = \text{const}$. Тогда

$$R_x(t, \tau) \equiv R_x(t - \tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)} D_x(\infty) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(\infty) e^{A^T(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t \end{cases}. \quad (6.21)$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы A $D_x(t) \rightarrow D_x(\infty)$ при $t \rightarrow \infty$ и формула (6.21) оказывается справедливой асимптотически при $t, \tau \rightarrow \infty$, $|t - \tau| < \infty$, т.е.

$$\lim R_x(t, \tau) = R_x(t - \tau) \text{ при } t, \tau \rightarrow \infty; |t - \tau| < \infty,$$

где $R_x(t - \tau)$ определяется правой частью формулы (6.21).

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (6.13) $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t)$ является в случае гурвицевой матрицы A либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

Пусть выходными переменными стационарной СЛСДУ (6.13) являются линейные комбинации координат вектора состояния $\mathbf{x}_t$:

$$\mathbf{y}_t = H^T \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^l,$$

где $H \in \mathbb{R}^{n \times l}$ — числовая матрица. Тогда моментные характеристики процесса $\mathbf{y}_t$ определяются по формулам:

$$\mathbf{m}_y(t) \stackrel{\text{def}}{=} M \{ \mathbf{y}_t \} = H^T \mathbf{m}_x(t),$$

$$R_y(t, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{y}}_t \overset{\circ}{\mathbf{y}}_\tau^T \right\} = H^T R_x(t, \tau) H, \quad D_y(t) \stackrel{\text{def}}{=} R_y(t, t) = H^T D_x(t) H. \quad (6.22)$$

В установившемся режиме для гурвицевой матрицы A формулы (6.22) при $\tau, t \rightarrow \infty$, $|t - \tau| < \infty$ принимают вид:

$$D_y(\infty) = H^T D_x(\infty) H, \quad \lim R_y(t, \tau) = R_y(t - \tau) = H^T R_x(t - \tau) H,$$

где $R_x(t - \tau)$ определяется правой частью формулы (6.21).

Спектральная плотность центрированной составляющей стационарного выходного процесса $\mathbf{y}_t$ представима в виде:

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) e^{-i\omega t} dt = H^T (i\omega I - A)^{-1} \Sigma \Sigma^T (-i\omega I - A^T)^{-1} H = \\ &= G(i\omega) G^T(-i\omega), \end{aligned}$$

где I — единичная матрица, i — мнимая единица, $G(p) = H^T (pI - A)^{-1} \Sigma$ — матричная передаточная функция системы от входа $\mathbf{f}_t$ к выходу $\mathbf{y}_t$.

6.1.3. Свойства дискретной системы линейных стохастических уравнений в стационарном случае

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему (6.15) и положим в (6.15)

$$\tilde{A}(\Delta) = \tilde{A}, \quad \tilde{g}(k, \Delta) = \tilde{B}u(k), \quad \tilde{f}_k(\Delta) = \tilde{\Sigma}v_k, \quad y_k = H^T x_k,$$

где $u(k) \in \mathbb{R}^r$ – детерминированное векторное возмущение; $v_k \in \mathbb{R}^m$ – бел шумный векторный гауссовский дискретный случайный процесс с нулевым средним и дисперсионной матрицей, равной единичной матрице:

$$M\{v_k\} \equiv 0, \quad M\{v_k v_k^T\} = I,$$

$y_k \in \mathbb{R}^l$ – выходная переменная; $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times l}$ – числовые матрицы.

С учетом принятых обозначений система (6.15) запишется в виде:

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u(k) + \tilde{\Sigma}v_{k+1}, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (6.23)$$

$$y_k = H^T x_k.$$

Введем обозначения:

$$m_x(k) \stackrel{\text{def}}{=} M\{x_k\}, \quad \hat{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} x_k - m_x(k),$$

$$R_x(k, r) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\hat{x}_k \hat{x}_r^T\}, \quad D_x(k) = R_x(k, k).$$

Рассмотрим моментные характеристики решения системы (6.23) (см., например, [17, 90]).

1. Для $m_x(k)$ и $m_y(k)$:

$$m_x(k+1) = \tilde{A}m_x(k) + \tilde{B}u(k), \quad m_x(0) = M\{x_0\},$$

$$m_y(k) = H^T m_x(k)$$

или

$$m_x(k+1) = \tilde{A}^{k+1}m_x(0) + \sum_{s=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-s} \tilde{B}u(s),$$

$$m_y(k+1) = H^T \tilde{A}^{k+1}m_x(0) + \sum_{s=0}^{k-1} H^T \tilde{A}^{k-s} \tilde{B}u(s).$$

2. Для $D_x(k)$ и $D_y(k)$:

$$D_x(k+1) = \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^T + \tilde{\Sigma}^2, \quad D_x(0) = M \left\{ \dot{\mathbf{x}}_0 \dot{\mathbf{x}}_0^T \right\}, \quad (6.24)$$

$$D_y(k) = H^T D_x(k) H.$$

3. Для $R_x(k, r)$ и $R_y(k, r)$:

$$R_x(k, r) = \begin{cases} e^{A(k-r)} D_x(r) & \text{при } k \geq r \\ D_x(k) e^{A^T(r-k)} & \text{при } r \geq k \end{cases}, \quad (6.25)$$

$$R_y(k, r) = \begin{cases} H^T e^{A(k-r)} D_x(r) H & \text{при } k \geq r \\ H^T D_x(k) e^{A^T(r-k)} H & \text{при } r \geq k \end{cases}.$$

Предположим, что матрица $\tilde{A}$ в (6.23) имеет все собственные числа внутри единичного круга. Тогда уравнение (6.24) имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$D_x(\infty) = \tilde{A}D_x(\infty)\tilde{A}^T + \tilde{\Sigma}^2,$$

при этом

$$D_y(\infty) = H^T D_x(\infty) H.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(k) = D_x(\infty) = \text{const.}$ Тогда

$$R_x(k, r) \equiv R_x(k-r) = \begin{cases} e^{A(k-r)} D_x(\infty) & \text{при } k \geq r \\ D_x(\infty) e^{A^T(r-k)} & \text{при } r \geq k \end{cases}. \quad (6.26)$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу предположения о собственных числах матрицы $\tilde{A}$ $D_x(k) \rightarrow D_x(\infty)$ при $k \rightarrow \infty$ и формула (6.26) оказывается справедливой асимптотически при $k, r \rightarrow \infty$, $|k-r| < \infty$, т.е.

$$\lim R_x(k, r) = R_x(k-r) \text{ при } k, r \rightarrow \infty, |k-r| < \infty.$$

Таким образом, в том случае, когда все собственные числа матрицы $\tilde{A}$ лежат внутри единичного круга, центрированная составляющая решения системы (6.23) $\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_x(k)$ является либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

6.2. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении

В данном параграфе будет рассматриваться метод численного решения стационарных СЛСДУ, основанный на представлении их решений по формуле Коши и спектральном разложении дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ.*

6.2.1. Введение

В предыдущих главах рассматривалась общая теория численного решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанная на разложениях Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича, а также на специальных методах численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в эти разложения. Естественно, что данная общая теория численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито применима и к стационарным СЛСДУ Ито. Однако структура стационарных СЛСДУ Ито допускает построение специальных методов численного интегрирования, основанных на точном интегральном представлении их решений, которые оказываются существенно проще в сравнении с численными методами для этих систем, построенными согласно общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. Построению именно одного из таких эффективных методов численного решения стационарных СЛСДУ посвящен настоящий параграф.

Поясним подробнее, как рекомендуется численно решать стационарную СЛСДУ (6.13) согласно общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. Унифицированное разложение Тейлора-Ито решения стационарной СЛСДУ (6.13) при $t > t_0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left((t - t_0)^j A^j \mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t (t - s)^j A^j B \mathbf{u}(s) ds + \int_{t_0}^t (t - s)^j A^j \Sigma d\mathbf{w}_s \right), \quad (6.27)$$

*Материалом для написания параграфа 6.2 послужила глава 2 работы [56] и работа [96].

где ряд сходится с вероятностью 1 для всех $t \in (t_0, T] \subset [0, T]$. Затем необходимо положить в (6.27): $t = \tau_{k+1}$, $t_0 = \tau_k$, $\tau_k = k\Delta$, $\Delta > 0$, $k = 0, 1, \dots$ и заменить ряд в (6.27) конечной суммой. В результате получим следующее рекуррентное представление для аппроксимации $\tilde{\mathbf{x}}_k$ процесса $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{j=0}^J \frac{1}{j!} \left(\Delta^j A^j \tilde{\mathbf{x}}_k + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j A^j B \mathbf{u}(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j A^j \Sigma d\mathbf{w}_s \right), \end{aligned} \quad (6.28)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta}$, $\mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$; $k = 0, 1, \dots$. Далее на каждом шаге интегрирования необходимо аппроксимировать совокупности стохастических интегралов Ито вида:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j d\mathbf{w}_s^{(i)} \quad (j = 0, 1, \dots, J < \infty; i = 1, \dots, m),$$

входящих в правую часть (6.28). Для среднеквадратической аппроксимации этих интегралов в книгах [47, 50] рекомендуется разлагать их в ряды по системе стандартных гауссовских величин с использованием разложения броуновского моста в тригонометрический ряд Фурье. В результате можно получить (см. главу 4) следующие, сходящиеся в среднеквадратическом смысле, разложения:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}, \quad \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s) d\mathbf{w}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \right], \\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^2 d\mathbf{w}_s^{(i)} = \Delta^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{3} \zeta_0^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 r^2} \zeta_{2r}^{(i)} + \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \right) \right], \end{aligned}$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$, а $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ система тригонометрических функций.

В главе 4 рассмотрен более общий метод разложения повторных стохастических интегралов, который допускает применение различных полных ортонормированных в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ систем функций. Согласно этому методу с использованием полиномов Лежандра

(см. главу 4) имеем:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}, \quad \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s) d\mathbf{w}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i)} \right), \quad (6.29)$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^2 d\mathbf{w}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left(\zeta_0^{(i)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i)} \right), \quad (6.30)$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$, а $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ система полиномов Лежандра.

Несмотря на простоту, разложения типа (6.29), (6.30) все же неудобны, поскольку для получения приемлемой точности при численном решении стационарной СЛСДУ (6.13) необходимо брать число J в (6.28) по возможности как можно большим, что ведет к существенному усложнению вычислительной схемы.

Цель настоящего параграфа заключается в том, чтобы показать на примере постоянного метода, что применение общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито является нерациональным по отношению к стационарным СЛСДУ, поскольку последние допускают построение значительно более простых численных методов.

6.2.2. Общий подход к моделированию и структурирование проблемы

Рассмотрим СЛСДУ вида (6.2) в предположениях:

$$A(t) \equiv A, \quad \mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t), \quad \Sigma(t) \equiv \Sigma. \quad (6.31)$$

Выходом системы будем считать линейную комбинацию компонент вектора состояния системы. С учетом (6.31) система уравнений (6.2) может быть переписана в виде:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t)) dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega); \quad (6.32)$$

$$\mathbf{y}_t = H^T \mathbf{x}_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ – решение стационарной СЛСДУ (6.32); $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ – детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^l$ – выходной процесс, численная реализация которого является финальной

целью численного моделирования; $H \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ – числовые матрицы; $\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_i^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$).

Рассмотрим временную сетку $\{\tau_k\}_{k=0}^K$ с постоянным шагом $\Delta > 0$, т.е. такую что:

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta = \tau_0 + k\Delta, \quad \tau_0 = 0, \quad \tau_K = T; \quad k = 1, \dots, K.$$

Интегральное представление решения системы (6.32) на этой временной сетке с постоянным шагом Δ запишется в форме Коши в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \quad (6.33)$$

где $\mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$; $k = 0, 1, \dots, K$; $K\Delta = T$.

Исходя из содержательного смысла слагаемых, входящих в правую часть (6.33), будем называть первое слагаемое **переходной** или **динамической** составляющей, второе – **систематической** составляющей, а третье – **случайной** составляющей векторного случайного процесса $\mathbf{x}_k$. Рассмотрим отдельно особенности численного моделирования каждой из этих составляющих.

6.2.3. Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения стационарной СЛСДУ

Вычисление динамической составляющей процесса $\mathbf{x}_k$ на каждом шаге численного моделирования требует знания матрицы $e^{A\Delta}$. По определению матричная экспонента задается в виде ряда:

$$e^{A\Delta} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s \Delta^s}{s!}, \quad (6.34)$$

где $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ – единичная матрица. Однако непосредственное использование формулы (6.34) для вычисления $e^{A\Delta}$ не рационально, т.к. достижение приемлемой точности вычисления матричной экспоненты требует в этом случае выполнения большого количества операций матричных умножений и сложений. Для эффективного вычисления матричной

экспоненты в литературе [95] рекомендуется использовать специальный алгоритм "быстрого" вычисления, основанный на формуле:

$$e^{A\Delta} = \left(e^{A \frac{\Delta}{2^M}}\right)^{2^M} \simeq \left(\sum_{s=0}^N \frac{A^s}{s!} \left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^s\right)^{2^M}, \quad (6.35)$$

где $N \geq 1$, $M \geq 0$ — некоторые целые числа.

Отметим, что если $M = 0$, $N = \infty$, то правая часть формулы (6.35) полностью совпадает с правой частью формулы (6.34). При $M = 2, 3, \dots$ величина $\frac{\Delta}{2^M}$ значительно меньше Δ и, следовательно, для аппроксимации с достаточной точностью матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ количество $N + 1$ членов ряда в (6.35) может быть взято значительно меньшим, чем при $M = 0$. При этом указанное различие будет тем значительней, чем больше берется значение M .

В работе [98] (см. также [99]) показано, что для того, чтобы вычислить матричную экспоненту $e^{A\Delta}$ по формуле (6.35) с точностью не большей ε :

$$\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \leq \varepsilon, \quad (6.36)$$

достаточно взять такие целые $N \geq 1$ и $M \geq 0$, при которых выполняется условие:

$$\frac{e^{\|A\|\Delta(\|A\|\Delta)^{N+1}}}{2^{MN}(N+1)!} \leq \varepsilon, \quad (6.37)$$

здесь и далее

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A^{(ij)}|,$$

$A^{(ij)}$ — компонента матрицы A , $e_*^{A\Delta}$ — приближенное значение $e^{A\Delta}$.

В [98] поставлены и решены задачи об определении оптимальной пары (M, N) , используемой в формуле (6.35). Оказалось [98], что соотношения, связывающие оптимальные M и N в задаче об определении минимума вычислительных затрат при фиксированной точности ε вычисления матричной экспоненты и в задаче минимизации погрешности ε вычисления матричной экспоненты при фиксированных вычислительных затратах, эквивалентны и имеют вид:

$$M = \begin{cases} [z] + 1 & \text{при } \|A\|\Delta > v \\ 0 & \text{при } \|A\|\Delta \leq v, \end{cases} \quad (6.38)$$

где $[x]$ – целая часть числа x ,

$$z = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \frac{\|A\|\Delta}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)} \right) + N,$$

$$v = \frac{1}{2^N} (N+1) e^{\frac{1}{2(N+1)}}.$$

В [98] также даны практические рекомендации по выбору M и N . Так, например, перебор натуральных N следует начинать с 4 – 5 при $\|A\|\Delta \leq 1.3$ и с 2 – 3 при $\|A\|\Delta \geq 1.3$. После фиксации конкретного N определяется M , удовлетворяющее (6.37) и (6.38). Таким образом, алгоритм вычисления матричной экспоненты может быть записан в следующей рекуррентной форме:

Алгоритм 6.1. Вычисление матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ с точностью ε .

1. Вычисление $\|A\|\Delta$.
2. По заданному $\varepsilon > 0$ выбираются значения M и N из соотношения (6.38) и условия (6.37).
3. $i := 0$.
4. $G := \sum_{s=0}^N \frac{A^s}{s!} \left(\frac{\Delta}{2^M} \right)^s$.
5. $i := i + 1$.
6. $G := G^2$.
7. Если $i < M$, то переход к пункту 3.
8. $e_*^{A\Delta} := G$.
9. Конец работы алгоритма 6.1.

6.2.4. Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ

Проблема численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ (6.32) сводится, согласно (6.33), к вычислению интеграла

$$J_{\Delta} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} B u(\tau + k\Delta) d\tau, \quad (6.39)$$

где $k = 0, 1, \dots, K-1$.

Рассмотрим различные способы приближенного вычисления интеграла J_{Δ} . Будем считать, что векторная функция $\mathbf{u}(k\Delta + \tau)$ при всех $k = 0, 1, \dots, K-1$ и $\tau \in [0, \Delta]$ представима в виде:

$$\mathbf{u}(k\Delta + \tau) = \sum_{j=0}^l \mathbf{v}_j(k) \tau^j + \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau), \quad (6.40)$$

причем

$$\|\mathbf{r}_{l+1}(k, \tau)\| \leq C_l \tau^{l+1}, \quad (6.41)$$

где $C_l < \infty$; $k = 0, 1, \dots, K-1$; $\tau \in [0, \Delta]$; $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}^{(i)}|$ — норма вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; векторные коэффициенты $\mathbf{v}_j(k)$ ($j = 0, 1, \dots, l$) могут быть выбраны различными способами (ниже будут рассмотрены некоторые из них).

Достаточным условием, обеспечивающим возможность представления (6.40), является $l+1$ кратная непрерывная дифференцируемость функции $\mathbf{u}(t)$ на промежутке $[0, T]$. Однако возможны и другие менее ограничительные условия.

Подставим (6.40) в (6.39). В результате получим следующее выражение:

$$J_{\Delta} = \sum_{j=0}^l J_{\Delta,j} B \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1}, \quad (6.42)$$

где

$$J_{\Delta,j} = \int_0^{\Delta} \tau^j e^{A(\Delta-\tau)} d\tau,$$

$$R_{\Delta,l+1} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau) d\tau,$$

причем согласно (6.41)

$$\|R_{\Delta,l+1}\| \leq H_{l+1} \Delta^{l+2}, \quad H_{l+1} < \infty. \quad (6.43)$$

Остановимся подробнее на вычислении интегралов $J_{\Delta,j}$; $j = 0, 1, \dots, l$. Нетрудно видеть, что

$$J_{\Delta,0} = A^{-1} (e^{A\Delta} - I), \quad (6.44)$$

$$J_{\Delta,j} = -A^{-1} (\Delta^j I - j J_{\Delta,j-1}); \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (6.45)$$

Итерируя формулу (6.45), приходим к следующему выражению:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[A J_{\Delta,0} - \sum_{s=1}^j \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right]; \quad j \geq 1. \quad (6.46)$$

Подставляя (6.44) в (6.46), получим окончательное выражение для интеграла $J_{\Delta,j}$; $j \geq 0$:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^j \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right]; \quad j \geq 0, \quad (6.47)$$

где $A^0 \stackrel{def}{=} I$ — единичная матрица.

Подставляя (6.47) в (6.42) и отбрасывая остаточный член $R_{\Delta,l+1}$, приходим к следующему приближенному представлению:

$$J_{\Delta} \approx A^{-(j+1)} \sum_{j=0}^l j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^j \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B \mathbf{v}_j(k). \quad (6.48)$$

Рассмотрим некоторые способы выбора коэффициентов $\mathbf{v}_j(k)$; $j = 0, 1, \dots, l$ в соответствии с формулой (6.40) и соответствующие этим способам приближенные представления для интеграла J_{Δ} .

1. Аппроксимация с помощью формулы Тейлора:

$$\mathbf{v}_j(k) = \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathbf{u}_k}{dt^j}, \quad \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau) = \frac{d^{l+1} \mathbf{u}(\xi(k, \tau))}{dt^{l+1}} \frac{\tau^{l+1}}{(l+1)!},$$

где $\xi(k, \tau) = k\Delta + \theta\tau$, $0 < \theta < 1$, $\mathbf{u}_k \stackrel{def}{=} \mathbf{u}(k\Delta)$,

$$J_{\Delta} \approx A^{-(j+1)} \sum_{j=0}^l \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^j \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B \frac{d^j \mathbf{u}_k}{dt^j};$$

2. Кусочно-постоянная аппроксимация ($l=0$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$J_{\Delta} \approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k,$$

где $\mathbf{u}_k \stackrel{def}{=} \mathbf{u}(k\Delta)$;

3. Линейная интерполяция ($l=1$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k),$$

$$J_{\Delta} \approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \frac{A^{-2}}{\Delta} [e^{A\Delta} - I - \Delta A] B (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k),$$

где $\mathbf{u}_{k+1} \stackrel{def}{=} \mathbf{u}((k+1)\Delta)$;

4. Квадратичная интерполяция ($l=2$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta} \left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} \right),$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{2}{\Delta^2} \left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \right),$$

$$J_{\Delta} \approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \\ + \frac{A^{-2}}{\Delta} [e^{A\Delta} - I - \Delta A] B \left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} \right) + \\ + \frac{4A^{-3}}{\Delta^2} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} \right] B \left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \right),$$

где $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \stackrel{def}{=} \mathbf{u}\left((k+\frac{1}{2})\Delta\right)$;

5. Кубическая интерполяция ($l=3$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$\mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{2\Delta} \left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k \right),$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{9}{2\Delta^2} \left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k \right),$$

$$\mathbf{v}_3(k) = \frac{9}{2\Delta^3} \left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k \right),$$

$$J_{\Delta} \approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \\ + \frac{A^{-2}}{2\Delta} [e^{A\Delta} - I - \Delta A] B \left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k \right) + \\ + \frac{9A^{-3}}{\Delta^2} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} \right] B \left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k \right) +$$

$$+ \frac{27A^{-4}}{\Delta^3} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} - \frac{\Delta^3 A^3}{6} \right] \times \\ \times B \left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k \right),$$

где $\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}((k + \frac{1}{3})\Delta)$, $\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}((k + \frac{2}{3})\Delta)$.

Из (6.48) следует, что проблема численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ (6.32) практически сводится к вычислению матриц $B_j(\Delta)$ вида:

$$B_j(\Delta) = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^j \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B, \quad (6.49)$$

где $j = 0, 1, \dots, l$. Если матрица A неособенная, то матрицы $B_j(\Delta)$ могут быть вычислены непосредственно по формуле (6.49) с использованием алгоритма 6.1 вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$. Однако матрицы $B_j(\Delta)$ могут быть вычислены и в случае вырожденной матрицы A , поскольку $B_j(\Delta)$ представимы, согласно (6.49), в виде:

$$B_j(\Delta) = j! A^{-(j+1)} \sum_{s=j+1}^{\infty} \frac{\Delta^s}{s!} A^s B; \quad j = 0, 1, \dots, l. \quad (6.50)$$

Из последнего равенства следует существование конечного предела правой части (6.50) при $\det(A) \rightarrow 0$. Для вычисления матриц $B_j(\Delta)$ в случае вырожденной матрицы A рассмотрим следующий подход.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B \sum_{j=0}^l t^j \mathbf{v}_j(k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = 0, \quad (6.51)$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что решение системы (6.51) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{At} \hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^l J_{t,j} B \mathbf{v}_j(k),$$

откуда следует, что:

$$\hat{\mathbf{x}}(\Delta) = e^{A\Delta} \hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k).$$

Введем в рассмотрение расширенную векторную функцию:

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_{n+1}(t) \\ \dots \\ \mathbf{x}_{n+l+1}(t) \\ \mathbf{x}_{n+l+2}(t) \end{pmatrix},$$

которая является решением однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}(t)}{dt} = A_1 \hat{\mathbf{y}}(t); \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2! \mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l! \mathbf{v}_l(k) \end{pmatrix}, \quad (6.52)$$

где

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^l t^j \mathbf{v}_j(k),$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{n+p+1}(t)}{dt} = \mathbf{x}_{n+p+2}(t); \quad p = 0, 1, \dots, l,$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{n+l+2}(t)}{dt} = O_{k,1},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B & O_{n,k} & O_{n,k} & \dots & O_{n,k} & O_{n,k} \\ O_{k,n} & O_k & I_k & O_k & \dots & O_k & O_k \\ & & & \dots & & & \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & I_k & O_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & I_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & O_k \end{pmatrix},$$

O_k – нулевая матрица размера $k \times k$, I_k – единичная матрица размера $k \times k$, $O_{n,k}$ – нулевая матрица размера $n \times k$.

Решением системы (6.52) является матричная функция вида:

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = e^{A_1 t} \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} e^{At} & J_{t,0}B & J_{t,1}B & \dots & \frac{1}{l!} J_{t,l}B \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2! \mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l! \mathbf{v}_l(k) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вычислив матричную экспоненту $e^{A_1\Delta}$, можно получить сразу как матрицу $e^{A\Delta}$, так и матрицы $B_j(\Delta)$; $j = 0, 1, \dots, l$. Сформулируем полученный результат в форме специального алгоритма.

Алгоритм 6.2. *Вычисление матриц $e^{A\Delta}$ и $\tilde{B}_j(\Delta)$; $j = 0, 1, \dots, l$.*

1. Из матриц A и B системы (6.32) формируется матрица A_1 системы (6.52).

2. К матрице $A_1\Delta$ применяется алгоритм 6.1 вычисления матричной экспоненты, результатом которого с точностью ε оказывается матрица:

$$\tilde{A}_1(\Delta) = \begin{pmatrix} e^{A\Delta} & J_{\Delta,0}B & J_{\Delta,1}B & \dots & \frac{1}{l!}J_{\Delta,l}B \\ & & & & \\ & & \dots & & \end{pmatrix}.$$

3. Левый верхний блок (размера $n \times n$) матрицы $\tilde{A}_1(\Delta)$ является с точностью ε матрицей $e^{A\Delta}$.

4. $j := 1$.

5. $j + 1$ -й левый верхний блок (размера $n \times k$) матрицы $\tilde{A}_1(\Delta)$ является с точностью ε матрицей: $\tilde{B}_j(\Delta) = \frac{1}{j!}J_{\Delta,j}B$.

6. $B_j(\Delta) := j!\tilde{B}_j(\Delta)$.

7. Если $j < l + 1$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 5.

8. Конец работы алгоритма 6.2.

6.2.5. Алгоритм численного моделирования случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ

Сначала рассмотрим основные идеи, которые будут положены в основу построения алгоритма численного моделирования случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ, а затем приведем непосредственно сам алгоритм.

