Е.В.Дамаскинский, П.П.Кулиш

ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Введение

Возникшие при развитии квантового метода обратной задачи [I] и изучении решений уравнения Янга-Бакстера [2] понятия квантовых групп и алгебр [3-5] привлекают в последние годы все большее внимание. Это связано с тем, что эти объекты имеют изящную математическую структуру, аналогичную структуре групп и алгебр Ли, как в отношении общих определений, так и в отношении теории представлений. Обнаружена тесная связь квантовых алгебр с некоммутативной геометрией, разностными специальными функциями q-анализа и рядом других областей математики (см., например, [3-II]). С физической точки зрения интерес к этим объектам обусловлен возможными применениями в современной квантовой теории поля, где многократно возникали подобные структуры (конформная квантовая теория поля, теория квантованных струнн, топологические теории поля типа модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена и т.п.).

Простейшая квантовая алгебра $U_q(sl(2)) \equiv sl_q(2)$ [I2, I3] возникла в квантовой модели Лиувилля на решетке [I4], а квантовая супералгебра $osp_q(1/2)$ была определена в [I5]. Общие определения квантовых алгебр как квазитреугольных алгебр Хопфа были сформулированы в работах [I6, I7] (см. также [3, 4, I8-20]).

Ряд результатов о связи алгебр Ли с алгеброй Гейзенберга или осцилляторами $(bb^+ - b^+b = 1)$ легко переносятся и на квантовые алгебры после введения q-деформированных осцилляторов $(AA^+ - qA^+A = 1)$, что и является основной темой данной работы. За последние год-полтора появилось большое число публикаций посвященных этому вопросу [2I-25].

Отметим, что попытки модификации (деформации) соотношений коммутации неоднократно предпринималась в физических исследованиях. Уместно напомнить некоторые из них. Как известно, в квантовой механике постулируется, что канонические переменные - координата Q и канонически сопряженный импульс P описываются эрмитовыми операторами, которые удовлетворяют перестановочному соотношению (ПС)

$$[Q,P] \equiv QP - PQ = i\mathbb{1} \ , \ (\hbar = 1). \qquad (I.I)$$

Это соотношение составляет математическую основу принципа неопределенности Гейзенберга. Гейзенберговские ПС (I.I) или эквивалентные им соотношения

$$[b, b^+] \equiv b b^+ - b^+ b = 1, \qquad (I.2)$$

для неэрмитовых операторов рождения $b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP)$ и уничтожения $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP)$ соответствуют одной бозонной степени свободы. В случае фермионов коммутаторы (I.2) заменяются на антикоммутаторы

$$[\psi, \psi^+]_{(+)} = \psi\psi^+ + \psi^+\psi = 1, \quad \psi^2 = \psi^{+2} = 0, \qquad (I.3)$$

что связано с принципом запрета Паули.

Поскольку, по крайней мере один из операторов, удовлетворяющих (I.I) (или (I.2)) должен быть неограниченным, то удобнее рассматривать порождаемые этими операторами однопараметрические унитарные группы

$$a \mapsto U(a) = e^{iaQ}, \quad b \mapsto V(b) = e^{ibP}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \qquad (I.4)$$

В силу (I.I) операторы (I.4) удовлетворяют вейлевским ПС

$$U(a)U(b) = U(a+b), \quad V(a)V(b) = V(a+b),$$
$$V(b)U(a) = e^{iab}U(a)V(b). \qquad (I.5)$$

Эти соотношения определяют структуру нильпотентной группы Ли – группы Гейзенберга-Вейля. Алгеброй Ли этой группы является алгебра Гейзенберга, связанная с ПС (I.I). Замена гейзенберговских ПС (I.I) на вейлевские ПС (I.5) дает еще один пример модификации соотношений коммутации и имеет существенные последствия. Действительно, известная теорема фон Неймана утверждает, что с точностью до унитарной эквивалентности существует единственное неприводимое представление вейлевских ПС – представление Шредингера (см., например, [26]). Структура представлений гейзенберговских ПС (I.I) существенно богаче, так как имеются неэкспоненцируемые представления, не допускающие расширения до представления группы. Единственность представления Шредингера на уровне алгебр Ли достигается лишь при соблюдении дополнительных условий [26]. Неэкспоненцируемые представления ПС (I.I) в квантовой теории позволяют [27, 28] дать возможное решение проблемы оператора фазы (задача квантования переменных действие – угол).

Одним из побудительных мотивов изменения коммутационных соотношений является то, что в последние годы в квантовой теории всё чаще возникают ситуации, требующие введения экзотических статистик

[29, 30]. Наряду с бозевской и фермиевской статистиками, связанными с соотношениями (I.2) и (I.3) и одномерными представлениями группы перестановок возникли парастатистики [30], соответствующие представлениям более высокой размерности. Дробные статистики, связанные с представлениями групп кос и используемые при описании дробного квантового эффекта Холла и высокотемпературной сверхпроводимости, также требуют модификации соотношений коммутации.

В 1950 году Вигнер заметил, что хотя из постулируемых ПС (I.2) и гамильтоновых уравнений движения однозначно следуют гейзенберговские уравнения движения:

$$[H,b]=-b,\ [H,b^+]=b^+,\ H=\frac{1}{2}(b^+b+bb^+), \tag{I.6}$$

обратное - не верно. Он показал [31], что из (I.6) следуют не ПС (I.2), а однопараметрическое семейство

$$[b,b^+]=1+(2E_0-1)e^{i\pi(H-E_0)},\ E_0\in\mathbb{R}. \tag{I.7}$$

Эта проблема обсуждалась в [32], где была получена классификация деформаций ПС (I.2) согласованных с (I.6). При естественных предположениях было показано, что возможные реализации деформированных ПС описываются $(d\times d)$ - матрицами и соответствуют фермиевской $(d=2)$, бозевской $(d=\infty)$ и парафермиевской $(d=3,4,\ldots;\ d<\infty)$ статистикам. Оператор b при этом описывается наддиагональной матрицей

$$b=diag_{(+1)}(\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{d-1}).$$

В начале 70-ых годов, при исследовании дуальных резонансных моделей с нелинейными траекториями были введены [33, 34] операторы, удовлетворяющие деформированным ПС

$$A_i A_j^+ - q A_j^+ A_i = \delta_{ij}\mathbb{1}. \tag{I.8}$$

Некоторые свойства этих операторов изучались в [35]. Различные варианты модифицированных коммутационных соотношений обсуждались в [36]. Соотношения (I.8) рассматривались в [37] в связи с приложениями к теории Ли - допустимых алгебр и адронной механике.

Соотношения (I.8) изучались также в математических исследованиях как с чисто алгебраических позиций [38], так и в связи с q-анализом [39]. Это объясняется возможностью реализовать генератор A^+ как оператор, умножения на аргумент, а A как оператор q-дифференцирования

$$\delta_q f(x) = \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}. \tag{I.9}$$

Предлагаемая статья представляет краткий обзор работ по этой тематике. Она содержит определения q-осцилляторов. Отмечается естественность их введения с точки зрения контракции (сжатия) квантовых алгебр. Приведены когерентные состояния для различных генераторов алгебры q-осциллятора $\mathcal{A}(q)$ и теоремы полноты (сверхполноты) этих состояний. Перечислены некоторые приложения q-осцилляторов: реализация квантовых алгебр, деформация алгебр, модельные физические системы. В последнем разделе обсуждаются различные обобщения q-осциллятора на случай нескольких степеней свободы.

2. Определение q-осцилляторов.

В большинстве современных работ q-осциллятором называют модельную систему, описываемую ассоциативной алгеброй $\mathcal{A}(q) \equiv \mathcal{A}(q; a, a^+, \mathcal{N})$ с тремя образующими $a \equiv a_-, a^+ \equiv a_+, \mathcal{N}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$[a_-, a_+]_q = q^{-\mathcal{N}}, \quad [\mathcal{N}, a_\pm] = \pm a_\pm, \tag{2.I}$$

где

$$[a,b]_q \doteq ab - qba, \quad [a,b] \doteq ab - ba.$$

В общем случае q -фиксированный комплексный параметр, однако в дальнейшем мы ограничимся в основном вещественным случаем $q \in \mathbb{R}$. Последнее предположение позволяет ввести в $\mathcal{A}(q)$ инволюцию:

$$(a_\mp)^* = a_\pm, \quad \mathcal{N}^* = \mathcal{N}, \quad q^* = q, \tag{2.2}$$

относительно которой соотношения (2.I) инварианты. (В случае $q \in \mathbb{C}, |q|=1, q^* = \bar{q} = q^{-1}$, где черта-комплексное сопряжение. В этом случае в $\mathcal{A}(q)$ наряду с первым из ПС (2.I) должно выполняться и $a_- a_+ - q^{-1} a_+ a_- = q^{\mathcal{N}}$, получающееся при $q \longleftrightarrow q^{-1}$). В той или иной степени q-осцилляторам и их применению посвящены работы [19-25, 33-38, 40-47].

В отличии от случая гармонического осциллятора, когда $\mathcal{N} = b^+ b$, для деформированного осциллятора не предполагается никакой связи генератора $\mathcal{N}$ с $a_\pm$ и все три образующие рассматриваются как независимые. Это означает, что $\mathcal{A}(q)$ является деформацией универсальной обертывающей алгебры для алгебры Ли простейшей разрешимой группы Ли – группы осциллятора [48], а не квантовомеханической группы Гейзенберга-Вейля (нильпотентная группа связанная с ПС (I.I)). При $q\to 1$ (или $\eta\to 0$, $q=e^{\eta}$) ПС (2.I) переходят в ПС генераторов группы осциллятора

$$[b,b^{+}]=1,\quad [\mathcal{N},b^{+}]=b^{+},\quad [\mathcal{N},b]=-b. \tag{2.3}$$

В (2.3) также не предполагается, что $\mathcal{N}=b^{+}b$, хотя в известной квантовомеханической модели гармонического осциллятора это условие выполнено.

Иногда вместо генератора $\mathcal{N}$ используют

$$k^{\pm}=e^{\pm\mathcal{N}\ln q}=e^{\pm\eta\mathcal{N}}. \tag{2.4}$$

Тогда ПС (2.I) принимают алгебраически более традиционный вид

$$\begin{gathered} k^{\pm}a_{-}=q^{\mp1}a_{-}k^{\pm},\quad k^{\pm}a_{+}=q^{\pm1}a_{+}k^{\pm}, \\ k^{+}k^{-}=1=k^{-}k^{+},\quad (k^{\pm})^{*}=k^{\pm}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Однако мы предпочитаем использовать генератор $\mathcal{N}$ в виду его простой физической интерпретации и большей наглядности.

Из ПС (2.I) следуют полезные формулы

$$a_{+}q^{-\mathcal{N}}=q\,q^{-\mathcal{N}}a_{+},\quad q^{-\mathcal{N}}a_{-}=q\,a_{-}q^{-\mathcal{N}}, \tag{2.6}$$

$$[\mathcal{N},a_{+}a_{-}]=0,\quad [\mathcal{N},a_{-}a_{+}]=0, \tag{2.7}$$

$$a_{-}(a_{+})^{m}-(q a_{+})^{m}a_{-}=[m]_{q}\,(a_{+})^{m-1}q^{-\mathcal{N}}, \tag{2,8}$$

где

$$[m]_{q}\doteq\frac{q^{m}-q^{-m}}{q-q^{-1}}=q^{m-1}+q^{m-2}+\ldots+q^{-(m-2)}+q^{-(m-1)}, \tag{2.9}$$

а если $q=e^{\eta}$, то

$$[m]_{q}=\frac{sh(\eta m)}{sh\,\eta}. \tag{2.I0}$$

В случае, когда m -оператор, $[m]_{q}$, $sh(\eta m)$, так же как и $q^{-\mathcal{N}}$, понимаются в смысле формальных степенных рядов.

Иногда используют другие формы ПС q-осциллятора, отличные от (2.I). Так генераторы

$$\alpha_- = q^{-1/2\mathcal{N}} a_-\ ,\quad \alpha_+ = a_+ q^{-1/2\mathcal{N}} \tag{2.11}$$

подчиняются ПС

$$[\alpha_-,\alpha_+] = q^{-2\mathcal{N}}\ ,\quad [\mathcal{N},\alpha_\pm] = \pm\alpha_\pm \tag{2.12}$$

порождают алгебру $\mathcal{A}(q;\alpha_\pm,\mathcal{N})$. В этом случае наиболее естественный диапазон значений параметра q есть $q>1$. Определив генераторы

$$A_- = q^{1/2\mathcal{N}} a_- = q^{\mathcal{N}}\alpha_-\ ,\quad A_+ = a_+ q^{1/2\mathcal{N}} = \alpha_+ q^{\mathcal{N}}, \tag{2.13}$$

приходим к алгебре $\mathcal{A}(q;A_\pm,\mathcal{N})$ и ПС

$$A_-A_+ - \mu A_+A_- = 1\ ,\quad [\mathcal{N},A_\pm] = \pm A_\pm, \tag{2.14}$$

где $\mu = q^2$. В этом случае естественно считать $0<\mu<1$.

