Г.Шустер

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС: ВВЕДЕНИЕ

В книге проф. Г. Шустера (ФРГ) достаточно строго и в то же время доступно изложены основы теории стохастического поведения динамических лиссипативных систем. Рассмотрены практически все наиболее важные проблемы в этой области. Кратко изложена хаотическая динамика гамильтоновых систем. Книга написана с большим педагогическим мастерством и хорошо иллюстрирована. Может служить учебным пособием.

Для математиков, физиков, химиков и биологов, интересующихся проблемами хаотической динамики, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Оглавление

Предисловие редакторов перевода 5
Предисловие 10
Введение 12
Глава 1. Эксперименты и простые модели 19
1.1. Экспериментальное обнаружение детерминированного хаоса 19
1.2. Ротатор, возбуждаемый периодическими толчками 25
Логистическое отображение 26
Отображение Хенона 26
Отображение Чирикова 27
Глава 2. Кусочно-линейные отображения и детерминированный хаос 28
2.1. Сдвиг Бернулли 28
2.2. Характеристики хаотического движения 31
Показатель Ляпунова 31
Инвариантная мера 36
Корреляционная функция 38
2.3. Детерминированная диффузия 40
Глава 3. Универсальное поведение квадратичных отображений 45
3.1. Параметрическая зависимость итераций 49
3.2. Бифуркация удвоения и преобразование удвоения 50
Бифуркация удвоения 51
Суперциклы 54
Преобразование удвоения и α 54
Линеаризованное преобразование удвоения и δ 56
3.3. Самоподобие, универсальный спектр мощности и влияние внешнего шума 61
Самоподобие в расположении элементов цикла 61
Хаусдорфова размерность 63
Спектр мощности 65
Влияние внешнего шума 68
Поведение логистического отображения при $r > r_\infty$ 71

3.4. Аналогия между удвоением периода и фазовыми переходами 74
3.5. Экспериментальное подтверждение бифуркационного перехода 77
Глава 4. Переход к хаосу через перемежаемость 83
4.1. Механизмы перемежаемости 83
Перемежаемость 1-го рода 84
Длина ламинарной области 87
4.2. Ренормгрупповое исследование перемежаемости 90
4.3. Перемежаемость и фликкер-шум 95
4.4. Экспериментальные наблюдения перехода через перемежаемость 102
Распределение длин ламинарных участков 103
Перемежаемость 1-го рода 103
Перемежаемость 3-го рода 105
Глава 5. Странные аттракторы в диссипативных динамических системах 107
5.1. Введение и определение странных аттракторов 107
Преобразование пекаря 111
Диссипативное отображение Хенона 112
5.2. Энтропия Колмогорова 115
Определение K 115
Связь K с показателями Ляпунова 116
Среднее время предсказуемости хаотической системы 118
5.3. Описание аттрактора по измеренному сигналу 119
Размерности странного аттрактора 120
Корреляционный интеграл 121
Восстановление аттрактора по временной последовательности 123
Размерность вложения 125
Разделение динамического хаоса и внешнего белого шума 125
Нижняя граница колмогоровской энтропии 126
Гипотеза Каплана — Йорки 129
5.4. Странные аттракторы и возникновение турбулентности 131
Бифуркация Хопфа 131
Модель перехода к турбулентности по Ландау 132
Модель перехода к турбулентности по Рюэлю — Такенсу — Ньюхаузу 133
Неустойчивость Бенара 134
Неустойчивость Тейлора 135
5.5. Универсальные свойства перехода от квазипериодичности к хаосу 137
5.6. Пути перехода к хаосу 146
Возможность существования трехчастотных квазипериодических орбит 147
Синхронизация частот 150
Кризисы 151
5.7. Изображения странных аттракторов и фрактальных границ 152
Глава 6. Регулярное и нерегулярное движение в консервативных системах 157
6.1. Сосуществование областей с регулярным и нерегулярным движением 160

Интегрируемые системы 160
Теория возмущений и малые знаменатели 162
Устойчивые торы и теорема КАМ 164
Неустойчивые торы и теорема Пуанкаре — Биркгофа 165
Гомоклинические точки и хаос 168
Диффузия Арнольда 170
Примеры хаотического движения в классической механике 171
6.2. Полностью нерегулярное движение и эргодичность 173
Отображение Арнольда 173
Иерархия классического хаоса 175
Примеры трех классических *K*-систем 180
Глава 7. Хаос в квантовых системах? 182
7.1. Квантовое отображение Арнольда 184
7.2. Квантовая частица в стадионе 186
7.3. Квантовый ротатор с периодическими толчками 188
Заключительные замечания 195
Приложения 197
1. Вывод модели Лоренца 197
2. Анализ устойчивости, возникновения конвекции и турбулентности в модели Лоренца 199
3. Производная Шварца 201
4. Ренормализация одномерной модели Изинга 202
5. Прореживание и интегралы по траектории для внешнего шума 205
6. Мера информации Шеннона 209
Информационная емкость «кассы» 209
Приращение информации 210
7. Удвоение периода для консервативного отображения Хенона 212
Аннотированная литература 217
Предметный указатель 234

Предметный указатель

Автокорреляционная функция 22, 177
Автономное дифференциальное уравнение 23, 25
Алгоритм *Ньютона* 154
Аттрактор 52, 130
—*Лоренца* 108, 124
— странный 107, 134, 137, см. Странный аттрактор
— *Фейгенбаума* 65, 71
— *Хенона* 112, 114, 121, 126, 129, 131
Бильярд *Синая* 181, 188
Бифуркация 147, 212
— касательная 85
— удвоения 50, 147, 201
— *Хопфа* 131
Броуновское движение 40
Варактор 80
Восстановление аттрактора 123
Время предсказания 118
Всплески 84
Гипотеза *Каплана—Йорки* 129

Гомоклиническая точка 168, 169
Границы областей притяжения 152, Фото VIII—XV
Губка *Серпинского* 64
Движение по геодезической поверхности 181
— с возвратом 176, 177
Детерминированный хаос 12
Дискретное фазовое пространство 184
Диссипативные отображения 24, 110, 157
— потоки 23, 107
Диффузия *Арнольда* 170
— детерминированная 40, 188
Джозефсоновские переходы 13, 195
Золотое среднее 140
Иерархия классического хаоса 176
Инвариантная мера 36
— — классических систем 178—180
— — логистического отображения 72
— — треугольного отображения 38
Интегралы по траектории 71, 205
Интегрируемые системы 160
Информации приращение 210
— потеря 33, 116
Информационная емкость 209
— размерность 120
Итерации логистического отображения 49
Каноническое преобразование 160
Канторовское множество 64
Картина двойного лучепреломления Фото V
Квазипериодичность 135
Квантовый хаос 182—184, 195
— резонанс 192, 193
Клиновидная кривая 64
Кольца Сатурна 172, Фото VII
Консервативные системы 157
Константы *Фейгенбаума* 50, 216
Коррелированность по *Гауссу* 40, 69, 206
Корреляционная длина 204
— размерность 122, 125, 137
— функция 20, 22, 38
— — в классических системах 177
— — логистического отображения 76
— — перемежаемости 95
— — треугольного отображения 39
Корреляционный интеграл 121
Кривая *Коха* 64
Кризис 151
Критерий устойчивости 34, 199, 213
Критическая поверхность 75
— температура 75
Критические показатели *см.* Скейлинг
K-системы 176, 180, 181
Лазер 13, 195
Ламинарная область 85, 94, 103, 106
Лебеговский спектр 180
Маятник 19
Мера информации *Шеннона* 209
Механизм хаоса 30, 31
— — для перемежаемости 83
Множество *Жюлиа* 154
— *Мандельброта* 155, 156, Фото IX-XV
Модель *Изинга* 202
—*Лоренца* 21, 198
Намагниченность 70, 74
Нелинейные системы 13, 23
Неподвижная точка 23, 33
— — гиперболическая 167, 213
— — оператора удвоения 56, 75, 90, 143
— — устойчивость 34, 51, 200
— — эллиптическая 167, 214
Непрерывные дроби 139
Неустойчивое направление 75
Неустойчивость *Бенара* 20, 21, 197
— — квазипериодичность — хаос 137

— — перемежаемость 104, 105
— — переход *Фейгенбаума 11*
— — синхронизация частот 150
— — странные аттракторы 136, 137
— — трехчастотная квазипериодичность 147
— *Тейлора* 135, Фото III
Ниобат барий-натрия (НБН) 149
Области притяжения 109, 110, 152
Обратная связь 46
Оператор *Лиувилля* 178
— эволюции 190
Осциллятор гармонический 160, 179
—*Дюффинга* 153
— электронный 80, 114, Фото II
Отношение геометрических масштабов 146, 199
Отображение 20, 110
—*Арнольда* 173, 174
— — квантовый аналог 185
— — открытое 189
— квадратичное 45
— кусочно-линейное 28
— логистическое 26, 45, 86, 155
— окружности 138
— периодическое 41, 42
— поворота *Мозера* 166
— *Пуанкаре* 24, 137, 165
— — для эксперимента *Бенара* 134
— — — — *Тейлора* 136
— — для перемежаемости 84, 103, 104
— — для системы *Хенона—Хейлеса* 20, 171
— треугольное 35
— унимодальное 201
—*Хенона* 26, 112, 212
— *Чирикова* 27, 189, 190
Параметр порядка 35, 75
Переменные действие—угол 160
Перемешивание 175
Переход по сценарию *Помо—Манневиля* 83
— — — *Рюэля—Такенса—Ньюхауза* 133, 147
— — — *Фейгенбаума* 46
— через перемежаемость 83
Плазма 13
Показатель *Ляпунова* 31, 116, 137
— — и гипотеза *Каплана—Йорки* 129
— — и *K* -энтропия 116
— — логистического отображения 49, 69, 74
— — преобразования пекаря 112
— — скейлишовое поведение 70, 209
— — треугольного отображения 35
Потоки 107
Почти периодическая функция 194
Предельный цикл 130, 131
Преобразование на окружности 178
— пекаря 111, 130, 177
— удвоения 48
— — квадратичных отображений 55
— — отображения окружности 138
— — при перемежаемости 90
Приближение по методу перевала 207
Проблема локализации 190, 193
Производная *Шварца* 53, 201
Производящая функция 162
Прореживание 71, 205
Пространство параметров 75
Размерность вложения 125
Распределение астероидов 173
Растяжение 30
Реакция *Белоусова—Жаботинского* 20, 22
Ренормгруппа внешнего шума 205
— логистического отображения 55
— модели *Изинга* 202
— отображения окружности 141
— перемежаемости 90, 99
— фазового перехода 75
Ротатор 25, 188

Самоподобие 61, 64, 65, 74, 154, Фото VIII—XV
Сдвиг *Бернулли* 28
— от точки касания 84
Сечение *Кассини* 172, Фото VII
Синхронизация мод 138, 150
— частот 150
Система *Хенона—Хейлеса* 20, 22, 171
Скейлинг для внешнего шума 70, 71, 209
— для диффузии 44
— для длин ламинарных участков 89, 94, 95
— для квадратичных отображений 48, 50, 73
— для корреляционной функции 76, 77
— для отображений, сохраняющих площадь 216
— для отображения окружности 140
— для показателя *Ляпунова* 74
— для траектории КАМ 165
Складывание 30
Случайные силы 40
— числа 195
Собственные значения 58, 60, 74, 93, 141, 200, 208, 213
— — для бифуркации *Хопфа* 132
— — для гиперболической неподвижной точки 214
— — для отображения *Арнольда* 173
— — для перемежаемости 85, 93, 106
— — для уравнения *Шредингера* 183
— — для эллиптической неподвижной точки 214
— — оператора *Лиувилля* 178
— — оператора эволюции 185, 190
Сосуществование регулярного и нерегулярного движения 160
Спектр мощности 19, 23
— — для логистического отображения 65, 78, 79, 81
——для отображения окружности 141, 144
— — для эксперимента *Бенара* 20, 78, 133, 145, 149
— — — — с НБН 149
— — для электронного осциллятора 79
— — кавитационного шума 81
— — фликкер-шума 95, 96, 99, 101
Стадион 181, 186
Стимулированные клетки сердца 13, 195
Странный аттрактор 107
— — возникновение турбулентности 133
— — определение 109
——примеры 108, 111, 114, 134, 136, 153
— — размерности 120
Стробоскопическое изображение 24
Субгармоники 66—69, 77—81
Суперциклы 54
Существенное собственное значение 60
Теорема КАМ 17, 164
— *Лиувилля* 157
— *Пуанкаре—Бендикссона* 109
—*Пуанкаре—Биркгофа* 165, 167
Топологическая сопряженность 72
Тор 134, 135, 137, 162, 164, 174, 185
Трехчастотная квазипериодичность 147
Турбулентность 16, 131, 195
Удвоение периода 51, 54
— — в консервативных системах 169, 212
— — аналогия с фазовыми переходами 74, 75
Универсальность 15, 61, 74, 95, 137
Управляющие параметры 24, 147, 150
Уравнение *Гамильтона—Якоби* 160
— *Маккея—Гласса* 123

— *Навье—Стокса* 195, 197
— *Фробениуса—Перрона* 37
Уровней притяжение 188
— расталкивание 188
Ускоритель частиц 13
Устойчивое многообразие 75
Фазовые переходы 74, 75, 202
Фазовый портрет 80, Фото 11
Фликкер-шум 85
Фотохимия 184
Фракталы 64
Функционал *Гинзбурга—Ландау* 75
Хаос 12
— критерии 20, 23
— механизм 30, 31
— описание 31
Хаусдорфова размерность 63, 121, 130, 136
— — аттрактора *Лоренца* 109
— — — *Фейгенбаума* 65, 71
— — преобразования пекаря 112
— — отображения *Хенона* 114
Химические реакции 20, 22, 195
Цепное правило 32, 214
Циклы 23, 33
Чертова лестница 151
Число вращения 137
Число *Прандтля* 199
— *Рэлея* 21, 199
Числа *Фибоначчи* 139
Шум 48
— кавитационный 80, 82, Фото VI
— логистического отображения 68, 205
— отличие от детерминированного хаоса 125
— перемежаемости 95
— ренормгруппа 205
Энтропия 116
Энтропия *Колмогорова* 115, 137
— — и показатели *Ляпунова* 116
— — оценка снизу 126
Эргодичность 17
— и спектр *Лиувилля* 176
— механизм 29
— на торе 162
Эффект бабочки 14

Предисловие редакторов перевода

Книга Гейнца Шустера, профессора Института теоретической физики при Франкфуртском университете, чрезвычайно привлекательна для ознакомления с таким необычным для широкой аудитории предметом, как динамический хаос (или случайное поведение полностью детерминированных систем). Книга невелика по объему, достаточно информативна, изобретательно иллюстрирована и, наверное, займет достойное место среди уже имеющейся литературы по хаосу.

Мы уверены, что сильные стороны книги читатель оценит сам. Здесь же нам представляется уместным хотя бы обозначить те ключевые идеи, которые позволили существенно продвинуться в понимании и описании сложного поведения детермированных сред по сравнению с тем состоянием, что отражено в книге. При этом будем иметь в виду, что Шустер обсуждает лишь «маломерный» динамический хаос — самый простой из того, что встречается в природе и технике и поддается описанию с помощью детерминированных моделей.

Одной из наиболее ярких и важных проблем, непосредственно связанных с «многомерным» хаосом, является, конечно, турбулентность — нерегулярное поведение нелинейных сред или полей. Заметим сразу, что обсуждаемую в книге хаотическую динамику небольшого числа заданных в пространстве мод (или структур) можно отождествить с реальной динамикой нелинейного поля (скорости или давления в гидродинамическом течении, электромагнитного поля в плазме и т. п.) лишь в узком интервале значений параметров. Более точно, при относительно малом превышении порога неустойчивости, или, как часто говорят, при малой надкритичности. С ростом надкритичности, например числа Рейнольдса, число степеней свободы среды (или поля), эффективно вовлекаемых в хаотическое движение, в общем случае увеличивается, корреляции между ними разрушаются и хаос становится все более сложным. Этому соответствует увеличение размерности странного аттрактора, вложенного в фазовое пространство течения. Один из наиболее принципиальных вопросов здесь — связь числа вовлекаемых в хаотическую динамику поля коллективных возбуждений (мод) и раз-

мерности аттрактора с картиной пространственного распределения поля. Как показали недавние физические и компьютерные эксперименты [1—4], по мере увеличения размерности аттрактора пространственная картина поля (или гидродинамического течения) все более усложняется. Например, если говорить о термоконвекции в горизонтальном слое, то по мере увеличения числа Рэлея регулярная решетка конвективных структур — ячеек Бенара — «плавится», появляются дефекты, несоизмеримая модуляция и, наконец, пространственно-временной хаос, который и есть собственно турбулентность.

Если маломерный хаос характеризуется сложным временным, но весьма простым пространственным поведением, отвечающим регулярной картине поля, то в турбулентном режиме сложным будет и временное, и пространственное поведение. Очень важен совсем недавно осознанный факт, что, подобно тому как случайность во времени может быть не связана с действием внешних шумов, случайное распределение поля в пространстве может быть следствием лишь детерминированных законов, управляющих изменением переменных вдоль координат, и весьма слабо зависеть, например, от случайных неоднородностей.

Сейчас уже в некоторой степени ясны и пути (сценарии) самозарождения и развития хаоса в пространстве. Прежде чем их обсудить, дадим простейшую классификацию этого круга процессов. Процессы возникновения и развития хаоса в нелинейных средах естественно разделять по характеру роста размерности аттрактора (или реализации — см., например, [5, 6]) в пространстве. Если динамика поля усложняется вдоль одного (или нескольких) направлений и, например, размерность реализации увеличивается вдоль координат, то такое развитие хаоса естественно назвать конвективным. Очевидно, что такой процесс наиболее интересен с точки зрения изучения «сдвиговой» турбулентности гидродинамических течений (пограничный слой, затопленная струя и т. п.). В случае же, когда хаотическое поведение нелинейного поля, возникнув в локализованной области, захватывает соседние участки и в конечном итоге в среде устанавливается пространственно-временной хаос с однородными в среднем в пространстве характеристиками, имеет смысл говорить об абсолютном развитии хаоса и соответственно изотропной турбулентности.

Содержательную теорию пространственно-временного хаоса удается построить в первую очередь в тех ситуациях, когда динамику нелинейного поля можно рассматривать как динамику ансамбля взаимодействующих стабильных и метастабильных структур.

Примеры таких элементарных структур — ленгмюровские солитоны в плазме [7], вихри Тейлора в течении Куэтта между вращающимися цилиндрами [8], многогранные ячейки в турбулентной конвекции [9, 10].

В предположении не слишком сильного взаимодействия индивидуальных структур (точнее, при их неразрушаемости) от исходных уравнений поля можно перейти к дифференциально-разностным уравнениям — так называемым решеточным моделям. Эти модели обладают известными преимуществами в компьютерном эксперименте и, что не менее важно, представляют определенные возможности для аналитического исследования пространственного развития турбулентности. Подобные модели естественным образом возникают в самых разнообразных физических ситуациях. Так, конвективное развитие хаоса наблюдается в цепочках направленно связанных автогенераторов [11, 12], электронных пучках, распространяющихся вдоль замедляющей системы [13], сдвиговых гидродинамических течениях [14]. Поясним картину пространственного развития хаоса на примере именно таких течений.

В результате развития первичной неустойчивости в течении формируется ансамбль динамических элементов — вихрей, связанных друг с другом за счет возмущений, распространяющихся вниз по потоку. Индивидуальная динамика этих вихрей может быть весьма разнообразной. В частности, на вихрях могут возникать периодические или квазипериодические колебания. Из-за взаимодействия вихрей друг с другом эти колебания будут усложняться, пока на одном из них они не станут хаотическими, — рождается странный аттрактор. При некоторых упрощающих предположениях удается показать, что развитие хаоса вдоль потока осуществляется путем конечного числа пространственных бифуркаций (перестроек течения), разворачивающихся не при изменении параметра, а в пространстве — вдоль цепочки структур. Характер пространственных бифуркаций определяется динамикой индивидуальных структур и видом связи [12].

Судя по физическим и компьютерным экспериментам [1, 3, 4], вблизи критической точки (точки возникновения хаоса) конкретные особенности неравновесной среды не сказываются на деталях того или иного реализующегося в среде сценария перехода. По аналогии с явлением универсальности возникновения хаоса в простых системах, о чем говорится в книге, это позволяет предполагать существование определенной универсальности перехода к турбулентности в пространственных задачах, или, более конкретно, надеяться, что каждому сценарию перехода отвечает некоторый универсальный

оператор, не зависящий от конкретных особенностей среды и определяющийся лишь типом критического поведения. Этот универсальный оператор должен быть неподвижной точкой соответствующего уравнения ренормгруппы, которое есть математическое выражение гипотезы о пространственно-временной масштабной инвариантности в критической точке и учитывает информацию о типе перехода. Сейчас уже имеются результаты по ренормгрупповому описанию пространственного развития турбулентности в потоковых системах [15], а также (для некоторых видов критического поведения) и в изотропных средах, где реализуется абсолютное развитие хаоса [15, 16].

Добавим, что в заключительных замечаниях в книге автор сам подчеркивает важность анализа связанных систем и возможность обнаружения здесь нетривиальных эффектов из области динамического хаоса. Этот прогноз полностью подтвердился. Упомянем сейчас лишь один из подобных эффектов — стохастическую синхронизацию. Он заключается в том, что при осуществлении диссипативной связи между стохастическими автогенераторами, демонстрирующими качественно различное случайное поведение, генераторы могут синхронизоваться. При достаточно сильной связи они начинают генерировать тождественные по своим средним характеристикам (энтропия, размерность, спектр) хаотические реализации. Причем одинаковой оказывается даже топология странных аттракторов в соответствующих парциальных фазовых подпространствах [17].

Мы пользуемся приятной возможностью, чтобы выразить признательность Г. Шустеру за помощь в подготовке русского издания книги.

Мы надеемся, что книга будет полезной для механиков, физиков, химиков и биологов, а также для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей, интересующихся хаотической динамикой.

Перевод выполнили Ф. М. Израйлев (гл. 6, 7, заключительные замечания), М. И. Малкин (гл. 2, 3) и А. М. Рейман (предисловие, введение, гл. 1, 4, 5 и приложения).

А. В. Гапонов-Грехов
М. И. Рабинович

Литература

1. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Рогальский А. В., Сагдеев Р. З.* Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред. — Препринт ИПФ АН СССР, № 163, Горький, 1987.
2. *Brard H. R., Lomdahl P. S., Newell A. C.* Benjamin — Feir turbulence in convective binary fluid mixtures. — Physica D, 1986, v. 23, № 1—3, p. 345—361.
3. *Gollub J. P.* Pattern Evolution from Convective and Electro-Hydrodynamic Instabilities. — In: Cellular Structures in Instabilities/Ed. J. E. Wesfreid, S. Zaleski. — N.Y.: Springer, 1984, p. 156—159.
4. *Езерский А. Б., Рабинович М. И., Реутов В. П., Старобинец И. М.* Пространственно-временной хаос при параметрическом возбуждении капиллярной ряби. — ЖЭТФ, 1986, т. 91, вып. 6(12), с. 2070—2083.
5. *Eckmann J. P., Ruelle D.* Ergodic theory of Chaos and Strange attractors. — Rev. Mod. Phys., 1985, v. 57, № 3, p. 617—656.
6. Dimensions and Entropies in Chaotic Systems/Ed. G. Mayer — Kress. — N.Y.: Springer, 1986, p. 1—257.
7. *Кадомцев Б. В.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
8. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности/Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. — М.: Мир, 1983.
9. *Вашкевич О. В., Гапонов-Грехов А. В., Езерский А. Б., Рабинович М. И.* Рождение уединенных автоструктур при термоконвекции в слое с неоднородным подогревом. — ДАН СССР, 1987, т. 293, № 3, с. 563—567.
10. Cellular Structures in Instabilities/Ed. J. E. Wesfreid, S. Zaleski. — N.Y.: Springer, 1984, p. 1—212.
11. *Анищенко В. С., Арансон В. С., Постнов Д. Э., Рабинович М. И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов. — ДАН СССР, 1986, т. 286, № 5, с. 1120—1124.
12. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Автоструктуры: Хаотическая динамика ансамблей. — В кн.: Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987, с. 7—44.
13. *Соколов Д. В., Трубецков Д. И.* Нелинейные волны, динамический хаос и задачи сверхвысокочастотной электроники. — В кн.: Проблемы физической электроники. — Ленинград: изд. ФТИ АН СССР, 1986, с. 141—179.
14. *Kobayashi R., Kohama Y.* Spiral vortices in boundary layer transition on a rotating cone. — In.: Laminar-Turbulent Transition/Ed. V. V. Kozlov. — N.Y.: Springer, 1984, p. 573—578.
15. *Арансон И. С., Рабинович М. И.* Ренормгрупповое описание пространственного развития турбулентности. — Препринт ИПФ АН СССР, № 152, Горький, 1987.
16. *Кузнецов С. П.* Ренормгруппа, универсальности и скейлинг в динамике одномерных автоволновых сред. — Изв. вузов: Радиофизика, 1986, т. 29, № 8, с. 887—896.
17. *Афраймович В. С., Веричев Н. Н., Рабинович М. И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных средах. — Изв. вузов: Радиофизика, 1986, т. 29, № 9, с. 981—990.

Посвящается Габи

Предисловие

Как показывает повседневный опыт, для многих физических систем малые изменения начальных условий приводят к малым изменениям результата. Так, например, путь автомобиля мало изменится, если руль лишь слегка поворачивать.

Но есть ситуации, для которых справедливо противоположное. Сторона, на которую упадет монета, поставленная на ребро, зависит от слабого прикосновения. Последовательность «орлов» и «решек» при подбрасывании монеты проявляет нерегулярное, или хаотическое, поведение во времени, так как крайне малые изменения начальных условий могут привести к совершенно различным результатам.

В последние годы стало ясно (и отчасти это определилось благодаря исследованиям нелинейных систем с применением быстродействующих компьютеров), что *высокая чувствительность к начальным условиям*, приводящая к хаотическому поведению во времени, никоим образом не исключение, — это *типичное свойство многих систем*. Такое поведение, например, обнаружено в периодически стимулируемых клетках сердца, в электронных цепях, при возникновении турбулентности в жидкостях и газах, в химических реакциях, в лазерах и т. д. С точки зрения математики во всех нелинейных динамических системах с числом степеней свободы больше 2 (особенно во многих биологических, метеорологических и экономических моделях) можно обнаружить хаос и, следовательно, *на достаточно больших временах их поведение становится непредсказуемым*.

«Детерминированный хаос» сегодня — весьма активная область исследований, в которой получено множество выдающихся результатов. Разработаны методы классификации различных типов хаоса и обнаружено, что при изменении внешнего управляющего параметра многие системы демонстрируют близкие переходы от порядка к хаосу. Это универсальное поведение напоминает обычные фазовые переходы второго рода, а введение ренормгрупповых и скейлинговых методов, известных в статистической механике, открывает новые перспективы в изучении детерминированного хаоса.

Задача этой книги — предложить замкнутое введение в эту область, изложенное с точки зрения физика. Книга возникла из цикла лекций, прочитанных мною в летние семестры 1982 и 1983 гг. во Франкфуртском университете; она не требует знаний, которыми не обладал бы аспирант-физик. Беглый взгляд на содержание показывает, что в книге на элементарном уровне вводятся такие новые понятия, как колмогоровская энтропия, странные аттракторы и т. д., и новые методы, такие, как методы функциональных ренормгрупп. С другой стороны, я надеюсь, что книга содержит достаточно материала для исследователей, которые хотят знать, например, как можно в эксперименте отличить детерминированный хаос от белого шума, или хотят научиться применять знания о равновесных фазовых переходах к исследованию (неравновесных) переходов от порядка к хаосу.

При подготовке этой книги мне очень помогли рукописи, препринты и дискуссионные замечания Г. Эйленбергера, К. Кера, Х. Лешке, В. Сельке и М. Шмутца. Кроме того, П. Берже, М. Дюбуа, В. Лаутерборн, В. Мартиенссен, Г. Пфистер и их соавторы предоставили некоторые, частично не опубликованные, рисунки из своих экспериментальных работ. Сотрудники группы Х. О. Пейтгена и П. Х. Рихтера разрешили включить в эту книгу наиболее впечатляющие компьютерные изображения (см. разд. 5.7). Все предложения с благодарностью приняты. Кроме того, хочу поблагодарить В. Грейлиха, Д. Хакенбрахта, М. Хайзе, Л. Л. Хирста, Р. Либмана, И. Нейла и в особенности И. Прокачча за внимательный просмотр отдельных частей рукописи и полезные замечания. Я признателен также за разъяснения В. Эмери, П. Грассбергеру, Д. Гремпелю, С. Гроссману, С. Фишману и Х. Горнеру.

С удовольствием благодарю Р. Хорнрейха за сердечное гостеприимство, оказанное мне во время пребывания в Институте Вейцмана, где при поддержке Фонда Минервы были написаны несколько глав этой книги.

И не в последнюю очередь я благодарю г-жу Боффо и г-жу Кнолле за превосходную помощь при подготовке иллюстраций и текста.

Франкфурт, октябрь 1984 г. *Г. Г. Шустер*

Ante mare et terras et, quod tegit omnia, caelum
Unus erat toto naturae vultus in orbe,
Quem dixere Chaos, rudis indigestaque moles
Nec quicquam nisi pondus iners congestaque eodem
Non bene iunctarum discordia semina rerum.

Ovid *

Введение

Книгу, озаглавленную «Детерминированный хаос», естественно будет начать с объяснения самых общих понятий. Согласно Британской энциклопедии, слово «хаос» происходит от греческого «χαος». Первоначально оно означало бесконечное пространство, существовавшее до появления всего остального. Позднее римляне интерпретировали хаос как изначальную сырую бесформенную массу, в которую Создатель привнес порядок и гармонию. В современном понимании, которым мы и будем пользоваться, *хаос означает состояние беспорядка* и нерегулярности.

В дальнейшем мы будем рассматривать физические системы, поведение которых по времени *детерминировано*, т. е. существует правило в виде дифференциальных или разностных уравнений, определяющее их будущее исходя из заданных начальных условий. Было бы естественно предположить, что детерминированное движение (описываемое, например, непрерывными дифференциальными уравнениями) достаточно регулярно и далеко от хаотичности, поскольку последовательные состояния непрерывно развиваются одно из другого. Но еще на грани нашего и предыдущего веков математик А. Пуанкаре (Poincaré, 1982) открыл, что в некоторых механических системах, эволюция которых во времени определяется уравнениями Гамильтона, может появляться хаотическое движение. К сожалению, это было воспринято многими физиками как курьез, и прошло около 70 лет, пока метеоролог Е. Н. Лоренц (Lorenz, 1963) не обнаружил, что даже простая система из трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка может привести к совершенно хаотическим траекториям. Работа

---

*) Не было моря, земли и над всем распростертого неба, —
Лик был природы един на всей широте мирозданья, —
Хаосом звали его. Нечлененной и грубой громадой,
Бременем косным он был, — и только, — где собраны были
Связанных слабо вещей семена разносущие вкупе.

Овидий. Метаморфозы 1,5.
(Пер. с лат. С. В. Шервинского)

Лоренца, значимость которой сегодня общепризнанна, в течение многих лет после публикации также оставалась малоизвестной. Он открыл один из первых примеров *детерминированного хаоса* в диссипативных системах.

В дальнейшем под детермированным хаосом подразумевается нерегулярное, или хаотическое, движение, порожденное нелинейными системами, для которых динамические законы однозначно определяют эволюцию во времени состояния системы при известной предыстории. В последние годы благодаря новым теоретическим результатам, наличию быстродействующих компьютеров и развитию техники эксперимента стало ясно, что это явление часто встречается в природе и имеет далеко идущие последствия во многих областях науки (см. длинный, но далеко не полный перечень в табл. 1).

Таблица 1. Некоторые нелинейные системы, в которых проявляется детерминированный хаос (цифры относятся к ссылкам на литературу)

Маятник с возбуждением [1]
Жидкости вблизи порога возникновения турбулентности [2]
Лазеры [3]
Приборы нелинейной оптики [4]
Переход Джозефсона [5]
Химические реакции [6]
Классические системы, включающие много тел (задача трех тел) [7]
Ускорители частиц [8]
Взаимодействующие нелинейные волны в плазме [9]
Биологические модели динамики популяций [10]
Стимулированные клетки сердца (см. фото IV на вклейке) [11]

Заметим, что нелинейность — необходимое, но не достаточное условие для возникновения хаотического движения (линейные дифференциальные или разностные уравнения могут быть решены преобразованием Фурье и не приводят к хаосу).

Наблюдаемое во времени хаотическое поведение возникает не из-за внешних источников шума (их нет в уравнениях Лоренца), не из-за бесконечного числа степеней свободы (в системе Лоренца их лишь 3) и не из-за неопределенности, связанной с квантовой механикой (рассматриваемые системы чисто классические). Настоящая первопричина нерегулярности определяется свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить первоначально близкие траектории в ограниченной области фазового пространства (например, трехмерного в системе Лоренца).

Таким образом, становится практически невозможно предска-

зать длительное поведение таких систем, поскольку реально начальные условия можно задать лишь с конечной точностью, а ошибки экспоненциально нарастают. Если попытаться решить такую нелинейную систему на ЭВМ, результат на все более дальних временах зависит от все большего количества цифр в (иррациональных) числах, представляющих начальные условия. Так как цифры в иррациональных числах (а рациональные числа на действительной оси есть множество меры 0) распределены нерегулярно, траектория становится хаотической.

Лоренц назвал эту *чувствительность к начальным условиям* эффектом бабочки, так как решение его уравнений (приближенно описывающих также потоки воздуха в атмосфере Земли, т. е. задачу предсказания погоды) может изменить взмах крыльев бабочки. Похоже, что иногда это подтверждается повседневным опытом.

При осмыслении изложенных результатов сразу же возникает несколько фундаментальных вопросов:

Можно ли предсказать (например, по виду соответствующих дифференциальных уравнений), реализуется ли в системе детерминированный хаос?

Можно ли определить понятие хаотического движения более строго с точки зрения математики и разработать для него количественные характеристики?

Каково воздействие этих результатов на различные области физики? Означает ли существование детерминированного хаоса конец долговременной предсказуемости в физике для некоторых нелинейных систем или по хаотическому сигналу еще можно что-то узнать?

Последний вопрос действительно относится к основам физики, а именно к проблеме предсказуемости. Потрясение, вызванное открытием детерминированного хаоса, можно сравнить с тем, какое последовало за открытием возможности лишь статистических предсказаний в квантовой механике.

Те из вышеперечисленных вопросов, на которые уже имеются какие-то ответы, обсуждаются в этой книге. Очевидно, однако, что в этой относительно новой области нерешенных задач много больше, чем решенных.

Остальная часть введения представляет краткий обзор содержания книги.

Как показано на рис. 1, необходимо различать детерминированный хаос в диссипативных системах (например, возбуждаемый

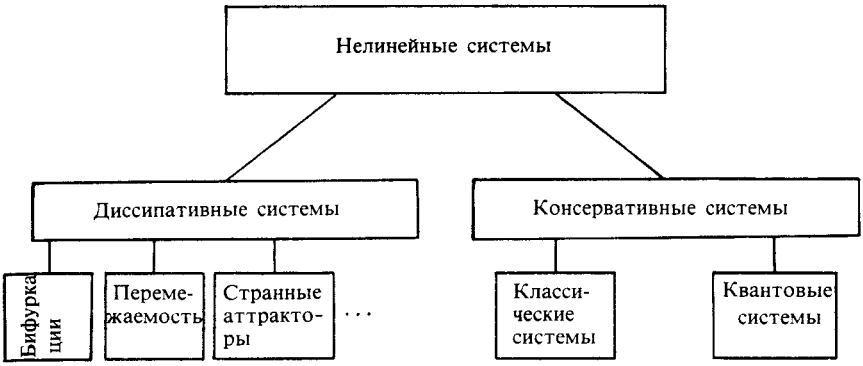


Рис. 1. Классификация систем, которые проявляют детерминированный хаос. (В дальнейшем мы рассматриваем только классические диссипативные системы, т. е. неквантовые системы с диссипацией.)

маятник с трением) и в консервативных системах (например, движение планет, подчиняющееся гамильтоновым уравнениям).

Первые пять глав посвящены диссипативным системам. Вначале дается обзор некоторых типичных экспериментов, в которых различными методами наблюдается детерминированный хаос. На следующем этапе объясняются механизмы, приводящие к детерминированному хаосу в простых модельных системах, и разрабатываются количественные меры для описания хаотического сигнала. Это позволяет отличать разные типы хаоса. Как далее показано, к настоящему времени известны по крайней мере три сценария, или пути, в соответствии с которыми нелинейные системы могут стать хаотическими при изменении управляющего параметра. Интересно, что все эти пути могут быть реализованы экспериментально; при этом обнаруживается их удивительное универсальное поведение, напоминающее универсальность, найденную в равновесных фазовых переходах второго рода. (Отметим, что переход к хаосу в диссипативных системах происходит только при внешнем возбуждении, т. е. когда система открыта.) В этом смысле универсальность означает, что существуют такие основные свойства системы (например, критические показатели вблизи перехода к хаосу), которые зависят только от глобальных свойств системы (например, от размерности).

Совсем недавно один из таких путей к хаосу был открыт в работах (Grossmann, Thomae, 1977; Feigenbaum, 1978; Coullet, Tresser, 1978). Рассматривалось простое разностное уравнение, используемое, например, для описания зависимости от времени биологичес-

кой популяции. Обнаружено, что популяция колеблется между устойчивыми величинами (неподвижными точками), число которых удваивается при определенных значениях внешнего параметра. Это продолжается, пока число неподвижных точек не станет бесконечным при конечном значении параметра, при этом изменение популяции во времени становится нерегулярным. Как показал Фейгенбаум (и это было основным достижением), эти результаты не ограничены данной частной моделью, а являются действительно *универсальными* и справедливы для большого числа физических, химических и биологических систем. Это открытие вызвало взрыв теоретической и экспериментальной активности. Мы рассмотрим этот переход в гл. 3 и покажем, что его универсальные свойства можно вычислить, используя метод функциональных ренормгрупп.

Другой переход к хаосу, так называемая перемежаемость, был открыт в работе (Manneville, Pomeau, 1979)[1]. Перемежаемость означает, что сигнал, развивающийся во времени регулярно (или ламинарно), прерывается статистически распределенными промежутками нерегулярного движения (перемежающимися всплесками). При изменении внешнего управляющего параметра среднее число этих всплесков нарастает до тех пор, пока движение не становится полностью хаотическим. В гл. 4 показано, что этот переход также обладает универсальными свойствами и является универсальным механизмом генерации фликкер-шума в нелинейных системах.

Третья возможность была открыта в работах (Ruelle, Takens, 1971; Newhouse et al., 1978). В 70-х годах они предложили модель перехода к турбулентному движению, отличающуюся от предложенной много ранее модели (Ландау, 1944, 1986). Ландау рассматривал турбулентность как предел бесконечной последовательности неустойчивостей (бифуркаций Хопфа), каждая из которых порождает новую основную частоту. Однако Рюэль, Такенс и Ньюхауз показали, что уже после двух неустойчивостей на третьем шаге траектория начинает притягиваться к ограниченной области фазового пространства, в которой первоначально близкие траектории экспоненциально расходятся, так что движение становится хаотическим. Эти особые области фазового пространства называются *странны-*

---

[1] Возникновение странного аттрактора при слиянии устойчивого и седлового предельных циклов и их обоюдном исчезновении было впервые обнаружено в работе: *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло — узел. — ДАН СССР, 1974, т. 219, с. 1281—1285. Термин «перемежаемость» впервые введен Помо и Манневилем. — *Прим. перев.*

ми аттракторами. Это понятие объясняется в гл. 5, где также обсуждаются несколько методов получения информации о структуре аттрактора по измерениям случайного во времени сигнала. Сценарий Рюэля — Такенса — Ньюхауза (так же, как и два предыдущих) хорошо проверен экспериментально, и мы представим некоторые экспериментальные данные, явно указывающие на возникновение странных аттракторов.

Чтобы избежать путаницы, вызванной употреблением слова «турбулентность», заметим, что здесь подразумевается только турбулентность *во времени*. Результаты, полученные Рюэлем, Такенсом и Ньюхаузом, также относятся к *начальной стадии* турбулентности или хаотического движения во времени. На самом деле одна из *целей* (хотя еще и не результат) исследования детерминированного хаоса в гидродинамических системах — понять механизмы происхождения *развитой турбулентности*, под которой подразумевается нерегулярное поведение *и во времени*, и *в пространстве*.

Обратимся теперь ко второй ветви на рис. 1, обозначающей хаотическое движение в консервативных системах.

Многие учебники дают неверное представление, утверждая, что в классической механике системы большей частью интегрируемы. Как отмечалось выше, уже Пуанкаре (1892) знал, что, например, неинтегрируемая задача трех тел в классической механике может привести к полностью хаотическим траекториям. Примерно 60 лет спустя (Колмогоров, 1954; Арнольд, 1963; Moser, 1967) было доказано, что в классической механике движение в фазовом пространстве не является ни полностью регулярным, ни полностью нерегулярным, а тип траектории зависит от выбора начальных условий (сейчас это утверждение носит название теоремы КАМ). Таким образом, устойчивое регулярное движение в классической механике — исключение в противоположность утверждениям многих публикаций.

Довольно интересно исследование длительной эволюции консервативных систем, обсуждаемое в гл. 6. Оно касается таких вопросов, как: устойчива ли Солнечная система, как избежать нерегулярности движения в ускорителях частиц, достаточно ли силен самопроизвольный детерминированный хаос в некоторых гамильтоновых системах для доказательства гипотезы эргодичности? (Гипотеза эргодичности положена в основу классической статистической механики и заключается в том, что траектория равномерно заполняет энергетически разрешенные области фазового пространства, так что средние по времени величины можно заменить усредненными по соответствующему фазовому пространству.)

Наконец, в последней главе мы рассмотрим поведение квантовых систем, для которых в классическом пределе появляется хаос. Такие исследования важны, например, для решения задачи фотодиссоциации, когда молекулу возбуждают фотонами лазера и необходимо знать, как поступающая энергия распределяется по квантовым уровням (соответствующая классическая система могла бы стать хаотической, так как молекулярные силы нелинейны). На нескольких примерах будет показано, что конечная величина постоянной Планка и граничные условия приводят к почти периодическому поведению квантовой системы, даже если соответствующая классическая система демонстрирует хаос. Хотя различие между интегрируемыми и неинтегрируемыми (хаотическими) системами по-прежнему отражается в некоторых свойствах их квантовых двойников (например, в энергетических спектрах), многие задачи в этой области остаются нерешенными.

1

Эксперименты и простые модели

В разд. 1.1 мы перечислим некоторые эксперименты, в которых различными способами обнаруживается детерминированный хаос. Затем (разд. 1.2) будут представлены несколько простых систем, демонстрирующих хаос, для которых возможно аналитическое описание.

1.1. Экспериментальное обнаружение детерминированного хаоса

В табл. 2 приведены четыре типичные системы, в которых проявляется детерминированный хаос.

Рассмотрим вначале простой пример — периодически возбуждаемый маятник. Уравнение его движения приведено в табл. 2, где точка обозначает производную по времени t, γ — постоянную затухания, g — ускорение свободного падения, ω — частоту возбуждающей силы; масса принята за единицу. Это уравнение численно интегрировалось для различных значений параметров (γ, g, F, ω), и в табл. 2 показано, что зависимость угла θ от времени «выглядит хаотической», если амплитуда F вынуждающей силы превосходит некоторую пороговую величину F_c. То, что сигнал выглядит случайным, является возможным, но не очень точным критерием хаотичности.

Чтобы отличить от хаоса многопериодическое движение (которое, как и хаос, может выглядеть сложным), часто прибегают к фурье-преобразованию сигнала $x(t)$:

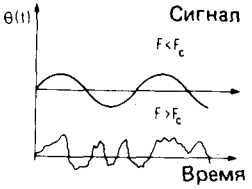
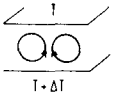
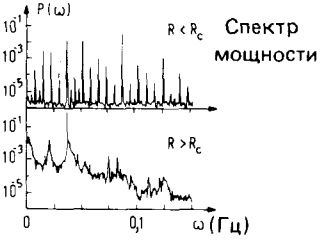
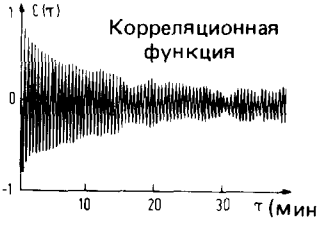
$$x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \int_0^T \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{i\omega t} x(t). \tag{1.1}$$

Для многопериодического движения спектр мощности

$$P(\omega) \equiv |x(\omega)|^2 \tag{1.2}$$

состоит только из дискретных линий на определенных частотах, тогда как хаотическое движение, которое совершенно апериодично,

Таблица 2. Обнаружение хаоса в простых системах

Маятник 	$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + g\sin\theta = F\cos\omega t$ $x = \theta,\ y = \dot{\theta},\ z = \omega t$ $\dot{x} = y$ $\dot{y} = -\gamma y - g\sin z + F\cos z$ $\dot{z} = \omega$	
Эксперимент Бенара 	$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$ $\dot{y} = rx - y - xz$ $\dot{z} = xy - bz$	
Реакция Белоусова — Жаботинского $Ce_2(SO_4)_3$ . . . Ce^{4+}	$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \lambda)$ $\boldsymbol{x} = [c_1, c_2, \ldots, c_d]$	
Система Хенона — Хейлеса	$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(p_i^2 + q_i^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3$ $\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}};\quad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}}$	

представляется в $P(\omega)$ сплошной широкой полосой на низких частотах. Такой переход от периодического движения к хаосу представлен во второй строке табл. 2, где показан спектр мощности x-компоненты скорости жидкости в эксперименте Бенара.

В этом эксперименте слой жидкости (с положительным коэффициентом объемного расширения) подогревается снизу в поле тяготения, как показано на рис. 2. Нагретая жидкость вблизи дна «стремится» подняться, а холодная вблизи крышки — опуститься,

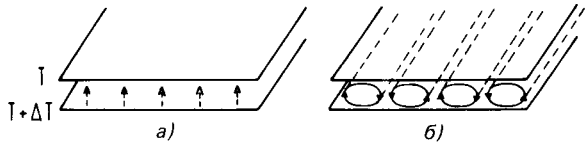


Рис. 2. Неустойчивость Бенара.

но этим движениям противодействуют вязкие силы. При малых разностях температур ΔT преобладает вязкость, жидкость покоится и тепло переносится постоянной теплопроводностью. Это состояние становится неустойчивым при критическом значении R_a числа Рэлея R (пропорционального ΔT, см. приложение 1), и появляются стационарные конвективные валы. С дальнейшим ростом R после второго порога R_c наблюдается переход к хаотическому движению. В табл. 2 приведены спектры мощности x-компоненты скорости, измеренной по эффекту Доплера при рассеянии света (Swinney, Gollub, 1978; см. также фото I на вклейке — набор интерференционных картин в ячейке Бенара).

Для теоретического описания эксперимента Бенара Лоренц упростил сложные дифференциальные уравнения, описывающие эту систему (см. приложение 1), и получил дифференциальные уравнения так называемой модели Лоренца:

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \tag{1.3а}$$
$$\dot{Y} = rX - Y - XZ, \tag{1.3б}$$
$$\dot{Z} = XY - bZ, \tag{1.3в}$$

где σ и b — безразмерные константы, характеризующие систему, r — управляющий параметр, пропорциональный ΔT. Переменная X пропорциональна скорости циркулирующей жидкости, Y характеризует разность температур между восходящими и нисходящими потоками жидкости, Z пропорциональна отклонению вертикального профиля температуры от равновесного значения.

Численный анализ этой, очевидно, простой системы нелинейных дифференциальных уравнений показывает, что ее переменные могут проявлять хаотическое поведение при превышении порога r_c (см. приложение 2). Однако следует отметить, что уравнения Лоренца описывают эксперимент Бенара только непосредственно вблизи перехода от теплопереноса к конвективным валам, так как пространственные фурье-коэффициенты, оставленные Лоренцем в системе уравнений, описывают только простые валы. Хаос, обнаруженный Лоренцем в уравнениях (1.3), таким образом, отличается от хаоса, наблюдаемого по экспериментальному спектру мощности (табл. 2). Для описания экспериментально наблюдаемого хаоса необходимо сохранить гораздо больше пространственных фурье-компонент.

Другая экспериментальная система, в которой подробно исследовано хаотическое поведение, — это реакция Белоусова — Жаботинского. Органические молекулы (например, малоновой кислоты) окисляются бромат-ионами при катализации окислительно-восстановительной системой (Ce^{4+}/Ce^{3+}). Реагентами являются $Ce_2(SO_4)_3$, $NaBrO_3$, $CH_2(COOH)_2$, H_2SO_4, которые участвуют в 18 элементарных реакциях (Epstein et al., 1983).

Обобщенные уравнения для концентраций $\{c_i\}$ реагентов в системе химических реакций — также система нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda), \tag{1.4}$$

где $\mathbf{x} = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$, $\mathbf{F}$ — нелинейная функция $\{c_i\}$, λ — внешний управляющий параметр. Переменная, проявляющая хаотическое поведение в реакции Белоусова — Жаботинского, — концентрация c ионов Ce^{4+}, измеряемая по селективному поглощению света этими ионами. Среднее время пребывания веществ в проточном реакторе является внешним управляющим параметром, соответствующим R в предыдущем эксперименте.

В табл. 2 показан переход к хаосу в этой системе, обнаруживаемый по изменению автокорреляционной функции

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\hat{c}(t)\hat{c}(t+\tau); \quad \hat{c}(t) = c(t) - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,c(t). \tag{1.5}$$

Эта функция есть мера корреляции между последовательными значениями сигнала. Для регулярных движений она постоянна или осциллирует, а в хаотическом режиме быстро спадает (чаще всего экспоненциально) (Roux et al., 1981).

Наконец, рассмотрим простой пример из классической механики — неинтегрируемую систему, проявляющую хаотическое поведение. Гамильтониан H этой системы приведен в табл. 2; уравнения движения были впервые исследованы численно в работе (Hénon, Heiles, 1964). Чтобы обнаружить хаос, строились точки, в которых траектория в фазовом пространстве

$$x(t) = [p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t)] \tag{1.6}$$

пересекает плоскость (p_2, q_2) (здесь p_i и q_i — импульсы и координаты). Так получают сечения Пуанкаре (см. рис. 3, *а*). В табл. 2 показано, что для системы Хенона — Хейлеса при достаточно большой

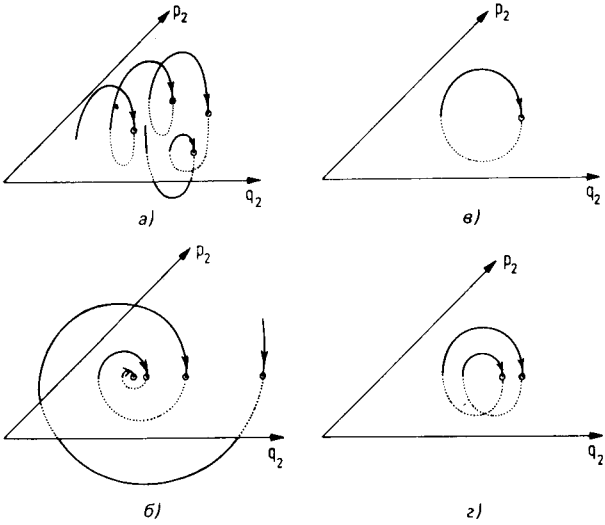


Рис. 3. Качественно разные траектории отличаются сечениями Пуанкаре: *а* — хаотическое движение; *б* — движение к неподвижной точке; *в* — цикл; *г* — цикл удвоенного периода.

энергии (которая является управляющим параметром для этой системы) точки на сечении Пуанкаре начинают заполнять плоскость. Это свидетельствует о высокой степени нерегулярности, т. е. о хаотическом движении траектории в фазовом пространстве.

Подведем итог.

1. Мы представили четыре возможных критерия хаотичности движения:

сигнал «выглядит случайным»;

в спектре мощности наблюдается широкополосный шум на низких частотах;

автокорреляционная функция быстро спадает;

сечение Пуанкаре состоит из точек, заполняющих пространство. Во всех четырех критериях хаос проявляется в виде качественных изменений. Далее мы введем некоторые количественные характеристики детерминированного хаоса.

2. Общей чертой систем, перечисленных в табл. 2, является то, что они могут быть описаны системой дифференциальных уравнений 1-го порядка малой размерности

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \lambda); \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d), \tag{1.7}$$

которые автономны (т. е. $\mathbf{F}$ не содержат времени явно) и нелинейны (т. е. $\mathbf{F}$ — нелинейная функция $\{x_j\}$).

Эти уравнения приводят к хаотическому движению при изменении внешнего управляющего параметра λ (которым служит амплитуда вынуждающей силы для маятника или разность температур ΔT в модели Лоренца и т. д.). Различают *консервативные системы*, для которых элемент в фазовом пространстве $\{\mathbf{x}\}$ только изменяет форму, но сохраняет объем (пример — гамильтонова система Хенона — Хейлеса, для которой справедлива теорема Луивилля) и *диссипативные системы*, для которых объем элемента фазового пространства сокращается с течением времени (см. также гл. 6).

Поток, описываемый уравнениями движения (1.7), удобно исследовать с помощью соответствующего $(d-1)$-мерного отображения Пуанкаре:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(n), \lambda]; \quad \mathbf{x}(n) = [x_1(n), \ldots, x_{d-1}(n)]. \tag{1.8}$$

Оно получается при пересечении траектории в d-мерном фазовом пространстве с $(d-1)$-мерной гиперплоскостью (см. рис. 3); последовательность точек во времени обозначена через $\mathbf{x}(1)$, $\mathbf{x}(2)$, ... и т. д. Определения «консервативный» и «диссипативный» могут быть обобщены на отображения (см. гл. 5, уравнения (5.6а), (5.6б).

Хотя системы, представленные в табл. 2, выглядят весьма просто, для аналитического исследования они слишком сложны. Поэтому в дальнейшем мы будем исследовать модельные системы, проявляющие хаотическое поведение и приводящие к одно- и двумерным отображениям Пуанкаре, — их легко объяснить. Будет показано, что только некоторые общие черты этих отображений (такие, например, как существование у них простого максимума) определяют, как возникает хаос. «Пути к хаосу» (или сценарии перехода) различаются тем, как ведет себя сигнал, прежде чем стать совершенно случайным.

Кроме того, экспериментально (при прямом анализе реализаций) обнаружено, что системы, перечисленные в табл. 2, переходят к хаосу по конечному числу сценариев (одним или несколькими — в зависимости от величины управляющих параметров). Результат эволюции этих экспериментальных систем определяется простыми отображениями Пуанкаре (хотя мы и не можем определить эти отображения прямо из дифференциальных уравнений аналитически). Эта очевидная универсальность — весьма привлекательный аспект теории детерминированного хаоса. Она сходна с универсальностью, наблюдаемой в обычных равновесных фазовых переходах, и может быть объяснена в рамках обобщенных ренормгрупп, что мы увидим в следующих главах.

1.2. Ротатор, возбуждаемый периодическими толчками

Одна из простейших динамических систем, проявляющих хаотическое поведение во времени, — ротатор с затуханием, возбуждаемый периодическими толчками (рис. 4). Уравнение движения для

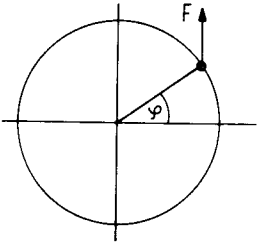


Рис. 4. Ротатор, возбуждаемый силой F.

этого ротатора следующее:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma\dot{\varphi} = F \equiv Kf(\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t - nT); \qquad n \text{ — целое число,} \tag{1.9}$$

где точки обозначают производные по времени, Γ — это постоянная затухания, T — период между толчками; момент инерции принят за единицу. Если сделать подстановки $x = \varphi$; $y = \varphi$; $z = t$, то уравнение (1.9) можно представить как систему нелинейных автономных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\dot{x} = y, \tag{1.10а}$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + Kf(x)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(z - nT), \tag{1.10б}$$

$$\dot{z} = 1. \tag{1.10в}$$

Путем интегрирования эти уравнения можно свести к двумерному отображению для переменных $(x_n, y_n) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}[x(nT - \varepsilon), y(nT - \varepsilon)]$. При $(n + 1)T - \varepsilon > t > nT - \varepsilon$ общее решение (1.10б) есть

$$y(t) = y_n e^{-\Gamma(t - nT)} + K\sum_{m=0}^{\infty} f(x_m)\int_{nT-\varepsilon}^{t} dt'\, e^{\Gamma(t' - t)}\delta(t' - mT), \tag{1.11}$$

откуда

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T}[y_n + Kf(x_n)]; \tag{1.12а}$$

далее, интегрируя (1.10а) с использованием (1.12а), получаем

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma T}}{\Gamma}[y_n + Kf(x_n)]. \tag{1.12б}$$

Уравнения (1.12а) и (1.12б) — основные результаты этого раздела. Они сводят исходную систему трехмерных дифференциальных уравнений к двумерному дискретному отображению — результату стробоскопирования переменных. Далее мы перечислим несколько важных предельных случаев этого двумерного отображения, которые детально обсудим в последующих разделах.

Логистическое отображение. Это одномерное квадратичное отображение, определяемое как

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \tag{1.13}$$

где r — внешний параметр, а x_n принадлежит не окружности, а интервалу [0, 1]. Оно может быть получено из (1.12б) в пределе сильного затухания ($\Gamma \to \infty$), если $K \to \infty$ так, что $\Gamma/K = 1$ и $f(x_n) = (r - 1)x_n - rx_n^2$.

Отображение Хенона. Его можно рассматривать как двумерное обобщение логистического отображения (Hénon, 1976):

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \tag{1.14а}$$
$$y_{n+1} = bx_n, \tag{1.14б}$$

где a и $|b| \leqslant 1$ — внешние параметры.

Чтобы получить это отображение, перепишем (1.12а), (1.12б) в виде

$$y_{n+1} = e^{-\Gamma T}[y_n + Kf(x_n)], \tag{1.15а}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{\Gamma T} - 1}{\Gamma} y_{n+1} \tag{1.15б}$$

и разрешим (1.15б) относительно y_{n+1}:

$$y_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)\Gamma/(e^{\Gamma T} - 1). \tag{1.16}$$

Подставив y_{n+1} и y_n в (1.15а), при $T = 1$ получим

$$x_{n+1} + e^{-\Gamma}x_{n-1} = (1 - e^{-\Gamma})x_n + \frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} Kf(x_n). \tag{1.17}$$

Выбирая затем функцию и параметры в виде

$$\frac{1 - e^{-\Gamma}}{\Gamma} Kf(x_n) \equiv -(1 - e^{-\Gamma})x_n - 1 - ax_n^2; \quad b \equiv -e^{-\Gamma}, \tag{1.18}$$

из (1.17) получаем

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + bx_{n-1}, \tag{1.19}$$

что эквивалентно (1.14а), (1.14б). Наш вывод справедлив только

при $b < 0$, хотя математически отображение определено для $-1 \leqslant b \leqslant 1$.

Отображение Чирикова. Это просто отображение для незатухающего ($\Gamma \to 0$) ротатора, возбуждаемого внешними толчками $Kf(x_n) = -K \sin x_n$ (Chirikov, 1979). Уравнения (1.12а), (1.12б) сводятся в этом пределе к

$$p_{n+1} = p_n - K \sin \theta_n, \tag{1.20а}$$
$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1}, \tag{1.20б}$$

где снова положено $T = 1$ и введены условные обозначения $x_n = \theta_n$ и $y_n = p_n$.

В следующих главах будет показано, что несмотря на очевидную простоту всех трех отображений, с их помощью можно получить чрезвычайно богатые, физически интересные структуры.

2

Кусочно-линейные отображения и детерминированный хаос

Рассмотренные в предыдущей главе нелинейные отображения Пуанкаре приводят все же к довольно сложному поведению системы (см. гл. 3). Поэтому в данной главе мы изучим некоторые очень простые одномерные кусочно-линейные отображения. Такие отображения с физическими системами непосредственно не связаны, но чрезвычайно полезны в качестве моделей; с их помощью в разд. 2.1 мы объясним механизм, который приводит к детерминированному хаосу. В разд. 2.2 введем три количественные характеристики хаотического поведения и полностью вычислим их для «треугольного» отображения. Наконец, в разд. 2.3 покажем, что итерации некоторых одномерных отображений могут иллюстрировать явление детерминированной диффузии.

2.1. Сдвиг Бернулли

Рассмотрим одномерное отображение

$$x_{n+1} = \sigma(x_n) \equiv 2x_n \bmod 1; \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{2.1}$$

которое представлено на рис. 5.

При начальном значении x_0 это отображение порождает последовательность итераций x_0, $x_1 = \sigma(x_0)$, $x_2 = \sigma(x_1) = \sigma(\sigma(x_0)) \ldots$. Чтобы исследовать свойства этой последовательности, запишем двоичное представление x_0:

$$x_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu 2^{-\nu} \triangleq (0, a_1 a_2 a_3 \ldots), \tag{2.2}$$

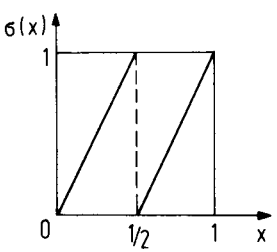


Рис. 5. Преобразование $\sigma(x) = 2x \bmod 1$.

где a_ν принимает значения 0 или 1. При $x_0 < 1/2$ мы имеем $a_1 = 0$, а $x_0 > 1/2$ влечет $a_1 = 1$. Поэтому первую итерацию можно записать в виде

$$\sigma(x_0) = \begin{cases} 2x_0 & \text{при} \quad a_1 = 0 \\ 2x_0 - 1 & \text{при} \quad a_1 = 1 \end{cases} = (0, a_2 a_3 a_4 \ldots). \quad (2.3)$$

Другими словами, действие σ на двоичное представление x сводится к удалению первого знака после запятой и сдвигу оставшейся последовательности влево. Это называется *сдвигом Бернулли*.

Бернуллиевское свойство действия $\sigma(x)$ проявляется в следующем.

1. Чувствительная зависимость итераций σ от начальных условий. Даже если две точки x и x' отличаются лишь в $(n + 1)$-м знаке a_{n+1}, под действием σ это различие увеличивается и их n-е итерации $\sigma^n(x)$ и $\sigma^n(x')$ будут отличаться уже в первом знаке, поскольку $\sigma^n(x) = (0, a_{n+1} \ldots)$, где $\sigma^2(x) \equiv \sigma[\sigma(x)]$ и т. д.

2. У последовательности итераций $\sigma^n(x_0)$ те же статистические свойства, что и у последовательных подбрасываний монеты. Чтобы убедиться в этом, припишем итерации $\sigma^n(x_0)$ символ R или L в зависимости от того, в правой или левой части единичного интервала содержится эта итерация. Если теперь мы имеем произвольную, как при подбрасывании монеты, последовательность $RLLR\ldots$, то всегда сможем найти точку x_0, для которой последовательность итераций x_0, $\sigma^1(x_0)$, $\sigma^2(x_0)$ ... эту последовательность образует. Такой результат следует из того, что $\sigma^n(x_0) = (0, a_{n+1}a_{n+2} \ldots)$ соответствует R или L тогда и только тогда, когда $a_{n+1} = 1$ или $a_{n+1} = 0$, т. е. последовательность $RLLR$ ... изоморфна двоичному разложению x_0:

$$x_0 = (0, \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ R & L & L & R \end{array} \ldots). \quad (2.4)$$

Поэтому реализация некоторой последовательности при подбрасывании монеты эквивалентна выбору специального значения x_0.

3. Механизм появления эргодичности в детерминированных системах. Заметим сначала, что любую точку x мы можем с произвольной степенью точности $\varepsilon = 2^{-n}$ аппроксимировать конечной последовательностью двоичных знаков $0, a_1 a_2 \ldots a_n$. Теперь покажем, что образы $\sigma^r(x_0)$ $(r = 1, 2, 3 \ldots)$ «произвольного» иррационального числа $x_0 \in [0, 1]$ подходят к x на расстояние не более ε бесконечное число раз, т. е. система ведет себя эргодически.

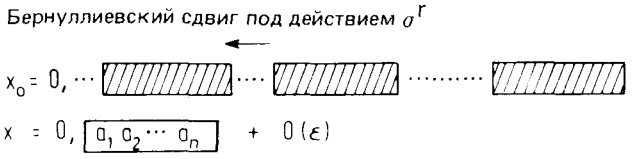


Рис. 6. Возникновение эргодичности при бернуллиевском сдвиге чисел.

Это следует из того, что, во-первых, в своем двоичном представлении почти все иррациональные числа из [0, 1] (за исключением множества меры 0) бесконечное число раз включают в себя любую конечную последовательность знаков (см. литературу на с. 220) и, во-вторых, благодаря бернуллиевскому свойству $\sigma(x)$ сдвигает эти последовательности в начальное положение, как показано на рис. 6. Данное рассуждение позволяет подойти к самой сути зарождения хаотического движения в детерминированных системах — оно показывает, как при усилении неточности, связанной с заданием иррациональных чисел, возникает хаос.

Такой механизм, приводящий к детерминированному хаосу, достаточно универсален. Два его основных элемента — растяжение и складывание — являются главными свойствами любого хаотического отображения.

Рассмотрим для определенности начальную точку $x_0 < 1/2$. Поскольку x_0 растягивается вдвое под действием каждой итерации (рис. 7), то для значений $n > n_0$, таких, что $2^{n_0} \cdot x_0 \geqslant 1$, следует использовать уже вторую ветвь функции $\sigma(x)$. После складывания точка x_n вновь попадает в исходный единичный интервал, как показано на рис. 7.

В общем случае нелинейного отображения единичного интервала в себя имеет место комбинация растяжений и складываний (относительно [0, 1]), которая постоянно возвращает итерации начальной точки на единичный интервал и ведет к хаотическому движению.

Отметим кратко возможную физическую интерпретацию свойства растяжения нелинейных отображений. Начальные условия (т. е. x_0) физической системы могут быть определены лишь с огра-

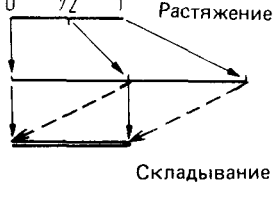


Рис. 7. Растяжение и складывание единичного интервала под действием $\sigma(x)$.

ниченной точностью. Эта «произвольно» малая, но конечная неточность под действием нелинейного эволюционного уравнения экспоненциально усиливается ($\sigma^n(x_0) = 2^n x_0 \bmod 1$). Таким образом, рассматриваемое уравнение ведет себя как некий микроскоп, который делает заметными пределы нашей точности в физических измерениях. Можем ли мы в таком случае утверждать, что понятие континуума с его разделением точек на рациональные и иррациональные не имеет физического смысла и что все физические переменные должны быть квантованными? Заметим, что соотношение неопределенностей Гейзенберга, ограничивающее точность наблюдения в случае связанных переменных, было установлено в мысленном эксперименте, который заключался в том, чтобы при помощи оптического микроскопа измерить с произвольной точностью местоположение и импульс какого-либо электрона. Эти и другие близкие вопросы обсуждаются в интересной статье Дж. Форда в журнале "Physics Today" за апрель 1983 г.

2.2. Характеристики хаотического движения

Здесь мы вводим показатель Ляпунова, а также инвариантную меру и корреляционную функцию как количественные характеристики хаотического движения, порожденного одномерным отображением Пуанкаре.

Показатель Ляпунова. В предыдущем разделе мы уже видели, что под действием отображения

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.5}$$

соседние точки могут разбегаться, что ведет к хаотическому движению. Показатель Ляпунова $\lambda(x_0)$ характеризует степень экспоненциального разбегания, как показано на рис. 8.

Согласно рис. 8, для $\lambda(x_0)$ получаем выражение

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} \approx |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|, \tag{2.6}$$

которое в пределе при $\varepsilon \to 0$ и $N \to \infty$ дает точную формулу для $\lambda(x_0)$:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\mathrm{d}f^N(x_0)}{\mathrm{d}x_0} \right|. \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что $e^{\lambda(x_0)}$ — это коэффициент растяжения; он ука-

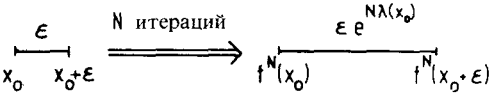


Рис. 8. Определение показателя Ляпунова.

зывает, во сколько раз в среднем увеличится за одну итерацию расстояние между очень близкими точками.

Кроме того, показатель Ляпунова определяет среднюю потерю информации (о положении точки в [0, 1]) за одну итерацию. Чтобы показать это, воспользуемся в (2.7) формулой для производной сложной функции (цепное правило)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^2(x)\Big|_{x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f[f(x)]\Big|_{x_0} = f'[f(x_0)]f'(x_0) =$$

$$= f'(x_1)f'(x_0); \quad x_1 \equiv f(x_0) \tag{2.8}$$

и запишем показатель Ляпунова в виде

$$\lambda(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0} f^N(x_0) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|. \tag{2.9}$$

Теперь обсудим вопрос о потере информации за одну итерацию линейного отображения. Разобьем интервал [0, 1] на n равных подынтервалов и предположим, что точка x_0 может оказаться в каждом из них с вероятностью $1/n$. Узнав, какой из подынтервалов содержит x_0, мы имеем информацию

$$I_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \operatorname{ld} \frac{1}{n} = \operatorname{ld} n, \tag{2.10}$$

где ld означает логарифм по основанию 2 (см. приложение 6). Если мы уменьшаем n, то информация I_0 уменьшается и при $n = 1$ становится равной нулю.

Из рис. 9 видно, что линейное отображение $f(x)$ изменяет длину интервала в $a = |f'(0)|$ раз. Соответствующее уменьшение определенности приводит к следующей потере информации в результате действия отображения:

$$\Delta I = -\sum_{i=0}^{n/a} \frac{a}{n} \operatorname{ld} \frac{a}{n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \operatorname{ld} \frac{1}{n} = -\operatorname{ld} a = -\operatorname{ld} |f'(0)|. \tag{2.11}$$

Обобщение этого выражения в ситуации, когда $|f'(x)|$ зависит от

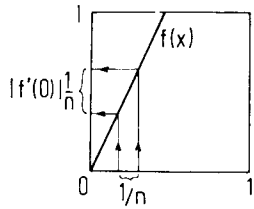


Рис. 9. Увеличение интервала $1/n$ под действием линейного отображения.

x, после усреднения по итерациям приводит к такой формуле для средней потери информации

$$\overline{\Delta I} = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\operatorname{ld}|f'(x_i)|, \tag{2.12}$$

что в силу (2.9) пропорционально показателю Ляпунова:

$$\lambda(x_0) = (\ln 2)\cdot|\overline{\Delta I}|. \tag{2.13}$$

Это соотношение между показателем Ляпунова и потерей информации является первым шагом на пути к тому, чтобы охарактеризовать хаос в инвариантной (относительно координат) форме — более содержательно это будет объяснено в гл. 5.

В качестве примера вычислим показатель Ляпунова для треугольного отображения

$$\Delta(x) = r\left(1 - 2\left|\frac{1}{2} - x\right|\right), \tag{2.14}$$

показанного на рис. 10. Функция $\Delta(x)$ служит удобной моделью, поскольку при $r > 1/2$ она порождает хаотическую последовательность x_0, $\Delta(x_0)$, $\Delta[\Delta(x_0)]$ ..., а поскольку она еще и проста по форме, все величины, характеризующие хаотическое состояние, можно вычислить точно.

Чтобы подробнее разобраться с этим отображением, рассмотрим вопрос об устойчивости его неподвижных точек при различных значениях r.