Найдем такое представление случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ вида:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)} \Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

которое было бы удобно для численного моделирования. Для этого рассмотрим дисперсионную матрицу случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$:

$$D_f(\Delta) \stackrel{def}{=} M\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T(\Delta)\}.$$

Спектральное разложение дисперсионной матрицы $D_f(\Delta)$ имеет вид:

$$D_f(\Delta) = S_D(\Delta)\Lambda_D^2(\Delta)S_D^{-1}(\Delta), \quad (6.53)$$

где $S_D(\Delta)$ – матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$, а $\Lambda_D(\Delta)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы $D_f(\Delta)$. Отметим, что $D_f(\Delta)$ – симметричная, неотрицательно определенная матрица, поэтому ее собственные числа неотрицательны, а матрица собственных векторов ортогональная.

Представим случайный столбец $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ в виде:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \quad (6.54)$$

где $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ – случайный столбец, такой что его компоненты $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) являются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, причем столбцы $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ и $\bar{\mathbf{f}}_{l+1}$ независимы при $k \neq l$.

Таким образом, при представлении (6.54) справедливо соотношение (6.53). Для того, чтобы численно смоделировать случайный столбец $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ по формуле (6.54), необходимо найти матрицу $D_f(\Delta)$, ее собственные числа и собственные векторы, а также численно смоделировать n независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями, которые будут являться компонентами случайного столбца $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$. Выражение для матрицы $D_f(\Delta)$ и дифференциальное уравнение для ее определения даны соотношениями (6.16) и (6.17) соответственно. Отметим, что так как матрица $D_f(\Delta)$ симметричная, то полезную информацию несут $\frac{n^2+n}{2}$ ее элементов, расположенных над(под) главной диагональю $D_f(\Delta)$, включая главную диагональ. Для нахождения матрицы $D_f(\Delta)$ необходимо решить уравнение (6.17). С этой целью это уравнение приводится к виду:

$$\frac{d\mathbf{d}_f(t)}{dt} = \hat{A}\mathbf{d}_f(t) + \mathbf{b}, \quad (6.55)$$

где столбцы $\mathbf{d}_f(t)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$ имеют вид:

$$\mathbf{d}_f(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{f_1}(t) \\ \dots \\ \mathbf{d}_{f_n}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \dots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}, \quad (6.56)$$

где

$$\mathbf{d}_{f_j}(t) = \begin{pmatrix} D_f^{(1j)}(t) \\ \dots \\ D_f^{(n-j+1 \ n)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} S^{(1j)} \\ \dots \\ S^{(n-j+1 \ n)} \end{pmatrix},$$

где $j = 1, \dots, n$; $S \stackrel{def}{=} \Sigma \Sigma^T$.

Матрица $\hat{A}$ (размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$), входящая в (6.55), строится следующим образом. Сначала строятся матрицы Q_{ip} ; $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$ размера $n \times n$ с элементами $Q_{ip}^{(kl)}$ вида:

$$Q_{ip}^{(kl)} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = i, l = i + p \text{ или } k = i + p, l = i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Затем рассматриваются матрицы: R_{ip} ; $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$ вида:

$$R_{ip} = Q_{ip} A^T + A Q_{ip}.$$

Далее нетрудно заметить, что первые n столбцов матрицы $\hat{A}$ строятся из матриц R_{i0} ($i = 1, \dots, n$) подобно тому, как строится столбец $\mathbf{d}_f(t)$ из матрицы $D_f(t)$ по правилу (6.56). После этого из матриц R_{i1} ($i = 1, \dots, n-1$) получаем следующие $n-1$ столбец матрицы $\hat{A}$ по тому же правилу и т.д. Теперь, когда определены $\mathbf{d}_f(t)$, $\mathbf{b}$ и $\hat{A}$, можно найти решение уравнения (6.55):

$$\mathbf{d}_f(t) = \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}t} - I) \mathbf{b} \quad (6.57)$$

и вычислить $\mathbf{d}_f(\Delta)$.

Следует отметить, что при переходе от (6.17) к (6.55) резко возрастает размерность задачи, что является недостатком рассматриваемого метода.

Далее после перехода от $\mathbf{d}_f(\Delta)$ к $D_f(\Delta)$ могут быть вычислены матрицы $S_D(\Delta)$ и $\Lambda_D(\Delta)$. После этого можно приступить к моделированию случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ по формуле (6.54).

Сформулируем изложенные идеи в виде алгоритмов.

Алгоритм 6.3. Преобразование симметричной $n \times n$ матрицы A в столбец $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $\mathbf{b}^{(q+i)} := A^{(q \ q+j-1)}$.
5. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 4.
6. $i := i + n - j + 1$.
7. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 3.
8. Конец работы алгоритма 6.3.

Алгоритм 6.4. Преобразование столбца $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$ в симметричную матрицу A размера $n \times n$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $A^{(q \ q+j-1)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
5. $A^{(q+j-1 \ q)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
6. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 4.
7. $i := i + n - j + 1$.
8. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 3.
9. Конец работы алгоритма 6.4.

Алгоритм 6.5. Преобразование симметричной матрицы A размера $n \times n$ в матрицу $\hat{A}$ размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$.

1. $Q := O_n$ (нулевая матрица размера $n \times n$).
2. $r := 1$.
3. $j := 1$.
4. $q := 1$.
5. $i := q + j - 1$.
6. $Q^{(qi)} := 1$.

7. $Q^{(iq)} := 1$.

8. $R := QA^T + AQ$.

9. $m := 0$.

10. $s := 1$.

11. $l := 1$.

12. $\hat{A}^{(l+m \ r)} := R^{(l \ l+s-1)}$.

13. Если $l < n - s + 1$, то $l := l + 1$ и перейти к пункту 12.

14. $m := m + n - s + 1$.

15. Если $s < n$, то $s := s + 1$ и перейти к пункту 11.

16. $Q := O_n$.

17. $r := r + 1$.

18. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и перейти к пункту 5.

19. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и перейти к пункту 4.

20. Конец работы алгоритма 6.5.

Алгоритм 6.6. Численное моделирование случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ.

1. Формирование столбца $\mathbf{b}$ из матрицы $\Sigma\Sigma^T$ по алгоритму 6.3.

2. Формирование матрицы $\hat{A}$ из матрицы A по алгоритму 6.5.

3. Определение столбца $\mathbf{d}_f(\Delta) = \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}\Delta} - I) \mathbf{b}$ по алгоритму 6.2.

4. Формирование матрицы $D_f(\Delta)$ из столбца $\mathbf{d}_f(\Delta)$ по алгоритму 6.4.

5. Осуществление спектрального разложения матрицы $D_f(\Delta)$ и определение матриц $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D^2(\Delta)$.

6. Определение матрицы $\Lambda_D(\Delta)$.

7. $i := 1$.

8. Моделирование случайной величины $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$.

9. Если $i < n$, то $i := i + 1$ и перейти к пункту 7.

10. $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) := S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$.

11. Конец работы алгоритма 6.6.

6.2.6. Алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ и оценка скорости его сходимости

Приведем алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ.

Алгоритм 6.7. Численное моделирование решения стационарной СЛСДУ.

1. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$ и $B_j(\Delta) = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \tau^j d\tau B$; $j = 0, 1, \dots, l$ с точностью ε по алгоритму 6.2.

2. $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(0)$.

3. $k := 1$.

4. Моделирование случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ по алгоритму 6.6.

5. $\mathbf{x}_{k+1} := e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$.

6. $\mathbf{y}_k := H^T \mathbf{x}_k$.

7. Если $k < N$, то $k := k + 1$ и перейти к пункту 4.

8. Конец работы алгоритма 6.7.

Таким образом, используя приведенные выше рассуждения, запишем следующие точное и приближенное представления решения стационарной СЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l} + S_D(\Delta) \Lambda_D(\Delta) \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad (6.58)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e_*^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j^*(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + S_D^*(\Delta) \Lambda_D^*(\Delta) \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta); \quad \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0, \quad (6.59)$$

где $\mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$, $\tilde{\mathbf{x}}_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta}$ – точное решение стационарной СЛСДУ (6.13) и его аппроксимация соответственно в моменты времени $k\Delta$; $k = 0, 1, \dots, K$; $e_*^{A\Delta}$, $B_j^*(\Delta)$, $S_D^*(\Delta)$, $\Lambda_D^*(\Delta)$ – вычисленные приближенные значения матриц $e^{A\Delta}$, $B_j(\Delta)$, $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D(\Delta)$. При этом $e_*^{A\Delta}$, $B_j^*(\Delta)$ вычисляются с помощью изложенных в предыдущих параграфах алгоритмов, а $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D(\Delta)$ – стандартными численными методами [95].

Оценим скорость сходимости алгоритма (6.59).

Лемма 5.1. Пусть существует такая постоянная $L < \infty$, что

$$\|S_D(\Delta) - S_D^*(\Delta)\| \leq L\Delta^{l+1}, \quad \|\Lambda_D(\Delta) - \Lambda_D^*(\Delta)\| \leq L\Delta^{l+1}, \quad \|e^{A\Delta}\| \leq L,$$

$$\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \leq L\Delta^{l+1}, \quad \|B_j(\Delta) - B_j^*(\Delta)\| \leq L\Delta^{l+1}.$$

Тогда

$$M\{\|\mathbf{e}_K\|\} \leq C\Delta^l,$$

где C – постоянная, независящая от Δ ; $\mathbf{e}_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$; $T = K\Delta$; l – натуральное; норма вектора и матрицы понимаются в том же смысле, что и раньше.

Доказательство: Из (6.58) и (6.59) получаем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\| &\leq \|e_*^{A\Delta} - e^{A\Delta}\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k\| + \|e^{A\Delta}\| \|\mathbf{e}_k\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{l-1} \|B_j^*(\Delta) - B_j(\Delta)\| \|\mathbf{v}_j(k)\| + \|R_{\Delta,l}\| + \end{aligned}$$

$$+ (\|S_D^*(\Delta) - S_D(\Delta)\| \|\Lambda_D^*(\Delta)\| + \|S_D(\Delta)\| \|\Lambda_D^*(\Delta) - \Lambda_D(\Delta)\|) \|\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\|.$$

Тогда в силу предположений леммы 5.1 и (6.43) имеем:

$$M\{\|\mathbf{e}_{k+1}\|\} \leq LM\{\|\mathbf{e}_k\|\} + C_1\Delta^{l+1},$$

где постоянная C_1 не зависит от Δ . Итерируя это неравенство и учитывая, что $\|\mathbf{e}_0\| = 0$, получим:

$$M\{\|\mathbf{e}_K\|\} \leq C_1\Delta^{l+1}(L^{K-1} + \dots + L + 1) \leq C\Delta^l.$$

Лемма доказана. $\square$

6.3. Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума

6.3.1. Введение

Рассмотренный в предыдущем параграфе метод численного решения стационарных СЛСДУ позволяет точно представлять случайную составляющую решения стационарной СЛСДУ, однако обладает недостатком, связанным с необходимостью вычисления дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ и последующим ее спектральным разложением. Вычисление данной дисперсионной матрицы является алгоритмически достаточно трудоемким и приводит, в силу проводимых преобразований, к резкому повышению размерности задачи. В настоящем параграфе будет рассмотрен метод численного решения стационарных СЛСДУ, который позволяет избежать этого недостатка. Идея указанного метода заключается в том,

что белый шум f_t аппроксимируется кусочно-постоянным случайным гауссовским процессом w_t с достаточно малым шагом дискретизации δ .

Рассмотрим промежуток интегрирования $[0, T]$ и выберем шаг интегрирования Δ , такой что $\Delta = T/M$. Покроем промежуток $[0, T]$ более густой сеткой с шагом $\delta = \Delta/(NM)$, $N > 1$ и рассмотрим постоянный на промежутках времени $[r\delta, (r+1)\delta)$; $r = 0, 1, \dots, MN$ гауссовский случайный векторный процесс $w_t \in \mathbb{R}^m$ с независимыми значениями на этих промежутках, т.е.

1. $w_t = w_{r\delta} = \text{const}$ при $t \in [r\delta, (r+1)\delta)$; $r = 0, 1, \dots, MN$.
2. $M\{w_{r\delta}\} \equiv 0$.
3. $M\{w_{r\delta} w_{r\delta}^T\} = \frac{1}{\delta} I \delta_{r,q}$, где I – единичная матрица, $\delta_{r,q}$ – символ Кронекера.
4. Векторные случайные величины $w_{r\delta}$ имеют нормальное распределение.

Нетрудно показать, что корреляционная функция и спектральная плотность случайного процесса w_t имеют вид:

$$R_w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) I & \text{при } |\tau| \leq \delta \\ 0 & \text{при } |\tau| > \delta \end{cases},$$

$$S_w(\omega) = \frac{2}{\omega^2 \delta^2} (1 - \cos \omega \delta) I \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \left(1 - \frac{\omega^2 \delta^2}{12}\right) I. \quad (6.60)$$

Таким образом, при $\delta \rightarrow 0$ корреляционные функции компонент процесса w_t стремятся к δ -функции, а спектральные плотности компонент w_t стремятся к единице. Это позволяет предполагать, что при уменьшении шага дискретизации δ процесс w_t приближается по своим свойствам к белому шуму.

Из (6.60) следует, что при $\omega_{\max} \delta \leq \frac{2\pi}{8}$, где $\omega_{\max}$ – максимальная частота, наблюдаемая в системе, спектральные плотности компонент процесса w_t с погрешностью не более 5% отличаются от единицы, а значит, приближенно соответствуют спектральной плотности белого шума. Из вышесказанного следует, что "приемлемая" оценка сверху для шага дискретизации δ имеет вид:

$$\delta \leq \frac{2\pi}{8\omega_{\max}} = \frac{T_{\min}}{8}.$$

Таким образом, шаг дискретизации δ должен быть выбран таким, чтобы на минимальном периоде T_{min} было не менее восьми точек.

6.3.2. Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ

Рассмотрим стационарную СЛСДУ (6.13) и запишем рекуррентное соотношение для ее решения на сетке с постоянным шагом $\Delta > 0$ с помощью формулы Коши:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \quad (6.61)$$

где $\mathbf{x}_k \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$; $k = 0, 1, \dots, M$; $M\Delta = T$.

Рассмотрим следующее приближенное представление $\tilde{\mathbf{x}}_k$ процесса $\mathbf{x}_k$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma \mathbf{w}_{\tau+k\Delta} d\tau, \quad (6.62)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_k \stackrel{def}{=} \tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta}$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma \mathbf{w}_{\tau+k\Delta} d\tau &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} e^{A(\Delta-\tau)} d\tau \Sigma \mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} A^{-1} [e^{A\delta} - I] \sum_{j=1}^N e^{A(\Delta-j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

где $\mathbf{z}_{k,j} \stackrel{def}{=} \sqrt{\delta} \mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} \in \mathbb{R}^m$ — столбец независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Кроме этого, столбцы $\mathbf{z}_{k,j}$ и $\mathbf{z}_{k',j'}$ независимы при $k \neq k'$ или $j \neq j'$.

Воспользовавшись результатами параграфа 6.2 и формулами (6.62) и (6.63), запишем следующие рекуррентные формулы для процессов $\tilde{\mathbf{x}}_k$ и $\tilde{\mathbf{y}}_k$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta, l+1} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^N e^{A(\Delta-j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}, \quad (6.64)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = H^T \tilde{\mathbf{x}}_k, \quad (6.65)$$

где

$$\|R_{\Delta, l+1}\| \leq H_{l+1} \Delta^{l+2}, \quad \bar{A}(\delta) = A^{-1} [e^{A\delta} - I],$$

$$B_j(\Delta) = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{s=0}^j \frac{\Delta^s A^s}{s!} \right] B,$$

$\mathbf{v}_j(k) \in \mathbb{R}^n$ – векторные коэффициенты, входящие в формулу (6.40), $H_{l+1} < \infty$ – постоянная.

Воспользовавшись рекуррентным соотношением (6.64), сформулируем алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ.

Алгоритм 6.8. Численное моделирование решений стационарных СЛСДУ

1. Вычисление с точностью ε матрицы $e^{A\delta}$ по алгоритму 6.1.
2. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$, $B_j(\Delta)$; $j = 0, 1, \dots, l$ с точностью ε по алгоритму 6.2.
3. $\bar{A}(\delta) := A^{-1} [e^{A\delta} - I]$.
4. $\tilde{\mathbf{x}}_1 := \mathbf{x}(0)$.
5. $k := 1$.
6. $i := 1$.
7. $l := 1$.
8. Численное моделирование случайной величины $\mathbf{z}_{k,i}^{(l)}$ – компоненты вектора $\mathbf{z}_{k,i}$.
9. Если $l < n$, то $l := l + 1$ и перейти к пункту 8.
10. Вычисление с точностью ε матрицы $e^{A(\Delta - i\delta)}$ по алгоритму 6.1.
11. Если $i < N$, то $i := i + 1$ и перейти к пункту 7.
12. $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} := e^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^N e^{A(\Delta - j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}$.
13. $\tilde{\mathbf{y}}_k = H^T \tilde{\mathbf{x}}_k$.
14. Если $k < M$, то $k := k + 1$ и перейти к пункту 6.
15. Конец работы алгоритма 6.8.

6.3.3. Оценка скорости сходимости по шагу дискретизации δ метода численного моделирования решений СЛСДУ, основанного на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума

Произведем сравнение моментных характеристик случайных процессов $\mathbf{x}_k$ и $\tilde{\mathbf{x}}_k$, определяемых соотношениями (6.61) и (6.64) соответственно.

Введем обозначения:

$$D_x(k) \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k^T \right\}, \quad D_{\tilde{x}}(k) \stackrel{\text{def}}{=} M \left\{ \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k^T \right\}, \quad E_D(k) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(k) - D_{\tilde{x}}(k),$$

$\|G\|$ – максимальное по модулю собственное число матрицы G .

Заметим, что если $M\{\tilde{\mathbf{x}}_0\} = M\{\mathbf{x}_0\}$, то согласно соотношениям (6.61), (6.62) имеем: $M\{\tilde{\mathbf{x}}_k\} = M\{\mathbf{x}_k\}$; $k = 1, 2, \dots, M$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 6.2. Пусть матрица A – гурвицева и $E_D(0) = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\|E_D(\infty)\| \leq C\delta^2,$$

где $\|E_D(\infty)\| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\|$ при $k \rightarrow \infty$, C – постоянная, зависящая только от Δ , A , Σ .

Доказательство: Рассмотрим рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции процесса $\mathbf{x}_k$. Согласно (6.61) имеем:

$$\begin{aligned} D_x(k+1) &= e^{A\Delta} D_x(k) e^{A^T \Delta} + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\Delta-\tau)} d\tau = \\ &= e^{A\Delta} D_x(k) e^{A^T \Delta} + \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\Delta-\tau)} d\tau = \\ &= e^{A\Delta} D_x(k) e^{A^T \Delta} + \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\delta-\tau)} d\tau e^{A^T(\Delta-i\delta)}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

где $\tilde{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \Sigma^T$.

Запишем рекуррентное соотношение для централизованной составляющей процесса $\tilde{\mathbf{x}}_k$:

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1} = e^{A\Delta} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma \mathbf{w}_{\tau+k\Delta} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{A\Delta} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k + \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma d\tau \mathbf{w}_{(i-1)\delta+k\Delta} = \\
&= e^{A\Delta} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k - A^{-1} \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} (e^{A\delta} - I) \Sigma \mathbf{w}_{(i-1+kN)\delta}. \quad (6.67)
\end{aligned}$$

С помощью (6.67) нетрудно получить следующее рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции процесса $\tilde{\mathbf{x}}_k$:

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{x}}(k+1) &= e^{A\Delta} D_{\tilde{x}}(k) e^{A^T \Delta} + \\
&+ \frac{1}{\delta} A^{-1} \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} (e^{A\delta} - I) \tilde{\Sigma} (e^{A^T \delta} - I) e^{A^T (\Delta-i\delta)} A^{-1T}. \quad (6.68)
\end{aligned}$$

Вычитая (6.68) из (6.66) и учитывая, что

$$A^{-1} C_i(\delta, \Delta) = C_i(\delta, \Delta) A^{-1}, \quad A^{-1T} C_i^T(\delta, \Delta) = C_i^T(\delta, \Delta) A^{-1T},$$

где $C_i(\delta, \Delta) \stackrel{def}{=} e^{A(\Delta-i\delta)} (e^{A\delta} - I)$, получим следующее рекуррентное соотношение для ошибки $E_D(k)$ в дисперсионной матричной функции:

$$E_D(k+1) = e^{A\Delta} E_D(k) e^{A^T \Delta} + \sum_{i=1}^N Q_i(\delta, \Delta), \quad (6.69)$$

где

$$\begin{aligned}
Q_i(\delta, \Delta) &= e^{A(\Delta-i\delta)} \left[\int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T (\delta-\tau)} d\tau - \right. \\
&\left. - \frac{1}{\delta} (e^{A\delta} - I) A^{-1} \tilde{\Sigma} A^{-1T} (e^{A^T \delta} - I) \right] e^{A^T (\Delta-i\delta)}. \quad (6.70)
\end{aligned}$$

С помощью формулы Тейлора имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T (\delta-\tau)} d\tau = \int_0^\delta e^{Au} \tilde{\Sigma} e^{A^T u} du = \\
&= \int_0^\delta \left[I + Au + \frac{A^2 u^2}{2} + O(u^3) \right] \tilde{\Sigma} \left[I + A^T u + \frac{A^{T^2} u^2}{2} + O(u^3) \right] du = \\
&= \tilde{\Sigma} \delta + (A \tilde{\Sigma})^s \delta^2 + \frac{1}{3} [A \tilde{\Sigma} A^T + (A^2 \tilde{\Sigma})^s] \delta^3 + O(\delta^4), \quad (6.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta} (e^{A\delta} - I) A^{-1} \tilde{\Sigma} A^{-1T} (e^{A^T\delta} - I) = \\
& = \frac{1}{\delta} \left[A\delta + \frac{A^2\delta^2}{2} + \frac{A^3\delta^3}{6} + O(\delta^4) \right] A^{-1} \tilde{\Sigma} A^{-1T} \times \\
& \quad \times \left[A^T\delta + \frac{A^{T^2}\delta^2}{2} + \frac{A^{T^3}\delta^3}{6} + O(\delta^4) \right] = \\
& = \tilde{\Sigma}\delta + (A\tilde{\Sigma})^s \delta^2 + \left[\frac{1}{4} A\tilde{\Sigma}A^T + \frac{1}{3} (A^2\tilde{\Sigma})^s \right] \delta^3 + O(\delta^4), \tag{6.72}
\end{aligned}$$

где $B^s \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} (B + B^T)$ — симметричная часть матрицы B .

Подставляя (6.71) и (6.72) в (6.70), а затем (6.70) в (6.69), получаем:

$$E_D(k+1) = e^{A\Delta} E_D(k) e^{A^T\Delta} + \frac{\delta^3}{12} \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} A\tilde{\Sigma}A^T e^{A^T(\Delta-i\delta)} + O(\delta^4). \tag{6.73}$$

Оценим норму $\|E_D(k+1)\|$:

$$\begin{aligned}
\|E_D(k+1)\| & \leq \|e^{A\Delta}\|^2 \|E_D(k)\| + \\
& + \frac{\delta^3}{12} \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| \sum_{i=1}^N e^{2\|A\|(N-i)\delta} + O(\delta^4). \tag{6.74}
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^N e^{2\|A\|(N-i)\delta} < N e^{2\|A\|\Delta},$$

то из (6.74) имеем:

$$\|E_D(k+1)\| < \|e^{A\Delta}\|^2 \|E_D(k)\| + \frac{\Delta\delta^2}{12} \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| e^{2\|A\|\Delta} + O(\delta^4). \tag{6.75}$$

Если матрица A гурвицева, то матрица $e^{A\Delta}$ имеет все собственные числа внутри единичного круга и, следовательно, $\|e^{A\Delta}\| < 1$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (6.75), получим следующую оценку для установившегося значения нормы ошибки в дисперсионной матричной функции:

$$\|E_D(\infty)\| \leq \frac{\Delta\delta^2 \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| e^{2\|A\|\Delta}}{12 (1 - \|e^{A\Delta}\|)^2} + O(\delta^4) \leq C\delta^2, \tag{6.76}$$

где $C < \infty$ – постоянная, которая зависит только от Δ , Σ и A . Существование предела $\|E_D(\infty)\|$ следует из гурвицевости матрицы A и уравнения (6.73). Лемма доказана. $\square$.

В заключение отметим, что метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении, позволяет точно представлять случайную составляющую решений стационарных СЛСДУ. Однако этот метод имеет недостаток, связанный с необходимостью вычисления дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ с ее последующим спектральным разложением. Вычисление дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ является алгоритмически достаточно трудоемким и приводит, в силу проводимых преобразований, к резкому повышению размерности задачи. Рассмотренный в настоящем параграфе приближенный метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно постоянной аппроксимации белого шума позволяет избежать этого недостатка, хотя случайная составляющая решения стационарной СЛСДУ представляется этим методом приближенно даже на алгоритмическом уровне.

6.4. Библиотека “ITO-LIN” MatLAB-функций численного моделирования решений стационарных СЛСДУ

В настоящем параграфе рассматривается библиотека “ITO-LIN” MatLAB-функций, позволяющая численно моделировать решения стационарных СЛСДУ. Библиотека “ITO-LIN” написана для версии 3.50a системы MatLAB, однако в силу приемственности различных версий MatLABa, может быть, с незначительными изменениями, перенесена на более новые версии системы MatLAB.*

* Материалом для написания настоящего параграфа послужила глава 2 и приложение 5 работы [56]. Первоначальный вариант библиотеки “ITO-LIN” содержится в работе [56]. Публикуемая в настоящей монографии библиотека “ITO-LIN” отличается от первоначального варианта текстом функций записи в файл и считывания из файла исходных данных (in_file.m, out_file.m). Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных (in_out.m, in_key.m, see_ed.m) написаны Кульчицким О.Ю. Функции вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения стационарной СЛСДУ (din_det.m, stoch.m, convert.m, mat_vec.m, vec_mat.m), а также функции записи в файл и считывания из файла исходных данных (in_file.m,

6.4.1. Математическая модель объекта моделирования

Предлагаемая библиотека MatLAB-функций позволяет численно моделировать на временной сетке с постоянным шагом $\Delta > 0$:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta = t_0 + (k+1)\Delta; \quad k = 0, 1, \dots$$

решения стационарных СЛСДУ вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t)) dt + F d\mathbf{f}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega); \quad (6.77)$$

$$\mathbf{y}_t = H^T \mathbf{x}_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ – решение стационарной СЛСДУ; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^k$ – детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^1$ – выходной процесс, численная реализация которого является финальной целью моделирования; $H^T \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ – числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ – стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$).