По всей видимости впервые ПС (2.14) рассматривались в [33-35], а затем неоднократно переоткрывались [36-37]. В рамках q-анализа, как ПС связанные с разностной производной, они изучались в [38-39].

Для генераторов (2.11) и (2.13) справедливы формулы аналогичные (2.6)-(2.8). В частности

$$\alpha_-(\alpha_+)^m - (\alpha_+)^m\alpha_- = [m;\mu^{-1}](\alpha_+)^{m-1}\mu^{-\mathcal{N}} \tag{2.15}$$

$$A_-(A_+)^m - (\mu A_+)^m A_- = [m;\mu](A_+)^{m-1}, \tag{2.16}$$

где

$$[m;\mu] = \frac{1-\mu^m}{1-\mu} = q^{m-1}[m]_q\ ,\quad \mu = q^2. \tag{2.17}$$

В настоящее время остается открытым естественный вопрос о том, в какой степени ПС (2.1), (2.12) и (2.14) можно считать эквивалентными. С одной стороны обратимость преобразований (2.11) и (2.13) указывает, что все генераторы определяют одну и ту же ассоциативную алгебру $\mathcal{A}(q)$. С другой стороны, если рассматривать $\mathcal{A}(q)$ как $*$-алгебру, то в (2.1) и (2.12) $q\in\mathbb{R}$, тогда как $\mu=q^2$ в (2.14) может быть и отрицательным, а значит μ - чисто мнимым. Отметим также, что ПС (2.12) и (2.14) реализуются ограниченными операторами (при $q\neq 1$), тогда как операторы, реализующие (2.1) неограничены и возникают вопросы связанные с их областями определения.

Прежде чем переходить к рассмотрению некоторых представлений алгебры $\mathcal{A}(q)$ укажем, что эта алгебра имеет нетривиальный центр

$$z=q^{1-\mathcal{N}}([\mathcal{N}]_q-a_+a_-)=[\mathcal{N};q^{-2}]-\alpha_+\alpha_- = \\ =q^{2(1-\mathcal{N})}([\mathcal{N};q^2]-A_+A_-). \tag{2.18}$$

Из этого следует, в частности, что, в отличии от квантовомеханической ситуации, где справедлива теорема единственности фон Неймана, в случае q-осциллятора существует ряд неэквивалентных представлений.

Легко видеть, что для алгебры $\mathcal{A}(q)$ можно построить q-аналог представления Фока (чисел заполнения), диагонализирующий оператор $\mathcal{N}$ числа q-квантов. Более того, в качестве пространства представления можно взять гильбертово пространство $\mathcal{H}_F$ обычного бозонного осциллятора с базисом $\{|n\rangle\}$, $n=0,1,2,\dots$. Имеем

$$\mathcal{N}|n\rangle = n|n\rangle, \tag{2.19}$$

$$|n\rangle=([n]_q!)^{-1/2}(a_+)^n|0\rangle, \tag{2.20}$$

где $[n]_q!=[1]_q[2]_q\cdot\ldots\cdot[n]_q;\ [1]_q!=1;\ [0]_q!=1$.

Операторы $a_\pm$ на элементы этого базиса действуют по формулам

$$a_+|n\rangle=\sqrt{[n+1]_q}\,|n+1\rangle,\quad a_-|n\rangle=\sqrt{[n]_q}\,|n-1\rangle. \tag{2.21}$$

Несложные вычисления показывают, что (2.19) и (2.21) задают в $\mathcal{H}_F$ реализацию деформированных ПС (2.1). На пространстве $\mathcal{H}_F$ операторы $a_\pm$ q-осциллятора можно выразить через операторы $b_\pm$, $\mathcal{N}=b_+b_-$ стандартного бозонного осциллятора

$$a_+=b_+\sqrt{\frac{[\mathcal{N}+1]_q}{\mathcal{N}+1}},\quad a_-=\sqrt{\frac{[\mathcal{N}+1]_q}{\mathcal{N}+1}}\,b_-. \tag{2.22}$$

При $q\to1$, $a_\pm\to b_\pm$, а ПС (2.1) переходят в обычные коммутаторы (1.2). Из (2.22) видно что рассматриваемый в $\mathcal{H}_F$ базис $\{|n\rangle\}$ есть базис чисел заполнения обычного осциллятора. Следовательно он ортонормирован и является полным $\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=\mathbb{1}$. Пространство $\mathcal{H}_F$ можно получить замыканием линейной оболочки этого базиса.

В областях определения $\mathcal{D}(a_+)\cap\mathcal{D}(a_-)\subset\mathcal{H}_F$ выполняются дополнительно соотношения

$$a_+a_-=[\mathcal{N}]_q,\quad a_-a_+=[\mathcal{N}+1]_q, \tag{2.23}$$

$$[\mathcal{N}]_q|n\rangle=[n]_q|n\rangle,\quad [\mathcal{N}+1]_q|n\rangle=[n+1]_q|n\rangle, \tag{2.24}$$

$$[a_-, a_+] = [\mathcal{N}+1]_q - [\mathcal{N}]_q. \qquad (2.25)$$

Из (2.18) и (2.23) следует что в представлении Фока $\mathcal{Z}$ обращается в нуль. Тривиальная реализация центра объясняет некоторые специфические особенности этого представления. В частности в $\mathcal{H}_F$, наряду с первым из соотношений (2.1) выполняется алгебраически независимое (в общем случае) соотношение

$$a_- a_+ - \frac{1}{q} a_+ a_- = q^{\mathcal{N}}. \qquad (2.26)$$

Определив эрмитовы образующие

$$Q_q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+ + a_-) \ , \quad P_q = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_+ - a_-) \qquad (2.27)$$

получим на $\mathcal{H}_F$

$$[Q_q, P_q] = i([\mathcal{N}+1]_q - [\mathcal{N}]_q) = i\,\frac{ch\,\frac{\eta}{2}(2\mathcal{N}+1)}{ch\,\frac{\eta}{2}}. \qquad (2.28)$$

Оператор

$$H_q = \frac{1}{2}(Q_q^2 + P_q^2) = \frac{1}{2}[a_+, a_-]_{(+)} = \frac{1}{2}\,\frac{sh\,\frac{\eta}{2}(2\mathcal{N}+1)}{sh\,\frac{\eta}{2}} \qquad (2.29)$$

можно рассматривать как q-аналог гамильтониана $H_{q=1}$ гармонического осциллятора, в который он переходит при $q \to 1$. В этом пределе $Q_q \to Q$, $P_q \longrightarrow P$ а ПС (2.28) переходят в (1.1). Отметим, что в отличии от $H_{q=1}$, H_q имеет не эквидистантный спектр.

Очевидно, что все сказанное переносится на случай алгебр $\mathcal{A}(q; \alpha_\pm, \mathcal{N})$ и $\mathcal{A}(q; A_\pm, \mathcal{N})$. Приведем только основные формулы

$$A_+|n\rangle = \sqrt{[n+1\,;\,q^2]}\,|n+1\rangle, \quad A_-|n\rangle = \sqrt{[n;q^2]}\,|n-1\rangle \qquad (2.30)$$

$$\alpha_+|n\rangle = \sqrt{[n+1;q^{-2}]}\,|n+1\rangle, \quad \alpha_-|n\rangle = \sqrt{[n;q^{-2}]}\,|n-1\rangle. \qquad (2.31)$$

Отметим, что в отличии от операторов $a_\pm$, которые, как и $b_\pm$, неограничены, операторы $\alpha_\pm$ и $A_\pm$ являются ограниченными. Это связано с тем что $[\infty]_q = \infty$, тогда как $[\infty;q] = \frac{1}{1-q} < \infty$.

Используя вейлевские ПС

$$e^{\beta\partial} e^{\alpha x} = e^{\alpha\beta} e^{\alpha x} e^{\beta\partial} \quad , \ \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (2.32)$$

можно реализовать операторы $A_\pm$ в координатном представлении (ср. [22]; операторы $b_\pm$ из [22] удовлетворяют ПС $q^2 b_- b_+ - b_+ b_- = q^2 - 1$ и выражаются через $A_\pm$ по формуле $b_\pm = \sqrt{\lambda} A_\pm$, $\lambda = 1 - q^2 = 1 - \mu$). Имеем

$$A_- = \lambda^{-1/2}(e^{-2x} - e^{x} q^{-\partial}), \quad A_+ = \lambda^{-1/2}(e^{-2x} - q^{-\partial} e^{-x}). \tag{2.33}$$

Несложно проверить, что функция

$$|0\rangle = \Omega_0(x) = q^{-\frac{x^2}{2\eta^2} - \frac{x}{2\eta}} = exp\left(-\frac{x^2}{2\eta} - \frac{x}{2}\right), \tag{2.34}$$

является решением уравнения $A_-|0\rangle = 0$. Используя " q -треугольник Паскаля"

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}; q^2 \Big] = q^{2k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}; q^2 \Big] + \Big[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix}; q^2 \Big], \tag{2.35}$$

где

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}; q \right] = \frac{[n;q]}{[m;q]!\,[n-m;q]!} \tag{2.36}$$

q -биномиальный коэффициент, получим

$$|n\rangle = \Omega_n(x) = ([n;\mu]!)^{-1/2}(A_+)^n|0\rangle =$$
$$= \Omega_0(x)\left(\sum_{m=0}^{n}\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}; \mu\right] e^{-2mx} q^{n-m}\right)([n;\mu]!)^{-1/2}, \tag{2.37}$$

Полезна реализация ПС в пространстве многочленов $p(x)$ по переменной x с базисом $\{x\}_{n=0}^{\infty}$. Рассмотрим в этом пространстве операторы

$$M : p(x) \mapsto x\,p(x), \quad x^n \mapsto x^{n+1} \tag{2.38}$$

$$D_q : p(x) \mapsto D_q p(x) \doteq \frac{p(qx) - p(q^{-1}x)}{(q-q^{-1})x} \tag{2.39}$$
$$x^n \mapsto [n]_q\, x^{n-1}$$

$$K_q : p(x) \mapsto p(qx), \quad x^n \mapsto q^n x^n. \tag{2.40}$$

Тогда операторы

$$a_- = M, \quad a_+ = D_q, \quad q^{-\mathcal{N}} = K_{q^{-1}} \tag{2.41}$$

$$\mathcal{N} = M\frac{d}{dx} = x\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\ln x}$$

реализуют в этом пространстве соотношения (2.I). В этой реализации (2.26) также выполняется. Для операторов $A_\pm$ $(a_\pm)$ аналогичная реализация основана на более привычный в q-анализе разностной производной (см., например, [39])

$$\delta_q\,\rho(x) = \frac{\rho(x)-\rho(qx)}{(1-q)x}. \tag{2.42}$$

Как отмечалось выше, кроме представления Фока существуют другие неэквивалентные ему неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}(q)$). Перечислим эти представления [42], используя операторы $A_\pm$.

I. $q>1$ Представление Фока единственно. Оно совпадает с одним из представлений при $0<q<1$, поскольку в реализации операторами $a_\pm$, все матричные элементы инвариантны при замене $q \leftrightarrow q^{-1}$. В этом случае спектр $\mathcal{N}$ простой, $\operatorname{spectr}\mathcal{N}=\{0,1,2,\ldots\}$.

2. $0<q<1$. Операторы $\mathring{A}_\pm$ пропорциональны операторам сдвига в $\ell_2(\mathbb{Z})$; $A_+A_- = A_-A_+$ пропорционален единичному оператору, центральный элемент $\zeta=-mq^2,\ m=(1-q^2)^{-1}$,

$$A_-\psi_n=\sqrt{m}\,\psi_{n-1}\,,\ A_+\psi_n=\sqrt{m}\,\psi_{n+1}\,;\ \operatorname{spectr}\mathcal{N}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$$

3. $0<q<1$. Спектр A_+A_- простой и состоит из $m+q^{2k}\Delta$, $k\in\mathbb{Z},\ \Delta>0\,;\ \zeta=-q^2(m+\Delta)$,

$$A_-\psi_n=(m+q^{2n}\Delta)^{1/2}\psi_{n-1}\,,\ A_+\psi_n=(m+q^{2n}\Delta)^{1/2}\psi_{n+1}\,,\ \operatorname{spectr}\mathcal{N}=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$$

4. $q^2=\mu<0$. В этом случае интервалы $(-1,0)$ и $(-\infty,-1)$ из-за подстановки $\tilde{A}=\sqrt{-\mu}\,A$ эквивалентны.