В общем случае точка x^* называется неподвижной точкой ото-

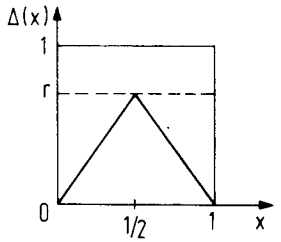


Рис. 10. Треугольное отображение $\Delta(x)$.

бражения $f(x)$, если

$$x^* = f(x^*), \tag{2.15}$$

т. е. неподвижные точки лежат на пересечении графика $f(x)$ с биссектрисой.

Неподвижная точка локально устойчива, если все точки x_0 в окрестности точки x^* притягиваются к ней, т. е. если последовательность итераций x_0

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \equiv$$
$$\equiv x_0, f(x_0), f[f(x_0)], \ldots, \underbrace{f[f \ldots f(x_0) \ldots]}_{n}, \ldots \tag{2.16}$$

сходится к x^*. Поскольку расстояние δ_n до точки x^* изменяется следующим образом:

$$\delta_{n+1} = |x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - x^*| =$$
$$= |f(x^* + \delta_n) - x^*| \approx \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^*} f(x^*)\right| \cdot \delta_n, \tag{2.17}$$

то аналитическим критерием локальной устойчивости является условие

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^*} f(x^*)\right| < 1. \tag{2.18}$$

На рис. 11, *а* показано, что при $r < 1/2$ точка $x = 0$ является единственной устойчивой неподвижной точкой и к ней притягиваются все точки из [0, 1].

При $r > 1/2$ существуют уже две неустойчивые неподвижные точки. На рис. 11, *б* показано, как при $r = 1$ итерации точек x_0 и x_0' удаляются от неподвижных точек $x_1 = 0$ и $x_2 = 2/3$ соответственно. Далее мы рассмотрим лишь случай $r = 1$; этот случай является характерным для $r > 1/2$.

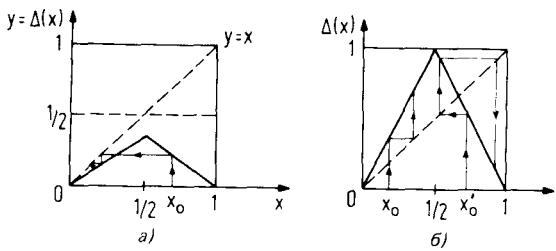


Рис. 11. *а* — Устойчивая неподвижная точка $x^* = 0$ при $r < 1/2$; *б* — две неустойчивые неподвижные точки при $r = 1$.

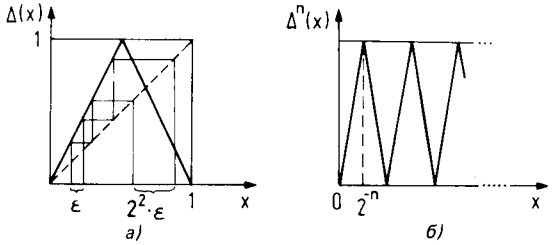


Рис. 12. *а* — Разбегание точек под действием итераций $\Delta(x)$; *б* — n-я итерация $\Delta^n(x)$.

Что мы можем сказать о последовательности итераций, если устойчивых неподвижных точек не существует? Во-первых, заметим, что под действием начальных итераций близкие точки все более и более разбегаются, как показано на рис. 12. Если мы начертим график n-й итерации $\Delta^n(x)$, то увидим (рис. 12), что она также является кусочно-линейной и имеет наклон $\left|\frac{d}{dx}\Delta^n(x)\right| = 2^n$ всюду, за исключением счетного множества точек $j \cdot 2^{-n}$, где $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2^n$. Таким образом, с ростом n разбегание «почти всех» точек $x_0, x_0 + \varepsilon$ за n итераций растет экспоненциально, и независимо от x_0 показатель Ляпунова оказывается равным

$$\lambda = \ln 2. \tag{2.19}$$

В общем случае для треугольного отображения (2.14) показатель Ляпунова, очевидно, равен $\lambda = \ln 2r$. Отсюда следует, что $\lambda > 0$ при $r > 1/2$, т. е. в этом случае в результате итерации мы теряем информацию о положении точки в [0, 1]. При $r < 1/2$ выполняется неравенство $\lambda < 0$, и тогда мы приобретаем информацию, так как все точки притягиваются к $x^* = 0$.

При $r = 1/2$ показатель Ляпунова меняет знак, поэтому можно сказать, что он играет роль параметра порядка, который характеризует наступление хаоса (рис. 13).

Чтобы аналогия с критическими явлениями стала более полной, добавим, что в окрестности «критической точки» $r_c = 1/2$ зна-

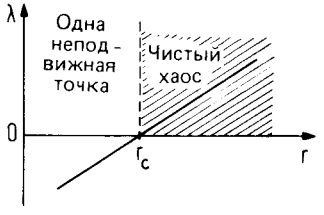


Рис. 13. Показатель Ляпунова для треугольного отображения как функция r в окрестности r_c.

чение $\lambda = \ln 2r$ изменяется по степенному закону:

$$\lambda \sim (r - r_c). \tag{2.20}$$

Это означает, что даже простой переход к хаосу в треугольном отображении обнаруживает ряд особенностей, которые напоминают фазовый переход вблизи состояния равновесия. Как уже упоминалось, мы обсудим этот аспект более детально в гл. 3. Следует также отметить, что определение показателя Ляпунова можно обобщить и на отображения более высокой размерности. Это будет сделано в гл. 5, где мы, кроме того, обсудим связь между показателем Ляпунова и энтропией Колмогорова — Синая, а также его возможное влияние на хаусдорфову размерность. Но перед тем, как перейти к этим проблемам, изучим вопрос о распределении итераций одномерного отображения на единичном интервале.

Инвариантная мера. Инвариантная мера $\rho(x)$ задает плотность итераций отображения

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in [0, 1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.21}$$

на единичном интервале и определяется следующим образом:

$$\rho(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta[x - f^i(x_0)]. \tag{2.22}$$

Данное формальное выражение позволяет записать временно́е среднее функции $g(x)$ как среднее значение относительно инвариантной меры

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i) \equiv \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g[f^i(x_0)] = \\ = \int_0^1 \mathrm{d}x \rho(x) g(x). \tag{2.23}$$

Это представляет собой одномерный аналог термодинамического усреднения в статистической механике, позволяющего, в случае когда движение в фазовом пространстве эргодично, заменить временно́е усреднение усреднением по ансамблю относительно стационарного распределения ρ, т. е.

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t\, A[\mathbf{x}(t)] = \int \mathrm{d}\mathbf{x} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}). \tag{2.24}$$

Здесь A есть функция от вектора $\mathbf{x} = [\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)]$, зависящего от

времени, где координаты **q** и импульсы **p** удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{2.25}$$

а $\tilde{\rho}$ является, например, микроканоническим распределением $\tilde{\rho} = \delta[H(\mathbf{x}) - E]$ изолированной системы с энергией E. Заметим, однако, что наш одномерный пример соответствует диссипативной системе (см., например, гл. 1, уравнение (1.8)), в то время как уравнения Гамильтона (2.25) описывают консервативную модель.

Тем не менее представляет интерес исследование эргодичности в одномерной модельной системе, у которой «временна́я» эволюция задается отображением (2.21).

Мы будем изучать следующие два вопроса:

1) как можно вычислить $\rho(x)$?

2) существует ли единственная плотность $\rho(x)$, для которой выполняется (2.23)?

К счастью, уравнение движения (2.21) проще, чем (2.25), и мы будем в состоянии без дополнительных допущений вычислить $\rho(x)$ для некоторых отображений.

Преобразуя интегральное уравнение для $\rho(x)$, мы попытаемся ответить на первый поставленный вопрос. Основная идея здесь заключается в том, что плотность $\rho(x)$ обязана быть стационарной, т. е. уравнение (2.23) имеет смысл лишь тогда, когда $\rho(x)$ не зависит от времени. Как развивается во времени данное распределение? Если мы рассмотрим точку x_0, то за одну итерацию она переходит в $f(x_0)$. Это означает, что распределение в виде дельта-функции $\delta(x - x_0)$ переходит за единицу времени в $\delta[x - f(x_0)]$, а данное распределение $\rho_n(x)$ через одну итерацию принимает вид

$$\rho_{n+1}(y) = \int dx \delta[y - f(x)]\rho_n(x). \tag{2.26}$$

Если для $\rho_n(x)$ воспользоваться выражением (2.22), то мы получим, что плотность распределения инвариантна относительно (2.26), т. е.

$$\rho(y) = \int_0^1 dx \delta[y - f(x)]\rho(x). \tag{2.27}$$

Это означает, что $\rho(x)$ стационарна, т. е., как и ожидалось, она не изменяется во времени под действием отображения $f(x)$ и, таким образом, является решением так называемого *интегрального уравнения Фробениуса — Перрона* (2.27).

Итак, мы отвечаем на первый из поставленных вопросов: $\rho(x)$ действительно можно вычислить с помощью (2.27). На второй вопрос — о единственности $\rho(x)$ — можно ответить лишь при решении (2.27) для специальных случаев отображения $f(x)$.

Вновь рассмотрим в качестве примера треугольное отображение при

$$\Delta(x) = \begin{cases} 2x & \text{для} \quad x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2(x-1) & \text{для} \quad x > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.28}$$

В этом случае (2.27) принимает вид

$$\rho(x) = \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{x}{2}\right) + \rho\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right]. \tag{2.29}$$

Это уравнение имеет очевидное нормированное решение $\rho(x) = 1$. Кроме того, мы можем показать, что это решение единственно. Если взять в качестве начального произвольное нормированное распределение $\rho_0(x)$ и применить к нему n раз (2.27), то получим выражение

$$\rho_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^{n-1}}\left[\rho_0\left(\frac{j-1}{2^{n-1}} + \frac{x}{2^n}\right) + \rho_0\left(\frac{j}{2^{n-1}} - \frac{x}{2^n}\right)\right], \tag{2.30}$$

которое сходится к

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\rho_n(x) = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 dx\rho_0(x) + \int_0^1 dx\rho_0(x)\right] = 1. \tag{2.31}$$

Это означает, что для треугольного отображения при $r = 1$ хаотическая последовательность итераций $x_0, f(x_0), f(f(x_0))$ ... равномерно покрывает интервал [0, 1] и система эргодична. Далее мы будем изучать инвариантную плотность вероятности, равно как и показатель Ляпунова, для более сложных отображений и покажем, что она не всегда постоянна.

Корреляционная функция. Корреляционная функция $C(m)$ для отображения (2.21) определяется следующим образом:

$$C(m) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\hat{x}_{i+m}\hat{x}_i, \tag{2.32}$$

где

$$\hat{x}_i = f^i(x_0) - \bar{x}; \quad \bar{x} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^i(x_0). \tag{2.33}$$

Из этого определения следует, что $C(m)$ представляет еще одну характеристику стохастичности итерационной последовательности x_0, $f(x_0)$, $f^2(x_0)$ ... . Эта характеристика показывает, насколько отклонения от среднего значения

$$\hat{x}_i = x_i - \bar{x}, \tag{2.34}$$

вычисленные через m шагов (т. е. $\hat{x}_{i+m}$ и $\hat{x}_i$), связаны в среднем друг с другом.

Если для данного отображения $f(x)$ известная инвариантная мера $\rho(x)$, то $C(m)$ можно записать в следующем виде:

$$C(m) = \int_0^1 \mathrm{d}x \rho(x) x f^m(x) - \left[\int_0^1 \mathrm{d}x \rho(x) x \right]^2. \tag{2.35}$$

Здесь мы воспользовались свойством коммутативности итераций, т. е.

$$x_{i+m} = f^{i+m}(x_0) = f^i f^m(x_0) = f^m f^i(x_0). \tag{2.36}$$

Таким образом, в случае треугольного отображения имеем

$$C(m) = \int_0^1 \mathrm{d}x x \Delta^m(x) - \left[\int_0^1 \mathrm{d}x x \right]^2 = \tag{2.37а}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}y y \Delta^m \left(y + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}y \Delta^m \left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \delta_{m,0}, \tag{2.37б}$$

т. е. последовательность итераций дельта-коррелирована.

Этот результат следует из того, что функция $\Delta^n(y + 1/2)$ симметрична относительно $y = 0$ и поэтому первый интеграл в (2.37б) обращается в нуль при $m > 0$, а второй интеграл не зависит от m, как показано на рис. 14.

Суммируя сказанное, отметим следующее.

Мы установили, что для одномерного отображения в общем случае последовательность x_0, $f(x_0)$, ... $f^n(x_0)$ ... может быть охарактеризована с помощью а) показателя Ляпунова, который пока-

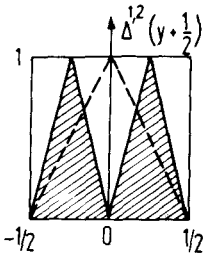


Рис. 14. Первая и вторая итерации $\Delta^{1,2}(y + 1/2)$ симметричны относительно $y = 0$; площади треугольников не зависят от $m = 1, 2$.

зывает, как разбегаются близкие точки под действием f; б) инвариантной плотности вероятности, которая служит мерой того, как точки итерационной последовательности распределяются на интервале; в) корреляционной функции $C(m)$, которая измеряет зависимость между итерациями через m шагов.

Для треугольного отображения показатель Ляпунова равен $\lambda = \ln 2r$, он меняет знак при $r = 1/2$. Поэтому он может служить параметром, отмечающим появление хаоса. При $r = 1$ хаотическое поведение характеризуется постоянной стационарной плотностью $\rho(x) = 1$ и дельта-коррелированными итерациями: $C(m) = \frac{1}{12}\delta_{m,0}$.

2.3. Детерминированная диффузия

В данном разделе мы покажем, что итерации некоторых одномерных периодических отображений демонстрируют диффузионное поведение. Эта диффузия указывает на наличие хаотического движения у соответствующего редуцированного отображения.

Обычно диффузию связывают с броуновским движением частиц жидкости. Уравнение диффузии появляется в случае большого трения (когда ускорением $\sim\ddot{x}$ можно пренебречь); оно имеет вид

$$\dot{x} \sim \xi(t). \tag{2.38}$$

Здесь $\xi(t)$ представляет собой случайные силы, возникающие при тепловом возбуждении молекул. Если предположить, как обычно, что $\xi(t)$ коррелированы по Гауссу, т. е.

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \sim \delta(t - t'), \tag{2.39}$$

то из уравнений (2.38) и (2.39) получим

$$\langle x(t) \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle x^2(t) \rangle \sim t. \tag{2.40}$$

Это означает, что квадрат расстояния до начала координат линейно зависит от времени, если на частицу действуют случайные силы

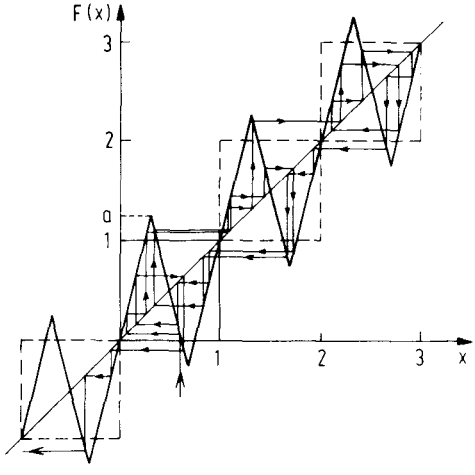


Рис. 15. Кусочно-линейное периодическое отображение с диффузионной траекторией (Grossmann, 1982).

(в отличие от закона $x^2 \sim t^2$ при постоянной силе $k \sim x$). Без особого труда можно показать, что при $t \to \infty$ (2.40) выполняется и тогда, когда ускорением не пренебрегают (см., например, книгу Г. Хакена «Синергетика»).

Рассмотрим теперь кусочно-линейное периодическое отображение

$$x_{\tau+1} = F(x_\tau) = x_\tau + f(x_\tau); \quad \tau = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.41}$$

где $f(x_\tau)$ периодично по x_τ, т. е.

$$f(x_\tau + n) = f(x_\tau), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{2.42}$$

как показано на рис. 15.

Траектория, как можно заметить, медленно удаляется от начала координат. Здесь, однако, диффузия возникает не за счет случайных сил, как в упомянутом выше броуновском движении, а за счет того, что траектория под влиянием хаотического движения внутри одного или нескольких единичных отрезков «забывает свое прошлое». Чтобы обосновать это утверждение, мы точно вычислим $\langle x^2 \rangle$ для отображения (2.41).

Координату точки траектории представим в виде суммы номера отрезка N_τ и положения $y_\tau \in [0, 1]$ внутри отрезка (Grossmann, 1982), т. е.

$$x_\tau = N_\tau + y_\tau. \tag{2.43}$$

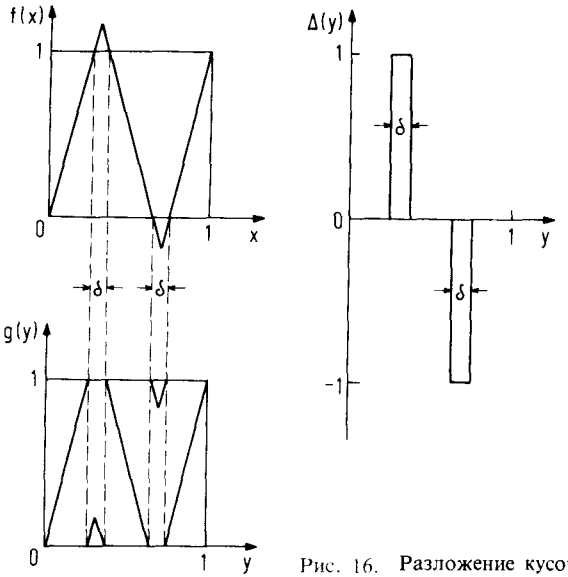


Рис. 16. Разложение кусочно-линейного отображения.

Тогда отображение (2.41) принимает вид

$$N_{\tau+1} + y_{\tau+1} = F(N_\tau + y_\tau) = N_\tau + y_\tau + f(y_\tau), \tag{2.44}$$

что эквивалентно паре динамических уравнений

$$N_{\tau+1} - N_\tau = [y_\tau + f(y_\tau)] \equiv \Delta(y_\tau), \tag{2.45а}$$

$$y_{\tau+1} = y_\tau + f(y_\tau) - [y_\tau + f(y_\tau)] \equiv g(y_\tau), \tag{2.45б}$$

где $[z]$ означает целую часть числа z. На рис. 16 показаны функция $\Delta(y_\tau)$, которая представляет собой величину скачка, описываемого целым числом, и функция $g(y_\tau)$, дающая остаток для координаты $\tau + 1$.

Учитывая (2.45а), расстояние до начала координат можно записать в виде

$$N_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} (N_{\tau+1} - N_\tau) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \Delta(y_\tau); \quad N_0 = 1. \tag{2.46}$$

Отсюда следует такое выражение для усредненного квадрата расстояния:

$$\langle N_t^2 \rangle = \sum_{\tau,\lambda}^{t-1} \langle \Delta(y_\tau)\Delta(y_\lambda) \rangle, \tag{2.47}$$

где усреднение $\langle \ldots \rangle$ берется по всем начальным условиям y_0, причем для простоты предполагается, что $\langle N_t \rangle = 0$. В случае когда движение, задаваемое функцией $g(y)$, настолько хаотично, что корреляции между y_τ нет, т. е.

$$\langle \Delta(y_\lambda)\Delta(y_\tau) \rangle \sim \delta_{\lambda,\tau}, \tag{2.48}$$

из (2.47) получим

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\langle N_t^2 \rangle}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{\tau = 0}^{t-1} \langle \Delta^2(y_\tau) \rangle = \tag{2.49}$$

$$= \int dy \rho(y) \Delta^2(y). \tag{2.50}$$

Переход от (2.49) к (2.50) возможен лишь в том случае, когда $g(y)$ имеет инвариантную плотность, удовлетворяющую уравнению

$$\rho(y) = \int dx \delta[g(x) - y] \rho(x). \tag{2.51}$$

Из (2.50) следует, что $\langle N_t^2 \rangle$ растет линейно со временем, т. е.

$$\langle N_t^2 \rangle = 2Dt \qquad \text{для} \qquad t \gg 1, \tag{2.52}$$

где коэффициент диффузии равен

$$D \equiv \frac{1}{2} \int dy \rho(y) \Delta^2(y). \tag{2.53}$$

Из наших рассуждений должно быть ясно, что диффузия имеет место тогда, когда координаты y_τ в достаточной степени не коррелированны; в этом случае двойная сумма в (2.47) сводится к обыкновенной. (Для вполне коррелированного движения $\langle N_t^2 \rangle$ будет пропорционально t^2.) Таким образом, для периодического отображения само наличие диффузии уже указывает на хаотичность движения, разрушающего корреляции внутри отрезков. В дальнейшем в гл. 7, где обсуждаются отображения, сохраняющие площадь, мы используем эту характеристику хаоса для некоторых обобщений.

В заключение введем простой масштабный закон для коэффициента диффузии, имеющий чисто геометрическую природу. Если интервалы δ, через которые траектории перескакивают из одного отрезка в другой, достаточно малы (так что изменением ρ в этой области можно пренебречь, т. е. $\rho(x \in \delta) = \bar{\rho}$), то уравнение (2.53) запишется в виде

$$D \approx \frac{1}{2} \bar{\rho} \delta, \tag{2.54}$$

поскольку Δ^2 принимает значения либо 0, либо 1. На рис. 17 пока-

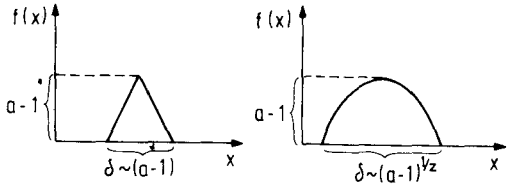


Рис. 17. Вариация δ порядка $(a-1)^{1/z}$, когда $f(x)$ имеет максимум порядка z (схематично).

зано, что D имеет скейлинг:

$$D \sim (a-1)^{1/z}, \tag{2.55}$$

когда отображение $f(x)$ имеет максимум (и минимум) порядка z.

3

Универсальное поведение квадратичных отображений

В этой главе мы изучим логистическое отображение

$$x_{n+1} = f_r(x_n) \equiv rx_n(1 - x_n), \tag{3.1}$$

показанное на рис. 18.

Как уже упоминалось в гл. 1, отображение (3.1) описывает, например, поведение быстро успокаивающегося ротатора, на который периодически действуют толчки. Данное логистическое отображение, представляющее собой, наверное, простейшее нелинейное разностное уравнение, появляется и во многих других ситуациях.

Оно было введено еще в 1845 г. П. Ф. Ферхюльстом для описания динамики популяции в замкнутой среде. Относительная (нормированная) численность особей x_{n+1} в $n + 1$-й год пропорциональна численности в предыдущий год, а также свободной части жизненного пространства, которая пропорциональна $(1 - x_n)$, т. е. $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, где параметр r зависит от плодовитости, реальной площади для жизни и т. д.

Другой пример дает задача о банковских сбережениях при стабилизирующемся росте процента (Peitgen, Richter, 1984). Рассмотрим денежный вклад z_0, который растет в соответствии с процентом ε следующим образом: $z_{n+1} = (1 + \varepsilon)z_n = \ldots = (1 + \varepsilon)^{n+1}z_0$. Желая воспрепятствовать беспредельному обогащению, какой-нибудь политик мог бы предложить, чтобы процент уменьшался пропорционально z_n, т. е. $\varepsilon \to \varepsilon_0(1 - z_n/z_{\max})$. Тогда счет в банке изменялся бы в соответствии с законом $z_{n+1} = [1 + \varepsilon_0(1 - z_n/z_{\text{макс}})]z_n$, который превращается в уравнение (3.1) при $x_n = z_n\varepsilon_0/z_{\text{макс}}(1 + \varepsilon_0)$ и $r = z_{\text{макс}}(1 + \varepsilon_0)^2/\varepsilon_0$.

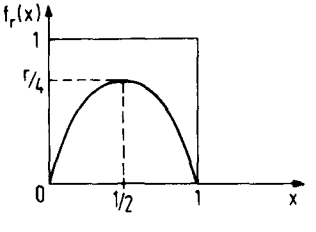


Рис. 18. Квадратичное отображение $f_r(x)$ на единичном интервале.

Казалось бы, можно ожидать, что благодаря механизму обратной связи интересующие нас величины (численность популяции или величина банковского счета) будут стремиться к некоторым средним значениям. Однако, как установили Гроссман и Томэ (Grossmann, Thomae, 1977), Фейгенбаум (Feigenbaum, 1978), Колле и Трессер (Collet, Tresser, 1978) и многие др. (см. работу (May, 1976), где имеются еще более ранние ссылки), итерации x_1, x_2, ... отображения (3.1) при варьировании внешнего параметра r демонстрируют довольно сложное поведение, которое становится хаотическим при больших r (рис. 19).

Поэтому можно понять тот вывод, который делает Мэй (May, 1976) в конце своей статьи в журнале Nature: «Вероятно, для всех нас было бы гораздо лучше, если бы не только при обучении или в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно большее число людей поняло, что простые динамические системы не обязательно приводят к простому поведению».

Следует отметить, что хаотическое поведение не связано со своеобразием логистического отображения. Фейгенбаум показал, что при некоторых ограничениях, которые будут обсуждаться ниже, переход к хаосу, найденный для логистического отображения, встречается во всех разностных уравнениях первого порядка $x_{n+1} = f(x_n)$, в которых после соответствующего изменения масштаба $f(x_n)$ имеет единственный максимум в интервале $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. Фейгенбаум установил также, что качественное поведение при переходе к хаосу описывается универсальными константами (константами Фейгенбаума α и δ), величина которых зависит лишь от характера максимума. (Имеется в виду, что, например, квадратичному максимуму соответствуют функции, удовлетворяющие условиям $f'(x_{\text{макс}}) = 0$, $f''(x_{\text{макс}}) < 0$, и т.п.). Поскольку условия появления фейгенбаумовского перехода довольно естественны (практически для системы достаточно, чтобы ее отображение Пуанкаре было близко к одномерному с единственным максимумом), не удивительно, что такой переход наблюдается во многих нелинейных системах.

В следующих разделах данной главы подробно рассмотрены свойства фейгенбаумовского перехода. Начнем с краткого изложения, которое должно помочь читателю ориентироваться в математических деталях.

В разд. 3.1 дан обзор численных результатов по итерациям логического отображения. Показывается, что число периодических точек отображения $f_r(x)$, к которым итерации сходятся, при опре-

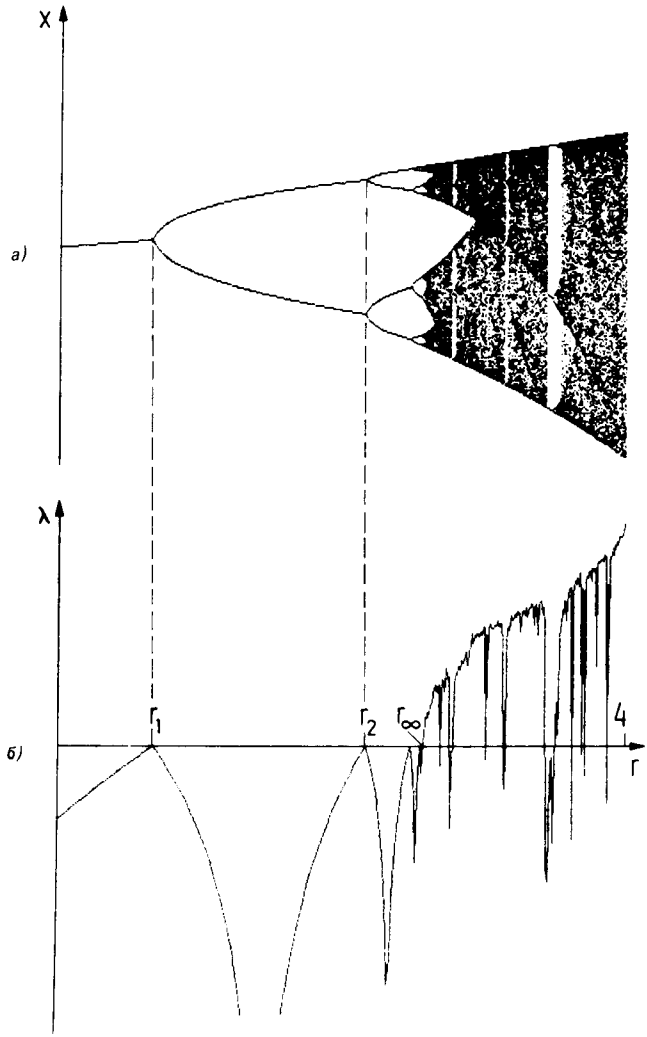


Рис. 19. *а* — Итерации логистического отображения; *б* — показатель Ляпунова λ (частное сообщение W. Desnizza).

деленных увеличивающихся значениях параметра r_n удваивается. При $r = r_\infty$ число периодических точек становится бесконечным, а за пределами этого (конечного) значения r поведение итераций для большинства r хаотично.

В разд. 3.2 мы исследуем бифуркацию, которая лежит в основе механизма последовательного удвоения периодических точек. Пока-

зано, что удвоение можно обнаружить, наблюдая за образом четных итераций ($f[f(x)]$, $f[f[f[f(x)]]]$, ...) исходного отображения $f(x)$. Это позволит нам установить, что образование новых точек связано с законом функциональной композиции. Исходя из этого, мы вводим преобразование удвоения T, описывающее функциональную композицию с одновременным изменением масштаба вдоль осей x и y ($\mathrm{T}f(x) \equiv -\alpha f[f(-x/\alpha)]$), и показываем, что постоянную Фейгенбаума α, которая определяет изменение расстояния между итерациями, можно вычислить по неподвижной (функциональной) точке f^* преобразования T ($\mathrm{T}f^* = f^*$). Далее мы рассмотрим другую константу Фейгенбаума δ, характеризующую масштабное преобразование величины r_n. Мы увидим, что она равна собственному значению линеаризованного преобразования удвоения. ния.

После описания метода вычисления универсальных итерационных характеристик в разд. 3.3 будут рассмотрены некоторые приложения. Вначале мы определим относительное расположение итераций и покажем, что в точке накопления r_∞ итерации образуют самоподобное точечное множество дробной размерности. Затем к распределению итераций применим преобразование Фурье и получим экспериментально измеримый и поэтому играющий важную роль спектр мощности.

Благодаря наличию дополнительных степеней свободы в любой реальной нелинейной диссипативной системе имеются еще и неучтенные силы, которые можно рассматривать как флуктуации. Эти силы, если их учесть в разностных уравнениях, стремятся размыть тонкую структуру распределения итераций. Мы изучим влияние данного эффекта на спектр мощности и покажем, что скорость, с которой подавляются высшие субгармоники, степенным образом зависят от уровня шума.

Пока мы касались поведения итераций лишь вблизи точки перехода к хаосу. Далее мы рассмотрим хаотическую область $r_\infty \leqslant r \leqslant 4$ и покажем, что при $r = 4$ логистическое отображение топологически сопряжено с ранее изученным треугольным отображением $\Delta(x)$. Отсюда следует, что оба этих отображения можно непрерывным образом преобразовать одно в другое и что итерации $f_4(x)$ имеют непрерывную инвариантную плотность, которую можно вычислить по инвариантной плотности отображения $\Delta(x)$.

Наконец, в разд. 3.4 мы поясним аналогию, возникающую между фейгенбаумовским переходом к хаосу и обыкновенными равновесными фазовыми переходами 2-го рода. В конце главы обсуждены экспериментальные аспекты фейгенбаумовского перехода.

3.1. Параметрическая зависимость итераций

Чтобы читатель получил представление о данном вопросе, мы представим здесь результаты по итерациям логистического отображения. Эти результаты получены с помощью компьютера при итерировании уравнения (3.1) для разных значений параметра r. На рис. 19 показаны точки накопления итераций $\{f_r^n(x_0)\}$ при $n > 300$ как функция от r, а также приведен показатель Ляпунова λ, вычисленный по формуле (2.9).

Мы будем различать *бифуркационный режим* при $1 < r < r_\infty$, где показатель Ляпунова всегда отрицателен (равным нулю он становится лишь в бифуркационных точках r_n) и *хаотический режим* при $r_\infty < r \leqslant 4$, где большинство значений λ положительно, что указывает на хаотическое поведение. Хаотический режим прерывается r-окнами, где последовательность $\{f_r^n(x_0)\}$ вновь оказывается в пределе периодической, что соответствует неравенству $\lambda < 0$.

Численные результаты можно подытожить следующим образом.

1. Периодический режим

а) Значения параметра r_n, при которых число устойчивых периодических точек удваивается и становится равным 2^n, удовлетворяют масштабному соотношению, или, как часто говорят, имеют скейлинг

$$r_n = r_\infty - \text{const}\,\delta^{-n} \quad \text{при} \quad n \gg 1. \tag{3.2}$$

б) Расстояния d_n от точки $x = 1/2$ до ближайшей к ней точки

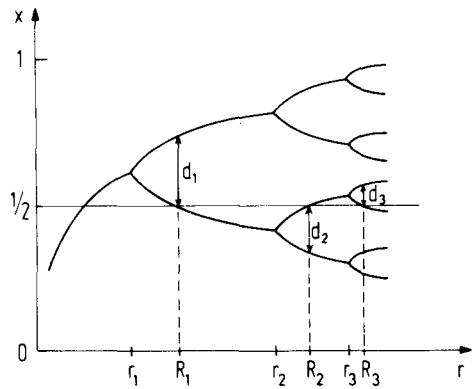


Рис. 20. Расстояние d_n от точки $x = 1/2$ до ближайшей к ней точки на суперустойчивом 2^n-цикле (схематично).

на 2^n-цикле (рис. 20) подчиняются следующему соотношению:

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha \quad \text{при} \quad n \gg 1. \tag{3.3}$$

в) Константы Фейгенбаума имеют значения

$$\delta = 4{,}6692016091\ldots, \tag{3.4а}$$
$$\alpha = 2{,}5029078750\ldots. \tag{3.4б}$$

Заметим также (и в дальнейшем этим воспользуемся), что значения R_n на рис. 20 имеют тот же скейлинг, что и r_n:

$$R_n - R_\infty = \text{const}' \cdot \delta^{-n}, \tag{3.5}$$

и, кроме того, выполняется равенство

$$R_\infty = r_\infty = 3{,}5699456\ldots.$$

2. Хаотический режим

а) Под действием «обратных» бифуркаций хаотические интервалы сближаются, пока при $r = 4$ итерации не распределятся на всем интервале [0, 1].

б) r-окна характеризуются периодическими p-циклами ($p = 3$, 5, 6, ...), которые подвергаются последовательным бифуркациям удвоения p, $p \cdot 2^1$, $p \cdot 2^2$ и т. д. Соответствующие значения r изменяются согласно соотношению, аналогичному (3.2), в котором величина δ та же, а константы другие.

в) Утроение $p \cdot 3^n$, а также учетверение периодов $p \cdot 4^n$ и т. д. происходит при $r = r_\infty - \text{const} \cdot \bar{\delta}^{-n}$ для различных констант Фейгенбаума $\bar{\delta}$, которые тоже являются универсальными (например, $\bar{\delta} = 55{,}247\ldots$ в случае $p \cdot 3^n$).

3.2. Бифуркация удвоения и преобразование удвоения

В этом разделе мы покажем, что фейгенбаумовский переход образуется при помощи последовательных бифуркаций удвоения. Это позволит нам связать появление новых ветвей (рис. 19) с универсальным законом функциональной композиции. Мы введем преобразование удвоения T, описывающее этот закон, и с его помощью установим, что константы α и δ действительно являются универсальными. После взятия обратной величины и смены знака они окажутся равными соответственно значению собственной функции преобразования T при $x = 1$ и единственному существенному собственному значению линеаризованного оператора удвоения.

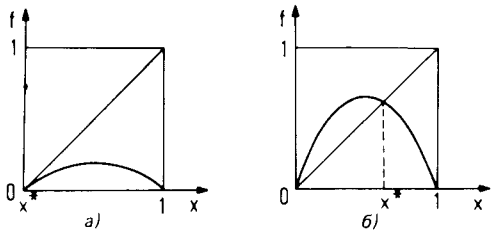


Рис. 21. Неподвижная точка f_r при *а*) $r < 1$ и *б*) $1 < r < 3$.

Бифуркация удвоения. В качестве первого шага рассмотрим вопрос об устойчивости неподвижных точек отображений $f_r(x)$ и $f_r^2(x) = f_r[f_r(x)]$ в зависимости от величины r. На рис. 21 показано, что при $r < 1$ у $f_r(x)$ имеется лишь одна устойчивая неподвижная точка $x^* = 0$, которая при $1 < r < 3$ становится неустойчивой, уступая место точке $x^* = 1 - 1/r$.

При $r > 3 = r_1$ имеем $|f_r'(x^*)| = |2 - r| > 1$, т. е. согласно критерию (2.17), точка x^* также становится неустойчивой. Что происходит после этого?

На рис. 22 показаны функции $f_r(x)$ вместе со второй итерацией $f_r^2(x)$ при $r > r_1$. Отметим четыре свойства f^2 (для удобства индекс r опускаем):

а) f^2 имеет три экстремума, в которых $f^{2'} = f'[f(x)]f'(x) = 0$; эти экстремумы достигаются в точках $x_0 = 1/2$ и $x_{1,2} = f^{-1}(1/2)$, поскольку $f'(1/2) = 0$ и $f'[f[f^{-1}(1/2)]] = f'(1/2) = 0$.

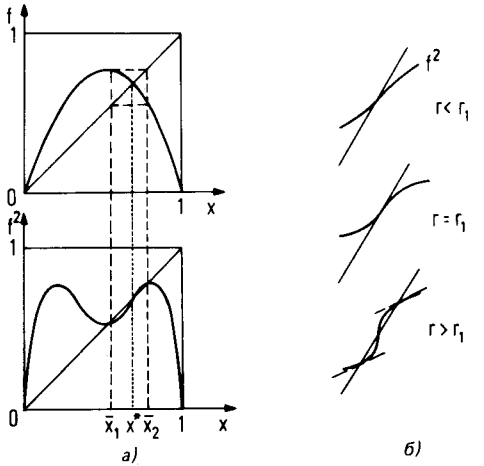


Рис. 22. *а*) $f(x)$ и $f^2(x) = f[f(x)]$ при $r > r_1$; *б*) образование двух новых устойчивых неподвижных (для f^2) точек под действием бифуркации удвоения (бифуркационная диаграмма похожа на вилы, см. с. 147).

б) Точка x^*, неподвижная для $f(x)$, является неподвижной для $f^2(x)$ и всех высших итераций.

в) Если неподвижная точка x^* становится неустойчивой по отношению к $f(x)$, она становится неустойчивой также и по отношению к f^2 и ко всем высшим итерациям, поскольку из неравенства $|f'(x^*)| > 1$ следует, что $|f^{2\prime}(x^*)| = |f'[f(x^*)]f'(x^*)| = |f'(x^*)|^2 > 1$.

г) Точка x^*, бывшая при $r < 3$ устойчивой неподвижной точкой для f^2, при $r > 3$ становится неустойчивой, и под действием бифуркации удвоения рождаются две новые устойчивые неподвижные точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ (рис. 22, *б*).

Пару устойчивых неподвижных точек $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ отображения $f^2(x)$ будем называть «аттрактором отображения $f(x)$ периода 2». Этот термин оправдывается тем, что почти любая последовательность итераций на отрезке [0, 1], осциллируя, притягивается к точкам $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ (рис. 23).

Легко видеть, что $f(x)$ отображает эти две новые неподвижные для f^2 точки друг в друга, т. е.

$$f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2 \quad \text{и} \quad f(\bar{x}_2) = \bar{x}_1. \tag{3.6}$$

Действительно, из равенства $f^2(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$ следует

$$ff[f(\bar{x}_1)] = f[f^2(\bar{x}_1)] = f(\bar{x}_1), \tag{3.7}$$

и, значит, $f(\bar{x}_1)$ также является неподвижной точкой для f^2. Но такой точкой может быть лишь $\bar{x}_2$ (если $f(\bar{x}_1)$ равняется 0 или x^*, это противоречит равенству $ff(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$).

Если теперь сделать r больше некоторого значения r_2, то неподвижные точки f_2 станут неустойчивыми. Поскольку производные в точках $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ совпадают:

$$f^{2\prime}(x_1) = f'[f(\bar{x}_1)]f'(\bar{x}_1) = f'(\bar{x}_2)f'(\bar{x}_1) = \tag{3.8}$$

$$= f^{2\prime}(\bar{x}_2), \tag{3.9}$$

эти точки становятся неустойчивыми одновременно.

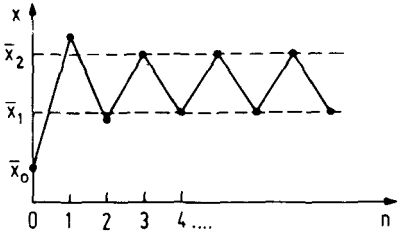


Рис. 23. Итерации точки $\bar{x}_0$, когда $f(x)$ имеет аттрактор периода 2 (схематично).

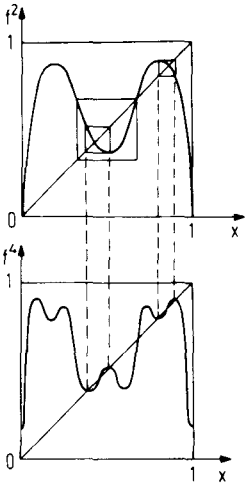


Рис. 24. Две бифуркации отображения f^4 приводят к появлению аттрактора периода 4.

На рис. 24 показано, что после возникновения этой неустойчивости четвертая итерация $f^4 = f^2 \cdot f^2$ демонстрирует еще две бифуркации удвоения, которые приводят к появлению аттрактора периода 4, т. е. наблюдается удвоение периода. Эти два примера можно обобщить следующим образом:

а) При $r_{n-1} < r < r_n$ имеется устойчивый 2^{n-1}-цикл $x_0^*, x_1^*, \ldots$ $\ldots, x_{2^{n-1}-1}^*$, который характеризуется свойствами

$$f_r(x_i^*) = x_{i+1}^*, \quad f_r^{2^{n-1}}(x_i^*) = x_i^*,$$

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0^*} f_r^{2^{n-1}}(x_0^*) \right| = \left| \prod_i f_r'(x_i^*) \right| < 1. \tag{3.10}$$

б) При $r = r_n$ у отображения

$$f_r^{2^n} = f_r^{2^{n-1}} \cdot f_r^{2^{n-1}} \tag{3.11}$$

происходит бифуркация удвоения, которая приводит к тому, что все точки 2^{n-1}-цикла одновременно становятся неустойчивыми и при $r_n < r < r_{n+1}$ появляется новый устойчивый 2^n-цикл.

Сделанное нами заключение представляет собой первый шаг к пониманию универсальности — оно связывает механизм последовательных бифуркаций с общим законом функциональной композиции. Добавим в качестве предостережения, что не все отображения единичного интервала с квадратичным максимумом обнаруживают бесконечную последовательность бифуркаций удвоения, а только те, которые имеют отрицательную производную Шварца (см. приложение 3).

Суперциклы. Теперь рассмотрим так называемые суперциклы — они нам потребуются в дальнейшем. 2^n-суперцикл — это суперустойчивый 2^n-цикл, определяемый условиями

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_0^*} f_{R_n}^{2^n}(x_0^*) = \prod_i f'_{R_n}(x_i^*) = 0. \tag{3.12}$$

Отсюда следует, что в качестве своего элемента он всегда содержит точку $x_0^* = 1/2$, так как эта точка — единственная, в которой f'_r обращается в 0. Из рис. 20 видно, что величины d_n точно равны расстояниям между элементами цикла $x^* = 1/2$ и $x_1 = f_{R_n}^{2^{n-1}}$, т. е.

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}. \tag{3.13}$$

Далее нам будет удобно проделать преобразование координат, переводящее $x = 1/2$ в $x = 0$, так что (3.13) примет вид

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0). \tag{3.14}$$

Учитывая результаты предыдущего раздела, получаем, что из (3.3) следует

$$\lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = d_1, \tag{3.15}$$

т. е. последовательность масштабированных итераций $f_{R_{n+1}}^{2^n}(0)$ сходится:

$$\lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}(0) = d_1. \tag{3.16}$$

Рис. 25 наводит на мысль, что соотношение (3.16) можно обобщить на весь интервал и что масштабно преобразованные функции сходятся к предельной функции $g_1(x)$:

$$\lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] = g_1(x). \tag{3.17}$$

Уравнение (3.17) показывает, что $g_1(x)$ определяется поведением $f_{R_{n+1}}^{2^n}(x)$ лишь вблизи точки $x = 0$ (см. также рис. 24), и поэтому $g_1(x)$ должна быть универсальной функцией для всех f, имеющих квадратичный максимум.

Преобразование удвоения и α. В качестве следующего шага по аналогии с уравнением (3.17) введем целое семейство функций:

$$g_i(x) \equiv \lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+i}}^{2^n}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right]; \quad i = 0, 1, \ldots . \tag{3.18}$$

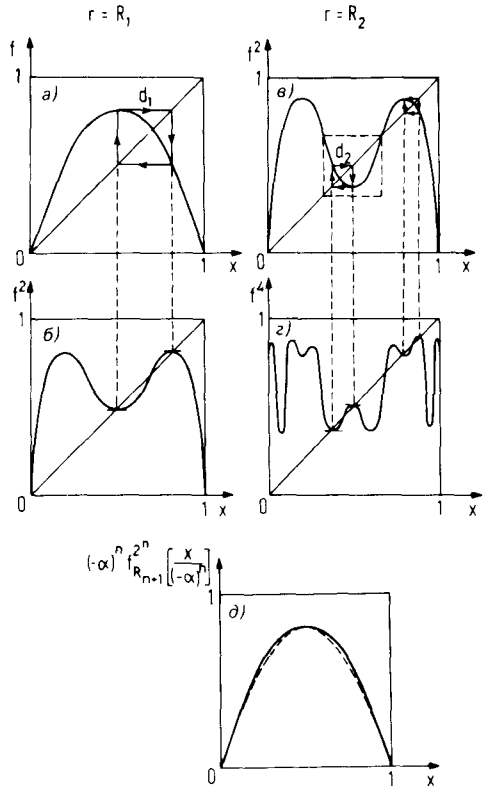


Рис. 25. Масштабно преобразованные итерации $f^{2^n}_{R_{n+1}}(x)$ сходятся к универсальной функции. *а—г*: суперустойчивые циклы при $r = R_1$ и $r = R_2$; на *б* и *г* отмечены горизонтальные касательные; *е* — содержимое квадрата из *в* после масштабирования (штриховая линия) сравнивается с исходной функцией из *а* (сплошная линия).

Заметим, что все эти функции связаны между собой *преобразованием удвоения* T:

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha)g_i\left[g_i\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] \equiv \mathrm{T}g_i(x), \tag{3.19}$$

поскольку

$$g_{i-1}(x) = \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{2^x}_{R+i-1}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^{n-1} f^{2^{n-1+i}}_{R_{n-1+i}}\left[-\frac{1}{\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^{n-1}}\right] =$$

$$= \lim_{m\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^m f^{2^m}_{R_{m+i}}\left\{\frac{1}{(-\alpha)^m}(-\alpha)^m f^{2^m}_{R_{m+i}}\left[-\frac{1}{\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^m}\right]\right\} =$$

$$= -\alpha g_i\left[g_i\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]. \tag{3.20}$$

Если в (3.19) перейти к пределу при $i \to \infty$, функция

$$g(x) \equiv \lim_{i \to \infty} g_i(x) \tag{3.21}$$

окажется неподвижной точкой оператора удвоения T:

$$g(x) = \mathrm{T}g(x) = -\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]. \tag{3.22}$$

Это уравнение определяет α универсальным образом:

$$g(0) = -\alpha g[g(0)]. \tag{3.23}$$

Легко показать, что при любом μ $\mu g(x/\mu)$ также является решением уравнения неподвижной точки (3.22) с тем же самым значением α. Таким образом, теория не может ничего сказать о конкретном значении μ, и мы зафиксируем μ, полагая

$$g(0) = 1. \tag{3.24}$$

Несмотря на то что в общей теории пока еще нет методов решения функционального уравнения (3.22), мы сможем получить единственное решение, если потребуем, чтобы $g(x)$ была гладкой функцией с вполне определенным видом максимума в нуле (например, квадратичным). Если для $g(x)$ в квадратичном случае воспользоваться самым коротким степенным разложением

$$g(x) = 1 + bx^2, \tag{3.25}$$

уравнение неподвижной точки (3.22) примет вид

$$1 + bx^2 = -\alpha(1 + b) - \left(\frac{2b^2}{\alpha}\right)x^2 + O(x^4). \tag{3.26}$$

Отсюда получаем

$$b = (-2 - \sqrt{12})/4 \approx -1{,}366; \quad \alpha = |2b| \approx 2{,}73. \tag{3.27}$$

Эти значения лишь на 10% отличаются от следующих численных результатов Фейгенбаума:

$$g(x) = 1 - 1{,}52763x^2 + 0{,}104815x^4 - 0{,}0267057x^6 + \ldots, \tag{3.28}$$
$$\alpha = 2{,}502807876,$$

что указывает на универсальность α.

Линеаризованное преобразование удвоения и δ. Что можно сказать о скейлинге по параметру r? Значения $r = R_n$, при которых 2^n-цикл становится суперустойчивым, определяются из того условия, что точка $x = 1/2$ есть элемент суперцикла (см. (3.12)), т. е.

$x = 1/2$ — неподвижная точка для $f_{R_n}^{2^n}(x)$:

$$f_{R_n}^{2^n}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \tag{3.29}$$

(3.29) после сдвига переменной x на $1/2$ принимает вид (см. (3.13), (3.14)):

$$f_{R_n}^{2^n}(0) = 0. \tag{3.30}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений, поскольку ему удовлетворяют также суперциклы, появляющиеся в окнах хаотического режима. Чтобы выделить те значения R_n в бифуркационной области, для которых выполняется

$$r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < r_3 < \ldots, \tag{3.31}$$

уравнение (3.30) обычно решают, начиная с $n = 0$, и значения R_n упорядочивают в соответствии с (3.31).

Числа R_n показывают, как быстро происходит приближение к значению R_∞. Чтобы доказать, что имеет место скейлинг

$$R_n - R_\infty \sim \delta^{-n}, \tag{3.32}$$

разложим $f_R(x)$ в окрестности $f_{R_\infty}(x)$:

$$f_R(x) = f_{R_\infty}(x) + (R - R_\infty)\delta f(x),$$

где

$$\delta f(x) \equiv \left.\frac{\partial f_R(x)}{\partial R}\right|_{R_\infty}. \tag{3.33}$$

Применим к этому уравнению оператор удвоения T. Непосредственная линеаризация по δf дает

$$\mathrm{T}f_R = \mathrm{T}f_{R_\infty} + (R - R_\infty)\mathrm{L}_{f_{R_\infty}}\delta f + O[(\delta f)^2], \tag{3.34}$$

где L_f — линейный оператор вида

$$\mathrm{L}_f\delta f = -\alpha\left[f'\left[f\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]\delta f\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + \delta f\left[f\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\}. \tag{3.35}$$

Отметим, что L_f определяется лишь по отношению к функции f.

Применяя T несколько раз, получаем

$$\mathrm{T}^n f_R = \mathrm{T}^n f_{R_\infty} + (R - R_\infty)\mathrm{L}_{\mathrm{T}^{n-1}f_{R_\infty}} \ldots \mathrm{L}_{f_{R_\infty}}\delta f + O[(\delta f)^2]. \tag{3.36}$$

Заметим, что, согласно уравнениям (3.18)—(3.21), $\mathrm{T}f_{R_\infty}^n$ сходится к неподвижной точке:

$$\mathrm{T}^n f_{R_\infty}(x) \cong (-\alpha)^n f_{R_\infty}^{2^n}\left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] = g(x) \quad \text{при} \quad n \gg 1, \tag{3.37}$$

и (3.36) при аппроксимации принимает вид

$$T^n f_R(x) \cong g(x) + (R - R_\infty) L_g^n \delta f(x) \quad \text{при} \quad n \gg 1. \tag{3.38}$$

Это уравнение можно еще более упростить, если разложить $\delta f(x)$ по собственным функциям φ_ν оператора L_g:

$$L_g \varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu; \quad \delta_f = \sum_\nu c_\nu \varphi_\nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \tag{3.39}$$

$$L_g^n \delta f = \sum_\nu c_\nu \lambda_\nu^n \varphi_\nu, \tag{3.40}$$

и предположить, что лишь одно из собственных значений λ_ν больше единицы, т. е.

$$\lambda_1 > 1; \qquad |\lambda_\nu| < 1 \qquad \text{при} \qquad \nu \neq 1 \tag{3.41}$$

Тогда в выражении (3.40) мы будем иметь вклад лишь от λ_1:

$$L_g^n \delta f \cong c_1 \lambda_1^n \varphi_1 \qquad \text{при} \qquad n \gg 1. \tag{3.42}$$

Поэтому (3.38) примет вид

$$T^n f_{R_n}(x) \cong g(x) + (R - R_\infty) \cdot \delta^n \cdot a \cdot h(x) \qquad \text{при} \qquad n \gg 1, \tag{3.43}$$

где мы ввели обозначения $c_1 \equiv a$, $\varphi_1 \equiv h$, $\lambda_1 \equiv \delta$.

Собственное значение λ_1 совпадает с константой Фейгенбаума δ. Действительно, при $R = R_n$ и $x = 0$ из (3.43) следует

$$T^n f_{R_n}(0) = g(0) + (R_n - R_\infty) \cdot \delta^n \cdot a \cdot h(0) \tag{3.44}$$

и в силу (3.30) выполняется условие

$$T^n f_{R_n}(0) = (-\alpha)^n f_{R_n}^{2^n}(0) = 0. \tag{3.45}$$

Таким образом, мы приходим к искомому результату (напомним, что $g(0) = 1$):

$$\lim_{n \to \infty} (R_n - R_\infty) \delta^n = \frac{-1}{a \cdot h(0)} = \text{const}. \tag{3.46}$$

Последнее уравнение можно обобщить, если в качестве параметра ввести мультипликатор (наклон производной):

$$\mu \equiv \frac{d}{dx_0^*} f_r^{2^n}(x_0^*) = \prod_i f_r'(x_i^*), \tag{3.47}$$

и охарактеризовать r при помощи соответствующей пары (n, μ), как показано на рис. 26. Тогда из (3.44) получим

$$\lim_{n \to \infty} (R_{n,\mu} - R_\infty) \cdot \delta^n = \frac{g_{0,\mu}(0) - g(0)}{a \cdot h(0)}, \tag{3.48a}$$

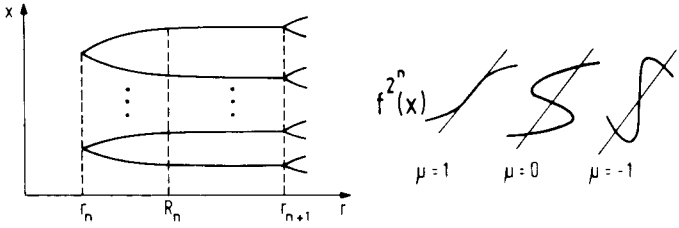


Рис. 26. Параметризация значений r при помощи n и μ (схематично), т. е. $r_n = R_{n,1} \triangleq (n, 1)$ и $R_n = R_{n,0} \triangleq (n, 0)$.

где выражение

$$g_{0,\mu}(x) = \lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n f^{2^n}_{R_{n,\mu}} \left[\frac{x}{(-\alpha)^n}\right] \tag{3.48б}$$

снова представляет собой универсальную функцию от μ.

В бифуркационных точках r_n мультипликаторы имеют одно и то же значение $\mu = 1$ (рис. 26). Поэтому, согласно (3.48), значения r_n масштабируются при помощи той же самой константы δ, что и параметры R_n суперустойчивых циклов (соответствующих $\mu = 0$), т. е. выполняется

$$r_n - r_\infty \sim \delta^{-n} \qquad \text{при} \qquad n \gg 1. \tag{3.49а}$$

Поскольку $r_n \leqslant R_{n,\mu} \leqslant r_{n+1}$ и $r_{n+1} - r_n \to 0$ при $n \to \infty$, точка накопления — одна и та же для всех μ:

$$\lim_{n \to \infty} R_{n,\mu} = R_\infty = r_\infty. \tag{3.49б}$$

Численное значение δ можно получить из универсального уравнения на собственное значение, комбинируя (3.35)—(3.43):

$$\mathrm{L}_g h(x) = -\alpha \left\{ g' \left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] h\left(-\frac{x}{\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + h\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\} = \delta \cdot h(x). \tag{3.50}$$

Чтобы упростить вычисления, мы оставляем в степенном разложении $h(x)$ только первый член $h(0)$, так что (3.50) превращается в алгебраическое выражение для δ:

$$-\alpha\{g'[g(0)] + 1\} = \delta. \tag{3.51а}$$

Значение $g'[g(0)] = g'(1)$ для функций с квадратичным максимумом (т. е. $g''(0) \neq 0$) можно вычислить, если дважды продиффе-

ренцировать уравнение неподвижной точки (3.22)):

$$g''(x) = -\left\{g''\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]\left[g'\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + g'\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]g''\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right\}/\alpha.$$

Отсюда

$$g'(1) = -\alpha. \tag{3.51б}$$

Таким образом, (3.51а) принимает вид

$$\delta = \alpha^2 - \alpha \tag{3.51в}$$

(для функций, имеющих максимум порядка $2z$, можно получить $\delta = \alpha^{1+z} - \alpha$).

Подставляя найденное нами ранее значение $\alpha = 2{,}73$, из (3.51) находим, что $\delta \approx 4{,}72$, т. е. по сравнению с численным результатом Фейгенбаума ($\delta = 4{,}6692016$) точность составляет примерно 1%. Это хороший результат, особенно если учесть грубость нашей аппроксимации.

Конечно, гораздо более сложным является доказательство предположения, что δ — действительно единственное собственное значение оператора L_g, большее 1. Это предположение было установлено в результате многочисленных вычислений Фейгенбаума и благодаря аналитическому рассмотрению Колле, Экмана и Лэнфорда (Collet, Eckmann, Lanford, 1980).

В заключение отметим два основных результата данного раздела:

1) Получено уравнение для неподвижной точки оператора удвоения:

$$Tg(x) = -\alpha g\left[g\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right] = g(x), \tag{3.52}$$

из которого следует универсальность числа α.

2) Получено линеаризованное преобразование удвоения:

$$T^n f_R(x) = g(x) + (R - R_\infty)\cdot\delta^n\cdot a\cdot h(x) \quad \text{при} \quad n \gg 1, \tag{3.53}$$

из которого следует универсальность числа δ. Оно позволяет определить, каким путем функции удаляются от $g(x)$ — неподвижной точки оператора удвоения — вдоль ее неустойчивого многообразия.

В рассматриваемой ситуации универсальность возникает из-за наличия лишь одного *существенного* собственного значения $\lambda_1 > 1$

оператора удвоения, так что любые функции $f(x)$ (за исключением $\varphi_1(x)$) в результате многократного применения оператора T и ренормализации будут приближаться к $g(x)$ — неподвижной точке оператора удвоения, поскольку собственные значения, соответствующие $f - g = \sum_{\nu \neq 1} c_\nu \varphi_\nu$ меньше 1, т. е. *несущественны*.

3.3. Самоподобие, универсальный спектр мощности и влияние внешнего шума

В этом разделе мы вычислим расстояния между элементами 2^n-цикла и определим его спектр мощности. Затем мы покажем, что внешний шум может резко изменять спектр мощности и разрушать высшие субгармоники. В заключение обсудим бифуркационную диаграмму при $r > r_\infty$ и покажем, что хаотичность поведения итераций логистического отображения при $r = 4$ связана с хаосом треугольного отображения.

Спектр мощности — важная характеристика для описания стохастического движения. Чтобы вычислить его для системы, в которой проявляется фейгенбаумовский переход к хаосу, нам нужно прежде всего определить относительное расположение элементов цикла. Для этого мы отождествляем n с временно́й переменной.

Самоподобие в расположении элементов цикла. О расположении элементов цикла мы знаем пока лишь то, что, согласно уравнениям (3.3) и (3.14), расстояние $d_n(0)$ до ближайшего к $x = 0$ элементу суперцикла изменяется в соответствии с масштабным коэффициентом α, т. е.

$$\frac{d_{n+1}(0)}{d_n(0)} = -\frac{1}{\alpha}, \quad d_n(0) = f_{R_n}^{2^{n-1}}, \quad \text{где} \quad n \gg 1. \tag{3.54}$$

Теперь мы собираемся обобщить эти уравнения. Вычислим для всех m расстояние $d_n(m)$ от m-го элемента 2^n-суперцикла до его ближайшего соседа $f_{R_n}^{2^{n-1}}(x_m)$

$$d_n(m) \equiv x_m - f_{R_n}^{2^{n-1}}(x_m) \tag{3.55}$$

и подсчитаем изменение $d_n(m)$ при увеличении n. Таким образом, определяем функцию

$$\sigma_n(m) \equiv \frac{d_{n+1}(m)}{d_n(m)}. \tag{3.56}$$

Через 2^n циклических шагов функция $\sigma_n(m)$ меняет знак:

$$\sigma_n(m + 2^n) = -\sigma_n(m), \tag{3.57}$$

поскольку

$$d_{n+1}(m + 2^n) = f^{2^n}_{R_{n+1}}(x_m) - f^{2^n}_{R_{n+1}}[f^{2^n}_{R_{n+1}}(x_m)] =$$

$$= f^{2^n}_{R_{n+1}}(x_m) - x_m = -d_{n+1}(m) \tag{3.58}$$

и величина $d_n(m)$ инвариантна ($f^{2^n}_{R_n}(x_m) = x_m$).

Рассмотрим теперь значения $m = 2^{n-i}$, $i = 0, \dots n$ и вычислим $\sigma_n(m)$ при $n \gg 1$. Из определений (3.55), (3.56) следует равенство

$$\sigma_n[2^{n-i}] = \frac{f^{2^{n-i}}_{R_{n+1}}(0) - f^{2^n}_{R_{n+1}}[f^{2^{n-i}}_{R_{n+1}}(0)]}{f^{2^{n-i}}_{R_n}(0) - f^{2^{n-1}}_{R_n}[f^{2^{n-i}}_{R_n}(0)]} =$$

$$= \frac{f^{2^{n-i}}_{R_{(n-i)+i+1}}(0) - f^{2^{n-i}}_{R_{(n-i)+i+1}}[f^{2^n}_{R_{n+1}}(0)]}{f^{2^{n-i}}_{R_{(n-i)+i}}(0) - f^{2^{n-i}}_{R_{(n-i)+i}}[f^{2^{n-1}}_{R_{(n-1)+1}}(0)]}, \tag{3.59}$$

которое в силу соотношения

$$f^{2^l}_{R_{l+j}}(x) \cong (-\alpha)^{-l} g_j[(-\alpha)^l x] \quad \text{при} \quad l = n - i \to \infty \tag{3.60}$$

принимает вид

$$\sigma_n[2^{n-i}] = \frac{g_{i+1} - g_{i+1}[(-\alpha)^i g_1(0)]}{g_i(0) - g_i[(-\alpha)^{-i+1} g_1(0)]} \quad \text{при} \quad n \gg 1. \tag{3.61}$$

Заметим, что при $i \gg 1$ функции $g_i(x)$ можно найти с помощью (3.18) и (3.44)

$$g_i(x) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{T}^n f_{R_{n+i}}(x) = g(x) - \delta^{-i} \cdot h(x). \tag{3.62}$$

Для меньших значений i можно воспользоваться соотношением (3.19)

$$g_{i-1}(x) = \mathrm{T} g_i(x). \tag{3.63}$$

Если ввести новую переменную $x = m/2^{n+1}$ и опустить индекс n, то соотношение симметрии (3.57) запишется в виде

$$\sigma\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\sigma(x). \tag{3.64}$$

Отсюда, в силу известного уже масштабного соотношения (3.54),

находим значение σ при $x = 1/2$:

$$\sigma(0) = -\frac{1}{\alpha}; \qquad \sigma\left(\frac{1}{2}\right) = -\sigma(0) = \frac{1}{2}. \tag{3.65}$$

С другой стороны, из (3.61) получаем

$$\sigma(0^+) = \lim_{i \to \infty} \sigma(x - 2^{-1-i}) = \lim_{i \to \infty} \frac{g(0) - g[(-\alpha)^i g_1(0)]}{g(0) - g[(-\alpha)^{-i+1} g_1(0)]} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}. \tag{3.66}$$

Здесь мы учли, что

$$g[(-\alpha)^{-i} g_1(0)] \approx g(0) + \frac{1}{2} g''(0)(-\alpha)^{-2i} g_1^2(0). \tag{3.67}$$

Отсюда, имея в виду (3.64), находим

$$\sigma\left(\frac{1}{2} + 0^+\right) = -\sigma(0^+) = -\frac{1}{\alpha^2}. \tag{3.68}$$

Это означает, что $\sigma(x)$ терпит разрывы в точках $x = 0$ и $x = 1/2$.

Более подробные вычисления показывают, что $\sigma(x)$ терпит разрывы во всех двоично-рациональных точках, как показано на рис. 27. К счастью, скачки $\sigma(x)$ при возрастании числа членов в двоичном разложении рационального x быстро убывают, и поэтому часто оказывается достаточным учитывать скачки лишь в точках $x = 0, 1/4, 1/2$.

Хаусдорфова размерность. Согласно рис. 27, расстояния между ближайшими точками суперцикла до и после бифуркации находятся в универсальном отношении. Самоподобие такого явления может быть описано с помощью хаусдорфовой размерности аттрактора.

Если для того, чтобы покрыть некоторое множество d-мерного пространства, требуется $N(l)$ d-мерных шаров диаметра l,

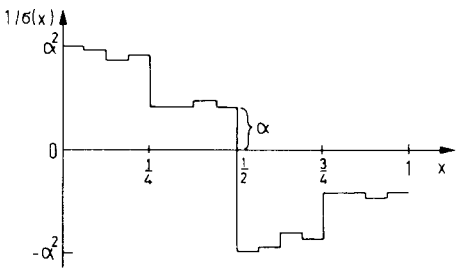


Рис. 27. Функция $1/\sigma(x)$ (Feigenbaum, 1980).

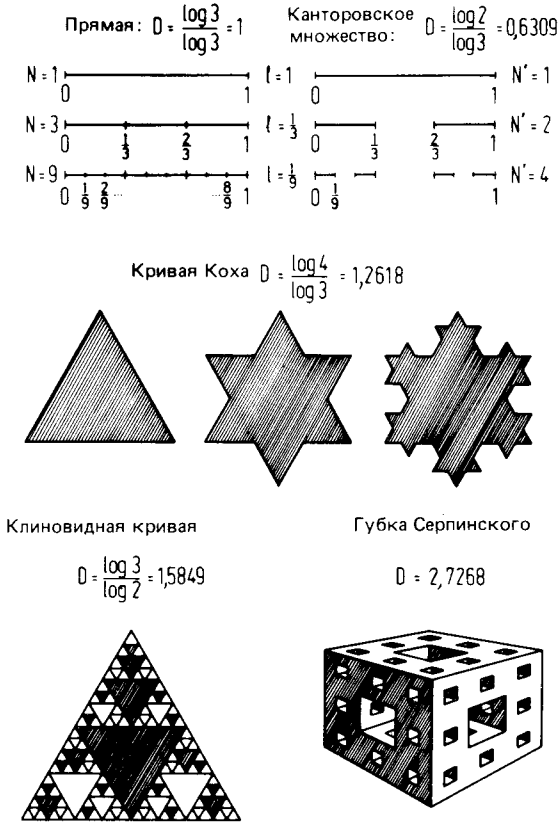


Рис. 28. Хаусдорфова размерность прямой и некоторых типичных самоподобных множеств, так называемых фракталов (Mandelbrot, 1982). Разумеется, ответвления продолжаются до бесконечности. Кривая Коха представляет собой линию бесконечной длины, ограничивающую конечную площадь.

причем $N(l)$ изменяется следующим образом:

$$N(l) \sim l^{-D} \quad \text{при} \quad l \to 0, \tag{3.69}$$

то D называется хаусдорфовой размерностью этого множества.

Для самоподобных множеств типа тех, что представлены на рис. 28, размерность D можно вычислить по формуле

$$D = -\frac{\ln[N(l)/N(l')]}{\ln(l/l')}. \tag{3.70}$$

Заметим, что длина L канторовского множества, изображенного на

рис. 28, равна 0. Действительно,

$$L = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \ldots = 1 - \frac{1}{3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} = 0. \qquad (3.71)$$

Хаусдорфова размерность D^* 2^n-суперцикла в пределе при $n \to \infty$ может быть вычислена следующим образом. Если для того, чтобы покрыть все точки 2^n-суперцикла требуется $N(l) = 2^n$ сегментов длины l, то, согласно рис. 27, средняя минимальная длина l', необходимая для покрытия всех $N(l') = 2^{n+1}$ циклических точек, приближенно равна

$$l' \approx \frac{1}{2^{n+1}} \left[2^n \frac{1}{\alpha} + 2^n \frac{1}{\alpha^2}\right], \qquad (3.72)$$

откуда следует, что

$$D^* = -\ln 2/\ln \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right)\right] \cong 0{,}543. \qquad (3.73)$$

Это значение лишь на 5% отличается от аналитического и численного результата (Grassberger, 1981). Численный результат был получен при помощи покрытия аттрактора достаточно малыми сегментами длины l и вычисления $N(l)$.

На рис. 29 показана типичная канторовская структура аттрактора. Теперь на основании полученных результатов мы покажем, что после каждого шага бифуркации измеримый спектр мощности изменяется чрезвычайно просто.

Спектр мощности. Спектр мощности $P(k)$ можно получить, если представить элементы $x^n(t) \equiv f^t_{R_n}(0)$ 2^n-цикла ($t = 1, 2, \ldots, 2^n \equiv T_n$) через фурье-компоненты a^n_k, т. е.

$$x^n(t) = \sum_k a^n_k e^{\frac{2\pi i k}{T_n} t}. \qquad (3.74)$$

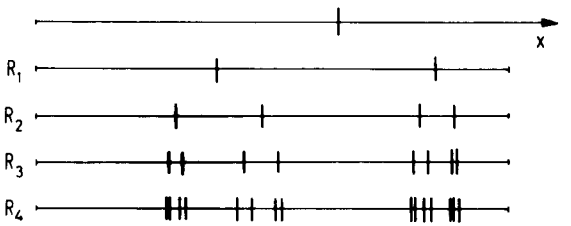


Рис. 29. Расположение элементов цикла при $f_{R_n}(x) = R_n x(1 - x)$.

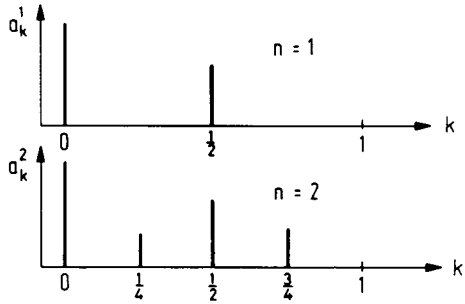


Рис. 30. Изменение фурье-компонент в результате бифуркации (схематично).