Шаг интегрирования Δ предполагается настолько малым, что детерминированное воздействие $\mathbf{u}(t)$ с достаточной точностью может быть аппроксимировано на интервале интегрирования кусочно-постоянной функцией:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k \text{ при } t \in [k\Delta, (k+1)\Delta),$$

где $\mathbf{u}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}(k\Delta)$.

При этом предположении с помощью формулы Коши может быть получена (см. параграф 6.2) следующая рекуррентная формула для решения стационарной СЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta); \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega); \quad (6.78)$$

$$\mathbf{y}_k = H^T \mathbf{x}_k,$$

где $\mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_{k\Delta}$, $\mathbf{y}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_{k\Delta}$; $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \in \mathbb{R}^n$ – случайный столбец, который вычисляется по формуле:

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta) \Lambda_D(\Delta) \bar{\mathbf{f}}_{k+1},$$

out_file.m) написаны Кузнецовым Д.Ф. Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного возмущения (uk_out.m, utt.m) написаны Куклиной М.Б. и Кузнецовым Д.Ф. Сценарий Lito.m управления библиотекой "ITO-LIN" написан Кульчицким О.Ю. и Кузнецовым Д.Ф.

где $\bar{\mathbf{f}}_k \in \mathbb{R}^n$ – столбец независимых гауссовских случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями:

$$\mathbf{M}\{\bar{\mathbf{f}}_k\} \equiv 0; \quad \mathbf{M}\{\bar{\mathbf{f}}_k \bar{\mathbf{f}}_r^T\} = \delta_{k,r} I; \quad k, r = 0, 1, \dots$$

где $\delta_{k,r}$ – символ Кронекера:

$$\delta_{k,r} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = r \\ 0 & \text{при } k \neq r \end{cases};$$

$S_D(\Delta)$ – матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$ вида:

$$D_f(\Delta) = \mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^T(\Delta)\} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} F F^T e^{A^T(\Delta-\tau)} d\tau,$$

которая получается как решение $D_f(t)$ при $t = \Delta$ матричного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d}{dt} D_f(t) = A D_f(t) + D_f(t) A^T + F F^T; \quad D_f(0) = 0;$$

$\Lambda_D(\Delta)$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы $D_f(\Delta)$.

В параграфе 6.2 отмечалось, что первое слагаемое, входящее в правую часть (6.78), называется **переходной** или **динамической** составляющей, второе – **систематической** или **детерминированной** составляющей, а третье – **случайной** составляющей решения стационарной СЛСДУ. В дальнейшем также будем придерживаться этой терминологии.

6.4.2 Общая характеристика и сценарий управления библиотекой

Рекуррентные уравнения (6.78) положены в основу описанной ниже библиотеки MATLAB-функций численного моделирования решений стационарных СЛСДУ.

Библиотека позволяет решать следующие задачи:

1. Вводить и выводить в диалоговом режиме необходимые для моделирования исходные параметры задачи (функция in_out.m).

2. Вычислять матричные функции динамической и детерминированной составляющих моделируемого процесса (функция `din_det.m`).

3. Вычислять матричные функции, необходимые для генерирования случайной составляющей моделируемого процесса (функция `stoch.m`).

4. Вычислять моментные характеристики решения и выхода стационарной СЛСДУ.

5. Выбирать и вычислять детерминированное воздействие на систему (функции `uk_out.m` и `utt.m`).

6. Моделировать решение стационарной СЛСДУ.

7. Графически представлять смоделированное решение и его дисперсию.

Перечисленные задачи, решаемые библиотекой, реализуются с помощью сценария `lito.m` управления библиотекой. Дадим характеристику сценария `lito.m`.

1. Назначение: `lito.m` обеспечивает взаимное согласование работы отдельных функций библиотеки, промежуточный контроль вычислений при моделировании и графическое представление результатов моделирования.

2. Входные параметры: нет.

3. Выходные параметры: нет.

4. Структурная блок-схема сценария представлена на рис.6.1.

5. Функции, используемые в `lito.m`: `in_out.m`, `din_det.m`, `stoch.m`, `uk_out.m`, `utt.m`.

6. Текст сценария `lito.m`.

%Сценарий моделирования решений стационарных систем

%линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ)

```
casesen on;
```

```
clear;
```

```
rand('normal');
```

```
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
```

```
=in_out(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk);
```

```
type din_det.doc;
```

```
%вычисление матриц
```

```
[Ad,Bd]=din_det(n,k,A,B,dt);
```

```
%Ad и Bd динамической
```

```
yn=input('Просмотр Ad, Bd [y/n] ', 's');
```

```
%и детерминированной
```

```
if yn == 'y',
```

```
%составляющих
```

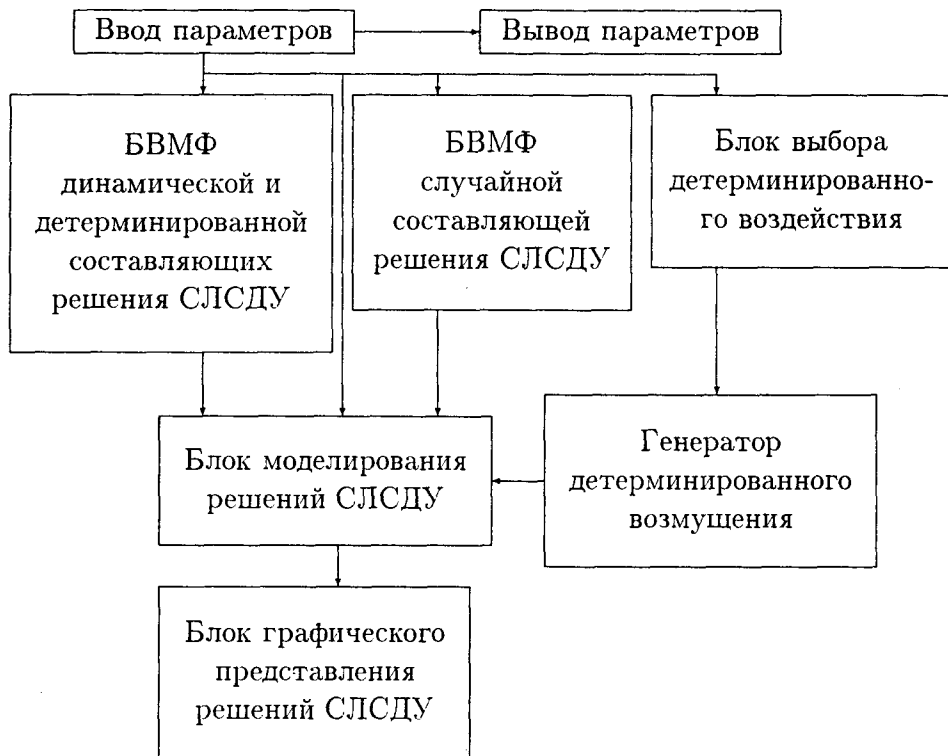


Рис.6.1. Блок-схема структуры библиотеки “ИТО-LIN”
 MATLAB-функций моделирования решений СЛСДУ (БВМФ-блок
 вычисления матричных функций).


```

disp('Ad= '); disp(Ad); %решения ССЛСДУ
disp('вектор-столбец собственных чисел матрицы Ad');
disp(eig(Ad));
disp('Bd= '); disp(Bd);
pause;
end; %if yn == 'y'
type stoch.doc;
[Fd] = stoch(n,m,A,F,dt); %Вычисление матрицы Fd
yn=input('Просмотр Fd [y/n] ','s'); %случайной составляющей
if yn == 'y', %решения ССЛСДУ
    disp('Fd= '); disp(Fd);
    pause;
end; %if yn == 'y'
t1 = t0; %Вспомогательные переменные t1,tk1,x1 введены
tk1 = tk; %для сохранения начальных данных t0,tk,x0
x1 = x0;
an=input('Продолжить решение? [y/n] ','s');
while an == 'y', %Цикл по an введен для изменения
    t0=t1; %внешнего воздействия и просчета
    tk=tk1; %задачи сначала
    x0=x1;
    dn=input('Вы готовы выбрать u(t)? [y/n] ','s');
while dn == 'y', %цикл по dn введен для изменения внешнего
    %воздействия, начальные условия задаются
    %по результатам решения предыдущей задачи
    %выбор параметров внешнего возмущения
[u0,D,w,fi,un,ua,p,w0,w1,w2,w3,wd,wq,wf,U] = uk_out(k);
%Моделирование решения ССЛСДУ
disp('начало интервала t0= ')
disp(t0);
disp('конец интервала tk= ')
disp(tk);
disp('начальное условие x0= ')
disp(x0); mx0=x0;
Dx0=zeros(n,n);
disp('Моделирование решения ССЛСДУ');

```

```
yn=input('Моделировать? [y/n]','s');
```

```
while yn == 'y',
```

```
    kk = 1;
```

```
    yt(kk) = H*x0; my(kk) = H*mx0;
```

```
    Dy(kk) = H*Dx0*H';
```

```
    kt(kk) = t0;
```

```
    tk2=tk; t2=tk-t0; nn=t2/dt+1;
```

```
for kk=2:nn,
```

```
    t=t0+(kk-1)*dt;
```

```
[ut]=utt(t,k,u0,D,w,fi,un,ua,p,w0,w1,w2,w3,wd,wq,wf,U);
```

```
ft = rand(n,1);
```

```
xt = Ad*x0 + Bd*ut + Fd*ft; %Решение ССЛСДУ
```

```
mx = Ad*mx0 + Bd*ut; %Математическое ожидание  
%решения ССЛСДУ
```

```
Dx = Ad*Dx0*Ad'+Fd*Fd' ; %Дисперсионная матрица  
%решения ССЛСДУ
```

```
rx = expm(A*(tk-t))*Dx ; %ковариационная матрица  
%решения ССЛСДУ
```

```
yt(kk) = H*xt; %Выход ССЛСДУ
```

```
my(kk) = H*mx; %математическое ожидание выхода ССЛСДУ
```

```
Dy(kk) = H*Dx*H'; %дисперсионная матрица выхода ССЛСДУ
```

```
ry(kk) = H*rx*H'; %ковариационная матрица выхода ССЛСДУ
```

```
kt(kk) = t;
```

```
x0 = xt; mx0 = mx; Dx0 = Dx;
```

```
end; % for
```

```
tk = tk2 + t2; t0 = tk2;
```

```
clc; clg;
```

```
subplot(211) %Графический вывод выхода yt ССЛСДУ
```

```
plot(kt,yt,'w',kt,my,'r'),
```

```
xlabel('white-system with noise, red-system without noise'),
```

```
pause;
```

```
bn=input('График дисперсии выхода системы? [y/n]','s');
```

```
if bn == 'y',
```

```
    plot(kt,Dy,'w'),
```

```
    pause;
```

```
end; %if bn=='y'
```

```

disp('число шагов kk= ');
disp(kk);
pause;
yn=input('Моделировать на седующем интервале? [y/n]', 's');
end; % while yn=='y'
dn=input('Изменить характер u(t) ? [y/n]', 's');
end; % while dn=='y'
an=input('Изменить u(t) и решать задачу сначала? [y/n]', 's');
end; % while an=='y'
end; % конец программы l_ito

```

После запуска сценария lito.m происходит обращение к функции in_out.m, в результате чего на экране компьютера появляется заставка (файлы заставок title.doc, menu.doc), которая выглядит следующим образом:

% МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ССЛСДУ

```

% Ввод исходных параметров:
%
% Ввод с клавиатуры [k]
% Ввод из файла [r]
% Просмотр или редактирование [l]
% Запись на МД [w]
% Конец ввода [e]
% Выход из программы в DOS [q]
%
% Введите нужное

```

После окончания ввода, редактирования, просмотра или записи на МД исходных данных можно приступить непосредственно к моделированию решения стационарной СЛСДУ. Моделирование начинается после того, как на экране компьютера появляется заставка (файл заставки lssde.doc), которая имеет вид:

```

% Моделируется стационарная СЛСДУ вида:
%
%  $dx = Axdt + Budt + Fdf; x(0)=x0,$ 
%  $y = Hx,$ 

```

%
 % где x - $n \times 1$ -столбец; y - скаляр; u - $k \times 1$ -столбец;
 % f - $m \times 1$ -столбец; A - $n \times n$ -матрица; B - $n \times k$ -матрица;
 % F - $n \times m$ -матрица; H - $1 \times n$ -строка.

6.4.3. Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных

Функция in_out.m.

1. Назначение: in_out.m обеспечивает ввод с клавиатуры или файла, вывод в виде файла и запись на МД, а так же просмотр и редактирование исходных параметров системы, необходимых для моделирования ее решений.

2. Входные параметры: нет.

3. Выходные параметры:

n - размерность вектора x_t фазовых координат системы,

k - размерность вектора внешнего воздействия $u(t)$,

m - размерность вектора случайных возмущений f_t ,

A - $n \times n$ матрица, B - $n \times k$ матрица, F - $n \times m$ матрица, H - $1 \times n$ матрица.

4. Структурная блок-схема функции представлена на рис.6.2.

5. Функции, используемые в in_out.m: in_key.m, in_file.m, see_ed.m, out_file.m.

6. Текст функции in_out.m

%Функция ввода-вывода исходных параметров ССЛСДУ

```
function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
    =in_out(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk)

casesen on;
type title.doc;
key='k';
while key=='k' | key=='l' | key=='w' | key=='r' | key=='q'
    | key=='e',
    type menu0.doc;
    key=input('key= ? [k,r,l,w,e,q] ','s');
    if key == 'k', %Ввод параметров ССЛСДУ с клавиатуры
        [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
```

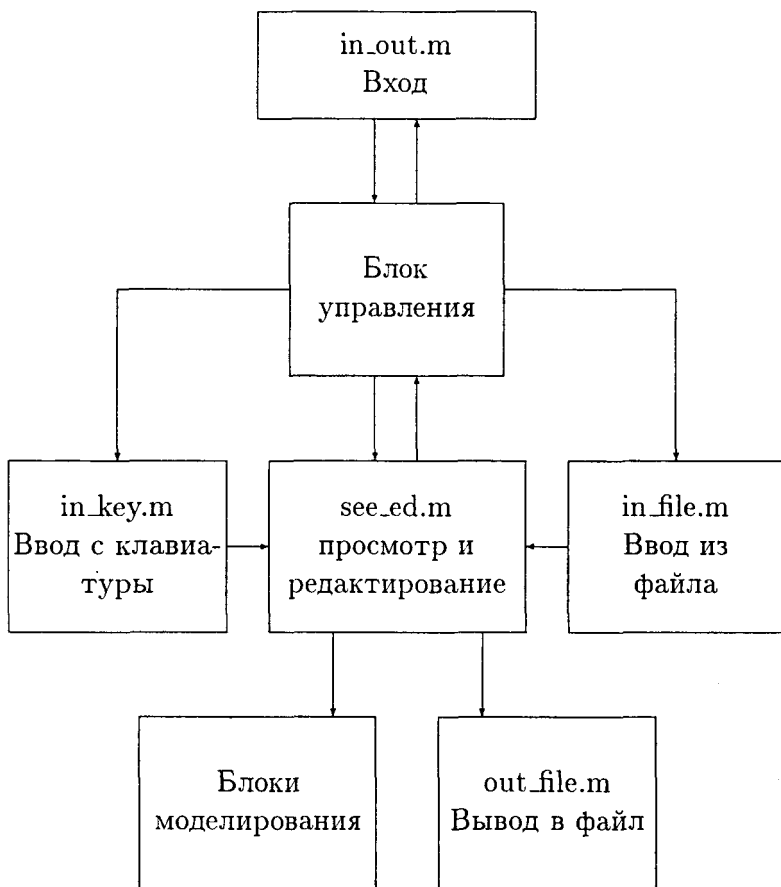


Рис.6.2. Структура функции `in_out.m`.

```

                                =in_key(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk);
    end; %if key=='k'
if key == 'l', %Просмотр и редактирование параметров ССЛСДУ
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
                                =see_ed(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk);
    end; %if key=='l'
    if key == 'w', %Запись параметров ССЛСДУ в файл *.mat
        disp('Введите: save(пробел)имя_файла, Enter, Ctrl^Z');
        keyboard
[V,o1,o2,o3,o4,o5,o6,key]
                                =out_file(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk,key);
    end; %if key=='w'
if key=='r', %Ввод параметров ССЛСДУ из файла *.mat
    disp('Введите: load(пробел)имя_файла, Enter, Ctrl^Z');
    keyboard
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]=in_file(V,o1,o2,o3,o4,o5,o6,key);
    end; %if key=='r'
    if key=='q', %Выход из программы l_ito
        clear ;
        quit;
    end; %if key=='q'
if key=='e', %Конец ввода параметров ССЛСДУ
    return
    end; %if key=='e'
end; %while key == 'k':'r':'l':'w':'e'
                                %Выход в MATLAB

    end; %in_out

```

Рассмотрим вспомогательные функции in_key.m, in_file.m, see_ed.m, out_file.m, используемые в функции in_out.m.

Функция in_key.m

1. Назначение: in_key.m обеспечивает в диалоговом режиме ввод с клавиатуры исходных параметров системы.

2. Входные параметры: нет.

3. Выходные параметры: n, k, m, A, B, F, H; t0, tk – границы промежутка интегрирования, dt – шаг интегрирования, x0 – начальное значение вектора состояния системы.

4. Структура функции – диалоговая.
5. in_key.m не использует других функций.
6. Текст функции in_key.m

%Функция ввода параметров ССЛСДУ с клавиатуры

```
function[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
    =in_key(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk)

casesen on;
type lssde.doc
n=input('n=? (n>=1)'); %Ввод n,k,m
while n<1,
    n=input('Введите новое n (n>=1)');
end; %while;
k=input('k=? ((k>=1)&(k<=n))');
while k<1 | k>n,
    k=input('Введите новое k (k>=1)&(k<=n)');
end; %while
m=input('m=? ((m>=1)&(m<=n))');
while m<1 | m>n,
    m=input('Введите новое m (m>=1)&(m<=n)');
end; %while
A=input('A=?(n*n)'); %Ввод A,B,F,H,x0
B=input('B=?(n*k)');
F=input('F=?(n*m)');
H=input('H=?(1*n)');
x0=input('x0=?(n*1)');
dt=input('dt=? (dt>0)'); %Ввод dt,t0,tk
t0=input('t0=? ');
tk=input('tk=? (tk>t0)');
while dt<=0 | t0>tk-dt
    disp('Введите новые dt (dt>0), t0, tk');
    dt=input('dt=? (dt>0)');
    t0=input('t0=?');
    tk=input('tk=? (tk>=t0+dt)');
end; %while
end; %in_key
```

Функция in_file.m

1. Назначение: in_file.m обеспечивает ввод из файла на МД исходных параметров системы.

2. Входные параметры: $V - n \times (n+k+m+2)$ матрица и $o1, \dots, o6$ – скалярные переменные, в которых содержатся исходные параметры ССЛСДУ; key – ключ входа.

3. Выходные параметры: те же, что и у функции in_key.m, а также key – ключ выхода.

4. Структура функции – простая.

5. in_file.m не использует других функций.

6. Текст функции in_file.m.

%Функция преобразования $n \times (n+m+k+2)$ матрицы V и переменных $o1, \dots, o6$ в исходные параметры ССЛСДУ

```
function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk,key]
                                =in_file(V,o1,o2,o3,o4,o5,o6,key)

n=o1; k=o2; m=o3;
A=V(1:n,1:n);
B=V(1:n,n+1:n+k);
F=V(1:n,n+k+1:n+k+m);
H1=V(1:n,n+k+m+1); H=H1';
x0=V(1:n,n+k+m+2);
dt=o4; t0=o5; tk=o6;
    end % in_file
```

Функция see_ed.m

1. Назначение: see_ed.m обеспечивает просмотр и редактирование в диалоговом режиме значений параметров ССЛСДУ.

2. Входные параметры: те же, что и выходные параметры у функции in_key.m.

3. Выходные параметры: Те же, что и у функции in_key.m.

4. Структура функции – диалоговая.

5. see_ed.m не использует других функций.

6. Текст функции see_ed.m.

%Функция просмотра и редактирования параметров ССЛСДУ

```
function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
                                =see_ed(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk)

    casesen on;
```



```

type lssde.doc;
disp('n='); disp(n);
disp('k='); disp(k);
disp('m='); disp(m);
yn='n';
while yn=='n' | yn=='k' | yn=='m',
    yn=input('n,k,m=? [n/k/m//q] ', 's');
    if yn == 'n',
        n=input('n=? (n>=1)');
    while n < 1,
        n=input('Измените n (n>=1)');
    end; %while
    end; %if yn == 'n'
    if yn == 'k',
        k=input('k=? ((k>=1)&(k<=n))');
    while k < 1 | k > n,
        k=input('Измените k (k>=1)&(k<=n)');
    end; %while
    end; %if yn == 'k'
    if yn == 'm',
        m=input('m=? ((m>=1)&(m<=n))');
    while m < 1 | m > n,
        m=input('Измените m (m>=1)&(m<=n)');
    end; %while
    end; %if yn == 'm'
    end; %while
    disp('A= '); disp(A); pause;
    disp('B= '); disp(B); pause;
disp('F= '); disp(F); pause;
    disp('H= '); disp(H); pause;
disp('x0= '); disp(x0); pause;
    yn='A';
    while yn=='A' | yn=='B' | yn=='F' | yn=='H' | yn=='x0',
        yn=input('A=?, B=?, F=?, H=?, x0=? : [A/B/F/H/x0//q] ', 's');
        if yn=='A',
            A=input('A=? (n*n)');

```

```

end; %if yn == 'A'
if yn=='B',
    B=input('B=? (n*k) ');
end; %if yn == 'B'
    if yn=='F',
        F=input('F=? (n*m) ');
end; %if yn == 'F'
if yn=='H',
    H=input('H=? (l*n) ');
end; %if yn == 'H'
if yn=='x0',
    x0=input('x0=? (n*n) ');
end; %if yn == 'x0'
    end; %while
disp('dt= '); disp(dt); pause;
disp('t0= '); disp(t0); pause;
disp('tk= '); disp(tk); pause;
yn='dt';
while yn=='dt' | yn=='t0' | yn=='tk',
    yn=input('dt,t0,tk=? [dt/t0/tk//q] ', 's');
if yn == 'dt',
    dt=input('dt=? (dt>0) ');
while dt <= 0,
    dt=input('Измените dt=? (dt>0) ');
end; %while
    end; %if yn == 'dt'
    if yn == 't0',
        t0=input('t0=? ');
    end; %if yn == 't0'
    if yn == 'tk',
        tk=input('tk=? (tk>=t0+dt) ');
while tk < t0+dt,
    tk=input('Измените tk=? (tk>=t0+dt) ');
end; %while
    end; %if yn == 'tk'
end; %while

```

```
end; %see_ed
```

Функция out_file.m

1. Назначение: out_file.m обеспечивает запись массива исходных данных в виде файла с расширением "mat" на магнитный диск.
2. Входные параметры: те же, что и выходные параметры у функции in_file.m.
3. Выходные параметры: V – $n \times (n+k+m+2)$ матрица и $o1, \dots, o6$ – скалярные переменные, в которых содержатся исходные параметры ССЛСДУ; key – ключ входа.
4. Структура функции – простая.
5. out_file.m не использует других функций.
6. Текст функции out_file.m.

%Функция записи исходных параметров ССЛСДУ

%в файл с расширением mat

```
function[V,o1,o2,o3,o4,o5,o6,key]
```

```
=out_file(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk,key)
```

```
o1=n; o2=k; o3=m;
```

```
H1=H';
```

```
V=[A B F H1 x0];
```

```
o4=dt; o5=t0; o6=tk;
```

```
end % out_file
```

6.4.4. Функции вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения ССЛСДУ

Функциями вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения стационарной СЛСДУ являются функции din_det.m и stoch.m. При этом функция stoch.m использует вспомогательные функции convert.m, mat_vec.m и vec_mat.m. Рассмотрим поочередно эти функции.

Функция din_det.m

1. Назначение: din_det.m осуществляет вычисление матриц динамической и детерминированной составляющих решения стационарной СЛСДУ.

2. Входные параметры: u , k , A , B , dt – те же, что и выходные параметры функции `in_key.m`.

3. Выходные параметры: Ad – $n \times n$ матрица динамической составляющей решения ССЛСДУ, Bd – $n \times k$ матрица детерминированной составляющей решения ССЛСДУ,

4. Структурная блок-схема функции реализует вычисление матриц

$$e^{A\Delta}, A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B,$$

входящих в первые два слагаемых в правой части (6.78).

5. `din_det.m` не использует других функций.

6. Текст функции `din_det.m`.

%Функция вычисления матриц Ad -динамической и

% Bd -детерминированной составляющих решения ССЛСДУ

```
function [Ad,Bd] = din_det(n,k,A,B,dt);
```

```
    Okn=zeros(k,n);
```

```
    Okk=zeros(k,k);
```

```
    Idt=eye(n+k)*dt;
```

```
    AA=[A B; Okn Okk];
```

```
    ex_aah=expm(AA*Idt);
```

```
    Ad=ex_aah(1:n,1:n);
```

```
    nb1=n+1; nbk=n+k;
```

```
    Bd=ex_aah(1:n,nb1:nbk);
```

```
end; %din_det
```

7. Заставка функции `din_det.m` (`din_det.doc`):

%Вычисление матриц:

% Ad – динамической составляющей;

% Bd – детерминированной составляющей.

Функция `stoch.m`

1. Назначение: `stoch.m` осуществляет вычисление матрицы случай-ной составляющей решения ССЛСДУ.

2. Входные параметры: n , m , A , F , dt .

3. Выходные параметры: Fd – $n \times n$ матрица случайной составляющей решения ССЛСДУ.

4. Структурная блок-схема функции реализует вычисление случай-ной составляющей решения ССЛСДУ по алгоритму 6.6 параграфа 6.2.

5. Функции, используемые в stoch.m: convert.m, mat_vec.m, vec_mat.m.

6. Текст функции stoch.m.