4а. Неприводимое представление вида 2 при $\zeta=-qm$; $A_+A_-=A_-A_+=mI$.

4в. Неприводимое представление типа представления Фока.

Отметим, что представления типа 2. и 3. сингулярны при $q^2\to1$, а представление типа 4 в. (но не 4а) в пределе $q^2\longrightarrow-1$ соответствует фермиевскому осциллятору. Некоторые из этих представлений упоминались в [36] однако отсутствует полный анализ ситуации и свойств представлений.

Естественность введенных выше алгебр деформированного осциллятора следует, в частности и потому, что он возникает при сжатии (контракции) по Иноню-Вигнеру квантовой (квазитреугольной) алгебры Хопфа $s\ell_q(2)$ [3, II]. Она является деформацией универсальной обертывающей алгебры для алгебры Ли $s\ell(2)$. Квантовая алгебра $s\ell_q(2)$ порождается тремя генераторами $H, X_\pm$ такими, что

$$[H,X_\pm]=\pm X_\pm \;,\; [X_+,X_-]=[2H]_q. \qquad (2.43)$$

Определив $k=q^H$ (2.43) можно преобразовать к алгебраически более традиционному виду

$$\begin{aligned} &k k^{-1}=k^{-1}k=1, \\ &k X_\pm k^{-1}=q^{\pm 1}X_\pm. \end{aligned} \qquad [X_+,X_-]=\frac{k^2-k^{-2}}{q-q^{-1}}, \qquad (2.44)$$

Инволюция в $sl_q(2)$ вводится по $H^*=H$, $k^*=k$, $(X_\pm)^*=X_\mp$.
Структура алгебры Хопфа определяется заданием копроизведения

$$\Delta: sl_q(2)\to sl_q(2)\otimes sl_q(2) \qquad \begin{aligned} &\Delta(H)=H\otimes\mathbb{I}+\mathbb{I}\otimes H \\ &\Delta(X_\pm)=X_\pm\otimes k+k^{-1}\otimes X_\pm \end{aligned} \qquad (2.45)$$

и согласованных с Δ отображений антипода S и коединицы ε

$$\begin{aligned} &S: sl_q(2)\to sl_q(2) \;,\; S(H)=-H,\; S(X_\pm)=-q^{\pm 1}X_\pm, \\ &\varepsilon: sl_q(2)\to \mathbb{C} \;,\; \varepsilon(H)=\varepsilon(X_\pm)=0. \end{aligned} \qquad (2.46)$$

В случае параметра q не являющегося корнем из единицы ($q^M\neq 1$, $M\in\mathcal{N}$) структура конечномерных представлений $sl(2)$ и $sl_q(2)$ идентична. Эти представления индексируются целыми и полуцелыми значениями q-спина j и действуют в пространстве размерности $d=2j+1$. Выбирая в этом пространстве базис $\{|j,m\rangle\}$, $m=-j,-j+1,\dots,j-1,j$, диагонализирующий H , имеем

$$H|j,m\rangle=m|j,m\rangle;\; X_\pm|j,m\rangle=([j\mp m]_q[j\pm m+1]_q)^{1/2}|j,m+1\rangle. \qquad (2.47)$$

Рассмотрим $q>1$ и переопределим образующие

$$\mathcal{N}=j\mathbb{1}-H,\; Y_\pm=X_\pm[2j]_q^{-1/2}. \qquad (2.48)$$

Перейдем к пределу $j\to\infty$, ограничившись векторами $|j,m\rangle$ с $(j-m)/j\to 0$ при $j\to\infty$. Тогда для предельных операторов $a_\pm=\lim_{j\to\infty}Y_\pm$ получаем из (2.43) ПС (2.12) для q осциллятора $\mathcal{A}(q;a_\pm,\mathcal{N})$. Возникшее в этом пределе представление совпадает с представлением Фока (2.31), $|n\rangle=\lim_{j\to\infty}|j,j-n\rangle$.

В [49] рассмотрено сжатие $sl_q(2)$ до квантового аналога алгебры Гейзенберга. Действительно, определив при $q=e^{\eta}$,

$$W_\pm=\sqrt{\varepsilon}\,X_\mp\,,\;\mathcal{N}=2\varepsilon H\,,\;\omega=\varepsilon^{-1}\eta$$

и устремив $\varepsilon\to 0$ получим деформированную алгебру Гейзенберга вида

$$[\mathcal{N}, W_\pm] = 0, \quad [W_-, W_+] = \omega^{-1} \operatorname{sh} \omega \mathcal{N}.$$

Отметим, что такая процедура контракции требует модификации параметра деформации $q = e^{\eta} \longrightarrow e^{\omega}$. Для обратимых значений центра $\omega^{-1} \operatorname{sh}(\omega \mathcal{N})$ получается алгебра эквивалентная гейзенберговской. Однако, как алгебра Хопфа, эта контракция не эквивалентна алгебре Гейзенберга, поскольку она имеет несимметричное (не кокоммутативное) копроизведение

$$\Delta(W_\pm) = W_\pm \otimes e^{\omega \mathcal{N}} + e^{-\omega \mathcal{N}} \otimes W_\pm .$$

Вопрос о существовании копроизведения в $\mathcal{A}(q)$ остается открытым.

Деформированный аналог фермиевского осциллятора имеет более простой вид [19]. Он определяется генераторами $f_\pm$, $\mathcal{N}$ с ПС

$$f_- f_+ + q f_+ f_- = q^M, \quad [M, f_\pm] = \pm f_\pm \ , \quad (f_\pm)^2 = 0. \tag{2.49}$$

Заметим, что для q-фермиона $f_+ f_- = [M]_q = M$, $f_- f_+ = [1 - M]_q = 1 - M$. Представление Фока двумерно и имеет вид

$$\begin{aligned} &q^M|0\rangle = 0 \ , \ M|0\rangle = 0 \ , \ f_-|0\rangle = 0 \ , \ f_+|0\rangle = |1\rangle, \\ &q^M|1\rangle = |1\rangle, \ M|1\rangle = |1\rangle, \ f_-|1\rangle = |0\rangle, \ f_+|1\rangle = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.50}$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} &|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^+, \ f_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^- \\ &|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ q^M = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f_- f_+ + q f_+ f_- . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Деформированный суперосциллятор естественно получить сжатием [42] квантовой супералгебры Хопфа $osp_q(1/2)$ [15]. Эта алгебра порождается тремя генераторами одним четным H и двумя нечетными $V_\pm$, удовлетворяющими соотношениям

$$[H, V_\pm] = \pm \tfrac{1}{2} V_\pm \ , \ V_+ V_- + V_- V_+ = -\tfrac{1}{4} [2H]_q . \tag{2.52}$$

Структура алгебры Хопфа определяется

$$\begin{aligned} &\Delta(H) = H \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H \, , \, \Delta(V_\pm) = V_\pm \otimes q^H + q^{-H} \otimes V_\pm \\ &S(H) = -H \, , \, S(V_\pm) = -q^{\pm 1/2} V_\pm \, , \ \varepsilon(H) = \varepsilon(V_\pm) = 0 . \end{aligned} \tag{2.53}$$

Конечномерные представления $osp_q(1/2)$ индексируются полуцелыми числами j и имеют размерность $4j+1$. В базисе с диагональным оператором H, действие генераторов имеет вид

$$H|j,m\rangle=m|j,m\rangle,\ V_\pm|j,m\rangle=(\pm)^{2(j-m)}\mathcal{N}(j,\pm m)|j,m\pm 1/2\rangle$$

$$\mathcal{N}^2(j,m)=\frac{1}{4}\,\frac{q^{1/2}+q^{-1/2}}{q-q^{-1}}\,[\![j-m]\!]_q\,[\![j+m+\tfrac{1}{2}]\!]_q\ ,\ m\in\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}, \tag{2.54}$$

$$[\![m]\!]_q=(q^m-(-)^{2m}q^{-m})/(q^{1/2}+q^{-1/2}).$$

Перенормировав генераторы

$$\mathcal{N}=2(j\mathbb{1}-H)\ ,\quad Y_\pm=\pm 2V_\pm\,[2j]_q^{-1/2}, \tag{2.55}$$

для предельных операторов $\gamma_\pm=\lim_{j\to\infty}Y_\pm$ получаем

$$[\mathcal{N},\gamma_\pm]=\pm\gamma_\pm\ ,\ \gamma_-\gamma_++\gamma_+\gamma_-=q^{-\mathcal{N}}. \tag{2.56}$$

Определив $C_+=\gamma_+q^{1/4\mathcal{N}}$ получаем супер- q-осциллятор

$$[\mathcal{N},C_\pm]=\pm C_\pm\ ,\ C_-C_++q^{1/2}C_+C_-=q^{-\mathcal{N}/2}. \tag{2.57}$$

Порождаемая ассоциативная алгебра $\mathcal{A}_s(q)$ имеет нетривиальный центр

$$\zeta_m=q^{-1/2\mathcal{N}}\Big([\![\tfrac{1}{2}\mathcal{N}]\!]_q+(-1)^{\mathcal{N}}C_+C_-\Big). \tag{2.58}$$

Получившаяся в результате сжатия алгебра $\mathcal{A}_s(q)$, так же как и квантовая супералгебра $osp_q(1/2)$ имеет $\mathbb{Z}_2$-градуировку. То же верно и для их представлений. Полученное при контракции представление $\mathcal{A}_s(q)$ действует в $\mathbb{Z}_2$-градуированном бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_F(s)$, в котором для однородных вектора x и линейного оператора A определена операция супертранспонирования

$$(Ax,y)=(-)^{\rho(x)\rho(A)}(x,A^{st}y). \tag{2.59}$$

Операторы $C_\pm$ действуют в $\mathcal{H}_F(s)$:

$$C_-|0\rangle=0\ ,\ C|n\rangle=\beta_n|n-1\rangle,\ C_+|n-1\rangle=(-)^{n-1}\beta_n|n\rangle$$

$$\beta_n^2=[\![\tfrac{1}{2}n]\!]_q=\frac{q^{n/2}-(-)^n q^{-n/2}}{q^{1/2}+q^{-1/2}},\ q>1. \tag{2.60}$$

В пределе $q\to 1$, $\beta_{2n}\to 0$, $\beta_{2n-1}\to 1$, операторы $C_\pm$ переходят в бесконечные прямые суммы матриц Паули $\sigma_\pm$, а $\mathcal{H}_F(s)$ распадается в прямую сумму двумерных фермионных пространств.

Суперсимметричное объединение бозонного и фермионного

q-осцилляторов (2.I) и (2.49) может быть естественно осуществлено по аналогии с недеформированным вариантом [50]. Для соответствующего гамильтониана основное состояние невырождено, а собственные подпространства возбужденных будут двумерны.

3. Когерентные состояния для q-осцилляторов.