Из периодичности цикла следует, что

$$x^n(t) = x^n(t + 2^n); \quad e^{2\pi ik} = 1 \to k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1, \tag{3.75}$$

т. е. в результате перехода от n-й бифуркации к $(n + 1)$-й возникает 2^n новых субгармоник с частотами $k/2^{(n+1)}$ $(k = 1, 3, 5, \ldots)$, как показано на рис. 30. Соответствующие изменения коэффициентов a_k^n можно вычислить, зная значения функции $\sigma(m)$. Для этого выразим вначале из уравнения (3.74) коэффициенты a_k^n

$$a_k^n = \frac{1}{2^n} \sum_{t=1}^{2^n} e^{-\frac{2\pi ikt}{2^n}} x^n(t) \approx \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} dt\, e^{-\frac{2\pi ikt}{T_n}} x^n(t). \tag{3.76}$$

Представляя интервал $[0, T_{n+1}]$ в виде двух частей длины $T_n = \frac{1}{2} T_{n+1}$, получаем

$$a_k^{n+1} = \int_0^{T_n} \frac{dt}{2T_n} [x^{n+1}(t) + (-1)^k x^{n+1}(t + T_n)] e^{\frac{-2\pi ikt}{T_n}}. \tag{3.77}$$

Амплитуды вновь появившихся четных гармоник a_{2k}^{n+1} выражаются в сущности через старый спектр a_k^n (рис. 30), поскольку

$$a_{2k}^{n+1} = \int_0^{T_n} \frac{dt}{2T_n} [x^{n+1}(t) + x^{n+1}(t + T_n)] e^{\frac{-2\pi ikt}{T_n}} \approx$$

$$\approx \int_0^{T_n} \frac{dt}{T_n} x^{n+1}(t) e^{\frac{-2\pi ikt}{T_n}} \approx \int_0^{T_n} \frac{dt}{T_n} x^n(t) e^{\frac{-2\pi ikt}{T_n}} = a_k^n. \tag{3.78}$$

Вычисление нечетных компонент — дело более тонкое, оно требует

использования уже полученной нами функции $\sigma(x)$.

Из (3.77) имеем

$$a_{2k+1}^{n+1} = \int_0^{T_n} \frac{dt}{2T_n} [x^{n+1}(t) - x^{n+1}(t + T_n)] e^{\frac{-(2k+1)\pi i t}{T_n}} \tag{3.79}$$

и

$$x^{n+1}(t) - x^{n+1}(t + T_n) = x^{n+1}(t) - f_{R_{n+1}}^{2^n}[x^{n+1}(t)] = d^{n+1}(t) =$$

$$= \sigma\left(\frac{t}{2T_n}\right) d^n(t), \tag{3.80}$$

где

$$d^n(t) = x^n(t) - x^n(t + T_{n-1}) = \sum_k a_k^n [1 - (-1)^k] e^{\frac{2\pi i k t}{T_n}} =$$

$$= 2\sum_k a_{2k+1}^n e^{\frac{2\pi i (2k+1)}{T_n}}. \tag{3.81}$$

Таким образом, получаем

$$a_{2k+1}^{n+1} = \sum_{k'} a_{2k'+1}^n \int_0^{T_n} \frac{dt}{T_n} \sigma\left(\frac{t}{2T_n}\right) e^{\frac{2\pi i t}{T_n}\left[2k' + 1 - \frac{1}{2}(2k+1)\right]} \approx$$

$$\approx \sum_{k'} a_{2k'+1}^n \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \right.$$

$$\left. + i(-1)^k \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\right] \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2k' + 1 - \frac{1}{2}(2k+1)}, \tag{3.82}$$

так как

$$\int_0^1 d\xi \sigma\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{2\pi i \xi y} \approx \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{1/2} d\xi e^{2\pi i \xi y} + \frac{1}{\alpha} \int_{1/2}^1 d\xi e^{2\pi i \xi y} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y} [(e^{\pi i y} - 1)/\alpha^2 + (e^{2\pi i y} - e^{\pi i y})/\alpha], \tag{3.83}$$

где $\sigma(x)$ аппроксимирована простой кусочно-постоянной функцией. Заменяя в (3.82) сумму по k' интегралом и используя следующее

соотношение:

$$\frac{1}{2\pi i}\int dk' x^n_{2k'+1}\frac{1}{2k'+1-\frac{1}{2}(2k+1)} \approx \frac{1}{4}x^n_{(1/2)(2k+1)}, \tag{3.84}$$

окончательно получаем

$$|a^{n+1}_{2k+1}| \approx \mu^{-1}|a^n_{(1/2)(2k+1)}|, \quad \mu^{-1} = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right)},$$

$$\mu^{-1} = 0{,}045, \quad \text{т. е.} \quad 10\lg\mu = 13{,}5\ \text{дБ.}^{1)}. \tag{3.85}$$

Таким образом, амплитуды нечетных субгармоник, которые появляются в результате каждой бифуркации, в среднем равны усредненным амплитудам старых нечетных компонент, домноженным на постоянное число μ^{-1}. Этому утверждению относительно усредненных величин нельзя придать более сильную формулировку из-за того, что при выводе (3.85) несколько раз были использованы приближенные равенства.

Универсальная картина спектра мощности такова:

$$|a^{n+1}_{2k}| \approx |a^n_k|, \quad |a^{n+1}_{2k+1}| \approx 0{,}045|a^n_{(1/2)(2k+1)}|. \tag{3.86}$$

Схематично она представлена на рис. 30. Такая картина согласуется в разумных пределах с численными результатами, в частности для отображения $f(x) = 1 - 1{,}401155x^2$ (рис. 31).

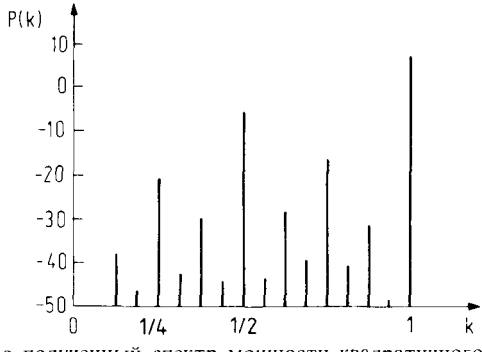
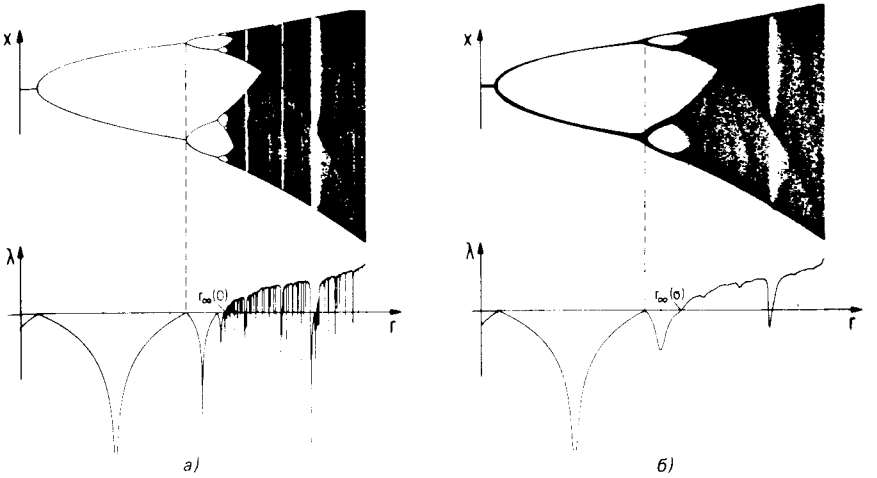


Рис. 31. Численно полученный спектр мощности квадратичного отображения. По оси ординат отложен логарифм амплитуды (дБ). Последовательные нечетные субгармоники отличаются множителем μ^{-1} (Collet, Eckmann, 1980).

Влияние внешнего шума. В эксперименте не удается наблюдать рассмотренный выше спектр мощности во всех его деталях — мешает внешний шум (рис. 32). Чтобы количественно исследовать

[1)] При переводе первоначальная неточность оценки исправлена; см. также обзор Ж. П. Экмана в сб. «Синергетика» («Мир», 1984). — *Прим. ред.*



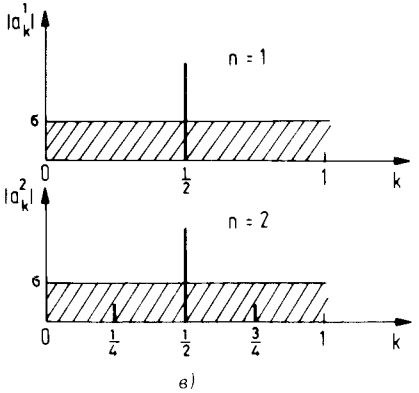


Рис. 32. *а* — Итерации логистического отображения и его показатель Ляпунова λ; *б* — соответствующие величины при наличии внешнего шума с амплитудой $\sigma = 10^{-3}$ (Crutchfield, Farmer, Hubermann, 1982). Хотя из-за наличия шума тонкая структура итераций и детали поведения λ оказываются размытыми, тем не менее и здесь имеется резкий переход к хаосу, на что указывает смена знака λ; *в* — подавление субгармоник при наличии белого шума σ. Заметим, что при переходе от n к $n + 1$ амплитуда субгармоник уменьшается в μ раз (схематично).

действие возмущений, мы добавим в логистическое уравнение дополнительное слагаемое

$$x_{n+1} = f_r(x_n) + \xi_n \tag{3.87}$$

и вычислим его влияние на каскад бифуркаций.

Предполагается, что случайные величины ξ_n распределены по Гауссу со средним значением

$$\langle \xi_n \xi_{n'} \rangle = \sigma^2 \delta_{n,n'} \tag{3.88}$$

(аналогично и их фурье-компоненты распределены по Гауссу) и σ определяет интенсивность белого шума. Напомним, что новые фурье-компоненты $|a_k^{n+1}|2^{n+1}$-цикла в μ раз меньше старых компонент $|a_k^n|$. Это означает, что любой ограниченный внешний шум в

конце концов подавит все субгармоники с номерами, превышающими некоторое n (рис. 32, *в*).

В действительности значения R_n (для которых все субгармоники, начиная с номера n, становятся ненаблюдаемыми, поскольку их подавляет внешний шум) и соответствующие амплитуды σ_n связаны степенным законом

$$(R_\infty - R_n) \sim \sigma_n^\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = \ln\delta/\ln\mu. \tag{3.89}$$

Это можно показать следующим образом. Если для значения R_1 будет достаточно уровня шума σ_1, чтобы подавить первую субгармонику $|a_k^1|$, то для значения R_n при шуме $\sigma_n = \mu^{-n}\sigma_1$ исчезнут все субгармоники $|a_k^n| = \mu^{-n}|a_k^1|$. Если теперь исключить n из выражений

$$(R_\infty - R_n) \sim \delta^{-n}, \tag{3.90а}$$

$$\sigma_n \sim \mu^{-n}, \tag{3.90б}$$

то отсюда будет следовать (3.89).

Зависимость (3.89), свидетельствующая об уменьшении R_n при возрастании амплитуды шума, была проверена численно (рис. 33).

Внешний шум, порождающий хаос при $R_n < R_\infty$, играет роль, подобную магнитному полю, которое вызывает конечное намагничивание за критической точкой магнетика. Эта аналогия была исследована в работе (Shraiman, Wayne, Martin, 1981), где показано, в частности, что при наличии внешнего шума показатель Ляпунова ведет себя таким образом:

$$\lambda = r^\beta \lambda_0[r^{-1/\gamma}\sigma]; \quad \beta = \ln 2/\ln\delta; \quad r = R_\infty - R, \tag{3.91а}$$

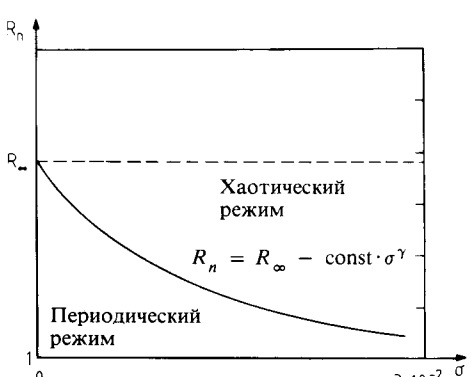


Рис. 33. Подавление периодического режима логистического отображения под действием внешнего шума (Crutchfield, Farmer, Hubermann, 1982).

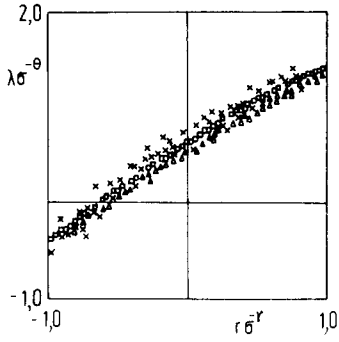


Рис. 34. Численное определение функции $\lambda_1(y)$ в уравнении (3.91б). На график нанесены значения величины $\lambda\sigma^{-\theta}$ для 100 значений $y = r\sigma^{-\gamma}$ при трех уровнях шума: $\sigma = 10^{-6}$ (квадратики), 10^{-8} (треугольники) и 10^{-10} (кресты) (Crutchfield et al., 1981).

или, что эквивалентно,

$$\lambda = \sigma^{\theta}\lambda_1[r\sigma^{-\gamma}]; \quad \theta = \ln 2/\ln \mu, \tag{3.91б}$$

где $\lambda_{0,\,1}$ — универсальные функции (рис. 34). Эти результаты были получены также Фейгенбаумом и Хасслахером (Feigenbaum, Hasslacher, 1982) с помощью метода прореживания интегралов по траекториям. Их метод имеет широкую область важных применений; он излагается в приложении 5. Уравнение (3.91а) вызывает ассоциации с качественным поведением намагниченности M вблизи критической точки при фазовом переходе 2-го рода:

$$M = r^{\beta}f(r^{1/\gamma}h), \tag{3.92}$$

здесь $r = |T - T_c|$ — отклонение температуры от ее значения в критической точке, h — магнитное поле. При наступлении хаоса λ меняет знак, и тогда уравнение (3.91а) дает

$$0 = \lambda_0[r^{-1/\gamma}\sigma]; \quad r^{-1/\gamma}\sigma = \text{const}, \tag{3.93}$$

т. е. мы получаем знакомое нам уравнение (3.89).

Поведение логистического отображения при $r > r_\infty$. В заключение обсудим кратко поведение логистического отображения при $r \geqslant r_\infty$. Мы уже показывали выше, что в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения при значении параметра $r = r_\infty$ появляется бесконечное множество — так называемый аттрактор Фейгенбаума, который имеет хаусдорфову размерность $D = 0{,}548\ldots$. Из рис. 19 видно, что при $r = r_\infty$ показатель Ляпунова λ логистического отображения еще остается равным 0, т. е. аттрактор Фейгенбаума не является странным аттрактором (точное определение см. в гл. 5). Однако, согласно рис. 19, при $r > r_\infty$ λ принимает в основном положительные значения и поэтому имеет смысл говорить, что хаос возникает на границе бифуркационной области. Детальное поведение итераций логистического

отображения в области $r > r_\infty$ становится уже довольно сложным, но и здесь имеются участки регулярного поведения, которые описываются оператором удвоения и поэтому являются универсальными.

Дальнейшие детали можно найти в литературе к данной главе. Мы покажем лишь, что при $r = 4$ логистическое отображение топологически сопряжено с треугольным отображением вида

$$\Delta(x) = \begin{cases} 2x & \text{при} \quad x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{при} \quad x > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{3.94}$$

которое, как было установлено в гл. 2, порождает хаотическую последовательность итераций.

Два отображения f и g называются топологически сопряженными, если существует обратимое преобразование $h(x)$ такое, что

$$f = h^{-1} \cdot g \cdot h. \tag{3.95}$$

В нашем случае отображение

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \tag{3.96}$$

сопрягает f_4 с $\Delta(x)$, поскольку выполняется

$$f_4[h^{-1}(x)] = \sin^2(\pi x) = h^{-1}[\Delta(x)]. \tag{3.97}$$

Таким образом, $\Delta(x)$ индуцирует хаотическое поведение у отображения f_4.

Мы можем утверждать даже больше, а именно справедливость такого факта: инвариантные плотности двух топологически сопряженных отображений связаны соотношением

$$\rho_f(x) = \rho_g[h(x)] \left| \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right|. \tag{3.98}$$

Это можно проверить непосредственно, показав, что плотность ρ_f инвариантна относительно $f(x)$; действительно,

$$\int \mathrm{d}x\, \delta[y - f(x)] \rho_f(x) = \int \mathrm{d}x\, \delta\{y - h^{-1}[g(h(x))]\} \rho_g[h(x)] \left| \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \right| =$$

$$= \int \mathrm{d}\omega\, \delta\{y - h^{-1}[g(\omega)]\} \rho_g(\omega) = \int \mathrm{d}\omega\, \delta\{h(y) - g(\omega)\} \left| \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} \right|_{h^{-1}(y)} \rho_g(\omega) =$$

$$= \left| \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} \right| \int \mathrm{d}\omega\, \delta\{h(y) - g(\omega)\} \rho_g(\omega) = \rho_g[h(y)] \left| \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} \right| = \rho_f(y). \tag{3.99}$$

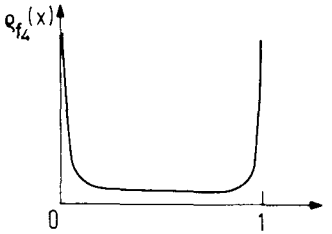


Рис. 35. Инвариантная плотность для $f_4 = 4x(1 - x)$ (схематично).

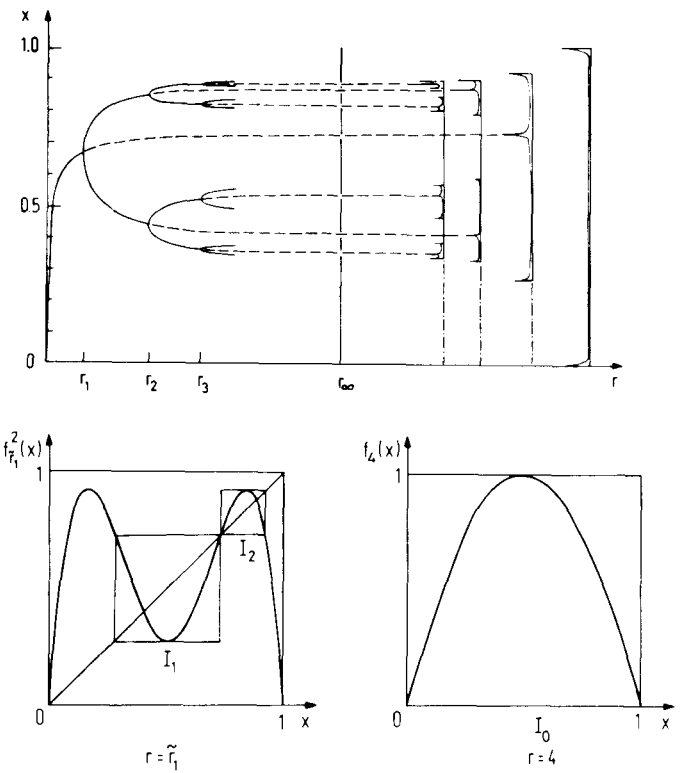


Рис. 36. *а* — Бифуркации при $r < r_\infty$ сопоставляются со слиянием хаотических областей при $r > r_\infty$; рядом с хаотическими областями условно показаны соответствующие инвариантные плотности (см. рис. 35). Заметим, что вдоль оси абсцисс масштаб нелинейный. (Grossmann, Thomae, 1977); *б* — длины I_n хаотических интервалов снова связаны законом функциональной композиции и поэтому величины $\tilde{r}_n$ имеют скейлинг $\tilde{r}_n - r_\infty \sim \delta^{-n}$.

Здесь мы воспользовались инвариантностью ρ_g относительно $g(x)$. Подставляя в (3.98) $f = f_4$, $\rho_g = \rho_\Delta$, а в качестве $h(x)$ используя выражение из (3.96), получаем, что плотность ρ_{f_4} имеет вид

$$\rho_{f_4}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \tag{3.100}$$

(рис. 35).

Этот результат показывает, во-первых, что отображение $f_r(x)$ действительно становится эргодическим при $r = 4$ (поскольку $f_4(x)$ и $\Delta(x)$ принадлежат одному и тому же классу) и, во-вторых, что инвариантная плотность чисто хаотического отображения — это не обязательно примитивная константа.

Рис. 36 дает основание утверждать, что значения параметра r для обратного каскада бифуркаций (т. е. те значения, при которых хаотический режим, занимавший при $r = 4$ весь интервал [0, 1], разбивается на все более мелкие подынтервалы I_n и в конце концов сливается с аттрактором Фейгенбаума) вновь подчиняются закону функциональной композиции.

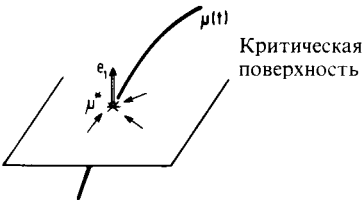
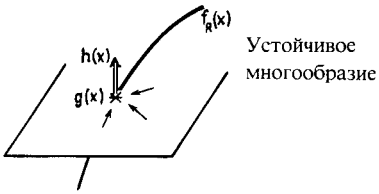
3.4. Аналогия между удвоением периода и фазовыми переходами

В начале раздела предлагаем словарь, определяющий соответствие терминов из ренормгрупповой теории фазовых переходов 2-го рода и аналогичных им терминов, используемых при описании бифуркационного перехода к хаосу (табл. 3). Далее мы перечислим те доступные измерению свойства, которые характеризуют фейгенбаумовский переход, и обсудим некоторые типичные эксперименты.

В гл. 2 мы уже отмечали, что показатель Ляпунова соответствует параметру порядка вблизи фазового перехода 2-го рода. Табл. 3 показывает, что для перехода к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения можно детально проследить его аналогию с «магнитным фазовым переходом». Оба явления обнаруживают определенное самоподобие в бифуркационной картине и картине кластеризации ориентированных вверх и вниз спинов в окрестности критической точки, что является основой для ренормгруппового подхода. Возникающая в результате универсальность является следствием того, что имеются лишь несколько существенных собственных чисел (см. также приложения 4 и 5).

Кроме того, можно найти скейлинг для показателя Ляпунова λ и для корреляционной функции $C(m)$, которые похожи соответственно на закон изменения намагниченности и спин-спиновой корре-

Таблица 3. Аналогия между фазовыми переходами и удвоением периода

Фазовые переходы	Удвоение периода
Функционал Гинзбурга — Ландау $H = \int d^d x\,[c(\nabla\sigma)^2 + t\sigma^2 + u\sigma^4]$ с вектором-параметром $\mu = (c, t, u)$	Одномерное отображение $f_R(x)$
Расстояние до критической точки $t = T - T_c$	Расстояние до R_∞ $R - R_\infty$
Параметр порядка $\langle\sigma(x)\rangle$ (намагниченность)	Показатель Ляпунова $\longrightarrow$ λ_R (меняет знак при $R = R_\infty$)
Образование системы спинов $\longrightarrow$ ренормгрупповое преобразование R с неподвижной точкой $H^*(\triangleq \mu^*)$ $\mathrm{R}[\mu^*] = \mu^*$	Функциональная композиция оператор удвоения T с неподвижной точкой g $\mathrm{T}[g] = g$
Линеаризованное ренормгрупповое преобразование $\mathrm{R}_2^n[\mu^*] = \mu^* + (T - T_c)2^{ny_1}\mathbf{e}_1$	Линеаризованное преобразование удвоения $\mathrm{T}^n f_R(x) = g(x) + (R - R_\infty)\cdot\delta^n\cdot a\cdot h(x)$
Пространство параметров: 	Пространство функций: 
$\mathbf{e}_1$ — неустойчивое направление	$ah(x)$ — одномерное неустойчивое многообразие

ляции вблизи критической точки магнитного фазового перехода. Согласно (2.9), показатель Ляпунова отображения f при $x_0 = 0$ определяется по формуле

$$\lambda(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\ln|f'[f^i(0)]|. \tag{3.101}$$

Используя соотношения

$$\mathrm{T}f\cdot\mathrm{T}f\cdots\mathrm{T}f = (\mathrm{T}f)^i = -\alpha f^{2^i}\left(-\frac{x}{\alpha}\right) \tag{3.102}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{T}f = f'\left[f\left(-\frac{x}{\alpha}\right)\right]f'\left(\frac{x}{\alpha}\right), \tag{3.103}$$

получаем

$$\lambda[\mathrm{T}f] = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n+1}\ln|f'[f^i(0)]| = 2\lambda[f]. \tag{3.104}$$

Итерируя это выражение, будем иметь

$$\lambda[f] = 2^{-n}\lambda[\mathrm{T}^n f]. \tag{3.105}$$

Если в (3.105) положить $f = f_R$ и воспользоваться тем, что

$$\mathrm{T}^n f_R(x) = g(x) + (R - R_\infty)\cdot\delta^n\cdot a\cdot h(x), \tag{3.106}$$

то, учитывая соотношение $(R - R_\infty)\cdot\delta^n = 1$, получим такой скейлинг:

$$\lambda_{f_R} = (R - R_\infty)^\beta\lambda[g(x) + ah(x)], \tag{3.107}$$

где $\beta = \ln 2/\ln\delta$ выступает в роли критического показателя.

Это уравнение описывает, каким образом показатель Ляпунова стремится к 0, когда последовательность значений R, соответствующих одному и тому же μ (см. рис. 26), стремится к R_∞; другими словами, для огибающей λ выполняется степенной закон $\lambda \sim (R - R_\infty)^\beta$.

Аналогично для корреляционной функции, которая, согласно (2.32), имеет вид

$$C[m, f] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f^i(0)f^{i+m}(0), \tag{3.108}$$

можно найти скейлинг

$$C[m, \mathrm{T}f] = \alpha^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f^{2i}(0)f^{2i+2m}(0) =$$

$$= \alpha^2\lim_{n\to\infty}\left\{2\cdot\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n} f^i(0)f^{i+2m}(0) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^{2i}[f(0)]f^{2i+2m}[f(0)]\right\}, \tag{3.109}$$

т. е.

$$C[m, \mathrm{T}f] = \alpha^2 C[2m, f]. \tag{3.110}$$

Вновь используя (3.102), получаем

$$C[m, f_R] = \alpha^{-2n} C[2^{-n}m, g(x) + (R - R_\infty)\delta^n \cdot a \cdot h(x)]. \qquad (3.111)$$

Уравнение (3.111) позволяет получить различные скейлинги в зависимости от того, какую комбинацию переменных мы приравняем к 1. Обратим внимание на то, что при $R = R_\infty$ корреляционная функция убывает с ростом m по степенному закону, т. е.

$$C[m, f_{R_\infty}] = \alpha^{-2n} C[2^{-n}m, g(x)] = m^{-\eta} C[1, g(x)], \qquad (3.112)$$

где $\eta = \ln \alpha^2 / \ln 2$.

Оба этих степенных закона имеют аналоги в теории магнитных фазовых переходов:

$$\lambda \sim |R - R_\infty|^\beta \leftrightarrow M \sim |T - T_c|^\beta, \qquad (3.113а)$$

$$C(m) \sim m^{-\eta} \quad \text{при} \quad R_\infty \leftrightarrow C(|x|) \sim |x|^{-\eta} \quad \text{при} \quad T_c, \qquad (3.113б)$$

где M — намагниченность и $C(|x|)$ — спин-спиновая корреляционная функция.

3.5. Экспериментальное подтверждение бифуркационного перехода

До сих пор основное внимание мы уделяли теории. Теперь рассмотрим некоторые эксперименты, лежащие в основе фейгенбаумовского перехода. Для начала перечислим те признаки, которыми такой переход характеризуется:

— существует бесконечный каскад удвоений периода, который приводит к появлению субгармоник с частотами $2^{-n}f_0$, где f_0 — основная частота;

— каждая последующая субгармоника находится на уровне, в μ раз меньшем уровня предыдущей, где $10 \lg \mu = 13{,}5$;

— изменение управляющего параметра r, соответствующего последовательным n-субгармоникам, описывается соотношением типа $r_n - r_\infty \propto \delta^{-n}$;

— внешний шум разрушает тонкую структуру спектра мощности, и чтобы сделать наблюдаемой еще одну субгармонику, требуется понизить шум в μ^{-1} раз;

— система имеет одномерное отображение Пуанкаре с единственным квадратичным максимумом.

Вслед за работой Фейгенбаума бифуркационный переход к хаосу был обнаружен в большом числе экспериментов: от маятника, возбуждаемого толчками, до химических реакций и оптических схем с двумя состояниями равновесия. Ниже детально обсуждаются три характерных примера.

На рис. 37 и 38 показаны спектры мощности в эксперименте Бенара и в цепи нелинейного электрического RCL-осциллятора с внешним возбуждением.

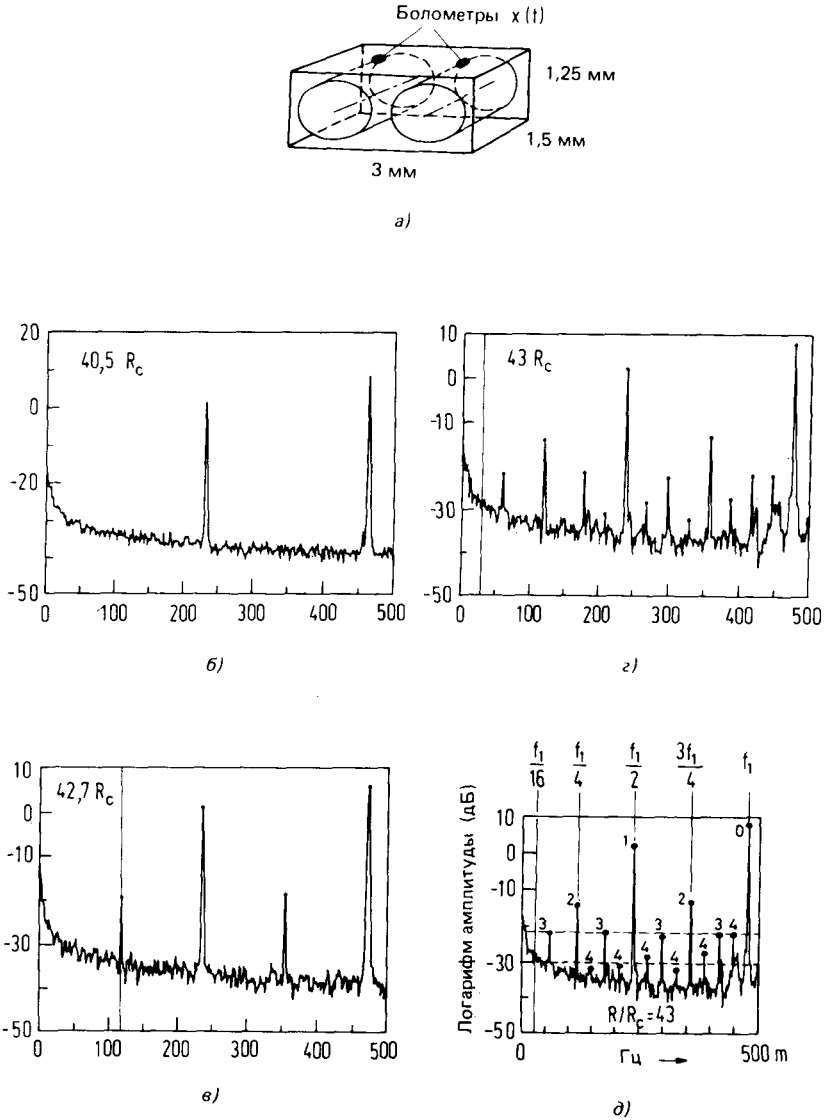
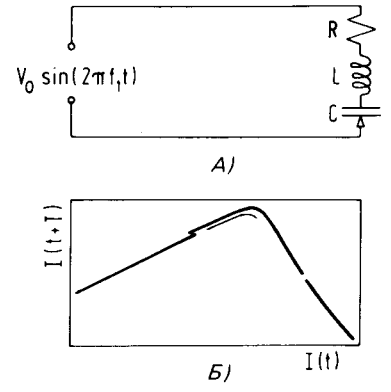


Рис. 37. Ячейка Бенара, заполненная жидким гелием; представлен режим с двумя конвективными валами (*а*). Спектр мощности температуры $x(t)$ при увеличивающихся числах Рэлея, которые пропорциональны r (*б—г*). Уровень n-x субгармоник сравнивается со значениями из теории Фейгенбаума — штриховые линии (*д*) (Libchaber, Maurer, 1980).



Измерение скорости сходимости

Субгармоника	$\Delta V_{порог}$ (В)	δ_n
$f_1/2$	3,2 + - 0,02	
$f_1/4$	0,72 ± 0.02	4,4 ± 0.1
$f_1/8$	0,16 ± 0.02	4,5 ± 0.6
$f_1/16$		

В)

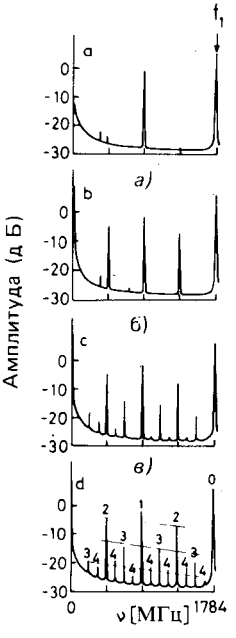


Рис. 38. *А* — цепь нелинейного *RCL*-осциллятора; *Б* — зависимость величины тока $I(t+T)$ от $I(t)$ представляет собой одномерное отображение с единственным максимумом; *В* — определение константы δ исходя из значений управляющего параметра V_0; *Г* — субгармоники спектра мощности при увеличивающихся значениях V_0 (*а*—*в*); сравнение с теорией Фейгенбаума — штриховые линии (*г*) (Linsay, 1981).

Экспериментальная установка для опыта Бенара уже описывалась в гл. 1. (Заметим, что в зависимости от параметров жидкости, размера ячейки и т. д. система Бенара демонстрирует различные переходы к хаосу.) Либхабер и Маурер (Libchaber, Maurer, 1980) обнаружили в экспериментах с жидким гелием следующие свойства фейгенбаумовского перехода:

а) с ростом разности температур (которая пропорциональна управляющему параметру r) появляются субгармоники с частотами $f/2$, $f/4$, $f/8$ и $f/16$, где f — основная частота;

б) последовательные субгармоники отличаются примерно на 10 дБ, что с качественной точки зрения соответствует теории (μ = 13,5 дБ). Высшие субгармоники подавляются за счет внешнего шума.

Хотя указанные результаты почти не оставляют сомнений в том, что мы имеем дело с фейгенбаумовским переходом, однако свести описывающие систему гидродинамические уравнения к одномерному отображению Пуанкаре с единственным максимумом пока не удалось. В этом отношении ситуация несколько лучше для нелинейного RCL-осциллятора, показанного на рис. 38. Согласно Линсею (Linsay, 1981), нелинейным элементом в данной цепи является варикап, который порождает следующую зависимость между зарядом и напряжением:

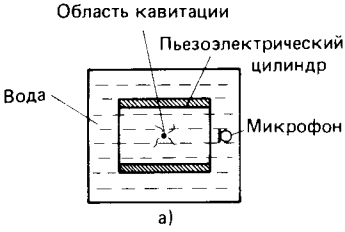
$$V(q) = \left[1 + \frac{V(q)}{0{,}6}\right]^{0{,}43} \frac{q}{C_0}. \tag{3.114}$$

Дифференциальное уравнение для зависящего от времени заряда q имеет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + V(q) = V_0 \sin(2\pi f_1 t). \tag{3.115}$$

Такая цепь действует подобно аналоговому компьютеру для нелинейного осциллятора с возбуждением. На рис. 38 показано, что для специальных значений V_0 (которые играют роль внешнего управляющего параметра r) последовательные величины тока $I_n = I(t_0 + nT)$, где $T = 1/f_1$, фактически могут быть получены при помощи одномерного отображения с квадратичным максимумом. (Ток связан с зарядом зависимостью $I = \dot{q}$, а величины I_n соответствуют x_n.) Соответствующий спектр мощности демонстрирует, как и следовало ожидать, все особенности бифуркационного перехода и позволяет получить оценку для числа δ, которая лишь на 10% отличается от асимптотического значения Фейгенбаума. На фото I на вклейке представлен фазовый портрет (в осях $I(t)$ и $V(t)$ нелинейного RCL-осциллятора Лаутерборна и др. (Lauterborn et al., 1984)). Отметим, что имеются как теоретические (Rollins, Hunt, 1982), так и экспериментальные (S. Martin, частное сообщение) обоснования того факта, что для RCL-осцилляторов, содержащих, как в описанных выше экспериментах, диод, емкость p—n-перехода которого зависит от приложенного напряжения (варикап), хаотическое поведение вызвано не нелинейностью диода, а его большим временем восстановления. Но и эту ситуацию можно описать при помощи одномерного немонотонного отображения.

Чтобы показать, что фейгенбаумовский переход действительно встречается в системах совершенно различной природы, опишем в заключение акустический эксперимент (Lauterborn, Cramer, 1981), в котором такой переход наблюдался (рис. 39, *а*). В этом эксперименте через воду пропускали звук высокой интенсивности и измеряли выходной сигнал. Нелинейными элементами в данной системе яв-



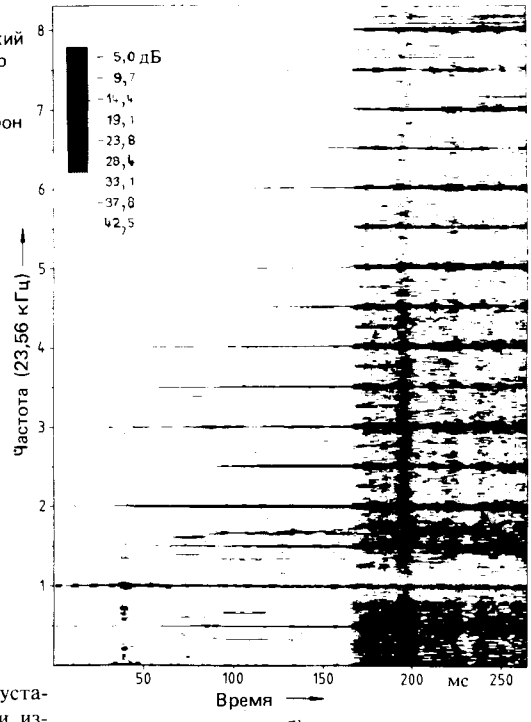
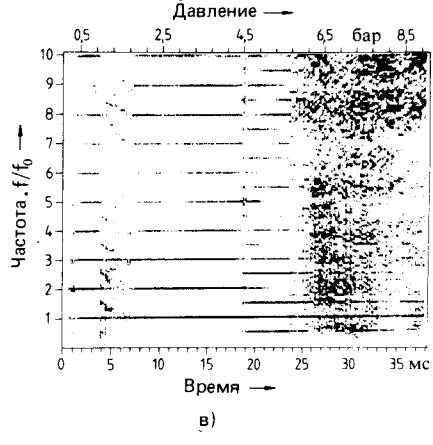


Рис. 39. Экспериментальная установка для генерации и измерения кавитационного шума (*а*); последовательные спектры мощности, полученные в эксперименте (*б*) и в результате вычислений (*в*) при различном давлении на входе. Амплитуда шума соответствует насыщенности серого цвета, давление на входе (которое измеряется при помощи напряжения на пьезоэлектрическом цилиндре, являющемся источником возбуждения) растет линейно со временем. См. также цветной вариант *в* (фото VI на вклейке) (Lauterborn, Cramer, 1981).



ляются области кавитации, т. е. пузырьки водяного пара, которые возникают благодаря градиентам давления исходной звуковой волны, причем осцилляции стенок этих пузырьков существенно нелинейны.

На рис. 39 показаны последовательные спектры мощности, полученные экспериментально (*б*) и при помощи вычислений (*в*) (в вычислениях учитывалось наличие единственного сферического пузырька). При увеличении давления на входе (которое является внешним параметром) наблюдался субгармонический переход к хаосу; этот переход кроме последовательности частот $f_0 \to f_0/2 \to \to f_0/4$ содержит также частоту $f_0/3$. Кроме того, когда данная система после хаотического поведения возвращается к линейному спектру, она проявляет признаки обратных бифуркаций.

4

Переход к хаосу через перемежаемость

Под перемежаемостью мы будем понимать такой вид сигнала, в котором случайным образом чередуются длинные регулярные (ламинарные) фазы (так называемые окна) и относительно короткие нерегулярные всплески. Такие сигналы обнаруживаются во многих экспериментах. Замечено также, что число хаотических всплесков нарастает при увеличении внешнего параметра, а это означает, что перемежаемость представляет собой непрерывный переход от регулярного движения к хаотическому.

В разд. 4.1 рассмотрены механизмы этого явления, предложенные Помо и Манневилем (Pomeau, Manneville, 1979) и обсуждается перемежаемость 1-го рода как следствие обратной касательной бифуркации. Затем (разд. 4.2) демонстрируется, что переход к хаосу через перемежаемость действительно обладает универсальными свойствами и представляет собой один из редких примеров точного решения линеаризованных ренормгрупповых уравнений. Эти результаты использованы в разд. 4.3 для того, чтобы показать, что перемежаемость есть универсальное объяснение происхождения фликкер-шума в нелинейных системах. В последнем разделе подводятся итоги типичных свойств перехода через перемежаемость и обсуждаются некоторые примеры.

4.1. Механизмы перемежаемости

Переход к хаосу через перемежаемость был впервые исследован в работе Помо и Манневиля (Pomeau, Manneville, 1979), которые решали численно дифференциальные уравнения модели Лоренца

$$\dot{X} = \sigma(X - Z), \tag{4.1а}$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \tag{4.1б}$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \tag{4.1в}$$

Для Y-компоненты было обнаружено поведение, показанное на рис. 40.

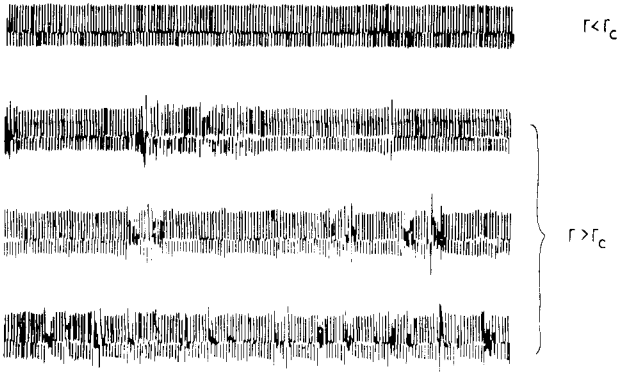


Рис. 40. Развитие во времени одной из составляющих в модели Лоренца (Pomeau, Manneville, 1980).

При $r < r_c$ реализация $Y(t)$ представляет собой устойчивое периодическое движение. При превышении порога r_c колебания прерываются хаотическими всплесками, которые с ростом r становятся все более частыми, пока движение полностью не хаотизируется.

Помо и Манневиль так объяснили это поведение:

Устойчивым колебаниям при $r < r_c$ соответствует устойчивая неподвижная точка на отображении Пуанкаре (см. также рис. 3). При $r > r_c$ эта точка становится неустойчивой. Так как это может произойти лишь тремя путями (во всех трех случаях модули собственных значений линеаризованного отображения Пуанкаре больше единицы), будем различать три рода перемежаемости, представленные в табл. 4 (см. также форму сигнала в табл. 6).

Перемежаемость 1-го рода. На рис. 41 представлено отображение Пуанкаре для модели Лоренца, где построены значения y_n, при которых $y(t)$ пересекает плоскость $x = 0$. Если сравнить этот

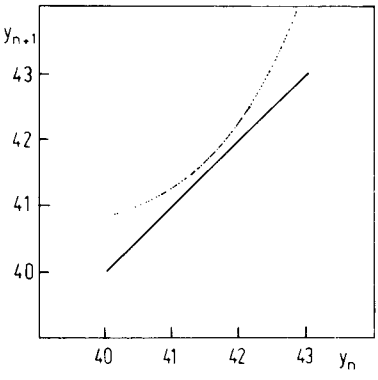


Рис. 41. Отображение Пуанкаре для модели Лоренца при значении r, немного превышающем $r_c = 166$ (Pomeau, Manneville, 1980).

Таблица 4. Три типа перемежаемости

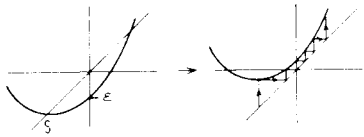
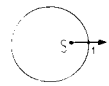
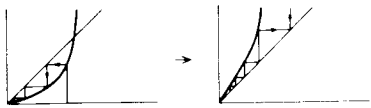
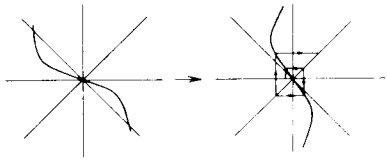
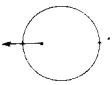
Тип	Характерное поведение и вид отображения	Поведение при переходе $\varepsilon < 0 \quad \to \varepsilon > 0$	Собственные значения
1-го рода	Действительное собственное значение пересекает единичную окружность в точке $+1$ $x_{n+1} = \varepsilon + x_n + ux_n^2$		
2-го рода	Два комплексно-сопряженных собственных значения одновременно пересекают единичную окружность $r_{n+1} = (1 + \varepsilon)r_n + ur_n^3$ $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$		
3-го рода	Действительное собственное значение пересекает единичную окружность при -1 $x_{n+1} = -(1 + \varepsilon)x_n - ux_n^3$		

рисунок с табл. 4, видно, что модель Лоренца демонстрирует перемежаемость 1-го рода.

Для этого перехода характерна *обратная касательная бифуркация*, при которой две неподвижные точки (устойчивая и неустойчивая) сливаются, как показано на рис. 42. При $r > r_c$ отображение не имеет устойчивых неподвижных точек. Однако существует некоторая «память» об исчезнувшей неподвижной точке, так как движение сильно замедляется вблизи x_c и требуется много итераций для того, чтобы пройти через узкий канал между кривой отображения и биссектрисой. Это приводит к появлению длинных ламинарных областей при небольшом превышении r над r_c (рис. 40). После выхода траектории из канала начинается хаотический всплеск, который завершится, когда траектория попадет вновь в окрестность x_c и начнется новая регулярная фаза. Теория Помо и Манневиля объясняет лишь ламинарные фазы и ничего не говорит о происхождении хаоса.

Другой пример перемежаемости 1-го рода — логистическое

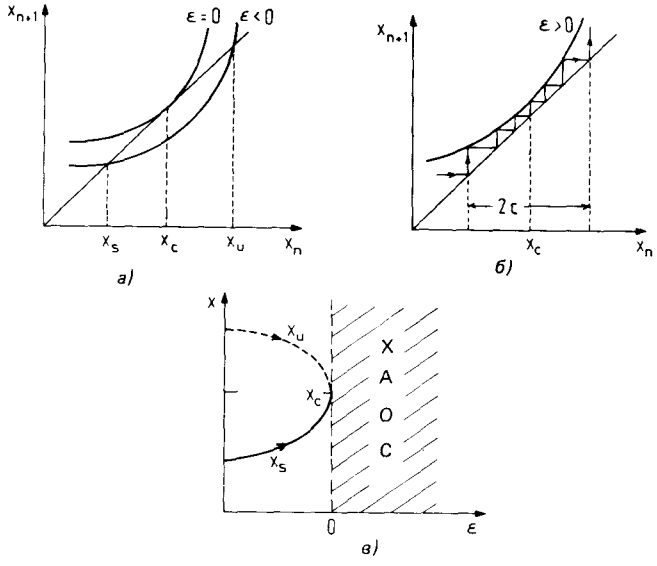


Рис. 42. Механизм перемежаемости 1-го рода: *а* — отображение Пуанкаре при $\varepsilon = r - r_c \leqslant 0$; *б* — отображение Пуанкаре при $\varepsilon > 0$ и движение траектории (отметим, что «призрак» неподвижной точки x_c притягивает траектории слева и отталкивает справа); *в* — обратная касательная бифуркация.

отображение

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n). \tag{4.2}$$

Численный счет показывает, что при $r_c = 1 + \sqrt{8}$ это отображение порождает цикл периода три с последующими бифуркациями, т. е. в хаотическом режиме существует окно, как условно показано на рис. 43. Последовательные итерации при значениях r, больших и меньших r_c, представлены на рис. 44. При r, несколько большем r_c, существует регулярный цикл периода 3, а ниже ламинарные области прерываются хаосом.

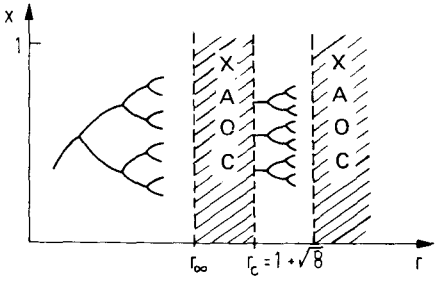


Рис. 43. «Окно» периода 3 в области хаотического режима.

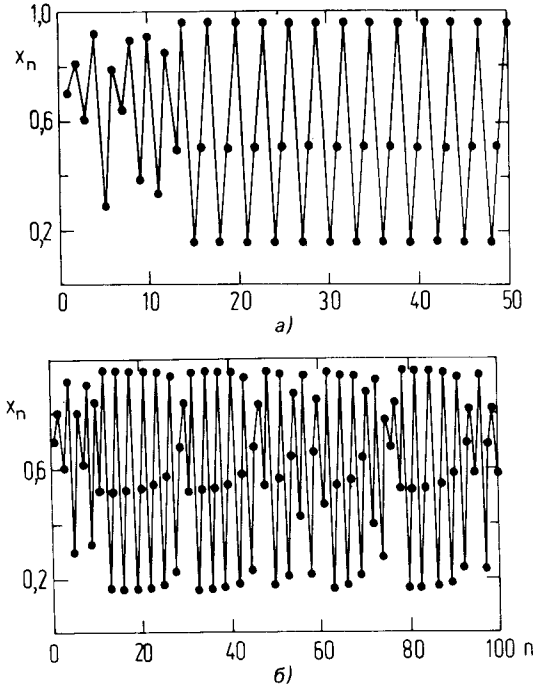


Рис. 44. Последовательность итераций логистического отображения, начинающаяся с $x = 0{,}7$; *а* — в области устойчивого цикла периода 3 при $r_c - r = -0{,}02$; *б* — в области перемежаемости при $r_c - r = 0{,}002$ (Hirsch et al., 1981).

Это удивительное поведение объясняет рис. 45, на котором показана третья итерация $f_r(x)$ при $r = r_c$. В этом случае существуют три неподвижные точки, которые при $r < r_c$ становятся неустойчивыми, что приводит к перемежаемости 1-го рода. Необходимо отметить, что обратная касательная бифуркация (в противоположность бифуркации удвоения, в которой число неподвижных точек удваивается) представляет единственный механизм, при котором в логистическом отображении может появиться нечетное число неподвижных точек.

Длина ламинарной области. Вычислим теперь среднюю длину $\langle l \rangle$ ламинарной области для логистического отображения как функцию расстояния от критической точки $\varepsilon = r - r_c$. Как станет ясно из дальнейшего, найденная зависимость $\langle l \rangle (\varepsilon)$ не ограничивается одним особым типом отображения, а справедлива для любого отображения Пуанкаре, приводящего к перемежаемости 1-го рода.

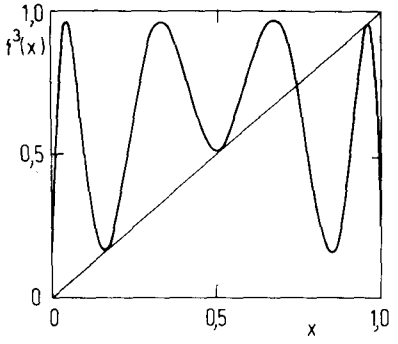


Рис. 45. Трехскладчатое итерированное отображение $f_r^3(x)$ при $r = r_c$.

Разлагая $f_r^3(x)$ в ряд вблизи точек x_c и r_c, определяемых выражениями

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{r_c}^3(x_c) = 1; \quad f_{r_c}^3(x_c) = x_c, \tag{4.3}$$

получаем

$$f_r^3(x) = f_r^3[x_c + (x - x_c)] = x_c + (x - x_c) + a_c(x - x_c)^2 + b_c(r - r_c), \tag{4.4}$$

где

$$2a_c \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^2 f_r^3}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_c, r_c}; \quad b_c \equiv \left.\frac{\mathrm{d}f_r^3}{\mathrm{d}r}\right|_{x_c, r_c}. \tag{4.5}$$

(Такое уравнение справедливо для всех трех неподвижных точек $f_{r_c}^3(x)$; среднюю мы выбираем для удобства, так как результат не зависит от констант.)

Обозначив $y \equiv (x - x_c)/b_c$ и $a \equiv a_c/b_c > 0$, выражение для отображения

$$x_{n+1} = f_r^3(x_n) \tag{4.6}$$

преобразуем в окрестности x_c к виду (см. (4.4))

$$y_{n+1} = y_n + ay_n^2 + \varepsilon; \quad \varepsilon = r - r_c. \tag{4.7}$$

(Тот же результат получается, если отображение Пуанкаре (рис. 41) разлагать в ряд вблизи точки касания.) В этой системе ламинарные области определяются требованием, чтобы последующие итерации изменялись очень слабо, т. е. их расстояние до x_c должно быть меньше порогового значения c:

$$|y_n| < c \ll 1. \tag{4.8}$$

В этой области разностное уравнение (4.7) можно просто заменить дифференциальным

$$\frac{dy}{dl} = ay^2 + \varepsilon \tag{4.9}$$

(l описывает число итераций в ламинарной области), что при интегрировании дает

$$l(y_{\text{вых}}, y_{\text{вх}}) = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}}\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{y_{\text{вых}}}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right] - \operatorname{arctg}\left[\frac{y_{\text{вх}}}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right]\right]. \tag{4.10}$$

Чтобы найти среднюю длину ламинарной области $\langle l \rangle$, предположим, что после того как точка покинула ламинарную область при $y_{\text{вых}} = c$ и появились несколько нерегулярных всплесков, она возвращается в область $|y| < c$ при $y_{\text{вх}}$ с вероятностью $P(y_{\text{вх}})$, симметричной относительно x_c, т. е. $P(y_{\text{вх}}) = P(-y_{\text{вх}})$. Это дает

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^{c} dy_{\text{вх}} P(y_{\text{вх}}) l(c, y_{\text{вх}}) = \frac{1}{\sqrt{a\varepsilon}} \operatorname{arctg}\left[\frac{c}{\sqrt{\varepsilon/a}}\right]. \tag{4.11}$$

При $c/\sqrt{\varepsilon/a} \gg 1$

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1/2}. \tag{4.12}$$

Эта характерная зависимость была впервые найдена и проверена численно для логистического отображения (рис. 46) в работе (Pomeau, Manneville, 1980).

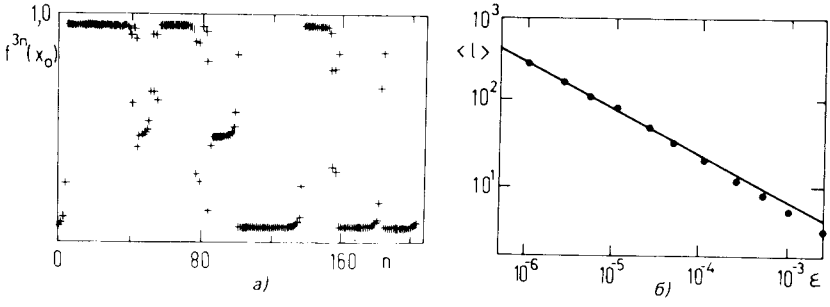


Рис. 46. *а* — Последовательность третьих итераций $f_r^{3n}(x_0)$ при $r_c - r = 0{,}0001$, в которой наблюдаются области ламинарного поведения, прерываемые перемещающимися нерегулярными областями; *б* — точками показана зависимость $\langle l \rangle(\varepsilon)$ для $c = 10^{-2}$, сплошной линией — асимптотический предел $\langle l \rangle = (\pi/2)(\varepsilon a)^{-1/2}$ (Hirsch et al., 1981).

4.2. Ренормгрупповое исследование перемежаемости

Явление перемежаемости также исследовано в рамках ренормгруппового подхода с использованием оператора удвоения, с которым мы уже встречались ранее при исследовании перехода по сценарию Фейгенбаума. Идея состоит в следующем. Рассмотрим обобщение $f(x)$ отображения (4.6) при $\varepsilon = 0$ на произвольные показатели $z > 1$, так что при $x \to 0$ оно будет иметь вид

$$f(x \to 0) = x + u\,|x|^z. \tag{4.13}$$

Из-за наличия линейного члена по x вторая итерация $f^2(x)$ после соответствующего изменения масштабов демонстрирует такое же асимптотическое поведение (рис. 47 — повтор рис. 25 для логистического отображения). Уместно далее задаться вопросом: может ли повторное применение оператора удвоения T к функции вида (4.13) привести к той же неподвижной точке $f^*(x)$:

$$\mathrm{T}f(x) = \alpha f^*\left[f^*\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] = f^*(x), \tag{4.14}$$

но с граничными условиями (4.13), т. е. $f^*(0) = 0$ и $f^{*\prime}(0) = 1$, а не

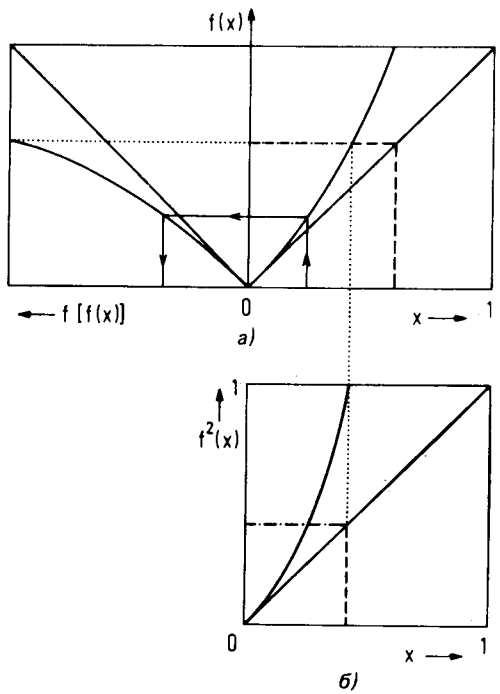


Рис. 47. $f(x)$ и $f^2(x)$ при $x \geqslant 0$: *а* — вторая итерация образуется путем добавления к квадрату, содержащему $f(x)$, такого же квадрата, повернутого на 90°. Стрелками показано, как получается $f[f(x)]$; *б* — в квадрате, обведенном пунктиром, вторая итерация $f^2(x)$ подобна оригиналу $f(x)$.

$f^*(0) = 1$ и $f^{*\prime}(0) = 0$, как это было для бифуркации Фейгенбаума.

Было показано (Hu, Rudnik, 1982), что с новым граничным условием (4.13) уравнение неподвижной точки (4.14), характеризующее перемежаемость, имеет точное решение.

Способ решения заключается в том, что рекуррентное соотношение

$$x' = f(x) \tag{4.15}$$

записывается в неявной форме

$$G(x') = G(x) - a, \tag{4.16}$$

т. е.

$$x'(x) = G^{-1}[G(x) - a] = f(x), \tag{4.17}$$

где a — параметр.

Уравнение неподвижной точки

$$\alpha f[f(x)] = f[\alpha x] \tag{4.18}$$

при этом преобразуется в

$$\alpha x''(x) = x'(\alpha x), \tag{4.19}$$

или после воздействия оператором G получается

$$G(\alpha x'') = G[x'(\alpha x)] = G(\alpha x) - a. \tag{4.20}$$

Далее, используя уравнение (4.16), находим

$$G(x'') = G(x') - a = G(x) - 2a, \tag{4.21}$$

т. е.

$$\frac{1}{2}G(x'') = \frac{1}{2}G(x) - a. \tag{4.22}$$

Сравнение (4.20) и (4.22) показывает, что для соответствия уравнению неподвижной точки оператор G должен обладать следующим свойством:

$$\frac{1}{2}G^*(x) = G^*(\alpha x). \tag{4.23}$$

Простой выбор $G^*(x) = |x|^{-(z-1)}$ и $\alpha = 2^{\frac{1}{(z-1)}}$ дает желаемый результат. При этом функция, являющаяся неподвижной точкой

$$f^*(x) = G^{*-1}[G^*(x) - a] = [|x|^{-(z-1)} - a]^{-1/(z-1)}, \tag{4.24}$$

при $a = (z - 1)u$ удовлетворяет граничному условию (4.13). Видно,

что отображение неподвижной точки для перемежаемости математически связано с трансляцией $G(x') = G(x) - a$; однако простое физическое объяснение этой связи неочевидно.

Конечно, недостаточно просто найти функцию $f^*(x)$ (неподвижную точку). Хотелось бы еще классифицировать возмущения f^* в соответствии с их значимостью (см., например, табл. 3). Далее мы исследуем вопрос о том, как преобразование удвоения T (линейное по ε) действует на функцию

$$f_\varepsilon(x) = f^*(x) + \varepsilon h_\lambda(x) \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \ll 1. \tag{4.25}$$

Используя определение T (4.14), получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{T}f_\varepsilon &= \alpha f_\varepsilon\left[f_\varepsilon\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] = \\ &= \alpha f^*\left[f^*\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \varepsilon h_\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] + \alpha h_\lambda\left[f^*\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \right. \\ &\left. + \varepsilon h_\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] = \alpha f^*\left[f^*\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] + \\ &+ \varepsilon\alpha\left\{f^{*\prime}\left[f^*\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]h_\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) + h_\lambda\left[f^*\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\} + \\ &+ O(\varepsilon^2) = f^*(x) + \lambda\varepsilon h_\lambda(x) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Последнее соотношение справедливо только тогда, когда $h_\lambda(x)$ — собственная функция (с собственным числом λ) линеаризованного оператора удвоения L_{f^*}:

$$\mathrm{L}_{f^*}[h_\lambda(x)] \equiv \alpha\{f^{*\prime}[f^*(x)]h_\lambda(x) + h_\lambda[f^*(x)]\} = \lambda h_\lambda(\alpha x) \tag{4.27}$$

аналогична уравнению (3.50) для перехода Фейгенбаума.

Покажем теперь, что использованный здесь метод нахождения неподвижной точки f^* позволяет также найти спектр собственных значений λ и соответствующих собственных функций h_λ.

Запишем вначале $f_\varepsilon(x)$ в неявном виде, используя уравнение (4.17):

$$f_\varepsilon(x) = f^*(x) + \varepsilon h_\lambda(x) = x' = G_\varepsilon^{-1}[G_\varepsilon(x) - a]. \tag{4.28}$$

Если $G_\varepsilon(x)$ представить в виде

$$G_\varepsilon(x) = G^*(x) + \varepsilon H_\lambda(x), \tag{4.29}$$

то $h_\lambda(x)$ можно выразить через $H_\lambda(x)$ (и наоборот) путем сравнения

коэффициентов при членах, линейных по ε, в левой и правой частях (4.28).

Далее, рассмотрим вторую итерацию

$$x''(x) = f_\varepsilon[f_\varepsilon(x)] \tag{4.30}$$

и подействуем на нее оператором G_ε:

$$G_\varepsilon(x'') = G_\varepsilon(x') - a = G_\varepsilon(x) - 2a, \tag{4.31}$$

или более явно

$$G^*(x'') + \varepsilon H(x'') = G^*(x) + \varepsilon H_\lambda(x) - 2a. \tag{4.32}$$

Так как $G^*(x)$ — просто степенная функция x, проверим аналогичную форму представления для $H_\lambda(x)$:

$$H_\lambda(x) = |x|^{-p}. \tag{4.33}$$

Используя свойство (4.23), из (4.32) получаем

$$G^*(\alpha x'') + \lambda\varepsilon H_\lambda(x'') = G^*(\alpha x) + \lambda\varepsilon H(\alpha x) - a, \tag{4.34}$$

или

$$G_{\lambda\varepsilon}(\alpha x'') = G_{\lambda\varepsilon}(\alpha x) - a \tag{4.35}$$

$$\to \alpha x'' = G_{\lambda\varepsilon}^{-1}[G_{\lambda\varepsilon}(\alpha x) - a], \tag{4.36}$$

где

$$\lambda = 2^{\frac{p+1-z}{z-1}}. \tag{4.37}$$

С учетом (4.28) это дает

$$\alpha f_\varepsilon[f_\varepsilon(x)] = f_{\lambda\varepsilon}(\alpha x) = f^*(\alpha x) + \lambda\varepsilon h_\lambda(\alpha x). \tag{4.38}$$

Сравнивая этот результат с выражением (4.26), видим, что λ — действительно собственное значение функции h_λ, определяемой выражением

$$f^*(\alpha x) + \lambda\varepsilon h_\lambda(\alpha x) = G_{\lambda\varepsilon}^{-1}[G_{\lambda\varepsilon}(\alpha x - a)]. \tag{4.39}$$

Решая (4.39) вплоть до порядка ε, получаем

$$h_\lambda(x) = \frac{1}{up}[|x|^{-(z-1)} - u(z-1)]^{-\frac{z}{z-1}} \times$$

$$\times \{|x|^{-p} - [|x|^{-(z-1)} - u(z-1)]^{-\frac{p}{z-1}}. \tag{4.40}$$

Выражения (4.37) и (4.40) представляют основные результаты, полученные в этом разделе. Они показывают, как оператор T (с точ-

ностью до линейных по отклонению $f - f^*$ членов) действует на функцию f, удовлетворяющую граничному условию (4.13). Для этого разложим $f(x) - f^*(x)$ по $h_\lambda(x)$:

$$\mathrm{T}^n f(x) = \mathrm{T}^n (f^*(x) + f(x) - f^*(x)) =$$

$$= \mathrm{T}^n \left(f^*(x) + \sum_\lambda c_\lambda h_\lambda(x)\right) = f^*(x) + \sum_\lambda \lambda^n c_\lambda h_\lambda(x). \tag{4.41}$$

Таким образом, переход через перемежаемость в отличие от перехода по Фейгенбауму является тем редким случаем, когда линеаризованные ренормгрупповые уравнения могут быть решены точно.

В качестве приложения рассмотрим зависимость длительности $\langle l \rangle$ ламинарной области от сдвига ε отображения относительно точки касания (рис. 48). Собственная функция h_λ в уравнении (4.40) нормирована так, что ее член низшего порядка по x есть $|x|^{2z-1-p}$. Таким образом, постоянный сдвиг ε от точки касания соответствует значительному возмущению с $p = 2z - 1$. При этом собственное число

$$\lambda_\varepsilon = 2^{\frac{z}{z-1}}. \tag{4.42}$$

Теперь можно с помощью простого масштабирования определить $\langle l \rangle (\varepsilon)$.

Так как величина $\langle l \rangle$ связана с числом итераций в точке x_0 и $f^2(x) = f[f(x)]$ требует лишь половины шагов, необходимых для $f(x)$, получаем масштабное соотношение

$$\langle l \rangle [\mathrm{T} f(x_0)] = \frac{1}{2} \langle l \rangle [f(x_0)]. \tag{4.43}$$

Используя (4.26), при большом числе итераций находим

$$\langle l \rangle [f(x_0)] = 2^n \langle l \rangle [\mathrm{T}^n f(x_0) = f^*(x_0) + \varepsilon \lambda_\varepsilon^n h_\varepsilon(x_0)],$$

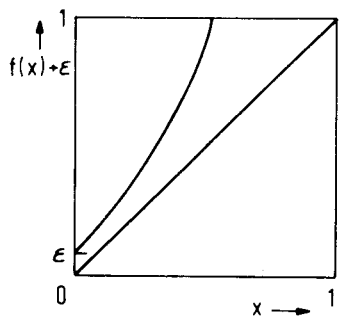


Рис. 48. Сдвиг ε от касательной.

откуда с учетом (4.42) при $\varepsilon\lambda_\varepsilon^n = 1$ будем иметь

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-\nu}; \quad \nu = \frac{z-1}{z}. \tag{4.44}$$

При $z = 2$ это соотношение согласуется с ранее полученным результатом (4.12). Таким же способом можно показать, что линейное по x возмущение, т. е.

$$f(x) = f^*(x) + \varepsilon x, \tag{4.45}$$

приводит к

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1}, \tag{4.46}$$

а возмущения вида εx^m при $m > z$ несущественны.

Наконец, отметим, что исследование воздействия внешнего шума амплитуды σ на перемежаемость (Hirsch, Nauenberg, Scalapino, 1982) показало, что величина $\langle l \rangle$ определяется выражением

$$\langle l \rangle = \varepsilon^{-\nu} g(\sigma^\mu \varepsilon), \quad \mu = \frac{z-1}{z+1}, \tag{4.47}$$

где g — универсальная функция.

4.3. Перемежаемость и фликкер-шум

Из экспериментальных наблюдений известно, что для большого числа разнообразных физических систем (табл. 5) спектр мощности S_f расходится на низких частотах по степенному закону $1/f^\delta$ ($0{,}8 < \delta < 1{,}4$). Это явление называется фликкер-шумом. Несмотря на значительные усилия теоретиков, единой теории, охватывающей все расходимости типа $1/f^\delta$, обнаруживаемые в различных экспериментах, до сих пор нет.

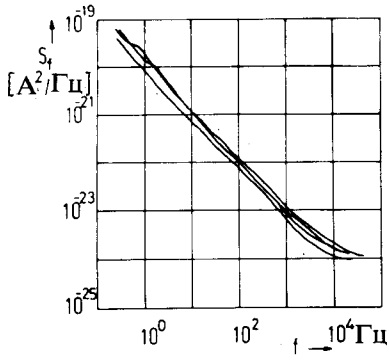


Рис. 49. Пример фликкер-шума — ток биполярного транзистора (Wolf, 1978).

Таблица 5. Системы, в которых наблюдается фликкер-шум

Система	Вид сигнала
Пленочное (угольное) сопротивление	Ток
Металлическая пленка	Ток
Полупроводник	Ток
Контакт металлов	Ток
Контакт полупроводников	Ток
Сверхпроводник	Поток жидкости
Электронная лампа	Ток
Плоскостной диод	Ток
Диод Шоттки	Ток
Диод Зенера (стабилитрон)	Ток
Биполярный транзистор	Ток
Полевой транзистор	Ток
Конвективная ячейка	Напряжение на термопаре
Аккумулятор	Напряжение
Кварцевый колебательный контур	Частота
Земля (вращение, усредненное за 5 дней)	Частота
Источники звука и речи	Громкость
Мембрана нервной клетки	Потенциал
Движение по шоссе	Транспортный поток

Далее будет показано, что в классе отображений, порождающих сигналы с перемежаемостью, существует также и фликкер-шум; с помощью ренормгруппового подхода будет найдена связь показателя δ с универсальными свойствами отображения. Хотя гипотеза перемежаемости для фликкер-шума, как будет далее показано, хорошо подтверждается в численных экспериментах для отображений, остается нерешенным вопрос, служит ли это также объяснением для перечисленных в табл. 5 экспериментов (вряд ли механизм перемежаемости, столь чувствительный к внешним возмущениям, способен объяснить сильный фликкер-шум резисторов). Но есть надежда обнаружить именно этот механизм в химических реакциях и в конвекции Бенара (Manneville, 1980; Dubois et al., 1983).

Вычислим спектр мощности S_f для отображения, показанного на рис. 50,

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{4.48}$$

при $x \geqslant 0$. Другими словами, будем рассматривать только ту часть отображения, где «призрак» неподвижной точки является отталкивающим (рис. 42 и 57). Таким образом, рассматриваемый механизм фликкер-шума справедлив только для перемежаемости 3-го (и 2-го)

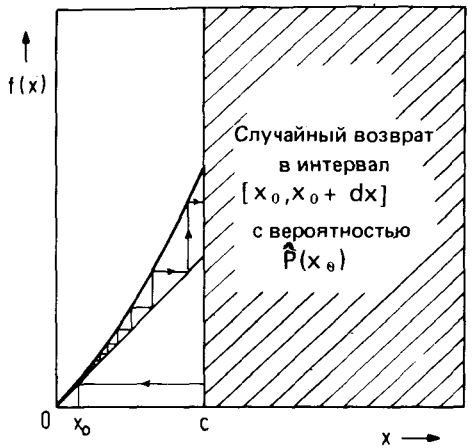


Рис. 50. Отображение $f(x)$ в пределе при $x \to 0$ имеет вид $f(x \to 0) = x + ux^2$ и произвольно при $x > c$ (единственное требование — чтобы эта часть отображения случайным образом с вероятностью $\hat{P}(x_0)$ возвращала точку в область $0 \leqslant x_0 < c$).