**%Функция вычисления матрицы Fd случайной
%составляющей ССЛСДУ**

```
function [Fd] = stoch(n,m,A,F,dt);
    if n == 1,
        NF = abs(F);
    elseif n > 1,
        NF = norm(F,'fro');
    else
        NF = -1;
    end; %if
    if NF >= 0.000000001,
        [Ac] = convert(A,n);
        G = F*(F');
        [gv] = mat_vec(G,n);
        nn2 = n*(n+1)/2;
        [Dd,Dv]=din_det(nn2,1,Ac,gv,dt);
        [D] = vec_mat(Dv,n);
        [S,L2] = eig(D);
        [L] = sqrt(L2);
        Fd = S*L;
    else
        disp('F=0');
        Fd = zeros(n,m);
    end; %if
end; %stoch
```

7. Заставка функции stoch.m (stoch.doc):

```
%           Вычисление матрицы:
%   Fd - стохастической составляющей.
```

Функция convert.m

1. Назначение: convert.m осуществляет преобразование матрицы A размера $n \times n$ матричного уравнения Ляпунова к матрице Aconv размера $(n \times (n+1))/2 \times (n \times (n+1))/2$ векторного уравнения Ляпунова по алгоритму 6.5 параграфа 6.2.

2. Входные параметры: n , A .
3. Выходные параметры: A_{conv} .
4. Структура функции – простая.
5. `convert.m` не использует других функций.
6. Текст функции `convert.m`.

%Функция преобразования матрицы A - $n \times n$ матричного
 %уравнения Ляпунова к матрице $A_{conv}-(n \times (n+1)/2) \times (n \times (n+1)/2)$
 %векторного уравнения Ляпунова

```
function [Aconv] = convert(A,n);
one1 = zeros(n,n);
rr1 = 1;
for jj1 = 1:n,
    nb1=n-jj1+1;
    for kk1 = 1:nb1,
        ii1 = kk1+jj1-1;
        one1(kk1,ii1) = 1;
        one1(ii1,kk1) = 1;
        oneA = one1*(A') + A*one1;
        ool = 0;
    for ss1 = 1:n,
        ll11 = n-ss1+1;
        for ll1 = 1:ll11,
            Aconv(ll1+ool,rr1) = oneA(ll1,ll1+ss1-1);
        end; % for ll1
        ool =ool+n-ss1+1;
    end; %for ss1
    one1 = zeros(n,n);
    rr1 = rr1+1;
end; %for kk1
end; %for jj1
end; %convert
```

Функция `mat_vec.m`

1. Назначение: `mat_vec.m` осуществляет преобразование верхнего треугольника матрицы Mat размера $n \times n$ в столбец Vec размера $(n \times (n+1))/2$ по алгоритму 6.3 параграфа 6.2.

2. Входные параметры: n , Mat .
3. Выходные параметры: Vec .
4. Структура функции – простая.
5. `mat_vec.m` не использует других функций.
6. Текст функции `mat_vec.m`.

%Функция преобразования верхнего треугольного блока
%квадратной $n \times n$ – матрицы Mat в вектор-столбец Vec
%размера $(n(n+1))/2$

```
function [Vec] = mat_vec(Mat,n);
ii1 = 0;
for jj1 = 1:n,
    nb1 = n-jj1+1;
    for kk1 = 1:nb1,
        Vec(kk1+ii1,1) = Mat(kk1,kk1+jj1-1);
    end; %for kk1
    ii1 = ii1+n-jj1+1;
end; %for jj1
end; %mat_vec
```

Функция `vec_mat.m`

1. Назначение: `vec_mat.m` осуществляет преобразование столбца Vec размера $(n \times (n+1))/2$ в симметричную матрицу Mat размера $n \times n$ по алгоритму 6.4 параграфа 6.2.

2. Входные параметры: n , Vec .
3. Выходные параметры: Mat .
4. Структура функции – простая.
5. `vec_mat.m` не использует других функций.
6. Текст функции `vec_mat.m`.

%Функция преобразования вектора-столбца Vec размера
% $(n(n+1))/2$ в симметричную квадратную $n \times n$ – матрицу Mat

```
function [Mat]=vec_mat(Vec,n);
ii1=0;
for jj1 = 1:n,
    nb1 = n-jj1+1;
    for kk1 = 1:nb1,
        Mat(kk1,kk1+jj1-1) = Vec(kk1+ii1,1);
```

```

    Mat(kk1+jj1-1, kk1) = Vec(kk1+ii1, 1);
end; %for kk1
    ii1 = ii1+n-jj1+1;
end; %for jj1
end; %vec_mat

```

6.4.5. Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия

Функциями выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия являются функции uk_out.m и utt.m.

Функция uk_out.m

1. Назначение: uk_out.m позволяет выбирать постоянное, полиномиальное, гармоническое, комбинированное и нулевое внешнее детерминированное воздействие.

2. Входные параметры: k.

3. Выходные параметры: $u_0, D, w, f_i \in \mathbb{R}^k$, $U \in \mathbb{R}^{(p+1) \times k}$, $p \in \mathbb{R}^1$ – параметры различных внешних возмущений; un-вспомогательная переменная, принимающая значения: 1, ..., 5 в зависимости от выбранного внешнего возмущения; ua-вспомогательная переменная, принимающая значения: 1, 2, 3 и используемая при вычислении комбинированного внешнего воздействия; w0, w1, w2, w3, wf, wd, wq $\in \mathbb{R}^1$ – параметры комбинированного возмущения.

4. Структура функции – диалоговая.

5. uk_out.m не использует других функций.

6. Текст функции uk_out.m

```

%Функция выбора и задания внешнего возмущения u(t)
function [u0,D,w,fi,un,ua,p,w0,w1,w2,w3,wd,wq,wf,U]
                                                    =uk_out(k);

casesen on;
    key='d';
while key=='d' | key=='p' | key=='g' | key=='o' | key=='z' ,
    type uprav.doc;
    key=input('key= ? [d,p,g,o,z] ', 's');
    if key == 'd',      % Постоянное воздействие
disp('Постоянное воздействие u=u0-k-вектор; ввод коэф-тов');

```



```

disp('k= '); disp(k);
u0=input(' u0= ? k-вектор ');
un=1; return;
end; % if key=='d'
if key == 'p', %Полиномиальное воздействие
disp('Полиномиальное воздействие u=U(1)+U(2)*t+...-k-вектор');
p=input('степень полинома p=?');
disp('введите коэффициенты полинома k-столбцы');
disp('k= '); disp(k);
for i=1:p,
disp('i= '); disp(i);
U(:,i)=input(' k-столбец U(i)= ? ');
end; % for
un=2; return;
end; % if key=='p'
if key == 'g', %Гармоническое воздействие
disp('Гармоническое воздействие u=D*sin(w*t+fi)-k-вектор');
disp('введите коэффициенты');
disp('k= '); disp(k);
D=input('k-столбец D= ?');
w=input('k-столбец w= ?');
fi=input('k-столбец фазовый сдвиг fi= ?');
un=3; return;
end; % if key=='g'
if key == 'o', %Отсутствие внешнего воздействия
un=4; return;
end; % if key=='o'
if key == 'z' , %Комбинированное воздействие
un=5;
for i=1:k,
key='d';
type upr.doc;
disp('i= '); disp(i);
while key=='d' | key=='p' | key=='g',
key=input('key= ? [d,p,g] ','s');
if key=='d',

```

```

w0=input('w0= ? ');
    ua(i)=1; key=0;
    end; %if key=='d'
if key=='p',
    w1=input('w1= ? '); w2=input('w2= ? ');
    w3=input('w3= ? ');
    ua(i)=2; key=0;
end; %if key=='p'
if key=='g',
    wd=input('wd= ??'); wq=input('wq= ??');
    wf=input('wf= ? ');
    ua(i)=3; key=0;
end; %if
end; % while
end; % for
return;
    end; % if key=='z'
    end; % while
end; % uk_out

```

7. Заставка функции uk_out.m (uprav.doc):

```

%                ВЫБОР ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ:
%
% Постоянное воздействие      u=u0*1                [d]
% Полиномиальное воздействие  u=U(1)+U(2)*t+...      [p]
% Гармоническое воздействие   u=D*Sin(wt+fi)         [g]
% Отсутствие внешнего возмущения u=0                [o]
% Комбинированное воздействие                                     [z]
%
%                Введите нужное

```

8. Заставка (upr.doc), появляющаяся при выборе комбинированного возмущения:

```

%                ВЫБОР ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ:
%
%                U - k-вектор

```

```
% Элементы данного вектора
% Постоянное воздействие      u(i)=w0                      [d]
% Полиномиальное воздействие  u(i)=w1+w2*t+w3*t*t       [p]
% Гармоническое воздействие   u(i)=wd*Sin(wq+wf)       [g]
%
%                               Введите нужное
```

Функция **utt.m**.

1. Назначение: **utt.m** вычисляет внешнее возмущение $u(t)$ по введенным параметрам на каждом интервале времени dt .
2. Входные параметры – те же, что и выходные параметры в функции **uk_out.m**, а также k – размерность внешнего воздействия, t – время.
3. Выходные параметры: $ut \in \mathbb{R}^k$ – внешнее воздействие, вычисленное в момент времени t .
4. Структура функции – простая.
5. **utt.m** не использует других функций.
6. Текст функции **utt.m**

%Функция вычисления внешнего возмущения $u(t)$

%по введенным параметрам

function[ut]

```
    =utt(t,k,u0,D,w,fi,un,ua,p,w0,w1,w2,w3,wd,wq,wf,U);
```

```
    casesen on;
```

```
    if un == 1, %Постоянное воздействие
```

```
        ut = u0;
```

```
    elseif un == 2, %Полиномиальное воздействие
```

```
        ut = zeros(k,1);
```

```
    for i=1:p;
```

```
        ut = ut+U(:,i)*(t^(i-1));
```

```
    end; % for
```

```
    elseif un == 3, %Гармоническое воздействие
```

```
        for i = 1:k,
```

```
            v(i) = D(i)*sin(w(i)*t+fi(i));
```

```
        end; %for
```

```
            ut = v';
```

```
    elseif un == 4, %Отсутствие внешнего возмущения
```

```
        ut = zeros(k,1);
```

```

else un == 5, %Комбинированное воздействие
    for j = 1:k,
if ua(j) == 1,
    v(j) = w0,
elseif ua(j) == 2,
    v(j) = w1+w2*t+w3*t*t,
else
    v(j) = wd*sin(wq*t+wf),
end; % if
end; % for
    ut=v';
end; % if
end; % utt

```

В главе 7 будут рассмотрены задачи о численном моделировании Чандлеровских колебаний и солнечной активности. При их решении будет использоваться библиотека "ITO-LIN" MatLAB-функций.*

* Эти и другие задачи численного моделирования стохастической динамики, рассмотренные в главе 7, решены с помощью версии 5.2 пакета MatLab (лицензионный номер 90291 от 3 мая 1998 года) в сотрудничестве с Санкт-Петербургской академией аэрокосмического приборостроения с группой по теории кодирования и теории информации.

Глава 7

Примеры численного моделирования стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений

7.1. Выбор числа q при численном моделировании повторных стохастических интегралов

7.1.1. Выбор числа q в случае тригонометрического базиса

Рассмотрим с точки зрения численной реализации вопрос о выборе числа q в суммах, аппроксимирующих повторные стохастические интегралы Стратоновича в случае тригонометрического базиса. Для этого рассмотрим полученные в главе 4 соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{1T,t}^{*(i_1)} - I_{1T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^3}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \\ \mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \\ \mathbb{M} \left\{ \left(I_{2T,t}^{*(i_1)} - I_{2T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^5}{2} \left\{ \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$M \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = (T-t)^3 \left\{ \frac{5}{36} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ \left. - \frac{79}{32\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2 l^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} \right\},$$

$$M \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{2}{9} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ \left. - \frac{25}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{k^2 + l^2}{l^2 (l^2 - k^2)^2} \right\},$$

$$M \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{5}{9} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ \left. - \frac{25}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2 (l^2 - k^2)^2} \right\},$$

где $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$.

Пусть число $q \in N$ удовлетворяет условию:

$$M \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k T,t}^{*(i_1 \dots i_k)} - I_{l_1 \dots l_k T,t}^{*(i_1 \dots i_k)q} \right)^2 \right\} \leq C(T-t)^\gamma, \quad (7.1)$$

где C , γ — ограниченные положительные постоянные. Будем обозначать наименьшее число q , удовлетворяющее условию (7.1), следующим образом:

$$q \stackrel{\text{def}}{=} q_{l_1 \dots l_k}(T-t, \gamma).$$

Рассмотрим численные результаты выбора $q_{l_1 \dots l_k}(T-t, \gamma)$ с помощью приведенных выше соотношений при $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$, $C = 1.0$. Эти результаты помещены в таблицах 7.1–7.3.

7.1.2. Выбор числа q в случае полиномиального базиса

Рассмотрим с точки зрения численной реализации вопрос о выборе числа q в суммах, аппроксимирующих повторные стохастические интегралы Стратоновича в случае полиномиального базиса.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
$q_0(T - t, 3)$	1	1	1	1	1	1	1
$q_{00}(T - t, 3)$	2	5	10	19	39	78	156

Таблица 7.1. Минимальные q при $\gamma = 3$. Тригонометрический базис.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
$q_0(T - t, 4)$	1	1	1	1	1
$q_{00}(T - t, 4)$	39	156	623	2490	9960
$q_1(T - t, 4)$	1	2	3	6	13
$q_{000}(T - t, 4)$	2	3	6	13	26

Таблица 7.2. Минимальные q при $\gamma = 4$. Тригонометрический базис.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
$q_0(T - t, 5)$	1	1	1
$q_{00}(T - t, 5)$	623	4980	39841
$q_1(T - t, 5)$	13	52	208
$q_{000}(T - t, 5)$	26	104	416
$q_{10}(T - t, 5)$	1	1	2
$q_{01}(T - t, 5)$	1	3	5

Таблица 7.3. Минимальные q при $\gamma = 5$. Тригонометрический базис.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
$q_0(T - t, 3)$	1	1	1	1	1	1	1
$q_{00}(T - t, 3)$	1	2	4	8	16	32	64

Таблица 7.4. Минимальные q при $\gamma = 3$. Полиномиальный базис.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
$q_0(T - t, 4)$	1	1	1	1	1	1
$q_{00}(T - t, 4)$	16	64	256	1024	4096	16384
$q_1(T - t, 4)$	2	2	2	2	2	2

Таблица 7.5. Минимальные q при $\gamma = 4$. Полиномиальный базис.

В главе 4, в частности, были получены следующие соотношения в случае полиномиального базиса при $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right), \\
 \mathbf{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbf{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
 &= \frac{(T-t)^4}{16} \left\{ \frac{7}{9} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{4i^2 - 1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим численные результаты выбора $q_{l_1 \dots l_k}(T-t, \gamma)$ с помощью этих соотношений, т.е. для полиномиальной системы функций в предположении, что $i_1 \neq i_2$, $C = 1.0$. Эти результаты помещены в таблицах 7.4–7.7.

Сопоставляя результаты, приведенные в таблицах 7.1–7.7, можно прийти к выводу о том, что для аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича с помощью полиномиальной системы функций требуется генерировать существенно меньшее число независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$q_0(T - t, 5)$	1	1	1	1
$q_{00}(T - t, 5)$	256	2048	16384	131072
$q_1(T - t, 5)$	2	2	2	2
$q_{10}(T - t, 5)$	0	1	2	4
$q_{01}(T - t, 5)$	0	1	2	4

Таблица 7.6. Минимальные q при $\gamma = 5$. Полиномиальный базис.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}
$q_0(T - t, 6)$	1	1
$q_{00}(T - t, 6)$	4096	65536
$q_1(T - t, 6)$	2	2
$q_{10}(T - t, 6)$	9	39
$q_{01}(T - t, 6)$	9	39
$q_2(T - t, 6)$	3	3

Таблица 7.7. Минимальные q при $\gamma = 6$. Полиномиальный базис.

ожиданием и единичной дисперсией, чем при аппроксимации этих интегралов с помощью тригонометрической системы функций. Кроме этого, непосредственно сами выражения для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Стратоновича (см. главу 4), полученные с помощью полиномиальной системы функций, значительно проще, чем выражения для аппроксимаций этих интегралов с помощью тригонометрической системы функций. Поэтому в дальнейшем будем использовать полиномиальную систему функций для аппроксимации повторных стохастических интегралов.

$T - t$	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
$q_0(T - t, 3)$	8	16	32	64	128	256	512
$q_{00}(T - t, 3)$	8	16	32	64	128	256	512

Таблица 7.8. Минимальные q , соответствующие формуле (7.2).

7.1.3. Выбор числа q при аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито с помощью интегральных сумм

В главе 4 рассматривался метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах. Согласно этому методу:

$$I_{0T,t}^{(i_1)q} = \sqrt{\Delta} \sum_{j_1=0}^{q-1} \xi_{j_1}^{(i_1)},$$

$$I_{00T,t}^{(i_2 i_1)q} = \Delta \sum_{j_2=0}^{q-1} \xi_{j_2}^{(i_2)} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \xi_{j_1}^{(i_1)},$$

где $\xi_j^{(i)} = (\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)}) / \sqrt{\Delta}$ — независимые стандартные гауссовские величины при $i \neq 0$ и различных j ; $\xi_j^{(0)} = \sqrt{\Delta}$, $\Delta = (T - t)/q$; $I_{00T,t}^{(i_2 i_1)q}$, $I_{0T,t}^{(i_1)q}$ — аппроксимации интегралов $I_{00T,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0T,t}^{(i_1)}$.

В главе 4 было также показано, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T - t)^2}{2q}. \quad (7.2)$$

Сохраняя смысл обозначения $q_{1\dots k}(T - t, \gamma)$, введенного в предыдущем параграфе, и используя (7.2), получим результаты, помещенные в таблице 7.8.

Из таблиц 7.1-7.8 видно, что метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанный на кратных интегральных суммах, является менее эффективным с точки зрения скорости среднеквадратической сходимости, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье.

7.2. Численное интегрирование модели Блэка-Шоулза

Рассмотрим математическую модель динамики цены акции S_t в виде стохастического дифференциального уравнения Ито (модель Блэка-Шоулза):

$$dS_t = \mu S_t dt + \lambda S_t df_t, \quad (7.3)$$

где $\mu, \lambda, S_t \in \mathbb{R}^1; f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс.

Точное решение уравнения (7.3) имеет вид:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2)t + \lambda f_t}, \quad (7.4)$$

где $t \in [0, T]$.

Введем в рассмотрение дискретную сетку $\{t_j\}_{j=0}^N$, такую что $t_j = j\Delta, t_N = N\Delta = T$. Очевидно, что решение уравнения (7.3) может быть записано на сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$ следующим образом:

$$S_{k+1} = S_k e^{(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2)\Delta + \lambda\sqrt{\Delta}\zeta_{0_{k+1,k}}}, \quad (7.5)$$

где $S_{t_k} \stackrel{\text{def}}{=} S_k; \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(f_{t_{k+1}} - f_{t_k}) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_{0_{k+1,k}}$ – гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Приведем MatLab-программу,* которая реализует численное моделирование решения уравнения (7.3) по формуле (7.5):

%Численное интегрирование модели Блэка-Шоулза

%ввод исходных данных

t0=0; tk=1.2; %промежуток интегрирования

dt=1/(2^10); %шаг интегрирования

S(1)=10; %начальная цена

umu=0.15; ula=0.2; %остальные исходные данные

t=t0:dt:tk;

rand('seed',1428300000);

rand('normal');

l=max(size(t))-1;

*Эта и другие задачи численного моделирования стохастической динамики, рассмотренные в главе 7, решены с помощью версии 5.2 пакета MatLab (лицензионный номер 90291 от 3 мая 1998 года) в сотрудничестве с Санкт-Петербургской академией аэрокосмического приборостроения с группой по теории кодирования и теории информации.

```

r(1)=0;
for j=1:l,
    w=rand; %стандартная гауссовская
             %случайная величина
             %цена акции
    S(j+1)=S(j)*expm((umu-0.5*ula*ula)*dt+ula*(dt^(0.5))*w);
    r(j+1)=j*dt;
end;
plot(r,S); %графическое
grid; %представление
xlabel('t') %решения
ylabel('S(t)')
pause;

```

Смоделируем решение уравнения (7.3) с помощью представления (7.5) при $\mu = 0.15$, $\lambda = 0.2$, $\Delta = 2^{-10}$, $T = 1.2$, $S_0 = 10$. При этом на каждом шаге численного интегрирования для моделирования $\zeta_{0_{k+1},k}$ необходимо осуществлять однократное обращение к генератору гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1. Результат численного моделирования представлен на рис.7.1. На нем отчетливо отражена тенденция возрастания стоимости ценной бумаги, что соответствует выбору коэффициентов μ и λ . Выберем теперь коэффициенты следующим образом: $\mu = -0.3$, $\lambda = 0.2$. Результат численного моделирования решения уравнения (7.3) с новыми параметрами, но на той же реализации последовательности случайных величин $\zeta_{0_{k+1},k}$, что и в предыдущем случае, представлен на рис.7.2. На нем видна общая тенденция убывания стоимости ценной бумаги.

7.3. Исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца

В связи с проблемой турбулентности жидкостей, газов и плазмы значительный интерес вызвала трехмерная дискретная модель конвективной

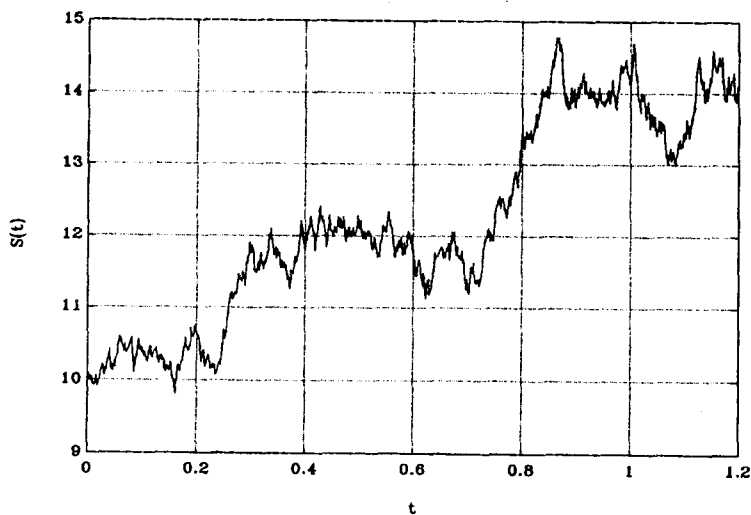


Рис.7.1. Модель Блэка-Шоулза при $\mu = 0.15$, $\lambda = 0.2$.

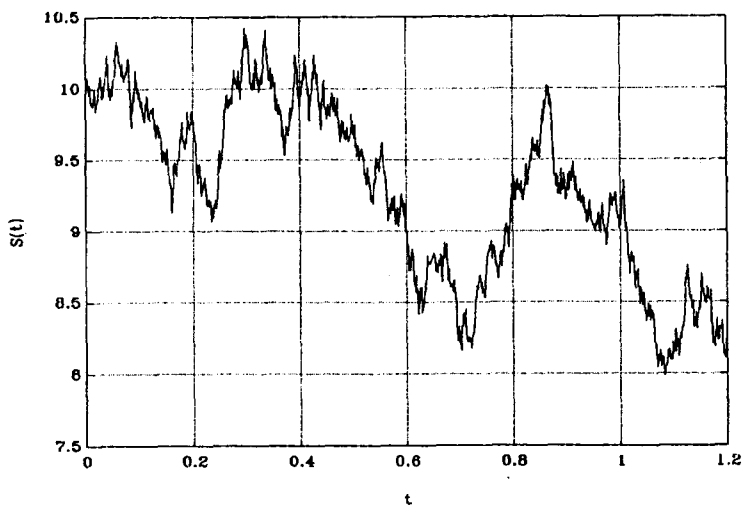


Рис.7.2. Модель Блэка-Шоулза при $\mu = -0.30$, $\lambda = 0.2$.

турбулентности Лоренца, описываемая следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)}(t) &= (-a\mathbf{x}^{(1)}(t) + a\mathbf{x}^{(2)}(t)) dt, \\ d\mathbf{x}^{(2)}(t) &= (r\mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) - \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(3)}(t)) dt, \\ d\mathbf{x}^{(3)}(t) &= (-b\mathbf{x}^{(3)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(2)}(t)) dt. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Известно, что в системе (7.6) при определенном сочетании параметров a , r , b могут возникнуть хаотические движения вокруг двух состояний равновесия. Эти движения можно трактовать как переброс от одного состояния равновесия к другому состоянию равновесия в результате нарастания колебаний возле каждого из них. Эти колебания могут происходить не только от одного неустойчивого состояния равновесия к другому, но и от одного неустойчивого периодического движения к другому. Одно из таких хаотических движений возникает в системе (7.6) при возрастании параметра r и переходе его через значение 24.06 при $b = 8/3$, $a = 10.00$. Это движение носит название странного аттрактора Лоренца.

Произведем численное моделирование системы (7.6) с помощью метода третьего порядка точности (имеется в виду метод, основанный на детерминированной формуле Тейлора) при следующих исходных данных: $t \in [0, 100.00]$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $b = 8/3$, $a = 10.00$. Эволюция фазовых траекторий системы (7.6) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ при значениях $r = 19.8, 20.00, 20.10, 20.30$ представлена на рис.7.3-7.6 соответственно. При этом на графиках выводилась каждая пятая точка, которая соединялась с предыдущей и последующей точками ломаной линией.

Интересным представляется вопрос о поведении системы (7.6) при действии на нее стохастического возмущения. Рассмотрим такую возмущенную систему, понимаемую как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mathbf{x}_t^{(1)} + a\mathbf{x}_t^{(2)} \\ r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \\ -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$ – компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ уравнения (7.7); $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы; a , r , b , c – постоянные.

Представляется естественным, что стохастическое возмущение будет усиливать случайным образом колебания вокруг двух положений равновесия, в результате чего движение, напоминающее странный аттрактор Лоренца, будет рождаться, вообще говоря, при $r < 24.06$. Среднее пороговое значение параметра r , при котором будет рождаться стохастический аналог аттрактора Лоренца, очевидно будет зависеть как от интенсивности стохастического возмущения, т.е. от величины параметра c , так и от промежутка времени наблюдения за системой.