В случае квантовомеханических систем особую роль играют когерентные состояния (КС). В связи с этим, естественно определить аналоги этих состояний для деформированного осциллятора – q-когерентные состояния (q-КС). Для деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q; A_{\pm}, \mathcal{N})$ q-КС были введены и изучены впервые в [35] (см. также [2I, 23, 37, 40, 43, 47]). Для алгебры $\mathcal{A}(q; A_{\pm}, \mathcal{N})$ (2.I4) q-КС можно определить как семейство состояний [35]

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} ([n;\mu]!)^{-1/2} z^n |n\rangle, \quad \mu = q^2, \quad |z| < (1-\mu)^{-1/2} = [\infty, \mu]^{1/2}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.I}$$

являющихся собственными состояниями для оператора уничтожения A_-,

$$A_- |z\rangle = z |z\rangle. \tag{3.2}$$

При $\mu \to 1$ эти состояния переходят в стандартные КС бозонного осциллятора. Определим стандартным образом базисную экспоненту q-анализа

$$E_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n;\mu]!} = \frac{1}{G((1-\mu)z)}; \quad G(z) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - \mu^n z) \tag{3.3}$$

$$\lim_{\mu \to 1} E_\mu(z) = e^z \tag{3.4}$$

(легко видеть, что радиус сходимости в (3.3) равен $[\infty, \mu] = (1-\mu)^{-1/2}$). Тогда с учетом определения базиса Фока $\{|n\rangle\}$ (3.I) можно записать в виде

$$|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z A_+)^n}{[n;\mu]!} |0\rangle = E_\mu(z A_+)|0\rangle. \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) аналогично определению обобщенного КС по Переломову, то есть действием унитарного оператора сдвига $D(\zeta)$ на вакуум:

$$|\zeta\rangle = D(\zeta)|0\rangle, \quad D(\zeta) = e^{-\frac{1}{2}|\zeta|^2} e^{\zeta b^+} e^{-\bar\zeta b} = e^{\zeta b^+ - \bar\zeta b} \tag{3.6}$$

$$b|z\rangle = z|z\rangle.$$

Используя ортогональность состояний Фока, получаем

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}_1 \; z_2)^n}{[n;\mu]!} = E_\mu(\bar{z}_1 z_2), \tag{3.7}$$

$$\langle z | z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{[n;\mu]!} = E_\mu(|z|^2) . \tag{3.8}$$

Формула (3.8) позволяет нормировать q-КС (3.I) или (3.5), однако, удобнее использовать ненормированный вариант, так как в деформированном случае отсутствуют групповые свойства, упрощающие формулы с участием нормированных КС в стандартном случае.

Как и для недеформированного осциллятора, q-КС образуют сверхполное (переполненное) семейство состоний при $z \in \mathcal{D}_\mu$ $\mathcal{D}_\mu = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 < [\infty;\mu] \}$. Это позволяет рассматривать q-КС и как КС в смысле Клаудера, то есть рассматривать соответствующее гильбертово пространство как пространство Аронштайна с воспроизводящим ядром.

Определив аналитические в области $\mathcal{D}_\mu$ функции можно построить [35] аналог представления Баргманна-Сигала для деформированного осциллятора, в котором скалярное произведение определяется с помощью базисного интеграла Джексона. В этом деформированном голоморфном представлении [35] A_+ описывается как оператор умножения на аргумент, а A_- реализуется как базисная производная (2.42).

$$A_- f(z) = \delta_\mu f(z) = \frac{f(z) - f(\mu z)}{(1-\mu) z} . \tag{3.9}$$

В пределе $\mu \to 1$ это представление переходит в обычное голоморфное представление в пространстве Баргманна для недеформированного осциллятора, а в пределе $\mu \to 0$ получаем гильбертово пространство Харди функций аналитических на окружности (доказательство всех этих утверждений имеется в [35]).

Аналогичные результаты теми же, что и в [35], методами можно получить и для q-КС деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q;\alpha_\pm,\mathcal{N})$ (2.I2), и мы не будем останавливаться на этом.

Рассмотрим q-КС для деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q;a_\pm,\mathcal{N})$ В этом случае q-экспонента имеет вид

$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} , \; z \in \mathbb{C}, \; e_q(z) \xrightarrow[q \to 1]{} e^z . \tag{3.I0}$$

В отличии от q-экспоненты Джексона (3.3), $e_q(z)$ определена на всей комплексной плоскости. Используя (3.IO) можно определить q-КС для $\mathcal{A}(q;a_\pm,\mathcal{N})$ по

$$|z\rangle=\sum_{n=0}^{\infty} z^n([n]_q!)^{-1/2}|n\rangle=e_q(za_+)|0\rangle \tag{3.II}$$

как q-аналог обобщенного КС в смысле Переломова. Заметим, что в (3.II) q-экспонента может быть заменена на обычную [23]

$$|z\rangle=e^{zT_a}|0\rangle,\ T_a=a_+\frac{\mathcal{N}+1}{[\mathcal{N}+1]_q}=b_+\sqrt{\frac{\mathcal{N}+1}{[\mathcal{N}+1]_q}}\ . \tag{3.I2}$$

Состояние (3.II) является также q-аналогом КС в смысле Глаубера, т.е. является собственным состоянием q-оператора уничтожения

$$a_-|z\rangle=z|z\rangle. \tag{3.I3}$$

легко проверить, что

$$\langle z_1|z_2\rangle=e_q(\bar{z}_1z_2)\ ,\ \langle z|z\rangle=e_q(|z|^2). \tag{3.I4}$$

Отметим, что, в отличии от $E_\mu(z)$, функция $e_q(z)$ имеет нули на отрицательной части вещественной оси. Следуя [43], наибольший корень функции $e_q(x)$ обозначим $-\zeta_o$ $(\zeta_o>0)$. Введем ступенчатую функцию

$$\eta(x)=\begin{cases}1\ , & x>-\zeta_o\\ 0 & x\le-\zeta_o\end{cases} \tag{3.I5}$$

и в дальнейшем, как это принято, например, в операционном исчислении, будем понимать под $e_q(x)$ функцию $e_q(x)\eta(x)$.

Каждому вектору $|f\rangle$ из пространства Фока $\mathcal{H}_F$ q-осциллятора $\mathcal{A}(q;a_\pm,\mathcal{N})$ сопоставим аналитическую функцию $f(z)$, положив

$$|f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty} f_n|n\rangle\longmapsto f(z)=\langle\bar{z}|f\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n z^n}{\sqrt{[n]_q!}}\cdot \tag{3.I6}$$

В частности элементам базиса $|n\rangle$ в $\mathcal{H}_F$ сопоставим функции

$$|n\rangle\longmapsto n(z)=z^n([n]_q!)^{-1/2}. \tag{3.I7}$$

Тогда, при $|f\rangle\in\mathcal{H}_F$ имеем

$$\langle\bar{z}|a_+|f\rangle=zf(z)$$

$$\langle \bar z | a_- | f \rangle = D_q f(z) = \frac{f(qz)-f(q^{-1}z)}{(q-q^{-1})z}, \tag{3.18}$$

где разностная производная (2.39) обладает, в частности, свойствами

$$D_q C = 0 \quad (C = const); \quad D_q z^n = [n]_q z^{n-1}$$
$$D_q e_q(\alpha z) = \alpha e_q(\alpha z), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3.19}$$

Обозначим $\mathcal{F}$ пространство аналитических в $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 < \zeta_0\}$ функций, являющихся образами при отображении (3.16) элементов из $\mathcal{H}_F$. На $\mathcal{F}$ определим операторы (ср. (2.38)-(2.41))

$$\begin{aligned} &a_+ f(z) = M f(z) = z f(z), \quad a_+ z^n = z^{n+1}, \\ &a_- f(z) = D_q f(z), \quad a_- z^n = [n]_q z^{n-1}, \\ &\mathcal{N} f(z) = M \frac{d}{dz} f(z) = z \frac{df}{dz}, \quad \mathcal{N} z^n = n z^n, \\ &q^{\mathcal{N}} f(z) = e^{\eta \mathcal{N}} f(z) = K_q f(z), \quad q^{\mathcal{N}} z^n = q^n z^n. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Легко проверить, что операторы (3.20) определяют в $\mathcal{F}$ представление алгебры $\mathcal{A}(q, a_\pm, \mathcal{N})$.

Для того, чтобы задать в $\mathcal{F}$ скалярное произведение, надо определить операцию обратную q-дифференцированию D_q. Модифицируя на случай $[n]_q$ определение q-интеграла Джексона (соответствующего случаю $[n; q]$), положим

$$\int_0^{a} {}^{q} f(z) d_q z \doteq a(q^{-1} - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n+1} f(q^{2n+1} a); \tag{3.21}$$

$$\int_0^{\infty} {}^{q} f(z) d_q z \doteq (q^{-1} - q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n+1} f(q^{2n+1}). \tag{3.22}$$

Используя правило Лейбница для q-производной

$$D_q(f(z)g(z)) = \begin{cases} (D_q f(z)) g(q^{-1}z) + f(qz)(D_q g(z)) \\ f(q^{-1}z)(D_q g(z)) + (D_q f(z))\, g(qz), \end{cases} \tag{3.23}$$

получаем правило q-интегрирования по частям

$$\int_0^{a} {}^{q} f(qz) d_q z = (f(z) g(z))\Big|_{z=0}^{z=a} - \int_0^{a} {}^{q} (D_q f(z)) g(q^{-1}z) d_q z \tag{3.24a}$$

$$ {}^{q}\!\!\int_0^a f(q^{-1}z)\,d_q z = (f(z)g(z))\Big|_{z=0}^{z=a} - {}^{q}\!\!\int_0^a (D_q f(z))g(qz)\,d_q z. \qquad (3.24в) $$

Вычисляя при помощи (3.2I) и (3.24) имеем [43]

$$ {}^{q}\!\!\int_0^{\zeta_0} e_q(-x)x^m\,d_q x = [m]_q!\ ,\quad m\in\mathbb{N}. \qquad (3.25) $$

Заметим, что интеграл в (3.25) напоминает интегральное представление Γ-функции

$$ \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, $$

так что по крайней мере при натуральных значениях аргумента выполняется равенство

$$ \Gamma_q(x) = {}^{q}\!\!\int_0^{\zeta_0} t^{x-1} e_q(-t)\,d_q t. \qquad (3.26) $$

Однако, нам не удалось пока найти строгое доказательство этой формулы в общем случае.

Используя (3.25), определение q-интеграла (3.2I) и формулу (3.II) для q-КС, несложно получить разложение единицы на множестве деформированных КС

$$ {}^{q}\!\!\int_{\mathcal{D}} |z\rangle\langle z|\,d\mu_q(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ {}^{q}\!\!\int_0^{\zeta_0} |z\rangle\langle z|\,e_q(-|z|^2)\,d_q|z|^2 = $$
$$ = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}\ ,\quad z=|z|e^{i\theta}. \qquad (3.27) $$

Таким образом, q-КС (3.II) при $z\in\mathcal{D}$ образуют в $\mathcal{F}$ полную систему векторов. Произвольный элемент $|f\rangle\in\mathcal{H}_F$ может быть записан в виде

$$ |f\rangle = {}^{q}\!\!\int_{\mathcal{D}} |z\rangle\langle z|f\rangle\,d\mu_q(z), \qquad (3.28) $$

и, в частности, для q-КС $|\alpha\rangle$ имеем

$$ |\alpha\rangle = {}^{q}\!\!\int_{\mathcal{D}} |z\rangle\langle z|\alpha\rangle\,d\mu_q(z) = {}^{q}\!\!\int_{\mathcal{D}} |z\rangle\,e_q(\bar z\alpha)\,d\mu_q(z). \qquad (3,29) $$

Поскольку при $|\bar z\alpha|<\zeta_0$, $\langle z|\alpha\rangle = e_q(\bar z\alpha)$ не обращается в ноль, то (3.29) дает линейную связь на множестве q-КС. Следовательно, семейство q-КС является переполненным.

Из (3.29) и (3.16) получаем

$$f(\alpha)=\langle\bar{\alpha}|f\rangle=\int\limits_{\mathcal{D}}^{q}\langle\bar{\alpha}|\bar{z}\rangle\langle\bar{z}|f\rangle d\mu_q(z) \\ =\int\limits_{\mathcal{D}}^{q} f(z)\mathcal{K}_q(\alpha,\bar{z})d\mu_q(z). \tag{3.30}$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}_q(\alpha,\bar{z})=\langle\bar{\alpha}|\bar{z}\rangle=e_q(\alpha\bar{z}) \tag{3.31}$$

является воспроизводящим ядром для семейства q-КС. Аналогично, ковариантным q-символом линейного оператора T (в смысле Березина [51]) будет

$$T(z,\bar{z}) = \frac{\langle\bar{z}|T|\bar{z}\rangle}{\langle\bar{z}|\bar{z}\rangle}, \tag{3.32}$$

так что

$$(Tf)(z)=\int\limits_{\mathcal{D}}^{q} T(z,\bar{\alpha})f(\alpha)\mathcal{K}_q(z,\bar{\alpha})d\mu_q(\alpha). \tag{3.33}$$

Определим в $\mathcal{F}$ скалярное произведение

$$(f,g)=\int\limits_{\mathcal{D}}^{q}\overline{f(z)}\,g(z)d\mu_q(z)= \\ =\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{q\;\zeta_0}\left[\int\limits_{0}^{2\pi}\overline{f(z)}\,g(z)d\vartheta\right]e_q(-|z|^2)d_q|z|^2. \tag{3.34}$$

Тогда, для элементов базиса имеем

$$(n(z),m(z))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{q\;\zeta_0}\left[\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{|z|^{n+m}}{\sqrt{[n]_q![m]_q!}}e^{i(m-n)\vartheta}d\vartheta\right]e_q(-|z|^2)d|z|^2= \\ =\delta_{nm}=\langle n|m\rangle. \tag{3.35}$$

Следовательно, базис $\{n(z)\}$ (3.17) в $\mathcal{F}$ ортонормирован.