рода (Ben-Mizrachi et al., 1984). Удобно выразить S_f через корреляционную функцию $C(m)$:

$$S_f \sim \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N} \cos(2\pi m f) C(m), \tag{4.49}$$

где

$$C(m) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} x_{n+m} x_n. \tag{4.50}$$

(Это следует из определения S_f (1.2) и свойств преобразования Фурье.) Чтобы оценить $C(m)$, идеализируем сигнал так, как показано на рис. 51, *б*, т. е. предположим, что переменная x_n практически равна 0 в ламинарных областях, и заменим короткие области всплесков линиями с единичным весом. Тогда коэффициенты $C(m)$ пропорциональны условной вероятности появления сигнала в момент времени m, если он наблюдался в начальный момент времени.

Далее, выразим $C(m)$ через вероятность $P(l)$ появления окна длиной l, которую ниже мы вычислим универсальным путем. Из рис. 52 видно, что

$$\begin{aligned} &C(1) = P(1); \\ &C(2) = P(2) + P^2(1) = P(2) + C(1)P(1); \\ &C(m) = P(m) + C(1)P(m-1) + \ldots + C(m-1)P(1); \end{aligned} \tag{4.51}$$

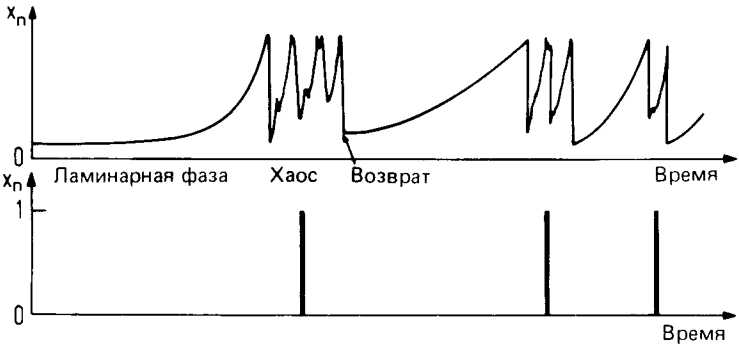


Рис. 51. *а* — Последовательность итераций $x_n = f^n(x_0)$, показывающая ламинарный и хаотический режимы, соответствующие положению точки либо в интервале $[0, c]$, либо в хаотической области; *б* — идеализированный сигнал.

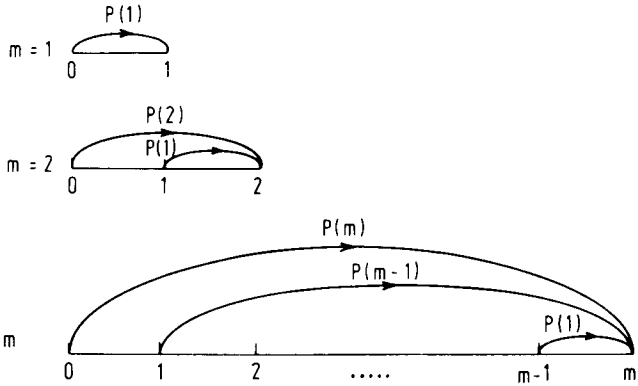


Рис. 52. Вероятность появления сигнала в момент m при условии его появления в нуле можно выразить через $P(l)$.

или

$$C(m) = \sum_{k=0}^{m} C(m-k)P(k) + \delta_{m,0}, \tag{4.52}$$

если положить $P(0) = 0$; $C(1) = 1$.

Используем теперь соотношение (4.24) для вычисления вероятности $P(l)$ появления ламинарной области длиной l для отображения (4.48).

$P(l)$ связана с вероятностью $\hat{P}(x_0)$:

$$\hat{P}(x_0)\mathrm{d}x_0 = \hat{P}[x_0(l)]\left|\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}l}\right|\mathrm{d}l \equiv P(l)\mathrm{d}l \tag{4.53}$$

$$P(l) = \tilde{P}[x_0(l)]\left|\frac{dx_0}{dl}\right|, \tag{4.54}$$

так как из рис. 50 следует

$$f^l(x_0) = c \to x_0 = x_0(l). \tag{4.55}$$

Функцию $x_0(l)$ можно вычислить, используя оператор удвоения. В отсутствие значительных возмущений (которые будут обсуждаться позже) имеем

$$T^n f(x_0) = \alpha^n f^{2n}\left(\frac{x_0}{\alpha^n}\right) \approx f^*(x_0) \quad \text{для} \quad n \gg 1, \tag{4.56}$$

т. е. функция сходится к неподвижной точке. Отсюда

$$f^{2n}(x_0) = \alpha^{-n} f^*(\alpha^n x_0). \tag{4.57}$$

Здесь величины $\alpha = 2^{\frac{1}{z-1}}$ и $f^*(x) = |x|[1 - (z-1)\,|x|^{z-1}]^{-\frac{1}{z-1}}$ зависят только от параметра z, определяющего класс универсальности. Используя (4.57) в (4.55), получим для $l = 2^n$:

$$x_0(l) \sim l^{\frac{1}{z-1}}, \tag{4.58}$$

что вместе с (4.54) дает необходимый универсальный результат для $P(l)$:

$$P(l) \sim \tilde{P}(0)\, l^{-\frac{z}{z-1}}. \tag{4.59}$$

Здесь предполагалось, что $\tilde{P}(x_0)$ медленно меняется по x_0, т. е. $P(x_0 \sim l^{\frac{1}{z-1}} \to 0) \approx \tilde{P}(0)$ для $l \gg 1$.

Перейдем к непрерывному времени, так как нас интересует только поведение в бесконечном пределе по времени, и преобразованием Лапласа разрешим (4.52), используя теорему о свертке

$$C_s = \frac{1}{1 - P_s}; \qquad g_s \equiv \int_0^\infty dt e^{-st} g(t), \tag{4.60}$$

откуда S_f получим в виде

$$S_f = \int_0^\infty dt \cos(2\pi f t) C(t) = \frac{1}{2}[C_{s \to 2\pi i f} + C_{s \to -2\pi i f}]. \tag{4.61}$$

Подстановка $P(l)$ из (4.59) в (4.60) и (4.61) дает

$$\lim_{f \to 0} S_f \sim \begin{cases} f^{-\frac{2z-5}{z-1}} & z > 3, \\ \dfrac{|\ln f|^2}{f^{1/2}} & z = 3, \\ f^{-\frac{1}{z-1}} & 2 < z < 3, \\ \dfrac{1}{f|\ln f|^2} & z = 2, \\ f^{-\frac{2z-3}{z-1}} & \dfrac{3}{2} < z < 2, \\ |\ln f| & z = \dfrac{3}{2}, \\ \text{const} & z < \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{4.62}$$

(Результаты для $z \geqslant 3$ взяты из работы (Ben-Mizrachi et al., 1984).)

Из рис. 53 видно, что этот результат разумно согласуется с вычисленными спектрами мощности для отображения

$$x_{n+1} = x_n + x_n^z \bmod 1 \tag{4.63}$$

при $z = \dfrac{5}{2}$ и $z = 2$.

Теперь кратко обсудим действие возмущений. Низкочастотная расходимость спектра мощности появляется из-за того, что в (невозмущенном) отображении (рис. 50) с конечной вероятностью возникают произвольно длинные ламинарные области ($P(l) \sim l^{-z/(z-1)}$). Но в разд. 4.2 было также показано, что в присутствии значительных возмущений (например, сдвиг ε от точки касания) средняя длина окон конечна:

$$\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-\nu}, \tag{4.64}$$

откуда получим ограничение

$$f_c \sim \langle l \rangle^{-1} \sim \varepsilon^{\nu} \tag{4.65}$$

степенного закона $1/f^{\delta}$ для S_f (рис. 54).

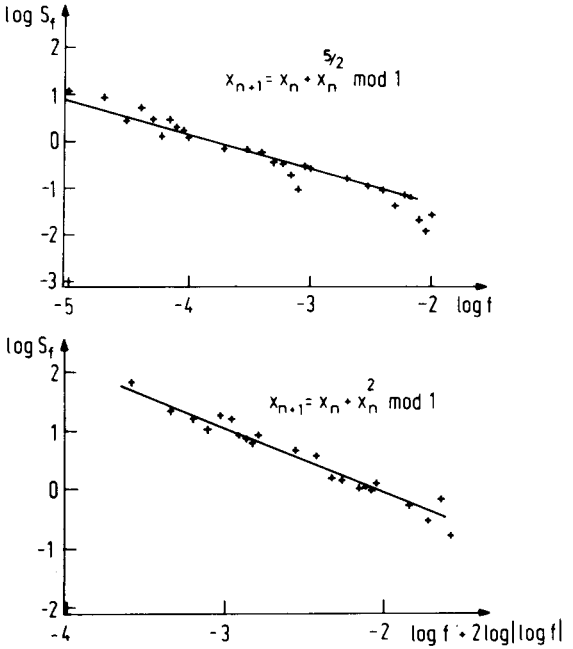


Рис. 53. Вычисленные спектры мощности для $z = 5/2$ и $z = 2$ и решение уравнений (4.62) (Procaccia, Schuster, 1983).

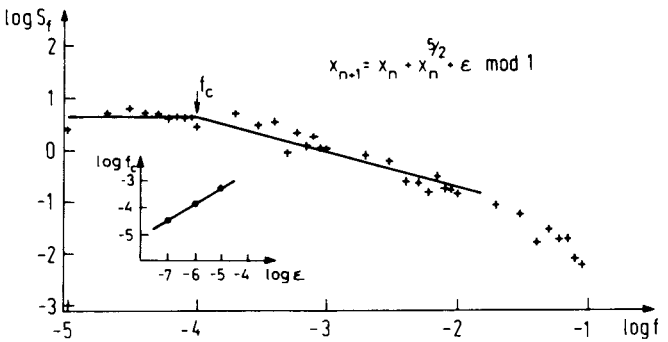


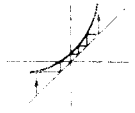
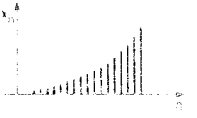
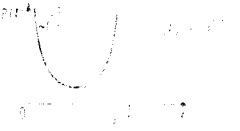
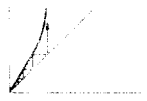
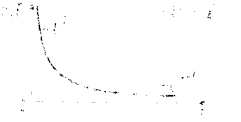
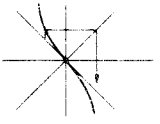
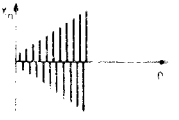
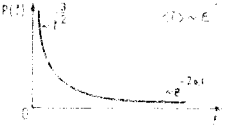
Рис. 54. Спектр мощности для отображения $x_{n+1} = \varepsilon + x_n + x_n^{5/2}$ mod 1. На врезке показана зависимость f_c от ε, предсказанная уравнением (4.62). (Procaccia, Schuster, 1983).

4.4. Экспериментальные наблюдения перехода через перемежаемость

В табл. 6 собраны некоторые типичные измеримые свойства перехода к хаосу через перемежаемость. Разные виды перемежаемости можно различить по формуле сигнала и по распределению $P(l)$ длин ламинарных участков.

Далее будет представлен вывод $P(l)$ и описаны два характерных эксперимента, в которых обнаружена перемежаемость 1-го рода. Этот раздел заканчивается кратким сообщением о первом экспериментальном наблюдении перемежаемости 3-го рода (перемежаемость 2-го рода недавно найдена в реакции Белоусова — Жаботинского (Roux et al., 1984).

Таблица 6. Характерные свойства различных типов перемежаемости

№ п/п	Отображение Пуанкаре	Ламинарный сигнал	Распределение $P(l)$
1			
	$x_{n+1} = x_n + x_n^2 + \varepsilon$	Монотонно растет	
2			
	$r_{n+1} = (1 + \varepsilon) r_n + u r_n^3$ $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$	Спираль	
3			
	$x_{n+1} = -(1 + \varepsilon) x_n - u x_n$	Переменный	

Распределение длин ламинарных участков. Предположим, что сигнал случайным образом (с вероятностью $\hat{P}(x_0)$) возвращается в ламинарный режим, так что можно использовать уравнение (4.54):

$$P(l) = \hat{P}(x_0)\left|\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}l}\right|. \tag{4.66}$$

Чтобы получить зависимость $x_0(l)$, заменим (как и в (4.9)) отображение Пуанкаре для перемежаемости 1-го рода (см. табл. 4)

$$x_{n+1} = \varepsilon + x_n + ux_n^2 \tag{4.67}$$

приближенным дифференциальным уравнением для ламинарной области

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} = \varepsilon + ux^2. \tag{4.68}$$

После интегрирования получим

$$l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon u}}\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{c}{\sqrt{\varepsilon/u}}\right] - \operatorname{arctg}\left[\frac{x_0}{\sqrt{\varepsilon/u}}\right]\right], \tag{4.69}$$

где c — максимальное значение $x(l)$ в ламинарном режиме (рис. 50). Из уравнений (4.66) и (4.69) следует

$$P(l) = \frac{\varepsilon}{2c}\left\{1 + \operatorname{tg}^2\left[\operatorname{arctg}\left[\frac{l}{\sqrt{\varepsilon/u}}\right]\right] - \sqrt{\varepsilon u l}\right\} \tag{4.70}$$

и

$$\langle l\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}l P(l) l \sim \varepsilon^{-1/2} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.71}$$

Распределения $P(l)$ для двух других видов перемежаемости получаются таким же образом:

$$P(l) \sim \frac{\varepsilon^2 \mathrm{e}^{4\varepsilon l}}{(\mathrm{e}^{4\varepsilon l} - 1)^2} \quad \text{для 2-го рода,} \tag{4.72}$$

$$P(l) \sim \frac{\varepsilon^{3/2} \mathrm{e}^{4\varepsilon l}}{(\mathrm{e}^{4\varepsilon l} - 1)^{3/2}} \quad \text{для 3-го рода.} \tag{4.73}$$

Для перемежаемости 2-го рода уравнение (4.66) необходимо заменить на $P(l) = \hat{P}(r_0) r_0 |\mathrm{d}r_0/\mathrm{d}l|$, так как отображение Пуанкаре двумерно.

Перемежаемость 1-го рода. На рис. 55 показана осциллограмма вертикальной скорости в эксперименте Бенара. Поведение сигнала характерно для перемежаемости 1-го рода.

В нелинейном RCL-осцилляторе, описанном в разд. 3.5, также наблюдается перемежаемость. Существование перемежаемости 1-го

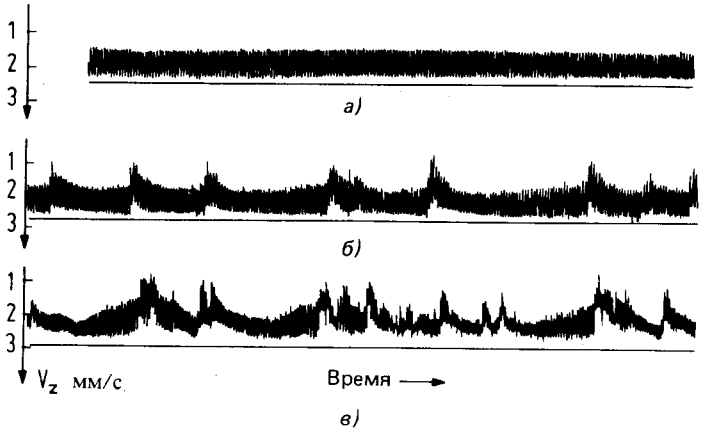


Рис. 55. Перемежаемость в эксперименте Бенара. С ростом числа Рэлея вертикальная составляющая скорости в центре ячейки из периодической (*а*) через перемежаемость (*б*) становится хаотической (*в*) (Bergé et al., 1980).

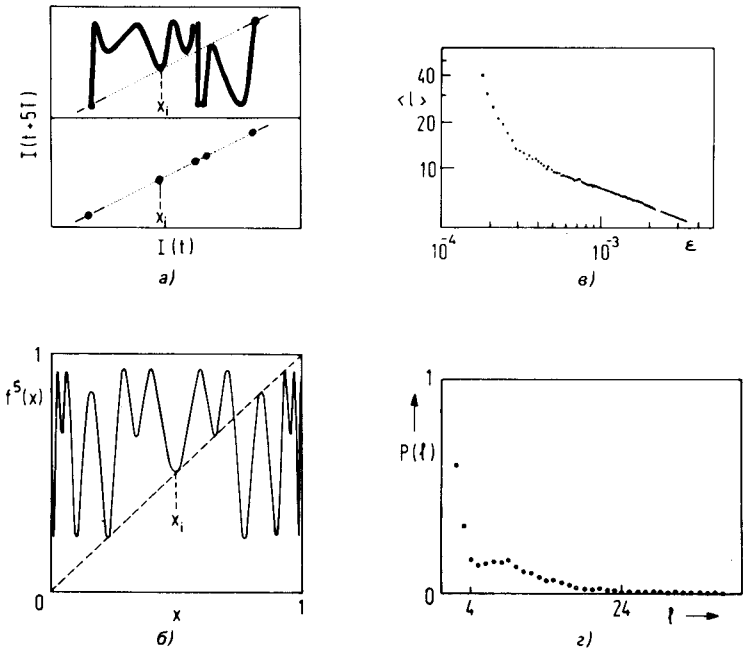


Рис. 56. Перемежаемость в нелинейном *RCL*-осцилляторе: *а* — зависимость $I(t + 5T)$ от $I(t)$, соответствующая пятой итерации логистического отображения в точке касания (*б*); *в* — измеренная средняя длина ламинарной области $\langle l \rangle$ пропорциональна $\varepsilon^{-0,43}$ (где $\varepsilon \sim V_0 - V_c$), что разумно согласуется с предсказанной зависимостью ($\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-0,5}$); *г* — зависимость P от l (в единицах $5T$) при $\varepsilon = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ (Jeffries, Pérez, 1982).

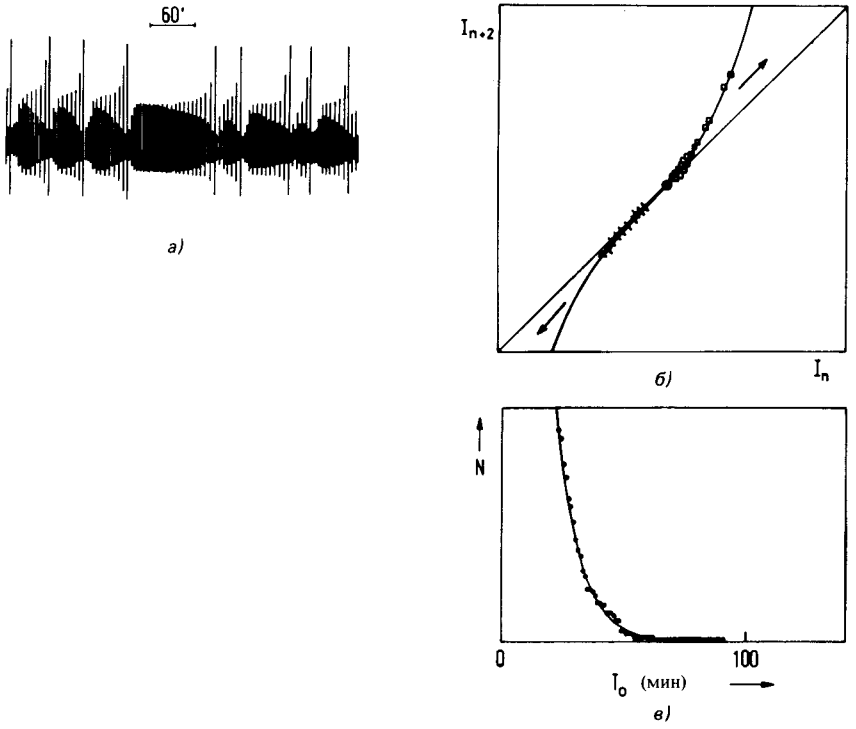


Рис. 57. *а* — Осциллограмма интенсивности света (почти пропорциональной локальному горизонтальному градиенту температуры); *б* — отображение Пуанкаре $I_{n+2}(I_n)$, построенное по данным осциллограммы (*а*) при $\varepsilon = 0{,}098$. Амплитуды на участках всплесков не показаны. Отметим, что «призрак» неподвижной точки (кружок) является чисто отталкивающим; *в* — зависимость числа N ламинарных участков с $l > T_0$ ($N = \int_{T_0}^{\infty} P(l)\,dl$ от T_0. Экспериментальные данные согласуются с кривой, полученной из (4.73) для $\varepsilon = 0{,}098$ (Dubois et al., 1983).

рода показано на рис. 56 с помощью отображения Пуанкаре, скейлинга длин ламинарных областей и положения максимума $P(l)$ при $l > 0$.

Перемежаемость 3-го рода. Перемежаемость 3-го рода впервые наблюдалась в эксперименте с конвекцией Бенара в маленькой прямоугольной ячейке (Dubois, Rubio, Bergé, 1983). В эксперименте измерялся горизонтальный градиент температуры по модуляции интенсивности светового пучка, проходящего через ячейку.

На рис. 57, *а* показана осциллограмма, характерная для перемежаемости 3-го рода. Перемежаемость появляется одновременно с удвоением периода; амплитуда субгармоники растет, а амплитуда основной частоты уменьшается. Когда амплитуда субгармоники

становится большой, сигнал теряет регулярность и возникают турбулентные всплески.

Если построить последовательности максимумов I_n субгармоники (четные n, отмечены крестиками) и основной моды (нечетные n, квадратики), то получается отображение Пуанкаре, показанное на рис. 57, *б*. Его форма описывается выражением

$$I_{n+2} = (1 + 2\varepsilon)I_n + bI_n^3, \tag{4.74}$$

где b — постоянная, $\varepsilon \sim (R - R_c)$ — мера надкритичности по числу Рэлея R_c, соответствующему порогу возникновения перемежаемости. Уравнение (4.74) можно получить из отображения

$$I_{n+1} = f(I_n) = -(1 + \varepsilon)I_n - uI_n^3, \tag{4.75}$$

где $b = u(2 + 4\varepsilon)$. Его собственное значение

$$\lambda = f'(0) = -(1 + \varepsilon) \tag{4.76}$$

пересекает единичную окружность в точке -1, что в соответствии с табл. 4 указывает на перемежаемость 3-го рода.

5

Странные аттракторы в диссипативных динамических системах

В разд. 5.1 этой главы будет показано, что нелинейные диссипативные динамические системы естественно приводят к понятию странного аттрактора. Затем (разд. 5.2) вводится колмогоровская энтропия как функциональная мера хаотического движения, после чего (разд. 5.3) рассматривается задача о количестве информации, которую можно получить по измеренному случайному сигналу.

В разд. 5.4 обсуждается возникновение странного аттрактора в модели Рюэля — Такенса — Ньюхауза, описывающей переход к турбулентности (во времени) и приводятся некоторые экспериментальные подтверждения этой модели. Следующий раздел содержит ренормгрупповое толкование этой модели перехода к хаосу. Глава заканчивается критическим обзором различных сценариев перехода и набором рисунков странных аттракторов и их фрактальных границ.

5.1. Введение и определение странных аттракторов

В этом разделе мы рассмотрим диссипативные системы, описываемые потоками или отображениями. Рассмотрим вначале диссипативные потоки, описываемые автономной системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \tag{5.1}$$

Здесь термин «диссипативный» означает, что произвольно выбранный в фазовом пространстве $\{x\}$ элементарный объем V, ограниченный поверхностью S, сжимается. Поверхность S эволюционирует так, что каждая ее точка движется по траектории, определяемой (5.1). Отсюда по теореме о дивергенции:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^d x \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right), \tag{5.2}$$

и тогда по определению диссипативными являются системы с

$dV/dt < 0$. Примером потока этого типа является модель Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ, \end{aligned} \tag{5.3}$$

для которой из (5.2)

$$\frac{dV}{dt} = -(\sigma + 1 + b)V < 0 \qquad (\sigma > 0, b > 0), \tag{5.4}$$

т. е. элементарный объем сжимается экспоненциально во времени

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t} \tag{5.5}$$

Если рассматривать траекторию, порождаемую уравнениями модели Лоренца при $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (рис. 58), оказывается, что а) она притягивается к ограниченной области в фазовом пространстве; б) движение ее блуждающее, т. е. траектория делает один виток направо, затем несколько витков налево, затем направо и т. д.; в) траектория очень чувствительна к малым изменениям начальных условий, т. е. если вместо условий (0; 0,01; 0) взять близкие условия, то новое решение вскоре отклонится от прежнего и число витков будет другим. На рис. 59 представлен график зависимости n-го максимума M_n переменной Z от M_{n+1}. Результирующее отображение является приблизительно треугольным, что соответствует, согласно гл. 2, хаотической последовательности M_n.

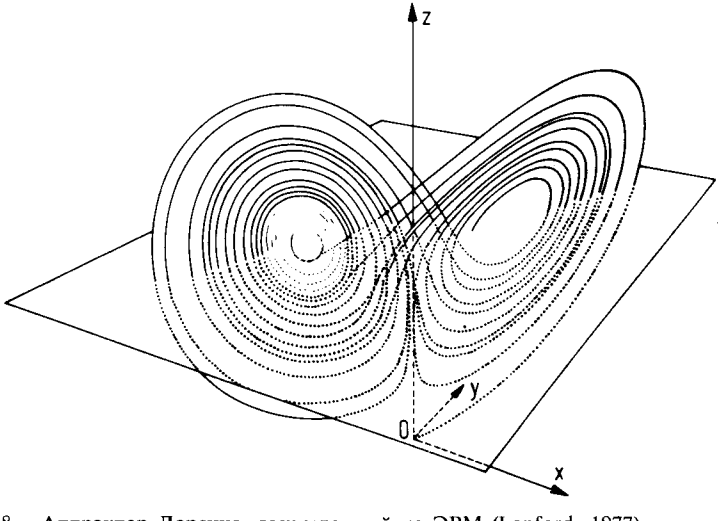


Рис. 58. Аттрактор Лоренца, вычисленный на ЭВМ (Lanford, 1977).

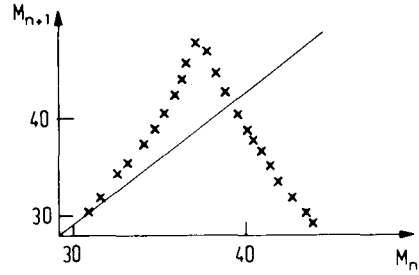


Рис. 59. Последовательные максимумы переменной Z аттрактора Лоренца (Lorenz, 1963).

Подведем итог: траектория чувствительна к изменениям начальных условий; хаотична; притягивается к ограниченной области в фазовом пространстве; объем этой области (согласно (5.4)) стремится к нулю. Это означает, что поток трехмерной системы Лоренца порождает множество точек, размерность которого меньше 3, т. е. его объем в трехмерном пространстве равен 0. На первый взгляд можно было бы присвоить ему следующую целую, но меньшую размерность — 2. Однако это противоречит теореме *Пуанкаре — Бендикссона*, утверждающей, что в ограниченной области двумерного пространства хаотический поток не может существовать. Сошлемся, например, на строгое доказательство этой теоремы в монографии (Hirsch, Smale, 1965). Рис. 60 показывает, что непрерывность линий тока и тот факт, что линия тока делит плоскость на две части, ограничивают траекторию так сильно, что единственно возможными аттракторами в ограниченной области являются предельные циклы и неподвижные точки. Разрешение этой проблемы заключается в том, что множество точек, к которому притягивается траектория в системе Лоренца (так называемый аттрактор Лоренца), имеет хаусдорфову размерность не целую, а между 2 и 3 (точное значение $D = 2{,}06$). Это, естественно, приводит к понятию странного аттрактора, который появляется в разнообразных физических нелинейных системах.

Странный аттрактор обладает следующими свойствами (формальное определение можно найти в обзорных статьях (Eckmann, 1981; Ruelle, 1980):

а) он является аттрактором, т. е. занимает ограниченную область фазового пространства $\{x\}$, к которой по истечении большо-

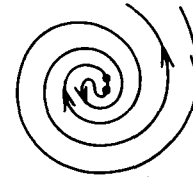


Рис. 60. Самозахват линии тока в ограниченной области на плоскости. Экспоненциальное разбегание траекторий противоречит непрерывности (отметим противоположные направления стрелок).

го интервала времени притягиваются все достаточно близкие траектории из так называемой области притяжения. Отметим, что область притяжения может иметь очень сложную структуру (см. рис. разд. 5.7). Кроме того, сам аттрактор состоит как бы из одной траектории, т. е. траектория с течением времени должна пройти через каждую точку аттрактора. Набор изолированных неподвижных точек не является единым аттрактором;

б) свойство, делающее аттрактор странным, — чувствительность к начальным условиям, т. е., несмотря на сжатие в объеме, не происходит сокращения длин во всех направлениях и *расстояния между первоначально сколь угодно близкими точками на аттракторе через достаточно большое время* становятся конечными. Как будет показано в следующем разделе, это приводит к положительной колмогоровской энтропии;

в) чтобы описывать физическую систему, аттрактор должен быть *структурно устойчивым* и *типичным*. Другими словами, малые изменения параметра в $\boldsymbol{F}$ (см. (5.1)) изменяют структуру аттрактора непрерывным образом (далее мы будем характеризовать структуру более детально; сейчас имеем в виду, например, хаусдорфову размерность аттрактора) и множество параметров, для которых (5.1) порождает странный аттрактор, не должно быть множеством меры 0 — иначе аттрактор не является типичным и физически значимым.

Все обнаруженные к настоящему времени странные аттракторы имеют дробную хаусдорфову размерность. Так как не существует общепринятого формального определения странного аттрактора (Ruelle, 1980; Mandelbrot, 1982), пока не ясно, всегда ли дробность хаусдорфовой размерности следует из свойств «а» — «в» или необходима дополнительно для странного аттрактора.

Обычно странный аттрактор возникает, когда фазовый поток сжимает элементарный объем в одних направлениях и растягивает его в других. Чтобы оставаться в ограниченной области, элементарный объем одновременно складывается. Этот процесс растяжения и складывания порождает хаотическое движение траектории на странном аттракторе подобно тому, как это было в случае кусочно-линейных отображений (гл. 2).

Так как вышеприведенное определение описывает свойства множества точек, понятие странного аттрактора не ограничено потоками: диссипативные отображения также могут порождать странные аттракторы. Отображение

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{G}[\mathbf{x}(n)]; \quad \mathbf{x}(n) = [x_1(n), \ldots, x_d(n)] \tag{5.6a}$$

называется диссипативным, если оно приводит к сжатию объема в фазовом пространстве, т. е. если модуль якобиана J, на который умножается элементарный объем после итерации, меньше 1:

$$|J| = \left|\det\left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)\right| < 1. \tag{5.6б}$$

Теорема Пуанкаре — Бендикссона, которая ограничивает размерность порожденных потоками странных аттракторов величинами, большими двух, несправедлива для отображений. Это связано с тем, что отображения порождают дискретные точки и снимаются ограничения, связанные с непрерывностью. Таким образом, диссипативные отображения могут приводить к странным аттракторам, размерность которых меньше 2.

Рассмотрим для иллюстрации два примера, которые из-за меньшей размерности проще представить визуально, чем аттрактор Лоренца.

Преобразование пекаря. На рис. 61 показаны обычное преобразование пекаря — отображение, сохраняющее площадь (напоминает действия пекаря, который раскатывает тесто) и не сохраняющее площадь диссипативное преобразование пекаря. Математиче-

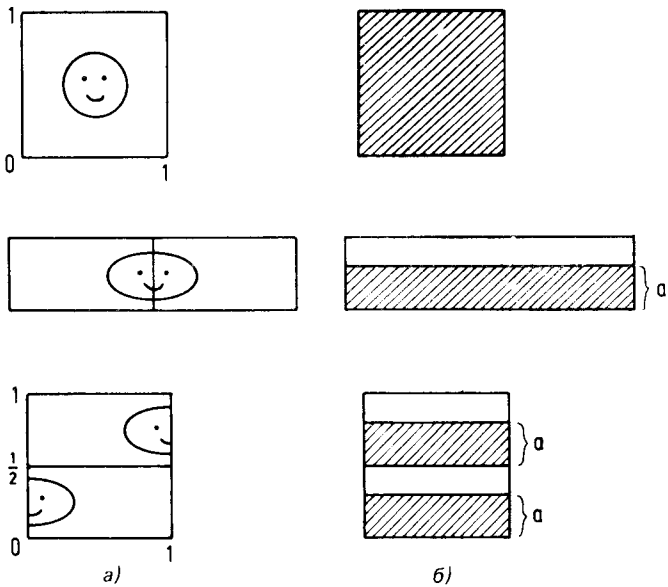


Рис. 61. *а* — Преобразование пекаря; *б* — диссипативное преобразование пекаря.

ское выражение для последнего

$$x_{n+1} = 2x_n \bmod 1, \tag{5.7а}$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} ay_n & \text{при} \quad 0 \leqslant x_n < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2} + ay_n & \text{при} \quad \dfrac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.7б}$$

где $a < 1$. Первое уравнение (5.7а) хорошо знакомо нам по гл. 2 — это σ-преобразование, приводящее к сдвигу Бернулли. Его ляпуновский показатель (по x) $\lambda_x = \ln 2 > 0$, что приводит к чувствительности к начальным условиям; объект, получающийся путем многократного воздействия этого отображения на единичный квадрат, является странным аттрактором. Этот аттрактор — бесконечная последовательность горизонтальных линий и ее область притяжения включает все точки единичного квадрата. Показатель Ляпунова в направлении y $\lambda_y = \ln a < 0$, и в этом направлении масштабы сокращаются таким образом, что общий результат (растяжения по x и сжатия по y) — это уменьшение объема, необходимое для диссипативного отображения.

Хаусдорфову размерность D_B странного аттрактора можно вычислить следующим образом. В направлении x аттрактор просто одномерный (как и отображение $\sigma(x)$ в гл. 2). Хаусдорфова размерность в направлении y следует из определения

$$\lim_{l \to 0} N(l) \sim l^{-D_y} \tag{5.8}$$

и из самоподобия аттрактора по вертикали (рис. 61, *б*). Это дает

$$\frac{N(a)}{N(a^2)} = \frac{2}{4} = a^{-D_y} \to D_y = \ln\left(\frac{1}{2}\right)/\ln a \tag{5.9}$$

и окончательно

$$D_B = 1 + D_y = 1 + \frac{\ln 2}{|\ln a|}. \tag{5.10}$$

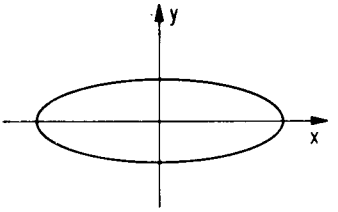
Диссипативное отображение Хенона. Это двумерный аналог логистического отображения (Hénon, 1976). Напомним его выражение из гл. 1:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n; \tag{5.11а}$$

$$y_{n+1} = bx_n. \tag{5.11б}$$

Это отображение со сжатием площади, т. е. диссипативное при

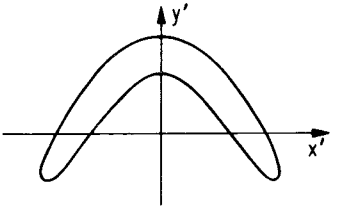
Исходный эллипс



Изгиб с сохранением площади

T_1: $x' = x$

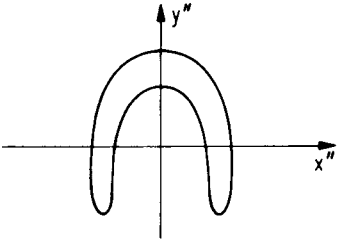
$y' = 1 - ax^2 + y$



Сжатие в направлении x

T_2: $x'' = bx'$

$y'' = y'$



Поворот на 90°

T_3: $x''' = y''$

$y''' = -x''$

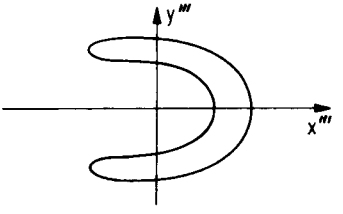


Рис. 62. Разложение на этапы воздействия на эллипс отображения Хенона $T = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1$.

$|b| < 1$, так как его якобиан

$$\left| \det \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right| = |b|. \tag{5.12}$$

Действие отображения изображено на рис. 62.

Исследуем теперь итерации этого отображения, например, при $b = 0{,}3$; $a = 1{,}4$. На рис. 63, *а* показан результат итераций с числом шагов 10^4 и цифрами представлена динамика точки на аттракторе, который выглядит, как очень запутанная кривая. На рис. 63, *б*, *в* показаны подробно области внутри прямоугольника, изображенного на предыдущем рисунке, проявляющие самоподоб-

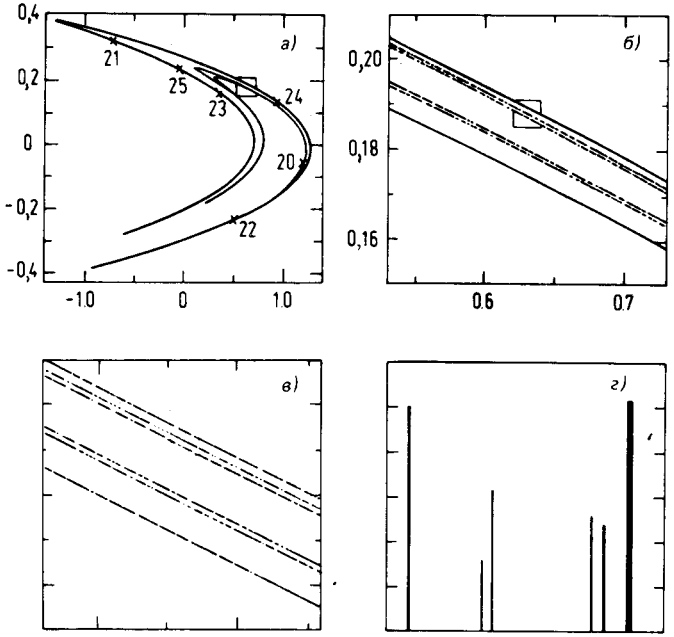


Рис. 63. *а* — Изображение аттрактора Хенона, построенное по 10^4 точек. Несколько последовательных точек пронумерованы для иллюстрации блуждающего движения на аттракторе; *б*, *в* — увеличенные изображения квадратиков с предыдущих рисунков; *г* — высота каждого столбика — относительная вероятность обнаружения точки в одном из шести листков предыдущего рисунка (Farmer, 1982a, b).

ную структуру аттрактора. Хаусдорфова размерность аттрактора Хенона $D = 1{,}26$ при $a = 1{,}4$; $b = 0{,}3$. Этот результат получен путем наложения квадратной сетки с ячейкой l на плоскость отображения и подсчета числа $N(l)$ квадратов, занятых точками и вычислением $D = -\lim\limits_{l \to 0} \ln N(l)/\ln l$. Если на рис. 63, *в* разрешение позволяет видеть шесть «листков», то относительная вероятность для каждого листка может быть оценена простым подсчетом числа точек на нем. Высота каждого столбика на рис. 63, *г* — относительная вероятность, а ширина — толщина соответствующего листка.

Различные высоты столбиков на рис. 63, *г* показывают, что *аттрактор Хенона неоднороден*. Эта неоднородность не может быть описана одной хаусдорфовой размерностью, поэтому в дальнейшем мы введем бесконечное множество размерностей, характеризующих статическую структуру (т. е. распределение точек)

аттрактора. Однако, прежде чем это сделать, полезно обсудить колмогоровскую энтропию, которая описывает динамическое поведение на странном аттракторе.

5.2. Энтропия Колмогорова

Энтропия Колмогорова (Колмогоров, 1954) — важнейшая характеристика хаотического движения в фазовом пространстве произвольной размерности.

Прежде чем ввести эту величину, вспомним, что термодинамическая энтропия S есть мера беспорядка в данной системе. Простой пример системы, в которой S растет, — молекулы газа, которые вначале помещены в одну половину куба и которым затем внезапно открывается возможность заполнить весь сосуд. Беспорядок в этой системе нарастает, так как молекулы больше не отделены от другой половины куба. Этот рост беспорядка связан с ростом нашего незнания о состоянии системы (до того как была убрана перегородка, о расположении молекул мы знали больше).

Более строго, энтропия S, определенная как

$$S \sim -\sum_i P_i \ln P_i, \tag{5.13}$$

где $\{P_i\}$ — вероятности для системы оказаться в состояниях $\{i\}$ (см. приложение 6), есть мера информации, необходимой для определения местоположения системы в некотором состоянии i^*, т. е. S есть мера незнания о системе (Shannon et al., 1949).

Этот пример из статистической механики показывает, что по существу беспорядок есть понятие из теории информации. Поэтому не удивительно, что энтропию Колмогорова K, показывающую, «насколько динамическая система хаотична», также можно определить формулой Шеннона, так что K пропорциональна скорости потери информации о состоянии динамической системы с течением времени.

Определение K. K можно вычислить следующим образом (Farmer, 1982а, б). Рассмотрим траекторию $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \ldots, x_d(t)]$ динамической системы на странном аттракторе и предположим, что d-мерное фазовое пространство разделено на ячейки размера l^d. Состояние системы будем измерять через интервалы времени τ. Пусть $P_{i_0 \ldots i_n}$ — совместная вероятность того, что $\mathbf{x}(t = 0)$ находится в ячейке i_0, $\mathbf{x}(t = \tau)$ — в ячейке i_1, ..., $\mathbf{x}(t + n\tau)$ — в ячейке i_n. По Шеннону, величина

$$K_n = -\sum_{i_0 \ldots i_n} P_{i_0 \ldots i_n} \ln P_{i_0 \ldots i_n} \tag{5.14}$$

пропорциональна информации, необходимой для определения местоположения системы на заданной траектории $i_1^* \ldots i_n^*$ с точностью l (если априори известны только вероятности $p_{i_0 \ldots i_n}$). Поэтому $K_{n+1} - K_n$ есть дополнительная информация, необходимая для предсказания, в какой ячейке i_{n+1}^* будет система, если известно, что прежде она находилась в $i_1^* \ldots i_n^*$. Это означает, что $K_{n+1} - K_n$ описывает потерю информации о системе на интервале времени от n до $n + 1$.

K-энтропия определяется как средняя скорость потери информации:

$$K = \lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N-1} (K_{n+1} - K_n) =$$

$$= - \lim_{\tau \to 0} \lim_{l \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i_0 \ldots i_N} P_{i_0 \ldots i_N} \ln P_{i_0 \ldots i_N}. \qquad (5.15)$$

Предел $l \to 0$ (который берется *после* $N \to \infty$) делает величину K независимой от частного вида разбиения. Для отображений с дискретным шагом по времени $\tau = 1$ предел по $\tau \to 0$ опускается.

Из табл. 7 видно, что K — действительно пригодная мера хаоса: она равна нулю для регулярного движения, бесконечна для случайных систем, положительна и постоянна для систем с детерминированным хаосом.

Связь K с показателями Ляпунова. Для одномерных отображений K является также и показателем Ляпунова (см. табл. 7 и (2.12)). Для систем большей размерности информация о системе теряется, так как ячейка, в которой прежде находилась система, распределяется на новые ячейки в фазовом пространстве со скоростью, определяемой ляпуновскими показателями (рис. 64). Поэтому правдоподобно, что скорость K, с которой происходит потеря информации о системе, равна средней сумме положительных показателей Ляпунова (Песин, 1977):

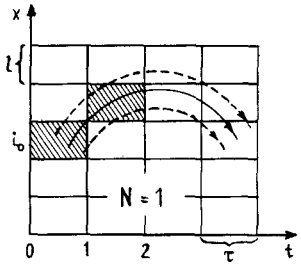
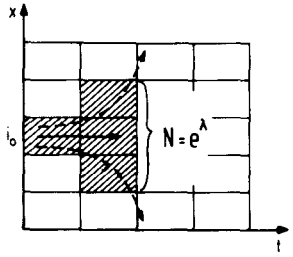
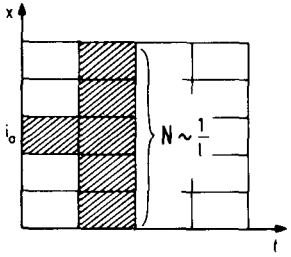
$$K = \int d^d x \rho(\mathbf{x}) \sum_i \lambda_i^+(\mathbf{x}). \qquad (5.16)$$

Здесь $\rho(\mathbf{x})$ — инвариантная плотность аттрактора. В большинстве случаев λ не зависят от $\mathbf{x}$; тогда интеграл равен 1 и K сводится к простой сумме.

Определение показателя Ляпунова λ для одномерного отображения $G(x)$ (см. (2.9))

$$e^{\lambda} = \lim_{N \to \infty} \left(\prod_{n=0}^{N-1} \left| \frac{dG}{dx_n} \right| \right)^{1/N} \qquad (5.17)$$

Таблица 7. K-энтропия для (одномерных) регулярного, хаотического и случайного движений

Регулярное движение 	Первоначально близкие точки остаются близкими $P_{i_0} = l;\ P_{i_0 i_1} = l \cdot 1$ $K = 0$
Хаотическое движение 	Первоначально близкие точки расходятся экспоненциально $P_{i_0} = l;\ P_{i_0 i_1} = l e^{-\lambda}$ $K = \lambda > 0$
Случайное движение 	Первоначально близкие точки распределяются с равной вероятностью по всем возможным интервалам $P_{i_0} = l;\ P_{i_0 i_1} \sim l^2$ $K \sim -\ln l \to \infty$

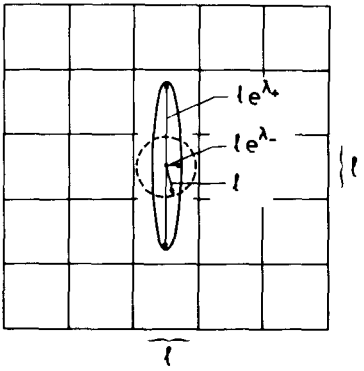


Рис. 64. Двумерное отображение преобразует маленькую окружность в эллипс, полуоси которого изменены в соответствии с ляпуновскими показателями. Отметим, что $e^{\lambda-}$ не вносит вклад в K, так как этот показатель не приводит к заполнению новых ячеек после очередного шага по времени.

нетрудно обобщить на размерность d, когда существует d показателей для различных направлений в пространстве:

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_d} = \lim_{N \to \infty} \left(\text{собственные значения произведения} \prod_{n=0}^{N-1} J(\mathbf{x}_n)\right)^{1/N}, \tag{5.18}$$

где

$$J(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right) \tag{5.19}$$

— есть якобиан отображения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)$.

Отметим, что собственные значения $\{\lambda_i\}$ якобиана инварианты к преобразованиям координат в фазовом пространстве, т. е. из (5.16) следует также инвариантность K, как и следовало бы ожидать для такой важной физической характеристики.

Среднее время предсказуемости хаотической системы. K-энтропия также определяет среднее время, на которое можно предсказать состояние системы с динамическим хаосом. Рассмотрим, например, простое одномерное треугольное отображение, ограниченное единичным квадратом (рис. 12). После n шагов по времени интервал l вырастает до $L = le^{\lambda n}$. Если L становится больше 1, невозможно определить местоположение траектории на [0, 1], и можно лишь сказать, что система с вероятностью

$$\rho_0(x)\,dx \tag{5.20}$$

находится на интервале $[x, x + dx] \in [0, 1]$, где $\rho_0(x)$ — инвариантная плотность системы. Другими словами, точное предсказание состояния этой системы возможно только на интервале времени T_m, таком, что

$$le^{\lambda T_m} = 1, \quad \text{т. е.} \quad T_m = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{l}\right). \tag{5.21}$$

На временах, больших T_m, возможны лишь статистические предсказания. Уравнение (5.21) можно обобщить на динамические системы большей размерности заменой λ на K-энтропию (Farmer, 1982a):

$$T_m \sim \frac{1}{K} \ln\left(\frac{1}{l}\right). \tag{5.22}$$

Отметим, что точность l, с которой определяется местоположение начального состояния, влияет на T_m лишь логарифмически.

Подведем итоги результатам по K-энтропии.

Она является мерой средней скорости потери информации о состоянии динамической системы с течением времени.

Для одномерных отображений она равна показателю Ляпунова. Для систем большей размерности K есть мера средней деформации ячейки в фазовом пространстве и равна усредненной по фазовому пространству и сумме положительных показателей Ляпунова.

Она обратно пропорциональна интервалу времени, на котором можно предсказать состояние хаотической системы.

Кроме того, в следующем разделе будет показано, что нижнюю границу K-энтропии можно получить непосредственно по измеренной зависимости от времени одной из компонент хаотической системы. Эти результаты показывают, что K-энтропия — именно та фундаментальная величина, которая характеризует хаотическое движение, и странный аттрактор можно определить как аттрактор с положительной энтропией.

5.3. Описание аттрактора по измеренному сигналу

Наблюдая в эксперименте сигнал, кажущийся случайным, хочется знать, какую он содержит информацию о странном аттракторе. Для ответа на этот вопрос мы определим вначале в дополнение к размерности Хаусдорфа D бесконечное множество размерностей $D = D_0, D_1, D_2, \ldots$, описывающих неоднородность аттрактора (рис. 63). Оказывается, что величину D_2 (оценку снизу размерности Хаусдорфа) можно получить непосредственно из измерений, однако при этом требуется знать развитие во времени *всех* составляющих в фазовом пространстве (например, $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ в модели Лоренца). Теорема Такенса (1981) утверждает, что такие важные свойства аттрактора, как, например, D_2, можно восстановить по измерениям лишь *одной* составляющей (наблюдаемой). В ряде работ (Grassberger, Hentschel, Procaccia, 1983) показано, что действительно по одной временной реализации можно определить следующие характеристики:

D_2, т. е. нижнюю границу размерности Хаусдорфа ($D_2 < D$);

d, т. е. размерность вложения аттрактора;

амплитуду белого шума в сигнале (т. е. нерегулярность, связанную с динамикой движения на аттракторе, можно отличить от воздействующего на систему белого шума);

нижнюю границу K-энтропии (т. е. можно определить, «насколько хаотичен» сигнал).

Наконец, в этом разделе мы обсудим гипотезу Каплана — Йорки (Kaplan, Yorke, 1979), которая связывает статическую структуру аттрактора (определяемую размерностями D_0, D_1, ...) с динамикой движения на аттракторе (характеризуемой ляпуновскими показателями).

Размерности странного аттрактора. Так же как в разд. 5.2, преобразуем траекторию динамической системы на странном аттракторе $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \ldots, x_d(t)]$ в последовательность точек $\mathbf{x}(t = 0)$, $\mathbf{x}(t = \tau)$, ..., $\mathbf{x}(t = N\tau)$, а d-мерное фазовое пространство разделим на ячейки l^d. Вероятность попадания точки, принадлежащей аттрактору, в i-ю ячейку ($i = 1, 2, \ldots, M(l)$):

$$p_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}, \tag{5.23}$$

где N_i — число точек $\{x(t = j(\tau)\}$ в этой ячейке.

Для описания неоднородной статической структуры аттрактора введем бесконечное множество размерностей D_f, связанных с f-ми степенями p_i:

$$D_f = \lim_{l \to 0} \frac{1}{f-1} \frac{\ln\left(\sum_{i=0}^{M(l)} p_i^f\right)}{\ln l}; \quad f = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.24}$$

При $f \to 0$ из (5.24) получим

$$D_0 = -\lim_{l \to 0} \left(\ln \sum_{i=0}^{M(l)} 1\right) / \ln l = -\lim_{l \to 0} \frac{\ln M(l)}{\ln l}, \tag{5.25}$$

т. е. обычное определение (3.69) хаусдорфовой размерности аттрактора ($D = D_0$).

При $f \to 1$ из (5.24) следует

$$D_1 = -\lim_{l \to 0} \frac{S(l)}{\ln l}, \tag{5.26}$$

где

$$S(l) = -\sum_{i=0}^{M(l)} p_i \ln p_i. \tag{5.27}$$

$S(l)$ — приращение информации, получаемое, если известны все $\{p_i\}$ и становится известно, что траектория проходит через i-ю ячейку. Поэтому величину D_1 называют информационной размерностью; она показывает, как возрастает получаемая информация при $l \to 0$.

Для однородных аттракторов, когда все p_i равны, т. е. $p_i = 1/M(l)$, получим

$$S(l) = -\sum_{i=0}^{M(l)} \frac{1}{M(l)} \ln \frac{1}{M(l)} = \ln M(l), \tag{5.28}$$

т. е. информационная размерность равна размерности Хаусдорфа. Таким образом, разность D_0 и D_1 — мера неоднородности аттрактора.

Кроме того, поскольку величина $S(l)$ ограничена сверху значением $\ln M(l)$

$$S(l) \leqslant \ln M(l) \tag{5.29}$$

(см. приложение 6), получаем, что информационная размерность всегда меньше или равна хаусдорфовой

$$D_1 \leqslant D_0. \tag{5.30}$$

Это утверждение можно обобщить:

$$D_{f'} \leqslant D_f \quad \text{для} \quad f' > f, \tag{5.31}$$

где равенство справедливо только для однородного аттрактора.

В табл. 8 (Hentschel, Procaccia, 1983) приведены численные значения нескольких D_f для трех различных аттракторов. Отметим, что величина D_∞ может быть конечной, т. е. спектр размерностей может быть ограниченным.

Корреляционный интеграл. Численное определение размерностей D_f путем покрытия фазового пространства множеством кубов объема l^d и подсчета числа точек, попадающих в выбранную ячейку, чрезвычайно трудоемко и практически невозможно для аттракторов больших размерностей. Однако для частного случая

Таблица 8. Размерности различных аттракторов

Отображение	D_0	D_1	D_2	D_∞
Логистическое при $r = 4$	1	1	1	1
Логистическое при $r = r_\infty$	0,538	0,537	0,500	0,394
Хенона при $a = 1{,}4$; $b = 0{,}3$	1,26	—	1,21	—

$f = 2$ (5.24) корреляционную размерность

$$D_2 = \lim_{l \to 0} \frac{\ln \left(\sum_{i=0}^{M(l)} p_i^2 \right)}{\ln l} \tag{5.32}$$

можно очень просто определить из корреляционного интеграла

$$C(l) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \theta [l - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|], \tag{5.33}$$

который в свою очередь может быть оценен непосредственно для последовательностей точек. Величина D_2 связана с $C(l)$ следующим образом:

$\sum_{i=0}^{M(l)} p_i^2$ = вероятность того, что две точки на аттракторе лежат внутри ячейки l^d;

$\simeq$ вероятность того, что две точки аттрактора разделены расстоянием, меньшим l;

$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N_2}$ {число пар ij, для которых расстояние $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| > l$}

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{ij} \theta (l - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) =$$

$$= \text{корреляционный интеграл } C(l). \tag{5.34}$$

На рис. 65 показано, как определяется D_2 из $C(l)$ для отображения Хенона.

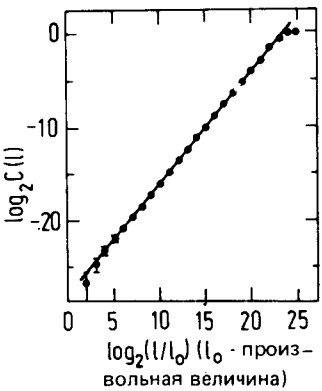


Рис. 65. Зависимость $\log_2 C(l)$ от $\log_2 l$ для отображения Хенона. Наклон дает значение $D_2 = 1{,}21$ (Grassberger, Procaccia, 1983a).

Восстановление аттрактора по временной последовательности. Одновременное измерение всех компонент вектора $\boldsymbol{x}(n)$ не всегда возможно (что очевидно, например, для бесконечномерной системы). Если определить размерность системы по числу начальных условий, то так называемое уравнение Маккея — Гласса (Mackey, Glass, 1977)

$$\dot{x} = \frac{ax(t-\tau)}{1+\{x(t-\tau)\}^{10}} - bx(t), \tag{5.35}$$

описывающее регенерацию кровяных телец, очевидно, представляет простой пример бесконечномерной системы, так как для его решения должны быть известны все величины $x(t)$ на интервале $t, t-\tau$ (как начальные условия). Как же следует поступать в этом или в более простом случае, когда есть аттрактор, вложенный в d-мерное пространство, а измеряется только одна компонента сигнала?

Такенс (Takens, 1981) показал, что можно *восстановить некоторые свойства аттрактора* в фазовом пространстве *по временной последовательности одной составляющей.* Вместо весьма громоздкого доказательства мы представим следующие упрощенные доводы. Рассмотрим, например, двумерный поток, порождаемый уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{F}(x), \quad \mathbf{x} = \{x, y\}. \tag{5.36}$$

Каждая точка $\{x(t+\tau), y(t+\tau)\}$ однозначно определяется точкой $\{x(t), y(t)\}$, и связь между ними взаимно однозначна, так как траектории не пересекаются (иначе они не могут однозначно определяться начальными условиями). Далее построим последовательность векторов

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \{x(t), x(t+\tau)\}, \\ \xi(t+\tau) &= \{x(t+\tau), x(t+2\tau)\}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Так как компоненты ξ связаны с $\{x(t), y(t)\}$ однозначным соотношением

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= x(t), \\ \xi_2(t) &= x(t+\tau) = \int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t' F_1\{x(t'), y(t')\} + x(t) \cong \\ &\cong \tau F_1(x(t), y(t)) + x(t), \end{aligned} \tag{5.38}$$

якобиан которого $|\tau(\partial F_1/\partial y)| \neq 0$, то, очевидно, информация, содержащаяся в последовательностях $\boldsymbol{x}(t_i)$ и $\xi(t_i)$ $(t_i = i\tau,$

например), одинакова, и обе последовательности приводят к одинаковым характеристическим размерностям. Простой пример, для которого $\boldsymbol{x}(t_i)$ и $\xi(t_i)$ действительно полностью эквивалентны, — это круг:

$$\mathbf{x}(t_i) = \{x(t_i), y(t_i)\} = \{\sin(2\pi t_i), \cos(2\pi t_i)\} =$$

$$= \left\{\sin(2\pi t_i), \sin\left[2\pi\left(t_i + \frac{1}{4}\right)\right]\right\} =$$

$$= \left\{x(t_i), x\left(t_i + \frac{1}{4}\right)\right\} = \xi(t_i). \tag{5.39}$$

Следует, однако, понимать, что приведенные доходы чисто эвристические и могут применяться к случаям появления странного аттрактора лишь не очень строго. В действительности Такенс (Takens, 1981) доказал следующее:

Если $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ порождает d-мерный поток, то

$$\xi(t) = \{x_j(t), x_j(t + \tau), \ldots, x_j(t + 2d\tau)\}, \tag{5.40}$$

где $x_j(t)$ — произвольная составляющая $\dot{\mathbf{x}}$, обеспечивает гладкое вложение для этого потока, и метрические свойства обоих пространств (d-мерного $\{x(t)\}$ и $(2d + 1)$-мерного $\{\xi(t)\}$) одинаковы, т. е. расстояния в $\{x(t)\}$ и $\{\xi(t)\}$ связаны между собой коэффициентом, который равномерно ограничен и отличен от нуля.

На рис. 66 приведена зависимость $\log_2 C(l)$ от $\log_2 l$ для аттрактора Лоренца. Нижняя кривая получена непосредственно по трехмерной последовательности $\{x(t_i), y(t_i), z(t_i)$, а верхняя — по вос-

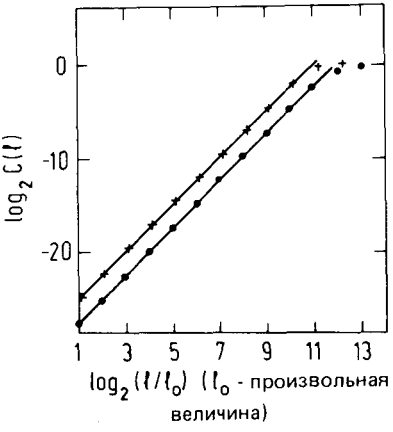


Рис. 66. Зависимость $\log_2 C(l)$ от $\log_2 l$ для модели Лоренца. Верхняя кривая вычислена по временной последовательности одной переменной $\xi(t_i = \{x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau)\}$. Нижняя кривая получена по трехмерной последовательности. Обе кривые имеют наклон $D_2 = 2{,}05$ (Grassberger, Procaccia, 1983a).

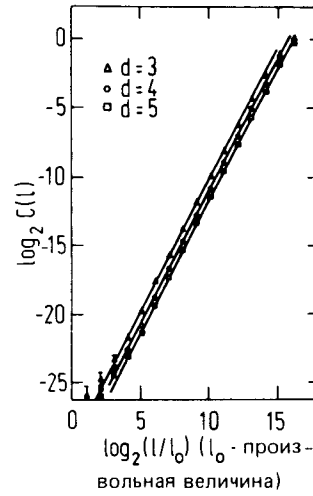


Рис. 67. Вычисление размерности по временной последовательности одной переменной уравнéния Маккея — Гласса при значениях параметров $\tau = 17$, $a = 0{,}2$, $b = 0{,}1$ дает $D_2 = 1{,}95 \pm 0{,}03$ (Hentschel, Procaccia, 1983).

становленной последовательности $\xi(t_i) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau)$. Наклоны обеих кривых одинаковы, т. е. корреляционная размерность, полученная обоими методами, одна и та же.

Размерность вложения. На рис. 67 показана зависимость корреляционного интеграла от l для системы Маккея — Гласса. Хотя эта система имеет бесконечную размерность, ее корреляционная размерность конечна и меньше 3. Поэтому для определения D_2 достаточно временной последовательности трехмерных векторов $\xi(t_i) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau)\}$. Размерность d в пространстве $\xi(t) = \{x(t_i), \ldots, x[t_i + (d - 1)\tau]\}$, начиная с которой D_2 перестает изменяться, есть минимальная размерность вложения аттрактора, т. е. наименьшая целая размерность пространства, содержащего весь аттрактор.

Разделение динамического хаоса и внешнего белого шума. Корреляционный интеграл можно также использовать как средство, позволяющее *различать динамические нерегулярности*, определяемые внутренними свойствами странного аттрактора, и *внешний белый шум*. Предположим, что странный аттрактор вложен в d-мерное пространство и в систему вносится белый шум. Каждая точка на аттракторе будет при этом окружена равномерно заполненным d-мерным облаком точек. Радиус этого облака определяется амплитудой шума l_0. При $l \gg l_0$ эти облака рассматриваются в уравнении (5.33) как точки, и наклон графика зависимости $\ln C(l)$ от $\ln l$ дает корреляционный показатель аттрактора. При $l \ll l_0$ большая часть точек попадает внутрь равномерно заполнен-

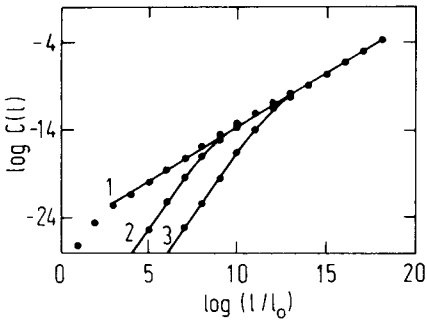


Рис. 68. Зависимость $\log_2 C(l)$ от $\log_2 l$ для отображения Хенона, вложенного в трехмерное пространство. Отображение без шума (кривая *1*) дает $D_2 = 1{,}25$. Кривая *2* — для отображения со случайным шумом амплитудой $5 \cdot 10^{-3}$. Кривая *3* — для отображения с шумом $5 \cdot 10^{-2}$. Кривые *2* и *3* имеют изломы на масштабах, соответствующих уровням шума, ниже которых наклоны приблизительно равны 3 (Ben-Mizrachi et al., 1983).

ных d-мерных ячеек и наклон становится равным d, как показано на рис. 68 для аттрактора Хенона с шумом.

Нижняя граница колмогоровской энтропии. Покажем теперь, что соответствующее *обобщение корреляционного интеграла позволяет найти оценку снизу колмогоровской энтропии* K.

Запишем еще раз уравнение (5.11), связывающее K с временной последовательностью для отображения

$$K = \lim_{l \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_1 \dots i_n} P_{i_1 \dots i_n} \ln P_{i_1 \dots i_n}. \tag{5.41}$$

По аналогии с D_f обобщим это выражение:

$$K_f = -\lim_{l \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{f-1} \ln \sum_{i_1 \dots i_n} P^f_{i_1 \dots i_n}. \tag{5.42}$$

Нетрудно видеть, что

$$K_1 = K \text{ и } K_{f'} \leqslant K_f \text{ при } f < f'. \tag{5.43}$$

Выделим особо $K_2 \leqslant K$, где

$$K_2 = -\lim_{l \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{i_1 \dots i_n} P^2_{i_1 \dots i_n}. \tag{5.44}$$

Далее обобщим также корреляционный интеграл (5.34):

$$C(l) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \{ \text{ число пар } ij, \text{ для которых } |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < l \} \approx$$

$$\approx \sum_i P_i^2 \tag{5.45}$$

Фотографии

Фотографии на вклейке относятся к гл. 3 и 5. Ссылки можно найти в списках литературы к этим главам на с. 221 и 225.

I. *Двухпериодическое течение в эксперименте Бенара.* На рис. 1 — 8 представлены интерференционные картины для ячейки Бенара в двухпериодическом режиме (т. е. спектр мощности содержит две несоизмеримые частоты, см. также разд. 1.1). Интервал времени между соседними изображениями — 10 с. Первый период составляет около 40 с; по истечении этого времени «пасть» в центре изображения повторяется (см. рис. 1 и 5), но более мелкие детали (например, в правых верхних углах рис. 1 и 5) различны, т. е. движение не является просто периодическим (из фильма P. Bergé, M. Dubois, CEN Sacley, Gif-sur-Yvette, France).

II. *Нелинейный электронный осциллятор* (см. также рис. 38). Фазовые портреты (зависимость напряжения от тока на нелинейном диоде) на экране осциллографа. При увеличении управляющего напряжения наблюдается переход через удвоение периода. Вид нелинейности диода, использованного в этом эксперименте, отличался от (3.114) (E. Suchla, из (Klinker et al., 1984)).

III. *Неустойчивость Тейлора: а* — образование конвекционных вихрей; *б* — вихри начинают колебаться; *в* — более сложные колебания; *г* — хаос (Pfister, 1984; см. также разд. 5.4).

IV. *Нарушение сердцебиения.* Разность потенциалов (черная линия) поперек мембраны одной клетки из агрегата клеток сердца эмбриона цыпленка. *а* — Синхронизация фаз стимулирующим импульсом; *б* — стохастическая динамика; интерполяционные сокращения. Период стимулирующих импульсов (показаны красным) изменяется от 240 мс (*а*) до 560 мс (*б*) (Glass et al., 1983).

V. *Хаотическая электропроводность в кристаллах НБН.* Дифракционная картина двойного лучепреломления в сегнетоэлектрике показывает границы областей, отражающие перенос заряда вблизи перехода к хаосу (см. также рис. 82). Для простоты темные линии настоящего изображения показаны красным цветом (Martin et al., 1984).

VI. *Спектр мощности кавитационного шума.* Амплитуда шума кодируется цветом; давление падающей волны линейно растет во времени. При увеличении давления наблюдается переход через субгармоники $f_0 \to f_0/2 \to f_0/4 \to \ldots \to$ к хаосу. Рисунок представляет собой цветной вариант рис. 39,*в* (разд. 3.5) (W. Meyer-Ilse, из (Lauterborn, Cramer, 1981)).

VII. *Сечение Кассини.* В кольце Сатурна (*а*) наблюдается главная щель (*б*) — такназываемое сечение Кассина (движение по этой орбите неустойчиво). См. также рис. 106 в разд. 6.3. (Рисунки NASA №№ P-23068 и P-23207, с разрешения Bildarchiv, Baader Planetarium.) На фото VIII—XV показаны фрактальные границы в комплексной области.

VIII. Алгоритм Ньютона для $f(z) = z^3 - 1 = 0$. Области притяжения трех корней $z^3 = 1$ окрашены в красный, зеленый и синий цвета ((Peitgen, Richter, 1984); см. также разд. 5.7).

IX. Множество Мандельброта (черный цвет) в комплексной плоскости ((Peitgen, Richter, 1984); см. также разд. 5.7).

X—XII. Увеличенное изображение областей A, D, E на фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

XIII. Увеличенное изображение «хвоста морского конька» на фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

XIV. «Глаз морского конька» с фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

XV. Деталь «хвоста» с фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

в виде

$$C_n(l) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \left\{ \text{число пар } ij, \text{ для которых} \right.$$

$$\left. \sqrt{\sum_{m=0}^{n-1} (\mathbf{x}_{i+m} - \mathbf{x}_{j+m})^2} < l \right\} \simeq \sum_{i_1 \ldots i_n} P^2_{i_1 \ldots i_n}. \tag{5.46}$$

Вместе с (5.44) это дает

$$K_2 = \lim_{l \to 0} \lim_{n \to \infty} \ln \left[\frac{C_n(l)}{C_{n+1}(l)} \right] \leqslant K. \tag{5.47}$$

Обобщенный корреляционный интеграл $C_n(l)$ также можно вычислять по измеренному сигналу, и $K_2 > 0$ означает достаточное условие существования хаоса. На рис. 69 показаны результаты вычисления $C_n(l)$ и K_2 для отображения Хенона при $a = 1{,}4$; $b = 0{,}3$.

Гипотеза Каплана — Йорки. Ранее мы разграничивали динамические свойства странного аттрактора, такие, как показатели Ляпунова, и статистические свойства, определяемые D_f, хотя эти величины в действительности связаны. Например, если в двумерном фазовом пространстве имеется поток с двумя отрицательными показателями Ляпунова, то, как известно, аттрактор стягивается в линию с $D_f = 1$ для всех f (рис. 70).

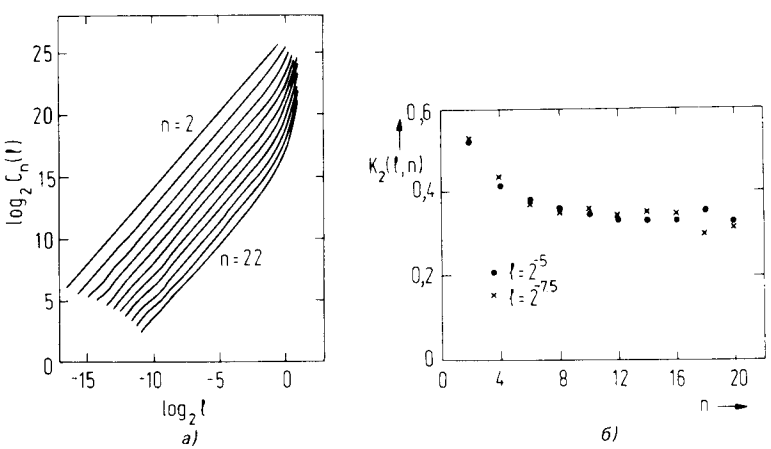


Рис. 69. *а* — Зависимость $\log_2 C_n(l)$ от $\log_2 l$ при различных значениях n, вычисленная по последовательности точек отображения Хенона ($N = 15\,000$); *б* — при $n \to \infty$ и $l \to 0$ функция $K_2(n, l)$, вычисленная по (5.47), стремится к величине $K_2 = 0{,}325 \pm 0{,}2$ (Grassberger, Procaccia, 1983).

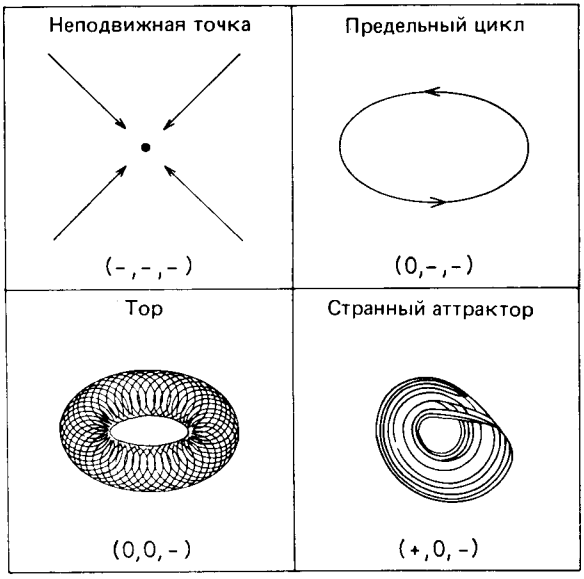


Рис. 70. Связь между размерностями простых аттракторов, вложенных в трехмерное фазовое пространство, и знаками трех ляпуновских показателей, приведенных в скобках (0 означает нулевое значение ляпуновского показателя) (Shaw, 1981).