В качестве численного метода для моделирования системы (7.7) возьмем соотношения (3.80)-(3.82) на равномерной дискретной сетке $\{t_j\}_{j=0}^N$, такой что $t_j = j\Delta$, $t_N = N\Delta = T$, а также формулы (4.105)-(4.107) для моделирования стохастических интегралов. В результате получим следующую явную численную схему:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{x}_k^{(1)} + a\Delta \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) + \\ & + a\frac{\Delta^2}{2} \left[-a \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) + r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} \right] - \\ & - ac\mathbf{x}_k^{(1)}\Delta^{5/2} \left[\frac{1}{6}\zeta_{0k+1,k}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1k+1,k}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2k+1,k}^{(3)} \right] + \\ & + a\frac{\Delta^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left(a + r - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) - (a + 1) \times \right. \\ & \times \left. \left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} \right) - \mathbf{x}_k^{(1)} \left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) \right], \quad (7.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = & \mathbf{x}_k^{(2)} + \Delta \left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} \right) - \\ & - c\mathbf{x}_k^{(1)}\Delta^{3/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1k+1,k}^{(3)} - \frac{1}{2}\zeta_{0k+1,k}^{(3)} \right] + \\ & + \frac{\Delta^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left(r - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) - r\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} + \right. \\ & + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} - \mathbf{x}_k^{(1)} \left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left. \right] + \left(a \left(\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} \right) + \right. \\ & + (1 + b)\mathbf{x}_k^{(1)} \left. \right) c\Delta^{5/2} \left[\frac{1}{6}\zeta_{0k+1,k}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1k+1,k}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2k+1,k}^{(3)} \right] + \\ & + ac\Delta^{3/2} \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left[-\frac{1}{6}\zeta_{0k+1,k}^{(3)} + \frac{1}{3\sqrt{20}}\zeta_{2k+1,k}^{(3)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left(-(a+1) \left(r - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) + b\mathbf{x}_k^{(3)} - 2\mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) + \right. \\
& + \left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} \right) \left(\left(r - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) a + 1 - \left(\mathbf{x}_k^{(1)} \right)^2 \right) + \\
& \left. + \left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left(a \left(\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} \right) + \mathbf{x}_k^{(1)}(1+b) \right) \right], \quad (7.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}_{k+1}^{(3)} = \mathbf{x}_k^{(3)} + cI_{0_{s,t}}^{(3)} + \Delta \left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) - \\
& - bc\Delta^{3/2} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{2}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& + \frac{\Delta^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \mathbf{x}_k^{(2)} + \left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} \right) \mathbf{x}_k^{(1)} - \right. \\
& \left. - b \left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) \right] + \\
& + c \left(b^2 - \left(\mathbf{x}_k^{(1)} \right)^2 \right) \Delta^{5/2} \left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& + \frac{\Delta^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left(-a\mathbf{x}_k^{(2)} + r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)} \left(r - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) - b\mathbf{x}_k^{(2)} \right) + \right. \\
& + \left(r\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} \right) \left(-a\mathbf{x}_k^{(1)} + 2a\mathbf{x}_k^{(2)} - (1+b)\mathbf{x}_k^{(1)} \right) + \\
& \left. + \left(-b\mathbf{x}_k^{(3)} + \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(2)} \right) \left(b^2 - \left(\mathbf{x}_k^{(1)} \right)^2 \right) \right], \quad (7.10)
\end{aligned}$$

где $\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}$, $\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)}$, $\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)}$ – стандартные независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, являющиеся независимыми со случайными величинами $\zeta_{0_{p+1,p}}^{(3)}$, $\zeta_{1_{p+1,p}}^{(3)}$, $\zeta_{2_{p+1,p}}^{(3)}$ при $k \neq p$.

Приведем MatLAB-программу, которая реализует численное моделирование решения системы (7.7) по формулам (7.8)-(7.10):

%Численное моделирование системы уравнений Лоренца

%со стохастическим возмущением

hold off

clear

t0=0; tk=100; s=10.0; r=22.00; %задание исходных


```

b=8/3; dt=0.005; sf=2; %данных
t=t0:dt:tk;
x(1)=0.25; y(1)=0.25; z(1)=0.25; %начальное условие
rand('seed',1428300000);
rand('normal');
l=max(size(t))-1;
for j=1:l,
    e=-s*x(j)+s*y(j); %введение
    g=r*x(j)-y(j)-x(j)*z(j); %вспомогательных
    f=-b*z(j)+x(j)*y(j); %переменных e, f, g
    e1=e*(s^2+s*(r-z(j)))-(s^2+s)*...
    g-s*x(j)*f; %введение
    %вспомогательных
    g1=e*((-s-1)*(r-z(j))+b*z(j)-... %переменных
    2*x(j)*y(j))+g*((r-z(j))*s+1-... %e1, g1, f1
    x(j)^2)+f*(-e+x(j)*(b+1));

    f1=e*(2*x(j)*(r-z(j))-(b+1+s)*...
    y(j))+g*(-x(j)*(b+1+s)+2*s*...
    y(j))+f*(b^2-x(j)^2);
    w1=rand; %моделирование стандартных
    w2=rand; %гауссовских случайных
    w3=rand; %величин
    %моделирование стохастических интегралов Ито
    v1=(1/6)*w1-(1/(4*sqrt(3)))*w2+(1/(6*sqrt(20)))*w3;
    v2=-(1/2)*w1+(1/(2*sqrt(3)))*w2;
    v3=-(1/6)*w1+(1/(3*sqrt(20)))*w3;
    %моделирование решения уравнения
%Лоренца со случайным возмущением
    x(j+1)=x(j)+dt*e+((dt^2)/2)*(-s*e+s*g)+... %первая
    ((dt^3)/6)*e1-(dt^(5/2))*s*x(j)*sf*v1; %компонента
    %решения
    y(j+1)=y(j)+dt*g+((dt^2)/2)*((r-z(j))... %вторая
    *e-g-x(j)*f)+((dt^3)/6)*g1-(dt^(3/2))... %компонента
    *sf*x(j)*v2+(dt^(5/2))*(-e+(1+b)*x(j))... %решения
    *sf*v1+(dt^(5/2))*e*sf*v3;

```

```

z(j+1)=z(j)+dt*f+((dt^2)/2)*(e*y(j)+g*...   %третья
x(j)-b*f)+((dt^3)/6)*f1+(dt^(1/2))*sf...   %компонента
*w1-(dt^(3/2))*b*sf*v2+(dt^(5/2))*sf*...   %решения
(b^2-x(j)^2)*v1;
end; %for
l1=(1-1)/5;                                %форммирование массивов
for j=1:l1,                                %первой и второй
    u(j)=x(5*j+1);                          %компонент решения
    w(j)=y(5*j+1);                          %для построения
end; %for                                  %фазового портрета
plot(u,w);                                %построение
grid;                                    %фазового
xlabel('x1(t)')                            %портрета
ylabel('x2(t)')
pause;

```

Произведем численное моделирование решения системы (7.7) с помощью численного метода (7.8)-(7.10) при следующих исходных данных: $t \in [0, 100.00]$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $b = 8/3$, $a = 10.00$, $c = 2.00$, $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = 0.25$. Эволюция фазовых траекторий системы (7.7) на фазовой плоскости $(x_t^{(1)}, x_t^{(2)})$, полученная на одной реализации последовательности случайных величин, входящих в (7.8)-(7.10), при $r = 20.00, 21.00, 23.00$ и 24.30 изображена на рис.7.7-7.10. На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, напоминающие сечение странного аттрактора Лоренца, возникают при значениях $r < 24.06$. Кроме этого, фазовые траектории становятся менее регулярными, чем в детерминированном случае из-за воздействия случайного возмущения на систему (7.7).

Повторим численное моделирование решения системы (7.7) с помощью численного метода (7.8)-(7.10) при тех же исходных данных, что и в предыдущем случае, за исключением параметра c , который увеличим до значения 4.00 . В этом случае эволюция фазовых траекторий системы (7.7) на фазовой плоскости $(x_t^{(1)}, x_t^{(2)})$, полученная на одной (и той же самой, что и в случае $c = 2.00$) реализации последовательности случайных величин, входящих в (7.8)-(7.10), при $r = 11.00, 13.00, 20.00$ и 24.30 изображена на рис.7.11-7.14. На этих рисунках видно, что движе-

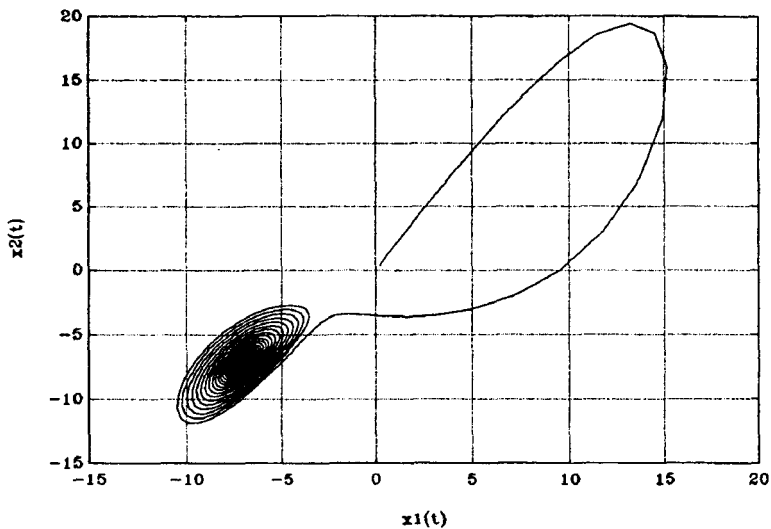


Рис.7.3. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 19.8$.

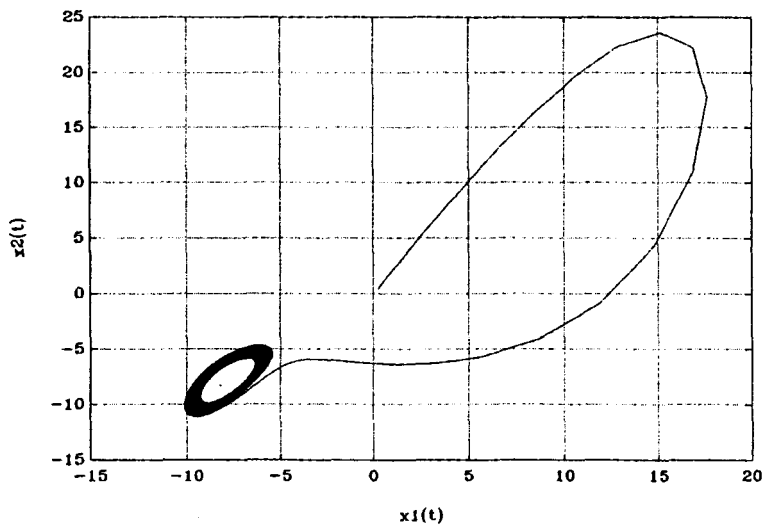


Рис.7.4. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$.

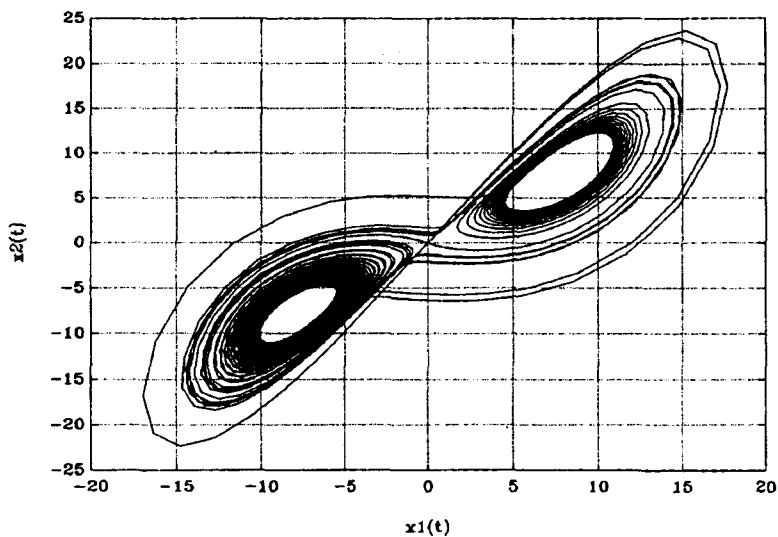


Рис.7.5. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.1$.

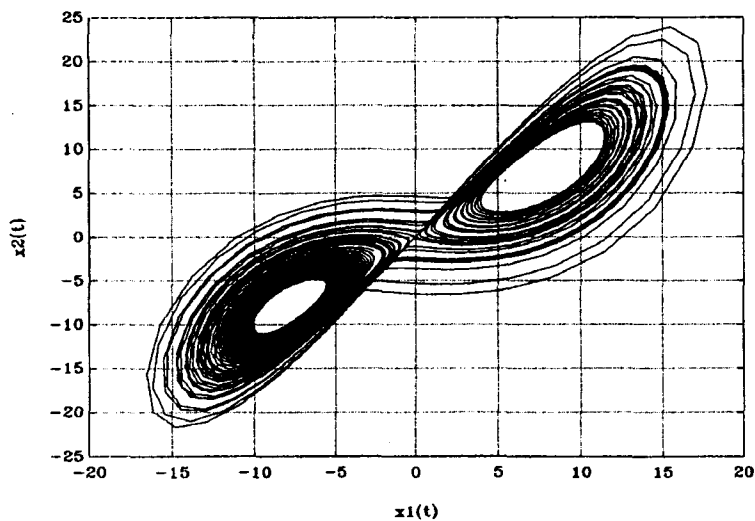


Рис.7.6. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.3$.

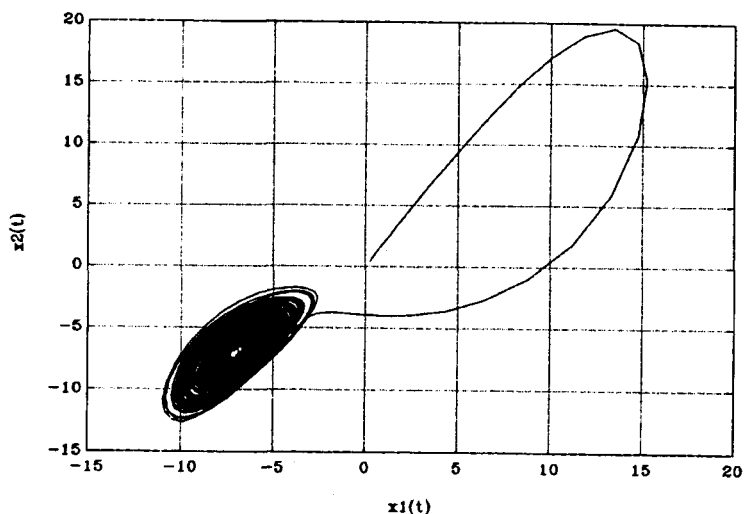


Рис.7.7. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 2.0$.

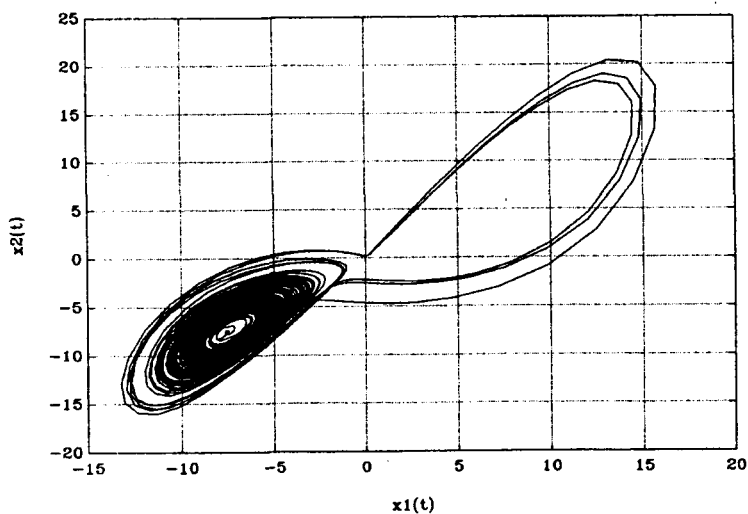


Рис.7.8. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 21.0$, $c = 2.0$.

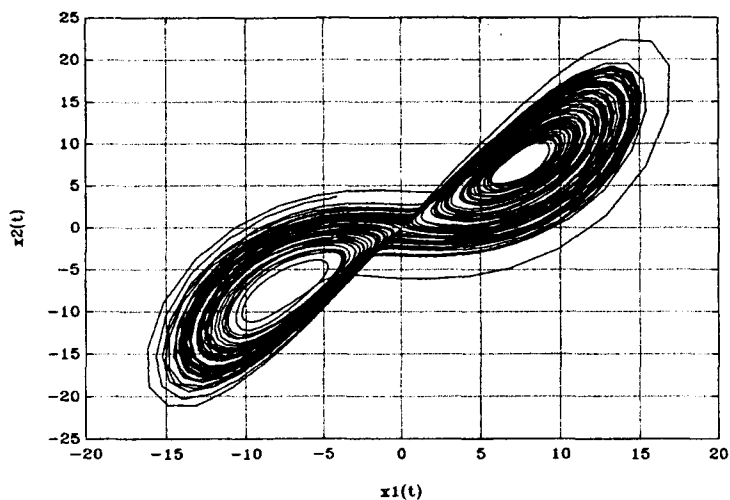


Рис.7.9. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 23.0$, $c = 2.0$.

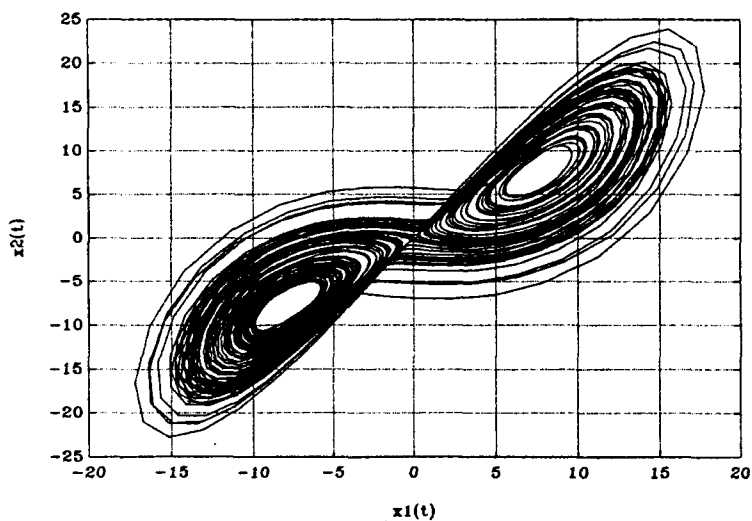


Рис.7.10. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 2.0$.

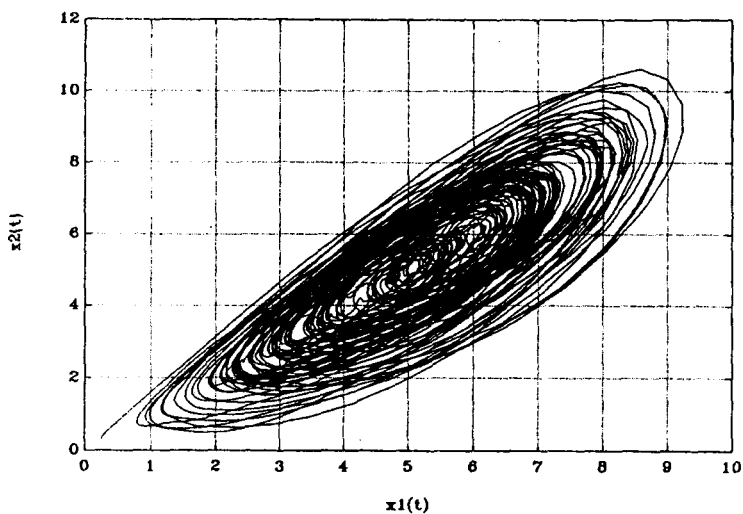


Рис.7.11. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 11.0$, $c = 4.0$.

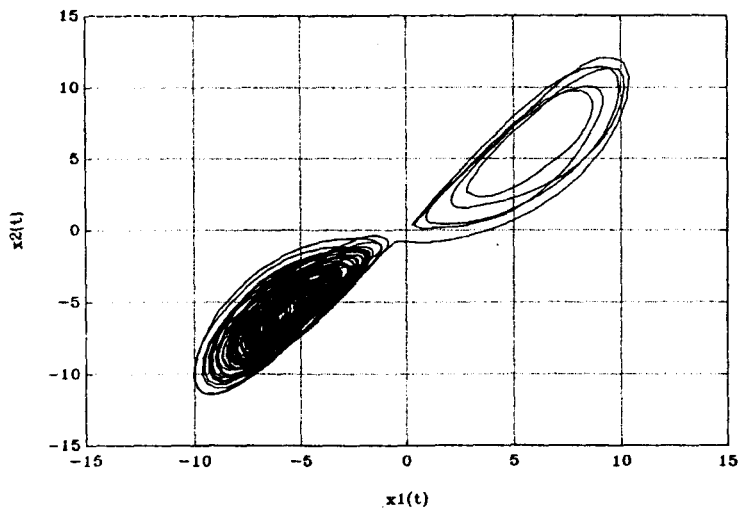


Рис.7.12. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 13.0$, $c = 4.0$.

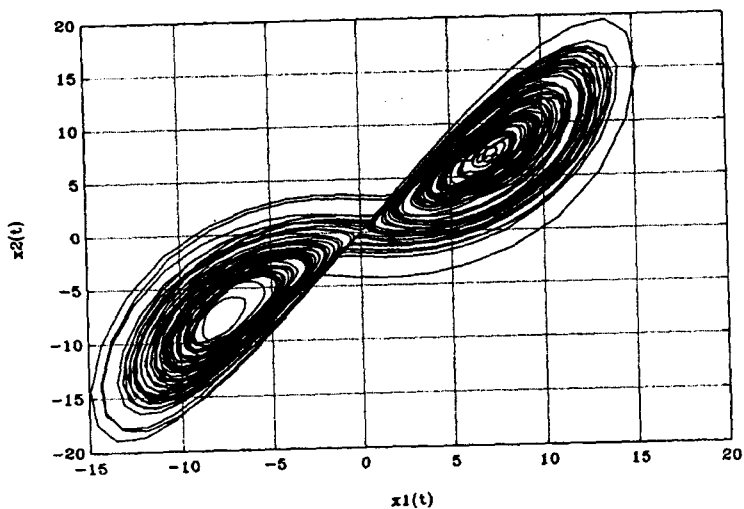


Рис.7.13. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 4.0$.

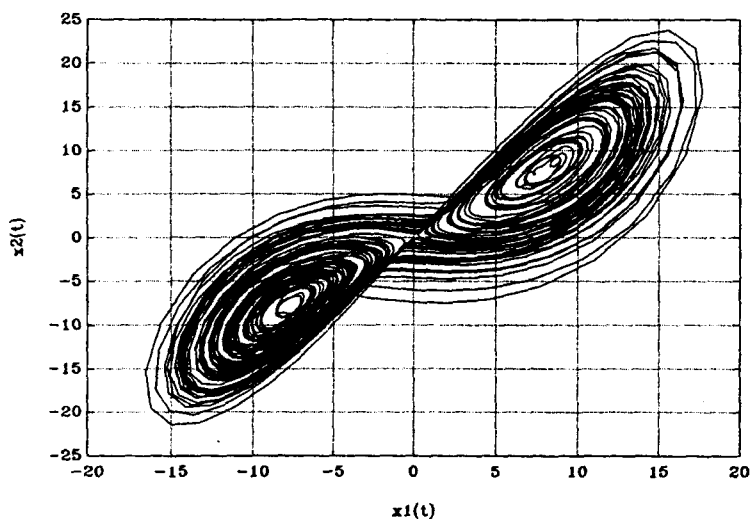


Рис.7.14. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 4.0$.

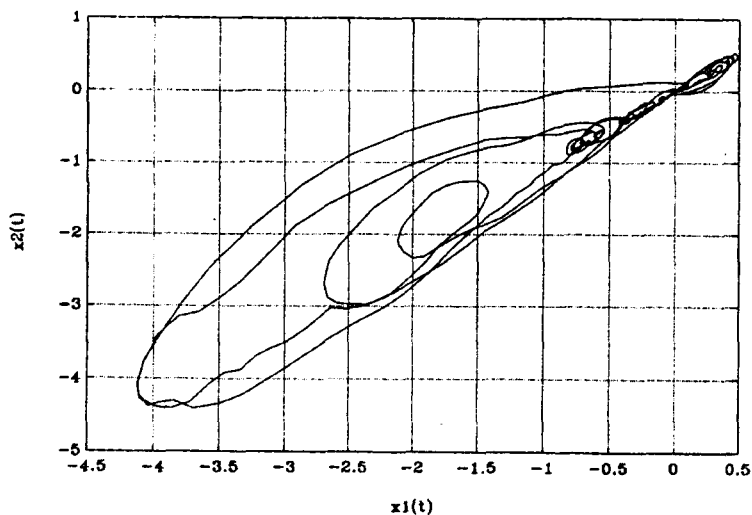


Рис.7.15. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 1.5$, $c = 8.0$.

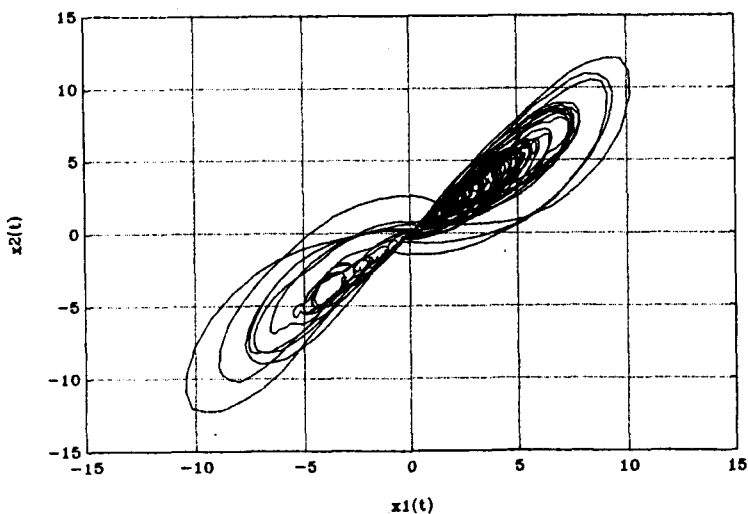


Рис.7.16. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 5.0$, $c = 8.0$.