Покажем, что a_- и a_+ сопряжены друг другу относительно скалярного произведения (3.34) в $\mathcal{F}$, то есть $a_+=(a_-)^+$. Для этого надо доказать, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}}^{q}f(z)(D_q g(z))d\mu_q(z)=\int\limits_{\mathcal{D}}^{q}z\,\overline{f(z)}\,g(z)d\mu_q(z). \tag{3.36}$$

Подставив в (3.36)

$$z f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n z^{n+1}}{\sqrt{[n]_q!}},$$

$$D_q g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[m]_q g_m z^{m-1}}{\sqrt{[m]_q!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n+1]_q g_{n+1} z^n}{\sqrt{[n+1]_q!}}$$

и интегрируя по ϑ, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_n g_{n+1} [n+1]_q}{\sqrt{[n]_q! [n+1]_q!}} \, {}^q\!\!\int_0^{\zeta_0} |z|^{2n} e_q(-|z|^2) d_q |z|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_n g_{n+1}}{\sqrt{[n]_q! [n+1]_q!}} \, {}^q\!\!\int_0^{\zeta_0} |z|^{2n+1} e_q(-|z|^2) d_q |z|^2.$$

Учитывая (3.35), получаем очевидное равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_n g_{n+1} [n]_q! [n+1]_q}{[n]_q! \sqrt{[n+1]_q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{f}_n g_{n+1} [n+1]_q!}{[n]_q! \sqrt{[n+1]_q!}}.$$

Заметим, что несложно получить деформированные аналоги супер-КС [50] для суперсимметричного осциллятора с одной бозонной и одной фермионной степенями свободы. Пусть $\mathcal{A}_-$ q-аналог оператора уничтожения A ([50] формула (16)) этой модели. Она получается заменой операторов рождения и уничтожения бозонов и фермионов на их деформированные аналоги (2.1) и (2.49). Тогда суперсимметричное q-КС можно представить в виде

$$\| z \rangle = \gamma_1 | z_f \rangle + \gamma_2 | \tilde{z}_s \rangle = \gamma_1 \begin{pmatrix} |z\rangle \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} |z\rangle \\ |z\rangle \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \in \mathbb{C}, \qquad (3.37)$$

где $|z\rangle$ q-КС (3.11), (3.13). Тогда, легко проверить, что

$$\mathcal{A}_- \| z \rangle = z \| z \rangle, \; \mathcal{A}_- | z_f \rangle = z | z_f \rangle, \; \mathcal{A}_- | \tilde{z}_s \rangle = z | \tilde{z}_s \rangle.$$

Здесь $|z_f\rangle$ и $|\tilde{z}_s\rangle$ q-КС в фермионном и бозонном секторе модели. Используя эти определения, не сложно получить q-аналоги основных результатов [50]. Например,

$$\langle z_f | z_f \rangle = \langle z | z \rangle = e_q(|z|^2), \; \langle \tilde{z}_s | \tilde{z}_s \rangle = \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\right) e_q(|z|^2),$$

$$\langle z_f | z_s \rangle = -\frac{\partial}{\partial z} e_q(|z|^2) \qquad \text{и т.д.}$$

Выше мы рассмотрели q-КС для деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$. Аналогичные методы можно использовать для построения q-КС других квантовых алгебр, например, $su_q(2)$ или $su_q(1,1)$. Мы обсудим эти состояния в следующем разделе.

4. Некоторые приложения q-осцилляторов.

4.I. q-осцилляторное представление $su_q(2)$. Известно, что генераторы алгебры Ли можно выразить через операторы рождения и уничтожения (или операторы координаты и импульса) одного или нескольких осцилляторов [52, 53]. Такое представление называют канонической реализацией или бозонизацией. Аналогичная ситуация имеется и для квантовых алгебр Хопфа, генераторы которых можно реализовать образующими алгебры $\mathcal{A}(q)$ для одного или нескольких независимых q-осцилляторов [I9-23, 40-42]. Мы будем называть такое представление q-канонической реализацией или q-осцилляторным представлением. В общем случае, имея конкретную бозонизацию генераторов алгебры Ли, мы получим q-осцилляторное представление соответствующей квантовой алгебры, заменяя бозонные операторы на образующие q-осцилляторной алгебры $\mathcal{A}(q)$. В этом и следующих пунктах мы рассмотрим эту задачу для простейших квантовых алгебр $su_q(2)$ и $su_q(1,1)$ и квантовых супералгебр $sl_q(2|1)$, $osp_q(1|2)$. Рассмотрим сперва квантовую алгебру Хопфа $su_q(1,1)$. Эта алгебра является компактной формой для $sl_2(2)$, описанной выше (2.43-46). Генераторы J_0, $J_\pm$ квантовой алгебры $su_q(2)$ удовлетворяют ПС.

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm \;, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]_q . \tag{4.I}$$

Структура алгебры Хопфа устанавливается соотношениями (2.45-46). Известно (см., например,[I7]), что неприводимые представления T^j для $su_q(2)$ индексируются целыми и полуцелыми значениями q-спина j, $j=0,1/2,1,3/2,\dots$ и действуют в пространстве размерности $d=2j+1$. Обозначим $\{|j,m\rangle;\ m=-j,-j+1,\dots,j-1,j\}$ базис в V^j и определим действие образующих алгебры $su_q(2)$ по

$$\begin{aligned} J_0|j,m\rangle &= m|j,m\rangle, \\ J_\pm|j,m\rangle &= \left([j\mp m]_q\,[j\pm m+1]_q\right)^{1/2}|j,m\pm 1\rangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Оператор Казимира

$$C_2 \equiv C_2(su_q(2)) = [J_0 + \tfrac{1}{2}]_q^2 + J_- J_+ = [J_0 - \tfrac{1}{2}]_q^2 + J_+ J_- \tag{4.3}$$

действует на $|j, m\rangle$ по правилу

$$C_2 |j, m\rangle = [j + \tfrac{1}{2}]^2 |j, m\rangle. \tag{4.4}$$

Векторы $|j, m\rangle$ получаются из старшего вектора $|j, -j\rangle$ повторным действием оператора J_+

$$|j, m\rangle = \sqrt{\frac{[j-m]_q!}{[2j]_q! [m+j]_q!}} (J_+)^{m+j} |j, -j\rangle. \tag{4.5}$$

Если $L_0, L_\pm$ генераторы алгебры Ли $su(2)$ в представлении T^j, удовлетворяющие недеформированному варианту соотношений (4.I), то

$$J_+ = \sqrt{\frac{[j-m]_q [j+m+1]_q}{(j-m)(j+m+1)}} L_+$$

$$J_0 = L_0 .$$

$$J_- = \sqrt{\frac{[j+m]_q [j-m+1]_q}{(j+m)(j-m+1)}} L_- \tag{4.6}$$

Отметим, что эти равенства можно рассматривать, как реализацию в представлении T^j деформирующего отображения [54].

Удобно реализовать V^j в виде пространства многочленов от двух переменных. Тогда

$$|j, m\rangle = \frac{u^{j+m} \, v^{j-m}}{\sqrt{[j+m]_q! [j-m]_q!}}. \tag{4.7}$$

В этом случае генераторы можно реализовать в виде q- производных [55-56].

$$J_+ = u D_q^{(v)}, \quad J_- = v D_q^{(u)}, \quad J_0 = \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial u}\right). \tag{4.8}$$

Здесь $D_q^{(v)}$ действует на $f(u, v)$ как q- производная (2.39) по переменной v. В этой реализации скалярное произведение в пространстве представления V^j определяется по

$$(f(u,v), g(u,v)) = f(D_q^{(u)}, D_q^{(v)}) g(u,v) \Big|_{u=v=0}. \tag{4.9}$$

Базис (4.7) является ортонормированным по этому скалярному произведению.

Пусть $\mathcal{A}(q; a_\pm^{(i)}, \mathcal{N}_i)$, $i=1,2$, два независимых q-осциллятора (2.I). Тогда операторы (4.I) можно представить в виде [2I, 22]

$$J_+ = a_+^{(1)} a_-^{(2)}, \quad J_- = a_+^{(2)} a_-^{(1)}, \quad J_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2). \qquad (4.10)$$

В этом q-осцилляторном представлении базисные векторы $|j,m\rangle$ имеют вид

$$|j,m\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle = |j+m\rangle \otimes |j-m\rangle =$$
$$= \frac{(a_+^{(1)})^{j+m}}{\sqrt{[j+m]_q!}} \frac{(a_+^{(2)})^{j-m}}{\sqrt{[j-m]_q!}} |0\rangle \otimes |0\rangle. \qquad (4.11)$$

В [47] для $su_q(2)$ были введены когерентные состояния в смысле Переломова

$$|z\rangle = e_q(z J_+)|j,-j\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \left[\frac{[2j]_q!}{[j-m]_q! [j+m]_q!} \right]^{1/2} z^{j+m} \, |j,m\rangle. \qquad (4.12)$$

Это позволяет формально ввести голоморфное представление $f(z) = \langle \bar{z} | f \rangle$, где $|f\rangle$ произвольный вектор из V^j (см. раздел 3). В этом представлении генераторы квантовой алгебры реализуются в виде

$$J_- = D_q, \quad J_+ = -q^{-2j} z^2 D_q + [2j]_q = K_{q^{-1}}, \quad J_0 = z\frac{d}{dz} - j\mathbb{1}, \qquad (4.13)$$

где D_q и K_q определены в (2.39-40). В [47] приведены формулы, определяющие для этих состояний разложение единицы, скалярное произведение и т.п.. Однако, опыт работы с q-КС (см. раздел 3) показывает, что эти формулы требуют достаточно детального обоснования, а возможно, и корректировки, например, области интегрирования в формуле для разложения единицы. Мы надеемся рассмотреть этот вопрос в отдельной работе.

В заключение этого пункта отметим, что мы предполагаем, что $q^M \neq 1$. Некоторые особенности случая, когда параметр q является корнем из единицы обсуждаются, например, в [56].

4.2. q-осцилляторное представление $su_q(1,1)$. Квантовая алгебра $su_q(1,1)$ является некомпактной формой алгебры $sl_q(2)$. Эта алгебра порождается тремя образующими $K_0, K_\pm$ с ПС

$$[K_0,K_\pm]=\pm K_\pm\ ,\ [K_+,K_-]=-[2K_0]_q, \tag{4.14}$$

которые отличаются от (4.1) знаком в последнем равенстве. Оператор Казимира для $su_q(1,1)$

$$C_2=C_2(su_q(1,1))=\left[K_0+\frac{1}{2}\right]_2^2-K_-K_+=\left[K_0-\frac{1}{2}\right]_q^2-K_+K_-. \tag{4.15}$$

Как и $su(1,1)$, квантовая алгебра $su_q(1,1)$ имеет несколько серий представлений. Мы будем рассматривать только представления D_k^+ являющиеся аналогами представлений положительной дискретной серии. Все эти представления бесконечномерны и индексируются положительным целым или полуцелым числом k. Пусть $\{|k,m\rangle,\ m=0,1,2,\dots\}$ базис в гильбертовом пространстве V_k представления D_k^+. Тогда действие генераторов имеет вид

$$\begin{aligned}
&K_0|k,m\rangle=(k+m)|k,m\rangle,\\
&K_+|k,m\rangle=\left[[m+1]_q[m+2k]_q\right]^{1/2}|k,m+1\rangle,\\
&K_-|k,m\rangle=\left[[m]_q[m+2k-1]_q\right]^{1/2}|k,m-1\rangle.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Имеем также

$$[K_0]_q|k,m\rangle=[k+m]_q|k,m\rangle, \tag{4.17}$$

$$C_2|k,m\rangle=\left[k-\frac{1}{2}\right]_q^2|k,m\rangle. \tag{4.18}$$

Несложно убедиться в том, что элементы этого базиса получаются из вектора старшего веса $|k,0\rangle$ повторным действием оператора K_+

$$|k,m\rangle=\left([m]_q!\,([2k]_q)_m\right)^{-1/2}K_+^m|k,0\rangle. \tag{4.19}$$

Здесь

$$([a]_q)_n=[a]_q\cdot[a+1]_q\cdot\ldots\cdot[a+n-1]_q \tag{4.20}$$

q-символ Похгаммера.