Другой пример — аттрактор, порожденный преобразованием пекаря, не сохраняющим площадь (5.7а), (5.7б). Его хаусдорфова размерность (см. (5.10)) может быть выражена через показатели Ляпунова $\lambda_1 = \ln 2$ и $\lambda_2 = \ln a$:

$$D_B = 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|} . \tag{5.48}$$

Каплан и Йорки (Kaplan, Yorke, 1979) предложили следующую обобщенную формулу для любого странного аттрактора:

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} . \tag{5.49}$$

Здесь D_{KY} — хаусдорфова размерность по Каплану — Йорки, а показатели Ляпунова упорядочены ($\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_d$), так что j — наибольшее целое, для которого $\sum_{i=0}^{j} \lambda_i > 0$. Хотя эта формула

проверялась численно (Russel et al., 1980) и показано, что она справедлива для некоторых систем (табл. 9), однако, по-видимому, она точна лишь для однородных аттракторов, и определение границ ее применимости остается актуальной задачей для дальнейшего исследования.

Таблица 9. Проверка гипотезы Каплана — Йорки

Система	D (численный счет)	D_{KY}
Отображение Хенона		
$a = 1{,}2;\ b = 0{,}3$	$1{,}202 \pm 0{,}003$	$1{,}200 \pm 0{,}001$
$a = 1{,}4;\ b = 0{,}3$	$1{,}261 \pm 0{,}003$	$1{,}264 \pm 0{,}002$
Отображение Заславского — уравнения (1.12а), (1.12б) для $f(x) = \cos x$	$1{,}380 \pm 0{,}007$	$1{,}387 \pm 0{,}001$

5.4. Странные аттракторы и возникновение турбулентности

Сейчас мы рассмотрим один из самых удивительных и сложных вопросов — как связано возникновение гидродинамической турбулентности во времени (однако не будем рассматривать ее пространственные неоднородности) с появлением странного аттрактора.

Чтобы понять, что сделано в этой области, введем сначала понятие бифуркации Хопфа (Hopf, 1942).

Бифуркация Хопфа. Простой бифуркации Хопфа соответствует рождение предельного цикла из неподвижной точки. Например, рассмотрим следующие дифференциальные уравнения в полярных координатах:

$$\frac{dr}{dt} = -(\Gamma r + r^3), \quad \Gamma = a - a_c, \tag{5.50а}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega. \tag{5.50б}$$

Их решение

$$r^2(t) = \frac{\Gamma r_0^2 e^{-2\Gamma t}}{r_0^2(1 - e^{-2\Gamma t}) + \Gamma} \quad \text{и} \quad r_0 = r(t = 0), \tag{5.51а}$$

$$\theta(t) = \omega t \quad \text{и} \quad \theta(t = 0) = 0. \tag{5.51б}$$

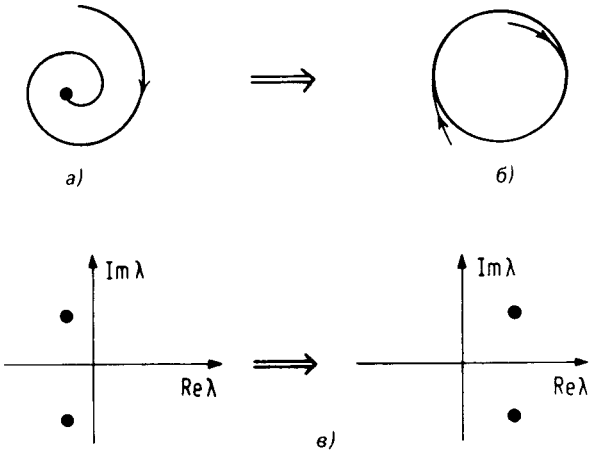


Рис. 71. Бифуркация Хопфа: от неподвижной точки (*а*) к предельному циклу (*б*); поведение собственных значений λ (*в*).

При $\Gamma \geqslant 0$ траектория приближается к началу координат (неподвижной точке), а при $\Gamma < 0$ она наматывается на предельный цикл радиуса $r_\infty = |(a - a_c)|^{1/2}$, как показано на рис. 71.

Если (5.50а), (5.50б) преобразовать в прямоугольные координаты

$$\frac{dx}{dt} = -\{\Gamma + (x^2 + y^2)\}x - y\omega, \tag{5.52а}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\{\Gamma + (x^2 + y^2)\}y + x\omega \tag{5.52б}$$

и линеаризовать вблизи начала координат, получим

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{f}, \tag{5.53}$$

где $\mathbf{f} = (\Delta x, \Delta y)$, A — матрица:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -\Gamma & -\omega \\ \omega & -\Gamma \end{pmatrix}, \tag{5.54}$$

с собственными значениями $\lambda_\pm = -\Gamma \pm i\omega$. Это означает, что при бифуркации Хопфа пара комплексно-сопряженных собственных значений пересекает мнимую ось, как показано на рис. 71, *в*.

Модель перехода к турбулентности по Ландау. Бифуркация Хопфа вводит в систему новую основную частоту. Еще в

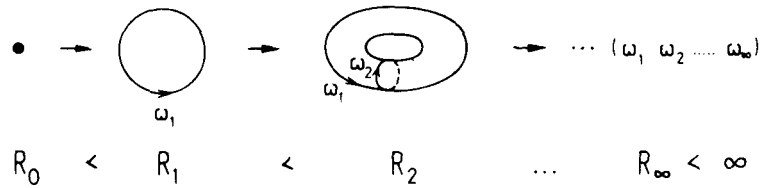


Рис. 72. Переход к хаосу по модели Ландау. При увеличении параметра R в результате бифуркаций Хопфа появляется все больше и больше основных (т. е. несоизмеримых) частот.

1944 г. Ландау предложил путь перехода к турбулентности (во времени), согласно которому хаотическое состояние достигается бесконечной последовательностью неустойчивостей Хопфа, как показано на рис. 72. Этот путь приводит к зависимости сигнала от времени, которая становится все более сложной с появлением все большего числа частот, но спектр мощности всегда остается дискретным и приближается к непрерывному пределу в результате бесконечной цепочки последовательных бифуркаций Хопфа.

МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО РЮЭЛЮ — ТАКЕНСУ — НЬЮХАУЗУ. Как видно из рис. 73, описанный тип перехода в виде бесконечной цепочки в эксперименте Бенара не наблюдается. После появления двух основных частот спектр мощности становится сплошным.

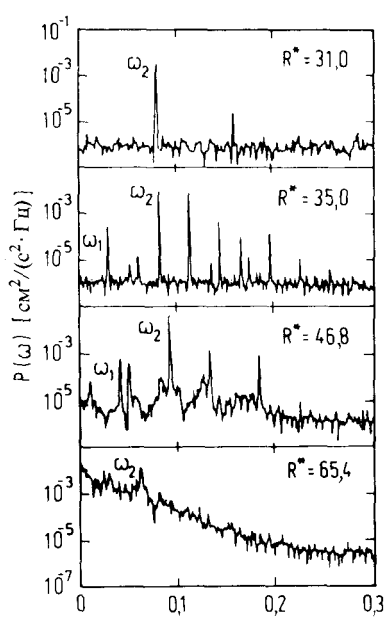


Рис. 73. Спектр мощности конвективного потока в эксперименте Бенара (Gollub, Swinney, 1978). При увеличении относительного числа Рэлея $R^* = R/R_c$ наблюдаются следующие состояния; *а* — периодическое движение с одной частотой и ее гармониками; *б* — квазипериодическое движение с двумя несоизмеримыми частотами и их линейными комбинациями; *в* — непериодическое хаотическое движение с несколькими узкими линиями в спектре; *г* — хаос.

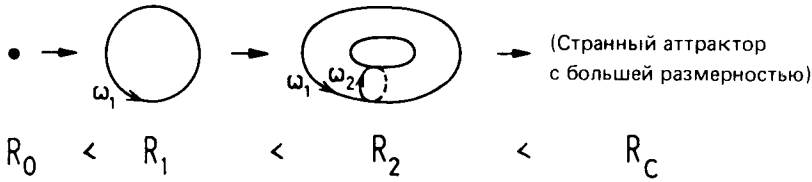


Рис. 74. Переход к хаосу по модели Рюэля — Такенса — Ньюхауза.

В действительности этот эксперимент был выполнен после того, как в 1971 г. Рюэль и Такенс предложили путь перехода к хаосу, значительно более короткий, чем предложенный Ландау (1944) (рис. 74). Они показали, что даже после двух бифуркаций Хопфа регулярное движение может стать сильно неустойчивым и перейти в хаотическое движение на странном аттракторе. При этом подразумевается, что хаотическое движение становится возможным только *после* двух бифуркаций Хопфа, когда траектория может выходить в дополнительные измерения, так как двухпериодическое движение соответствует траектории на торе (т. е. на двумерной трубке), на котором появление хаоса запрещается теоремой Пуанкаре — Бендикссона. Однако после двух бифуркаций Хопфа появление странного аттрактора не только возможно, но и практически неизбежно (Newhouse, Ruelle, Takens, 1978). Математическое доказательство существования странного аттрактора после двух бифуркаций слишком сложно, чтобы приводить его здесь. Вместо этого в следующем разделе мы обсудим такой переход к хаосу на примере простого кругового отображения, ренормгрупповое исследование которого дает количественные предсказания, часть которых уже проверена экспериментально. Но сначала опишем два эксперимента, в которых действительно наблюдается разрушение тора и переход к странному аттрактору.

Неустойчивость Бенара. Недавно в эксперименте Бенара экспериментально наблюдалось появление странного аттрактора (Dubois, Bergé, 1982). Измерялась последовательность значений температуры $T(t)$ и восстанавливалось двумерное сечение Пуанкаре путем построения $[\dot{T}(t), T(t)]$ через интервалы времени $t = n\tau$, где $\omega_0 = 2\pi/\tau$ определялась из независимых измерений скорости (это другой метод восстановления аттрактора по измерениям нескольких переменных, что обсуждалось в разд. 5.3). На рис. 75 показано, как сечение Пуанкаре, представляющее собой замкнутую петлю (что и следует ожидать для сечения тора), развивается в странный аттрактор согласно предсказанию (Newhouse, Ruelle, Takens, 1978).

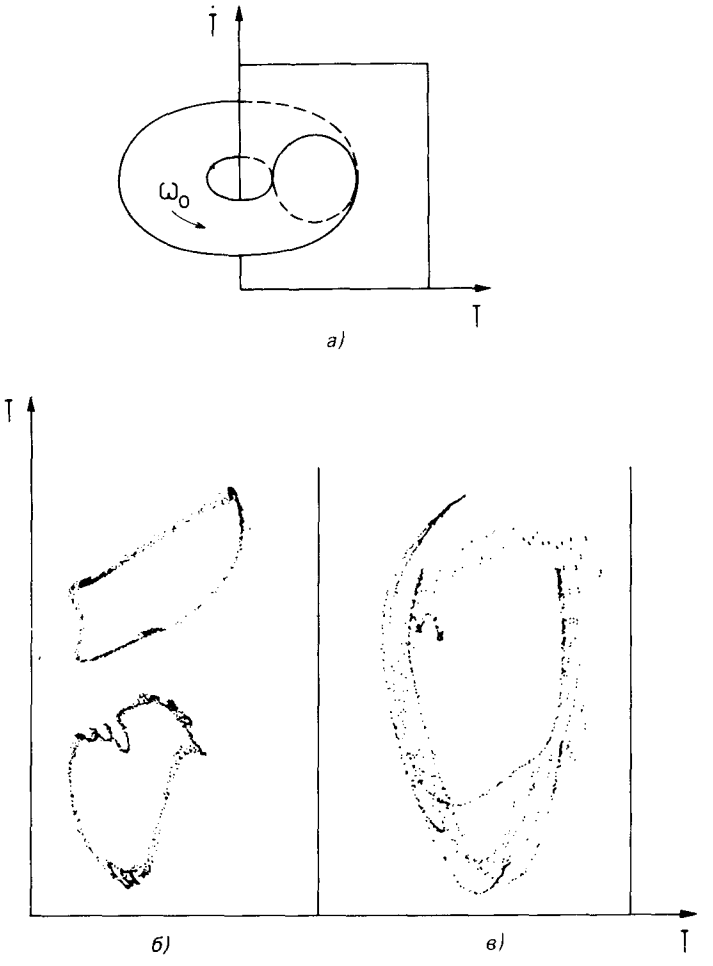


Рис. 75. Сечения Пуанкаре для эксперимента Бенара: *а* — схематическое изображение сечения тора; *б—г* эксперименты, показывающие переход от квазипериодического движения (*б*) к подструктурам, указывающим на разрушение тора (*в*) и затем к странному аттрактору (*г*) при увеличении числа Рэлея (Dubois, Bérge, Groquette, 1982).

Неустойчивость Тейлора. Неустойчивость Тейлора проявляется в слое жидкости, заключенной между внутренним цилиндром, вращающимся с угловой скоростью Ω, и неподвижным внешним цилиндром (рис. 76 и фото III на вклейке). При малых Ω угловой момент, сообщаемый внутреннему цилиндру, передается наружу благодаря вязкости (*а*). При угловой скорости выше критической Ω_c это состояние становится неустойчивым и момент передается коль-

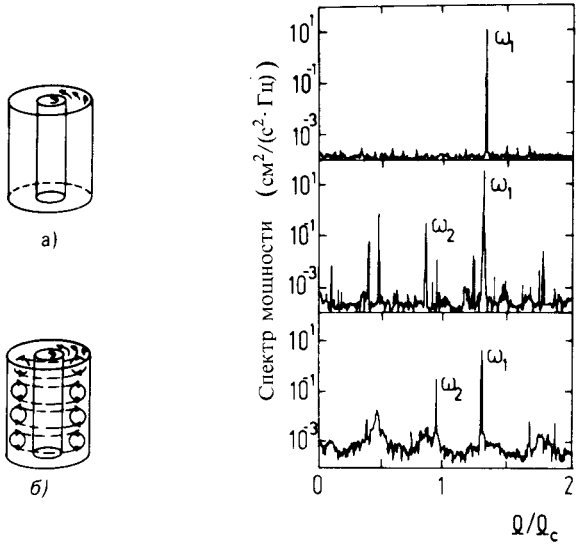


Рис. 76. Неустойчивость Тейлора и спектр мощности скорости (Swinney, Gollub, 1978).

цевыми конвективными вихрями (*б*). При еще больших Ω появляются периодические и многопериодические колебания этих вихрей, которые становятся хаотическими после двух бифуркаций Хопфа, т. е. это еще один пример перехода к хаосу по Рюэлю — Такенсу — Ньюхаузу.

На рис. 77 представлены результаты, полученные в эксперименте Тейлора путем восстановления фазового пространства по временной последовательности радиальной скорости $\{v(t_k), \ldots, v(t_k + m\tau)\}$ при $t_k = k\tau_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $(\tau_0 < \tau)$:

а) сечение Пуанкаре показывает разрушение тора аналогично рис. 75;

б) K-энтропия (полученная из (5.15)) и наибольший показатель Ляпунова λ (измеренный по разбеганию близких траекторий в пятимерном фазовом пространстве) становятся положительными при $\Omega > \Omega_c$. Это *экспериментально доказывает* существование странного аттрактора;

в) хаусдорфовы размерности D (полученная из (5.25)) и D_2 (из (5.32)) медленно растут с увеличением Ω/Ω_c. Это показывает, что при переходе к хаосу в системе существуют лишь несколько значащих степеней свободы даже при значениях Ω на 30% выше критической величины $\Omega^* \approx 12\Omega_c$.

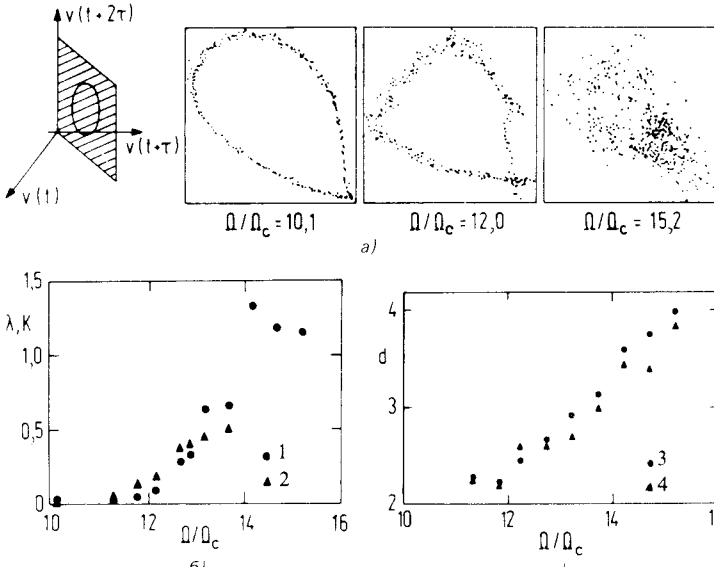


Рис. 77. Свойства странного аттрактора, наблюдаемого в эксперименте Тейлора: *а* — плоскость сечения Пуанкаре и разрушение тора при увеличении Ω; *б* — зависимость от Ω/Ω_c K-энтропии (*1*) и наибольшего ляпуновского показателя (*2*); *в* — зависимость от Ω/Ω_c хаусдорфовой размерности D (*3*) и корреляционной размерности D_2 (*4*) (Brandstäter et al., 1983).

5.5. Универсальные свойства перехода от квазипериодичности к хаосу

Некоторые аспекты модели Рюэля — Такенса — Ньюхауза можно также исследовать в рамках ренормгруппового подхода. Два коллектива исследователей (Feigenbaum, Kadanoff, Shenker, 1982; Rand et al., 1982) по существу независимо рассмотрели вопрос о том, как квазипериодическое движение с двумя несоизмеримыми частотами на торе (рис. 78) становится «складчатым» при добавлении нелинейного возмущения.

Рис. 78 показывает, что движение на невозмущенном единичном торе можно описать в полярных координатах простым отображением Пуанкаре:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega \bmod 1, \tag{5.55}$$

где $\Omega = \omega_1/\omega_2$ — число вращения, показывающее сдвиг угла θ за одну итерацию.

Обратимся теперь к рис. 77, *а*, на котором показано, как разрушение тора проявляется на отображении Пуанкаре. Идея, изложен-

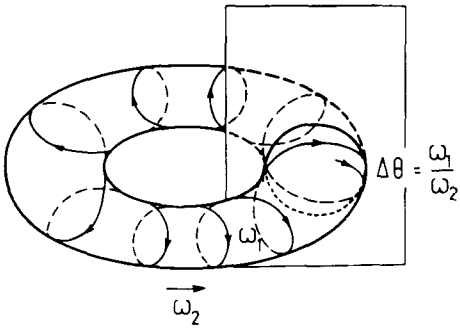


Рис. 78. Движение на единичном торе. Для рациональных значений $\omega_1/\omega_2 = p/q$ траектория замыкается после q циклов (состояние синхронизации мод). При иррациональном отношении ω_1/ω_2 движение квазипериодическое, траектория нигде не замыкается и покрывает весь тор.

ная в вышеперечисленных работах, состояла в описании этого перехода только по движению углов θ_n.

Действительно, можно показать, что для сильно диссипативных систем радиальное движение траектории при возникновении хаоса несущественно и может быть устранено в результате ренормализации. Рассмотрим, например, отображение

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n) + br_n, \tag{5.56а}$$

$$r_{n+1} = br_n - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n), \tag{5.56б}$$

где θ_n также берутся по модулю 1, K представляет по аналогии с числом Рейнольдса степень нелинейности $\sin(2\pi\theta_n)$ (которая должна вноситься для достижения хаоса), а Ω — число вращения (см. (5.55)). Тогда для $b \to 0$ разность r_n между радиусом R_n в момент времени n и R_∞ стремится к нулю при $n \to \infty$. Постоянная b — якобиан отображения (5.56), характеризующий степень диссипации (см. (5.6б)). Поэтому в дальнейшем мы будем изучать разрушение тора в странный аттрактор с помощью отображения окружности

$$\theta_{n+1} = f(\theta) \equiv \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n). \tag{5.57}$$

Далее будет показано, что (по аналогии с логистическим отображением для перехода через удвоение периода) форма $f(\theta)$ почти несущественна; гораздо важнее следующие общие свойства $f(\theta)$:

— $f(\theta + 1) = 1 + f(\theta)$;

— при $|K| < 1$ $f(\theta)$ (и обратная ей функция) существует и дифференцируема (т. е. $f(\theta)$ — диффеоморфизм);
— при $K = 1$ $f^{-1}(\theta)$ становится недифференцируемой, а при $|K| > 1$ не существует однозначной обратной функции для $f(\theta)$.

Чтобы наблюдать переход от квазипериодичности к хаосу в (5.56), необходимо варьировать два параметра. Например, если увеличивать нелинейность (K), то необходимо так сбалансировать Ω, чтобы сохранить число вращения w равным заданному иррациональному числу (это гарантирует квазипериодичность). Как же это сделать для числа вращений, которое, по-прежнему представляя средний сдвиг θ за итерацию, для обобщенных отображений должно быть определено как предел:

$$w = \lim_{n \to \infty} \frac{f^n(\theta_0) - \theta_0}{n}, \tag{5.58}$$

(где модуль в f необходимо опустить)? Можно использовать метод, предложенный в сходной ситуации с гамильтоновыми системами (Greene, 1979). Для фиксированного K вычисляется величина $\Omega_{p,q}(K)$, которая а) принадлежит q-циклу отображения $f(\theta)$, б) содержит элемент $\theta = 0$ и в) обеспечивает сдвиг на p. Таким образом, $\Omega_{p/q}$, генерирующая рациональное число вращения $w = p/q$, определяется выражением

$$f^q_{K,\Omega}(0) = \mathrm{p}, \tag{5.59}$$

где индексы K и Ω показывают, что левая часть остается функцией обеих переменных.

Далее, иррациональное число вращения приближенно оценивается последовательностью усеченных непрерывных дробей, т. е. рациональных чисел. Рассмотрим, например, число вращения $w^* = (\sqrt{5} - 1)/2$, представимое непрерывной дробью простого вида

$$w^* = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}. \tag{5.60}$$

Так называемые числа Фиббоначчи F_n, определенные как

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; \quad F_0 = 0; F_1 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.61}$$

для которых

$$w_n = \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_n + F_{n-1}} = \frac{1}{1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}} = \tag{5.62a}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}_{n \text{ раз}}, \tag{5.62б}$$

представляют последовательность рациональных w_n, сходящихся к

$$w^* = \lim_{n \to \infty} w_n. \tag{5.63}$$

При $n \to \infty$ уравнения (5.62) дают

$$w^* = \frac{1}{1 + w^*} \to w^{*2} + w^* - 1 = 0 \to w^* = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{5.64}$$

Это число называют *золотым средним*, оно определяется в геометрии при золотом сечении отрезка, т. е. при таком его делении, когда отношение большей части l ко всей длине отрезка L было равно отношению меньшей части к большей, т. е. $w^* = l/L = (L - l)/l$. В дальнейшем мы ограничимся этим особым числом вращения $w^* = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,6180339\ldots$ — «наихудшим» иррациональным числом в том смысле, что оно хуже всего может быть приближенно рациональными числами (см. (5.60), (5.62)). Хотя любое заданное иррациональное число имеет единственное представление непрерывными дробями, схемы ренормализации пока удалось применить только к так называемым квадратичным иррациональным числам — решениям квадратного уравнения с целыми коэффициентами, для которых представление непрерывными дробями периодично.

Для отображения окружности (5.56) с использованием вышеописанной процедуры были получены следующие численные результаты (Shenker, 1982):

а) Величины параметров $\Omega_n(K)$, порождающих, согласно (5.59), числа вращения w_n в (5.62), стремятся к некоторой постоянной по закону геометрической прогрессии, т. е.

$$\Omega_n(K) = \Omega_\infty(K) - \text{const} \cdot \delta^{-n}, \tag{5.65а}$$

где

$$\delta = \begin{cases} -2,6180339\ldots = -w^{*-2} & \text{при } |K| < 1, \\ -2,83362\ldots & \text{при } |K| = 1 \end{cases} \tag{5.65б}$$

— универсальная константа (зависящая, однако, от w^*).

б) Расстояния d_n от $\theta = 0$ до ближайшего элемента цикла, при-

надлежащего w_n,

$$d_n = f_{\Omega_n}^{F_n}(0) - F_{n-1}, \tag{5.66а}$$

таковы, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha, \tag{5.66б}$$

где α — еще одна универсальная константа:

$$\alpha = \begin{cases} -1{,}618 \ldots = -w^{*-1} & \text{при } |K| < 1, \\ -1{,}28857 \ldots & \text{при } |K| = 1 \end{cases} \tag{5.66в}$$

(заметим, что $f_{\Omega_n}^{F_{n+1}}(0) - F_n = 0$).

в) На рис. 79 показана периодическая функция

$$u(t_j) = \theta^n(t_j) - t_j; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.67}$$

описывающая зависимость от времени элементов цикла

$$\theta^n(t_j) \equiv \theta(j \cdot w_n) \equiv f^j(\theta) \tag{5.68}$$

для времен $t_j \equiv j \cdot w_n$ в пределе при $n \to \infty$. (Здесь $f^j(\theta)$ берется при $\Omega_n(K)$ и $u(t_j)$ — периодическая функция, так как свойство $f(\theta + 1) = f(\theta) + 1$ приводит к $\theta(t_j + 1) = \theta(t_j + 1)$). При $|K| < 1$ и $\Omega_n \to \Omega_\infty$ переменная $u(t)$ гладко меняется по t, но ее поведение становится «неровным» при $|K| = 1$, что свидетельствует о переходе от квазипериодичности к хаосу.

г) На рис. 79 представлен спектр мощности

$$A(\omega) = \frac{1}{F_{n+1}} \sum_{j=0}^{F_{n+1}-1} u(t_j) e^{2\pi i \omega t_j} \tag{5.69}$$

при $\omega = 0, \ldots, F_{n+1}$ при $n \to \infty$. Он демонстрирует самоподобие (структура между любыми соседними пиками одна и та же). Главные пики появляются на частотах, равных степеням чисел Фиббоначчи, показывая, что после F_n итераций движение остается почти периодическим.

Эти результаты (особенно а) и б)) оказываются очень похожими на обнаруженные для сценария удвоения периода, поэтому естественно попытаться осмыслить этот переход в рамках ренормгруппового подхода, удобного для установления универсальных свойств (отметим, что α и δ в уравнениях (5.65)—(5.66) отличаются от констант Фейгенбаума).

Чтобы получить соответствующие функциональные уравнения,

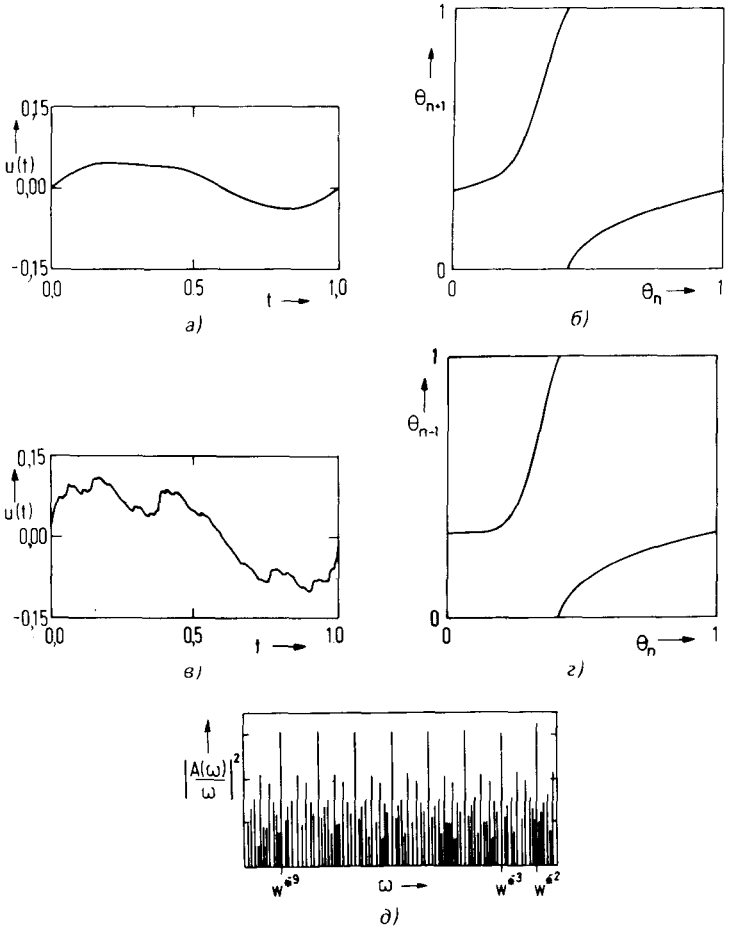


Рис. 79. *а*) $u(t)$ при $K = 0{,}5$ (Shenker, 1982); *б* — отображение (5.57) при $K = 0{,}5$ и $w = w^*$ есть диффеоморфизм (Jensen et al., 1983a); *в*) $u(t)$ становится негладкой при $K = 1$ (Shenker, 1982); *г*) отображение (5.57) при $K = 1$ и $w = w^*$ становится необратимым, $f'(0) = 0$ (Jensen et al., 1983a); *д*) спектр мощности при $K = 1$ (Rand et al., 1983). Отметим, что при $n \to \infty$ $u(t_j)$ действительно сходится к функции на $0 \leqslant t \leqslant 1$, так как периодичность u подразумевает, что ее аргументы берутся по модулю 1, а $jw^* \bmod 1$ при $j = 0, 1, 2, \ldots$ покрывает интервал $[0, 1]$.

определим функции (см. (5.66б))

$$f_n(x) \equiv \alpha^n f^n(\alpha^{-n}x), \tag{5.70}$$

где

$$f^n(x) \equiv f^{F_{n+1}}(x) - F_n, \tag{5.71}$$

так что из (5.66б)

$$\lim_{n \to \infty} \alpha^n d_n \sim \lim_{n \to \infty} \alpha^n f^n(0) = \lim_{n \to \infty} f_n(0) = \text{const}. \tag{5.72}$$

Как в случае удвоения периода (см. (3.15)), это уравнение показывает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к универсальной функции

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f^*(x), \tag{5.73}$$

где вновь $f^*(x)$ — решение уравнения для неподвижной точки, которое мы сейчас построим. Более точно, мы рассматриваем f_n при $\Omega = \Omega_\infty$, что соответствует $i \to \infty$ в уравнении (3.21).

Функцию f^{n+1} можно получить из f^n и f^{n-1} по правилу, определенному рекуррентным соотношением для чисел Фиббоначчи (5.61) и свойством $f(x + 1) = f(x) + 1$:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f^{F_{n+2}}(x) - F_{n+1} = \\ &= F^{F_{n+1}}[f^{F_n}(x)] - (F_{n+1} + F_n) = \\ &= f^n[f^{n-1}(x)]. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Так как итерации коммутативны, получим

$$f^{n+1}(x) = f^{n-1}[f^n(x)]. \tag{5.75}$$

В соответствии с (5.74)—(5.75) есть два пути вычисления $f_{n+1}(x)$:

$$f_{n+1}(x) = \alpha f_n[\alpha f_{n-1}(\alpha^{-2}x)] \tag{5.76а}$$

и

$$f_{n+1}(x) = \alpha^2 f_{n-1}[\alpha^{-1} f_n(\alpha^{-1}x)]. \tag{5.76б}$$

Оба уравнения становятся эквивалентными при начальных условиях

$$f_0[\alpha^{-1} f_1(\alpha x)] = \alpha^{-1} f_1[\alpha f_0(x)]. \tag{5.77}$$

В пределе при $n \to \infty$ в (5.76а) получим для функции неподвижной точки

$$f^*(x) = \alpha f^*[\alpha f^*(\alpha^{-2}x)]. \tag{5.78}$$

Можно сразу же проверить, что функция

$$\bar{f}^*(x) = -1 + x \tag{5.79}$$

есть точное решение этого уравнения. Подставляя $\bar{f}^*(x)$ в (5.78), получим

$$-1 + x = -\alpha^2 - \alpha - x \to \alpha = -w^{*-1}. \tag{5.80}$$

Это значение α (равное второму решению уравнения (5.64)) согласуется с численным результатом при $|K| < 1$ (см. (5.66в)).

Следует ожидать, что при $|K| = 1$ уравнение (5.78) имеет другое решение, так как при этом в модельном уравнении (5.57) отсутствует линейный член:

$$f(\theta) = \Omega + \theta^3 \cdot \text{const} \qquad \text{при} \quad \theta \to 0;\ |K| = 1. \tag{5.81}$$

Если при $|K| = 1$ мы предположим, что

$$f^*(x) = 1 + ax^3 + bx^6 \ldots, \tag{5.82}$$

то найденное значение α согласуется с уравнением (5.66в), что доказывает универсальность α при $|K| \leqslant 1$.

По аналогии с переходом через удвоение периода введем величины δ — собственные значения линеаризованного уравнения неподвижной точки. Эти уравнения несколько более сложны, чем для перехода Фейгенбаума, так как рекуррентные соотношения имеют *второй* порядок, т. е. для получения f_{n+1} необходимы f_n и f_{n-1} (подробности см., например, в статье Feigenbaum, Kadanoff, Shenker, 1982).

Другое большое различие между переходом от квазипериодичности к хаосу и другими ранее рассмотренными переходами состоит в том, что для наблюдения универсальных свойств необходимо зафиксировать два параметра (вместо одного). Это, а также тот факт, что разность между тривиальными и нетривиальными значениями α и δ мала (см. уравнения (5.65)—(5.66)), затрудняют экспериментальное подтверждение предсказанных универсальных свойств перехода. Переход от квазипериодичности к хаосу при числе вращения, равном золотому среднему $w^* = (\sqrt{5} - 1)/2$, наблюдался тем не менее в спектре мощности для эксперимента Бенара (Fein, Heutmaker, Gollub, 1984). Квазипериодическая конвекция с желаемым отношением частот поддерживалась путем термической модуляции, а зависимость от времени градиента температуры измерялась по отклонению светового пучка, проходящего через ячейку (рис. 80, *а*).

Чтобы понять наблюдаемый частотный спектр, вспомним более детально спектр для отображения окружности (рис. 79, *д*). Спектр делится на полосы B_0, B_1, ... главными пиками, соответствующими последовательно возрастающим степеням w^*. Каждая полоса содержит много меньших пиков, и эта внутренняя структура одинакова для каждой полосы в пределе $\omega \to 0$. Каждая частота пика ω в спектре определяется парой целых чисел (i, k) в том смысле, что $\omega = |iw^* - k|$, т. е. (1,1) соответствует $\omega = |w^* - 1| = w^{*2}$

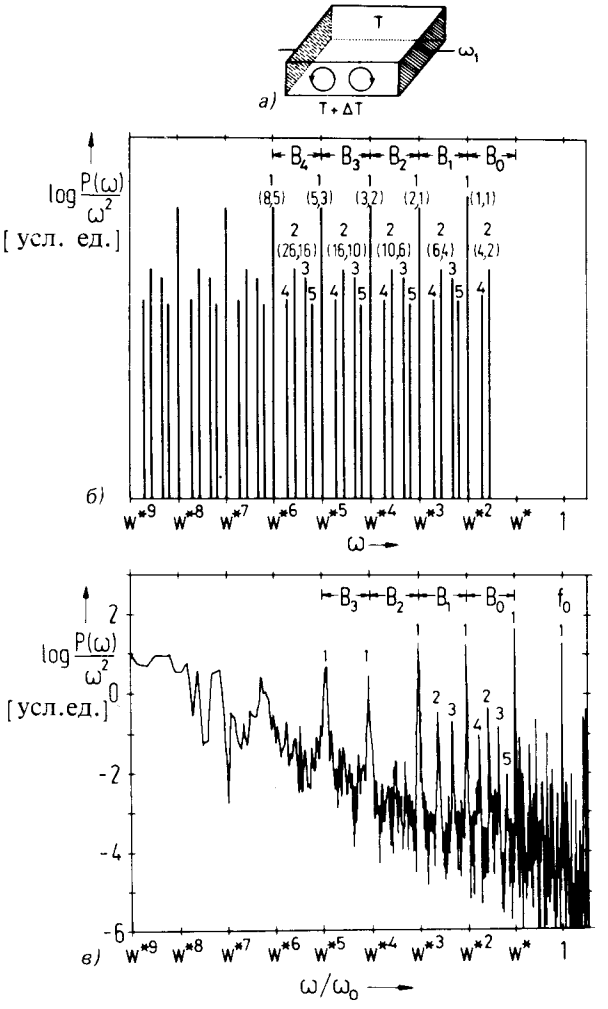


Рис. 80. *а* — Ячейка Бенара с дополнительными источниками тепла в боковых стенках, модулирующими конвективный поток выбранной частотой ω_1; *б* — спектр мощности отображения окружности (нормированный на ω^2) при числе вращения $w = w^*$ и $K = 1$. Главные пики — степени w^*, а линии в каждой полосе одинаковы в низкочастотном пределе (Rand et al., 1982); *в* — измеренный спектр мощности (нормированный на ω^2) при $R = 57{,}8R_c$ (соответствует K несколько выше 1). Отношение частоты модуляции ω_1 к собственной частоте ω_0 ($\omega_1/\omega_0 = 0{,}61880$) отличается от w^* на 0,12% (Fein et al., 1984).

согласно (5.64). Пики распадаются на различные последовательности с одинаковыми весами. Для первой последовательности, обозначенной 1 на рис. 80, *б*, (i, k) — соседние члены ряда Фиббоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...). Пики, помеченные, например, цифрами 2, 3, 4, 5, определяются последовательностями Фиббоначчи (2, 2, 4, 6, ...), (1, 3, 4, 7, ...), (3, 3, 6, 9, ...), (1, 4, 5, 9, ...) и т. д.

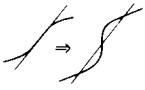
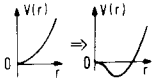
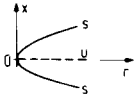
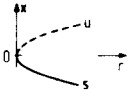
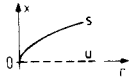
На рис. 80, *в* показан экспериментально наблюдаемый спектр мощности. Частота выражается в единицах ω_0, где ω_0 — частота в бенаровской ячейке без модуляции. Крутой подъем в спектре наблюдается из-за аппаратурного фона, усиленного фактором ω^{-2}. Над пиками указана последовательность Фиббоначчи, частью которой они являются. Главные пики на ω^{*2} и ω^{*3} имеют почти равные мощности (в пределах 20%), тогда как пики на ω^{*4} и ω^{*5} значительно слабее. Мощности двух пиков последовательности 2 равны с точностью 15%, как и двух пиков последовательности 3. Отношение мощностей пиков $(S_1/S_2):(S_2/S_3)$ (с учетом фактора ω^{-2}) равно 7,4 ± 2, тогда как величина, выведенная из теоретического спектра (рис. 80, *в*), — около 7.

Хотя пики, принадлежащие полосам высших порядков, пропущены в данных (это может быть проявлением недостаточной близости к критическому числу Рэлея, соответствующему $K = 1$), *эксперимент дает количественное доказательство универсальности скейлинга в переходе от квазипериодической к хаотической конвекции при отношении частот, близком к золотому среднему*. Обнаружено также, что такое малое изменение числа вращения, как 0,2%, приводит к синхронизации фаз и качественным изменениям в спектре.

5.6. Пути перехода к хаосу

В табл. 10 объединены три различных пути перехода к хаосу, которые мы до сих пор обсуждали. Однако эту таблицу можно считать лишь первым приближением к истинному разнообразию сценариев перехода (вспомним лишь, что мы уже обсудили три типа перемежаемости). Хотя представляется естественным сосредоточиться на общих чертах, было бы преждевременным делать радикальные обобщения о переходах к хаосу. Следует подчеркнуть, что диапазон наблюдаемого динамического поведения довольно велик. С одной стороны, это объясняется тем, что гидродинамический эксперимент (неустойчивости Бенара и Тейлора) сильно зависит от *отношения геометрических масштабов* (т. е. соотношения размеров ячейки в эксперименте Бенара и отношения зазора между цилиндрами к высоте цилиндра в эксперименте Тейлора), так что для

Таблица 10. Перечень основных путей перехода к хаосу

По Фейгенбауму	По Манневилю — Помо	По Рюэлю — Такенсу — Ньюхаузу
Бифуркация удвоения	Касательная бифуркация	Бифуркация Хопфа
		
Бифуркационные диаграммы (s — устойч., u — неустойч.)		
		
	Основные явления	
Бесконечный каскад удвоений периода с универсальным скейлингом	Переход к хаосу через перемежаемость. Длительность ламинарной фазы $(r - r_c)^{-1/2}$	После трех бифуркаций «возможно» появление странного аттрактора
	Экспериментальные наблюдения	
Эксперимент Бенара Эксперимент Тейлора Нелинейный осциллятор с возбуждением Химические реакции Неустойчивость в оптике	Эксперимент Бенара Контакт Джозефсона Химические реакции Лазеры	Эксперимент Бенара Эксперимент Тейлора Нелинейные проводники

данного набора управляющих параметров *может быть больше одного устойчивого состояния.* С другой стороны, при наличии *нескольких управляющих параметров* возможны новые типы переходов (см. например, рис. 81 и 82).

Рассмотрим три результата наблюдений, не описанные в предыдущих разделах.

Возможность существования трехчастотных квазипериодических орбит. Если поток в фазовом пространстве некоторой системы имеет три несоизмеримые частоты, произвольно малые изменения превращают его из квазипериодического в хаотический (Newhouse, Ruelle, Takens, 1978). Из этого можно было бы попросту заключить, что трехчастотный поток невероятен, так как может быть разрушен малыми возмущениями. Но, как было показано численно (Grebogi, Ott, Yorke, 1983), *добавление гладких нелинейных возмущений не обязательно разрушает трехчастотную квазипериодичность.* (В доказательстве Ньюхауза и др. малые возму-

щения, необходимые для возникновения хаотических аттракторов, имеют малые первую и вторую производные, но не обязательно имеют малые третью и высшие производные, как ожидается для физических приложений.)

Вычисления (Grebogi et al., 1983) можно разюмировать следующим образом. Согласно разд. 5.4, отображение Пуанкаре, связанное с потоком, имеющим две несоизмеримые частоты и возмущаемым $\varepsilon f(0)$, имеет вид

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + \varepsilon f(\theta_n), \tag{5.83}$$

где $f(\theta)$ — периодическая функция θ, θ_n берутся по модулю 1. Аналогично поток с тремя несоизмеримыми частотами соответствует отображению

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_1 + \varepsilon P_1(\theta_n, \varphi_n); \tag{5.84а}$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \omega_2 + \varepsilon P_2(\theta_n, \varphi_n), \tag{5.84б}$$

где θ_n и φ_n также берутся по модулю 1, $P_{1,2}$ — периодические по θ_n и φ_n функции. Параметры ω_1 и ω_2 несоизмеримы друг с другом и с единицей, т. е. не существует целых p, r и q, для которых $p\omega_1 + q\omega_2 + r = 0$. Выражая $P_{1,2}$ в виде суммы членов ряда Фурье

$$A_{r,s} \sin[2\pi(r\theta + s\dot{\varphi} + B_{r,s})], \tag{5.85}$$

и оставляя (произвольно) только члены $(r, s) = (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, -1)$, вычислим показатели Ляпунова λ_1, λ_2 для отображения (5.84) при случайных значениях ω_1, ω_2, $A_{r,s}$, $B_{r,s}$ (Gregobi et al, 1983). Результаты вычислений сведены в табл. 11, показывающую, что для типичного выбора фиксированных $P_{1,2}$ мера (ω_1, ω_2), дающая хаос, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Трехчастотная квазипериодичность возможна только при $\varepsilon < \varepsilon_c$, когда отображение обратимо. Данные этой таблицы вычислены при 256 случайных значениях

Таблица 11. Наблюдаемые частоты для различных типов аттракторов

Тип аттрактора	Показатели Ляпунова	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{3}{8}$, (%)	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{3}{4}$, (%)	$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{9}{8}$, (%)
Трехчастотный квазипериодический	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	82	44	0
Двухчастотный квазипериодический	$\lambda_1 = 0\ \lambda_2 < 0$	16	38	33
Периодический	$\lambda_1 < 0\ \lambda_2 < 0$	2	11	31
Хаотический	$\lambda_1 > 0$	0	7	36

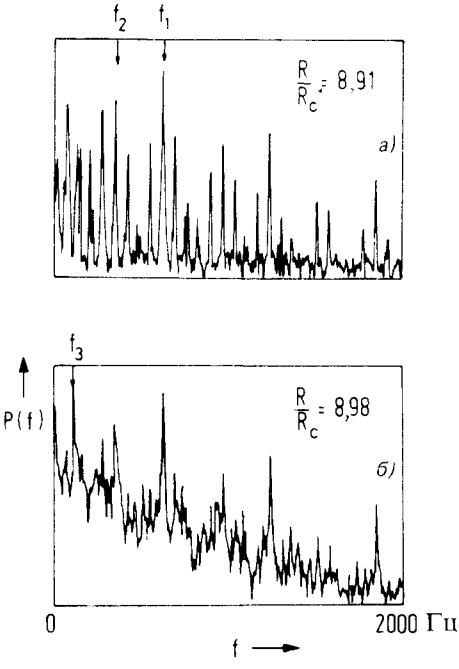


Рис. 81. Зависимость логарифма спектра мощности (локальной температуры) в эксперименте Бенара с ртутью в магнитном поле: *а* — квазипериодическая область с двумя несоизмеримыми частотами f_1 и f_2; *б* — трехчастотная периодичность, т. е. одновременно с самопроизвольным экспоненциально спадающим шумом в спектре присутствуют f_1, f_2 и f_3 (Libchaber et al., 1983).

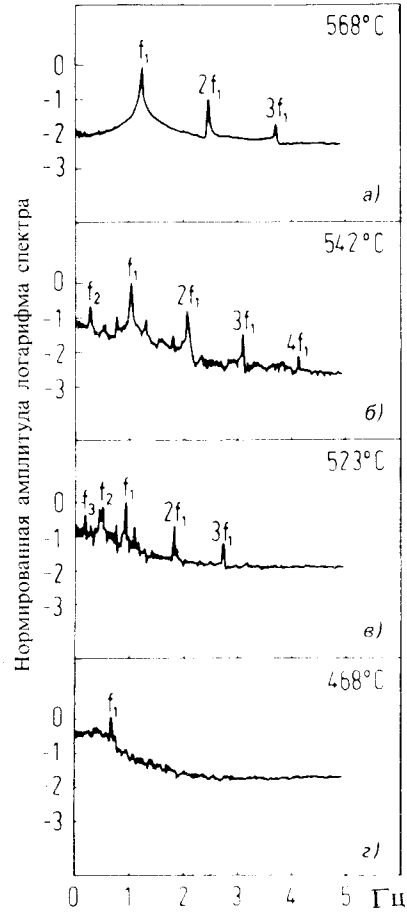


Рис. 82. Спектр мощности напряжения поперек кристалла НБН с постоянным током. При понижении температуры наблюдается переход «одна — две — три основные частоты — хаос» (Martin, Leber, Martienssen, 1984).

(ω_1, ω_2). Показатели Ляпунова определялись с точностью до порядка 10^{-4} (Grebogi et al., 1983a).

Переход от квазипериодичности к хаосу, при котором трехчастотная квазипериодичность еще сохраняется (т. е. распад этого состояния в странный аттрактор неполон), наблюдался в эксперименте Бенара с ртутью в магнитном поле (Libchaber, Fauve, Laroche,

1983, рис. 81) и в эксперименте с сегнетоэлектриком — кристаллом НБН (ниобат бария-натрия) (Martin, Leber, Martienssen, 1984, рис. 82).

В эксперименте Бенара горизонтальное поле служит вторым управляющим параметром и эффективно увеличивает вязкость электропроводной жидкости.

Во втором случае кристалл $Ba_2NaNb_5O_{15}$ помещен в печь, в которой поддерживается постоянный поток увлажненного кислорода (проводимость частично обеспечивается кислородными вакансиями). Вдоль c-оси образца прикладывается стабилизированный постоянный ток и регистрируется напряжение поперек кристалла и интерференционная картина двойного лучепреломления. С ростом напряжения на катоде возникают «домены» и постепенно расходятся по кристаллу (см. фото V на вклейке). Так как здесь *три* управляющих параметра (температура, плотность тока и поток кислорода), кристалл НБН, имеющий нелинейную вольт-амперную характеристику, представляет собой интересную систему для экспериментального исследования хаоса.

Синхронизация частот. Из эксперимента известно, что переход от квазипериодичности к хаосу может прерываться синхронизацией частот (рис. 83). Переход от состояния синхронизации мод к хаосу остается предметом активных экспериментальных и теоретических исследований; существуют, по-видимому, несколько возможных типов перехода: синхронизация — хаос, синхронизация — перемежаемость — хаос и т. д. (Rand et al., 1983; Dubois et al., 1982).

Исследование отображения окружности показывает, что синхронизация частот проявляется в больших областях пространства параметров. Состояние синхронизации соответствует рациональным значениям $w = p/q$ чисел вращения w отображения окружности (5.56)

$$\Omega_{n+1} = f_{\Omega,K}(\theta_n) \equiv \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n). \tag{5.86}$$

Рис. 83. Синхронизация частот в эксперименте Бенара (Gollub, Benson, 1979).

Общий q-цикл $\theta_1^* \ldots \theta_q^*$ при $w = p/q$ — решение уравнения

$$f^q_{\Omega,K}(\theta_i^*) = p + \theta_i^*, \tag{5.87}$$

и по аналогии с (3.10) цикл устойчив при

$$\left|\prod_i^q f'_{\Omega,K}(\theta_i)\right| = \left|\prod_i^q [1 - \cos(2\pi\theta_i^*)]\right| < 1. \tag{5.88}$$

Уравнения (5.86)—(5.88) дают $\Omega(p/q, K)$ для данного K. Отсюда сразу находим, например, что $\Omega(0/1, K) = K/2\pi$. На рис. 84, *а* показана общая структура пространства параметров. Так как существуют большие области, где w принимает рациональные значения, то вероятно, что состояния синхронизации частот могли бы наблюдаться экспериментально. Заметим, что уравнения (5.86)—(5.88) являются более общими, чем (5.59), так как снимается ограничение, что q-цикл должен содержать нулевой элемент, и при фиксированном $0 < K < 1$ с каждым значением $w = p/q$ связан интервал $\Delta\Omega(p/q, K)$ величины Ω. На рис. 84, *б* показано, что при $K = 1$ $\Delta\Omega$ образуют полную *самоподобную «чертову лестницу»* (лестница полна, если $\sum_{p,q}\Delta\Omega(p/q, K = 1) = 1$).

Кризисы. Кризисы — это столкновения хаотического аттрактора с независимой неустойчивой неподвижной точкой или периодической траекторией. В работе (Grebogi, Ott, Yorke, 1983b) впервые отмечено, что такие столкновения приводят к *внезапным* изменениям хаотического аттрактора. Простым примером служит окно периода 3 логистического отображения (см. рис. 43), где касательная бифуркация порождает три устойчивые и три неустойчивые неподвижные точки. Рис. 85 показывает, что неустойчивые непод-

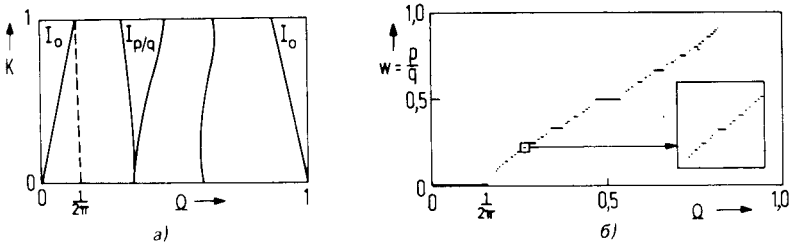
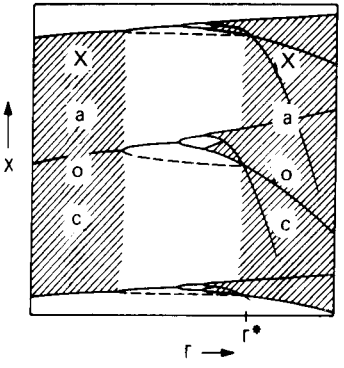


Рис. 84. *а* — Схема общей структуры пространства параметров для отображения окружности. В областях $I_{p/q}$ наблюдается синхронизация мод с числом мод $w = p/q$; непрерывные кривые соответствуют иррациональным значениям w (Rand et al., 1983); *б* — полная «чертова лестница» для критического отображения окружности ($K = 1$). Показаны интервалы устойчивости с $\Delta\Omega > 0{,}0015$ (Jensen et al., 1983b).



Фрагмент бифуркационной диаграммы в области касательной бифуркации периода 3. Пунктирными линиями обозначена неустойчивая орбита периода 3, появляющаяся при касательной бифуркации; при r^* наблюдается кризис (Grebogi et al., 1983b).

вижные точки, попадая в хаотические области, немедленно выталкивают траекторию из субполосы, так что области между полосами также хаотически заполнены. Сходные кризисы имеют место для двух- и трехмерных отображений и трехмерных потоков. При достижении разрыва обнаруживается переходный хаос, т. е. траектории, кажущиеся хаотическими, экспоненциально быстро стремятся к периодическим. Скорость сходимости является степенной функцией расстояния (в пространстве параметра) от разрыва. Можно предположить (Grebogi et al., 1983b), что «почти все» внезапные изменения в хаотических аттракторах происходят из-за кризисов.

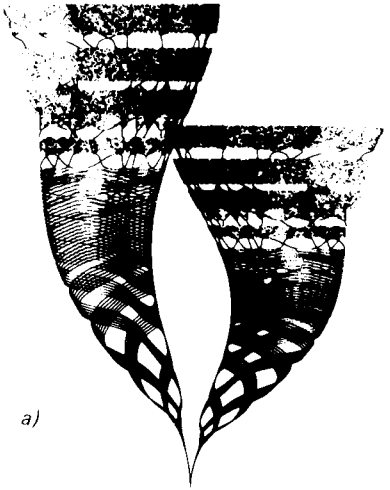
5.7. Изображения странных аттракторов и фрактальных границ

В конце своей статьи о странных аттракторах в "The Mathematical Intelligencer" (Ruelle, 1980) Д. Рюэль пишет: «Я не говорю уже об эстетической привлекательности странных аттракторов. Эти системы кривых, эти облака точек иногда напоминают фейерверки галактик, а иногда странные таинственные заросли. Это область для исследования, в которой будут открыты новые гармонии». На рис. 86 показаны несколько примеров странных аттракторов, свидетельствующих в пользу этого утверждения.

Мы увидим, далее, что *даже границы областей притяжения* простых рациональных отображений комплексной плоскости в себя *могут иметь очень сложную структуру*. Изображения этих объектов в цвете показывают удивительное сходство с некоторыми самоподобными рисунками М. С. Эшера.

Начнем с исследования областей притяжения неподвижных точек $z^* = (1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3})$ отображения

$$z_{n+1} = z_n - (z_n^3 - 1)/(3z_n^2) \tag{5.89}$$



а)

б)

в)

Рис. 86 *а*, *б* — Оба рисунка набраны из разных частей странных аттракторов, возникающих при решении дискретного аналога уравнения $\dot{y} = y(1 - y)$ и уравнения маятника (Prüfer, 1984; Peitgen, Richter, 1984); *в* — сечение Пуанкаре ($x_n = x(t = nT)$) траекторий осциллятора Дюффинга с возбуждением $\ddot{x} + \gamma x + ax + bx^3 = A + B\cos(2\pi t/T)$ в хаотическом режиме (Kawakami, 1984).

в комплексной плоскости. Уравнение (5.89) — это алгоритм Ньютона для решения уравнения $f(z) = z^3 - 1 = 0$ $(0 = f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \to z_1 = z_0 - f(z_0)/f'(z_0)$ и т. д.) Можно было бы предположить, что различные области притяжения для корней z^* на единичной окружности будут разделены прямыми линиями. Но если решать уравнение (5.89) на компьютере и окрашивать начальные точки, приводящие к 1, $e^{2\pi i/3}$, $e^{4\pi i/3}$, в красный, зеленый и синий цвета соответственно (и в черный, если сходимости нет), то оказывается, что граница областей притяжения состоит из сильно переплетенных самоподобных структур (см. рис. 87 и фото VIII на вклейке). Эта фрактальная граница является решением нетривиальной задачи о раскраске плоскости тремя цветами так, что каждая граничная точка окрашенной области (например, красной) служит также граничной для других областей (зеленой, голубой).

Такие границы областей притяжения рационального отображения принято называть *множествами Жюлиа* (Julia, 1918); более точное определение см., например, (Brolin, 1965). «Обычно» множества Жюлиа фрактальны (для $f(z) = z^2$ множество Жюлиа —

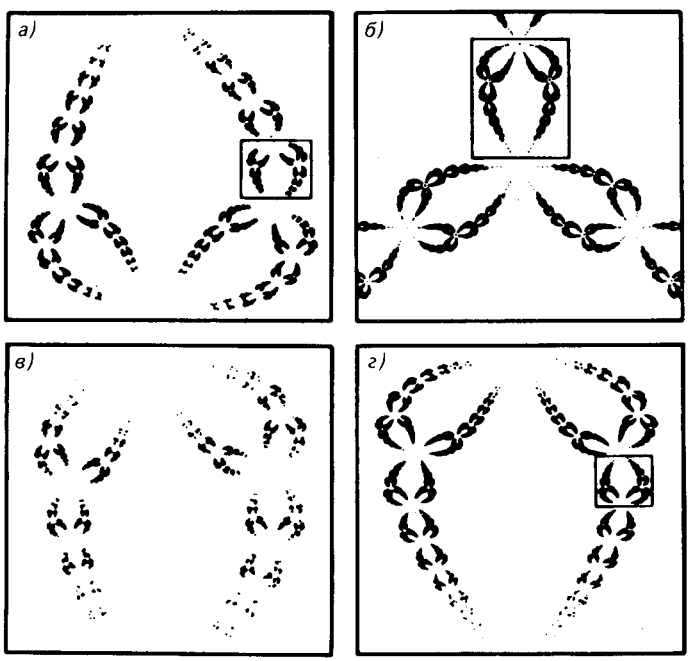


Рис. 87. Самоподобие множества Жюлиа для уравнения (5.89) (см. также фото VIII на вклейке, Peitgen, Richter, 1984).

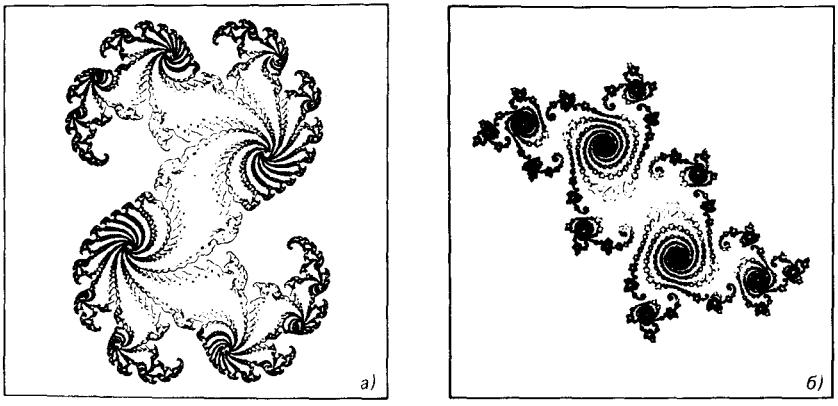


Рис. 88. Два характерных множества Жюлиа для $f_c(z)$ в уравнении (5.90). *а*) при $c = 0{,}32 + 0{,}043i$; *б*) при $c = -0{,}194 + 0{,}6557i$ (Peitgen, Richter, 1984).

единичная окружность) и движение точки на этих множествах хаотично.

Рассмотрим отображение

$$z_{n+1} = f_c(z_n) \equiv z_n^2 + c \tag{5.90}$$

в комплексной плоскости для комплексных значений параметра c (уравнение (5.90) — логистическое отображение $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ в новых переменных $x = 1/2 - z/r$; $c = (2r - r^4)/4$).

Граница области притяжения $z^* = \infty$ образует множество Жюлиа J_c для $f_c(x)$, зависящее от c:

$$J_c = \text{граница}\,\{z \mid \lim_{n \to \infty} f_c^n(z) \to \infty\}. \tag{5.91}$$

На рис. 88 показаны несколько примеров этих множеств. Существует важная теорема (Julia, 1918; Fatou, 1919), утверждающая, что множество J_c связно тогда и только тогда, когда $\lim_{n \to \infty} f_c^n(0) \not\to \infty$. Так как этот предел зависит только от c, рассмотрим множество M *значений параметра* c в комплексной плоскости, для которого J_c связно, т. е.

$$M = \{c \mid J_c \text{ связно}\} = \{c \mid \lim_{n \to \infty} f_c^n(0) \not\to \infty\}. \tag{5.92}$$

M называется множеством Мандельброта в честь исследователя, который впервые (Mandelbrot, 1980) опубликовал изображение (рис. 89). Видно, что M также имеет фрактальную структуру (но не является множеством Жюлиа). Дальнейшее расширение этого ис-

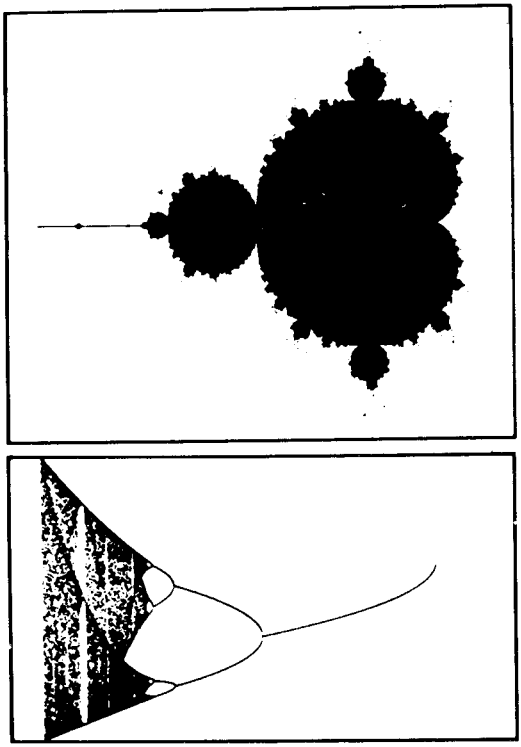


Рис. 89. Соответствие между структурой «множества Мандельброта» в плоскости параметра c и структурой бифуркаций для (преобразованного) логистического отображения $x_{n+1} = x_n^2 + c$ вдоль действительной оси c (Peitgen, Richter, 1984).

следования — «если c не принадлежит M, то $\lim_{n \to \infty} f_c^n(0) \to \infty$» (Peitgen, Richter, 1984) — позволило ввести «линии уровня» следующим образом: начальная точка окрашивается в соответствии с числом итераций, необходимых, чтобы точка покинула круг заданного радиуса R. Показано (Douady, Hubbard, 1982), что линии равного цвета можно интерпретировать как эквипотенциальные, если множество M рассматривать как заряженный проводник. На фото VIII—XV (на вклейке) представлены прекрасные результаты этой работы, возвращающие нас к замечанию Рюэля, приведенному в начале этого раздела.

6

Регулярное и нерегулярное движение в консервативных системах

До сих пор рассматривались только диссипативные системы, для которых фазовый объем со временем уменьшается. С их помощью описывают множество физических явлений — от турбулентности до процессов в электрических цепях. Другой широкий класс физических систем, где хаотическое движение было обнаружено (Poincaré, 1892) задолго до открытия странного аттрактора в диссипативных системах (Lorenz, 1963), — это консервативные системы, к которым относятся все динамические системы классической механики[1].

На эту тему имеются прекрасные обзорные работы (Berry, 1978; Hellemann, 1980), а также книга (Lichtenberg, Liebermann, 1982), поэтому наше рассмотрение консервативных систем будет кратким (по сравнению с пятью главами о диссипативных системах).

В дальнейшем будут рассмотрены либо консервативные системы, описываемые гамильтоновыми уравнениями движения

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \tag{6.1}$$

для которых фазовый объем сохраняется вследствие теоремы Лиувилля

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \operatorname{div}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}}) = \sum_i \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0, \tag{6.2}$$

либо дискретные отображения — для них сохранение объема в некотором смысле также имеет место.

Из сохранения фазового объема немедленно следует, что в фазовом пространстве консервативных систем (в отличие от диссипативных) нет притягивающих областей, т. е. нет ни притягивающих

---

[1] Под консервативными системами автор понимает не только системы, для которых имеет место сохранение механической энергии, но также и неавтономные системы (включая отображения), для которых имеет место сохранение фазового объема. — *Прим. перев.*

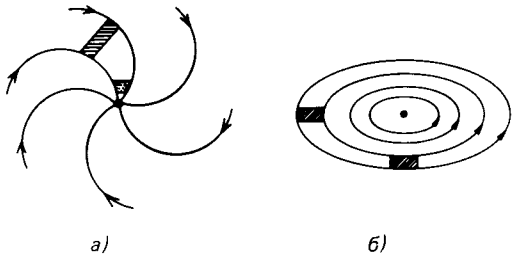


Рис. 90. *а* — В диссипативных системах траектории притягиваются к неподвижной точке и объем сжимается; *б* — в консервативных системах точки вращаются вокруг неподвижной эллиптической точки и объем сохраняется.

неподвижных точек, ни притягивающих предельных циклов, ни странных аттракторов (рис. 90 и приложение 7). Тем не менее в консервативных системах хаос с положительной K-энтропией также возможен, т. е. в фазовом пространстве «странные», или «хаотические», области имеются, но они могут тесно переплетаться с областями регулярного поведения и притягивающими не являются.

Приведем теперь несколько аргументов в пользу изучения консервативных систем, а затем кратко изложим содержание данной главы.

Не останавливаясь на изучении отдельных траекторий, перейдем к исследованию качественных свойств движения в целом, т. е. будем рассматривать семейства траекторий (рис. 91). При этом сконцентрируем внимание на поведении консервативных систем на больших временах. Этот аспект нас интересует в связи с реальными физическими задачами.

а) Нам хотелось бы, например, получить ответ на вопросы: устойчивы ли галактики и системы типа Солнечной при взаимных возмущениях тел, входящих в их состав? Будут ли они со временем коллапсировать или разлетятся? Здесь характерный масштаб упомянутых больших времен очень велик — порядка возраста Вселенной. Гораздо короче он в накопительных кольцах, используемых в физике высоких энергий, а также в экспериментах по термоядерному синтезу (где частицы делают очень большое количество оборотов за доли секунды). В таких системах возникновения нерегулярного или хаотического движения нужно избежать любой ценой; при этом также необходимо знать характер их поведения на больших временах.

б) Другой вопрос возникает в связи с проблемой обоснования статистической механики, где не делалось попыток проследить де-

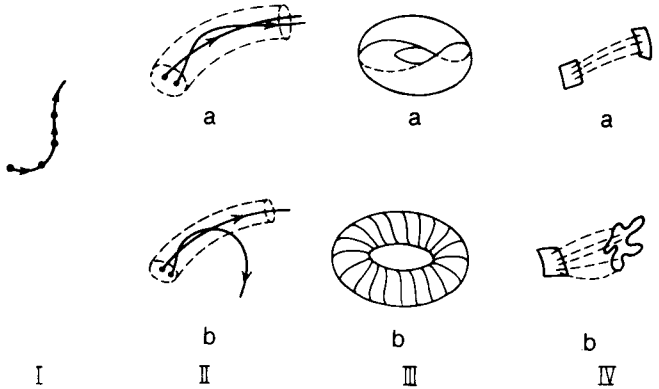


Рис. 91. Переход от локальных свойств движения к глобальным в классической механике. I. Пошаговое интегрирование уравнений движения. II. *а* — Локальная устойчивость; *б* — локальная неустойчивость. III. Топологические свойства траекторий: *а* — периодическое движение на торе; *б* — движение на торе с иррациональным соотношением частот. IV. Потоки в фазовом пространстве: *а* — без перемешивания; *б* — с перемешиванием (Balescu, 1975).

тально за движением каждого из многочисленных объектов сложной системы и вместо этого принимается эргодическая гипотеза. Согласно ей, с течением времени система перемещается по всей разрешенной области фазового пространства (по поверхности постоянной энергии) и в конце концов покрывает эту область равномерно. В этом случае усреднение по времени можно заменить усреднением по фазовому пространству. Но справедлива ли эргодическая гипотеза? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно знать, как ведут себя гамильтоновы системы с N степенями свободы, когда N стремится к бесконечности (при этом отношение N к объему должно быть постоянным).

В первой половине данной главы рассмотрим классическую механику простых гамильтоновых систем с небольшим числом степеней свободы и покажем, что в большинстве случаев их движение в фазовом пространстве имеет чрезвычайно сложный характер и не является ни регулярным, ни простым эргодическим. Это означает, что регулярное движение, рассматриваемое в большинстве учебников по классической механике, фактически является исключительным и скорее необычным.

Далее мы обсудим некоторые простые модельные системы, которые, несмотря на малое число степеней свободы, являются эргодическими. В конце главы приведем классификацию хаотических движений в консервативных системах.

6.1. Сосуществование областей с регулярным и нерегулярным движением

Сначала остановим наше внимание на интегрируемых системах, а затем рассмотрим, к чему приведет добавка малого неинтегрируемого возмущения.

Интегрируемые системы. Гамильтониан $H_0'(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ называется интегрируемым, если существует такое каноническое преобразование $S(\mathbf{q}, \mathbf{J})$ к новым переменным θ, $\mathbf{J}$

$$\mathbf{q}, \mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{q}} \leftrightarrow \mathbf{J}, \theta = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}}, \tag{6.3}$$

при переходе к которым гамильтониан будет зависеть только от новых переменных действий $\mathbf{J}$. При этом функция $S(\mathbf{q}, \mathbf{J})$ является решением *уравнения Гамильтона — Якоби* (см., например, (Арнольд, 1974)):

$$H_0' \left[\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{q}}\right] = H_0(\mathbf{J}), \tag{6.4}$$

а уравнения движения, имеющие в переменных действие — угол $\mathbf{J}$, θ вид

$$\dot{\mathbf{J}} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} = 0, \tag{6.5}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} = \omega(\mathbf{J}), \tag{6.6}$$

могут быть легко проинтегрированы:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{const}, \\ \theta &= \omega t + \delta. \end{aligned} \tag{6.7}$$

В качестве наиболее простого примера интегрируемых систем рассмотрим гармонический осциллятор с гамильтонианом

$$H_0' = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \tag{6.8}$$

Переходя к уравнению Гамильтона — Якоби (6.4):

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \omega^2 q^2\right] = H_0(J) \tag{6.9}$$

$$\rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2}, \tag{6.10}$$

можно найти действие J:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial q} \mathrm{d}q = \frac{H_0(J)}{\omega} \tag{6.11}$$

$$\rightarrow H_0(J) = J\omega. \tag{6.12}$$

Здесь интегрирование ведется по периоду изменения переменной q. Уравнения движения в переменных действие — угол в этом случае имеют вид

$$\dot{J} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} = 0 \rightarrow J = \mathrm{const}, \tag{6.13а}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H_0}{\partial J} = \omega \rightarrow \theta = \omega t + \delta. \tag{6.13б}$$

Возвращаясь к переменным p и q, получаем

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial J} = \frac{\partial}{\partial J} \int \mathrm{d}q \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2} = \arccos\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2J}}\right) \tag{6.14}$$

$$\rightarrow q = \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos\theta, \tag{6.15}$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2J\omega} \sin\theta. \tag{6.16}$$

Траектория такого движения в фазовом пространстве имеет форму эллипса, который с помощью соответствующего преобразования к полярным координатам $\sqrt{J}$ и θ переходит в окружность. Сравнение выражений (6.5)—(6.7) и (6.13) показывает, что в переменных действие — угол уравнения движения любой интегрируемой системы с n степенями свободы имеют практически такой же вид, как для n несвязанных гармонических осцилляторов. Единственное отличие состоит в том, что в общем случае интегрируемой системы частоты ω_i являются функциями переменных действия J_i, в то время как для гармонических осцилляторов ω_i от J_i не зависит. Существование n интегралов движения $(J_1, \ldots, J_n)$ означает, что в $2n$-мерном фазовом пространстве $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ интегрируемой системы траектория принадлежит n-мерному множеству, которое по аналогии с окружностью для одного гармонического осциллятора ($n = 1$) и с тором для двух осцилляторов ($n = 2$) имеет топологию n-мерного тора.