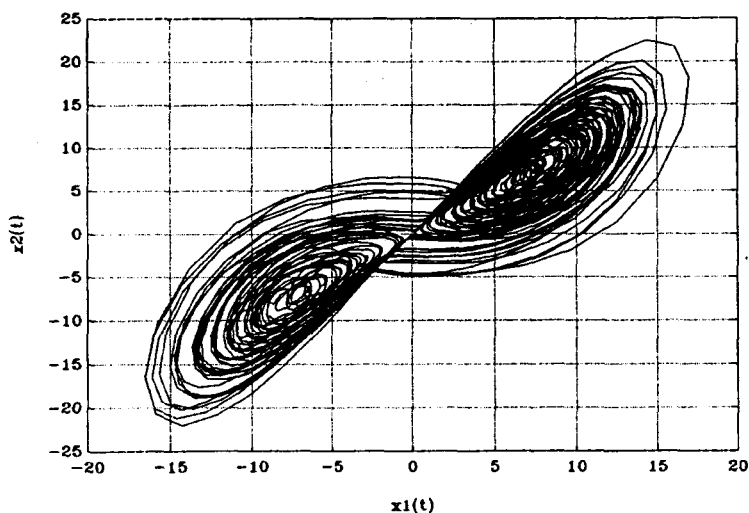


Рис.7.17. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 8.0$.

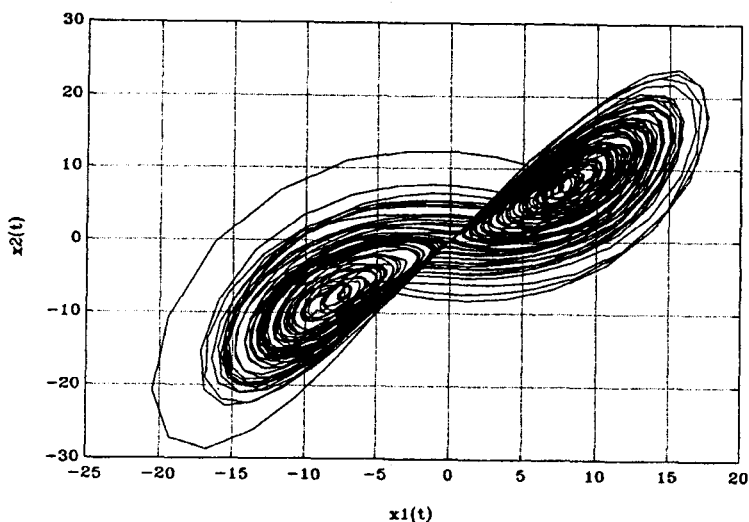


Рис.7.18. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 8.0$.

ния вокруг двух положений равновесия, напоминающие сечение странного аттрактора Лоренца, возникают при значениях r еще более меньших, чем в случае $c = 2.00$. При этом нерегулярность траекторий становится заметной в еще большей степени.

Увеличим теперь значение параметра c до 8.00 и повторим численное моделирование решения системы (7.7) с помощью численного метода (7.8)-(7.10) при тех же значениях остальных параметров и на той же реализации последовательности случайных величин, входящих в (7.8)-(7.10), что и в предыдущих случаях. Результат численного моделирования при $r = 1.50, 5.00, 20.00$ и 24.30 представлен на рис.7.15-7.18. На этих рисунках в еще большей степени, чем при $c = 2.00$ и $c = 4.00$, проявляется нерегулярность фазовых траекторий. Кроме этого, фазовые траектории, отдаленно напоминающие сечение странного аттрактора Лоренца, наблюдаются даже при $r = 5.00$ (рис.7.16).

7.4. Численное интегрирование стохастической модели Лотки-Вольтерра второго порядка

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки-Вольтерра для динамики численностей двух конкурирующих видов или для динамики концентраций двух реагирующих химических веществ:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)}) \mathbf{x}_t^{(1)} \\ (k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)}) \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}$ – численности двух конкурирующих видов (концентрации двух реагирующих веществ); k_1, k_2 – коэффициенты роста численности видов (концентрации веществ); a_1, a_2 – коэффициенты гибели конкурирующих видов (коэффициенты снижения уровня концентраций реагирующих веществ); σ_1, σ_2 – коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)}$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы.

Запишем унифицированное разложение Тейлора-Ито до малых 2-го порядка для процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}$ в окрестности момента времени t :

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} \left[1 + (k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)}) (s - t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma_1 \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left((s-t) I_{0,s,t}^{(1)} + 2 I_{1,s,t}^{(1)} \right) + \\
& + a_1 \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \left((s-t) I_{0,s,t}^{(2)} + I_{1,s,t}^{(2)} \right) + \sigma_1 I_{0,s,t}^{(1)} + \\
& + \sigma_1^2 I_{00,s,t}^{(11)} + \sigma_1^3 I_{000,s,t}^{(111)} \Big] + H_{4,s,t}^{(1)} \text{ с в.1,}
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(2)} &= \mathbf{x}_t^{(2)} \left[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) (s-t) + \right. \\
& + \sigma_2 \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left((s-t) I_{0,s,t}^{(2)} + 2 I_{1,s,t}^{(2)} \right) + \\
& + a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} \left((s-t) I_{0,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(1)} \right) + \sigma_2 I_{0,s,t}^{(2)} + \\
& \left. + \sigma_2^2 I_{00,s,t}^{(22)} + \sigma_2^3 I_{000,s,t}^{(222)} \right] + H_{4,s,t}^{(2)} \text{ с в.1.}
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Используя разложения повторных стохастических интегралов Ито $I_{0,s,t}^{(i)}$, $I_{1,s,t}^{(i)}$, $I_{2,s,t}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) с помощью полиномиального базиса и формулы разложения повторных стохастических интегралов Ито $I_{00,s,t}^{(ii)}$, $I_{000,s,t}^{(iii)}$, ($i = 1, 2$) с помощью полиномов Эрмита, получаем из (7.12), (7.13) при $s = (k+1)\Delta$, $t = k\Delta$, $k = 0, 1, \dots$ следующую численную схему:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1}^{(1)} &= \mathbf{x}_k^{(1)} \left[1 + \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \Delta - \frac{\sigma_1 \Delta^{3/2}}{\sqrt{3}} \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_k^{(2)} \right) \zeta_1^{(1)} + \right. \\
& + a_1 \sigma_2 \mathbf{x}_k^{(2)} \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(2)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(2)} \right) + \sigma_1 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)} + \\
& \left. + \frac{\sigma_1^2 \Delta}{2} \left(\left(\zeta_0^{(1)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\sigma_1^3 \Delta^{3/2}}{6} \left(\left(\zeta_0^{(1)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(1)} \right) \right],
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} &= \mathbf{x}_k^{(2)} \left[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_k^{(1)} \right) \Delta - \frac{\sigma_2 \Delta^{3/2}}{\sqrt{3}} \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_k^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& + a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_k^{(1)} \frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right) + \sigma_2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)} + \\
& \left. + \frac{\sigma_2^2 \Delta}{2} \left(\left(\zeta_0^{(2)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\sigma_2^3 \Delta^{3/2}}{6} \left(\left(\zeta_0^{(2)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(2)} \right) \right],
\end{aligned} \tag{7.15}$$

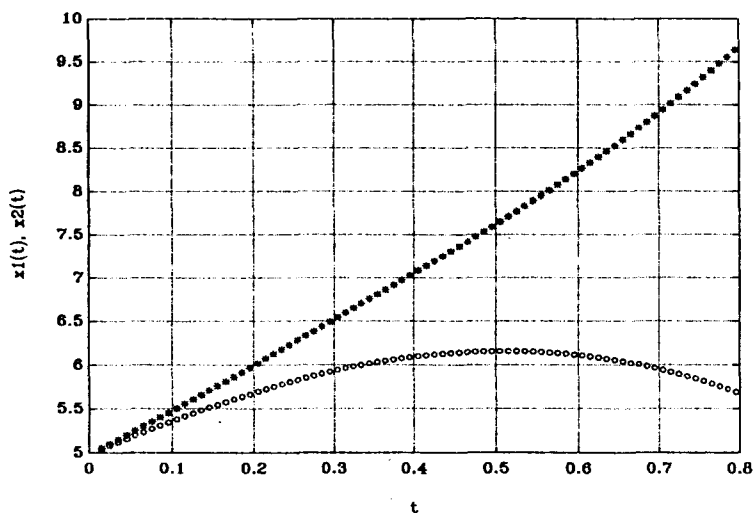


Рис.7.19. Модель Лотки-Вольтерра 2-го порядка при $k_1 = 2.0$, $k_2 = 2.3$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = -0.3$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0$.

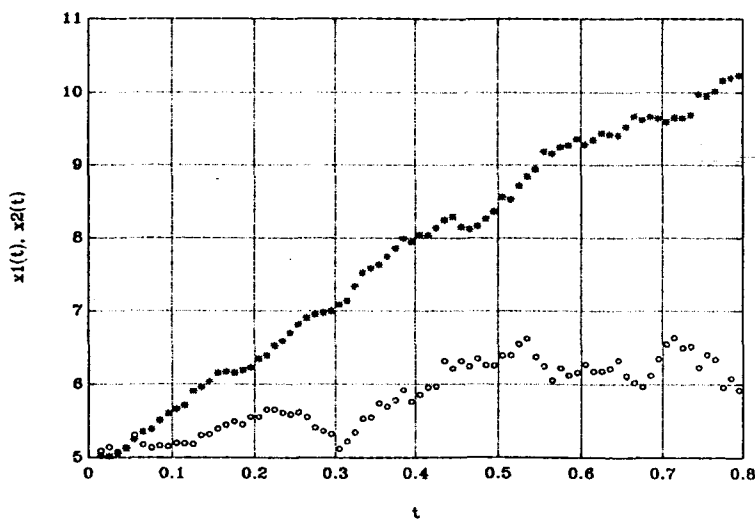


Рис.7.20. Модель Лотки-Вольтерра 2-го порядка при $k_1 = 2.0$, $k_2 = 2.3$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = -0.3$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$.

где так же, как и в предыдущем параграфе, $\mathbf{x}_{k\Delta}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k^{(i)}$ ($i = 1, 2$); Δ – шаг интегрирования; $\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}$ ($i = 1, 2$) – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, которые независимы с аналогичными случайными величинами, генерируемыми на всех предшествующих шагах интегрирования по отношению к текущему шагу интегрирования.

Приведем MatLAB-программу, которая реализует численное моделирование решения системы (7.11) по формулам (7.14), (7.15):

%Модель Лотки-Вольтерра второго порядка

%со стохастическим возмущением

%ввод исходных данных

t0=0; tk=0.8; **%промежуток интегрирования**

dt=0.005; **%шаг интегрирования**

x(1)=5; y(1)=5; **%начальные условия**

s1=0.1; s2=0.2; **%остальные**

uk1=2.0; uk2=2.3; **%исходные**

a1=-0.2; a2=-0.3; **%данные**

t=t0:dt:tk;

rand('seed',1428300000);

rand('normal');

l=max(size(t))-1;

for j=1:l,

w1=rand; w2=rand; **%стандартные гауссовские**

v1=rand; v2=rand; **%случайные величины**

%численное моделирование повторных

%стохастических интегралов Ито

wi1=-((dt^(1.5))/(sqrt(3)))*w1;

wi2=0.5*(dt^(1.5))*(w1-(1/(3^(0.5))))*w2);

wi3=(dt^(0.5))*w1;

wi4=(dt/2)*(w1^2-1);

wi5=((dt^(1.5))/6)*(w1^3-3*w1);

vi1=-((dt^(1.5))/(sqrt(3)))*v1;

vi2=0.5*(dt^(1.5))*(v1-(1/(sqrt(3))))*v2);

vi3=(dt^(0.5))*v1;

vi4=(dt/2)*(v1^2-1);

vi5=((dt^(1.5))/6)*(v1^3-3*v1);

```

                                %моделирование решения
x(j+1)=x(j)*(1+(uk1+a1*y(j))*dt+... %первая
s1*(uk1+a1*y(j))*wi1+a1*s2*y(j)*... %компонента
vi2+s1*wi3+(s1^2)*wi4+(s1^3)*wi5); %решения

y(j+1)=y(j)*(1+(uk2+a2*x(j))*dt-... %вторая
s2*vi1*(uk2+a2*x(j))+a2*s1*x(j)*... %компонента
wi2+s2*vi3+(s2^2)*vi4+(s2^3)*vi5); %решения
r(j)=j*dt;
end;

l1=(1-1)/2; %формирование
for j=1:l1, %массивов
    u(j)=x(2*j+1); %для графического
    v(j)=y(2*j+1); %вывода
    z(j)=r(2*j+1);
end;
plot(z,v,'o',z,u,'*'); %графический
grid; %вывод
xlabel('t') %решения
ylabel('x1(t), x2(t)')
pause;

```

Смоделируем решение системы (7.11) при следующих исходных данных: $k_1 = 2.0$, $k_2 = 2.3$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = -0.3$, $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 5$, $\sigma_1 = 0.0$, $\sigma_2 = 0.0$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $t \in [0, 0.8]$. Результат численного моделирования представлен на рис.7.19. Введем теперь стохастическое возмущение, т.е. положим $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$ и повторим моделирование системы (7.11), оставив другие исходные данные прежними. На рис.7.20 изображено поведение в этом случае обеих компонент решения системы (7.11) в зависимости от времени.

7.5. Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг

В финансовой математике, наряду с многочисленными математическими моделями, встречается следующая модель динамики доходности

портфеля ценных бумаг в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ \dots \\ d\mathbf{x}_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \dots \\ \mathbf{m}^{(n)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} \dots B^{(1m)} \\ \dots \\ B^{(n1)} \dots B^{(nm)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ \dots \\ d\mathbf{f}_t^{(m)} \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

где $\mathbf{x}_t^{(i)}$ – доходность i -й ценной бумаги; $\mathbf{m}^{(i)}$ – средний уровень доходности i -й ценной бумаги; γ – импирический коэффициент; $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}$ – средняя доходность по множеству ценных бумаг; $\|B^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$ – числовая матрица, характеризующая перемешивание; $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \dots, m)$ – независимые стандартные винеровские процессы.

Рассмотрим модель вида (7.16) при $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ d\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \mathbf{m}^{(2)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{2}(\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)})} \begin{bmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ d\mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

Упражнение 7.1. Показать, что метод Мильштейна для системы (7.17) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{m}^{(1)} \Delta + e^{\frac{\gamma}{2}(\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)})} \left(B^{(11)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} + B^{(12)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right) + \\ & + \frac{\gamma}{2} e^{\gamma(\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)})} \left[B^{(11)} (B^{(11)} + B^{(21)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} \right)^2 - \Delta \right) + \right. \\ & + B^{(11)} (B^{(12)} + B^{(22)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q} + B^{(12)} (B^{(11)} + B^{(21)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q} + \\ & \left. + B^{(12)} (B^{(12)} + B^{(22)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right)^2 - \Delta \right) \right], \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = & \mathbf{x}_k^{(2)} + \mathbf{m}^{(2)} \Delta + e^{\frac{\gamma}{2}(\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)})} \left(B^{(21)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} + B^{(22)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right) + \\ & + \frac{\gamma}{2} e^{\gamma(\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)})} \left[B^{(21)} (B^{(11)} + B^{(21)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} \right)^2 - \Delta \right) + \right. \\ & + B^{(21)} (B^{(12)} + B^{(22)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q} + B^{(22)} (B^{(11)} + B^{(21)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q} + \\ & \left. + B^{(22)} (B^{(12)} + B^{(22)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right)^2 - \Delta \right) \right], \end{aligned} \quad (7.19)$$

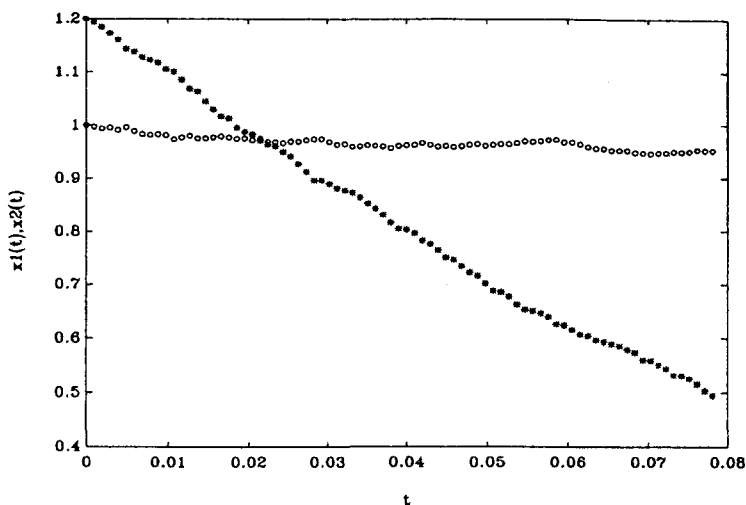


Рис.7.21. Моделирование доходности портфеля ценных бумаг ($n = 2$) при $\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}^{(2)} = 1.0$, $B^{(11)} = -0.1$, $B^{(22)} = -0.2$, $B^{(12)} = 0.05$, $B^{(21)} = -0.05$.

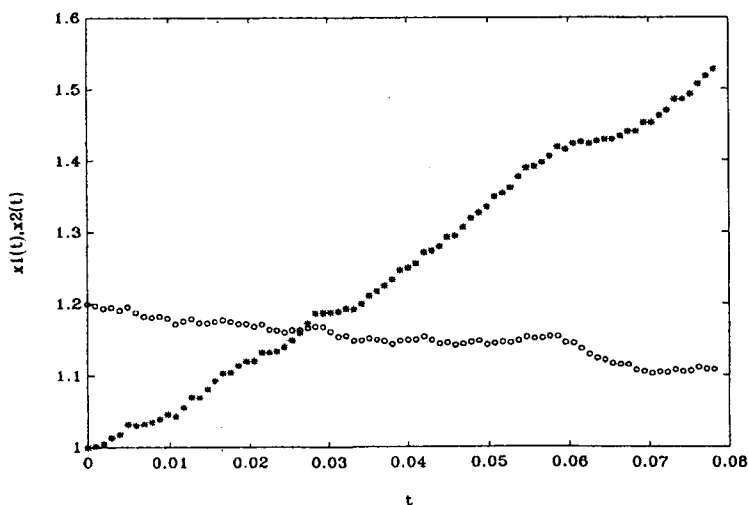


Рис.7.22. Моделирование доходности портфеля ценных бумаг ($n = 2$) при $\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}^{(2)} = 1.0$, $B^{(11)} = -0.1$, $B^{(22)} = 0.15$, $B^{(12)} = 0.05$, $B^{(21)} = -0.05$.

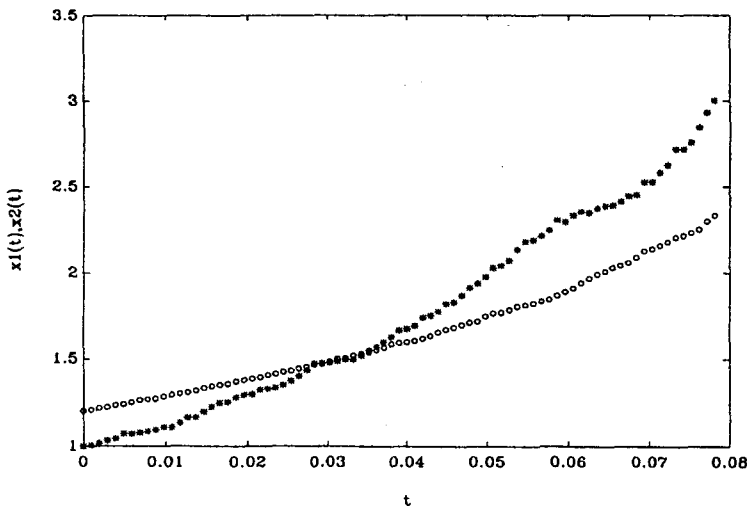


Рис.7.23. Моделирование доходности портфеля ценных бумаг ($n = 2$) при $\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}^{(2)} = 1.0$, $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.3$, $B^{(12)} = 0.05$, $B^{(21)} = -0.05$.

В формулах (7.18), (7.19) аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито имеют следующий вид:

$$I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)}, \quad I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(2)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)}, \quad (7.20)$$

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(21)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left(\zeta_{2r}^{(1)} \zeta_{2r-1}^{(2)} - \zeta_{2r-1}^{(1)} \zeta_{2r}^{(2)} + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(1)} \zeta_0^{(2)} - \zeta_0^{(1)} \zeta_{2r-1}^{(2)} \right) \right) \right], \quad (7.21)$$

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(12)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(2)} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left(\zeta_{2r}^{(2)} \zeta_{2r-1}^{(1)} - \zeta_{2r-1}^{(2)} \zeta_{2r}^{(1)} + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(2)} \zeta_0^{(1)} - \zeta_0^{(2)} \zeta_{2r-1}^{(1)} \right) \right) \right] \quad (7.22)$$

или

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(21)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left(\zeta_{r-1}^{(2)} \zeta_r^{(1)} - \zeta_r^{(2)} \zeta_{r-1}^{(1)} \right) \right], \quad (7.23)$$

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(12)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(2)} \zeta_0^{(1)} + \sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left(\zeta_{r-1}^{(1)} \zeta_r^{(2)} - \zeta_r^{(1)} \zeta_{r-1}^{(2)} \right) \right], \quad (7.24)$$

где $\mathbf{x}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_k^{(i)} (i = 1, 2); k\Delta \stackrel{def}{=} \tau_k; \zeta_j^{(i)} (j = 0, 1, \dots, 2q; i = 1, 2)$ – независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями; Δ – шаг интегрирования численного метода.

Число q в соотношениях (7.21), (7.22) выбирается из следующего условия:

$$\frac{3\Delta^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq C\Delta^3, \quad (7.25)$$

где $C = const < \infty$.

Если для аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(21)}, I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(12)}$ используются соотношения (7.23), (7.24), то число q в них должно выбираться из следующего условия:

$$\frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{1}{2} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{4r^2 - 1} \right) \leq C\Delta^3, \quad (7.26)$$

где $C = const < \infty$.

Следует отметить, что на шаге интегрирования с номером k система случайных величин $\zeta_j^{(i)} (j = 0, 1, \dots, 2q; i = 1, 2)$ в случае (7.21), (7.22) или система случайных величин $\zeta_j^{(i)} (j = 0, 1, \dots, q; i = 1, 2)$ в случае (7.23), (7.24) должна генерироваться независимой по отношению к аналогичным системам случайных величин на всех предшествующих шагах интегрирования с номерами $1, 2, \dots, k-1$.

Постоянная C в правой части условий (7.25), (7.26) входит в условие (5.4) теоремы 5.1 и должна быть задана. Выберем ее, например, равной единице.

Приведем MatLab-программу, которая реализует численное моделирование решений системы (7.17) с помощью численной схемы (7.18), (7.19), (7.20), (7.23), (7.24).

```
%Численное моделирование динамики доходности
%портфеля ценных бумаг
```

```
%ввод исходных данных
```

```
n=80; %количество шагов интегрирования
```

```
dt=2^(-10); %шаг интегрирования
```

```
x1(1)=1.2; x2(1)=1.0; %начальные условия
```

```
tk(1)=0; %начало промежутка интегрирования
```

```

q=64; %остальные
b11=0.1; b12=0.05; %исходные
b21=-0.05; b22=0.3; %данные
um1=1; um2=1; gam=1; %вспомогательные переменные

b1=b11*(b11+b21); r1=b11*(b12+b22);
g1=b12*(b11+b21); a1=b12*(b12+b22);
b2=b21*(b11+b21); r2=b21*(b12+b22);
g2=b22*(b11+b21); a2=b22*(b12+b22);
%моделирование повторных
%стохастических интегралов Ито
rand('seed',1428300000);
rand('normal');
for i=1:n,
    w=rand(1,q+1); %массивы стандартных
    v=rand(1,q+1); %гауссовских случайных величин
    s=w(1,1)*v(1,1); %вспомогательные
    s1=w(1,1)*v(1,1); %переменные
    for j=1:q, %вычисление вспомогательных случайных
        %случайных величин, необходимых для
        %моделирования стохастических интегралов
        s=s+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(w(1,j)*v(1,j+1)-w(1,j+1)*v(1,j));
        s1=s1+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(v(1,j)*w(1,j+1)-v(1,j+1)*w(1,j));
    end;
    uj0021=0.5*dt*s; %численное
    uj0012=0.5*dt*s1; %моделирование
    uj01=(sqrt(dt))*v(1,1); %повторных
    uj02=(sqrt(dt))*w(1,1); %стохастических
    uj0011=0.5*(uj01^2-dt); %интегралов
    uj0022=0.5*(uj02^2-dt); %Ито
    f1=exp(gam*(x1(i)+x2(i))); %вспомогательные
    f=exp(0.5*gam*(x1(i)+x2(i))); %переменные
    %моделирование решения
    x1(i+1)=x1(i)+um1*dt+f*(b11*uj01+... %первая
    b12*uj02)+0.5*gam*f1*(b1*uj0011+... %компонента
    r1*uj0021+g1*uj0012+a1*uj0022); %решения

```

```

x2(i+1)=x2(i)+um2*dt+f*(b21*uj01+... %вторая
b22*uj02)+0.5*gam*f1*(b2*uj0011+... %компонента
r2*uj0021+g2*uj0012+a2*uj0022); %решения
tk(i+1)=tk(i)+dt;
end;
plot(tk,x1,'o',tk,x2,'*') %графический
xlabel('t') %вывод
ylabel('x1(t),x2(t)') %решения

```

Произведем численное моделирование решения системы (7.17) с помощью метода Мильштейна (7.18), (7.19) и соотношений (7.20), (7.23), (7.24) при следующих исходных данных: $\Delta = 2^{-10}$, $C = 1.0$, $\gamma = 1$, $\mathbf{m}^{(1)} = 1.0$, $\mathbf{m}^{(2)} = 1.0$, $B^{(11)} = -0.1$, $B^{(22)} = -0.2$, $B^{(12)} = 0.05$, $B^{(21)} = -0.05$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 1.0$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1.2$, число итераций $n = 80$. Результат численного моделирования представлен на рис.7.21. На этом рисунке видна тенденция к уменьшению доходности ценных бумаг. Повторим численное моделирование решения системы (7.17) при тех же условиях, за исключением значений $\mathbf{x}_0^{(1)}$, $\mathbf{x}_0^{(2)}$, $B^{(22)}$, которые выберем следующими: $\mathbf{x}_0^{(1)} = 1.2$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1.0$, $B^{(22)} = 0.15$. На рис.7.22 отражена динамика системы (7.17) при этих начальных данных. Изменим значения $B^{(11)}$, $B^{(22)}$, по сравнению с предыдущим случаем, положив: $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.3$. При этом значения остальных исходных данных оставим такими же, как в предыдущем случае. Результат численного моделирования системы (7.17) при этих условиях изображен на рис.7.23. На нем отражена тенденция роста доходности ценных бумаг. Во всех трех рассмотренных случаях для численного моделирования решения системы (7.17) бралась одна и та же реализация случайных величин.