Пространство V_k можно реализовать в виде гильбертова пространства $\mathcal{F}_k$ функций от $z\in\mathbb{C}$ аналитических в открытом круге $|z|<1$. Скалярное произведение в $\mathcal{F}_k$ определяется формулой

$$(f;h)_k=\frac{2k-1}{\pi}\int\limits_{|z|=1}\left(1-|z|^2\right)^{2(k-1)}\overline{f(z)}\,h(z)\,d^2z \tag{4.21}$$

(если $k=\frac{1}{2}$, то $\frac{(2k-1)}{\pi} \longrightarrow \frac{1}{\pi}$). Элементам базиса $|k,m\rangle$ в $\mathcal{F}_k$ соответствуют функции

$$v_m^k(z)=\left([m]_q B_q(m,2k)\right)^{-1/2} z^m, \tag{4.22}$$

образующие ортогональный, но не нормированный базис в $\mathcal{F}_k$

$$(v_m^k(z), v_m^k(z))_k = \delta_{nm} \frac{n B(n,2k)}{[m]_q B_q(n,2k)}. \tag{4.23}$$

Здесь $B_q(n,2k)$ q-аналог бэта-функции $B(n,2k)$,

$$B_q(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma_q(\alpha)\,\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}, \tag{4.24}$$

а

$$\Gamma_q(x) = q^{-1/2(x-1)(x-2)}\,\Gamma(x;q^2), \tag{4.25}$$

где $\Gamma(x;q)$ q-Γ-функция q-анализа [9]

$$\Gamma(x;q)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x};\quad (a;q)_\infty=\lim_{n\to\infty}(a;q)_n$$

$$(a;q)_n=\prod_{m=0}^{\infty}\frac{(1-aq^m)}{(1-aq^{m+n})}=(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1}). \tag{4.26}$$

Отметим, что q-Γ-функция $\Gamma_q(x)$ (4.25) удовлетворяет, естественным соотношениям

$$\Gamma_q(x+1)=[x]_q\,\Gamma_q(x);\quad \Gamma_q(n+1)=[n]_q! \tag{4.27}$$

В $\mathcal{F}_k$ генераторы алгебры $su_q(1,1)$ имеют вид

$$K_0=(k\mathbb{1}+z\frac{d}{dz}),\qquad K_-=D_q,$$
$$K_+=z^{2(1-k)}D_q M^{2k}=[2k]_q z K_q - q^{-2k} z^2 D_q, \tag{4.28}$$

где M, D_q, K_q определены в (2.38–40). При $f\in\mathcal{F}_k$

$$K_0 f(z)=kf(z)+z\frac{df(z)}{dz},\quad K_- f(z)=\frac{f(qz)-f(q^{-1}z)}{(q-q^{-1})z},$$

$$K_+ f(z)=z\,\frac{q^{2k}f(qz)-q^{-2k}f(q^{-1}z)}{q-q^{-1}}, \tag{4.29}$$

и, в частности, при $f=v_m^k(z)$ (4.22)

$$K_0 v_m^k=(k+m)v_m^k, \quad K_+ v_m^k=\left([m+1]_q[2k+m]_q\right)^{1/2} v_{m+1}^k,$$
$$K_- v_m^k=\left([m]_q[2k+m+1]_q\right)^{1/2} v_{m-1}^k, \tag{4.30}$$

$$v_m^k(z)=\left([m]_q!\,([2k]_q)_m\right)^{-1/2}(K_+)^m v_0^k(z). \tag{4.31}$$

Генераторы $K_0, K_\pm$ можно реализовать [23] при помощи образующих алгебры $\mathcal{A}(\sqrt{q}; a_\pm, \mathcal{N})$:

$$K_0=\frac{1}{2}\left(\mathcal{N}+\frac{1}{2}\right), \quad K_\pm=\beta(a_\pm)^2, \quad \beta=(q^{1/2}+q^{-1/2})^{-1}. \tag{4.32}$$

В этом случае пространство $\mathcal{H}_F$ представления Фока $\sqrt{q}$-осциллятора $\mathcal{A}(\sqrt{q})$ расщепляется в прямую сумму двух неприводимых компонент $\mathcal{H}_F=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_0(\mathcal{H}_1)$ образовано состояниями с четным (нечётным) числом q-квантов. Из (4.32) и (4.15) получаем на базисном элементе $|n\rangle$ из $\mathcal{H}_F$

$$C_2(su_q(1,1))|n\rangle=\left[\frac{1}{4}\right]_q|n\rangle=\left[-\frac{1}{4}\right]_q^2|n\rangle. \tag{4.33}$$

Тогда из (4.18) следует, что $k=\frac{1}{4}$ или $k=\frac{3}{4}$. Учитывая (4.16), видим, что в $\mathcal{H}_0$ действует представление с $k=\frac{1}{4}$ и $|2m\rangle=$ $=|\frac{1}{4}, m\rangle$, а в $\mathcal{H}_1$ имеем $k=\frac{3}{4}$ и $|2m+1\rangle=|\frac{3}{4}, m\rangle$.

Укажем также q-аналог реализации Гольдштейна-Примакова [40]

$$K_+=\sqrt{[\mathcal{N}]_q}\,a_+, \quad K_-=a_-\sqrt{[\mathcal{N}]_q}, \quad K_0=\mathcal{N}+\frac{1}{2}. \tag{4.34}$$

Пусть $L_0, L_\pm$ генераторы алгебры Ли $su(1,1)$ реализованные аналогично (4.34) при помощи обычных операторов рождения и уничтожения $b_\pm$ бозонного осциллятора:

$$L_+=\sqrt{\mathcal{N}}\,b_+, \quad L_-=b_-\sqrt{\mathcal{N}}, \quad L_0=\mathcal{N}+\frac{1}{2}. \tag{4.35}$$

Отметим, что генераторы $K_0, K_\pm$ и недеформированные генераторы связаны [40] деформирующим отображением

$$K_+=L_+\frac{[\mathcal{N}+1]_q}{\mathcal{N}+1}, \quad K_-=\frac{[\mathcal{N}+1]_q}{\mathcal{N}+1}L_-, \quad K_0=L_0. \tag{4.36}$$

Генераторы квантовой алгебры $su_q(1,1)$ можно реализовать также парой q-осцилляторов $\mathcal{A}(q;\, a_\pm^{(i)}, \mathcal{N}_i)$, $i=1,2$, [23]. В этом случае

$$K_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + 1), \quad K_+ = (K_-)^\dagger = a_+^{(1)} a_+^{(2)}. \qquad (4.37)$$

Эти равенства позволяют определить представление для $\mathcal{SU}_q(1,1)$ в $\mathcal{H}_F^{(1)} \otimes \mathcal{H}_F^{(2)}$. Поскольку оператор $(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2)$ коммутирует со всеми генераторами (4.37), то мы получаем приводимое представление. Разложение этого представления на неприводимые соответствует разложению

$$\mathcal{H}_F^{(1)} \otimes \mathcal{H}_F^{(2)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_\ell . \qquad (4.38)$$

$\mathcal{H}_\ell$ растягивается базисными векторами $\{|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle\}$ с $n_1 - n_2 = \ell$, $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$.

Еще одно q-осцилляторное представление можно получить [23] используя копроизведение Δ на $\mathcal{SU}_q(1,1)$:

$$\Delta(K_0) = K_0 \otimes 1 + 1 \otimes K_0, \; \Delta(K_\pm) = K_\pm \otimes q^{K_0} + q^{-K_0} \otimes K_\pm . \qquad (4.39)$$

Определим $a_\pm^{(1)} = a_\pm \otimes \mathbb{1}$, $a_\pm^{(2)} = \mathbb{1} \otimes a_\pm$, $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N} \otimes 1$, $\mathcal{N}_2 = 1 \otimes \mathcal{N}$, где $a_\pm, \mathcal{N}$ генераторы $\mathcal{A}(\sqrt{q})$. Тогда имеем

$$K_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 + 1), \quad \beta = \left(\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{-1},$$
$$K_\pm = \beta\left((a_\pm^{(1)})^2\, q^{\frac{1}{2}(\mathcal{N}_2 + \frac{1}{2})} + q^{-\frac{1}{2}(\mathcal{N}_1 + \frac{1}{2})} (a_\pm^{(2)})^2\right). \qquad (4.40)$$

Пространство $\mathcal{H}_F \otimes \mathcal{H}_F$ соответствующего представления можно разложить не неприводимые

$$\mathcal{H}_F \otimes \mathcal{H}_F = \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathbb{C}^2 \otimes \sum_{k=1}^{\infty}{}^{\oplus} (\mathcal{H}_k \oplus \mathcal{H}_{k+1/2}). \qquad (4.41)$$

В (4.41) неприводимые компоненты $\mathcal{H}_k$ индексируются собственным значением генератора K_0 на векторе младшего веса

$$K_0 |k,0\rangle = k\, |k,0\rangle, \quad K_- |k,0\rangle = 0, \qquad (4.42)$$

а $|k,n\rangle$ можно получить из $|k,0\rangle$ повторным действием оператора K_+.

Определим для $\mathcal{SU}_q(1,1)$ когерентные состояния в смысле Глаубера (Барута-Жирарделло), т.е., как собственные состояния оператора K_-:

$$K_- |k,z\rangle = z\, |k,z\rangle. \qquad (4.43)$$

Разложив $|k,z\rangle$ по базису $|k,m\rangle$ в пространстве V_k представления D_+^k и решая реккурентное соотношение для коэффициентов, имеем

$$|k,z\rangle = \left(\Gamma_q(2k)\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \left([m]_q!\, \Gamma_q(2k+m)\right)^{-1/2} z^m |k,m\rangle. \tag{4.44}$$

Из ортонормированности состояний $|k,m\rangle$ получаем

$$\langle k,z_1|k,z_2\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 z_2)^m}{[m]_q!([2k])_m} = {}_0F_1^q(2k,\bar{z}_1 z_2), \tag{4.45}$$

$${}_0F_1^q(a,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{([a]_q)_k} \frac{x^k}{[k]_q!}. \tag{4.46}$$

Другой вариант КС для $su_q(1,1)$ – КС в смысле Переломова – получим, действуя на $|k,0\rangle$ оператором $e_q(zK_+)$ [40] (см. также [47]).

$$|k,z\rangle_\rho = e_q(zK_+)|k,0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{bmatrix} 2k+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q\right)^{1/2} z^n |k,n\rangle \tag{4.47}$$

$$\langle k,z_1|k,z_2\rangle = (1-\bar{z}_1 z_2)^k \tag{4.48}$$

(предполагается, что $|z|^2 < q^{k-1}$). В [40] отмечается, что q-экспоненту в (4.47) можно заменить на обыкновенную (см. (4.36)):

$$|k,z\rangle_\rho = exp\left(zK_+ \frac{N+1}{[N+1]_q}\right)|k,0\rangle = e^{zL_+}|k,0\rangle. \tag{4.49}$$

Это соотношение означает, что КС в смысле Переломова для $su_q(1,1)$ не деформируются. Мы предполагаем обсудить КС для $su_q(1,1)$ более подробно в отдельной публикации. (Отметим, что формальные соотношения выписанные в [47] требуют на наш взгляд подробного обоснования).

4.3. q-осцилляторное представление квантовых супералгебр. Для квантовой супералгебры $sl_q(m/n)_q$ – осцилляторная реализация была предложена в [20]. Укажем, соответствующую конструкцию для случая $sl_q(2|1)$, так как обобщение на случай произвольных m и n достаточно очевидно. Для определенности из двух матриц Картана, отвечающих $sl_q(2|1)$, выберем $A_1 = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, (вторая матрица равна $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$). Тогда ПС имеют вид

$$k_i k_j = k_j k_i\,,\quad k_i X_j = q^{\frac12 a_{ij}} X_j k_i\,,\quad k_i Y_j = q^{-\frac12 a_{ij}} Y_j k_i \tag{4.50}$$
$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij}\,[H_i]_q\,,\quad k_i^2 = q^{H_i}\,,\quad i = 1,2\,,$$

где коммутатор градуирован

$$[a, b] = ab - (-)^{p(a)p(b)}\, ba\,, \tag{4.51}$$

$p(a)$ - четность элемента a ; $p(X_1)=p(Y_1)=1$, $p(X_2)=p(Y_2)=0$.
Удобно ввести дополнительный набор генераторов

$$X_3 = [X_1, X_2]_q \doteq X_1 X_2 - q X_2 X_1\ ,\ Y_3 = [Y_1, Y_2]_{q^{-1}}\ ,\ k_3 = k_1 k_2\,, \tag{4.52}$$

(дополнительные ПС следуют из (4.52) и (4.50) [20]). Если $f_\pm, M$ фермиевский q-осциллятор (2.49), а $a_\pm^{(i)}, N_i$, $i=1,2$, пара независимых бозонных q-осцилляторов (2.I), то q- осцилляторное представление имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= a^{(1)} f_+\,, & X_2 &= a_-^{(2)} a_+^{(1)}\,, & k_1 &= \omega^{-1}\omega_1\,,\\ Y_1 &= f_- a_+^{(1)}\,, & Y_2 &= a_-^{(1)} a_+^{(2)}\,, & k_2 &= \omega_1^{-1}\omega_2\,,\\ \omega &= q^{-\frac12 M}\,, & \omega_1 &= q^{\frac12 N_1}\,, & \omega_2 &= q^{\frac12 N_2}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

В случае $sl_2(n/m)$ q-осцилляторная реализация включает столько фермионных q-осцилляторов, сколько имеется нулевых диагональных элементов в матрице Картана, так как генераторы, соответствующие корневым векторам нулевой длины нечетны. (см. детали в [20]).