В дальнейшем будем рассматривать только случай с $n = 2$, хотя большинство результатов можно легко обобщить на произволь-

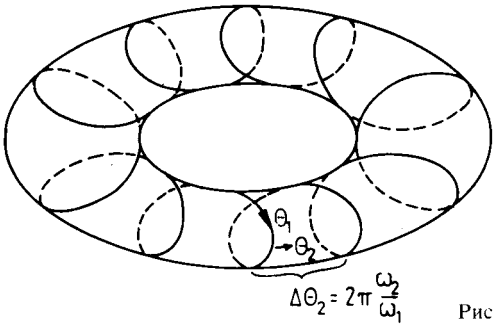


Рис. 92. Тор в фазовом пространстве.

ное ($n > 2$) число степеней свободы. На рис. 92 показано движение на торе интегрируемой системы с двумя степенями свободы (четырехмерное фазовое пространство). В случае рационального отношения частот

$$n\Delta\theta_2 = 2\pi \cdot m, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n} = \text{рациональные числа;}$$

$$m, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.17}$$

все траектории оказываются замкнутыми. Если же отношение частот равно иррациональному числу, траектория никогда не замкнется, но с течением времени будет сколь угодно близко подходить к любой точке двумерного множества. Другими словами, движение на торе будет эргодическим. (Заметим, что размерность тора равна 2, тогда как размерность множества, определяемого соотношением $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E = \text{const}$, равна 3.)

Теория возмущений и малые знаменатели. Добавим теперь к невозмущенному гамильтониану H_0 возмущение εH_1 и посмотрим, как это повлияет на движение, которое при $\varepsilon = 0$ было регулярным. Для этого представим H_1 в переменных действие — угол $\mathbf{J} = (J_1, J_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ невозмущенной системы

$$H(\mathbf{J}, \theta) = H_0(\mathbf{J}) + \varepsilon H_1(\mathbf{J}, \theta) \tag{6.18}$$

и попытаемся решить уравнение Гамильтона — Якоби

$$H\left[\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta\right] = H_{00}(\mathbf{J}'). \tag{6.19}$$

Записывая производящую функцию S в виде

$$S(\mathbf{J}', \theta) = \theta \cdot \mathbf{J}' + \varepsilon S_1(\mathbf{J}', \theta) \tag{6.20}$$

и разлагая H в ряд по степеням ε, получаем

$$H_0(\mathbf{J}') + \varepsilon \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{J}} \cdot \frac{\partial S_1(\mathbf{J}', \theta)}{\partial \theta} + \varepsilon H_1(\mathbf{J}', \theta) + O(\varepsilon^2) = H_{00}(\mathbf{J}'). \tag{6.21}$$

Функция S_1 определяется из условия независимости левой части (6.21) от θ:

$$\omega \cdot \frac{\partial S_1(\mathbf{J}', \theta)}{\partial \theta} = -H_1(\mathbf{J}', \theta), \tag{6.22}$$

где через $\omega = \partial H_0/\partial \mathbf{J}'$ обозначены частоты невозмущенной системы. Уравнение (6.21) может быть решено следующим образом. Запишем фурье-разложения для функций S_1 и H_1, пользуясь их периодичностью по переменным θ:

$$S_1(\mathbf{J}', \theta) = \sum_{\mathbf{K} \neq 0} S_{1,\mathbf{K}}(\mathbf{J}') e^{i\mathbf{K}\cdot\theta}, \tag{6.23а}$$

$$H_1(\mathbf{J}', \theta) = \sum_{\mathbf{K} \neq 0} H_{1,\mathbf{K}}(\mathbf{J}') e^{i\mathbf{K}\cdot\theta}, \tag{6.23б}$$

где $\mathbf{K} = 2\pi(n_1, n_2)$; n_1, n_2 — целые числа.

Подставив оба выражения в (6.22) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках ряда Фурье, в итоге получим

$$S(\mathbf{J}', \theta) = \theta \cdot \mathbf{J}' + i\varepsilon \sum_{\mathbf{K} \neq 0} \frac{H_{1,\mathbf{K}}(\mathbf{J}')}{\mathbf{K}\cdot\omega(\mathbf{J}')} e^{i\mathbf{K}\cdot\theta}. \tag{6.24}$$

Из уравнения (6.24) следует, что S обращается в бесконечность при условии

$$\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{n_2}{n_1} = \text{рациональные числа}. \tag{6.25}$$

Расходимость ряда в (6.24) приводит нас к хорошо известной проблеме малых знаменателей. Видно, что при рациональном отношении частот систему нельзя проинтегрировать с помощью теории возмущений. Причина этого — сильные резонансы в системе. Если интегрирование системы и возможно, то лишь при иррациональном отношении частот и сходимости рядов теории возмущения по параметру ε.

Далее рассмотрим два вопроса:

1) что происходит, когда возмущение εH_1 действует на инте-

грируемую систему с отношением частот ω_1/ω_2, близким к *иррациональному* значению?

2) что происходит под действием возмущения εH_1 с торами системы, в которой отношение ω_1/ω_2 *рациональное*?

Устойчивые торы и теорема КАМ. На первый вопрос можно ответить с помощью знаменитой теоремы Колмогорова (1954), Арнольда (1963) и Мозера (Moser, 1967), известной под названием теоремы КАМ, которую мы приведем здесь для случая $n = 2$ без доказательства. (В общем случае доказательство изложено в цитируемой выше литературе.) Согласно этой теореме, при якобиане частот, не равном нулю:

$$\left|\frac{\partial \omega_i}{\partial J_j}\right| \neq 0 \tag{6.26}$$

(здесь мы опускаем другие технические условия), торы, для которых отношение частот ω_1/ω_2 является достаточно хорошим иррациональным числом, т. е.

$$\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{m}{s}\right| > \frac{k(\varepsilon)}{s^{2,5}} \qquad (k(\varepsilon \to 0) \to 0), \tag{6.27}$$

где m и s — взаимно простые числа, под действием малого ($\varepsilon \ll 1$) возмущения εH_1 остаются устойчивыми.

Важно отметить, что множество значений частот, удовлетворяющих условию (6.27), для которых движение регулярно даже при наличии возмущения, имеет ненулевую меру. Это следует из того, что полная длина L всех интервалов, для которых условие (6.27) на отрезке $0 \leqslant \omega_1/\omega_2 \leqslant 1$ *не выполняется*, при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю согласно оценке

$$L < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k(\varepsilon)}{s^{2,5}} \cdot s = k(\varepsilon) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-1,5} = \text{const} \cdot k(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.28}$$

Здесь отношение $k(\varepsilon)/s^{2,5}$ взято в качестве длины интервала вблизи рационального числа m/s, где условие (6.27) неприменимо, а s обозначает число значений величины m при $m/s \leqslant 1$ (рис. 93).

Из (6.28) следует, что множество отношений частот, для которых под действием возмущения εH_1 исходное движение на торе ме-

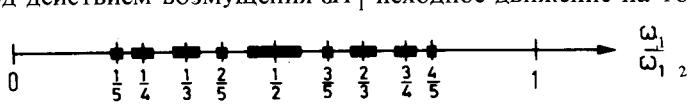


Рис. 93. Интервалы длиной $k(\varepsilon)/s^{2,5}$, дающие вклад в L.

няется слабо и переходит в движение на деформированном торе, имеет конечную меру, равную $1 - \text{const}\cdot k(\varepsilon)$. Однако это множество имеет «дырки» на оси ω_1/ω_2 вблизи каждого рационального значения ω_1/ω_2.

При достаточно большом ε возмущение εH_1 разрушает *все* торы. При этом с увеличением возмущения последним разрушается КАМ-тор с «наиболее иррациональным» соотношением частот $\omega_1/\omega_2 = (\sqrt{5} - 1)/2$ (см. разд. 5.4—5.5). Разрушение этого тора в некотором смысле аналогично механизму Рюэля — Такенса возникновения хаоса в диссипативных системах. Действительно, Шенкер и Каданов (Shenker, Kadanoff, 1982), а также Маккей (McKay, 1983), изучая бездиссипативное ($b = 1$) отображение кольца в себя (5.56), нашли, что последняя КАМ-траектория разрушается универсальным образом в соответствии с законами самоподобия.

Неустойчивые торы и теорема Пуанкаре — Биркгофа. Перейдем теперь к рациональным значениям ω_1/ω_2. Покажем, что в этом случае исходные торы расщепляются на все меньшие и меньшие торы. Согласно теореме КАМ, некоторые из этих возникших торов оказываются также устойчивыми. Однако движение между устойчивыми торами полностью нерегулярно.

Влияние возмущения εH_1 на невозмущенное движение H_0 удобно исследовать с помощью отображения Пуанкаре, которое в общем случае определяется пересечением траектории с какой-либо гиперповерхностью в фазовом пространстве. Для нашего случая в качестве такой поверхности возьмем плоскость S переменных q_1, p_1 (рис. 94). Тогда пересечение траектории с плоскостью S определит нам сохраняющее площадь двумерное отображение

$$r_{i+1} = r_i; \quad r_i = r\left(t = i\,\frac{2\pi}{\omega_2}\right), \tag{6.29}$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + 2\pi\,\frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

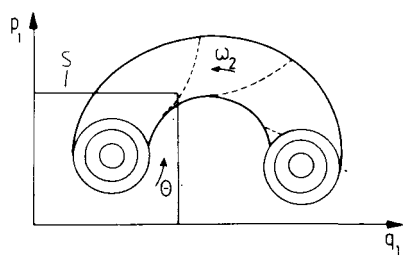


Рис. 94. Отображение Пуанкаре в плоскости (q_1, p_1) для траекторий на торе.

Его легко получить в отсутствие возмущения, используя тот факт, что траектория в фазовом пространстве пересекает сечение S через период $2\pi/\omega_2$, в течение которого θ меняется на величину $2\pi\omega_1/\omega_2$.

Отношение частот ω_1/ω_2 зависит только от радиуса:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_2} &= \frac{\dfrac{\partial H_0(J_1, J_2)}{\partial J_1}}{\dfrac{\partial H_0(J_1, J_2)}{\partial J_2}} = f(J_1, J_2) \\ H_0(J_1, J_2) &= E \to J_2 = J_2(J_1) \\ J_1 &= \frac{1}{2\pi}\oint p_1 \mathrm{d}q_1 = \frac{r_2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \alpha(r), \tag{6.30}$$

поэтому отображение можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} r' &= r \\ \theta' &= \theta + 2\pi\alpha(r) \end{aligned}\right\} \equiv T\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

Это так называемое отображение поворота (Moser, 1973).

Отметим, что при рациональном отношении частот $r/s = \alpha(r_0)$ каждая точка (r_0, θ_0) на окружности является неподвижной точкой преобразования T^s, так как

$$T^s\begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{cases} r_0 \\ \theta_0 + 2\pi\dfrac{r}{s}\cdot s = \theta_0 + 2\pi r. \end{cases} \tag{6.32}$$

Теперь, если учесть возмущение εH_1, отображение поворота примет вид

$$\left.\begin{aligned} r_{i+1} &= r_i + \varepsilon f(r_i, \theta_i) \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + 2\pi\alpha(r_i) + \varepsilon g(r_i, \theta_i) \end{aligned}\right\} \equiv T_\varepsilon\begin{pmatrix} r_i \\ \theta_i \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

где f и g зависят от H_1. Из теоремы Лиувилля, справедливой также и для гамильтониана $H_0 + \varepsilon H_1$, следует, что отображение T_ε сохраняет площадь.

Что же можно сказать о неподвижных точках отображения T_ε? Рассмотрим окружности C_+ и C_- вместе с расположенной между ними окружностью C, на которой $\alpha = r/s$. Поскольку $\alpha > r/s$ на окружности C_+ и $\alpha < r/s$ на окружности C_-, то под действием отображения T^s точки на окружности C_+ движутся против часовой стрелки, на окружности C_- — по часовой стрелке, в то время как

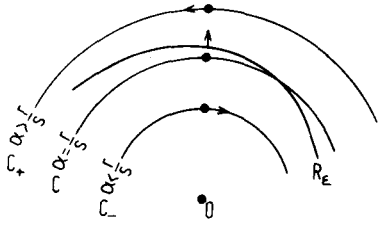


Рис. 95. Действие отображений T^s и T^s_ε на кривые C_+ и C_-.

на окружности C точки неподвижны (рис. 95). Для достаточно малого ε эти относительные повороты в разные стороны сохраняются и для возмущенного отображения T^s_ε. Поэтому на каком-то расстоянии от центра должна быть точка, угловая переменная которой не меняется при отображении T^s_ε. Такие точки, которые под действием отображения смещаются только по радиусу, образуют кривую R_ε, расположенную вблизи окружности C. На рис. 96 показана такая кривая R_ε, а также ее образ $T^s_\varepsilon(R_\varepsilon)$, пересекающий R_ε в некоторых точках. Число точек пересечения должно быть четным, поскольку площади, охватываемые кривыми R_ε и $T^s_\varepsilon(R_\varepsilon)$, равны.

Точки, общие для R_ε и $T^s_\varepsilon(R_\varepsilon)$, — неподвижные точки отображения T^s_ε, и из рис. 97 видно, что они образуют чередующуюся последовательность эллиптических и гиперболических точек. Это означает, что исходный тор с рациональным отношением частот под действием возмущения разрушается лишь частично, оставаясь неразрушенным в четном числе неподвижных точек (теорема Пуанкаре — Биркгофа (Birkhoff, 1935).

Рассмотрим вначале эллиптические неподвижные точки вместе с точками, вращающимися вокруг них (рис. 90, 97). Все эти точки

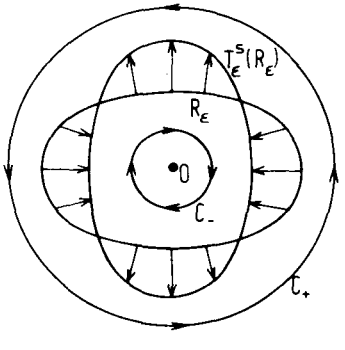


Рис. 96. Кривая R_ε точек, смещающихся только по радиусу, и ее образ T^s_ε (R_ε).

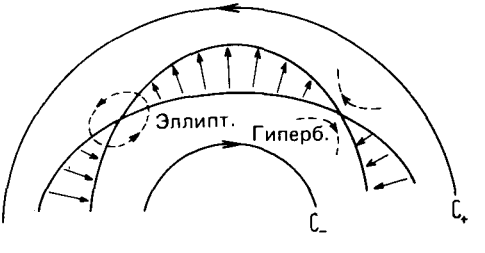


Рис. 97. Чередование гиперболических и эллиптических неподвижных точек отображения T^s_ε.

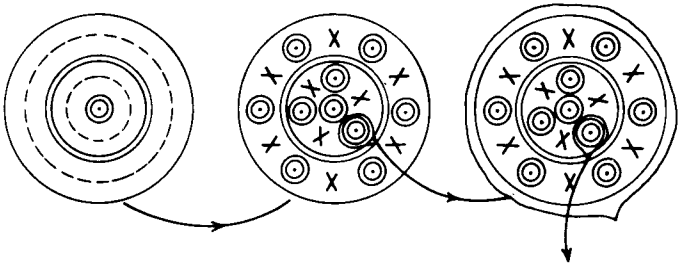


Рис. 98. Торы с рациональным отношением частот распадаются на все меньшие и меньшие торы; расположение вновь возникающих эллиптических и гиперболических неподвижных точек обнаруживает самоподобие.

также можно рассматривать как пересечения с плоскостью Пуанкаре траекторий, принадлежащих более мелким торам. К этим торам также можно применить все вышеприведенные рассуждения. Именно: некоторые из этих мелких торов (согласно теореме КАМ) устойчивы, в то время как другие расщепляются на еще меньшие (в соответствии с теоремой Пуанкаре — Биркгофа). Все это, как видно из рис. 98, приводит к повторению структуры на все более мелких масштабах (самоподобие).

Гомоклинические точки и хаос. Какова же роль гиперболических неподвижных точек в возникновении хаоса? На рис. 99 показано, что в окрестности любой такой точки H траектории расходятся и движение становится неустойчивым, тогда как в окрестности эллиптических неподвижных точек происходит устойчивое вращательное движение.

Устойчивые (W_s) и неустойчивые (W_u) кривые, которые подходят к точке H или удаляются от нее, ведут себя в высшей степени нерегулярным образом. Причина этого связана с тем, что указанные кривые не могут пересекать сами себя (иначе для каких-то точек фазового пространства нарушится единственность решения). В

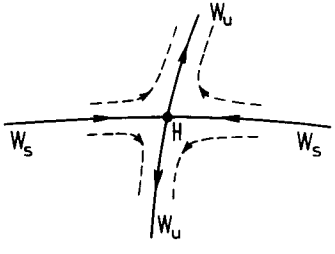


Рис. 99. Гиперболическая неподвижная точка H с устойчивыми (W_s) и неустойчивыми (W_u) кривыми.

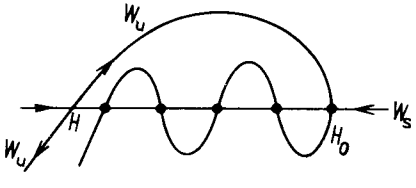


Рис. 100. Гомоклинические точки H_0 как результат пересечения W_u и W_s.

то же время неустойчивая кривая W_u может пресечь W_s в так называемой гомоклинической точке (рис. 100). Но, поскольку отображение T_ε^s непрерывно в плоскости Пуанкаре, а гомоклиническая точка не является неподвижной, при повторении отображения T_ε^s образуются новые гомоклинические точки. Более того, чтобы приблизиться к гиперболической неподвижной точке H, перемещаясь вдоль кривой W_s, нужно повторить T_ε^s бесконечное число раз (приложение 7). Именно поэтому между каждой гомоклинической точкой H_0 и точкой H имеется бесконечное число других гомоклинических точек, и в результате образуется чрезвычайно сложная сетка кривых W_u и W_s.

Подведем итоги. Возьмем интегрируемую систему с регулярными траекториями, лежащими в фазовом пространстве на торе, и добавим неинтегрируемое возмущение. Тогда в зависимости от начальных условий (различные $\mathbf{J}$, δ в (6.7) приводят к разным значениям ω_1/ω_2, поскольку $\omega = \omega(\mathbf{J})$) движение может быть либо регулярным, либо нерегулярным. И хотя, согласно теореме КАМ, мера начальных условий с регулярным движением не равна нулю, при любом рациональном отношении размеры образующихся устойчивых торов все более и более уменьшаются. Между этими торами возникают неподвижные гиперболические точки и, как следствие, нерегулярные траектории. Следовательно, любое малое изменение начальных условий приводит к совершенно различному поведению системы на больших временах. Схематически такая сложность движения в фазовом пространстве показана на рис. 101, из которого видно, что в консервативных системах регулярное и нерегулярное движения в общем случае тесно переплетены между собой.

В заключение отметим, что для отображений, сохраняющих площадь, также имеет место удвоение периода, т. е. последова-

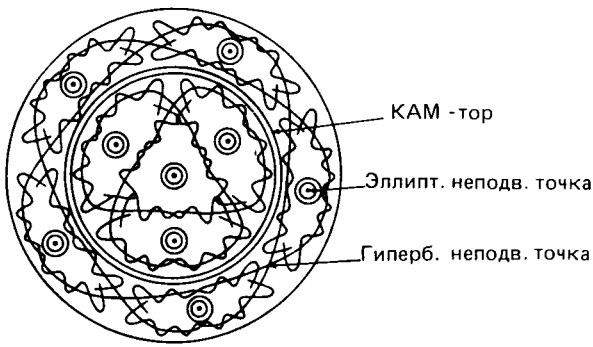


Рис. 101. Регулярное и нерегулярное движение в фазовом пространстве неинтегрируемой системы.

тельное появление новых пар *эллиптических* неподвижных точек (Greene et al, 1981). Это явление рассмотрено в приложении 7, где, в частности, показано, что значения соответствующих констант Фейгенбаума отличаются (в бóльшую сторону) от значений для диссипативных систем.

Диффузия Арнольда. Выше мы рассматривали системы с двумя степенями свободы, для которых размерность поверхности постоянной энергии S_E равна 3 и двумерные торы полностью делят доступное фазовое пространство. Поэтому нерегулярные траектории, заполняющие область разрушенных «рациональных» торов, как бы зажаты между «иррациональными» торами. Тем самым области с нерегулярными траекториями изолированы друг от друга, несмотря на то что их размерность также равна 3 (рис. 102).

Однако, если число степеней свободы больше 2, торы уже не делят поверхность S_E. Например, для трех степеней свободы размерность торов равна 3, в то время как размерность энергетической поверхности равна 5. В результате «остаток» образует одну связную область и, как следствие, для нерегулярной траектории может возникнуть так называемая *диффузия Арнольда* (Арнольд, 1964). Поэтому в системах с числом степеней свободы $n > 2$ существование инвариантных торов для возмущенного движения еще не является гарантией его устойчивости в целом. Это видно из того, что нерегулярные траектории могут блуждать по всему фазовому пространству и подходить сколь угодно близко к любому тору (рис. 103).

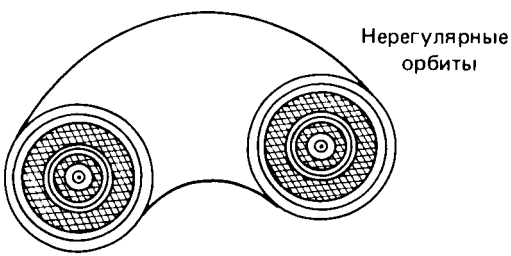


Рис. 102. Глобальная устойчивость нерегулярных траекторий вследствие устойчивых КАМ-торов для системы с двумя степенями свободы.

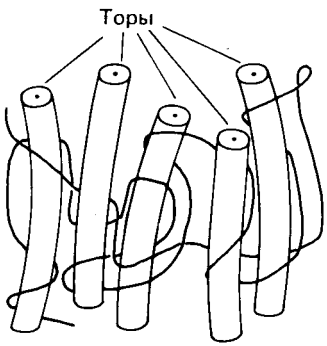


Рис. 103. Диффузия Арнольда для гамильтоновых систем с числом степеней свободы, большим 2 (схематически).

Примеры хаотического движения в классической механике. Теперь приведем некоторые экспериментальные подтверждения сосуществования регулярного и нерегулярного движения. На рис. 104 показано сечение Пуанкаре S для неинтегрируемой системы Хенона — Хейлеса (Hénon, Heiles, 1964):

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + \left[q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3}\right]. \tag{6.34}$$

Интегрируемая часть гамильтониана представляет собой два гармонических осциллятора, а неинтегрируемая — нелинейное взаимодействие между ними (кубические члены в (6.34)). На левой половине рисунка изображены траектории для различных значений энергии, полученные по теории возмущения с точностью до восьмого порядка (Gustavson, 1966). На правой стороне — численные данные пересечения траекторий системы (6.34) с плоскостью S. Видно, что

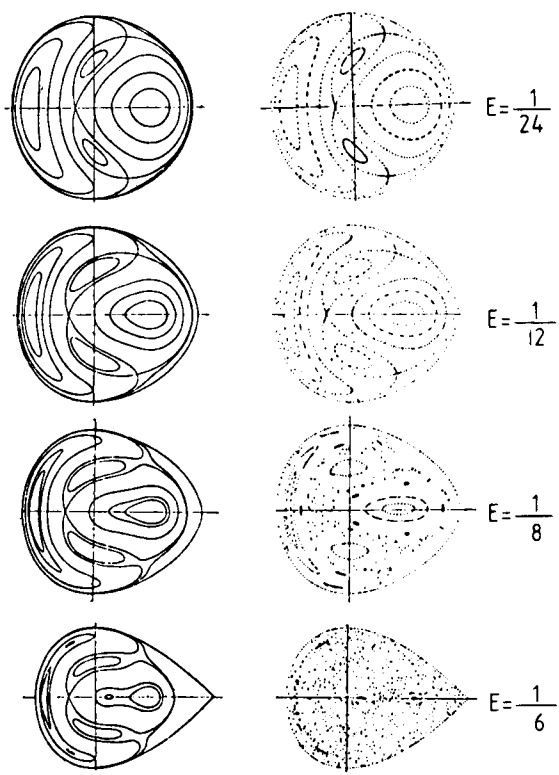


Рис. 104. Отображение Пуанкаре для системы Хенона — Хейлеса (Berry, 1978).

при энергиях E, равных 1/24 и 1/12, оба метода дают примерно одинаковый результат: плоскость S заполнена регулярными траекториями, которые представляют собой следы пересечения этой плоскости с деформированными торами. При энергиях, превышающих $E = 1/9$, большинство торов (хотя и не все) оказываются разрушенными. При этом все точки, которые кажутся разбросанными случайным образом, получены при пересечении плоскости S одной-единственной траекторией. Приведенные на рисунке данные для $E = 1/8$ четко указывают на одновременное существование областей с регулярным и нерегулярным движением.

В качестве следующего примера рассмотрим движение астероида вокруг Солнца с учетом возмущения со стороны Юпитера (рис. 105). Эта задача трех тел является неинтегрируемой, и, согласно уравнениям (6.24)—(6.25), можно ожидать, что движение астероида становится неустойчивым, когда отношение невозмущенной частоты обращения ω астероида к угловой частоте ω_J Юпитера равно рациональному числу. Действительно, в распределении астероидов по частотам (рис. 106) видны провалы как раз для рациональных значений ω/ω_J. В то же время существование устойчивых орбит астероидов ($f \neq 0$) можно рассматривать как подтверждение теоремы КАМ.

Другой вид распределения с провалами наблюдается в *кольцах Сатурна*. В этой системе Сатурн является притягивающим центром для частиц в кольце, а возмущением служит любой из его спутников. Основной резонанс, называемый сечением Кассини, можно увидеть на фото 7 на с. .

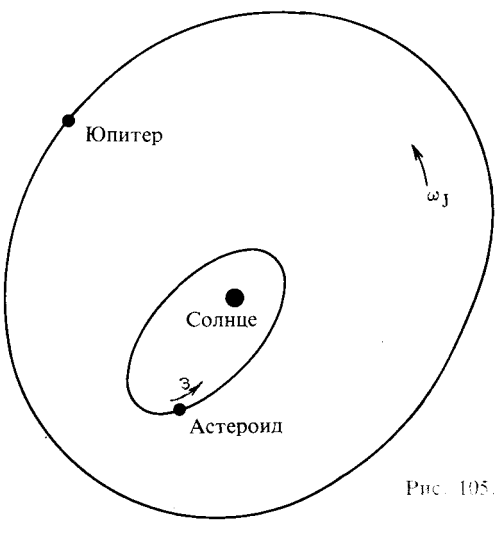


Рис. 105. Возмущение Юпитером движения астероида.

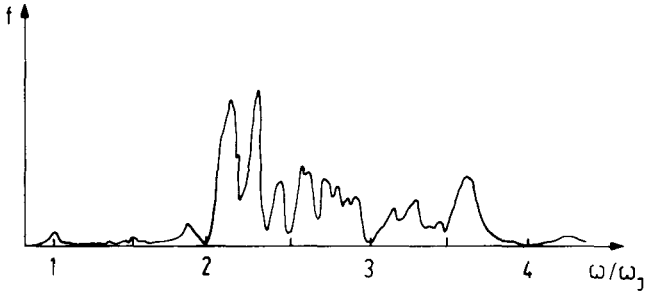


Рис. 106. Распределение f астероидов в поясе между Марсом и Юпитером как функция ω/ω_y (Berry, 1978).

6.2. Полностью нерегулярное движение и эргодичность

В предыдущем разделе было показано, что нерегулярное движение в гамильтоновых системах связано с наличием гиперболических неподвижных точек соответствующих отображений, сохраняющих фазовый объем. Поэтому, если нас интересуют модели с полностью нерегулярным движением, будет естественно обратиться к отображениям, в которых все неподвижные точки гиперболические.

Отображение Арнольда. Примером такой системы может служить отображение Арнольда на торе, заданное в виде

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n \bmod 1 \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \bmod 1 \end{aligned} \equiv T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{6.35}$$

Это отображение сохраняет площадь, поскольку его якобиан T равен 1. Собственные значения равны

$$\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2 > 1; \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \tag{6.36}$$

поэтому все неподвижные точки отображения T^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) гиперболические. Любая рациональная точка (x_0, y_0) на торе является неподвижной точкой отображения T^n с каким-то конкретным n (например, точка (0, 0) — неподвижная точка отображения T, а точки (2/5, 1/5) и (3/5, 4/5) — неподвижные для T^2 и т. д.). Так как коэффициенты отображения T — целые числа и образуют множество всех неподвижных точек.

На рис. 107 показано, как происходит преобразование в отображении Арнольда. Видно, что уже после одной итерации область «кот» оказывается «намотанной» на торе очень сложным образом. Быстрая расходимость близких точек и расслоение начальной обла-

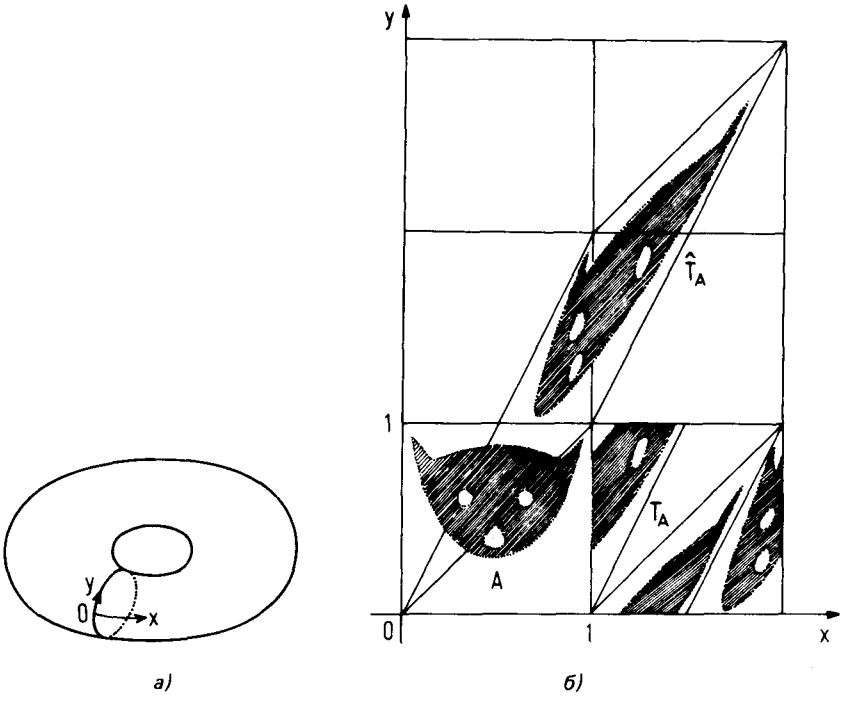


Рис. 107. Преобразование области «кот» под действием отображения T на торе. На рис. 107, *б* изображена развертка единичного тора (рис. 107, *а*), поэтому отображение $\hat{T}$ представляет собой отображение T без ограничения периодическими условиями (Arnold, Avez, 1968).

сти обусловлены гиперболическим характером отображения. Оси (W_u и W_s), по которым происходит растяжение и сжатие, вследствие иррационального отношения проекций плотно навиваются на тор, никогда не пересекая самих себя, но бесконечное число раз пересекая друг друга (рис. 108).

Итерирование любой начальной точки (x_0, y_0) с иррациональным отношением x_0/y_0 образует множество точек, с течением времени плотно покрывающих тор, поэтому усреднение «по времени»

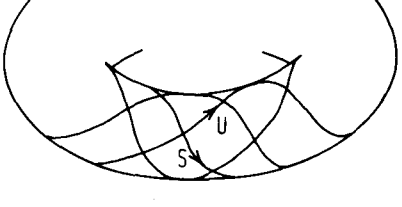


Рис. 108. Кривые W_u и W_s для отображения Арнольда.

дает такой же результат, как и усреднение «по пространству» тора, что указывает на эргодичность отображения Арнольда.

Однако отображение Арнольда обладает более сильным свойством — оно является перемешивающим. Смысл перемешивания заключается в том, что отображение настолько сильно искажает любой элемент площади, что со временем он как бы размазывается по всему тору. Точно так же капля чернил, объем которой соответствует элементу площади в отображении Арнольда, после взбалтывания в стакане воды перемешивается с ней однородно (рис. 109).

Иерархия классического хаоса. В табл. 12 представлена иерархия свойств хаотического движения в порядке их усиления.

Первый раздел табл. 12 содержит известную возвратную теорему Пуанкаре для гамильтоновых систем, которая просто является следствием того, что движение сохраняет площадь и ограничено конечной областью. Такое движение в некотором смысле аналогично хождению по заснеженной площадке конечных размеров. С течением времени площадка покроется следами прогуливающегося и в конце концов он начнет наступать на свои собственные следы.

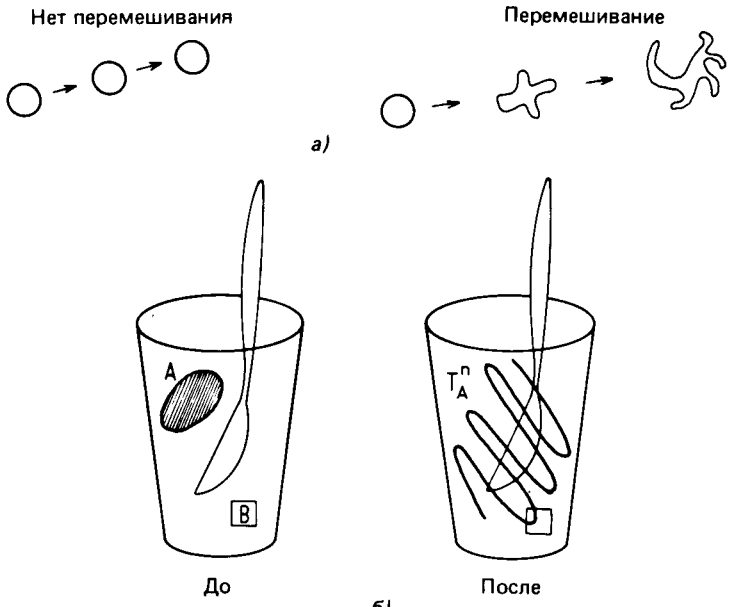


Рис. 109. *а* — Поведение элемента объема под действием неперемешивающих и перемешивающих отображений; *б* — перемешивание капли чернил в стакане воды (Arnold, Avez, 1968).

Таблица 12. Иерархия классического хаоса

Свойство	Определение	Пример
Возвращаемость	Траектория возвращается в заданную окрестность некоторой точки бесконечное число раз	Любая гамильтонова система (или сохраняющее площадь отображение), которая преобразует конечную область фазового пространства в себя
Эргодичность	Усреднение по времени может быть заменено усреднением по фазовому пространству → Нуль является простым собственным значением оператора Лиувилля L	$x_{n+1} = x_n + b \bmod 1$ b — иррациональное число
Перемешивание	Корреляционные функции убывают до нуля в пределе бесконечно большого времени → Оператор L имеет одно простое собственное значение, равное нулю, в остальном → Спектр непрерывный	Отображение Арнольда
K-система	Отображение имеет положительную K-энтропию, т. е. близкие траектории расходятся с экспоненциальной скоростью → Спектр оператора L бесконечнократный лебеговский	

Возвращаемость траектории, вообще говоря, не означает эргодичность, поскольку доступные для движения области могут быть несвязанными (например, могут быть не одна, а две площадки). Если фазовое пространство разделено, траектория ограничена областью, в которой лежат ее начальные координаты, и не покрывает всего фазового пространства.

Переходя к перемешиванию, введем следующее формальное определение. Отображение f называется перемешивающим, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho [f^n(A) \cap B] = \rho(A)\rho(B) \tag{6.37}$$

имеет место для каждой пары измеримых множеств A и B. Здесь через ρ обозначена инвариантная мера отображения f и использовано сокращение

$$\rho(A) = \int_A dx\, \rho(x). \tag{6.38}$$

Кроме того, предполагается, что мера доступного фазового пространства Г, в котором задано f, нормирована на 1, т. е. $\int_\Gamma dx\,\rho(x) = 1$.

Если A и B соответствуют одной и той же точке, соотношение (6.37) сводится к следующему:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma dx\,\rho(x) f^n(x) x \equiv \langle x_n x_0\rangle = \left[\int_\Gamma dx\,\rho(x) x\right]^2 = \langle x_0\rangle^2, \qquad (6.39)$$

т. е. *перемешивание означает, что автокорреляционная функция* $\langle (x_n - \langle x_0\rangle)(x_0 - \langle x_0\rangle)\rangle = \langle x_n x_0\rangle - \langle x_0\rangle^2$ *убывает до нуля* и «система релаксирует к равновесию». (Полное доказательство можно найти в книге (Arnold, Avez, 1968), где показано, что на самом деле система обладает перемешивающим свойством тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} \langle F^*[f^n(x)]G(x)\rangle = \langle F^*(x)\rangle\langle G(x)\rangle$ для любых квадратично интегрируемых комплексных функций F и G.)

Хотя, конечно, эргодичность и подразумевает возвращаемость траектории, однако перемешивание отсюда еще не следует. Рассмотрим, например, отображение

$$x_{n+1} = x_n + b \bmod 1 \equiv f(x_n), \qquad (6.40)$$

которое на единичной окружности сдвигает точку x_0 на расстояние b.

Для иррациональных значений b это отображение эргодическое, поскольку выходя из какой-либо точки x_0, траектория никогда не замкнется и с течением времени покроет равномерно всю окружность (в отличие от рациональных значений $b = p/q$ с целыми числами p и q). Показатель Ляпунова для отображения (6.40) равен нулю:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left|\frac{dx_n}{dx_0}\right| = 0. \qquad (6.41)$$

Пример (6.40) указывает, во-первых, на эргодичность отображения без сильной зависимости от начальных условий, а во-вторых, — на эргодичность без перемешивания. Последнее утверждение следует также из того факта, что пересечение образов $f^n(A)$ отрезка A с другим отрезком B при последовательных итерациях либо равно нулю, либо конечной величине и не имеет предельного значения, как это должно быть согласно (6.37) (рис. 110). Заметим, что в приведенном выше примере элементами «площади» служат линейные отрезки на окружности.

Типичные системы с перемешиванием — это отображение Арнольда (рис. 107) и преобразование пекаря (рис. 61, *а*). В обоих слу-

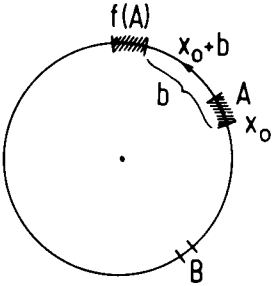


Рис. 110. Преобразования на окружности с эргодичностью, но без перемешивания.

чаях заданный элемент объема с течением времени расплывается, все более и более истончаясь и однородно покрывая все фазовое пространство. Однако скорость растяжения фазовых объемов не обязательно должна быть экспоненциально быстрой, как в этих двух системах, другими словами, система с перемешиванием не всегда является K-системой. Эти примеры могут рассматриваться как иллюстрация хаотических свойств, указанных в табл. 12.

Из этой таблицы можно также увидеть, как различные свойства хаотического движения связаны со свойствами спектра собственных значений оператора Лиувилля. Обсудим вкратце эту фундаментальную связь, позволяющую ввести другие характеристики классического хаоса, не требующие рассмотрения отдельных траекторий.

Оператор Лиувилля L определяется как оператор эволюции плотности $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ в фазовом пространстве:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{p}}\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{p}} = \tag{6.42}$$

$$= \left[\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial H}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial H}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\right]\rho \equiv -i\mathrm{L}\rho \tag{6.43}$$

$$\to \rho(t) = \mathrm{e}^{-it\mathrm{L}}\rho(0). \tag{6.44}$$

Здесь при определении L мы использовали в (6.43) уравнения Гамильтона. Далее полезно ввести собственные значения λ оператора L:

$$\mathrm{e}^{i\mathrm{L}}\varphi(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{i\lambda}\varphi(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}), \tag{6.45}$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ — комплексная, квадратично интегрируемая функция фазовых переменных. Согласно табл. 12, какому-либо свойству классического хаотического движения соответствует определенный вид спектра собственных значений λ (стрелки указывают взаимосвязь утверждений). Поясним это соответствие на двух частных приме-

рах, отсылая читателя, интересующегося доказательством в общем случае, к цитируемой литературе.

Рассмотрим сначала систему из двух несвязанных гармонических осцилляторов, гамильтониан которой в переменных действие — угол имеет вид

$$H_{\text{осц}} = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2, \tag{6.46}$$

где ω_1, ω_2 — частоты осцилляторов. Тогда из (6.43)—(6.44) получим выражения

$$-i\mathrm{L}_{\text{осц}}\rho = \left[\omega_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right]\rho, \tag{6.47}$$

$$\mathrm{e}^{-i\mathrm{L}_{\text{осц}}}\varphi(\theta_1, \theta_2) = \mathrm{e}^{i\lambda}\varphi(\theta_1, \theta_2) \tag{6.48}$$

с периодической по углам θ_1 и θ_2 функцией φ. Эти уравнения имеют очевидные решения

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) \sim \mathrm{e}^{2\pi i(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)} \tag{6.49}$$

$$\to \lambda = 2\pi(n_1\omega_1 + n_2\omega_2), \tag{6.50}$$

где n_1 и n_2 — целые числа.

Движение системы из двух осцилляторов на торе эргодическое, если ω_1/ω_2 равно иррациональному числу, т. е. соотношение $\lambda \sim n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0$ выполняется только для нулевых значений $n_1 = n_2 = 0$, при этом собственное значение $\lambda = 0$ простое. Для неэргодического движения ω_1/ω_2 — рациональное число, и значение $\lambda = 0$ является вырожденным. Такое соответствие между эргодичностью и невырожденностью собственного значения $\lambda = 0$ кажется довольно естественным потому, что лишь в этом случае уравнение для стационарного значения плотности

$$\mathrm{e}^{-i\mathrm{L}}\rho = \rho \tag{6.51}$$

имеет единственное решение.

Заметим также, что уравнение (6.44) можно обобщить и на отображение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n)$:

$$\mathrm{e}^{-i\mathrm{L}}\varphi(\mathbf{x}) \equiv \varphi[\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x})] = \mathrm{e}^{i\lambda}\varphi(\mathbf{x}). \tag{6.52}$$

В качестве следующего примера рассмотрим отображение Арнольда (6.35), которое задано на торе таким образом, что φ можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{m}} \mathrm{e}^{2\pi i\mathbf{m}\cdot\mathbf{x}}\tilde{\varphi}(\mathbf{m}), \tag{6.53}$$

где $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ и m_1, m_2 — целые числа. Поскольку матрица пре-

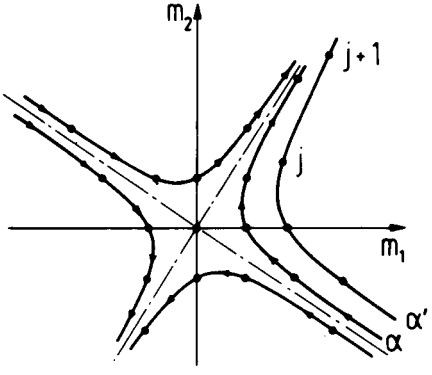


Рис. 111. Все точки на плоскости **m**, за исключением центра, под действием матрицы T движутся по гиперболам, поскольку собственные значения для T равны $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2 > 1$ и $\lambda_2 = 1/\lambda_1 < 1$.

образования T симметрична, из (6.52)—(6.53) можно легко получить

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{Tm}) = e^{i\lambda}\tilde{\varphi}(\mathbf{m}). \tag{6.54}$$

Из выражения (6.54) видно, что точка $\mathbf{m} = 0$ является единственной неподвижной точкой, т. е. $\lambda = 0$ снова оказывается простым собственным значением, соответствующим постоянной инвариантной плотности. Действие преобразования T при других значениях **m** можно понять из рис. 111. Если теперь от **m** перейти к другим переменным $\mathbf{m} \triangleq (\alpha, j)$ где α определяет гиперболу, по которой движется точка, а j — положение точки на этой гиперболе, уравнение (6.54) примет вид

$$e^{-iL}\tilde{\varphi}(\alpha, j) \equiv \tilde{\varphi}(\alpha, j + 1) = e^{i\lambda}\tilde{\varphi}(\alpha, j), \tag{6.55}$$

откуда следует, что оператор $\exp(-iL)$ является оператором трансляции по переменной j. В этом случае спектр оператора L будет непрерывным (заметим, что значения j не ограничены) и бесконечнократно вырожденным (по α). Спектр, в котором каждое действительное собственное значение λ вырождено с одной и той же кратностью и спектральный вес которого определяется величиной $d\lambda$, называется лебеговским спектром. Следовательно, K-системы, такие, например, как отображение Арнольда, вообще говоря, имеют бесконечный лебеговский спектр.

Примеры трех классических K-систем. Приведем еще несколько физических примеров K-систем с эргодичностью и перемешиванием. Сначала рассмотрим известную модель газа сталкивающихся между собой твердых веществ, для которой перемешивание строго доказано Синаем (1970). Ясно, что для свободно движущихся шаров из-за бесконечного значения потенциала контактного вза-

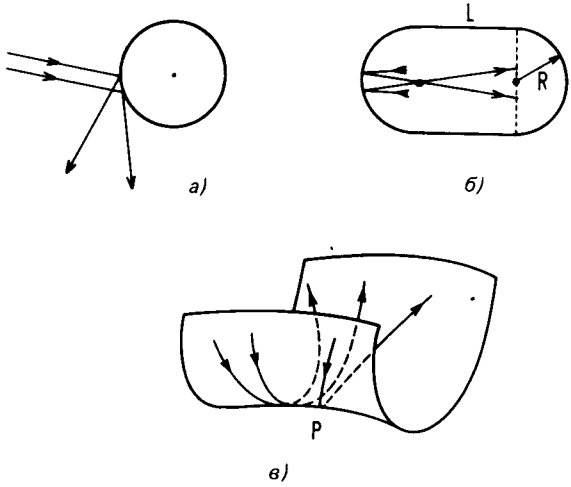


Рис. 112. Разбегание траекторий для трех хаотических систем: *а* — бильярд Синая; *б* — свободная частица в стадионе, *в* — свободная частица на поверхности отрицательной кривизны.

имодействия столкновение не может считаться слабым возмущением. На рис. 112, *а* показано, что экспоненциальное разбегание траекторий возникает в результате столкновения между шарами. Важно подчеркнуть, что доказательство Синая справедливо даже для *двух* дисков, движущихся по тору, т. е. оно *не требует* перехода к термодинамическому пределу бесконечно большого числа частиц.

Другой системой с малым числом степеней свободы, но также обладающей свойством эргодичности и перемешивания, является свободная частица в стадионе (рис. 112, *б*). Экспоненциальное разбегание траекторий здесь обусловлено специальной формой границы (Bunimovich, 1979).

И наконец, отметим движение точечной массы по компактной геодезической поверхности *всюду* отрицательной гауссовой кривизны, которое также оказывается перемешивающим и эргодическим (Anosov, 1969). На рис. 112, *в* схематически изображено движение по седлообразной поверхности, чтобы хоть как-то представить, каким образом происходит расхождение траекторий вдоль геодезических поверхностей отрицательной кривизны (отметим, что на рисунке кривизна отрицательна лишь в *одной* точке P).

7

Хаос в квантовых системах?

Существование хаотического движения в классических консервативных системах естественно приводит к вопросу о том, каким образом нерегулярность движения проявляется в соответствующих квантовых системах. Аналогичные вопросы возникают в задачах физики плазмы, оптики или акустики, где нас также могут интересовать свойства решений волновых уравнений, которые в классическом пределе (ВКБ-приближение, геометрическая оптика) описывают стохастические траектории.

Вопрос о поведении квантовых систем, неинтегрируемых в классическом пределе, обсуждался еще на заре квантовой механики (Einstein, 1917), поскольку он был связан с проблемой квантования систем с непериодическим движением (напомним, что в то время квантование периодических систем проводилось по правилу Бора — Зоммерфельда $\oint p\,\mathrm{d}q = nh$, где h — постоянная Планка). Появление волновой механики и ее дальнейшее развитие позволяют нам свести вопрос о временной эволюции любой квантовой системы к решению нестационарного уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \tag{7.1}$$

где $\hat{H}$ — оператор гамильтониана системы, Ψ — его волновая функция и $\hbar = h/2\pi$.

Чтобы объяснить трудности, возникающие при переходе от классических хаотических систем к их квантовому аналогу, напомним основные различия между классическими и квантовыми системами.

1. По сравнению с классической механикой, в которой переход к статистическому описанию необходим лишь в случае хаотического поведения системы, в квантовой механике по существу возможно *только* статистическое описание. Хотя уравнение Шредингера линейно по Ψ и его решение в некоторых случаях можно легко получить в виде регулярной зависимости Ψ-функций от времени (например, для гармонического осциллятора), несмотря на отсутствие

временного хаоса, это еще *не означает*, что поведение системы полностью детерминировано. Действительно, величина $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ дает лишь вероятность найти электрон в пространственно-временной точке $(\mathbf{x}, t)$.

2. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга

$$\Delta p \cdot \Delta q > \hbar/2, \tag{7.2}$$

в квантовой механике отсутствует понятие траектории движения (измерение координаты q с точностью Δq приводит к возмущению импульса p на величину Δp в соответствии с (7.2)). Поэтому описание хаотического движения на основе экспоненциально быстрого разбегания близких траекторий в квантовой механике становится невозможным.

3. Из принципа неопределенности (7.2) также следует, что точки в $2n$-мерном фазовом пространстве, находящиеся внутри объема размером $\hbar^n$, неразличимы, т. е. фазовое пространство дискретно. Это означает, что если области в фазовом пространстве с классическим хаотическим движением имеют размер, меньший чем $\hbar^n$, то в квантовой механике такие области «не видны» и можно ожидать, что поведение соответствующей квантовой системы будет регулярным. Таким образом, отличие от нуля постоянной Планка ведет к подавлению хаоса. С другой стороны, это затрудняет предельный переход $h \to 0$ (для тех систем, которые в классическом пределе обнаруживают хаотическое поведение), поскольку при уменьшении h в фазовом пространстве появляются все более и более мелкие структуры.

Далее мы будем различать *автономные системы* с не зависящими от времени гамильтонианами и *неавтономные* системы. Примером неавтономной системы может служить квантовый аналог ротатора с периодическими толчками.

Для автономных систем с помощью замены $\Psi = \Psi_0 \exp(-iEt/\hbar)$ можно перейти от (7.1) к линейной задаче нахождения собственных значений энергии E:

$$\hat{H}\Psi_0 = E\Psi_0. \tag{7.3}$$

Если уровни дискретны, волновая функция Ψ ведет себя во времени регулярным образом, что говорит об отсутствии хаоса. Однако остаются принципиальные вопросы, например о том, при каких условиях это имеет место и имеется ли какое-либо различие между энергетическими спектрами квантовых систем с регулярным классическим поведением и систем, которые в классическом пределе являются хаотическими?

Вопрос о поведении неавтономных систем с зависящим от времени гамильтонианом может быть связан, например, с задачей о распределении энергии (по уровням) молекулы, находящейся в поле лазерного луча. Такие вопросы имеют практическое значение в лазерной фотохимии.

Более конкретно, нас интересуют ответы на следующие вопросы: существует ли квантовый хаос? в каких терминах его можно описать? имеется ли в квантовой механике какая-либо аналогия той иерархии классического хаоса, которая отражена в табл. 12? что означает теорема КАМ для квантового движения? В настоящее время вопросов больше, чем ответов.

Чтобы по крайней мере понять суть этих вопросов, мы рассмотрим несколько модельных систем.

В разд. 7.1 исследуется квантовый аналог отображения Арнольда, в котором классическое движение полностью хаотическое, и показывается, что в такой системе нет хаоса. Это связано с конечным значением постоянной Планка и с двойными периодическими условиями, приводящими к дискретности собственных значений оператора эволюции, вследствие чего движение будет квазипериодическим.

В следующем разделе приводятся численные результаты (McDonald, Kaufman, 1979), из которых видно, что энергетический спектр свободной квантовой частицы в стадионе (с классическим хаотическим движением) существенным образом отличается от спектра свободной (квантовой) частицы в круге (классическое движение регулярно).

И наконец, в последнем разделе, преобразуя исходную задачу к задаче о локализации электрона в некотором потенциале, мы покажем, что в системе квантового ротатора с толчками диффузия отсутствует, в то время как в соответствующей классической системе (выше некоторого порога) детерминированная диффузия имеет место.

7.1. Квантовое отображение Арнольда

Рассмотрим, как меняется поведение консервативной системы, которая в классическом пределе является полностью хаотической, в случае ненулевых значений постоянной Планка h. Для этого в качестве примера проквантуем модифицированное отображение Арнольда. Отметим, что отображение Арнольда в его обычном виде (6.35) для квантования не подходит, поскольку соответствующий оператор эволюции не сохраняет периодичность волновой функции на торе (Hannay, Berry, 1980).

Напомним сначала, что доступное фазовое пространство классического отображения Арнольда представляет собой единичный тор. Теперь запишем динамические уравнения движения, согласно которым в нашем примере движутся фазовые точки:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

В квантовой механике уравнения (7.4) переходят в уравнения Гейзенберга для координаты и импульса $\hat{q}_n$, $\hat{p}_n$, определяемых в дискретные моменты времени n. Из требования, чтобы фазовое пространство было тором, следует, что квантово-механическая волновая функция должна быть периодической одновременно *и в координатном*, *и в импульсном* пространстве. Другими словами, собственные значения операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$ принимают только дискретные значения, что определяет решетку допустимых значений p и q в фазовом пространстве на поверхности тора (рис. 113). Покажем, что единичная ячейка такой решетки является квадратом со стороной, в точности равной постоянной Планка h. Если расстояние между соседними собственными значениями оператора $\hat{q}$ равно $\Delta q = 1/N$, т. е.

$$q = 0, \ \frac{1}{N}, \ \ldots, 1, \text{ где } N \text{ — целое число}, \tag{7.5}$$

то вследствие двойной периодичности волновой функции максимальная величина собственного значения оператора импульса определяется как

$$p_{\text{макс}} = \hbar 2\pi / \left(\frac{1}{N}\right) = Nh. \tag{7.6}$$

Соответственно расстояние между собственными значениями импульса $\hat{p}$ равно $\Delta p = h$:

$$p = 0, h, 2h, \ldots, Nh. \tag{7.7}$$

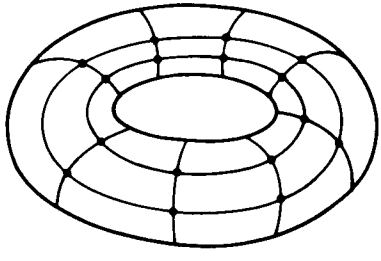


Рис. 113. Разрешенные значения точек фазового пространства для квантового аналога отображения Арнольда (схематически).

Поскольку площадь всего доступного фазового пространства равна единице, имеем

$$1 = q_{\text{макс}} p_{\text{макс}} = Nh \tag{7.8}$$

или

$$h = \frac{1}{N} \to \Delta p = \Delta q = h. \tag{7.9}$$

Последнее требование делает квантовый аналог отображения Арнольда в какой-то степени малосодержательным. Однако, если мы предположим, что постоянная Планка h является свободным параметром и квантовая модель определена только для $h \neq 0$, уравнение (7.9) можно трактовать таким образом, что, согласно (7.5) и (7.7), в квантовой механике значения p/q могут быть только рациональными. Но это означает, что точки с иррациональным отношением p/q, которые как раз и определяют хаотические траектории в классическом отображении Арнольда, в квантовой механике запрещены. Поэтому естественно ожидать, что квантовый аналог отображения Арнольда не может описывать хаотическое движение.

В работе (Hannay, Berry, 1980) было показано, что временная эволюция оператора $\hat{U}$ для квантового отображения Арнольда является периодической (для любого N существует такое $n(N)$, что $\hat{U}^n = 1$) с дискретным спектром собственных значений. Поэтому все ожидаемые значения для отображения Арнольда являются периодическими функциями времени. Другими словами, конечное значение постоянной Планка и двойные периодические условия ограничивают собственные значения оператора эволюции в квантовом отображении Арнольда таким образом, что хаотическое движение становится невозможным.

7.2. Квантовая частица в стадионе

В предыдущем разделе было показано, что поведение квантовой системы, хаотической в классическом пределе, не обязательно является хаотическим. Тем не менее можно ожидать некоторое различие между квантовыми системами, для которых соответствующие классические уравнения описывают нерегулярные траектории, и квантовыми системами — аналогами интегрируемых классических систем с регулярным движением. Чтобы понять, в чем состоит это отличие, Макдональд и Кауфман (McDonald, Kaufman, 1979) нашли волновые функции и спектр свободной частицы в стадионе и в круге, численно решая двумерное уравнение Шредингера для сво-

бодной частицы:

$$\nabla^2\psi = E\psi \tag{7.10}$$

с граничным условием $\psi(x, y) = 0$ на стенках.

Полученные результаты (рис. 114) можно суммировать следующим образом:

а) Вычисленные по собственным функциям кривые нулевого уровня $\psi(x, y) = 0$ оказываются нерегулярными для стадиона и регулярными для круга.

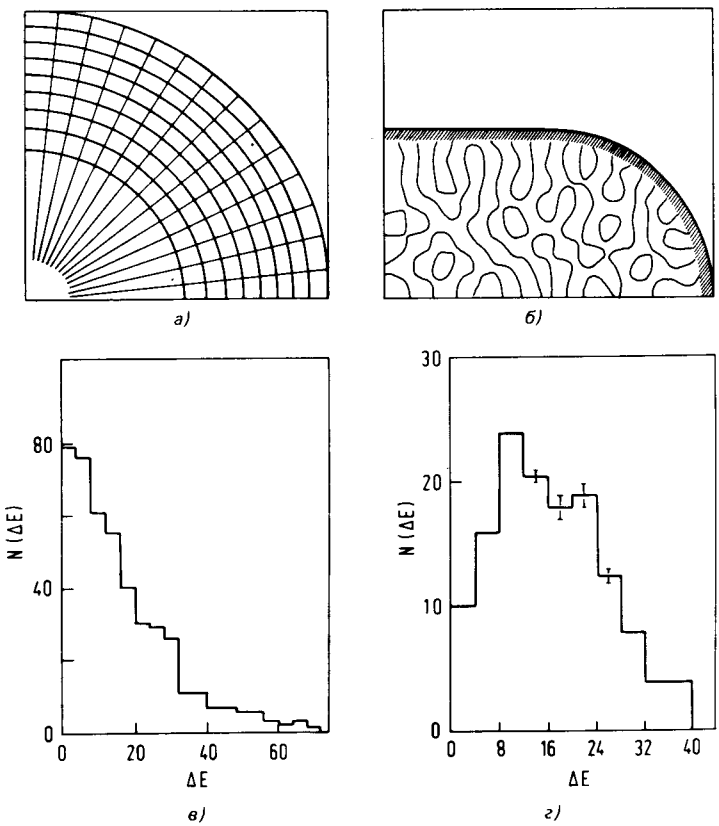


Рис. 114. Кривые нулевого уровня [$\psi(x, y) = 0$] для одного квадранта собственных функций (с двойной отрицательной четностью) в случае диска (*а*) и стадиона (*б*) с размерами $R = a$. Распределение $N(\Delta E)$ расстояний между соседними уровнями энергии (для состояний той же четности) для круговой границы (*в*) и для границы стадиона (*г*) (McDonald, Kaufmann, 1979). Отметим, что здесь $\Delta E = E_{j+1} - E_j$ обозначает расстояние между соседними уровнями; j увеличивается с энергией.

б) Распределение $N(\Delta E)$ расстояний ΔE между соседними уровнями для круга имеет максимум при $\Delta E = 0$, т. е. существует большая вероятность вырождения уровней, или, иначе, *притяжения уровней*. Было доказано (Berry, Tabor, 1977), что для интегрируемых систем выполняется зависимость $N(\Delta E) \sim \exp(-\Delta E \cdot \mathrm{const})$. (Исключение составляет линейный квантовый осциллятор, для которого $N(\Delta E)$ — дельта-функция в точке $\Delta E = \hbar\omega_0$.) Для стадиона функция $N(\Delta E)$ максимальна в точке $\Delta E \neq 0$, т. е. имеется *расталкивание уровней*.

Такое расталкивание уровней было найдено также для квантового аналога бильярда Синая (Berry, 1983, Bohigas et al., 1984). Этот эффект, по-видимому, является характерной особенностью квантовых систем, которые в классическом пределе обнаруживают хаос. Он связан с тем, что в таких системах отсутствуют симметрии, т. е. нет вырождения (и нет правил отбора, исключающих совместное взаимодействие уровней), и поэтому $\lim\limits_{\Delta E \to 0} N(\Delta E) = 0$. Предложены некоторые теоретические объяснения этого явления, а также найдена интересная связь с теорией случайных матриц (Zaslavsky, 1981, Berry, 1983, Bohigas et al., 1984), которая обычно используется для объяснения расталкивания уровней в ядерных спектрах. Заметим, что распределение расстояний между соседними уровнями связано со спектром собственных значений квантово-механического оператора Лиувилля $\hat{\mathrm{L}}$, поскольку $\hat{\mathrm{L}}|n\rangle\langle m| \sim [\hat{\mathrm{H}}, |n\rangle\langle m|] = (E_n - E_m)|n\rangle\langle m|$, где $\hat{\mathrm{H}}$ — оператор Гамильтона и $|n\rangle$, $|m\rangle$ — его собственные функции.

7.3. Квантовый ротатор с периодическими толчками

В гл. 2 мы уже видели, что индикатором хаоса может служить детерминированная диффузия. Поэтому интересно выяснить, имеет ли место такая диффузия в квантовых системах? (Положительный ответ будет означать, что и в квантовой системе возможен хаос.) Сначала мы покажем, как возникает детерминированная диффузия в классической бездиссипативной модели ротатора, находящегося под действием периодических толчков (сила которых достаточно велика), а затем перейдем к исследованию соответствующей квантовой системы.

Согласно (1.20), уравнения движения классического ротатора с периодическими толчками в переменных (θ (угол) и p (угловой момент)) имеют вид

$$p_{n+1} = p_n - V'(\theta_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.11a}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} = \theta_n - V'(\theta_n) + p_n, \tag{7.11б}$$

где $V(\theta) = V(\theta + 2\pi)$ — потенциал внешней силы. Суммируя выражение (7.11а) по n, получаем

$$\langle (p_{n+1} - p_0)^2 \rangle = \sum_{i,j}^{n} \langle V'(\theta_i) V'(\theta_j) \rangle, \tag{7.12}$$

где скобки $\langle \ldots \rangle$ обозначают усреднение по всем начальным точкам θ_0.

Если корреляции между значениями $V'(\theta_i)$ с ростом n_0 быстро убывают, то из (7.12) следует

$$\langle (p_{n+1} - p_0)^2 \rangle = n \sum_{j}^{n_0} \langle V'(\theta_j) V'(\theta_0) \rangle \sim n \quad \text{для} \quad n \gg 1, \tag{7.13}$$

т. е. имеет место диффузия углового момента ротатора.

Численным путем, например, было показано, что, если взять внешний потенциал в виде $V(\theta) = K \cdot \cos\theta$, детерминированная диффузия (для углового момента) возникает выше критического значения $K_c \simeq 0{,}972$ (рис. 115).

В качестве другого примера можно привести открытое отображение Арнольда, в котором переменная p_n не ограничена периодическим условием. Такая система может рассматриваться как ротатор с толчками, имеющими потенциал $V(\theta) = -(K/2) \cdot (\theta \bmod 2\pi)^2$:

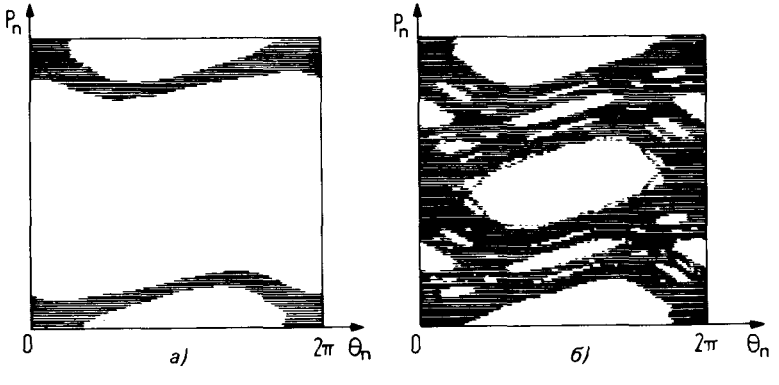


Рис. 115. Фазовый портрет классического ротатора с толчками для потенциальной функции $K\cos\theta$, полученный путем итерирования уравнений (7.11) с последующим изображением всех точек: *а* — при $K = 0{,}96$ еще сохраняется глобальная устойчивость; *б* — при $K = 1{,}13$ основные резонансы перекрываются и появляется возможность диффузии углового момента (Chirikov, 1979).

$$p_{n+1} = p_n + K\theta_n, \tag{7.14а}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n(1 + K) + p_n, \tag{7.14б}$$

где все θ_n вычисляются по модулю 2π. С учетом такого ограничения на θ_n уравнение (7.14б) становится похожим на отображение (2.1), описывающее сдвиг Бернулли (дополнительное слагаемое p_n в данном случае несущественно, а от $\mathrm{mod}\, 2\pi$ можно перейти к $\mathrm{mod}\, 1$, поделив θ_n на 2π). Таким образом, при $K > 0$ уравнение (7.14б) означает хаотичность движения по углу, что в свою очередь, согласно (7.12), ведет к детерминированной диффузии по p_n.

Теперь покажем, что в квантовом аналоге ротатора с толчками диффузии нет. Вместо этого либо система находится в квантовом резонансе, когда угловой момент растет квадратично со временем, либо движение почти периодическое, т. е. угловой момент ограничен и многократно сколь угодно близко возвращается к своему начальному значению.

Чтобы понять этот результат, рассмотрим подход, изложенный в работе (Fishman, Grempel, Prange, 1982), и перейдем от отображения, описывающего квантовый ротатор с толчками, к задаче об одномерной локализации электрона, для которой известны некоторые строгие результаты. (Будем при этом следовать В. Эмери (Emery V., частное сообщение).) Перепишем зависящий от времени гамильтониан для ротатора с толчками в следующем виде:

$$\hat{H} = \begin{cases} \dfrac{\hat{V}(\theta)}{1-\gamma} & \text{при} \quad 0 < t < 1-\gamma, \\[2ex] \dfrac{\hat{T}}{\gamma} & \text{при} \quad 1-\gamma < t < 1;\ \hat{T} = -\tau\partial^2/\partial\theta^2. \end{cases} \tag{7.15}$$

Здесь мы пренебрегли кинетической энергией $\hat{T}$ в момент дельтаобразного толчка, что соответствует предельному переходу $\gamma \to 1$.

Оператор эволюции системы от момента времени $t = n$ к моменту $t = n + 1$, т. е. за период действия одного толчка, имеет вид

$$\hat{U} = e^{-i\hat{T}} e^{-i\hat{V}}, \tag{7.16}$$

а его собственные функции $|\psi_\lambda\rangle$ и собственные значения λ находятся из уравнения

$$\hat{U}|\psi_\lambda\rangle = e^{-i\lambda}|\psi_\lambda\rangle. \tag{7.17}$$

С помощью оператора $\hat{U}$ можно получить временную зависимость

любого состояния $|\varphi\rangle$:

$$|\varphi(n)\rangle = \hat{U}^n|\varphi\rangle = \sum_\lambda e^{-in\lambda}c_\lambda|\psi_\lambda\rangle; \quad c_\lambda = \langle\psi_\lambda|\varphi\rangle. \tag{7.18}$$

Теперь запишем (7.17) в форме уравнения Шредингера для электрона в одномерном случайном потенциале. С учетом точного выражения (7.16) для $\hat{U}$ уравнение (7.17) принимает вид

$$e^{-i\hat{T}}e^{-i\hat{V}}|\psi_\lambda\rangle = e^{-i\lambda}|\psi_\lambda\rangle \tag{7.19}$$

или

$$e^{i\hat{E}}e^{i\hat{V}}|\psi_\lambda\rangle = |\psi_\lambda\rangle, \tag{7.20}$$

где $\hat{E} \equiv \lambda\hat{1} - \hat{T}$. Далее, обозначая $|\psi_\lambda\rangle \equiv e^{i(\hat{V}/2)}|\omega\rangle$, имеем

$$e^{i(\hat{V}/2)}|\omega\rangle - e^{i\hat{E}}e^{-i(\hat{V}/2)}|\omega\rangle = 0 \tag{7.21}$$

или

$$\left[(1 - e^{i\hat{E}})\cos\frac{\hat{V}}{2} + i(1 + e^{i\hat{E}})\sin\frac{\hat{V}}{2}\right]|\omega\rangle = 0, \tag{7.22}$$

откуда можно получить

$$i(1 + e^{i\hat{E}})\left[\frac{1}{i}\frac{1 - e^{i\hat{E}}}{1 + e^{i\hat{E}}} - \frac{\sin(\hat{V}/2)}{\cos(\hat{V}/2)}\right]\cos\left(\frac{\hat{V}}{2}\right)|\omega\rangle = 0. \tag{7.23}$$

Таким образом, нам нужно найти решение уравнения

$$\left[\operatorname{tg}\frac{\hat{E}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\hat{V}}{2}\right]|u\rangle = 0; \quad |u\rangle = \cos\frac{\hat{V}}{2}|\omega\rangle. \tag{7.24}$$

Из периодических граничных условий $\psi_\lambda(\theta + 2\pi) = \psi_\lambda(\theta)$ следует, что $u(\theta + 2\pi) = u(\theta)$, поэтому $u(\theta)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$u(\theta) = \sum_m u_m e^{im\theta}. \tag{7.25}$$

Заметим, что функции $\exp(im\theta)$ являются собственными функциями оператора углового момента. Поэтому (7.24) можно записать в виде

$$T_m u_m + \sum_{r \neq 0} W_r u_{m+r} = \varepsilon u_m; \quad \varepsilon = W_0, \tag{7.26}$$

где

$$T_m \equiv \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(\lambda - \tau m^2)\right]; \quad W_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ir\theta}\operatorname{tg}\left[\frac{\hat{V}(\theta)}{2}\right].$$

Уравнение (7.26) известно как уравнение Шредингера для электрона на решетке с потенциалом T_m и недиагональными матричными элементами перехода W_r. При этом целочисленные собственные значения m углового момента ротатора соответствуют значениям координат на решетке в задаче о проводимости.

Нужно различать два случая.