7.6. Численное моделирование чандлеровских колебаний

Запишем математическую модель в виде СЛСДУ [17], которая описывает чандлеровские колебания:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{x}_t^{(1)} \\ d\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)} \\ d\mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

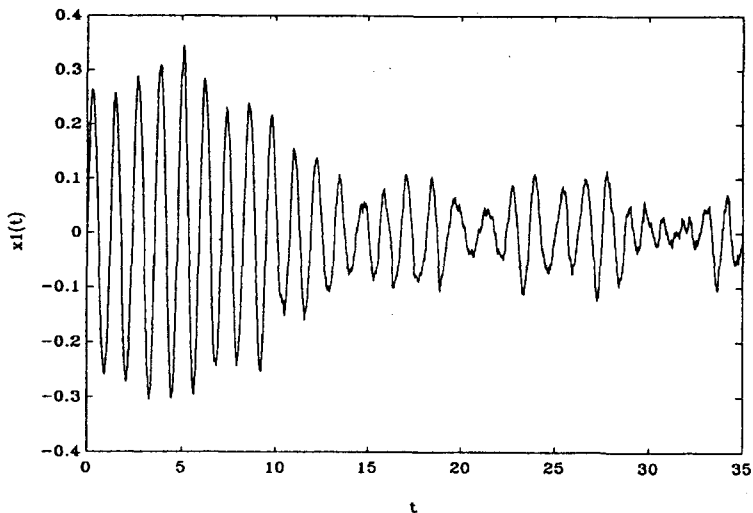


Рис.7.24. Моделирование чандлеровских колебаний при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

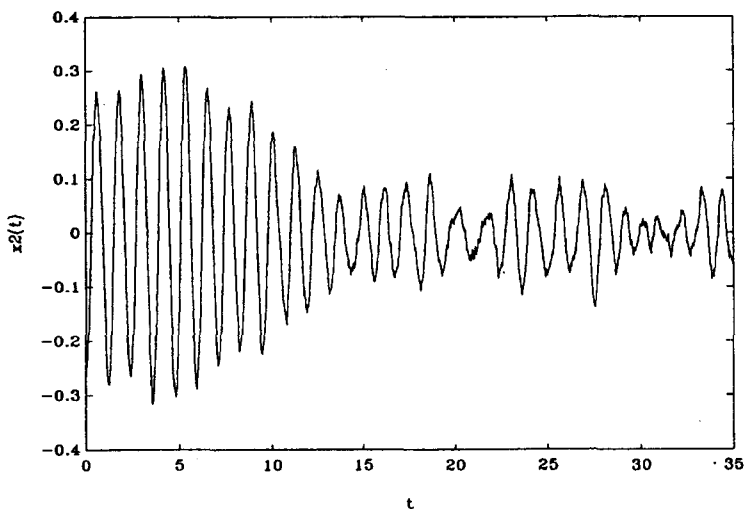


Рис.7.25. Моделирование чандлеровских колебаний при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

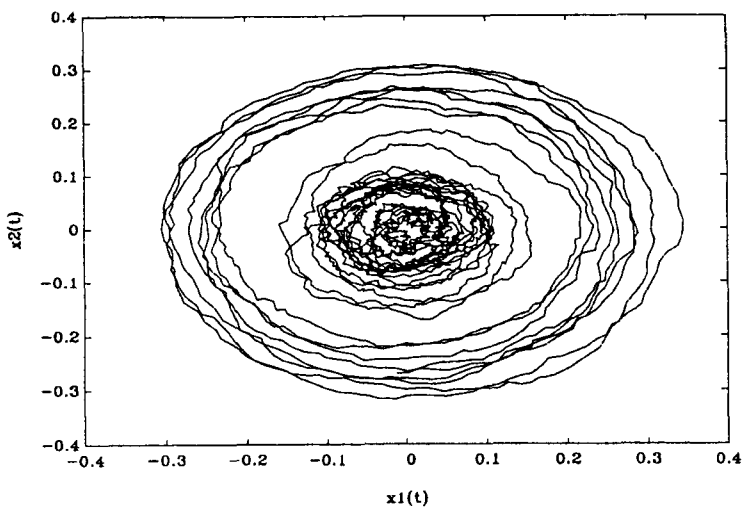


Рис.7.26. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

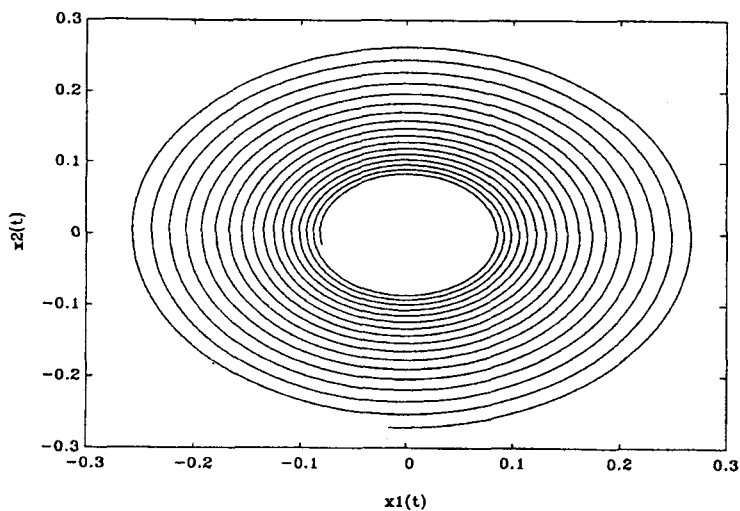


Рис.7.27. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при $\lambda = 0.06$, $a = 0.0$, $\omega = 5.274$.

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^1$ – случайные процессы, определяющие положение северного полюса Земли; $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^1$ – независимые стандартные винеровские процессы; $\frac{\omega}{2\pi}$ (циклы в год) – частота; $\frac{1}{\lambda}$ (лет) – релаксация; a – интенсивность случайных возмущений.

Согласно оценкам, полученным в работах [19], [17], параметры λ , a , ω имеют следующие значения:

$$\lambda = 0.06 \left(\frac{1}{\text{год}} \right), \quad a = 0.035'', \quad \omega = 5.274.$$

Выберем следующие исходные (на начало 1968 года) данные, которые зарегистрированы Международной Службой Широты: $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}(0) = -0.03''$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)}(0) = -0.27''$.

Произведем численное моделирование решения СЛСДУ (7.27) на временном интервале в 35 лет с шагом 0.01 года с помощью точного интегрального представления решения этой системы и алгоритмов (6.1-6.7), полученных в главе 6.

На рис.7.24, 7.25 показано поведение процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$ и $\mathbf{x}_t^{(2)}$ с течением времени, а на рис.7.26 показаны фазовые траектории системы (7.27). Если положить $a = 0.00''$, то фазовые траектории системы (7.27) примут вид, изображенный на рис.7.27.

7.7. Численное моделирование солнечной активности

Рассмотрим СЛСДУ [17], которая описывает солнечную активность без учета ее среднего значения:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (7.28)$$

где x_t – количество солнечных пятен, $f_t \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; a_1 , a_2 , c – постоянные.

По данным Е.Е.Слуцкого [28], период T_0 колебаний солнечной активности равен 11.103 лет; $\sqrt{a_2} = \frac{2\pi}{T_0} = 0.5661$; $\lambda = \frac{a_1}{2} = 0.07$. Параметр c определен в [17] и равен 5.08. Согласно числам Вольфера (см. рис.1.11, [17]), на начало 1821г. приходилось порядка 7 солнечных пятен. Это число примем за $x_0 = x(0)$. Примем также $y_0 = y(0) = -0.25$

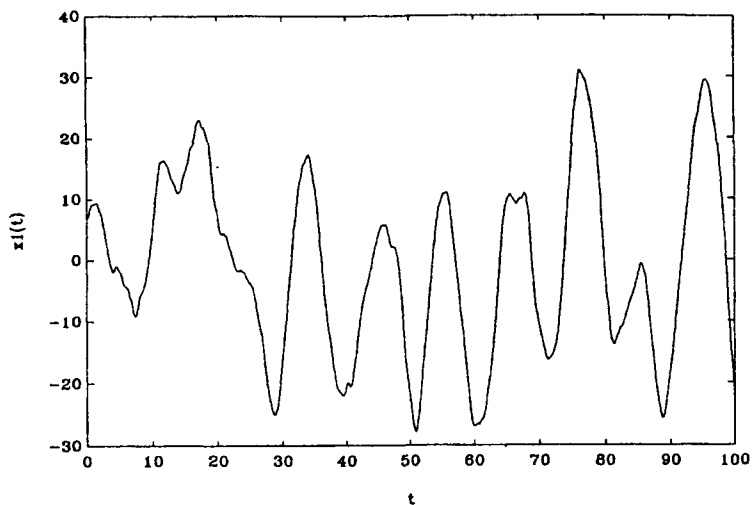


Рис.7.28. Моделирование солнечной активности при $\lambda = 0.07$, $\sqrt{a_2} = 0.5661$, $c = 5.08$.

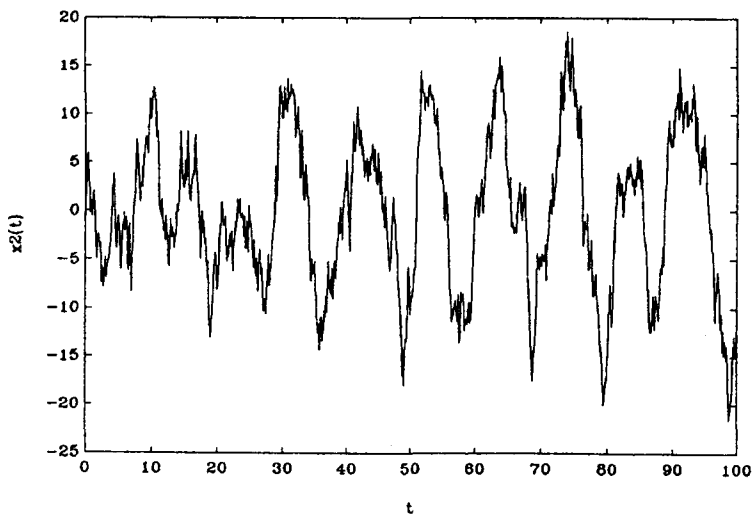


Рис.7.29. Моделирование солнечной активности при $\lambda = 0.07$, $\sqrt{a_2} = 0.5661$, $c = 5.08$.

(см. рис.1.4). Произведем численное моделирование решения уравнения (7.28) на временном интервале с 1821 по 1921 гг. с шагом 0.1 года при этих исходных данных. Результат численного моделирования представлен на рис.5.28, 5.29. На рис.7.28 показана зависимость количества солнечных пятен, без учета среднего значения, от времени. На этом рисунке просматривается периодичность колебаний приблизительно равная 11 годам, что соответствует экспериментальным данным.

7.8. Исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера

Рассмотрим систему уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \quad (7.29)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \mathbf{x}_t^{(3)} \in \mathbb{R}^1$ – компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ системы (7.29); $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \mathbb{R}^1$ – стандартный винеровский процесс; e, f, μ, c – параметры.

В конце главы 3 были приведены унифицированные разложения Тейлора-Ито (3.84)-(3.86) для компонент решения $\mathbf{x}_t$ системы (7.29) до малых $O((s-t)^{5/2})$. Положим в этих разложениях $s = (k+1)\Delta$; $t = k\Delta$; $k = 0, 1, \dots$ и аппроксимируем повторные стохастические интегралы Ито, входящие в (3.84)-(3.86), с помощью методов, изложенных в главе 4. В результате получим следующие выражения для численного метода, основанные на представлениях (3.84)-(3.86):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{x}_k^{(1)} + \Delta \left(-\mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) + c\mathbf{x}_k^{(3)} \left[\Delta I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \right] + \\ & + \frac{\Delta^2}{2} \left[-\mathbf{x}_k^{(1)} - e\mathbf{x}_k^{(2)} - f - \mathbf{x}_k^{(1)}\mathbf{x}_k^{(3)} + \mu\mathbf{x}_k^{(3)} \right] - \\ & - c^2\mathbf{x}_k^{(3)} \left[I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} + \Delta I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} \right], \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{x}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{x}_k^{(2)} + \Delta \left(\mathbf{x}_k^{(1)} + e\mathbf{x}_k^{(2)} \right) + \frac{\Delta^2}{2} \left[-\mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(3)} + e \left(\mathbf{x}_k^{(1)} + e\mathbf{x}_k^{(2)} \right) \right], \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{(3)} = & \mathbf{x}_k^{(3)} - c\mathbf{x}_k^{(3)} I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + \Delta \left(f + \mathbf{x}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(3)} - \mu \mathbf{x}_k^{(3)} \right) + \\ & + c^2 \mathbf{x}_k^{(3)} I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} + c\mathbf{x}_k^{(3)} \left(\mu - \mathbf{x}_k^{(1)} \right) \left[\Delta I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \right] + \\ & + c \left(f + \mathbf{x}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(3)} - \mu \mathbf{x}_k^{(3)} \right) I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} - c^3 \mathbf{x}_k^{(3)} I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(111)} + \\ & + \frac{\Delta^2}{2} \left[\left(-\mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_k^{(3)} \right) \mathbf{x}_k^{(3)} + \left(f + \mathbf{x}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(3)} - \mu \mathbf{x}_k^{(3)} \right) \left(\mathbf{x}_k^{(1)} - \mu \right) \right] + \\ & + c^2 \mathbf{x}_k^{(3)} \left(\mathbf{x}_k^{(1)} - \mu \right) \left[I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} - I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} \right] - \\ & - c^2 \left(f + \mathbf{x}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(3)} - \mu \mathbf{x}_k^{(3)} \right) I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} - \\ & - c^2 \mathbf{x}_k^{(3)} \left(\mu - \mathbf{x}_k^{(1)} \right) \left[I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} + \Delta I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} \right] + \\ & + c^4 \mathbf{x}_k^{(3)} I_{0000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1111)}, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где

$$\begin{aligned} I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} &= \sqrt{\Delta} \zeta_0, \\ I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} &= \frac{1}{2} \Delta \left[(\zeta_0)^2 - 1 \right], \\ I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} &= -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left[\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right], \\ I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(111)} &= \frac{\Delta^{3/2}}{6} \left[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0 \right], \\ I_{0000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1111)} &= \frac{\Delta^2}{24} \left[(\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3 \right], \\ I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} &= -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{4}{3} (\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0 \zeta_1 + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0 \zeta_2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i \zeta_{i+2} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} (\zeta_i)^2 \right\} - 2 \right], \end{aligned}$$

$$I_{10_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{2} \zeta_0 \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right) - I_{01_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)q}, \quad (7.33)$$

где $\tau_k \stackrel{def}{=} k\Delta$; $\mathbf{x}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}_k^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$); ζ_j ($j = 0, 1, \dots, q+2$) – система независимых гауссовских случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, которая генерируется на шаге интегрирования с номером k и является независимой с аналогичными системами случайных величин, которые генерируются на всех предшествующих шагах интегрирования по отношению к шагу интегрирования с номером k ; число q выбирается из условия:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)} - I_{10_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)q} \right)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^4}{16} \left[\frac{3}{16} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{i^4} \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right)^2 \right] \leq C\Delta^5, \end{aligned}$$

где постоянная C входит в условие (5.4) теоремы 5.1 и должна быть задана. Выберем ее для простоты равной единице.

Следует отметить, что соотношение (7.33) следует из соотношения:

$$I_{10_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)} + I_{01_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(11)} = I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} I_{1_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)},$$

которое может быть получено, например, с помощью теоремы о замене порядка интегрирования (см. главу 2) или с помощью формулы Ито.

Приведем MatLAB-программу, которая реализует численное моделирование решения системы (7.29) с помощью численной схемы (7.30)-(7.32):

```
%Численное моделирование системы уравнений Ресслера
%под действием стохастических возмущений
%ввод исходных параметров
t0=0; tk=3; %промежуток интегрирования
с=3.46; e=0.2; f=0.2; um=5.7; %параметры системы
%уравнений Ресслера
x1(1)=0.1; x2(1)=0.1; x3(1)=0.1; %начальные условия
dt=0.03; %шаг интегрирования
%моделирование решений системы уравнений
%Ресслера при стохастическом возмущении
```

```

t=t0:dt:tk;
rand('seed',1428300000);
rand('normal');
l=max(size(t))-1;
    for i=1:l,
        z0=rand;           %стандартные гауссовские
        z1=rand; z2=rand;   %случайные величины
        z3=rand; z4=rand;

        %численное моделирование повторных
        %стохастических интегралов Ито
w01=-((dt^2)/4)*((4/3)*(z0^2)+(1/(sqrt(3))))*...
z0*z1+(1/(3*sqrt(5)))*z0*z2+(1/(5*sqrt(21)))*...
z1*z3-(1/5)*z1*z1+(1/(7*sqrt(45)))*z2*z4-...
(1/21)*z2*z2-2);

        w0=(sqrt(dt))*z0;
        w00=0.5*dt*(z0*z0-1);
        w1=-0.5*(dt^(3/2))*(z0+(1/(sqrt(3))))*z1;
        w000=(1/6)*(dt^(3/2))*(z0^3-3*z0);
        w0000=(1/24)*(dt^2)*(z0^4-6*z0*z0+3);
        w10=w1*w0-w01;

g01=f+x1(i)*x3(i)-um*x3(i); %вспомогательная переменная
                                %моделирование решения
x1(i+1)=x1(i)+dt*(-x2(i)-x3(i))+0.5*... %первая
dt^2)*(-x1(i)-e*x2(i)-g01)+c*x3(i)*... %компонента
(dt*w0+w1)-(c^2)*x3(i)*(w01+dt*w00);   %решения

x2(i+1)=x2(i)+dt*(x1(i)+e*x2(i))+0.5*... %вторая
(dt^2)*(-x2(i)-x3(i)+e*(x1(i)+e*x2(i))); %компонента
                                                %решения
                                %вспомогательные переменные g10, g11, g12
g10=dt*g01+0.5*(dt^2)*((-x2(i)-x3(i))...
*x3(i)+g01*(x1(i)-um));
g11=-c*x3(i)*w0+c*c*x3(i)*w00+c*x3(i)*...
(um-x1(i))*(dt*w0+w1)+c*g01*w1-(c^3)*...

```

```

x3(i)*w000;
g12=c*c*x3(i)*(x1(i)-um)*(w10-w01)-c*c*...
g01*w10-c*c*x3(i)*(um-x1(i))*(w01+dt*w00)...
+(c^4)*x3(i)*w0000;

x3(i+1)=x3(i)+g10+g11+g12; %третья компонента
                             %решения

end;
l1=(1-1)/5;                %формирование массивов
for j=1:l1,                 %первой и второй компонент
    u(j)=x1(5*j+1); %решения для построения
    w(j)=x2(5*j+1); %фазового портрета
end;
plot(u,w);                  %построение
grid;                       %фазового
xlabel('x1(t)')             %портрета
ylabel('x2(t)')
pause;

```

Положим $c = 0.00$, $e = f = 0.20$, $\mu = 5.7$, $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0^{(3)} = 0.1$. Результат численного моделирования системы (7.29) в этом случае на промежутке $t \in [0, 300.00]$ с шагом интегрирования $\Delta = 0.03$ изображен на фазовой плоскости $(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t))$ на рис.5.30. На этом рисунке наблюдается аттрактор Рёсслера, который был назван им „слоистым”. Как известно [20], этот аттрактор возникает в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, которая начинается при $\mu = 3.50$ [20] и приводит при $\mu = 4.20$ [20] к возникновению аттрактора. Будем теперь увеличивать параметр c и произведем численное моделирование системы (7.29) с помощью соотношений (7.30)-(7.32) при $c = 2.00, 3.2, 3.46$, сохранив при этом значения остальных параметров, шага и промежутка интегрирования. На рис.7.31-7.33 изображены фазовые траектории системы (7.29) на фазовой плоскости $(x_t^{(1)}, x_t^{(2)})$. На этих рисунках с ростом c видна тенденция фазовых траекторий к уходу из области притяжения аттрактора, которая заканчивается этим уходом при достижении c значения 3.46.

При изменении значений e, f, μ внешний вид аттрактора меняется. Так, при $e = 0.19, f = 0.40, \mu = 8.5, c = 0.00$ проекция аттрактора

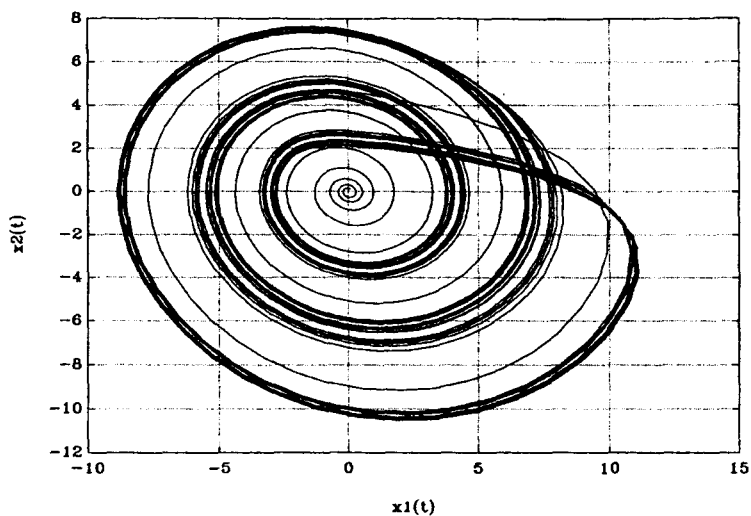


Рис.7.30. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера при $c = 0.0$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

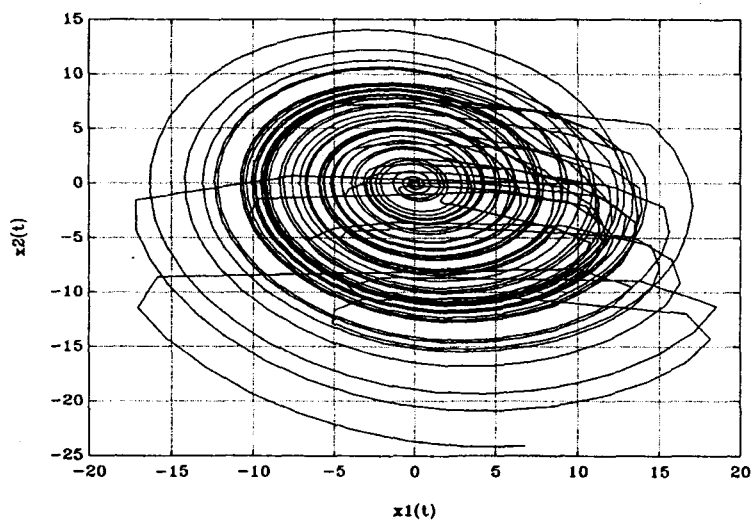


Рис.7.31. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера со стохастическим возмущением при $c = 2.0$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

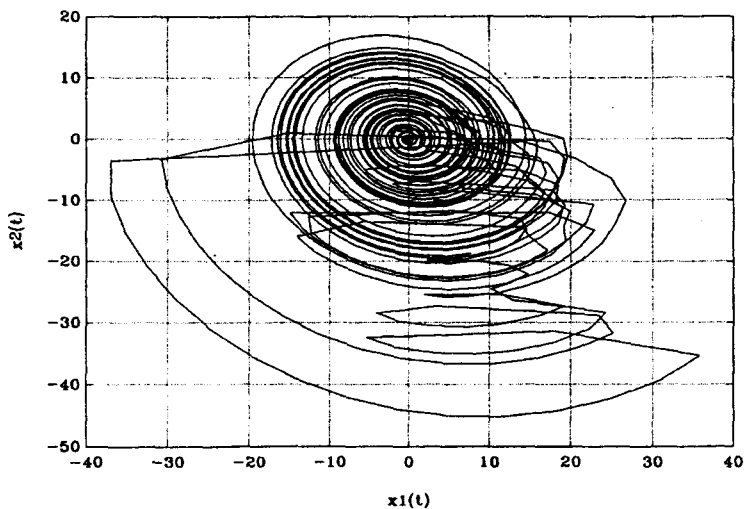


Рис.7.32. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера со стохастическим возмущением при $c = 3.2$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

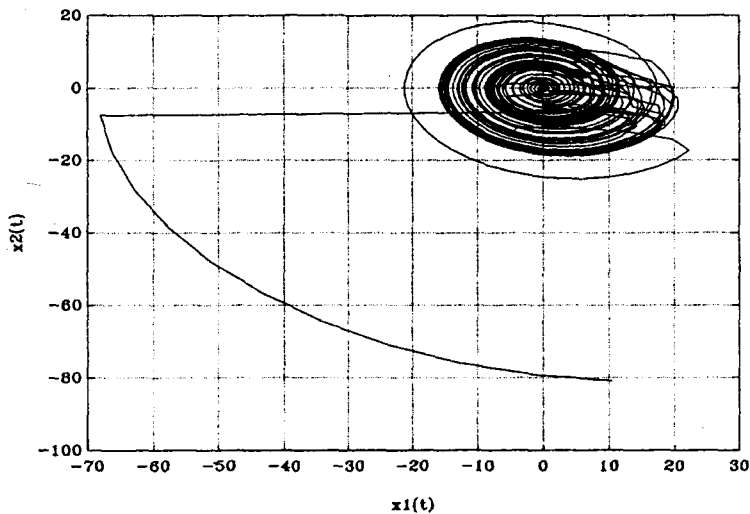


Рис.7.33. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера со стохастическим возмущением при $c = 3.46$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