Для q-супералгебры $osp_q(1/2)$ порождаемой тремя базисными элементами $V_\pm, H$ основные ПС имеют вид

$$[H, V_\pm] = \pm\frac12 V_\pm\ ,\quad [V_+, V_-]_{(+)} = \left[-\frac12 H\right]_q\ . \tag{4.54}$$

Эти генераторы выражаются через порождающие элементы q^2-осциллятора $A(q^2)$ такого что

$$a_- a_+ - q^2 a_+ a_- = q^{-2N}\ ,\quad a_- a_+ - q^{-2} a_+ a_- = q^{2N}$$

по формулам [4I]

$$V_\pm = i\left((q+q^{-1})(q^2+q^{-2})(q^4+q^{-4})\right)^{-\frac12} a_\pm\ ,\quad H = \frac12 (N+1). \tag{4.55}$$

Для реализации $osp(2/2)$ наряду с $A(q^2)$ потребуется и фермионный q-осциллятор [4I].

4.4. Деформированная модель Джейнса-Каммингса. В [40] обсуждался вопрос о деформации этой простейшей модели квантовой оптики.

В приближении ротационных волн для случая взаимодействия зависящего от интенсивности гамильтониан модели имеет вид

$$H = H_0 + H_{int} = \omega(\mathcal{N}+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\omega_0\sigma + \lambda(\sqrt{\mathcal{N}}b_+\sigma_- + b_-\sqrt{\mathcal{N}}\sigma_+),$$

где $\sigma_0, \sigma_\pm$ – матрицы Паули, а $b_\pm$ –бозонные операторы. Деформация гамильтониана взаимодействия приводит к

$$H^q_{int} = \lambda(\sqrt{[\mathcal{N}]_q}\, a_+\sigma_- + a_-\sqrt{[\mathcal{N}]_q}\,\sigma_+) = \lambda(K_+\sigma_- + K_-\sigma_+),$$

где мы учли (4.34). Деформированная модель имеет $su_q(1,1)\oplus su(2)$ в качестве динамической алгебры. Оператор эволюции деформированной модели имеет вид [40]

$$U(t) = exp(-itH^q_{int}) = \begin{pmatrix} \cos\lambda t\alpha & -i\,\frac{\sin\lambda t\alpha}{\alpha}K_- \\ -iK_+\frac{\sin\lambda t\alpha}{\alpha} & \cos\lambda t\beta \end{pmatrix} \qquad (4.56)$$

$$\alpha^2 = K_-K_+ = [\mathcal{N}+1]^2_q, \quad \beta^2 = K_+K_- = [\mathcal{N}]_q.$$

В [40] рассмотрена эволюция инверсии заселенности $\langle\sigma_3(t)\rangle$ в случае, когда бозонная мода находилась в q-КС (3.II), и $su_q(1,1)$ - КС (4.44) и (4.49). Эти результаты можно распространить и на суперсимметричный вариант модели.

4.5. Обсуждение деформации модели Джейнса-Каммингса в предыдущем пункте указывает на возможность изучения деформаций других модельных систем. В частности, в квантовой оптике представляет определенный интерес рассмотрение деформированных сжатых состояний либо как деформацию непосредственно двухфотонных состояний, либо как $su_q(1,1)$ - КС учетом q-осцилляторной реализации генераторов. Среди других физических приложений отметим попытку вычисления фазы Берри, для q-спина в магнитном поле [57] или использование q-осцилляторов для описания нелинейных траекторий в дуальных резонансных моделях [33, 34].

Укажем также, что анализ физической задачи релятивистского гармонического осциллятора, связанный с заменой плоских волн на функции Гельфанда-Граева и факторизацией модельного гамильтониана привел [58] к операторам, описывающим q-осциллятор, причем соответствующая алгебра динамической симметрии является квантовой алгеброй $su_q(1,1)$ в форме Вороновича-Виттена [7, 59].

В заключение раздела отметим, что перспективным является использование q-осциллятора для изучения деформированных специальных функций q-анализа [38, 60]. В частности q-аналог полиномов Эрмита

$$xH_n^q(x) = H_{n+1}^q(x) + q^{n-1}[n]_q H_{n-1}^q(x) \qquad (4.57)$$

можно получить из порождающей функции

$$\omega(\xi;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{[n]_q!} H_n^q(x), \qquad (4.58)$$

являющейся решением уравнения

$$X\omega(\xi;x) = x\omega(\xi;x) \ , \quad X = a_+ + q^{\mathcal{N}} a_- . \qquad (4.59)$$

Отметим, что H_n^q можно представить в виде

$$H_n(x) = (1-q^2)^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q T_{n-2k}\left(x\frac{1}{2}\sqrt{1-q^2}\right), \qquad (4.60)$$

где $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$ многочлен Чебышева I-го рода.

5. Обобщение на случай нескольких осцилляторов.

Уже в первой из известных нам работ по q-осцилляторам [33] использовалось несколько пар операторов $a_\pm^{(i)}$, которые удовлетворяли соотношениям

$$a_-^{(i)} a_+^{(j)} - q\, a_+^{(j)} a_-^{(i)} = \delta_{ij} \qquad (5.I)$$

без каких-либо условий на произведения $a_-^{(i)} a_-^{(j)}$ или $a_+^{(i)} a_+^{(j)}$. Мы еще вернемся к этой алгебре, а сейчас перечислим работы, которые относятся к случаю нескольких q-осцилляторов: I) Реализация квантовых алгебр осуществлялась с использованием независимых осцилляторов [I9-23], когда каждая тройка $(a_-^{(i)}, a_+^{(i)}, \mathcal{N}_i)$ порождает $\mathcal{A}_i(q)$ (2.I), а операторы с различными индексами коммутируют между собой (см. выше). 2) Аналогия с инвариантностью коммутационных соотношений n обычных бозе-осцилляторов $b_\pm^{(i)}$ относительно группы унитарных преобразований $b_-^{(i)} \to \sum_k u_k^i b_-^{(k)}$, $[u_k^i] \in SU(n)$ привела к рассмотрению [6I] зацепляющихся q-осцилляторов, ковариантных относительно квантовой группы $SU_q(n)$. Эти соотношения будут получены нами ниже в формализме R-матрицы [3], обсуждение в рамках которого квантовых (или q-деформированных, или некоммутативных) пространств приводит к более общим алгебрам. 3) Деформация канонических коммутационных соотношений возникла и непосредственно в случае бесконечного числа степеней свободы в теории факторизационного рассеяния в двумерном пространстве времени.

Соответствующая последнему случаю алгебра Замолодчикова-Фаддеева порождается операторами рождения $A_i^+(u)$ и уничтожения $A_i(v)$, зависящими от изотопического индекса $(i,j=1,2,\dots,n)$ и импульса u. Эти операторы удовлетворяют соотношениям [62]

$$A_i(u)A_j(v) = {}_{ij}S_{k\ell}(u-v)A_k(v)A_\ell(u), \tag{5.2}$$

$$A_i^+(u)A_j^+(v) = A_k^+(v)A_i^+(u)_{ji}S^*_{\ell k}(v-u), \tag{5.3}$$

$$A_i(u)A_j^+(v) = A_k^+(v)_{ki}S_{\ell j}(v-u)A_\ell(u) + \delta_{ij}\delta(u-v), \tag{5.4}$$

где $n^2\times n^2$ матрица $S(u)$ является решением уравнения Янга-Бакстера и интерпретируется как двухчастичная S-матрица [I, 2].

Постулируя конечномерный аналог соотношений (5.2-4), когда операторы не зависят от непрерывного параметра v, мы выведем для специальных R-матриц, фигурирующих в этих соотношениях, зацепляющиеся q-осцилляторы [6I] и после соответствующей замены получим независимые q-осцилляторы: $\oplus\mathcal{A}(q;a_\pm^{(i)},\mathcal{N}_i)$ [23].

Перепишем соотношения алгебры Замолодчикова-Фаддеева, считая $A_i(u)$ компонентами столбца, а $A_j^+(v)$ элементами строки и используя векторные и тензорные обозначения

$$\begin{gathered}A(u)\otimes A(v) = S(u-v)A(v)\otimes A(u),\\ A^+(u)\otimes A^+(v) = A^+(v)\otimes A^+(u)PS^*(u-v)P,\\ A(u)\otimes A^+(v) = (A^+(u)\otimes\mathbb{1}_v)S(v-u)(A(u)\otimes\mathbb{1}_v)+\mathbb{1}_v\delta(u-v),\\ P(x\otimes y) = y\otimes x.\end{gathered} \tag{5.5}$$

Обозначим генераторы конечномерного аналога φ_i,φ_j^+. Пусть $\Phi=\|\varphi_i\|$ (столбец), а $\Phi^+=\|\varphi_j^+\|^+$ (строка). Тогда постулируемые соотношения имеют вид

$$\Phi\otimes\Phi = R\,\Phi\otimes\Phi, \tag{5.6}$$

$$\Phi^+\otimes\Phi^+ = \Phi^+\otimes\Phi^+R^+, \tag{5.7}$$

$$\Phi\otimes\Phi^+ = (\Phi^+\otimes\mathbb{1})\widetilde{R}(\Phi\otimes\mathbb{1})+\mathbb{1},\quad \widetilde{R}=q^2PRP, \tag{5.8}$$

где R - решение уравнения Янга-Бакстера в тензорной форме (соотношения для генераторов группы кос):

$$R_{12} R_{23} R_{12} = R_{23} R_{12} R_{23}. \qquad (5.9)$$

Выберем в качестве R решение уравнения (5.9), участвующее в определении квантовой группы $SU_q(n)$ (точнее $A(R)$ - алгебры функций на формальной квантовой группе), порождаемой генераторами t_{ij}. Последние, будучи расположены в виде $n \times n$ матрицы T, удовлетворяют соотношениям [3]

$$R T \otimes T = T \otimes T R, \qquad (5.10)$$

где значок $\otimes$ относится к $n \times n$ матрицам, а их элементы принадлежат одной и той же алгебре $A(R)$; $n^2 \times n^2$ матрица $R = P R^{(+)}$, P оператор перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, а $R^{(+)}$ -матрица из [3], выраженная через базисные матрицы $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \delta_{jl}$ пространства $M_{At}(\mathbb{C}^n)$.

$$R^{(+)} = \sum_i e_{ii} \otimes e_{ii} + q^{-1} \sum_{i \neq j} e_{ii} \otimes e_{jj} + (1 - q^{-2}) \sum_{i<j} e_{ij} \otimes e_{ji}. \qquad (5.11)$$

В компонентах соотношения (5.6-8) с R-матрицей (5.11) имеют вид [23, 61]

$$\varphi_i \varphi_j = q^{-1} \varphi_j \varphi_i, \quad \varphi_i^+ \varphi_j^+ = q \varphi_j^+ \varphi_i^+, \quad i<j, \qquad (5.12)$$

$$\varphi_i \varphi_j^+ = \begin{cases} q \varphi_j^+ \varphi_i, & i \neq j \\ q^2 \varphi_i^+ \varphi_i + (q^2 - 1) \sum\limits_{k<i} \varphi_k^+ \varphi_k + \mathbb{1}, & i = j \end{cases}. \qquad (5.13)$$

Отметим, что соотношения (5.6-8) и (5.12-13) ковариантны относительно (ко)действия квантовой группы $SU_q(n)$ которое определяется отображениями

$$\Phi \to \tilde{\Phi} = T \check{\otimes} \Phi, \quad \Phi^+ \to \tilde{\Phi}^+ = \Phi^+ \check{\otimes} S(T), \qquad (5.14)$$

где $\check{\otimes}$, в отличии от $\otimes$ в (5.10), подчеркивает алгебраическую независимость элементов матрицы T и компонент столбца Φ или строки Φ, которые перемножаются обычным образом $\tilde{\varphi}_i = \sum_k t_{ik} \otimes \varphi_k$. $S(T)$ в (5.14) значение антипода S на элементах T [3]

$$S(T)\, T = T\, S(T) = \mathbb{1}. \qquad (5.15)$$

Легко проверить, что в силу (5.10) новый набор генераторов $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}^+$ удовлетворяет соотношениям (5.6-7). Равенство (5.8) также сохраняется, как следствие (5.15) и соотношения

$$(\mathbb{1}\otimes T)R(\mathbb{1}\otimes S(T)) = (S(T)\otimes\mathbb{1})R(T\otimes\mathbb{1}), \tag{5.16}$$

которое вытекает из (5.10).