а) Для рациональных значений $\tau/(2\pi) = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа, электроны, согласно (7.26), движутся свободно в периодическом потенциале и являются полностью делокализованными. Для исходной модели ротатора это означает, что угловой момент неограниченно растет со временем, другими словами, достигаются любые значения m. Более того, квадрат углового момента растет квадратично со временем. Это явление, получившее название квантового резонанса, имеет место для всех рациональных значений $\tau/(2\pi)$, кроме $p = 1$, $q = 2$ (Израйлев, Шепелянский, 1980). Поясним этот эффект на простейшем примере, когда $p/q = 1$. В этом случае действие оператора эволюции на любую периодическую функцию ψ имеет вид

$$\hat{U}\,|\psi\rangle \triangleq e^{2\pi i(\partial^2/\partial\theta^2)}e^{-iV(\theta)}\psi(\theta) = e^{-iV(\theta)}\psi(\theta). \tag{7.27}$$

Здесь мы воспользовались разложением величины $e^{-iV}\psi$ в ряд Фурье:

$$e^{-iV(\theta)}\psi(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{im\theta}, \tag{7.28}$$

и поэтому

$$e^{-2\pi i(\partial^2/\partial\theta^2)}e^{im\theta} = e^{-2\pi i m^2}e^{im\theta} = e^{im\theta}. \tag{7.29}$$

Теперь для любой периодической волновой функции можно найти ожидаемое значение квадрата углового момента после n толчков:

$$\langle p^2\rangle \sim \langle\psi|(\hat{U}^+)^n \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\hat{U}^n|\psi\rangle \sim$$

$$\sim \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\psi^*(\theta)e^{inV(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}e^{-inV(\theta)}\psi(\theta) \sim$$

$$\sim n^2\langle\psi|\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2|\psi\rangle + O(n). \tag{7.30}$$

Такой квадратичный рост $\langle p^2\rangle$ во времени является чисто квантовым эффектом, поскольку (7.27) справедливо только для целых значений m, т. е. для квантованного углового момента (рис. 116).

б) Рассмотрим теперь иррациональные значения $\tau/(2\pi)$. В этом случае потенциал $T_m = \mathrm{tg}[(\lambda - m^2\tau)/2]$ вместо периодического становится случайным, поскольку последовательность значений $[(\lambda -$

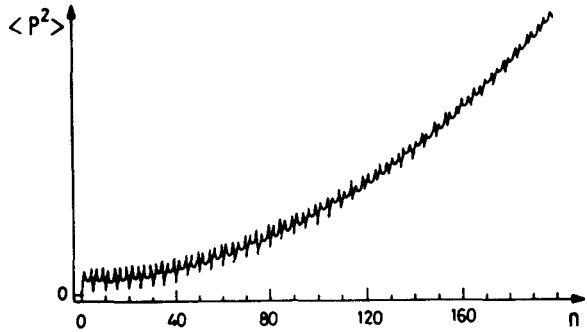


Рис. 116. Квантовый резонанс, полученный численным путем для ротатора с толчками при $\tau = 8\pi/5$ (Израйлев, Шепелянский, 1980).

$- m^2\tau)/2] \bmod \pi$ имеет свойства датчика случайных чисел. (Заметим, что $\mathrm{tg}\,x$ периодичен с периодом 2π и его аргумент после деления на π может быть записан как $x_m = [\lambda/(2\pi) - m^2\tau/(2\pi)] \bmod 1$. Если число $\tau/(2\pi)$ записать в двоичном представлении и рассмотреть, например, значения $m^2 = 2^n$, то видно, что последовательность $x_{m=2^n}$ получается из иррационального числа с помощью сдвига Бернулли, т. е. такая последовательность — случайная.)

Интуитивно можно ожидать, что электрон в одномерном случайном потенциале должен быть локализованным, поскольку для него (в отличие от большого числа измерений) имеется только один-единственный путь перейти из одной точки в другую и этот путь может оказаться заблокированным. Действительно, как хорошо известно (Anderson, 1958; Ishii, 1973) (доказательство ни в коей мере не является тривиальным), все электроны в одномерном случайном потенциале (с быстро убывающими матричными элементами перехода) являются локализованными. Физическая причина такого эффекта состоит в том, что случайный потенциал меняет фазу волновой функции в каждой точке, и именно эта случайная дефазировка приводит к локализации.

В итоге положение электрона ограничено конечным интервалом значений m и соответственно ограничен рост углового момента ротатора со временем. Другими словами, в отличие от классической системы неограниченная диффузия углового момента квантового ротатора отсутствует. На рис. 117 показана временная зависимость энергии ротатора, возбуждаемого толчками, численно полученная для иррационального значения $\tau/2\pi$ и малого возмущения $\hat{V}$. Можно заметить не только ограниченность амплитуды колебаний, но и их многократную повторяемость.

Как показали Хогг и Хуберман (Hogg, Huberman, 1982), если волновая функция может быть нормирована (т. е. если нет диффу-

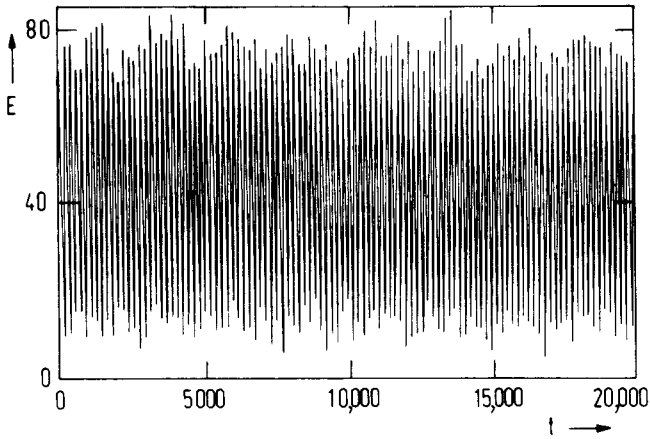


Рис. 117. Численные данные для ожидаемого значения энергии $E \sim \langle p^2 \rangle$ (квантовый ротатор с толчками) как функция числа n толчков для иррационального значения $\tau/(2\pi)$ (Hogg, Hubermann, 1982).

зии углового момента ротатора), то и волновая функция и энергия сколь угодно близко возвращаются к своему начальному значению бесконечное число раз. Такая временная зависимость называется *почти периодической* в отличие от квазипериодического движения, обсуждаемого в гл. 5. (Для почти периодической функции $f(t)$ существует относительно плотное множество $\{\tau_\varepsilon\}$, такое, что $|f(t + \tau_\varepsilon) - f(t)| < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Множество $\{\tau_\varepsilon\}$ является относительно плотным, если имеется такое T_ε, что каждый интервал длины T_ε на действительной оси содержит по крайней мере одно значение τ_ε.)

Судя по всему, до настоящего времени не известны квантовые системы с «настоящим» детерминированным хаосом. В то же время поведение квантовых систем, хаотических в классическом пределе, и квантовых систем с регулярным классическим движением различаются.

В заключение отметим интересные результаты (Gutzwiller, 1983) для электрона, отражающегося от некомпактной поверхности всюду отрицательной кривизны. Было показано, что фазовый сдвиг как функция момента эффективно определяется фазовыми углами дзета-функции Римана на мнимой оси, проходящей на расстоянии 0,5 от так называемой критической линии. Этот фазовый сдвиг проявляет хаотические свойства, поскольку с его помощью можно имитировать любую заданную гладкую функцию.

Приведенные здесь замечания показывают, что вопрос о стохастичности в квантовой механике еще далек от своего решения.

Заключительные замечания

В этой книге, которую можно рассматривать как введение в детерминированный хаос, мы уделили основное внимание самоподобным структурам и ренормгрупповым идеям. Обозначим теперь вкратце возможные направления развития тех вопросов, которые не вошли в предыдущие главы.

Прежде всего отметим проблему *хаотического движения в пространственно связанных нелинейных системах*, например в моделях сердца, химических реакциях (Vidal, Pacault, 1981), где учитывается диффузионный член (решается уравнение $\dot{\mathbf{c}} = F(\mathbf{c}) + k\nabla^2\mathbf{c}^2$ вместо (1.4)), а также в уравнении Навье — Стокса (Ruelle, 1983). Здесь возникают следующие вопросы: как нелинейные элементы влияют друг на друга? Синхронизируются ли они? существует ли что-либо похожее на пространственный хаос? как влияет пространственное движение на временной хаос? как меняется размерность странных аттракторов с приближением к полностью развитой турбулентности?

В дополнение к вопросам, рассматриваемым в предыдущей главе, обратим внимание на широкий круг задач, связанных с хаотическим поведением *квантовых систем с диссипацией*, таких, как лазеры или джозефсоновские переходы и т. д. (Craham, 1984). Интересно также выделить вопрос о хаосе в *квантовых системах с многими частицами*, который связан с фундаментальной проблемой «стрелы времени» (Misra, Prigogine, 1980).

Конечно, приведенный перечень проблем далек от полноты. С математической точки зрения, например, все еще представляет интерес вопрос о *природе случайного числа* (De Long, 1970). Не обсуждалась также роль, которую, возможно, играет сосуществование хаоса и регулярного движения в *образовании структур* в биологии (Hess, Märkus, 1984).

Тем не менее основной вывод ясен: *поскольку природа нелинейна, всегда надо принимать во внимание детерминированный хаос*. Однако надо иметь в виду, что предсказания в развитии науки о детерминированном хаосе в такой же степени трудны и ненадежны,

как и предсказания конкретного поведения хаотической системы, т. е. всегда будут (к счастью) неожиданности и сюрпризы. Интересно, что еще 100 лет назад Джеймс Кларк Максвелл (основатель теории электромагнетизма) написал следующее далеко идущее замечание относительно предсказуемости нелинейных неустойчивых систем (цитируется по (Berry, 1978)):

«Если ... те физики, по которым образованные люди судят о физиках вообще, ... охотясь за тайнами науки, изучают уже не непрерывности и устойчивости, а сингулярности и неустойчивости, то продвижение естественных наук может устранить предубеждение в пользу детерминизма. По-видимому, оно возникло из представления о физике будущего как о простом увеличении физики прошлого».

Приложения

1. Вывод модели Лоренца[1)]

Здесь приведен беглый вывод модели Лоренца, ориентированный на то, чтобы читатель почувствовал сделанные приближения. Более подробную информацию читатель может найти в оригинальных статьях (Saltzman, 1981; Lorenz, 1963) и в монографии (Chandrasekhar, 1961).

Рассмотрим эксперимент Рэлея — Бенара, показанный на рис. 118. Жидкость описывается полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и полем температуры $T(\mathbf{x}, t)$. Основными уравнениями, описывающими эту систему, являются:

а) уравнение Навье — Стокса

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}; \tag{П1.1}$$

б) уравнение теплопроводности

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \kappa \nabla^2 T; \tag{П1.2}$$

в) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{П1.3}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} T(x, y, z = 0, t) &= T_0 + \Delta T; \\ T(x, y, z = h, t) &= T_0. \end{aligned} \tag{П1.4}$$

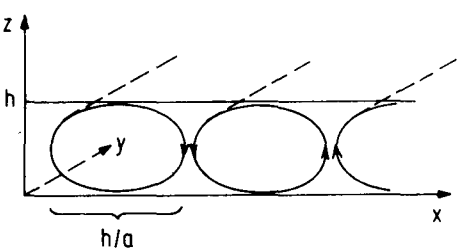


Рис. 118. Конвективные валы и геометрические параметры в эксперименте Бенара.

[1)] См. ссылки к гл. 1.

Здесь ρ — плотность жидкости, μ — вязкость, p — давление, κ — температуропроводность, $\mathbf{F} = \rho g \mathbf{e}_z$ — внешняя сила тяготения в направлении $\mathbf{e}_z$. Нелинейность в гидродинамике связана с конвективным слагаемым $\dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \partial\mathbf{v}/\partial t$ (квадратичным по $\mathbf{v}$) в уравнении Навье — Стокса (П1.1).

Чтобы упростить вычисления, предполагается, что а) система обладает трансляционной инвариантностью по y, так что конвекционные валы простираются до бесконечности, как показано на рис. 118, и б) зависимостью от ΔT всех коэффициентов, кроме $\rho = \bar{\rho}(1 - \alpha\Delta T)$, можно пренебречь (приближение Буссинеска). Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ где } u = v_x \text{ и } w = v_z, \tag{П1.5}$$

поэтому удобно ввести функцию $\psi(x, z, t)$, для которой

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{и} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{П1.6}$$

так что (П1.5) выполняется автоматически.

Далее введем отклонение $\theta(x, z, t)$ от линейного профиля температуры:

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} z + \theta(x, z, t). \tag{П1.7}$$

Используя (П1.6) и (П1.7), основные уравнения можно записать в виде (Saltzman, 1981)

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x, z)} + \nu\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{П1.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} + \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \kappa\nabla^2\theta, \tag{П1.9}$$

где

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} \equiv \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}; \tag{П1.10}$$

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4};$$

$\nu = \mu/\bar{\rho}$ — кинематическая вязкость (член, содержащий давление, уничтожается применением ротора к уравнениям Навье — Стокса).

Чтобы упростить (П1.8) и (П1.9), Лоренц использовал свободные граничные условия

$$\theta(0, 0, t) = \theta(0, h, t) = \psi(0, 0, t) = \\ = \psi(0, h, t) = \nabla^2\psi(0, 0, t) = \nabla^2\psi(0, h, t) = 0 \qquad (\text{П}1.11)$$

и, сохраняя только младшие члены в фурье-представлении ψ, предложил следующую подстановку:

$$\frac{a}{1 + a^2}\frac{1}{\kappa}\psi = \sqrt{2}X(t)\sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right), \qquad (\text{П}1.12)$$

$$\frac{\pi R}{R_c \Delta T}\theta = \sqrt{2}Y(t)\cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - Z(t)\sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right), \qquad (\text{П}1.13)$$

где переменные X, Y и Z зависят только от времени, $R = g\alpha h^3\Delta T/\nu k$ — число Рэлея, $R_c = \pi^4 a^{-2}(1 + a^2)^3$ — критическое значение R, a — отношение геометрических размеров (рис. 118). Отсюда получаем

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y; \qquad (\text{П}1.14\text{а})$$
$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y; \qquad (\text{П}1.14\text{б})$$
$$\dot{Z} = XY - bZ, \qquad (\text{П}1.14\text{в})$$

где точкой обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \pi^2 h^{-2}(1 + a^2)\kappa t$, $\sigma = \nu/\kappa$ — число Прандтля, $b \equiv 4(1 + a^2)^{-1}$; $r = R/R_c \sim \Delta T$ — внешний управляющий параметр.

2. Анализ устойчивости, возникновения конвекции и турбулентности в модели Лоренца[1)]

Запишем уравнения Лоренца (П1.14) в краткой форме

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \qquad (\text{П}2.1)$$

и линеаризуем их вблизи неподвижных точек

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{0};\ \mathbf{X}_2 = (\pm\sqrt{b(r - 1)};\ \pm\sqrt{b(r - 1}; r - 1), \qquad (\text{П}2.2)$$

определяемых условием

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_{1,2}) = \mathbf{0}. \qquad (\text{П}2.3)$$

Первая неподвижная точка $X_1 = \mathbf{0}$ соответствует состоянию тепло-

---

1) См. ссылки к гл. 1.

проводности без движения жидкости, и ее матрица устойчивости

$$\left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{X_1} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \qquad (\text{П}2.4)$$

имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4(r - 1)\sigma}; \quad \lambda_3 = -b. \qquad (\text{П}2.5)$$

Таким образом, решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ устойчиво, т. е. все λ отрицательны, при $0 < r < 1$. При $r = 1$ начинается конвекция Бенара, так как $\lambda_1 = 0$, и именно в этот момент «принимает эстафету» вторая неподвижная точка $\mathbf{X}_2$ (соответствующая движущимся валам, изображенным на рис. 118). Матрица устойчивости для $\mathbf{X}_2$:

$$\left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{X_2} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & c \\ c & c & -b \end{pmatrix}, c \equiv \pm\sqrt{b(r - 1)}; \qquad (\text{П}2.6)$$

а ее собственные значения — корни полинома

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \qquad (\text{П}2.7)$$

Видно, что при $r = 1$ $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -b$; $\lambda_3 = -(\sigma + 1)$, т. е. «конвективная» неподвижная точка находится на грани устойчивости, и, как показывает рис. 119, она устойчива при $1 < r < r_1$. При $r_1 < r_c$ два собственных значения становятся комплексными, т. е. появляются два предельных цикла, устойчивых до тех пор, пока действительная часть этих значений меньше 0. При $r = r_c$ действительные части обра-

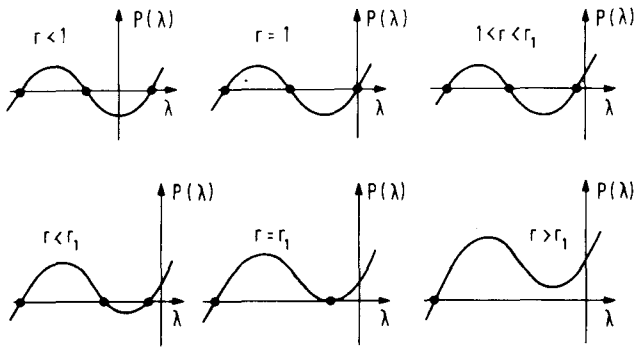


Рис. 119. Вид полинома $P(\lambda)$ в зависимости от параметра r.

щаются в 0, т. е. $\lambda = \pm i\lambda_0$, и из (П2.7)

$$r_c = \sigma \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \quad (= 24{,}7368 \text{ для } \sigma = 10,\ b = 8/3).$$

При превышении r_c предельный цикл становится неустойчивым (действительные части комплексных собственных значений положительны) и наступает хаос. Этот анализ согласуется с численным результатом, полученным Лоренцем, обнаружившим хаотическое поведение при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и значениях параметра r, превышающих $r_c = 24{,}74$.

3. Производная Шварца[1)]

Бесконечная последовательность бифуркаций удвоения соответствует не всем унимодальным функциям (т. е. непрерывно дифференцируемым отображениям единичного интервала [0, 1] в себя, имеющим один максимум при $x = 1/2$, и монотонным при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ и $1/2 < x \leqslant 1$).

Кроме свойства унимодальности, необходимо, чтобы производная Шварца функции

$$Sf \equiv \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \sim \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,[f'(x)]^{-1/2} \qquad (\text{П}3.1)$$

была отрицательна на всем интервале [0, 1]. Это, например, справедливо для логистического отображения, так как $f'''(x) = 0$.

Чтобы показать правдоподобность этого на первый взгляд необычного требования, отметим, что из условия $Sf < 0$ следует $Sf^n < 0$ для всех итераций f. Это можно проверить прямым вычислением. Как следствие, обнаружено, что в неустойчивой неподвижной точке x_0 функции f, где

$$f'(x_0) = -1;$$

$$f^{2\prime}(x_0) = [f'(x_0)]^2 = 1; \qquad (\text{П}3.2)$$

$$f^{2\prime\prime}(x_0) = f''(x_0)\{[f'(x_0)] + f'(x_0)\} = 0, \qquad (\text{П}3.3)$$

третья производная $f^2(x_0)$ становится отрицательной при $Sf < 0$, и вблизи $x_0 = 0$, например, $f^2(x)$ ведет себя, как показано на рис. 120, что может привести к бифуркации удвоения. На том же рисунке показано, что такая бифуркация невозможна при $Sf > 0$.

Важность производной Шварца была впервые отмечена в работе (Singer, 1978), где было показано, что унимодальное отображе-

---

[1)] См. ссылки к гл. 3.

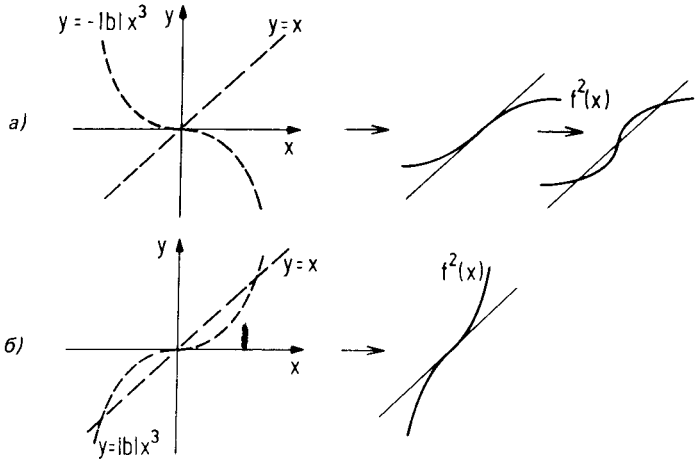


Рис. 120. Поведение $f^2(x) = f^{2'}(x_0)\cdot x + b\cdot x^3$ ($b \equiv f^{2'''}(x_0)/3!$) вблизи точки $x_0 = 0$ при *а*) $Sf < 0$ ($b < 0$); *б*) $Sf > 0$ ($b > 0$).

ние с $Sf < 0$ не может иметь более одного периодического аттрактора. Впоследствии Гуккенхеймер и Мизуревич доказали, что в этом случае все точки на отрезке [0, 1] (за исключением множества меры 0) притягиваются к этому аттрактору. Доказательства и ссылки можно найти в монографии (Collet, Eckmann, 1980).

4. Ренормализация одномерной модели Изинга[1)]

Функциональная ренормгруппа, используемая в этой книге, построена по аналогии с ренормгрупповым методом для критических явлений (который проще, чем функциональный метод ренормализации). Этот метод изложен в данном разделе на примере одномерной модели Изинга. Хотя одномерная модель Изинга обладает рядом странных свойств (ее температура перехода равна 0 и т. д.), этот недостаток уравновешивается тем, что за каждым шагом ренормализации можно проследить в явном виде. Предполагается, что читатель знаком с обычным точным решением этой модели, которое можно найти в любом учебнике по статистической механике.

Функция распределения одномерной модели Изинга имеет хорошо известный вид

$$Z = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta \sum_i \sigma_i \sigma_{i+1}}, \qquad (\text{П}4.1)$$

1) См. ссылки к гл. 3.

где $\beta = J/T$ — отношение константы связи J к температуре T, спиновые переменные σ_i принимают значения $\sigma_i = \pm 1$, а состояния $i = 0, \ldots, N$.

Шаги ренормализации представлены на рис. 121.

Вначале мы просуммируем в (П4.1) по всем спиновым переменным σ_i с нечетными i. Затем переобозначим оставшиеся переменные с четными i по правилу

$$\sigma_{2i} \to \sigma_i/\alpha \tag{П4.2}$$

(в нашем простом случае $\alpha = 1$, но уже для двумерной модели Изинга необходимо $\alpha \neq 1$). На рис. 121 показано, что система оставшихся спинов имеет тот же вид, что и раньше; изменились лишь два фактора: все длины сократились вдвое, а связь между оставшимися спинами ренормализуется ($\beta \to \beta'$). При температуре перехода $T = T_c = 0$ длина корреляции бесконечна и спиновый «узор» самоподобен для всех масштабов длин, т. е. повторное применение процедуры ренормализации всегда приводит к одним и тем же результатам.

Чтобы представить эти этапы в явном виде, рассмотрим типичную сумму по нечетной переменной в (П4.1):

$$Z_3 = \sum_{\sigma_3} e^{\beta(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4)} = 2[(\operatorname{ch}\beta)^2 + \sigma_2\sigma_4(\operatorname{sh}\beta)^2], \tag{П4.3}$$

или

$$Z_3 = ce^{\beta'\sigma_2\sigma_4} = c\,[\operatorname{ch}\beta' + \sigma_2\sigma_4 \operatorname{sh}\beta'], \tag{П4.4}$$

где

$$\operatorname{th}\beta' = (\operatorname{th}\beta)^2. \tag{П4.5}$$

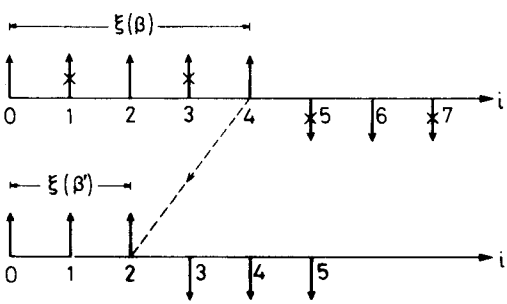


Рис. 121. Последовательность шагов ренормализации одномерной модели Изинга: *а* — спины с нечетными индексами складываются и удаляются; *б* — длина корреляции в ренормализованной системе ($\beta \to \beta'$, $2i \to i$) уменьшается.

Уравнение (П4.5) получено сравнением правых частей (П4.3) и (П4.4) с учетом того, что σ_2 и σ_4 принимают лишь значения ± 1.

На следующем этапе мы перенумеруем спины в соответствии с (П4.2) и получим ренормализованную переменную Z:

$$Z(\beta) = Z(\beta') = c^{N/2} \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta' \sum_i^{N/2} \sigma_i \sigma_{i+1}} \tag{П4.6}$$

(постоянную c далее учитывать не будем, так как она сокращается при вычислении всех термодинамических средних). Связь β' между оставшимися спинами в соответствии с (П4.6)

$$\beta' = \operatorname{Arth}[(\operatorname{th}\beta)]^2 \equiv R_2(\beta). \tag{П4.7}$$

Повторное применение этой процедуры дает

$$\beta'' = R_2[R_2(\beta)] = R_4(\beta). \tag{П4.8}$$

Последнее равенство означает, что две последовательные ренормализации эквивалентны одной, при которой оставляется лишь каждый четвертый спин, т. е. ренормгрупповые операторы R образуют полугруппу («полу» здесь означает отсутствие обратного элемента). Неподвижные точки (П4.7) —

$$\beta^* = \infty \quad \text{и} \quad \beta^* = 0, \tag{П4.9}$$

т. е. они появляются при нулевой температуре (температуре перехода для одномерной модели Изинга) и при бесконечной температуре. В обоих пределах рисунок спинов самоподобен (при $T = \infty$ спиновая система совершенно неупорядочена, а при $T = 0$ все спины выстроены в ряд). При $\beta > 0$ система всегда приводится (повторными применениями R_2) к устойчивой неподвижной точке $\beta^* = \infty$.

Так как корреляционная длина ξ сокращается вдвое на каждом шаге ренормализации, можно сразу определить зависимость ξ от температуры через следующие масштабные коэффициенты:

$$\xi(\beta) = 2\xi(\beta') \tag{П4.10}$$

$$\to \xi(\beta) = 2\xi\{\operatorname{Arth}[(\operatorname{th}\beta)^2]\} = 2^n \xi\{\operatorname{Arth}[(\operatorname{th}\beta)^{2^n}]\}. \tag{П4.11}$$

При $\beta \gg 1$ переменную n можно выбрать так, что

$$(\operatorname{th}\beta)^{2^n} = \text{const} \tag{П4.12}$$

$$\to 2^n \sim 1/\ln(\operatorname{th}\beta) \tag{П4.13}$$

$$\to \xi \sim 1/\ln(\operatorname{th}\beta). \tag{П4.14}$$

Последнее соотношение можно проверить прямым вычислением корреляционной функции

$$\langle \sigma_{j+r}\sigma_j \rangle \equiv \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta \sum_i \sigma_i\sigma_{i+1}} \sigma_{j+r}\sigma_j \Big/ \left(\sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta \sum_i \sigma_i\sigma_{i+1}} \right) = \tag{П4.15}$$

$$= (\operatorname{th}\beta)^r \equiv e^{-r/\xi}, \tag{П4.16}$$

где использованы обозначения

$$\sum_{\sigma_{i+1}} e^{\beta \sum_i \sigma_i\sigma_{i+1}} = 2\operatorname{ch}\beta, \tag{П4.17}$$

$$\sum_{\sigma_{i+1}} e^{\beta \sum_i \sigma_i\sigma_{i+1}} \sigma_{i+1} = 2\sigma_i \operatorname{sh}\beta. \tag{П4.18}$$

Отметим, что при исследовании более сложных систем (например, двух- или трехмерной модели Изинга) уничтожение спиновых переменных на каждом шаге ренормализации приводит к появлению связей с ближайшими соседями и связей высших порядков (между спинами), и искусство ренормализации состоит в том, чтобы проследить за ними.

5. Прореживание и интегралы по траектории для внешнего шума[1)]

Мы представим здесь вывод выражения для скейлинга показателя Ляпунова (3.91), изложенный в важной работе (Feigenbaum, Hasslacher, 1982). Главная цель — объяснить метод прореживания, с одной стороны, имеющий широкий диапазон возможных приложений (например, для описания перехода от квазипериодичности к хаосу, рассмотренного в гл. 5), а с другой — очень похожий на метод ренормализации одномерной модели Изинга (см. приложение 4).

Вначале представим итерации (3.87)

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n \tag{П5.1}$$

в виде интегралов по δ-функциям:

$$x_1 = f(x_0) + \xi_0 = \int dx_1 x_1 \delta[x_1 - f(x_0) - \xi_0]; \tag{П5.2а}$$

---

1) См. ссылки к гл. 3.

$$x_2 = f[f(x_0) + \xi_0] + \xi_1 = \tag{П5.2б}$$

$$= \int dx_1 dx_2 x_2 \delta[x_2 - f(x_1) - \xi_1]\delta[x_1 - f(x_0) - \xi_0]$$

$$\vdots$$

$$x_n = \int \prod_{j=1}^{n} dx_j x_n \delta[x_{j+1} - f(x_j) - \xi_j], \tag{П5.2в}$$

где ξ_j — независимые случайные переменные с гауссовым распределением вероятностей

$$P_0\{\xi_j\} = \prod_j P[\xi_j; \sigma^2] = \prod_j \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\xi_j^2/2\sigma^2}. \tag{П5.3}$$

Если использовать (П5.2в) и (П5.3) и проинтегрировать по $\{\xi_i\}$, то среднее значение x_n приобретает вид

$$\langle x_n \rangle = \int \prod_j d\xi_j P_0\{\xi_j\} x_n = \int \prod_{j=1}^{n} dx_j x_n \prod_{i=0}^{n-1} P[x_{i+1} - f(x_i); \sigma^2]. \tag{П5.4}$$

Если переменную i интерпретировать как индекс узла, то это среднее имеет вид интеграла по траектории, напоминающего выражение термодинамического среднего для намагниченности и пригодного для ренормгруппового анализа. Идея заключается в том, чтобы выполнить интегрирование по x_i *шаг за шагом*, т. е. ренормализация заключается в выделении всех x_i с нечетными i (эта процедура называется «прореживанием») и перенормировке переменных так, чтобы эту последовательность операций можно было повторить.

Выберем $n = 2^q$ (q — целая величина) и разделим в (П5.4) переменные с четными и нечетными индексами:

$$\langle x_n \rangle = \int \prod_1^{n/2} dx_{2i} x_n \prod_1^{n/2} dx_{2i-1} \prod_0^{n/2-1} P[x_{2i+2} - f(x_{2i+1}); \sigma^2] \times$$

$$\times P[x_{2i+1} - f(x_{2i}); \sigma^2]. \tag{П5.5}$$

При малых амплитудах шума $\sigma \ll 1$ интегралы по нечетным переменным

$$I = \int dx_{2i+1} \exp\{-[x_{2i+2} - f(x_{2i+1})]^2/2\sigma^2 -$$
$$- [x_{2i+1} - f(x_{2i})]^2/2\sigma^2\} \tag{П5.6}$$

можно оценить методом перевала.

Простейшая форма метода перевала, например для функции с резким пиком при x^*, состоит в замене интеграла значением подынтегрального выражения при $x = x^*$.

Например, рассмотрим при $N \gg 1$ интеграл

$$I_0 = \int dx e^{-NF(x)}. \tag{П5.7}$$

Используя метод перевала, получим

$$I_0 \approx \int dx \exp\{-N[F(x^*) + \frac{1}{2}F''(x^*)(x - x^*)^2]\} =$$

$$= e^{-NF(x^*)}\sqrt{2\pi/(NF''(x^*)}. \tag{П5.8}$$

Здесь «точка перевала» определяется условием максимума $e^{-NF(x)}$ при x^*:

$$F'(x^*) = 0. \tag{П5.9}$$

Применяя этот метод к (П5.6), вместо (П5.9) получаем

$$-[x_{2i+2} - f(x^*_{2i+1})]f'(x^*_{2i+1}) + x^*_{2i+1} - f(x_{2i}) = 0 \tag{П5.10а}$$

$$\to x^*_{2i+1} \approx f(x_{2i}) + [x_{2i+2} - f^2(x_{2i})]f'[f(x_{2i})] \tag{П5.10б}$$

и, следовательно,

$$I \approx \exp\{[x_{2i+2} - f^2(x_{2i})]^2/2\bar{\sigma}^2\}. \tag{П5.11}$$

Здесь опущены все коэффициенты перед экспонентой, так как они сокращаются при вычислении $\langle x_n \rangle$ и введено обозначение

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \{f'[f(x_{2i})]\}\sigma^2. \tag{П5.12}$$

Таким образом, после одного шага интегрирования $\bar{\sigma}$ зависит от x_{2i}, т. е., когда мы повторим эту процедуру (см. далее), всегда будет существовать зависимость σ от x, и вместо (П5.6) можно с самого начала рассматривать

$$I = \int dx_{2i+1} \exp\{-[x_{2i+2} - f(x_{2i+1})]^2/2\sigma^2(x_{2i+1}) -$$

$$- [x_{2i+1} - f(x_{2i})]^2/2\sigma^2(x_{2i})\}. \tag{П5.13}$$

По аналогии с предыдущими вычислениями для этого I мы также получим (П5.11), для которого (П5.12) заменяется на

$$\bar{\sigma}^2(x_{2i}) = \sigma^2[f(x_{2i})] + \{f'[f(x_{2i})]\}\sigma^2[f(x_{2i})]. \tag{П5.14}$$

Объединяя (П5.5), (П5.11) и (П5.14), изменяя масштабы и индексы, т. е.

$$x_{2i} \equiv \bar{x}_i/\alpha \ (\alpha = -|\alpha|), \tag{П5.15}$$

получаем

$$\langle x_n \rangle \sim \int \prod_1^{n/2} d\bar{x}_i \bar{x}_{n/2} \prod_0^{n/2} P[\bar{x}_{i+1} - Tf(\bar{x}_i); \sigma^2(\bar{x}_i)], \tag{П5.16}$$

где T — оператор удвоения:

$$Tf(x) = \alpha f\left[f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] \tag{П5.17}$$

и

$$\bar{\sigma}^2(x) = \alpha^2 \left\{\sigma^2\left[f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right] + \left[f'\left[f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right]^2 \sigma^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\} \equiv$$

$$\equiv \hat{L}_f \sigma^2(x), \tag{П5.18}$$

т. е. $\bar{\sigma}^2(x)$ получается действием линейного оператора $\hat{L}_f$ на $\sigma^2(x_n)$. Отметим, что изменение масштабов и индексов необходимо, чтобы привести выражение для $\langle x_n \rangle$ (П5.16) *к прежнему виду* (П5.4), так что всю процедуру ренормализации можно повторить.

После m шагов окончательно получим

$$\langle x_n \rangle \sim \int \prod_1^{n/2^m} d\bar{x}_i \bar{x}_{n/2^m} \prod_0^{n/2^m} P[\bar{x}_{i+1} - T^m f(x_i);$$

$$\hat{L}_{T^{m-1}f} \ldots \hat{L}_{Tf} \hat{L}_f \sigma^2(\bar{x}_i)]. \tag{П5.19}$$

Для $m \gg 1$ снова имеем (см. (3.53)):

$$T^m f_R(x) = g(x) + r\delta^m a h(x); \quad r = R_\infty - R, \tag{П5.20}$$

и по аналогии с (3.36)—(3.43)

$$\hat{L}_{T^{m-1}f} \ldots \hat{L}_f \sigma^2(x) \cong \hat{L}_g^m \sigma^2(x) \cong \hat{\beta}^{2m} \hat{\sigma}^2(x), \tag{П5.21}$$

где $\hat{\beta}^2$ и $\hat{\sigma}^2$ обозначают наибольшее собственное значение и собственную функцию $\hat{L}_g$. Тогда $\langle x_n \rangle$ можно записать в виде

$$\langle x_n \rangle \sim \int \prod_1^{n/2^m} d\bar{x}_i \bar{x}_{n/2^m} \prod_0^{n/2^m - 1} P[\bar{x}_{i+1} - g(\bar{x}_i) -$$

$$- r\delta^m a h(\bar{x}_i); \hat{\beta}^{2m} \hat{\sigma}^2(\bar{x}_i)]. \tag{П5.22}$$

Для показателя Ляпунова λ это дает

$$\exp[n\lambda(r; \sigma)] = \left|\frac{d}{dx_0}\langle x_n \rangle\right| = \exp[(n/2^m)\lambda[r\delta^m; \sigma\hat{\beta}^m]], \tag{П5.23}$$

где σ обозначает начальную амплитуду шума. Если положить

$\hat{\beta}^m\sigma = 1$ и $\lambda(x; 1) = L(x)$, получим искомое скейлинговое поведение λ:

$$\lambda(r, \sigma) = \sigma^\theta L[r\sigma^{-\gamma}], \tag{П5.24}$$

где

$$\theta = \ln 2/\ln\hat{\beta} = 0{,}367 \quad \text{и} \quad \gamma = \ln\delta/\ln\hat{\beta} = 0{,}815. \tag{П5.25}$$

Отметим, что численное значение $\hat{\beta}$ ($\hat{\beta} = 6{,}618$), полученное как решение уравнения для собственных чисел

$$\hat{L}_g\hat{\sigma}^2(x) = \hat{\beta}^2\hat{\sigma}^2(x), \tag{П5.26}$$

разумно согласуется с наиболее точным значением μ ($\mu = 6{,}557$). Это подтверждает правильность предыдущего исследования влияния внешнего шума.

6. Мера информации Шеннона[1)]

Это краткое эвристическое введение в шенноновскую меру информации позволит читателю разобраться в гл. 2 и 5. Для более детального изучения рекомендуем книгу (Shannon, Weaver, 1949).

Информационная емкость «кассы». На рис. 122, *а* показана система с двумя возможными состояниями. Если положение точки заранее неизвестно и мы узнаем, что она, скажем, в левом ящике кассы, то по определению мы увеличим суммарную информацию на 1 бит. Имея эту информацию, мы экономим один вопрос (с возможными ответами «да» и «нет»), необходимый для определения

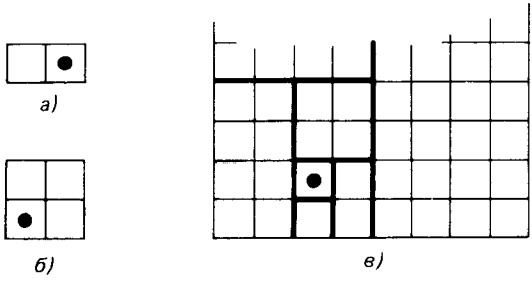


Рис. 122. Информационная емкость «кассы»: *а* — ящик с двумя состояниями; *б* — чтобы найти точку в системе с четырьмя состояниями, достаточно двух вопросов (слева или справа? вверху или внизу?); *в* — чтобы обнаружить точку на шахматной доске с $64 = 2^6$ состояниями, необходимо шесть вопросов.

[1)] См. ссылки к гл. 5.

местоположения точки. Таким образом, максимальная информация, содержащаяся в системе с двумя состояниями, — один бит.

Для обнаружения точки в ящике с четырьмя возможными состояниями требуется два вопроса, т. е. максимальное количество информации

$$I = 2 \text{ бит}. \tag{П6.1}$$

(Мы будем в дальнейшем опускать единицу измерения — бит.)

Это равенство можно записать в виде логарифма по основанию два от числа возможных состояний

$$I = \mathrm{ld}\, 4. \tag{П6.2}$$

В соответствии с рис. 122, *в* вообще справедливо логарифмическое соотношение между максимальным количеством информации I и числом состояний N:

$$I = \mathrm{ld} N. \tag{П6.3}$$

Приращение информации. Вычислим теперь среднее приращение информации, когда мы узнаем результат статистических событий. Предположим, что мы подбрасываем монету так, что «орлы» и «решки» равновероятны:

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}. \tag{П6.4}$$

Информация I, полученная, если мы узнаем, что результат эксперимента, например, «орел»,

$$I = 1, \tag{П6.5}$$

так как здесь два равновероятных состояния (рис. 122, *а*). Это утверждение можно выразить через $\{p_i\}$:

$$I = -\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{ld}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{ld}\,\frac{1}{2}\right), \tag{П6.6}$$

или

$$I = -\sum_i p_i \,\mathrm{ld} p_i. \tag{П6.7}$$

Уравнение (П6.7) можно обобщить на случай, когда все p_i различны:

$$p_1 \neq p_2 = 1 - p_1. \tag{П6.8}$$

Тогда оно дает среднее приращение информации при многократном подбрасывании деформированной монеты.

Пусть $p_1 = r/q$, где r и q — взаимно простые целые. Выберем число m событий так, что mr/q — также целое число. Полное число различных состояний при m подбрасываниях (деформированной) монеты равно

$$N = \frac{m!}{(p_1 m)!(p_2 m)!}, \tag{П6.9}$$

где выделены перестановки, соответствующие изменению порядка следования событий (последовательности «о», «о», «о», «р» и «о», «о», «р», «о», где «о» — орел, «р» — решка, относятся к одному состоянию). В пределе при $m \to \infty$ можно применить формулу Стирлинга, и выражение (П6.3) для среднего приращения информации преобразуется к виду

$$I = \frac{1}{m}\,\mathrm{ld}\,N = \frac{1}{m}\,\mathrm{ld}\left[\left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m \left(\frac{\mathrm{e}}{p_1 m}\right)^{p_1 m} \left(\frac{\mathrm{e}}{p_2 m}\right)^{p_2 m}\right] =$$

$$= -(p_1\,\mathrm{ld}\,p_1 + p_2\,\mathrm{ld}\,p_2). \tag{П6.10}$$

Это также подтверждает выражение (П6.7), которое можно обобщить (результат получен Шенноном): если априори известно только, что $1 \ldots n$ событий (или состояний системы) имеют место с вероятностями $\{p_i\}$ $\left(\text{так что } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$, и мы узнаем путем измерения, что имеет место событие j (или система в настоящий момент находится в некотором состоянии), то, многократно повторяя измерения, получим среднее приращение информации

$$I = -\sum_{i=1}^{n} p_i\,\mathrm{ld}\,p_i. \tag{П6.11}$$

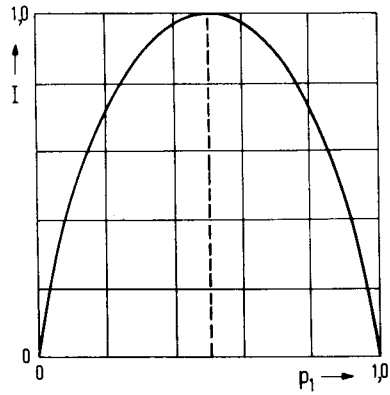


Рис. 123. $I(p)$ для эксперимента с двумя возможными результатами. Если $p_1 = 0$, мы уверены, что результатом будет событие 2 и информация не увеличивается. Максимум информации достигается при $p_1 = p_2 = 1/2$, когда неопределенность результата максимальна и можно больше всего извлечь из эксперимента.

7. Удвоение периода для консервативного отображения Хенона[1)]

Рассмотрим сохраняющее площадь квадратичное отображение Хенона

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n; \tag{П7.1а}$$
$$y_{n+1} = x_n, \tag{П7.1б}$$

которое описывает, например, периодически возбуждаемый ротатор при нулевом затухании и малых амплитудах (см. гл. 1). Мы хотим показать, что это отображение (представляющее целый класс двумерных отображений с квадратичным максимумом) также приводит к каскаду удвоений периода, но постоянные Фейгенбаума в этом случае больше, чем для одномерных отображений.

Обозначая

$$x_n = -\frac{2}{a}\bar{x}_n + \beta; a\beta^2 + 2\beta - 1 = 0; C = -a\beta \tag{П7.2}$$

и опуская черточки над символами, преобразуем (П7.1 *а*, *б*) к виду

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 2Cx_n + 2x_n^2 - y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{aligned}\right\} \equiv T\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{П7.3}$$

Вначале исследуем неподвижные точки T и T^2 и их устойчивость, затем введем схему ренормализации Хеллемана (Hellemann, 1980), проясняющую механизм удвоения и позволяющую просто оценить константы Фейгенбаума.

Неподвижные точки для T:

$$x_1^* = y_1^* = 0 \quad \text{и} \quad x_2^* = y_2^* = 1 - C. \tag{П7.4}$$

Для второй итерации T^2, где

$$T^2\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{cases} x_{n+2} = 2C[2Cx_n + 2x_n^2 - y_n] + 2[2Cx_n + 2x_n^2 - y_n]^2 - x_n; \\ y_{n+2} = 2Cx_n + 2x_n^2 - y_n, \end{cases} \tag{П7.5}$$

неподвижные точки определяются из уравнения

$$(Cx + x^2)^2 + C(Cx + x^2) - x = 0. \tag{П7.6}$$

Чтобы решить это уравнение, заметим, что неподвижные точки (П7.4) для T являются также неподвижными точками T^2, т. е.

[1)] См. ссылки к гл. 6.

(П7.6) можно свести к квадратичному уравнению с решениями

$$x^*_{3,4} = y^*_{3,4} = \frac{1}{2}\left[-(C+1) \pm \sqrt{(C+1)(C-3)}\right]. \qquad (П7.7)$$

Устойчивость неподвижных точек (так же, как и в одномерном случае) определяется собственными значениями матрицы производных

$$L(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_x}{\partial x} & \dfrac{\partial T_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T_y}{\partial x} & \dfrac{\partial T_y}{\partial y} \end{pmatrix}_{x^*, y^*} = \begin{pmatrix} 2C + 4x^* & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (П7.8)$$

равными

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sp}L \pm \sqrt{(\mathrm{Sp}L)^2 - 4}\right], \qquad \mathrm{Sp}L = 2C + 4x^*. \qquad (П7.9)$$

Так как отображение T сохраняет площадь, то $\det L = 1$ и $\lambda_2 = 1/\lambda_1$. Тогда остаются только два существенно различных вида неподвижных точек (параболические точки мы не рассматриваем, так как они нетипичны):

а) гиперболическая неподвижная точка: величины λ действительные, $\lambda_1 > 1$, следовательно, $\lambda_2 = 1/\lambda_1 < 1$, т. е. движение вдоль собственных векторов e_1 и e_2 (рис. 124) описывается выражениями

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + L\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix};$$

$$L\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \Delta x \\ 1/\lambda_1 & \Delta y \end{bmatrix}, \qquad (П7.10)$$

т. е. неподвижная точка неустойчива, так как все траектории, не заключенные в устойчивую трубку вдоль e_2, уходят от (x^*, y^*), а для достижения неподвижной точки вдоль e_2 требуется бесконечное чис-

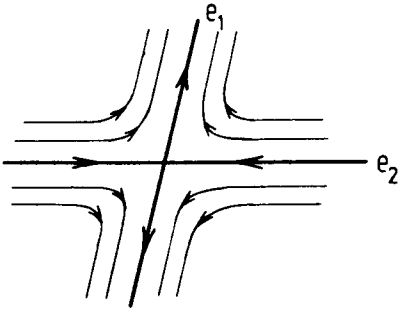


Рис. 124. Траектории вблизи гиперболической (седловой) неподвижной точки с собственными векторами e_1 и e_2.

ло итераций:

$$\lim_{n \to \infty} L^n \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta y \end{bmatrix} = \lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} 0 \\ (1/\lambda_1)^n \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (П7.11)$$

б) эллиптическая неподвижная точка: величины λ — комплексно-сопряженные решения квадратного уравнения

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}, \quad \text{так как} \quad \det L = \lambda_1^* \lambda_1 = 1. \qquad (П7.12)$$

После преобразования координат можно представить L в виде простого поворота

$$L \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}, \qquad (П7.13)$$

и неподвижная точка устойчива, так как каждая точка, попав в ее окрестность, остается в ней и никогда не покидает ее под действием L (рис. 125).

В соответствии с (П7.9) собственные значения зависят только от следа линеаризованной матрицы преобразования, отсюда получим критерий устойчивости:

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Sp} L_T| < 2 \to \text{устойчивая неподвижная точка;} \\ &|\mathrm{Sp} L_T| > 2 \to \text{неустойчивая неподвижная точка.} \end{aligned} \qquad (П7.14)$$

Таким образом, устойчивость неподвижных точек T (П7.4):

$$x^* = y^* = 0 \to |\mathrm{Sp} L| = |2C| \to \text{устойчива при } |C| < 1, \qquad (П7.15а)$$

$$x^* = y^* = 1 - C \to |\mathrm{Sp} L| = 2|2 - C| \to \text{неустойчива при } |C| > 1. \qquad (П7.15б)$$

Для T^2 получим по аналогии с цепным правилом для одномерного случая ($\mathrm{d}f^2(x)/\mathrm{d}x = f'[f(x)]f'(x)$):

$$\mathrm{Sp} L_{T^2} = \mathrm{Sp}[L_T(x_3^*, y_3^*) L_T(x_4^*, y_4^*)] = \qquad (П7.16)$$

$$= 2[-2(C+1)(C-3)+1] = \begin{cases} 1 & \text{при } C = -1, \\ -1 & \text{при } C = 1 - \sqrt{5}, \end{cases}$$

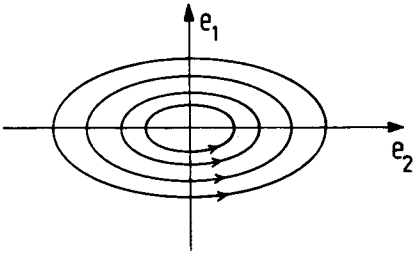


Рис. 125. Траектории вблизи эллиптической неподвижной точки.

где функциональная матрица T^2 обозначена как L_{T^2} и $T(x_3^*, y_3^*) = T(x_4^*, y_4^*)$.

Объединяя (П7.15), (П7.16), получаем, что (x_1^*, y_1^*) — аттрактор периода 1, устойчивый при $-1 < C < 1$, а $(x_{3,4}^*, y_{3,4}^*)$ — аттрактор периода 2, устойчивый при $1 - \sqrt{5} < c < -1$. Так начинается каскад бифуркаций.

Продемонстрируем теперь самоподобие, приводящее к последовательности удвоений периода, с помощью ренормализационной схемы Хеллемана.

Схема начинается с выражения (П7.3), записанного в виде

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2Cx_n + 2x_n^2. \qquad (П7.17)$$

Линеаризация этого уравнения вблизи неподвижных точек периода два

$$x_n^* = \frac{1}{2}\left[-(C+1) + (-1)^n\sqrt{(C+1)(C-3)}\right]; \quad n = 0, 1, 2, 3 \qquad (П7.18)$$

дает

$$\Delta x_{n+1} + \Delta x_{n-1} = (2C + 4x_n^*)\Delta x_n - 2(\Delta x_n)^2. \qquad (П7.19)$$

Если добавить (П7.19), получим для $n = 2m + 1$ и $n = 2m - 1$:

$$\Delta x_{2m+2} + \Delta x_{2m-2} = -2\Delta x_{2m} + (2C + 4x_0^*) \times$$
$$\times [\Delta x_{2m+1} + \Delta x_{2m-1}] + 2[(\Delta x_{2m-1})^2 + (\Delta x_{2m+1})^2]. \qquad (П7.20)$$

Затем вычислим (П7.19) при $n = 2m$:

$$\Delta x_{2m+1} + \Delta x_{2m-1} = (2C + 4x_1^*)\Delta x_{2m} + 2(\Delta x_{2m})^2, \qquad (П7.21)$$

и объединим его с (П7.20):

$$\Delta x_{2m+2} + \Delta x_{2m-2} = 2C'\Delta x_{2m} + 2\alpha(\Delta x_{2m})^2 + O[(\Delta x)^3]. \qquad (П7.22)$$

Это выражение можно привести к виду (П7.17), изменив масштаб $x' = \alpha\Delta x_{2m}$:

$$x'_{m+1} + x'_{m-1} = 2C'x'_m + 2x'^2_m, \qquad (П7.23)$$

где

$$C' = 2(C + 2x_1^*)(C + 2x_0^*) - 1 = 2C^2 + 4C + 7; \qquad (П7.24)$$
$$\alpha = 2(C + 2x_1^*) + 2(C + 2x_0^*)^2. \qquad (П7.25)$$

Соотношение (П7.23) означает следующее: если двумерное отображение разложить с точностью до второго порядка вблизи цикла 2 и результат перемасштабировать, то получится прежнее отображение, т. е. устойчивость $x^* = y^* = 0$ при $|C| < 1$ подразумевает (из-за подобия (П7.17) и (П7.23)) устойчивость $x^{*\prime} = y^{*\prime} = \Delta x = \Delta y = 0$, т. е. цикла 2 при $|C| = |-2C^2 + 4C + 7| < 1$ или $1 - \sqrt{5} < C < -1$.

Повторяя эти рассуждения, видим, что выражение (П7.23) справедливо также для производных вблизи цикла 4 и т. д. Получается каскад бифуркаций с циклами периода 2^n, устойчивыми при $C_{n-1} < C < C_n$, где

$$C_{n-1} = 2C_n^2 + 4C_n + 7. \qquad (П7.26)$$

Бифуркационные точки сгущаются к C_∞:

$$C_\infty = 2C_\infty^2 + 4C_\infty + 7 \to C_\infty = -1{,}2656(1{,}266311\ \ldots), \qquad (П7.27)$$

откуда

$$\alpha = \alpha(C_\infty) = -4{,}128(4{,}018077\ \ldots) \qquad (П7.28)$$

и константа Фейгенбаума определяется зависимостью

$$C_n = C_\infty + A\delta^{-n}, \quad \text{где} \quad \delta = 9{,}06(8{,}72109\ \ldots) \qquad (П7.29)$$

(числа в скобках показывают наилучшие численные значения для констант, определенные к настоящему времени).

На рис. 126 показаны орбиты отображения Хенона (П7.1а, П7.1б) вблизи устойчивой неподвижной точки и после первой бифуркации.

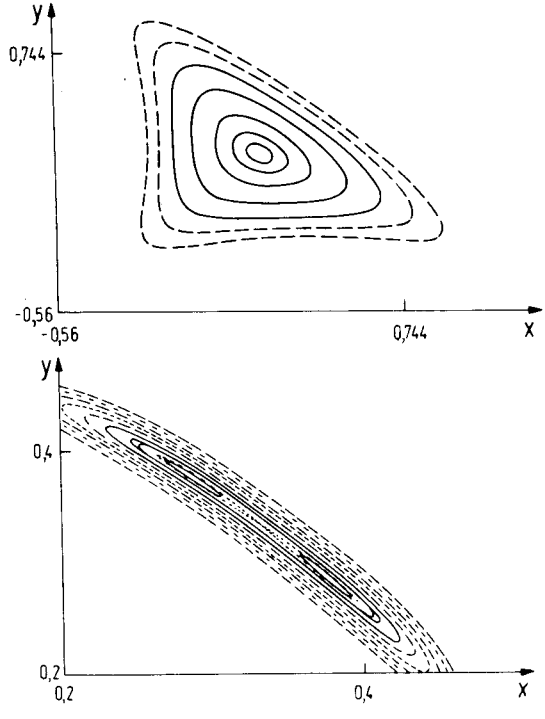


Рис. 126. Орбиты для отображения Хенона: *а*) при $a = 0{,}95$; *б*) при $a = 3{,}02$ (Bountis, 1981).

Аннотированная литература

Нижеперечисленные вводные обзоры и книги содержат обширные списки оригинальной литературы (только в статьях Хеллемана около 300 ссылок), поэтому автор даже не пытался привести здесь все ссылки и просит извинения у тех, чьи работы не указаны. Ссылки и материалы для дальнейшего изучения приводятся отдельно к каждой главе.

Введение

Оригинальные работы и общие источники:

Abraham R. H., Shaw C. D. (1981): Dynamics — The Geometry of Behaviour. Aeriel Press, Santa Cruz.

Арнольд В. И. Малые знаменатели II. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малых изменениях функции Гамильтона. — УМН, 1963, т. 18, вып. 5, с. 13.

Arnold V. I., Avez A. (1968): Ergodic Problems of Classical Mechanics. Benjamin, New York.

Balescu R. (1975): Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics. Wiley, New York.

Campbell D., Rose H. (eds.) (1983), "Proc. of the International Conference on 'Order in Chaos' in Los Alamos", Physica **7D**, 1.

Chandrasekhar S. (1961): Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford.

Chirikov B. V. (1980): "A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems", Phys. Rep. **52**, 463.

Collet P., Eckmann J. P. (1980): Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems. Birkhäuser, Boston.

Coullet P., Tresser J. (1978), "Iterations d'Endomorphismes et Groupe de Renormalisation", C. R. Hebd. Seances Acad. Sci., Ser. **A287**, 577; J. Phys. (Paris) Coll. **39**, C5—25 (1978).

Cvitanovich P. (ed.) (1984): Universality in Chaos. A reprint selection, Adam Hilger, Bristol.

Eckmann J. P. (1981). "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys, **53**, 643.

Feigenbaum M. J. (1978). "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", J. Stat. Phys. **19**, 25.

Feigenbaum M. (1980): Universal Behaviour in Nonlinear Systems. Los Alamos Science.

Garrido L. (ed.) (1982): Dynamical Systems and Chaos. Lect. Notes in Physics **179**, Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Gorel D. G., Roessler O. E. (eds.) (1978), "Bifurcation Theory in Scientific Disciplines", Ann. N. Y. Acad. Sci. **306**.

Grossmann S., *Thomae S.* (1977), "Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes", Z. Naturforsch. **32A**, 1353.

Haken H. (ed.) (1981): Chaos and Order in Nature. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Haken H. (1982): Synergetics. 2nd ed. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo. (Имеется перевод 1-го изд.: *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1980.)

Haken H. (ed.) (1982): Evolution of Order and Chaos. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Haken H. (1984): Advanced Synergetics. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo. (Имеется перевод: *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985.)

Hellemann R. H. G. (1980), in E. G. D. Cohen (ed.): Fundamental Problems in Statistical Mechanics. Vol. V. North — Holland, Amsterdam — New York, p. 165.

Hellemann R. H. G. (ed.) (1980), "Proc. of the 1979 Int. Conf. of Nonlinear Dynamics", Ann. N. Y. Acad. Sci. **603**.

Hellemann R. H. G., *Ioos G.* (eds.) (1983): Les Houches Summerschool on "Chaotic Behaviour in Deterministic Systems". North-Holland, Amsterdam.

Hu B. (1982), "Introduction to Real Space Renormalization Group Methods in Critical and Chaotic Phenomena", Phys. Rep. **31**, 233.

Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. — ДАН СССР, 1944, т. 44, с. 339—342.

Ландау Л. Д., *Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. 3-е изд. — М.: Наука, 1986.

Lichtenberg A. J., *Liebermann M. A.* (1983): Regular and Stochastic Motion. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Lorenz E. N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", J. Atmos. Sci. **20**, 130.

Manneville P., *Pomeau Y.* (1979), "Intermittency and the Lorenz Model", Phys. Lett. **75A**, 1.

May R. M. (1976), "Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics", Nature **261**, 459.

Монин А. С., *Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1967.

Moser J. (1967). "Convergent Series Expansions of Quasi-Periodic Motions", Math. Ann. **169**, 163.

Moser J. (1973): Stable and Random Motion in Dynamical Systems. Princeton Univ. Press.

Moser J. (1978), "Is the Solar System Stable?", Math. Intelligencer **1**, 65.

Newhouse S., *Ruelle D.*, *Takens F.* (1978), "Occurence of Strange Axiom — A Attractors near Quasiperiodic Flow on T^m, $m \geqslant 3$", Commun. Math. Phys. **64**, 35.

Ott E. (1981), "Strange Attractors ans Chaotic Motions of Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys. **53**, 655.

Poincaré H. (1892): Les Méthodes Nouvelles de la Méchanique Celeste. Gauthier-Villars, Paris; in English (1967): N.A.S.A. Translation TT F-450/452. U.S. Fed. Clearinghouse, Springfield, VA, USA.

Ruelle D., *Takens F.* (1971), "On the Nature of Turbulence", Commun. Math. Phys. **20**, 167.

Ruelle D. (1980), "Strange Attractors", Math. Intelligencer **2**, 126.

Shaw R. S. (1981), "Strange Attractors, Chaotic Behaviour and Information Flow", Z. Naturforsch. **36A**, 80.

Swinney H. L., *Gollub J. P.* (1981): Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Tomita K. (1982), "Chaotic Response of Nonlinear Oscillators", Phys. Rep. **86**, 113.

Vidal C., *Pacault A.* (1981): Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Zaslavsky G. M. (1981), "Stochasticity in Quantum Systems", Phys. Rep. **80**, 157.

Сведения о системах, перечисленных в табл. 1, можно найти в следующих работах:

1. *Humiéres D. D.*, *Beasly M. R.*, *Humberman B. A.*, *Libchaber A.*, "Chaotic States and Routes to Chaos in the Forced Pendulum", Phys. Rev. **26A** (1982) 3483.
2. *Libchaber A.*, *Maurer J.*, in T. Riste (ed.): Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities. NATO Adv. Study Inst., Plenum Press, New York (1982); см. также выше (Gollub, Swinney, 1981).
3. *Haken H.*, "Analogy between Higher Instabilities in Fluids and Lasers", Phys. Lett. **53A** (1975) 77.
4. *Hopf F. A.*, *Kaplan D. L.*, *Gibbs H. M.*, *Shoemaker R. L.*, "Bifurcations to Chaos in Optical Bistability", Phys. Rev. **25A** (1982) 2172.
5. *Cirillo M.*, *Pedersen N. F.*, "On Bifurcations and Transitions to Chaos in a Josephson Junction", Phys. Lett. **90A** (1982) 150.
6. *Simoyi R. H.*, *Wolf A.*, *Swinney H. L.*, "One Dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction", Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 245.

7—8. См. выше обзорную статью (Hellemann, 1980).

9. *Wersinger J. M.*, *Finn J. M.*, *Ott E.*, in G. Laval, D. Gresillon (eds.): Intrinsic Stochasticity in Plasmas. Les Editions se Physique, Courtaboeuf, Orsay, France 1980.
10. См. выше статью (May, 1981).
11. *Glass L.*, *Guevara M. R.*, *Shrier A.*, "Bifurcations and Chaos in a Periodically Stimulated Cardiac Oscillator", Physica **7D** (1983) 89; *Winfree A. T.*, Sci. Am. **248**, No. 5 (1983).

Глава 1

Эксперименты и простые модели

Дополнительную информацию о системах, представленных в табл. 2, можно получить в следующих работах:

Dubois M., *Bergé P.* (1981), "Instabilités de Couche Limite dans un Fluide en Convection. Evolution vers la Turbulence", J. Phys. (Paris) **42**, 167.

Epstein I. R., *Kustin K.*, *de Kepper P.*, *Orban M.* (1983), "Oscillating Chemical Reactions", Sci. Am. **248**, No. 3.

Hénon M., *Heiles C.* (1964), "The Applicability of the Third Integral of the Motion: Some Numerical Results", Astron. J. **69**, 73.

D'Humieres D., *Beasly M. R.*, *Huberman B. A.*, *Libchaber A.* (1982), "Chaotic States and Routes to Chaos in the Forced Pendulum", Phys. Rev. **A26**, 3483.

McLaughlin J. B., *Martin P. C.* (1975), "Transition to Turbulence of a Statically Stressed Fluid System", Phys. Rev. **A12**, 186.

Libchaber A., *Maurer J.* (1982), In T. Riste (ed.): Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities. NATO Advanced Study Inst., Plenum Press, New York.

Lorenz E. N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", J. Atmos. Sci. **20**, 130.

Roux J. C., *Rossi A.*, *Bachelart S.*, *Vidal C.* (1981), "Experimental Observations of Complex Behaviour During a Chemical Reaction", Physica **2D**, 395.

Saltzman B. (1981), "Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem I", J. Atmos. Sci. **19**, 329.

Simoyi R. H., *Wolf A.*, *Swinney H. L.* (1982), "One-Dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction", Phys. Rev. Lett. **49**, 245.

Swinney H. L., *Gollub J. P.* (1978), "The Transition to Turbulence", Phys. Today **31(8)**, 41.
Swinney H. L., *Gollub J. P.* (eds.) (1980): "Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence", Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.
Tyson J. J. (1976): The Belousov-Zhabotinsky Reaction. Lecture Notes in Biomathematics **22**. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.
Vidal C., *Roux J. C.*, *Bachelart S.*, *Rossi A.*, in R.H.G. Hellemann (ed.) (1980): "Proc. of the 1979 Int. Conf. on Nonlinear Dynamics". Ann. N.Y. Acad. Sci. **603**.
Wegmann K., *Roessler O. E.* (1978), "Different Kinds of Chaos in the Belousov-Zhabotinsky Reaction", Z. Naturforsch. **33a**, 1179.

Ротатор, возбуждаемый периодическими толчками, и близкие вопросы исследованы в работах

Campbell D., *Rose H.* (eds.) (1983), "Proc. of the International Conference on "Order in Chaos" in Los Alamos", Physica **7D**, 1.
Chandrasekhar S. (1961): Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Clarendon Press, Oxford.
Chirikov B. V. (1979), "A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems", Phys. Rep. **52**, 463.
Hénon M. (1976), "A Two Dimensional Map with a Strange Attractor", Commun. Math. Phys. **50**, 69.
Ott E. (1981), "Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys. **53**, 655.
Zaslavsky G. M. (1978), "The Simpliest Case of Strange Attractor", Phys. Lett. **69A**, 145.
Заславский Г. М., *Рачко Х.-Р. Я.* Особенности перехода к турбулентному движению. — ЖЭТФ, 1979, т. 49, с. 1039.

Глава 2

Кусочно-линейные отображения и детерминированный хаос

Сдвиг Бернулли обсуждается в работах

Billingsley P. (1964): Ergodic Theory and Information. Wiley, New York. (Имеется перевод: *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969.)
Shaw R. S. (1981), in H. Haken (ed.): Chaos and Order in Nature. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.

Доказательство того факта, что двоичное разложение почти всех иррациональных чисел из [0, 1] бесконечное число раз включает в себя любую конечную последовательность, имеется в работе

Hardy G. H., *Wright E. M.* (1938): The Theory of Numbers. Oxford University Press, Oxford, p. 125.

Дальнейшие сведения о поведении кусочно-линейных отображений можно найти в работах

Grossmann S., *Thomae S.* (1977), "Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes", Z. Naturforsch. **32A**, 1353.
Shaw R. S. (1981), "Strange Attractors, Chaotic Behaviour and Information Flow", Z. Naturforsch. **36A**, 80.

Детерминированная диффузия рассмотрена, например, в работах

Geisel T., *Nierwetberg J.* (1982), "Onset of Diffusion and Universal Scaling in Chaotic Systems", Phys. Rev. **48**, 7.
Grossmann S., *Fujisaka H.* (1982), "Diffusion in Discrete Nonlinear Systems", Phys. Rev. **26A**, 1779.
Grossmann S. (1982), in H. Haken (ed.): Evolution of Order and Chaos. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo.
Haken H. (1982): Synergetics, 2nd Ed. Springer, Berlin — Heidelberg — New York — Tokyo. (Имеется перевод: *Хакен Г.* Синергетика. — М.: Мир, 1978.)

Глава 3

Универсальное поведение квадратичных отображений

Оригинальные статьи и общие сведения

Collet P., *Eckmann J. P.* (1980): Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems. Birkhäuser, Boston.
Collet P., *Eckmann J. P.*, *Landford O. E.* (1980), "Universal Properties of Maps on an Interval", Commun. Math. Phys. **76**, 211.
Collet P., *Tresser J.* (1978), "Iteration d'Endomorphismes et Groupe de Renormalisation", C. R. Hebd. Seances Acad. Sci. Series **A287**, 577; J. Phys. (Paris) **C5**, 25 (1978).
Derrida B., *Gervois A.*, *Pomeau Y.* (1979), "Universal metric Properties of Bifurcations and Endomorphisms", J. Phys. **12A**, 269.
Feigenbaum M. J. (1978), "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Trasfomations", J. Stat. Phys. **19**, 25.
Feigenbaum M. J. (1979), "The Universal Properties of Nonlinear Transformations", J. Stat. Phys. **21**, 669.
Grossmann S., *Thomae S.* (1977), "Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes", Z. Naturforsch. **32A**, 1353.
Hubermann B. A., *Rudnick J.* (1980), "Scaling Behaviour of Chaotic Flows", Phys. Rev. Lett. **45**, 154.
May R. M. (1976), "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", Nature **261**, 459.
Metropolis M., *Stein M. L.*, *Stein P. R.* (1973), "On Finite Limit Sets for Transformations of the Unit Interval", J. Combinatorial Theory (A) **16**, 25.
Lanford O. E. (1982): "A Computer Assisted Proof of the Feigenbaum Conjectures", Bull. Am. Math. Soc. **6**, 427.
Peitgen H. O., *Richter P. H.* (1984): Harmonie in Chaos und Kosmos, und Morphologie komplexer Grenzen; Bilder aus der Theorie dynamischer Systeme.

Хаусдорфова размерность и связанные с ней вопросы обсуждаются в работах

Grassberger P. (1981), "On the Hausdorff Dimension of Fractal Attractors", J. Stat. Phys. **19**, 25.
Mandelbrot B. B. (1982): The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco.

Универсальные характеристики спектра мощности вычислены в работах

Collet P., *Eckmann J. P.* (1980): Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems. Birkhäuser, Boston.
Feigenbaum M. J. (1979), "The Onset Spectrum of Turbulence", Phys. Lett. **74A**, 375.
Feigenbaum M. J. (1980), "The Transition to Aperiodic Behaviour in Turbulent Systems", Commun. Math. Phys. **77**, 65.
Nauenberg M., *Rudnick J.* (1981), "Universality and the Power Spectrum at the Onset of Chaos", Phys. Rev. **B24**, 439.

О влиянии внешнего шума на удвоение периодов см., например, работы

Crutchfield J. P., *Nauenberg M.*, *Rudnick J.* (1981), "Scaling for External Noise at the Onset of Chaos", Phys. Rev. Lett. **46**, 933.
Crutchfield J. P., *Farmer J. D.*, *Hubermann B. A.* (1982), "Fluctuations and Simple Chaotic Dynamics", Phys. Rep. **92**, 45.
Feigenbaum M. J., *Hasslacher B.* (1982), "Irrational Decimations and Path Integrals for External Noise", Phys. Rev. Lett. **49**, 605.
Shraiman B., *Wayne C. E.*, *Martin P. C.* (1981), "Scailing Theory for Noisy Period-Doubling to Chaos", Phys. Rev. Lett. **46**, 935.

Тонкая структура хаотического режима исследуется в работах

Geisel T., *Nierwetberg J.* (1981), "Universal Fine Structure of the Chaotic Region in Period-Doubling Systems", Phys. Rev. Lett. **47**, 975.
Tomae S., *Grossmann S.* (1981), "Correlations and Spectra of Periodic Chaos Generated by the Logistic Parabola", J. Stat. Phys. **26**, 485.

Дальнейшие сведения о топологической сопряженности и о производной Шварца можно найти в книге Колле и Экмана, упомянутой в начале списка литературы к этой главе, а также в работе

Landford O. E. (1980), "Smooth Transformations of Intervals", Seminare BOURBAKI No. 563.

Упомянутые в тексте эксперименты изложены в работах

Lauterborn W., *Cramer E.* (1981), "Subharmonic Route to Chaos Observed in Acoustics", Phys. Rev. Lett. **47**, 1145.
Lauterborn W. (1982), "Cavitation Bubble Dynamics. New Tools for an Intricate Problem", Appl. Sci. Research **38**, 165.
Lauterborn W., *Meyer-Ilse W.* (1984), "Chaos-Ausdruck der Nichtlinearität der Naturgesetze", Phys. Bl.
Lauterborn W., *Suchla E.* (1984), "Bifurcation Superstructure in a Model of Acoustical Turbulence", Phys. Rev. Lett.

Libchaber A., *Maurer J.* (1980), "Une Experience de Rayleigh — Benard de Geometrie Reduite; Multiplication, Accrochage et Demultiplication de Frequence", J. Phys. (Paris) Coll. **41**, C 3-51.

Libchaber A., *Maurer J.* (1982), in T. Riste (ed.): Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities. NATO Adv. Study Institute, Pergamon Press, New York.

Linsay P. S. (1981), "Period Doubling and Chaotic Behaviour in a Driven Anharmonic Oscillator", Phys. Rev. Lett. **47**, 1349.

Rollins R. W., *Hunt E. R.* (1982), "Exactly Solvable Model of a System Exhibiting Universal Chaotic Behaviour", Phys. Rev. Lett. **49**, 1295.

Testa J., *Perez J.*, *Jeffries C.* (1982), "Evidence for Universal Chaotic Behaviour of a Driven Nonlinear Oscillator", Phys. Rev. Lett. **48**, 714.