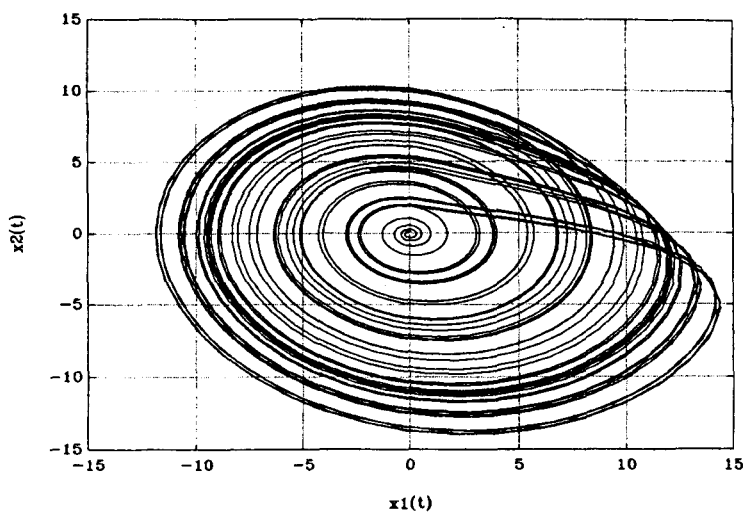


Рис.7.34. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера при $c = 0.0$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

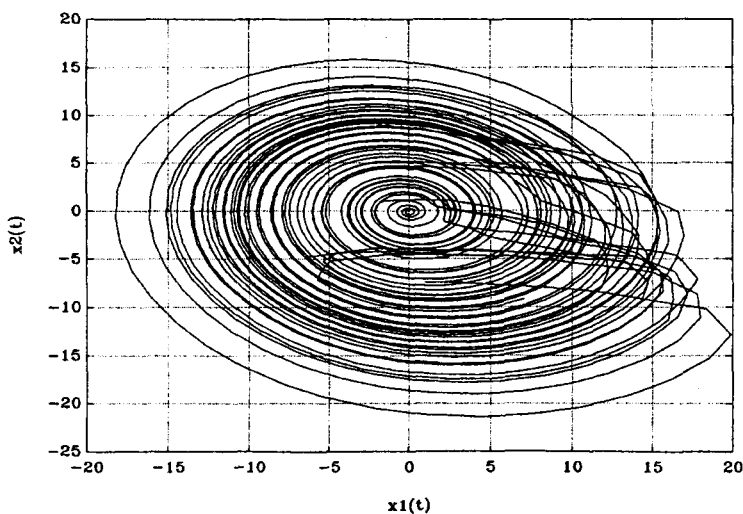


Рис.7.35. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера со стохастическим возмущением при $c = 2.0$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

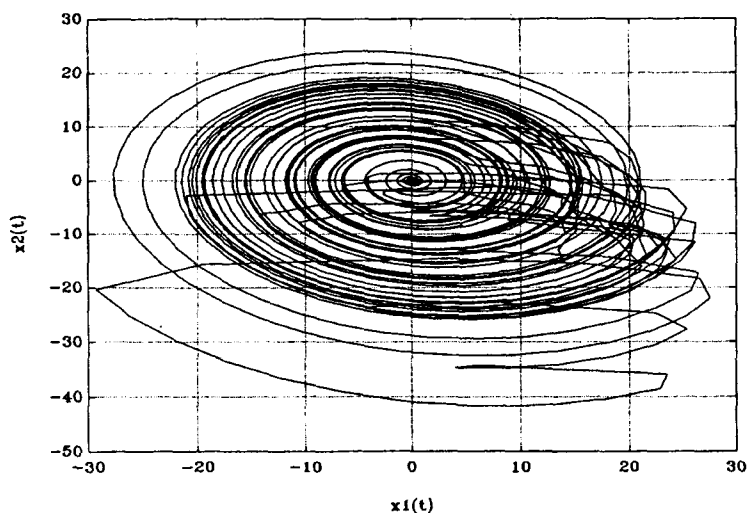


Рис.7.36. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера со стохастическим возмущением при $c = 3.75$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

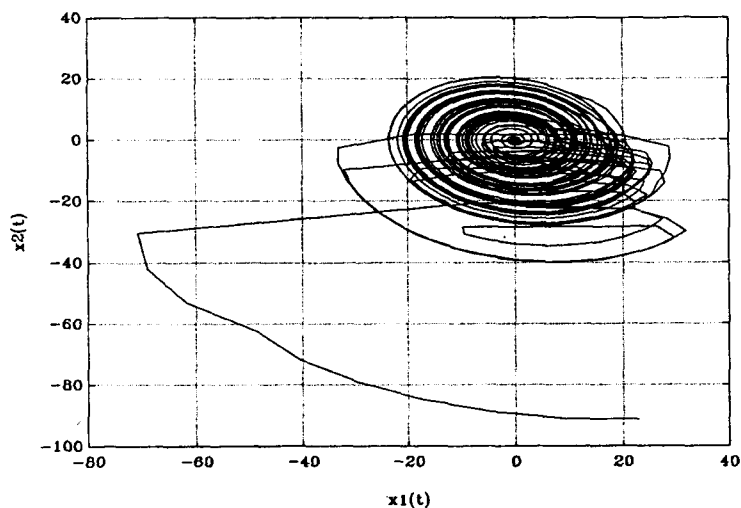


Рис.7.37. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера со стохастическим возмущением при $c = 3.88$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

на плоскость $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ изображена на рис.7.34. На рис.7.35-7.37 показаны фазовые траектории системы (7.29) при тех же значениях параметров e , f , μ и $c = 2.00, 3.75, 3.88$ соответственно. На этих рисунках с ростом c также видна тенденция фазовых траекторий к уходу из области притяжения аттрактора, которая завершается им при достижении c значения 3.88.

Отметим, что при получении рис.7.30-7.37 полагалось $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1$, $t \in [0, 300.00]$, $\Delta = 0.03$ и бралась одна и та же реализация случайных гауссовских величин ζ_j (рис.7.31-7.33, 7.35-7.37).

Заключение

В последние годы интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям значительно возрос, о чем свидетельствует количество публикаций по этой тематике. Особое место в теории стохастических дифференциальных уравнений занимает проблема их численного решения, которой посвящена настоящая монография. В книге рассматривается численный подход к стохастическим дифференциальным уравнениям, который основывается на численном моделировании их решений в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов разложения Тейлора и специальных методов аппроксимации повторных стохастических интегралов. Предлагаются также методы численного решения систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, которые основываются на представлении их решений в форме Коши.

Кратко сформулируем в чем заключается новизна результатов, полученных в монографии.

1. Сформулированы и доказаны теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

2. С помощью данных теорем получены новые представления разложения Тейлора-Ито — унифицированные разложения Тейлора-Ито, которые являются в ряде случаев более удобными для построения численных методов для стохастических дифференциальных уравнений, чем классическое разложение Тейлора-Ито.

3. Предложен новый метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t, T])$ системам функций. Этот метод обладает рядом преимуществ перед известными методами аппроксимации повторных стохастических интегралов.

4. С помощью упомянутых выше результатов в монографии построен ряд новых сильных численных методов для систем нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито.

5. Разработаны новые эффективные алгоритмы численного решения систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, в основу которых положено представление решений этих систем уравнений в форме Коши.

6. Численно решен ряд задач стохастической динамики систем различной физической природы. Для решения этих задач впервые был применен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций.

7. Введено понятие повторного симметризованного стохастического интеграла по пуассоновским процессам и доказана теорема о его разложении в кратный ряд из произведений пуассоновских случайных величин.

В книге содержится значительное количество теоретического материала, который может представить интерес для специалистов по теории случайных процессов. Монография также окажется полезной для математиков-вычислителей, программистов и инженеров, поскольку в ней разработан и доведен до уровня практической реализации ряд алгоритмов для численного решения нелинейных и линейных систем стохастических дифференциальных уравнений.

Библиография

- [1] *Boyce W.E.* Approximate solution of random ordinary differential equations // *Adv.Appl. Prob.*, 1978, **10**, pp.172-184.
- [2] *Kushner J.H.* Probubility Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations. Academic Press., New York, 1977.
- [3] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 660с.
- [4] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. К.: Наукова Думка, 1968, 354с.
- [5] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. т.3. М.: Наука, 1975, 469с.
- [6] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989, 640 с.
- [7] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов: нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974, 696с.
- [8] *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963, 284 с.
- [9] *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М: Изд-во МГУ, 1966, 320с.
- [10] *Bachelier L.* Théorie de la spèculation. *Ann. Sci. Norm. Sup.*, 1900, **17**.
- [11] *Эйнштейн А., Смолуховсий М.* Броуновское движение. Сб. статей, перевод с немецкого, 1936.

- [12] Андронов А.А., Витт А.А., Понтрягин Л.С. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ, 1933, 3.
- [13] Ван-дер-Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. М-Л: Госэнергоиздат, 1958.
- [14] Стратонович Р.Л., Полякова М.С. Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики. М.: МГУ, 1981.
- [15] Nyquist H. Thermal agitation of Electric Charge in Conductors // Physical Review, 1928, 32, July, p.110.
- [16] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М: Советское радио, 1961, 556с.
- [17] Arato M. Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1982, 289p.
- [18] Орлов А. Служба широты. М: Изд-во АН СССР, 1958, 126с.
- [19] Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г. Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // ДАН СССР, 1962, т.146, 4, с.747-750.
- [20] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987.
- [21] Lotka A. J. Undamped oscillations derived from the law of mass action // J. Amer. Chem. Soc., 1920, v.42, 8, pp.1595-1599.
- [22] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976.
- [23] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм // Сб. рефератов по радиационной медицине. М: Медгиз, 1959, с.145-148.
- [24] Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М: Наука, 1974.
- [25] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М: Наука, 1984.

- [26] *Первозванский А.А.* Рынок: Расчет и Риск. Изд-во ИНФРА, 1994, 210с.
- [27] *Wolf J.R.* Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung. Mitteilungen der Naturforschungen Gessellschaft in Bern, 1852, B.255, s.249-270.
- [28] *Слуцкий Е.Е.* О 11-летней периодичности солнечных пятен // ДАН СССР, 1935, т.4(9), вып.1-2, с.35-38.
- [29] *Henrici P.* Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1962, 407p.
- [30] *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett., 1976, v.57A, 5, pp.397-398.
- [31] *Hasminski R.Z.* Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff& Noordhoff, Alphen naan den Rijn, 1980.
- [32] *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969, 200с.
- [33] *Баркин А.И., Зеленцовский А.Л., Пакиши П.В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: МАИ, 1992, 303с.
- [34] *Arnold L., Wihstutz V.* Lyapunov exponents // Springer Lecture Notes in Mathematics. 1986, Vol. 1186.
- [35] *Arnold L., Kloeden P.E.* Explicit formulae for the Lyapunov exponents and rotation number of two-dimensional systems with telegraphic noise // SIAM J. Applied Math., 1989, 49, pp. 1242-1274.
- [36] *Auslender E.I., Milstein G.N.* Asymptotic expansion of the Luapunov index for linear stochastic systems with small noise // Prikl. Matem. Mekhan. 1982, 46, pp. 358-365 (In Russian).
- [37] *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986, 445с.

- [38] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985, 640с.
- [39] *Гурсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры. Теор. вероятн. и ее примен. 1960, т.5, вып.3, с.314-330.
- [40] *Кузнецов Д.Ф.* Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. Деп. в ВИНТИ, 1997, **3607-В97** от 10.12.97, 31с.
- [41] *Milstein G.N.* Approximate integration of stochastic differential equations // Theor. Prob. Appl., 1974, **19**, pp.557-562.
- [42] *Wagner W., Platen E.* Approximation of Ito integral equations // Preprint ZIMM, Akad. der. Wiss der DDR, Berlin, 1978.
- [43] *Platen E.* A Taylor-Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation // Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sc., 1981, Vol. 36, pp.157-164.
- [44] *Platen E., Wagner W.* On a Taylor formula for a class of Ito processes // Prob. Math. Statist., 1982, **3**, pp.37-51.
- [45] *Platen E.* A generalized Taylor formula for solutions of stochastic differential equations // Sankhya 44A, 1982, pp.163-172.
- [46] *Platen E.* An approximation method for a class of Ito processes with jump component // Lietuvos Matem. Rink., 1982, **22**, pp.124-136.
- [47] *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988, 225с.
- [48] *Kloeden P.E., Platen E.* The Stratonovich- and Ito-Taylor expansions // Math. Nachr., 1991, **151**, pp.33-50.
- [49] *Pettersson R.* The Stratonovich-Taylor expansion and numerical methods // Stoch. Anal. And Applicat., 1992, 10 (5), pp.603-612.

- [50] Kloeden P.E., Platen E. Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 632p.
- [51] Kloeden P.E., Platen E., Schurz H. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 292p.
- [52] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Разложение процессов Ито в ряд Тейлора-Ито в окрестности фиксированного момента времени // Деп. в ВИНТИ, 1993, **2637-B93** от 26.10.93, 26с.
- [53] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Унифицированное разложение Тейлора-Ито // Записки научных семинаров ПОМИ им.В.А.Стеклова. Вероятность и статистика 2, 1997, т.244, с.186-204.
- [54] Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W. The Approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Anal. And Applicat., 1992, 10 (4), pp.431-441.
- [55] Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф. Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито // Деп. в ВИНТИ, 1994, **1678-B94** от 15.08.94, 42с.
- [56] Кузнецов Д.Ф. Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики // Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук. СПб: СПбГТУ, 1996.
- [57] Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций // Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., 1997, N1 (<http://www.neva.ru/journal>).
- [58] Кузнецов Д.Ф. Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций и его применение к численному решению стохастических дифференциальных уравнений // Труды конфер. Средства мат. моделир. СПб: Изд-во СПбГТУ, 1998, с.135-160.

- [59] *Kuznetsov D.F.* Method of expansion and approximation of repeated stochastic Stratonovich integrals, which is based on multiple Fourier series on full orthonormal systems // Proceedings of the international conference "Asymptotic methods in probability and mathematical statistics", St.-Petersburg, June, 24-28, 1998, pp.146-149.
- [60] *Кузнецов Д.Ф.* Использование различных полных ортонормированных систем функций для численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вторая межд. конфер. Дифференц. уравн. и их примен., 15-20 июня, 1998. Тезисы докладов. СПб: Изд-во СПбГТУ, 1998, с.128-129.
- [61] *Кузнецов Д.Ф.* Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Пробл. управл. и информат. Принята к печати.
- [62] *Кузнецов Д.Ф.* Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье // Записки научн. семин. ПОМИ им. В.А.Стеклова. Вероятность и статистика 3., т.260, 1999.
- [63] *Кузнецов Д.Ф.* К проблеме численного моделирования стохастических систем // Вестник молодых ученых. Прикладная математика и механика, 1999, N2.
- [64] *Кузнецов Д.Ф.* Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов // Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., 1998, N4 (<http://www.neva.ru/journal>).
- [65] *Скорород А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964, 280с.
- [66] *Харди Г.Х., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963, 156с.
- [67] *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952, 476с.

- [68] *Chung K.L., Williams R.J.* Introduction to Stochastic Integration. Progress in Probability and Stochastics Vol.4 (Edited by Huber P. and Rosenblatt M.) Birkhäuser Boston Basel Stuttgart, 1983.
- [69] *Coddington E.A.* An Introduction to Ordinary Differential equations. New Jersey: Prentice-Hall, 1961.
- [70] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Наука, 1963, 860с.
- [71] *Kamke E.* Differential gleichungen lösungsmethoden und lösungen. V.1. Gewöhnliche differential gleichungen. Leipzig: Verbesserte auflage, 1959, 576p.
- [72] *Maruyama G.* Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circolo Math. Palermo, 1955, **4**, pp.48-90.
- [73] *Clements D.J., Anderson B.D.O.* Well behaved Ito equations with simulations that always misbehave // IEEE Trans. Autom. Control, 1973, **AC-18**, pp.676-677.
- [74] *Wright D.J.* The digital simulation of stochastic differential equations // IEEE Trans. Autom. Control, 1974, **AC-19**, pp.75-76.
- [75] *Rumelin W.* Numerical treatment of stochastic differential equations // SIAM, J. Numer. Anal., 1982, **19**, pp.604-613.
- [76] *Platen E.* Zur zietdiskreten Approximation von Ito prozessen // Diss. B., I Math., Akad. der Wiss. der DDR, 1984, Berlin.
- [77] *Gard T.C.* Introduction to Stochastic Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 1988.
- [78] *Chang C.C.* Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients // Math. Comput., 1987, **49**, pp.523-542.
- [79] *Talay D.* Analyse Numerique des Equations Differentielles Stochastiques. These 3emé cycle, 1982, Univ. Provence.
- [80] *Talay D., Tubaro L.* Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations // Stoch. Anal. Appl., 1990, **8**, pp.483-509.

- [81] *Kloeden P.E., Platen E.* Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations // J. Statist. Physics, 1992, **66**, pp.283-314.
- [82] *Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N.* Extrapolation methods for the weak approximation of Ito diffusions // SIAM, J. Numer. Anal., 1995 (to appear).
- [83] *Hernandez D.B., Spigler R.* Convergence and Stability of implicit Runge-Kutta methods for systems with multiplicative noise. BIT, 1993, **33**, pp.654-669.
- [84] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями // Пробл. управл. и информат., 1998, **N2**, с.57-72.
- [85] *Arnold L.* Stochastic Differential Equations, New York: Wiley, 1974.
- [86] *Richardson J.M.* The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation. In Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering // Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 16, 1964 (R. Bellman, editor) Amer. Math. Soc., Providence RI, pp. 290-302.
- [87] *McKenna J., Morrison J.A.* Moments and correlation functions of a stochastic differential equation // J. Math. Phys., 1970, **11**, pp. 2348-2360.
- [88] *McKenna J., Morrison J.A.* Moments of solutions of a class of stochastic differential equations // J. Math. Phys., 1971, **12**, pp. 2126-2136.
- [89] *Horsthemke W., Lofever R.* Noise Induced Transitions, Springer, 1984.
- [90] *Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.* Stochastic Differential Systems: Analysis and Filtering, New York: Wiley, 1987.
- [91] *Mikulevicius R.* On some properties of solutions of stochastic differential equations // Lietuvos Matem. Rink, 1983, **4**, pp. 18-31.

- [92] *Strook D. W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional Diffusion Processes, Springer, 1982.
- [93] *Shkurko I.O.* Numerical solution of linear systems of stochastic differential equations // Numerical Methods for Statistics and Modeling. Collected Scientific Works. Novosibirsk, 1987, pp. 101-109 (In Russian)
- [94] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд.5-е. М.:Наука, 1982, 331с.
- [95] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Физматгиз, 1973, 631 с.
- [96] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование решений стохастических систем линейных стационарных дифференциальных уравнений // Электр. Ж. Дифференц. уравн. и проц. управл., N1, 1998 (<http://www.neva.ru/journal>).
- [97] *Дьяконов В.П.* Справочник по применению системы PC MatLAB. М.: Наука, 1993, 111 с.
- [98] *Арсеньев Д.Г., Кульчицкий О.Ю.* Оптимизация алгоритмов численного интегрирования жестких линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Деп. в ВИНТИ, 1986, **732-B86** от 31.01.86, 32с.
- [99] *Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю.* Адаптивные методы вычислительной математики и механики. Стохастический вариант. СПб: Наука, 1996, 366с.

Обозначения

$a \in \mathcal{A}$	a принадлежит множеству $\mathcal{A}$
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	объединение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$	множество, элементы которого принадлежат $\mathcal{A}$ и не принадлежат $\mathcal{B}$
$\equiv$	тождественное равенство
$\stackrel{def}{=}$	равенство по определению
$\mathbb{R}^n$	n -мерное евклидово пространство
$[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$	закрытый ($a \leq x \leq b$), открытый ($a < x < b$) и полуоткрытые ($a \leq x < b, a < x \leq b$) интервалы соответственно
$n!, n!!$	факториал и двойной факториал натурального числа n соответственно
N	множество натуральных чисел
Z	множество целых чисел
$\emptyset$	пустое множество
$[x]$	наибольшее целое число, не превосходящее x
$ x $	модуль числа x
$\forall x$	для всех x
∞	бесконечность
$1_{\mathcal{A}}$	индикатор множества $\mathcal{A}$
$1_{\mathcal{A}}(x)$	индикаторная функция множества $\mathcal{A}$
$F: G_1 \rightarrow G_2$	функция F из G_1 в G_2
$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})^T$	вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $\mathbf{x}^{(i)}; i = 1, \dots, n$
$ \mathbf{x} $	евклидова норма вектора $\mathbf{x}$
$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}$	частная производная функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ по переменной $\mathbf{x}^{(i)}$
$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}$	смешанная частная производная функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ по переменным $\mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{x}^{(i)}$
$A = \ A^{(ij)}\ _{i,j=1}^{n,m}$	матрица A размера $n \times m$ с элементами $A^{(ij)}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$
$\text{diag}\{a_i\}_{i=1}^n$	диагональная матрица с диагональю $a_1, \dots, a_n$
$\det(A)$	определитель матрицы A
$\{a_n\}_{n=0}^N$	последовательность $a_n; n = 1, 2, \dots, N; N \leq \infty$
$\sup_{x \in \mathcal{X}}$	супремум по всем x из множества $\mathcal{X}$

$\max_{x \in \mathcal{X}}$, $\min_{x \in \mathcal{X}}$ максимум и минимум по всем x из множества $\mathcal{X}$
соответственно

$$\sum_{i=1}^n x_i \quad x_1 + \dots + x_n$$

$$\prod_{i=1}^n x_i \quad x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

$\sum_{x \in \mathcal{X}}$ сумма по всем x из множества $\mathcal{X}$

$$\sum_{i_1, \dots, i_k}^n \quad \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n$$

$A\{\cdot\}$ оператор A

ω элементарное событие

$M\{\cdot\}$ математическое ожидание

$D\{\cdot\}$ дисперсия

$P\{\cdot\}$ вероятность

$M\{\cdot|\cdot\}$ условное математическое ожидание

l.i.m. предел в среднем квадратическом

x_t случайный процесс $x(t, \omega)$

$O(x^p)$ величина того же порядка малости, что и x^p

$\int$ интеграл

$f_t, f(t, \omega)$ скалярный винеровский процесс

$\int \dots df_t$ стохастический интеграл Ито

$\int^* \dots df_t$ стохастический интеграл Стратоновича

w_t f_t или t в компактных обозначениях

$\mathbf{f}_t$ векторный винеровский процесс

$\mathbf{f}_t^{(i)}$ i -я компонента $\mathbf{f}_t$

$\mathbf{w}_t^{(0)}$ время t в компактных обозначениях

$\mathbf{w}_t^{(i)}$ компонента $\mathbf{f}_t^{(i)}$ векторного винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при $i =$

$1, \dots, m$

$\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ i -ый столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$

$\Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$ приращение $\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$

$L\{\cdot\}, G_0\{\cdot\}$ дифференциальные операторы сноса и диффузии в

формуле Ито

$^{(k)}A, \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}$ матрица k -го ранга с элементами $A^{(i_1 \dots i_k)}$;

$i_l = 1, \dots, m_l; l = 1, \dots, k$

$\cdot^k$ свертка матриц

$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{(i_k \dots i_1)}, J_{T,t}^{(k)}$ повторные стохастические интегралы Ито

$J_{(\mu_k \dots \mu_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)}$, $J_{T,t}^{*(k)}$, $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)}$, $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}$ повторные стохастические интегралы Стратоновича
 $J_{T,t}^{(k)s_1 \dots s_1}$ повторный стохастический интеграл
 $C^{\mathcal{A}}$ множество вида $\{(k)C_{j_1 \dots j_k} : (k, j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{A}\}$
 $D_{r+1_{s,t}}$, $H_{r+1_{s,t}}$ остаточные члены в стохастических разложениях
 $\sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}$ сумма по всем возможным перестановкам $(\lambda_k, \dots, \lambda_1)$
 $[t, T]^k$ гиперкуб $[t, T] \underbrace{\times \dots \times}_{k-1} [t, T]$
 $(r_l)H_l \dots H_1\{\cdot\}$ матричный дифференциальный оператор
 $C_{j_k \dots j_1}$ коэффициент кратного ряда Фурье
 $\int_t^T \dots \int_t^T \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}$ кратный стохастический интеграл
 $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}$, $\zeta_j^{(i)}$ стандартные гауссовские независимые величины
 $\hat{I}_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$, $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$ аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито
 $\hat{J}_{(\mu_k \dots \mu_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)}$, $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_k \dots i_1)q}$, $J_{T,t}^{*(k)q}$ аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

Замеченные опечатки

(страница, строка)	напечатано	следует читать
(4, 35), (163, 27), (223, 27), (445, 8)	пуассоновских	ортогональных
(24, 1)	С вероятностью 1	
(24, 2)	$\forall \xi(\omega) > 0$	$\forall \xi(\omega) > 0$ с в.1
(24, 3)	с вероятностью 1	
(24, 5)	$\xi > 0$	$ \xi > 0$
(24, 13)	$1 \leq p, q \leq \infty$	$1 < p, q < \infty$
(37, 11)	предел последовательности ступенчатых функций	предел
(44, 13)	η	η_t
(48, 23)	$\mathcal{K}$	Λ
(118, 25)	$\cdot\}$...	$\cdot\}$
(174, 13)	ВШ $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ непрерывно продолжима на $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$	
(175, 4)	$\mathcal{C}_0^+$	$\mathcal{C}_{s_0}^+$
(180, 17), (184, 6)	ВІ – ВІІ	ВІ, ВІІ
(188, 9)	I	I^*
(197, 11), (202, 3), (203, 5), (204, 29)	с вероятностью 1	в среднем степени n ; $n \in \mathbb{N}$
(227, 13)	$\tau_{j_1}, y_1, \dots, \tau_{j_k}, y_k$	$t_1, y_1, \dots, t_k, y_k$
(228, 13)	пуассоновские	
(232, 5)	$\mathbf{1}_{\{i_{p_s}=i_{p_s+i}\}}$	$\mathbf{1}_{\{i_{p_s}=i_{p_s+i} \neq 0\}}$
(239, 19)	$U(T)$.	$U(T)$ при $k \neq 0$.
(242, 3)	Теорема доказана.	С помощью неравенства Минковского можно по- лучить (5.16) и при $k = 0$. Теорема доказана.
(294, 14)	и	при $k \neq 0$ и
(365, 4)	получаем	с вероятностью 1 получаем
(410, 6)	форммирование	формирование
(432, 14)	(6.1 – 6.7)	6.1 – 6.7