Пусть V линейное пространство элементов φ_i, а V^* - двойственное пространство. Тогда отображения (5.14)

$$\delta : V\to A(R)\otimes V\ ,\quad \tilde{\delta} : V^*\to V^*\otimes S(A(R)), \tag{5.17}$$

удовлетворяют всем аксиомам кодействия биалгебры $A(R)$ на линейном пространстве.

Из равенства

$$\varphi_j = \exp\Big(\eta\sum_{k>i}\mathcal{N}_k\Big)A_i = \exp\Big(\eta\sum_{k>i}\mathcal{N}_k + \frac{1}{2}\eta\mathcal{N}_i\Big)a_i, \tag{5.18}$$

где $\eta=\ln q$, получаем

$$1+(q^2-1)\sum_{k>i}\varphi_k^+\varphi_k = \prod_{k>i}(1+(q^2-1))a_k^+a_k. \tag{5.19}$$

Операторы $a_i, a_i^+, \mathcal{N}_i$ взаимно коммутируют и являются генераторами n независимых алгебр $\mathcal{A}(q\ ; a_i, a_i^+, \mathcal{N}_i)$. Таким образом мы связали все три случая нескольких q-осцилляторов, перечисленные в начале этого раздела.

Определяемая (5.1) алгебра $\mathcal{V}_n(q)$ не эквивалентна приведенным выше, поскольку в ней нет соотношений на элементы a_ia_j и $a_i^+a_j^+$. Это означает, что размерности подпространств заданной градуировки у $\mathcal{V}_n(q)$ и $\mathcal{A}_n(q)$ различны.

Работы [29, 64] содержат обсуждение положительности метрики гильбертова пространства $\mathcal{H}$, порожденного базисными векторами вида

$$|n_{j_1}, n_{j_2},\ldots,n_{j_m}\rangle = (a_{j_1}^+)^{n_{j_1}}(a_{j_2}^+)^{n_{j_2}}\cdot\ldots\cdot(a_{j_m}^+)^{n_{j_m}}|0\rangle$$

$$a_j|0\rangle=0\ ;\quad j, j_k=1,2,\ldots,n\ ;\ j_k=j_{k\pm1}. \tag{5.20}$$

Естественный в теории поля вопрос бесконечного числа степеней свободы и квантовых локальных полей, связанных с q-осцилляторами затрагивался в [29]. Основная трудность, на наш взгляд, вызвана отсутствием удовлетворительного преобразования от импульсного пространства к координатному для соотношений (5.2-4) (q-аналога преобразования Фурье). Возможными кандидатами на роль таких полей могут быть локальные поля обменной или киральной алгебры, которые сравнительно просто определяются в двумерном пространстге-гремени (см., например, [63])

$$\Psi_i(x)\Psi_j(y)=\Psi_k(y)\Psi_\ell(x)S_{ij}^{k\ell}(x-y) \quad , \quad x<y. \qquad (5.2I)$$

Литература

I. F a d d e e v L.D., Integrable models in (1+1)-dimensional Quantum field theory. In: Les Houches Lectures 1982. (Elsevier: Amsterdam 1984), p.563.

2, K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K., Lect.Notes in Phys. 1982, v.151, p.61-119.

3. Р е ш е т и х и н Н.Ю., Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Алгебра и Анализ 1989, т.I, № I, с.178-206.

4. T a k h t a j a n L.A., Adv.Studies in Pure Math. 1989, v.19, p.435-457.

5. J i m b o M., Intern. J.Mod.Phys.Ser.A. 1989, v.4, N 15, p.3759-3778.

6. C o n n e s A., IHES Publ.Math. 1986, N 62.

7. W o r o n o w i c z S.L., Publ.RIMS 1987, v.23, N 1, p.117-181.

8. A b e E., Hopf Algebras, Cambridge tracts in math. v.74. Cambridge Univ.Press 1980, 301 p.

9. A n d r e w s G.E., q-Series, AMS regional conference ser. in Math. N 66, 1986, 130 p.

10. В а к с м а н Л.Л., С о й б е л ь м а н Я.С., Функц.анализ и прил. 1988, т.22, № 3, с.I-I4.

11. U e n o K., T a k e b a y a s h i, Y.S h i b u k a w a, Lett.Math.Phys. 1989, v.18.

12. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Зап.научн.семин. ЛОМИ, I98I, т.IOI, с.IOI-IIO.

13. С к л я н и н Е.К. Функц.анал. и прил. I982, т.I6, № 4, с.27-34.

14. F a d d e e v L.D., T a k h t a j a n L.A., Lect.Notes in Phys. 1986, v.246, p.166-179.

15. K u l i s h P.P., Preprint RIMS-615 Kyoto; Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Lett.Math.Phys. 1989, v.18, p.143-149.

16. D r i n f e l d V.G., Proc.ICM, Berkeley 1986, Ed.by Gleason A.M., Providence RI, AMS, v.1, p.798-820.

17. J i m b o M., Lett.Math.Phys. 1985, v.10, p.63-71; 1986, v.11, p.247-252; Commun.Math.Phys. 1986, v.102, N 4, p.537-548.

18. R o s s o M. Commun.Math.Phys. 1988, v. 117, N 3, p.582-593.
19. H a y a s h i T. Commun.Math.Phys. 1990, v.127, N 1, p.129-144.
20. C h a i c h i a n M., K u l i s h P.P. Phys.Lett. B. v.234, N 1/2, p.72-80.
21. B i e d e n h a r n L.C. J.Phys.A: 1989, v.22, N 18, p.L983-L986.
22. M a c f a r l a n e A.J. J.Phys.A: 1989, v.22, N 21, p. 4581-4586.
23. K u l i s h P.P., D a m a s k i n s k y E.V., J.Phys. A: 1990, v.23, N 9, p.415-419.
24. N g Y.J., J.Phys.A: 1990, v.23, p.1023-1026.
25. Ui H., A i z a w a N., Mod.Phys.Lett., 1990, v.5, N.4, p.237-242.
26. P u t n a m C.R., Commutation Properties of Hilbert space Operators. Ergeb.Math. und Grenzgebiete, b.36. Springer-Verlag Berlin 1967, 167 p.
27. G a r r i s o n J.C., W o n g J. J.Math.Phys., 1970, v.11, N 8, p.2242-2248.
28. А л и м о в А.Л., Д а м а с к и н с к и й Е.В., ТМФ, 1979, т.38, № 1, 58-70.
29. G r e e n b e r g O.W. Phys.Rev.Lett. 1990, v.64, N 7, p. 705-709.
30. O h n u k i Y., K a m e f u c h i S. Quantum Field Theory and Parastatistics, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
31. W i g n e r E.P., Phys.Rev. 1950, v.77, p.711-715.
32. O ' R a i f e a r t a i g h L., R y a n C. Proc.Roy. Irish.Ac., ser.A, 1963, v.62, p.93-115. G r u b e r B., O ' R a i f e a r t a i g h L. ibid. 1964, v.63, p.69-73.
33. C o o n D.D., Y u S., B a k e r M.M. Phys.Rev.D, 1972, v.5, N 6, 1429-1433.
34. A r i k M., C o o n D.D. J.Math.Phys., 1975, v.16, N 9, p.1776-1779.
35. A r i k M., C o o n D.D. J.Math.Phys.D., 1976, v.17, N 4, p.524-527.
36. К у р ы ш к и н В.В. Деп. ВИНИТИ 1976, N 3937-76; Ann. Found.L.de Broglie, 1980, v.5, p.111-126; Б а л а ш о в а С.А., К у р ы ш к и н В.В., Э н т р а л ь г о Э.Э., ЭЧАЯ 1989, т.20, № 4, с.965-987.
37. J a n n u s s i s A. et al., H a d r o n i c J. 1980, v.3, N 6, p.1622-1632; Lett.Nuovo Cim. 1983, v.38, N 5,

p.155-160.
38. Feinsilver Ph., Rocky Mountain J.Math. 1982, v.12, N 1, p.171-183. Mh.Math., 1987, v.104, N 2, p.89-108.
39. Cigler J., Mh.Math., 1979, v.88, N 1, p.87-105.
40. Chaichian M., Ellinas D., Kulish P., Phys.Rev.Lett. 1990, v.65, N 8, p.980-983.
41. Chaichian M., Kulish P., Lukierski J., Phys.Lett.B., 1990, v.237, N 3/4, p.401-406.
42. Кулиш П.П. ТМФ, 1991, т.86, № 1, с.158-161.
43. Gray R.W., Nelson Ch.A., 1990, preprint SUNI BING 7/11/90.
44. Song X.-C., J.Phys.A., 1990, v.23, N 16, p.L821-L825.
45. Sun C.-P., Fu H.-C. J.Phys.A., 1989, v.22, N 21, p.L983-986.
46. Floreanini R., Lic Vinet, J.Phys.A., 1990, v.23, N 19, p.L1019-L1023.
47. Jurco B. On coherent states for the simplest quantum groups, preprint 1990.
48. Streater R.F., Commun.Math.Phys., 1967, v.4, N 3, p.217-236.
49. Celegini E., Giachetti R., Sorace E., Tarlini M., Preprint INEN/90/1. Firenze, J.Math. Phys., 1990 (to be publ.).
50. Aragone C., Zypman F., J.Phys.A, 1986, v.19, N 12, p.2267-2279.
51. Березин Ф.А. Изв.АН СССР, сер.мат. 1972, т.36, № 5, с.1134-1167.
52. Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и её приложения. т.1, 2, Мир М. 1980, 455+395 с.
53. Exner R., Havlicek M., Lassner W., Czech.J.Phys. ser.B, 1976, v.26, N 11, p.1213-1238.
54. Curtright T.L., Zachos C.K. Phys.Lett.B, 1990, v.243, N 3, p.237-244; Zachos C. Paradigms of quantum algebras, preprint ANL-HEP-RP-90-61, 1990, 17 p. (to be publ.)
55. Ruegg H. Preprint UGVA-DPT 1989/08-625, Geneva 1989, 9 p.
56. Alvarez-Gaumé L., Gomez C., Sierra G. Nucl.Phys.B, 1990, v.330, N 2/3, p.347-398.
57. Soni S.K., J.Phys.A., 1990, v.23, p.L951-L955.
58. Kagramanov E., Mir-Kasimov R., Nagiyev Sh., J.Math.Phys. 1990, v.31, N 7, p.1733-1738.

59. W i t t e n E., Nucl.Phys.B. 1990, v.330, N 2/3, p.285-346.
60. А т а к и ш и е в Н.М., С у с л о в С.К., ТМФ, 1990, т.85, № 1, с.64-73.
61. P u s z W., W o r o n o w i c z S.L., Repts.Mat.Phys. 1989, v.27, N 2, p.231-257.
62. К у л и ш П.П. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1981, т.109, с.83-92.
63. S m i r n o v F.A. Commun.Math.Phys., 1990, v.132, p.415-439.
64. F i v e l D.I. Preprint 1990.Univ. Maryland

Damaskinsky E.V., Kulish P.P. Deformed oscillators and their applications.

Some variants of definitions and properties of deformed oscillators are reviewed. The q -analogs of coherent states are studied. Some applications of q -oscillators, such as q -oscillator representations of quantum algebras and superalgebras, q -coherent states of $su_q(2)$ and $su_q(1,1)$ quant gebras and the deformed Jaynes-Cummings model are considered. Generalizations to the case of several degrees of freedom are also given.

АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 189

ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. 10

Сборник работ под редакцией
П. П. КУЛИША и В. Н. ПОПОВА

ЛЕНИНГРАД
„НАУКА"
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1991