Применение ренормгруппового подхода к фазовым переходам второго рода описано, например, в книге

Ma S. K. (1976): Modern Theory of Critical Phenomena. Benjamin, New York. (Имеется перевод: *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. — М.: Мир, 1980).

Фейгенбаумовский переход наблюдался в многочисленных экспериментах. Вот еще некоторые ссылки:

Arecchi F. T., *Meucci R.*, *Puccioni G.*, *Treducce J.* (1982), "Experimental Evidence for Subharmonic Bifurcation, Multistability and Turbulence in a Q-switched Gas Laser", Phys. Rev. Lett. **49**, 1217.

Brun E., *Derighetti D.*, *Holzner R.*, *Meier D.* (1983), "the NMR-Laser — Nonlinear Solid State System Showing Chaos", Helv. Physica Acta **56**, 852.

Cirillo M., *Pedersen N. F.* (1982), "On Bifurcation and Transition to Chaos in a Josephson Junction", Phys. Lett. **90A**, 150.

Giglio M., *Muszzi S.*, *Perini V.* (1981): "Transition to Chaotic Behaviour via a Reproducible Sequence of Period-Doubling Bifurcations", Phys. Rev. Lett. **47**, 243.

Gollub J. P., *Swinney H. L.* (1975), "Onset of Turbulence in a Rotating Fluid", Phys. Rev. Lett. **35**, 927.

Gollub J. P., *Benson S. V.* (1980), "Many Routes to Turbulent Convection", J. Fluid Mech. 100, 499.

Hopf F. A., *Kaplan D. L.*, *Gibbs H. M.*, *Shoemaker R. L.* (1982), "Bifurcations to Chaos in Optical Bistability", Phys. Rev. **25A**, 2171.

Klinker T., *Meyer-Ilse W.*, *Lauterborn W.* (1984), "Period Doubling and Chaotic Behaviour in a Driven Toda Oscillator", Phys. Lett. **101A**, 371.

Libchaber A., *Laroche C.*, *Fauve S.* (1982), "Period Doubling in Mercury, a Qualitative Measurement", J. Phys. (Paris) Lett. **43**, 1211.

Pfister G. (1984), "Period Doubling in Rotational Taylor-Couette Flow", Proc. 2nd Int. Symp. on Appl. of Laser Anemometry to Fluid Mechanics. Lisboa.

Şimoyi R. H., *Wolf A.*, *Swinney H. L.* (1982), "One-Dimensional Dynamics in a Multicomponent Chemical Reaction", Phys. Rev. Lett. **49**, 245.

Smith C. W., *Tejwani M. J.*, *Farris D. A.* (1982), "Bifurcation Universality for First Sound Subharmonic Generation in Superfluid Helium-4", Phys. Rev. Lett. **48**, 429.

Глава 4

Переход к хаосу через перемежаемость

Переход через перемежаемость впервые исследован в работах

Manneville P., *Pomeau Y.* (1979), "Intermittency and the Lorenz Model", Phys. Lett. **75A**, 1.

Manneville P., *Pomeau Y.* (1980), "Different Ways to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Physica **1D**, 219.

Pomeau Y., *Manneville P.* (1979), in G. Laval, D. Gresillon (Eds.): Intrinsic Stochasticity in Plasmas. Ed. de Physique, Orsay, p. 239.

Pomeau Y., *Manneville P.* (1980), "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Comm. Math. Phys. **74**, 189.

Влияние внешнего шума на перемежаемость

Eckmann J. P., *Thomas L.*, *Wittwer P.* (1981), "Intermittency in the Presence of Noise", J. Phys. **14A**, 3153.

Hirsch J. E., *Hubermann B. A.*, *Scalapino D. J.* (1981), "Theory of Intermittency", Phys. Rev. **25A**, 519.

Ренормгрупповой подход к исследованию перемежаемости

Hirsch J. E., *Nauenberg M.*, *Scalapino D. J.* (1982), "Intermittency in the Presence of Noise: A Renormalization Group Formulation", Phys. Lett. **87A**, 391.

Hu B., *Rudnick J.* (1982), "Exact Solution of the Feigenbaum Renormalization Group Equations for Intermittency", Phys. Rev. Lett. **48**, 1645.

Фликкер-шум

Ben-Mizrachi A., *Procaccia I.*, *Rosenberg N.*, *Schmidt A.*, *Schuster H. G.* (1984), "Real and Apparent Divergencies in Low-Frequency Spectra of Nonlinear Dynamical Systems", Phys. Rev. **A**.

Dutta P., *Horn P. M.* (1981), "Low-Frequency Fluctuations in Solids", Rev. Mod. Phys. **53**, 497.

Manneville P. (1980), "Intermittency, Self-Similarity and $1/f$-Spectrum in Dissipative Dynamical Systems", J. Phys. (Paris) **41**, 1235.

Procaccia I., *Schuster H. G.* (1983), "Functional Renormalization Group Theory of Universal $1/f$-Noise in Dynamical Systems", Phys. Rev. **28A**, 1210.

Wolf D. (1978): Noise in Physical Systems. Series on Electrophysics **2**. Springer, Heidelberg — New York.

Эксперименты по наблюдению перемежаемости

Bergé P., *Dubois M.*, *Manneville P.*, *Pomeau Y.* (1980), "Intermittency in Rayleigh-Bénard Convection", J. Phys. (Paris) Lett. **41**, L-344.

Dubois M., *Rubio M. A.*, *Bérge P.* (1983), "Experimental Evidence of Intermittencies Associated with a Subharmonic Bifurcation", Phys. Rev. Lett. **51**, 1446.

Jeffries C., *Pérez J.* (1982), "Observation of a Pomeau — Manneville Intermittent Route to Chaos in a Nonlinear Oscillator", Phys. Rev. **26A**, 2117.
Pomeau Y., *Roux J. C.*, *Rossi A.*, *Bachelart S.*, *Vidal C.* (1981), "Intermittent Behaviour in the Belousov-Zhabotinsky Reaction", J. Phys. (Paris) Lett. **42**, L-271.
Roux J. C., *Kepper P.*, *Swinney H. L.* (1984). "Type-II Intermittency in the Belousov-Zhabotinsky Reaction", будет опубликовано.
Yeh W. J., *Kao Y. H.* (1983), "Intermittency in Josephson Junctions", Appl. Phys. Lett. **42**, 299.

Глава 5

Странные аттракторы в диссипативных динамических системах

Введение и определение странного аттрактора

Eckman J. P. (1981), "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys. **53**, 643.
Hénon M. (1976), "A Two-Dimensional Map with a Strange Attractor", Commun. Math. Phys. **50**, 69.
Lanford O. E. (1977), "Turbulence Seminar", in P. Bernard, T. Rativ (eds.): Lecture Notes in Mathematics **615**, Springer, Heidelberg — New York, p. 114.
Lorenz E. N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", J. Atmos. Sci. **20**, 130.
Mandelbrot B. (1982): The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco.
Ott E. (1981), "Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys. **53**, 655.
Ruelle D. (1980), "Strange Attractors", Math. Intelligencer **2**, 126.

Доказательство теоремы Пуанкаре — Бендикссона

Hirsch M. W., *Smale S.* (1965): Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra. Academic Press, New York.

Преобразование пекаря (сохраняющее площадь и диссипативное) и гипотеза Каплана — Йорки обсуждаются в работах

Kaplan J., *Yorke J.* (1979), in H. O. Peitgen, H. O. Walther (eds.): Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points. Springer, Heidelberg — New York.
Lebowitz J. L., *Penrose O.* (1973), "Modern Ergodic Theory", Phys. Today **23** (**2**).
Russel D. A., *Hansen J. D.*, *Ott E.* (1980), "Dimension of Strange Attractors", Phys. Rev. Lett. **45**, 1175.
Shaw R. S. (1981), "Strange Attractors, Chaotic Behaviour and Information Flow", Z. Naturforsch. **36a**, 80.

Энтропия Колмогорова и связанные с ней вопросы

Arnold V. I., *Avez A.* (1974): Ergodic Problems of Classical Mechanics. Benjamin, New York.

Farmer J. D. (1982a), "Information Dimension and the Probabilistic Structure of Chaos", Z. Naturforsch. **37a**, 1304.

Колмогоров А. Н. О сохранении условнопериодических движений при малом изменении функции Гамильтона. — ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.

Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория. — УМН, 1977, т. 32, с. 4, 55.

Shannon C. E., *Weaver W.* (1949): The Mathematical Theory of Information, University of Ill. Press. Urbana.

Размерности странных аттракторов

Ben-Mizrachi A., *Procaccia I.*, *Grassberger P.* (1984), "The Characterization of Experimental (Noisy) Strange Attractors", Phys. Rev. **29A**, 975.

Farmer J. D. (1982b), "Dimension, Fractal Measure and Chaotic Dynamics", in H. Haken (ed.): Evolution of Order and Chaos. Springer, Heidelberg — New York.

Grassberger P., *Procaccia I.* (1983a), "On the Characterization of Strange Attractors", Phys. Rev. Lett. **50**, 346.

Grassberger P., *Procaccia I.* (1983b), "Estimation of the Kolmogorov Entropy from a Chaotic Signal", Phys. Rev. **29A**, 2591.

Grassberger P., *Procaccia I.* (1983c), "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", Physica **9D**, 189.

Hentschel H. G. E., *Procaccia I.* (1983), "The Infinite Number of Dimensions of Probabilistic Fractals and Strange Attractors", Physica **8D**, 435.

Восстановление аттрактора по временной последовательности

Farmer J. D. (1982c), "Chaotic Attractors of an Infinite-Dimensional System", Physica **4D**, 366.

Mackey M. C., *Glass L.* (1977), Science **197**, 287.

Packard N., *Crutchfield J. P.*, *Farmer J. D.*, *Shaw R. S.* (1980), "Geometry from a Time Series", Phys. Rev. Lett. **45**, 712.

Takens F. (1981): Lecture Notes in Math. **898**. Springer, Heidelberg — New York.

Переход к турбулентности

Bergé P. (1982), "Study of the Phase Space Diagrams Through Experimental Poincaré Sections in Prechaotic and Chaotic Regimes", Physica Scripta **T1**, 71.

Brandstäter A., *Swift J.*, *Swinney H. L.*, *Wolf A.*, *Farmer D.*, *Jen E.*, *Crutchifield P.* (1983), "Low-Dimensional Chaos in a Hydrodynamic System", Phys. Rev. Lett. **51**, 1442.

Dubois M., *Bergé P.*, *Groquette V.* (1982), "Study of the Steady Convective Regimes Using Poincaré Sections", J. Phys. (Paris) Lett. **43**, L295.

Hopf E. (1942), "Abzweigungen einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialgleichungssystems", Math. Naturwiss. Klasse, Sächs. Akademie der Wissenschaften, Leipzig, **94**, 1.

Marsden J., *McCracken M.* (eds.) (1971): The Hopf-Bifurcation Theorem and its Applications. Springer, Heidelberg — New York.

Martin P. C. (1976), "Instabilities, Oscillations and Chaos", J. Phys. (Paris) Coll. **37**, C1-57.

Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. — ДАН СССР, 1944, т. 44, с. 339—342.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидромеханика. — М.: Наука, 1986.
Newhouse S., Ruelle D., Takens F. (1978), "Occurence of Strange Axiom-A Attractors near Quasiperiodic Flow on T^m, $m \leqslant 3$", Commun. Math. Phys. **64**, 35.
Ruelle D., Takens F. (1971), "On the Nature of Turbulence", Commun. Math. Phys. **20**, 167.
Swinney H. L., Gollub J. P. (1978), "The Transition to Turbulence", Phys. Today **31** (**8**), 41.
Swinney H. L., Gollub J. P. (1979), J. Fluid Mech. **94**, 103.
Swinney H. L., Gollub J. P. (eds.) (1980): Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Springer, Heidelberg — New York.

Универсальные свойства перехода от квазипериодичности к хаосу исследованы в работах

Feigenbaum M. J., Haslacher B. (1982), "Irrational Decimation and Path Integrals for External Noise", Phys. Rev. Lett. **49**, 605.
Feigenbaum M. J., Kadanoff L. P., Shenker S. J. (1982), "Quasiperiodicity in Dissipative Systems: A Renormalization Group Analysis", Physica **5D**, 370.
Fein A. P., Heutmaker M. S., Gollub J. P. (1984), "Scaling at the Transition from Quasiperiodicity to Chaos in a Hydrodynamic System", preprint.
Greene M. J. (1979), "A Method for Determining a Stochastic Transition", J. Math. Phys. **20**, 1183.
Hu B. (1983), "A Simple Derivation of the Stochastic Eigenvalue Equation in the Transition from Quasiperiodicity to Chaos", Phys. Lett. **98A**, 79.
Jensen M. H., Bohr T., Christiansen P., Bak P. (1983a), "Josephson Junctions and Circle Maps", preprint.
Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E. D. (1982), "Universal Transition from Quasiperiodicity to Chaos in Dissipative Systems", Phys. Rev. Lett. **49**, 132; Physica **8D**, 303 (1983).
Shenker S. J. (1982), "Scaling Behaviour in a Map of a Circle Into Itself: Empirical Results", Physica **5D**, 405.

Другие сценарии перехода

Campbell D., Rose H. (eds.) (1983), "Order in Chaos: Proceedings of the International Conference in Los Alamos", Physica **7D**, 1.
Gollub J. P., Benson S. V. (1979): Phase Locking in the Oscillations Leading to Turbulence", in H. Haken (ed.): Pattern Formation and Pattern Recognition. Springer, Heidelberg — New York.
Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. (1983a), "Are Three-Frequency Quasiperiodic Orbits to be Expected in Typical Nonlinear Systems?" Phys. Rev. Lett. **51**, 339.
Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. (1983b), "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transients to Chaos", Physica **7D**, 181.
Jensen M. H., Bak P., Bohr T. (1983b), "Complete Devil's Staircase, Fractal Dimension and Universality of Mode-Locking Structures", Phys. Rev. Lett. **50**, 1637.
Libchaber A., Fauve S., Laroche C. (1983), "Two-Parameter Study of the Routes to Chaos", Physica **7D**, 73.
Martin S., Leber H., Martienssen W. (1984), "Oscillatory and Chaotic States of the Electrical Conduction in BSN Crystals", Phys. Rev. Lett. **53**, 303.

Изображения странных аттракторов и фрактальных границ

Brolin H. (1965), "Invariant Sets Under Iteration of Rational Functions", Ark. for Math. **6**, 103.

Cvitanovic P., *Myrheim J.* (1983), "Universality for Period-n Tuplings in Complex Mappings", Phys. Lett. **94A**, 329.

Douady A., *Hubbard J. H.* (1982), "Iterations des Polynomes Quadratiques Complexes", Compt. Rend. **294**, 93.

Fatou P. (1919), Bull. Soc. Math. France **47**, 161; **48**, 33, 208 (1920).

Glass L., *Guevara M. R.*, *Shrier A.* (1983), "Bifurcation and Chaos in a Periodically Stimulated Cardiac Oscillator", Physica **7D**, 89, Copyright 1981 by A.A.A.S. Science, Vol. 214, pp. 1350—1353, 18 Dec. 1981.

Gumowski I., *Mira C.* (1980), "Recurrences and Discrete Dynamic Systems", Lect. Notes in Mathematics **809**, Springer, Berlin — Heidelberg — New York.

Hofstadter D. R. (1979): Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid. Basic Books, New York.

Julia G. (1918), "Mémoire Sur l'Iteration des Fonctions Rationelles", J. Math. Pures et Appl. **4**, 47.

Kawakami H. (1984): Strange Attractors in Duffing's Equation — 50 Phase Portraits of Chaos. Univ. of Tokushima, Dept. of Electronics, preprint.

Klinker T., *Meyer-Ilse W.*, *Lauterborn W.* (1984), "Period Doubling and Chaotic Behaviour in a Driven Toda Oscillator", Phys. Lett. **101A**, 371.

Lauterborn W., *Cramer E.* (1981), "Subharmonic Route to Chaos Observed in Acoustics", Phys. Rev. Lett. **47**, 1145.

Mandelbrot B. B. (1980), "Fractal Aspects of the Iteration of $z \to \lambda z(1 - z)$ for Complex λ and z", Ann. N.Y. Acad. Sci. **357**, 249.

Martin S., *Leber H.*, *Martienssen W.* (1984), "Oscillatory and Chaotic States of the Electrical Conduction in BSN Crystals", preprint.

Peitgen H. O., *Richter P. H.* (1984): Harmonie in Chaos und Kosmos, and Morphologie komplexer Grenzen; Bilder aus der Theorie dynamischer Systems. Оба каталога можно получить по адресу: Forschungsschwerpunkt: Dynamische Systeme, Universität Bremen, D-2800 Bremen, F.R.G.

Pfister G. (1984), "Period Doubling in Rotational Taylor — Couette Flow", Proc. 2nd Int. Symp. on Appl. of Laser Anemometry to Fluid Mechanics. Lisboa.

Prüfer M. (1984), "Turbulence in Multistep Methods for Initial Value Problems", SIAM, Journal of Appl. Math.

Ruelle D. (1980), "Strange Attractors", Math. Intelligencer **2**, 126.

Widom M., *Bensimon D.*, *Kadanoff L. P.*, *Shenker S. J.* (1983), "Strange Objects in the Complex Plane", J. Stat. Phys. **32**, 443.

Глава 6

Регулярное и нерегулярное движение в консервативных системах

Кроме классических трудов (Poincaré, 1892; Arnold, Avez, 1968; Moser, 1973; Balescu, 1975), которые вместе с работой (Lorenz, 1963) по диссипативным системам вошли в список литературы к «Введению», имеются также другие прекрасные обзоры и монографии по нерегулярному движению в гамильтоновых системах:

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
Berry M. V. (1978), in S. Jorna (ed.), "Topics in Nonlinear Dynamics", Am. Inst. Phys. Conf. Proc., Vol. 46.
Hellemann R. H. G. (1980), "Self-Generated Chaotic Behaviour in Nonlinear Mechanics", in E.D.G. Cohen (eds.): Fundamental Problems in Statistical Mechanics, Vol. 5. North-Holl. Publ., Amsterdam.
Lichtenberg A. J., *Liebermann M. A.* (1982): Regular and Stochastic Motion. Springer, Heidelberg — New York. (Имеется перевод: *Лихтенберг А.*, *Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984.)

Доказательство теоремы КАМ содержится в следующих работах:

Арнольд В. И. Малые знаменатели II. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. — УМН, 1963, т. 18, с. 5, 13.
Колмогоров А. Н. — ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.
Mozer J. (1967), "Convergent Series Expansions of Quasi-Periodic Motions", Math. Ann. **169**, 163.

Дополнительные ссылки по этому разделу можно найти в книге (Lichtenberg, Liebermann, 1983).

Отображение поворота обсуждается в работе

Mozer J. (1973): Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton University Press, New Jersey.

Теорема Пуанкаре — Биркгофа содержится в работе

Birkhoff G. D. (1935), "Nouvelles Recherches Sur les Systems Dynamiques", Met. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei **1**, 85.

Некоторые приложения и примеры приводятся в работах

Anosov D. V. (1969), "Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature", Am. Math. Soc.
Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем с многими степенями свободы. — ДАН СССР, 1964, т. 156, с. 1, 9.
Aubry S., *André C.* (1980), in: Proceedings of the Israel Physical Society, Vol. 3, p. 133.
Benettin G., *Streleyn J. M.* (1978), "Numerical Experiments on the Free Motion of a Point Mass, Moving in a Plane Convex Region: Stochastic Transition and Entropy", Phys. Rev. **17A**, 773.
Bunimovich L. A. (1979), "On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards", Commun. Math. Phys. **65**, 295.
Gustavson F. (1966), "On Constructing Formal Integrals of a Hamiltonian System near an Equilibrium Point", Astron. J. **71**, 670.
Hénon M., *Heiles C.* (1964), "The Applicability of the Third Integral of the Motion: Some Numerical Experiments", Astron. J. **69**, 73.
Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. — УМН, 1970, т. 25, с. 2, 141.

Универсальный закон удвоения периода в двумерных консервативных отображениях рассмотрен в обзоре Hellemann (см. список литературы к «Введению»), а также в работах

Bountis T. C. (1981), "Period-Doubling Bifurcations and Universality in Conservative Systems", Physica **3D**, 577.
Greene J. M., *McKay R. S.*, *Vivaldi F.*, *Feigenbaum M. J.* (1981), Universal Behaviour of Area-Preserving Maps", Physica **3D**, 468.

Быстро растет количество работ, в которых используется ренормализационный подход в сохраняющих объем отображениях:

Escande D. F., *Doveil F.* (1981), "Renormalization Method for Computing the Threshold of the Large Scale Stochastic Instability in Two Degrees of Freedom Hamiltonian Systems", J. Stat. Phys. **26**, 257.
Kadanoff L. P. (1981), "Scaling for a Critical K.A.M. Trajectory", Phys. Rev. Lett. **47**, 1641.
McKay R. S. (1983), "A Renormalization Group Approach to Invariant Circles in Area-Preserving Maps", Physica **7D**, 283.
McKay R. S., *Meiss J. D.*, *Persival I. C.* (1984), "Stochasticity and Transport in Hamiltonian Systems", Phys. Rev. Lett. **52**, 697.
Shenker S. J., *Kadanoff L. P.* (1982), "Critical Behaviour of a K.A.M. Trajectory: I. Empirical Results", J. Stat. Phys. **27**, 631.

Дополнительную информацию о классификации хаотических свойств в консервативных системах можно найти в работах

Lebowitz J. L. (1972), in S. A. Rice, K. F. Freed, J. C. Light (eds.): Proc. of the Sixth IUPAP Conf. on Statistical Mechanics. Univ. of Chicago Press, Chicago.
Lebowitz J. l., *Penrose O.* (1973), "Modern Ergodic Theory", Phys. Today **26** (2).

Глава 7 [1)]

Хаос в квантовых системах?

Вопрос о квантовании классических неинтегрируемых систем восходит к работе

Einstein A. (1917): "Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein", Vehr. Dtsch. Phys. Ges. **19**, 82.

Имеются прекрасные обзоры о проблеме стохастичности в квантовых системах:

Berry M. V. (1983), in R.H.G. Hellemann and G. Ioos (eds.): Chaotic Behaviour of Deterministic Systems. Les Houches Summer School 1981. North-Holland, Amsterdam.
Casati G. (1982), in H. Haken (ed.): Evolution of Order and Chaos. Springer, Heidelberg — New York.
Chirikov B. V. (1979): "A Universal Instability of Many-Dimensional Oscillator Systems", Phys. Rep. **52**, 463.
Zaslavski G. M. (1981): "Stochasticity in Quantum Systems", Phys. Rep. **80**, 157.

[1)] Литература, добавленная при переводе, отмечена звездочкой. — *Прим. ред.*

Дополнительные данные о лазерной фотохимии можно найти в работе

Ben Shaul A., *Haas Y.*, *Kompa K. L.*, *Levine R. D.* (1981): Laser and Chemical Change, Springer, Heidelberg — New York.

Квантовый аналог отображения Арнольда впервые изучался в работе

Hannay J. H., *Berry M. V.* (1980), "Quantization of Linear Maps on a Torus, Fresnel Diffraction by a Periodic Grating", Physica **1D**, 267.

Движение квантовой частицы в стадионе

McDonald S. W., *Kaufmann A. N.* (1979), "Spectrum and Eigenfuncions for a Hamiltonian with Stochastic Trajectories", Phys. Rev. Lett. **42**, 1189.

Квантовый ротатор, возбуждаемый толчками

Casati G., *Chirikov B. V.*, *Izraelev F. M.*, *Ford J.* (1977), in G. Casati, J. Ford (eds.): Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Lecture Notes in Physics **93**. Springer, Heidelberg — New York.

Grempel D. R., *Fishman S.*, *Prange R. E.* (1982), "Localization in an Incommensurate Potential: An Exactly Solvable Model", Phys. Rev. Lett. **49**, 833.

Fishmann S., *Grempel D. R.*, *Prange R. E.* (1982), "Chaos Quantum Recurrences and Anderson Localization", Phys. Rev. Lett. **49**, 509.

Hogg T., *Hubermann B. A.* (1982), "Recurrence Phenomena in Quantum Dynamics", Phys. Rev. Lett. **48**, 711.

Hogg T., *Hubermann B. A.* (1983), "Quantum Dynamics and Nonintegrability", Phys. Rev. **28A**, 22.

Израйлев Ф. М., *Шепелянский Д. Л.* Квантовый резонанс для ротатора в нелинейном периодическом поле. — ТМФ, 1980, т. 43, с. 417.

Perez A. (1982), "Recurrence Phenomena in Quantum Dynamics", Phys. Rev. Lett. **49**, 1118.

Schuster H. G. (1983), "Absence of Quasiperiodicity in a Kicked Quantum Rotator and a New Localization Delocalization Transition", Phys. Rev. **28B**, 381.

* *Chirikov B. V.*, *Izrailev F. M.*, *Shepelyansky D. L.* (1981), "Dynamical Stochasticity in Classical and Quantum Mechanics", Sov. Sci. Rev. **2C**, 209.

Проблема локализации электрона в общем случае исследовалась в работе

Anderson P. W. (1958), "Absence of Diffusion in Certain Rendom Systems", Phys. Rev. **103**, 1492

и в частном случае одномерной системы — в работе

Ishii K. (1973), "Localization of Eigenstates and Transport Phenomena in One-Dimensional Disordered Systems", Progr. Theor. Phys. Suppl. **53**, 77.

Некоторые недавно появившиеся работы по проблеме хаоса в квантовых системах:

Berry M. V., *Tabor M.* (1977), "Level Clustering in the Regular Spectrum", Proc. Roy. Soc. (London) **A356**, 375.
Blümel R., *Smilansky U.* (1984), "Quantum Mechanical Suppression of Classical Stochasticity in the Dynamics of Periodically Disturbed Surface Electrons", Phys. Rev. Lett. **52**, 137.
Bohigas O., *Giannoni M. J.*, *Schmit C.* (1984), "Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws", Phys. Rev. Lett. **52**, 1.
Gutzwiller M. C. (1983), "Stochastic Behaviour in Quantum Scattering", Physica **7D**, 341.
Hosé G., *Taylor H. S.* (1983), "Quantum Kolmogorov — Arnold — Moser-like Theorem: Fundamentals of Localization in Quantum Theory", Phys. Rev. Lett. **51**, 947.

* *Bohigas O.*, *Giannoni M.-J.* (1984), "Chaotic Motion and Random Matrix Theories", Lecture Notes in Physics **209**, 1.
* *Делоне Н. Б.*, *Крайнов В. П.*, *Шепелянский Д. Л.* Высоковозбужденный атом в электромагнитном поле. — УФН, 1983, т. 140, № 3, с. 355.
* *Brody T. A.*, *Flores J.*, *Mello P. A.*, *Pandey A.*, *Wong S. S. M.* (1981), "Random-Matrix Physics: Spectrum and Strength", Rev. Mod. Phys. **53**, 385.
* *Gassati G.* (ed.) (1985): Chaotic Behaviour in Quantum Systems **120**. Plenum Press, New York — London.
* *Gassati G.*, *Guarneri I.*, *Izrailev F. M.* (1987): Statistical Properties of the Quasy-Energy Spectrum of a Simple Integrable System. Preprint 87-31, Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk.

Заключительные замечания

Общие вопросы

Abraham N. B., *Gollub J. P.*, *Swinney H. L.* (1984), "Testing Nonlinear Dynamics", Physica **11D**, 252.
Benedek G., *Bilz H.*, *Zeyher R.* (1984), "Statics and Dynamics of Nonlinear Systems", Springer Series in Solid-State Sciences **47**, Springer, Berlin — Heidelberg — New York.
Berry M. V. (1978), in S. Yorna (ed.): "Topics in Nonlinear Dynamics". Am. Inst. Phys. Conf. Proc., Vol. 46.

Связанные системы

Bishop A. R., *Fesser K.*, *Lomdahl P. S.*, *Kerr W. C.*, *Trullinger S. E.*, *Williams M. B.* (1983), "Coherent Spatial Structures Versus Time Chaos in a Perturbed Sine-Gordon System", Phys. Rev. Lett. **50**, 1095.
Kuramoto Y. (1977), "Chemical Waves and Chemical Turbulence", in H. Haken (ed.): Synergetics. Springer, Berlin — Heidelberg — New York.
Vidal C., *Pacault A.* (1981): Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics. Springer, Berlin — Heidelberg — New York.
Winfree A. T. (1980), "The Geometry of Biological Time", Biomathematics **8**, Springer, Berlin — Heidelberg — New York.

Турбулентность

Ruelle D. (1983), "Five Turbulent Problems", Physica **7D**, 40.

Квантовые системы

Graham R. (1984), "Chaos in Lasers", in E. Frehland (ed.): Synergetics — From Microscopic to Macroscopic Order. Springer, Berlin — Heidelberg — New York.

Elgin J. N., *Sarkar S.* (1984), "Quantum Fluctuations and the Lorenz Strange Attractor", Phys. Rev. Lett. **52**, 1215.

Misra B., *Prigogine I.* (1980): "On the Foundations of Kinetic Theory", Suppl. Progr. Theor. Physics **69**, 101.

Случайные числа

De Long H. (1970): Randomness and Gödel's Incompleteness Theorem. Addison-Wesley, Reading, MA.

Биология

Hess B., *Markus M.* (1984), "Time Pattern Transitions in Biochemical Processes", in E. Frehland (ed.): Synergetics — From Microscopic to Macroscopic Order. Springer, Berlin — Heidelberg — New York.

Schuster P. (ed.) (1984), "Stochastic Phenomena and Chaotic Behaviour in Complex Systems", Springer Series in Synergetics **21**, Springer, Berlin — Heidelberg — New York.

Предметный указатель

Автокорреляционная функция 22, 177
Автономное дифференциальное уравнение 23, 25
Алгоритм *Ньютона* 154
Аттрактор 52, 130
— *Лоренца* 108, 124
— странный 107, 134, 137, *см.* Странный аттрактор
— *Фейгенбаума* 65, 71
— *Хенона* 112, 114, 121, 126, 129, 131

Бильярд *Синая* 181, 188
Бифуркация 147, 212
— касательная 85
— удвоения 50, 147, 201
— *Хопфа* 131
Броуновское движение 40

Варактор 80
Восстановление аттрактора 123
Время предсказания 118
Всплески 84

Гипотеза *Каплана—Йорки* 129
Гомоклиническая точка 168, 169
Границы областей притяжения 152, Фото VIII—XV
Губка *Серпинского* 64

Движение по геодезической поверхности 181
— с возвратом 176, 177
Детерминированный хаос 12
Дискретное фазовое пространство 184
Диссипативные отображения 24, 110, 157
— потоки 23, 107
Диффузия *Арнольда* 170
— детерминированная 40, 188
Джозефсоновские переходы 13, 195

Золотое среднее 140

Иерархия классического хаоса 176
Инвариантная мера 36
— — классических систем 178—180
— — логистического отображения 72
— — треугольного отображения 38
Интегралы по траектории 71, 205
Интегрируемые системы 160
Информации приращение 210
— потеря 33, 116
Информационная емкость 209
— размерность 120
Итерации логистического отображения 49

Каноническое преобразование 160
Канторовское множество 64
Картина двойного лучепреломления Фото V
Квазипериодичность 135
Квантовый хаос 182—184, 195
— резонанс 192, 193
Клиновидная кривая 64
Кольца Сатурна 172, Фото VII
Консервативные системы 157
Константы *Фейгенбаума* 50, 216
Коррелированность по *Гауссу* 40, 69, 206
Корреляционная длина 204
— размерность 122, 125, 137
— функция 20, 22, 38
— — в классических системах 177
— — логистического отображения 76
— — перемежаемости 95
— — треугольного отображения 39
Корреляционный интеграл 121
Кривая *Коха* 64
Кризис 151
Критерий устойчивости 34, 199, 213

Критическая поверхность 75
— температура 75
Критические показатели *см.* Скейлинг
К-системы 176, 180, 181

Лазер 13, 195
Ламинарная область 85, 94, 103, 106
Лебеговский спектр 180

Маятник 19
Мера информации *Шеннона* 209
Механизм хаоса 30, 31
— — для перемежаемости 83
Множество *Жюлиа* 154
— *Мандельброта* 155, 156, Фото IX-XV
Модель *Изинга* 202
— *Лоренца* 21, 198

Намагниченность 70, 74
Нелинейные системы 13, 23
Неподвижная точка 23, 33
— — гиперболическая 167, 213
— — оператора удвоения 56, 75, 90, 143
— — устойчивость 34, 51, 200
— — эллиптическая 167, 214
Непрерывные дроби 139
Неустойчивое направление 75
Неустойчивость *Бенара* 20, 21, 197
— — квазипериодичность — хаос 137
— — перемежаемость 104, 105
— — переход *Фейгенбаума* 77
— — синхронизация частот 150
— — странные аттракторы 136, 137
— — трехчастотная квазипериодичность 147
— *Тейлора* 135, Фото III
Ниобат барий-натрия (НБН) 149

Области притяжения 109, 110, 152
Обратная связь 46
Оператор *Лиувилля* 178
— эволюции 190
Осциллятор гармонический 160, 179
— *Дюффинга* 153
— электронный 80, 114, Фото II
Отношение геометрических масштабов 146, 199
Отображение 20, 110
— *Арнольда* 173, 174
— — квантовый аналог 185
— — открытое 189
— квадратичное 45
— кусочно-линейное 28
— логистическое 26, 45, 86, 155
— окружности 138
— периодическое 41, 42
— поворота *Мозера* 166
— *Пуанкаре* 24, 137, 165
— — для эксперимента *Бенара* 134
— — — — *Тейлора* 136
— — для перемежаемости 84, 103, 104
— — для системы *Хенона—Хейлеса* 20, 171
— треугольное 35
— унимодальное 201
— *Хенона* 26, 112, 212
— *Чирикова* 27, 189, 190

Параметр порядка 35, 75
Переменные действие—угол 160
Перемешивание 175
Переход по сценарию *Помо—Манневиля* 83
— — — *Рюэля—Такенса—Ньюхауза* 133, 147
— — — *Фейгенбаума* 46
— через перемежаемость 83
Плазма 13
Показатель *Ляпунова* 31, 116, 137
— — и гипотеза *Каплана—Йорки* 129
— — и *К*-энтропия 116
— — логистического отображения 49, 69, 74
— — преобразования пекаря 112
— — скейлинговое поведение 70, 209
— — треугольного отображения 35
Потоки 107
Почти периодическая функция 194
Предельный цикл 130, 131
Преобразование на окружности 178
— пекаря 111, 130, 177
— удвоения 48
— — квадратичных отображений 55
— — отображения окружности 138
— — при перемежаемости 90
Приближение по методу перевала 207
Проблема локализации 190, 193
Производная *Шварца* 53, 201
Производящая функция 162

Прореживание 71, 205
Пространство параметров 75

Размерность вложения 125
Распределение астероидов 173
Растяжение 30
Реакция *Белоусова—Жаботинского* 20, 22
Ренормгруппа внешнего шума 205
— логистического отображения 55
— модели *Изинга* 202
— отображения окружности 141
— перемежаемости 90, 99
— фазового перехода 75
Ротатор 25, 188

Самоподобие 61, 64, 65, 74, 154, Фото VIII—XV
Сдвиг *Бернулли* 28
— от точки касания 84
Сечение *Кассини* 172, Фото VII
Синхронизация мод 138, 150
— частот 150
Система *Хенона—Хейлеса* 20, 22, 171
Скейлинг для внешнего шума 70, 71, 209
— для диффузии 44
— для длин ламинарных участков 89, 94, 95
— для квадратичных отображений 48, 50, 73
— для корреляционной функции 76, 77
— для отображений, сохраняющих площадь 216
— для отображения окружности 140
— для показателя *Ляпунова* 74
— для траектории КАМ 165
Складывание 30
Случайные силы 40
— числа 195
Собственные значения 58, 60, 74, 93, 141, 200, 208, 213
— — для бифуркации *Хопфа* 132
— — для гиперболической неподвижной точки 214
— — для отображения *Арнольда* 173
— — для перемежаемости 85, 93, 106
— — для уравнения *Шредингера* 183
— — для эллиптической неподвижной точки 214
— — оператора *Лиувилля* 178
— — оператора эволюции 185, 190
Сосуществование регулярного и нерегулярного движения 160
Спектр мощности 19, 23
— — для логистического отображения 65, 78, 79, 81
— — для отображения окружности 141, 144
— — для эксперимента *Бенара* 20, 78, 133, 145, 149
— — — — с НБН 149
— — для электронного осциллятора 79
— — кавитационного шума 81
— — фликкер-шума 95, 96, 99, 101
Стадион 181, 186
Стимулированные клетки сердца 13, 195
Странный аттрактор 107
— — возникновение турбулентности 133
— — определение 109
— — примеры 108, 111, 114, 134, 136, 153
— — размерности 120
Стробоскопическое изображение 24
Субгармоники 66—69, 77—81
Суперциклы 54
Существенное собственное значение 60

Теорема КАМ 17, 164
— *Лиувилля* 157
— *Пуанкаре—Бендикссона* 109
— *Пуанкаре—Биркгофа* 165, 167
Топологическая сопряженность 72
Тор 134, 135, 137, 162, 164, 174, 185
Трехчастотная квазипериодичность 147
Турбулентность 16, 131, 195

Удвоение периода 51, 54
— — в консервативных системах 169, 212
— — аналогия с фазовыми переходами 74, 75
Универсальность 15, 61, 74, 95, 137
Управляющие параметры 24, 147, 150
Уравнение *Гамильтона—Якоби* 160
— *Маккея—Гласса* 123
— *Навье—Стокса* 195, 197
— *Фробениуса—Перрона* 37
Уровней притяжение 188
— расталкивание 188
Ускоритель частиц 13
Устойчивое многообразие 75

Фазовые переходы 74, 75, 202
Фазовый портрет 80, Фото II
Фликкер-шум 85
Фотохимия 184
Фракталы 64
Функционал *Гинзбурга—Ландау* 75

Хаос 12
— критерии 20, 23
— механизм 30, 31
— описание 31
Хаусдорфова размерность 63, 121, 130, 136
— — аттрактора *Лоренца* 109
— — — *Фейгенбаума* 65, 71
— — преобразования пекаря 112
— — отображения *Хенона* 114
Химические реакции 20, 22, 195

Цепное правило 32, 214
Циклы 23, 33

Чертова лестница 151
Число вращения 137
Число *Прандтля* 199
— *Рэлея* 21, 199
Числа *Фибоначчи* 139

Шум 48
— кавитационный 80, 82, Фото VI
— логистического отображения 68, 205
— отличие от детерминированного хаоса 125
— перемежаемости 95
— ренормгруппа 205

Энтропия 116
Энтропия *Колмогорова* 115, 137
— — и показатели *Ляпунова* 116
— — оценка снизу 126
Эргодичность 17
— и спектр *Лиувилля* 176
— механизм 29
— на торе 162
Эффект бабочки 14

Оглавление

Предисловие редакторов перевода 5

Предисловие 10

Введение 12

Глава 1. Эксперименты и простые модели 19
1.1. Экспериментальное обнаружение детерминированного хаоса .. 19
1.2. Ротатор, возбуждаемый периодическими толчками 25
Логистическое отображение 26
Отображение Хенона 26
Отображение Чирикова 27

Глава 2. Кусочно-линейные отображения и детерминированный хаос 28
2.1. Сдвиг Бернулли 28
2.2. Характеристики хаотического движения 31
Показатель Ляпунова 31
Инвариантная мера 36
Корреляционная функция 38
2.3. Детерминированная диффузия 40

Глава 3. Универсальное поведение квадратичных отображений 45
3.1. Параметрическая зависимость итераций 49
3.2. Бифуркация удвоения и преобразование удвоения 50
Бифуркация удвоения 51
Суперциклы 54
Преобразование удвоения и α 54
Линеаризованное преобразование удвоения и δ 56
3.3. Самоподобие, универсальный спектр мощности и влияние внешнего шума 61
Самоподобие в расположении элементов цикла 61
Хаусдорфова размерность 63
Спектр мощности 65
Влияние внешнего шума 68
Поведение логистического отображения при $r > r_\infty$ 71
3.4. Аналогия между удвоением периода и фазовыми переходами .. 74
3.5. Экспериментальное подтверждение бифуркационного перехода 77

Глава 4. Переход к хаосу через перемежаемость 83
4.1. Механизмы перемежаемости 83
Перемежаемость 1-го рода 84
Длина ламинарной области 87
4.2. Ренормгрупповое исследование перемежаемости 90
4.3. Перемежаемость и фликкер-шум 95
4.4. Экспериментальные наблюдения перехода через перемежаемость 102

Распределение длин ламинарных участков 103
Перемежаемость 1-го рода 103
Перемежаемость 3-го рода 105

Глава 5. Странные аттракторы в диссипативных динамических системах 107
5.1. Введение и определение странных аттракторов 107
Преобразование пекаря 111
Диссипативное отображение Хенона 112
5.2. Энтропия Колмогорова 115
Определение K 115
Связь K с показателями Ляпунова 116
Среднее время предсказуемости хаотической системы 118
5.3. Описание аттрактора по измеренному сигналу 119
Размерности странного аттрактора 120
Корреляционный интеграл 121
Восстановление аттрактора по временной последовательности 123
Размерность вложения 125
Разделение динамического хаоса и внешнего белого шума 125
Нижняя граница колмогоровской энтропии 126
Гипотеза Каплана — Йорки 129
5.4. Странные аттракторы и возникновение турбулентности 131
Бифуркация Хопфа 131
Модель перехода к турбулентности по Ландау 132
Модель перехода к турбулентности по Рюэлю — Такенсу — Ньюхаузу 133
Неустойчивость Бенара 134
Неустойчивость Тейлора 135
5.5. Универсальные свойства перехода от квазипериодичности к хаосу 137
5.6. Пути перехода к хаосу 146
Возможность существования трехчастотных квазипериодических орбит 147
Синхронизация частот 150
Кризисы 151
5.7. Изображения странных аттракторов и фрактальных границ ... 152

Глава 6. Регулярное и нерегулярное движение в консервативных системах ... 157
6.1. Сосуществование областей с регулярным и нерегулярным движением 160
Интегрируемые системы 160
Теория возмущений и малые знаменатели 162
Устойчивые торы и теорема КАМ 164
Неустойчивые торы и теорема Пуанкаре — Биркгофа 165
Гомоклинические точки и хаос 168
Диффузия Арнольда 170
Примеры хаотического движения в классической механике 171
6.2. Полностью нерегулярное движение и эргодичность 173
Отображение Арнольда 173
Иерархия классического хаоса 175
Примеры трех классических K-систем 180

Глава 7. Хаос в квантовых системах? 182
7.1. Квантовое отображение Арнольда 184
7.2. Квантовая частица в стадионе 186
7.3. Квантовый ротатор с периодическими толчками 188

Заключительные замечания 195

Приложения 197
1. Вывод модели Лоренца 197
2. Анализ устойчивости, возникновения конвекции и турбулентности в модели Лоренца 199
3. Производная Шварца 201
4. Ренормализация одномерной модели Изинга 202
5. Прореживание и интегралы по траектории для внешнего шума 205
6. Мера информации Шеннона 209
Информационная емкость «кассы» 209
Приращение информации 210
7. Удвоение периода для консервативного отображения Хенона .. 212

Аннотированная литература 217
Предметный указатель 234

Фотографии

Фотографии на вклейке относятся к гл. 3 и 5. Ссылки можно найти в списках литературы к этим главам на с. 221 и 225.

I. *Двухпериодическое течение в эксперименте Бенара.* На рис. 1 — 8 представлены интерференционные картины для ячейки Бенара в двухпериодическом режиме (т. е. спектр мощности содержит две несоизмеримые частоты, см. также разд. 1.1). Интервал времени между соседними изображениями — 10 с. Первый период составляет около 40 с; по истечении этого времени «пасть» в центре изображения повторяется (см. рис. 1 и 5), но более мелкие детали (например, в правых верхних углах рис. 1 и 5) различны, т. е. движение не является просто периодическим (из фильма P. Bergé, M. Dubois, CEN Sacley, Gif-sur-Yvette, France).

II. *Нелинейный электронный осциллятор* (см. также рис. 38). Фазовые портреты (зависимость напряжения от тока на нелинейном диоде) на экране осциллографа. При увеличении управляющего напряжения наблюдается переход через удвоение периода. Вид нелинейности диода, использованного в этом эксперименте, отличался от (3.114) (E. Suchla, из (Klinker et al., 1984)).

III. *Неустойчивость Тейлора: а* — образование конвекционных вихрей; *б* — вихри начинают колебаться; *в* — более сложные колебания; *г* — хаос (Pfister, 1984; см. также разд. 5.4).

IV. *Нарушение сердцебиения.* Разность потенциалов (черная линия) поперек мембраны одной клетки из агрегата клеток сердца эмбриона цыпленка. *а* — Синхронизация фаз стимулирующим импульсом; *б* — стохастическая динамика; интерполяционные сокращения. Период стимулирующих импульсов (показаны красным) изменяется от 240 мс (*а*) до 560 мс (*б*) (Glass et al., 1983).

V. *Хаотическая электропроводность в кристаллах НБН.* Дифракционная картина двойного лучепреломления в сегнетоэлектрике показывает границы областей, отражающие перенос заряда вблизи перехода к хаосу (см. также рис. 82). Для простоты темные линии настоящего изображения показаны красным цветом (Martin et al., 1984).

VI. *Спектр мощности кавитационного шума.* Амплитуда шума кодируется цветом; давление падающей волны линейно растет во времени. При увеличении давления наблюдается переход через субгармоники $f_0 \to f_0/2 \to f_0/4 \to \ldots \to$ к хаосу. Рисунок представляет собой цветной вариант рис. 39,*в* (разд. 3.5) (W. Meyer-Ilse, из (Lauterborn, Cramer, 1981)).

VII. *Сечение Кассини.* В кольце Сатурна (*а*) наблюдается главная щель (*б*) — такназываемое сечение Кассина (движение по этой орбите неустойчиво). См. также рис. 106 в разд. 6.3. (Рисунки NASA №№ P-23068 и P-23207, с разрешения Bildarchiv, Baader Planetarium.) На фото VIII—XV показаны фрактальные границы в комплексной области.

VIII. Алгоритм Ньютона для $f(z) = z^3 - 1 = 0$. Области притяжения трех корней $z^3 = 1$ окрашены в красный, зеленый и синий цвета ((Peitgen, Richter, 1984); см. также разд. 5.7).

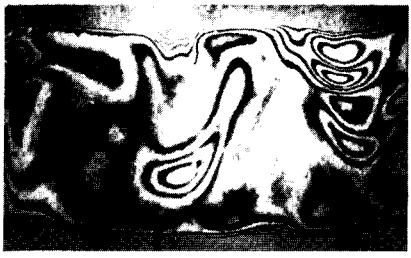
IX. Множество Мандельброта (черный цвет) в комплексной плоскости ((Peitgen, Richter, 1984); см. также разд. 5.7).

X—XII. Увеличенное изображение областей A, D, E на фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

XIII. Увеличенное изображение «хвоста морского конька» на фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

XIV. «Глаз морского конька» с фото IX (Peitgen, Richter, 1984).

XV. Деталь «хвоста» с фото IX (Peitgen, Richter, 1984).



1

2

3

4

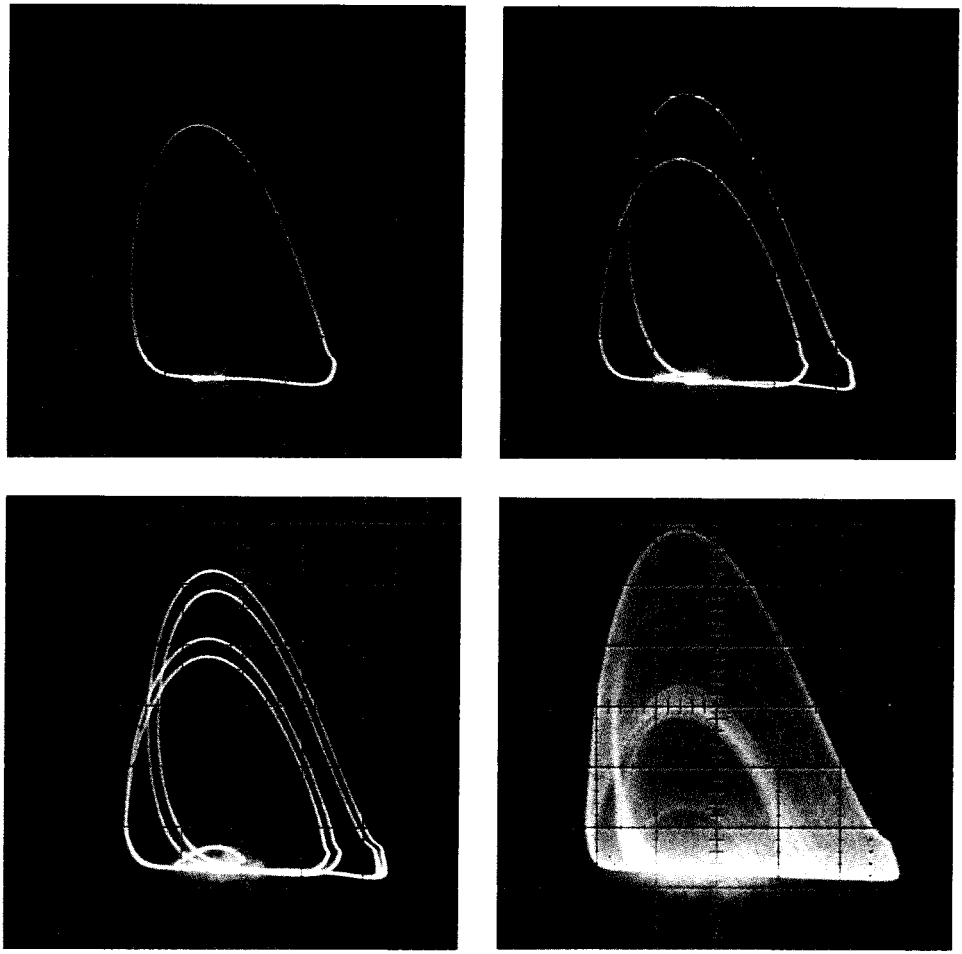
5

6

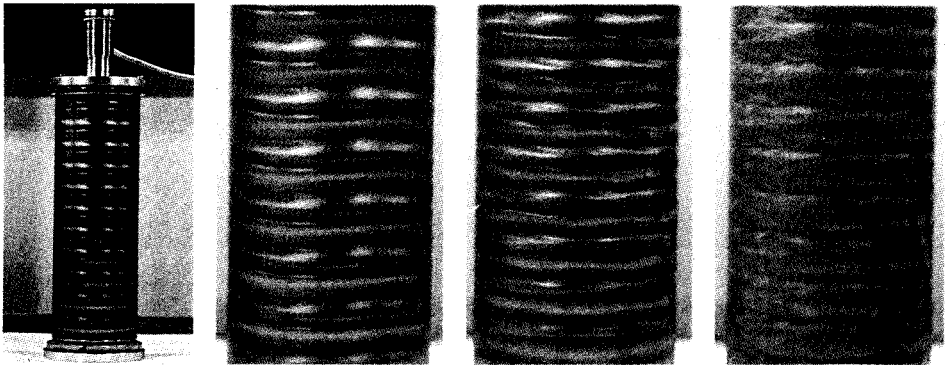
7

8

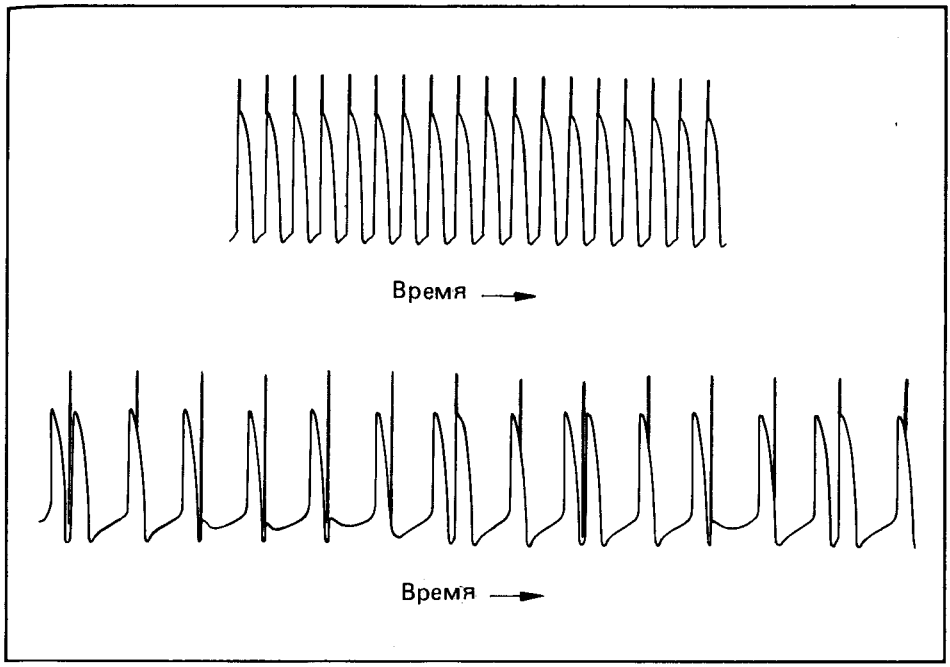
I



II

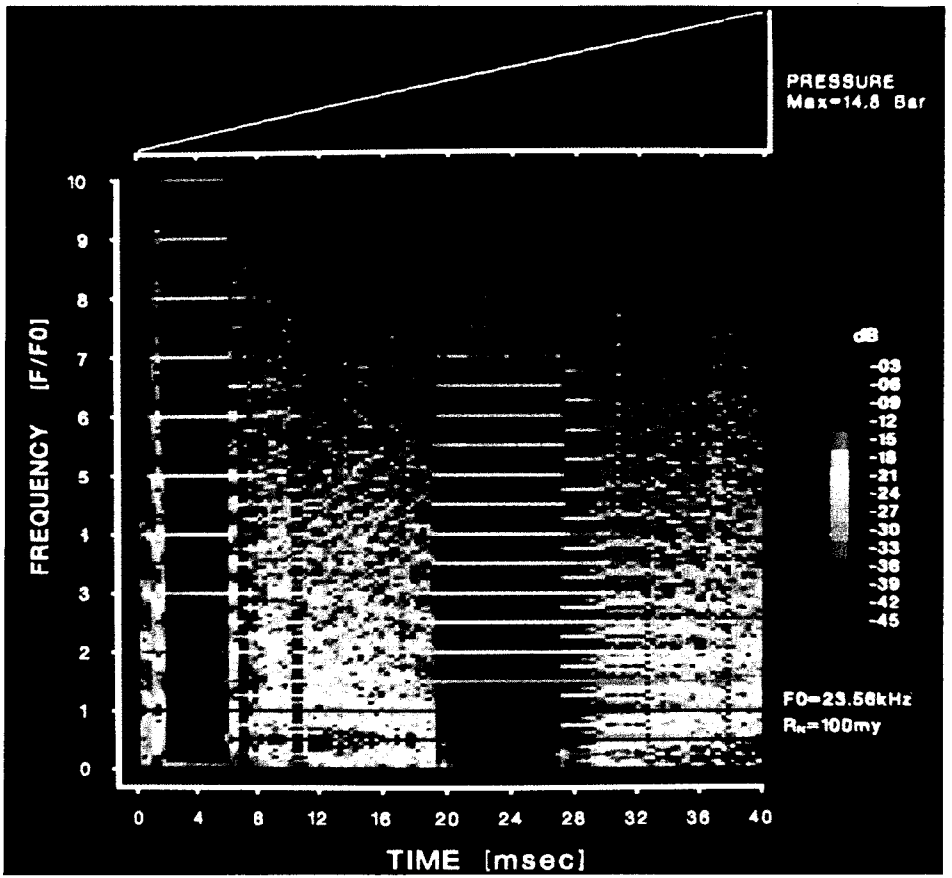


III

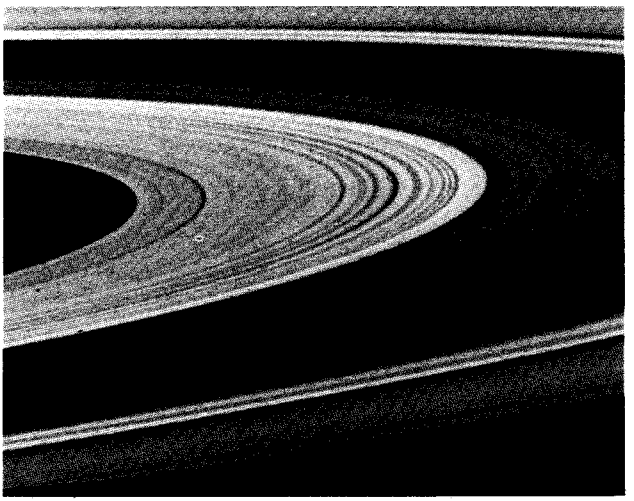


IV

V

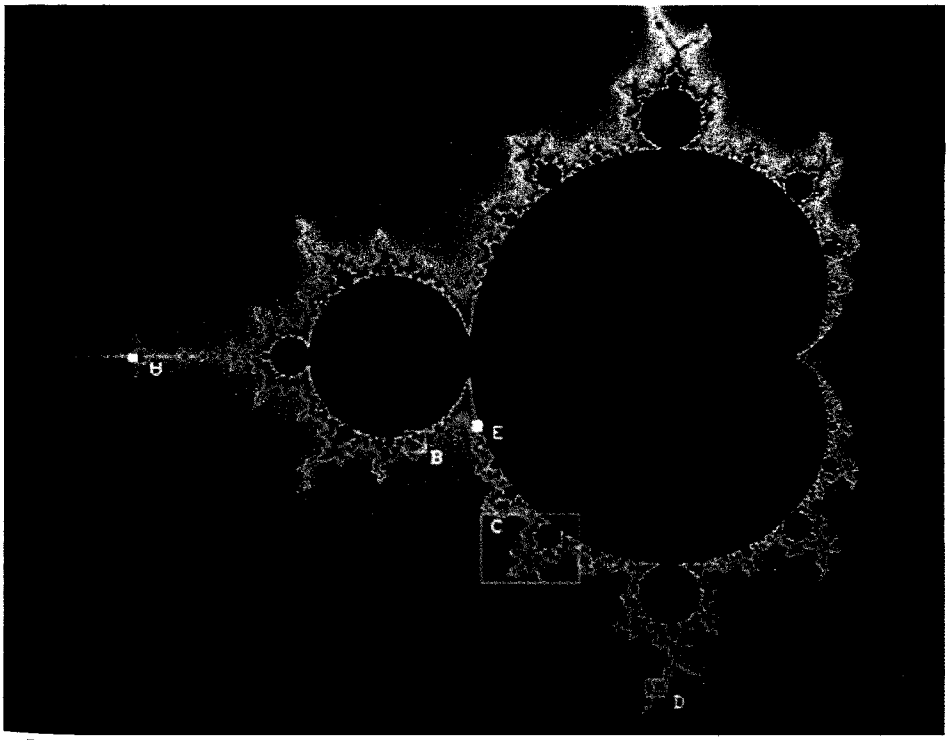

PRESSURE
Max=14.8 Bar
FREQUENCY [F/F0]
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
dB
-03
-06
-09
-12
-15
-18
-21
-24
-27
-30
-33
-36
-39
-42
-45
F0=23.56kHz
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
TIME [msec]

VI

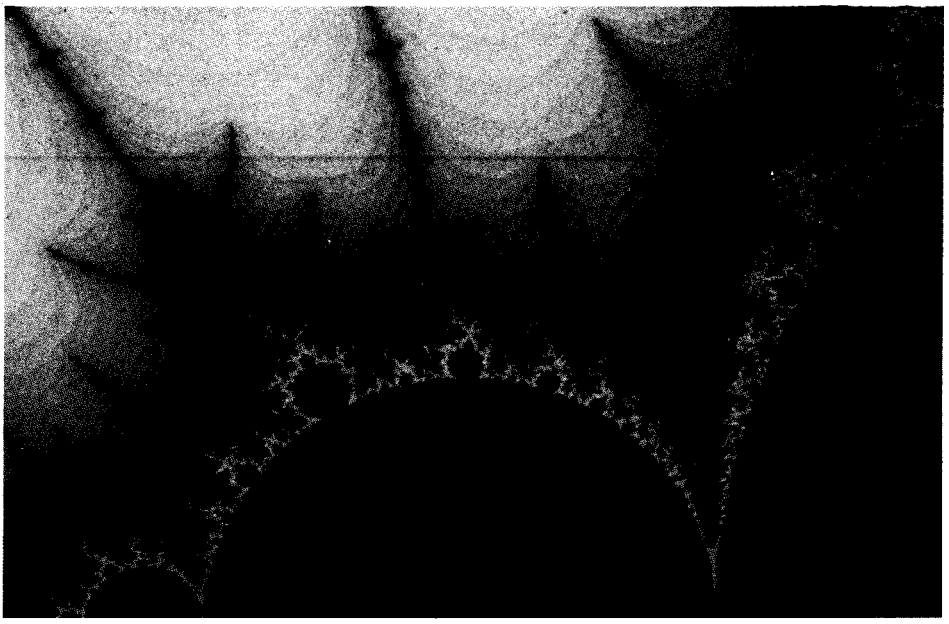


VII

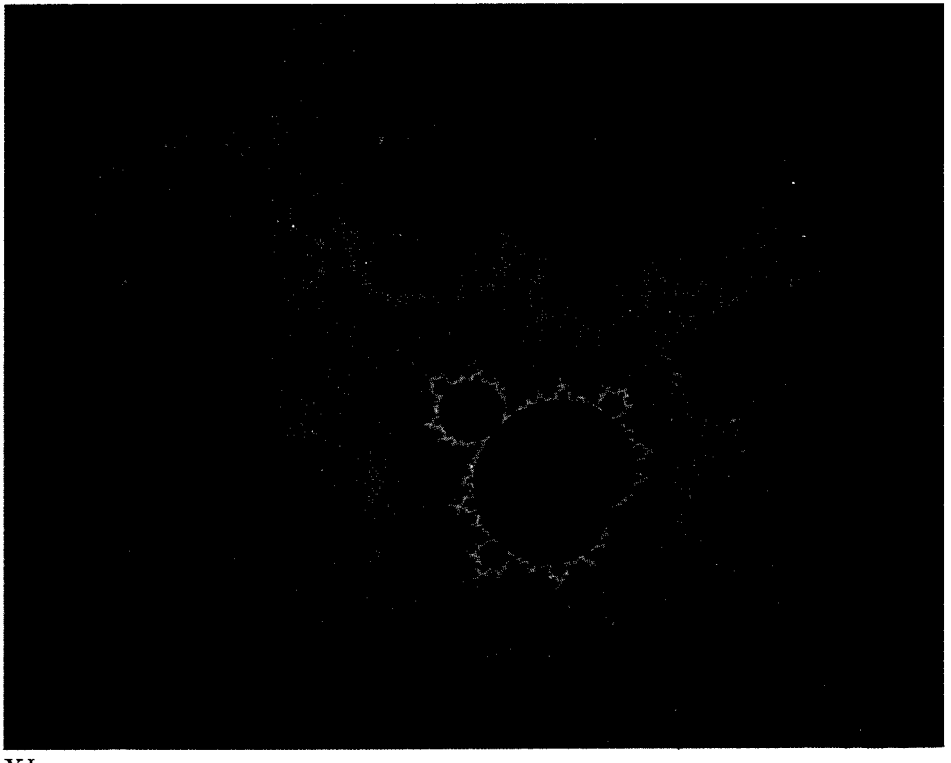
VIII



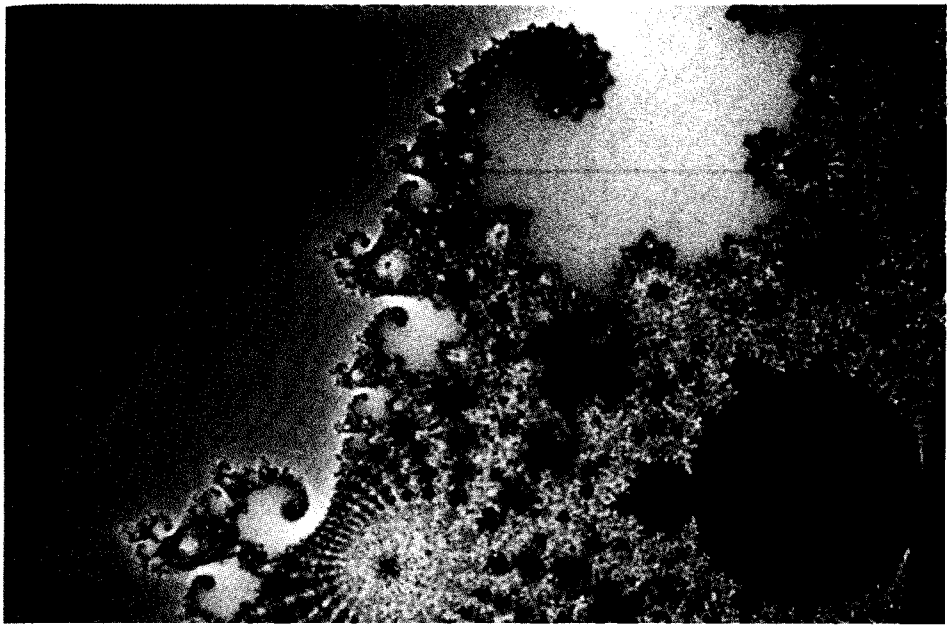
IX



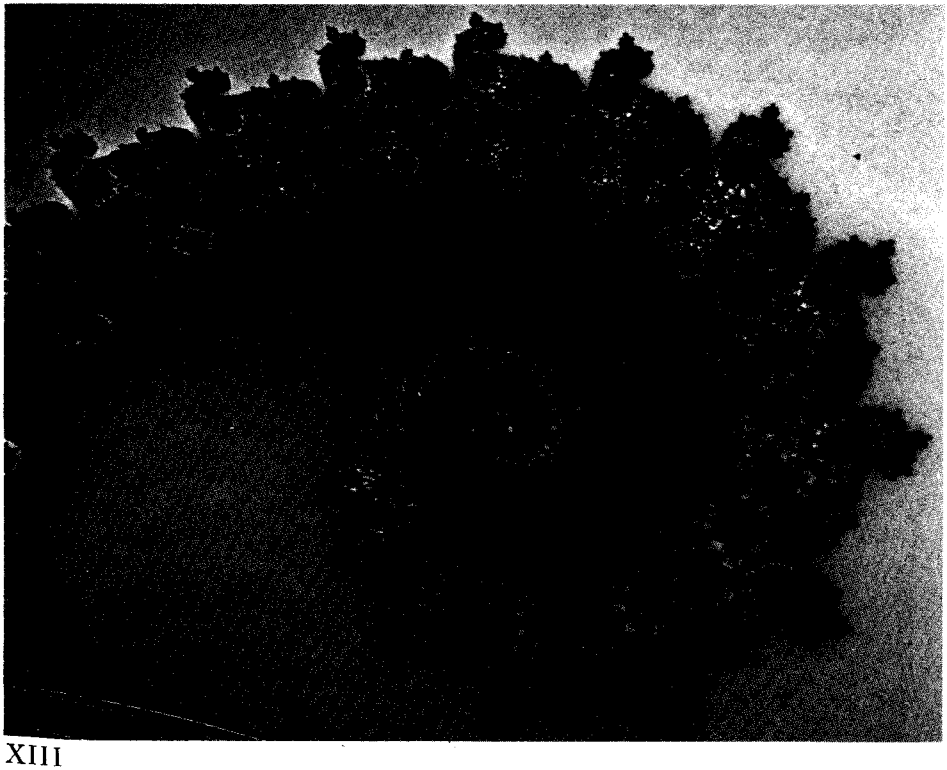
X



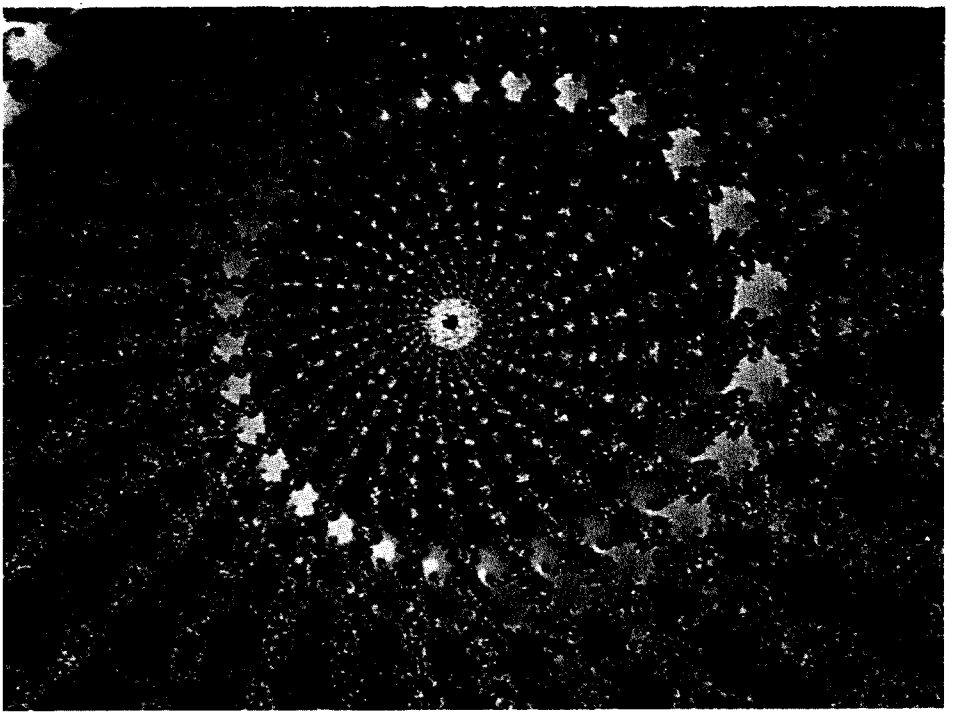
XI



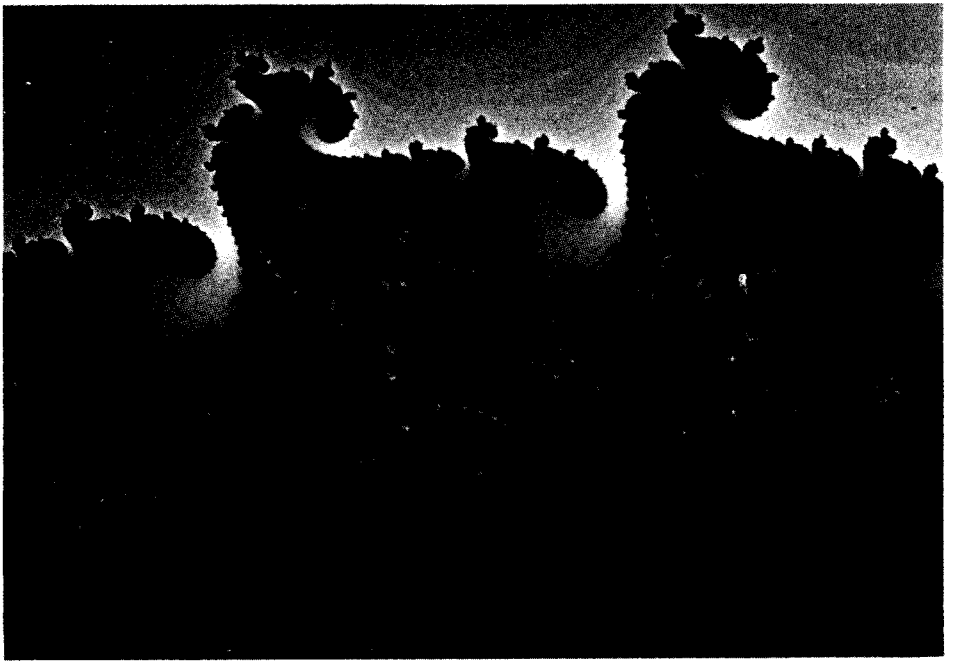
XII



XIII



XIV



XV