

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И БИФУРКАЦИЙ

Книга американских математиков, отражающая современное состояние теории устойчивости и бифуркаций. Простота изложения позволяет непосредственно использовать теорию в самых различных прикладных областях, в которых встречаются системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Для математиков-прикладников, инженеров, аспирантов и студентов институтов.

Содержание

Предисловие	5
Список обозначений	8
Глава I. Равновесные решения эволюционных задач	9
§I.1. Одномерная, двумерная, n-мерная и бесконечномерная интерпретации уравнения (1.1)	9
§I.2. Нетривиальные решения; стационарные и T-периодические решения; автономные и неавтономные задачи	11
§I.3. Редукция к локальной форме	12
§I.4. Равновесные решения	13
§I.5. Равновесные решения и бифуркационные решения	13
§I.6. Бифуркационные решения и линейная теория устойчивости	14
§I.7. Обозначение для функционального разложения $F(t, \mu, U)$	15
Глава II. Бифуркация и устойчивость стационарных решений одномерных эволюционных уравнений	18
§ II.1. Теорема о неявной функции	18
§ II.2. Классификация точек кривых, изображающих решения	19
§ II.3. Характеристическая квадратичная форма. Двойные точки, точки возврата и сопряженные точки	20
§ II.4. Двойная точка бифуркации и теорема о неявной функции	21
§ II.5. Бифуркация в точке возврата и характеристические квадратные уравнения	22
§ II.6. Тройная точка бифуркации	23
§ II.7. Теорема о достаточных условиях устойчивости	24
§ II.8. Теорема о факторизации в одномерном случае	26
§ II.9. Эквивалентность строгой потери устойчивости и двойной точки бифуркации	27
§ II.10. Смена устойчивости в двойной точке	28
§ II.11. Смена устойчивости в двойной точке для задач, приведенных к локальной форме	30
§ II.12. Смена устойчивости в точке возврата	33
§ II.13. Смена устойчивости в тройной точке	33
§ II.14. Глобальные свойства устойчивости изолированных решений	35
Глава III. Теория несовершенств и изолированные решения, разрушающие бифуркацию	37
§ III.1. Структура задач, в которых происходит разрушение двойной точки	38

бифуркации	
§ III.2. Теорема о неявной функции и седлообразная поверхность разрушения бифуркации	39
§ III.3. Примеры изолированных решений, разрушающих бифуркацию	40
§ III.4. Итеративные процедуры построения решений	42
§ III.5. Устойчивость решений, разрушающих бифуркацию	44
§ III.6. Изоляты	46
Глава IV. Устойчивость стационарных решений эволюционных уравнений в двумерном и n-мерном случаях	49
§ IV.1. Собственные значения и собственные векторы (nхn)-матрицы	50
§ IV.2. Алгебраическая и геометрическая кратности, индекс Риса	50
§ IV.3. Присоединенная задача на собственные значения	51
§ IV.4. Собственные значения и собственные векторы (2х2)-матрицы	52
§ IV.5. Спектральная задача и устойчивость решения $u=0$ в R^n	55
§ IV.6. Узлы, седла и фокусы	55
§ IV.7. Критическое значение и строгая потеря устойчивости	57
Дополнение IV. 1. Биортогональность обобщенных собственных векторов	59
Дополнение IV.2. Проекции	62
Глава V. Бифуркация стационарных решений и устойчивость бифуркационных решений в двумерном случае	66
§ V.1. Вид стационарных бифуркационных решений и их устойчивость	66
§ V.2. Классификация трех типов бифуркации стационарных решений	68
§ V.3. Бифуркация в простом собственном значении	69
§ V.4. Устойчивость стационарного решения, ответвляющегося в простом собственном значении	70
§ V.5. Бифуркация в двойном собственном значении с индексом, равным двум	71
§ V.6. Устойчивость стационарного решения, ответвляющегося в двойном собственном значении с индексом, равным двум	72
§ V.7. Бифуркация и устойчивость стационарных решений в форме (V.2) в двойном собственном значении (полупростом) с индексом, равным единице	74
§ V.8. Бифуркация и устойчивость стационарных решений (V.3) в полупростом двойном собственном значении	76
§ V.9. Примеры анализа устойчивости в двойном полупростом (с индексом, равным единице) собственном значении	79
Дополнение V.I. Теорема о неявной функции для системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями от одной переменной	84
Глава VI. Методы проекции для общих задач бифуркации в стационарные решения	90
§ VI.1. Эволюционное уравнение и спектральная задача	90
§ VI.2. Построение стационарных бифуркационных решений в виде степенных рядов от амплитуды	91
§ VI.3. R^1 и R^1 как проекция	93

§ VI.4. Устойчивость бифуркационного решения	94
§ VI.5. Добавочная малая часть для R^1 как проекции	95
§ VI.6. Проекции задач высокой размерности	97
§ VI.7. Спектральная задача для анализа устойчивости решения $u=0$	100
§ VI.8. Спектральная задача и преобразование Лапласа	102
§ VI.9. Проекции в R^1	105
§ VI.10. Метод проекции для изолированных решений, разрушающих бифуркацию в простом собственном значении (теория несовершенств)	106
§ VI.11. Метод проекции в двойном собственном значении с индексом, равным двум	108
§ VI.12. Метод проекции в двойном полупростом собственном значении	111
Дополнение VI.1. Примеры применения метода проекции	115
Глава VII. Бифуркация периодических решений из стационарных решений бифуркация Хопфа на плоскости	128
§ VII.1. Структура двумерной задачи, описывающей бифуркацию Хопфа	128
§ VII.2. Амплитудное уравнение для бифуркации Хопфа	129
§ VII.3. Решение в виде рядов	130
§ VII.4. Уравнения для коэффициентов рядов Тейлора	130
§ VII.5. Условия разрешимости (альтернатива Фредгольма)	130
§ VII.6. Теория Флоке	131
§ VII.7. Уравнения, определяющие устойчивость периодических решений	138
§ VII.8. Теорема о факторизации	138
§ VII.9. Интерпретация условия устойчивости	140
Глава VIII. Бифуркация периодических решений в общем случае	145
§ VIII.1. Собственные проекции спектральной задачи	45
§ VIII.2. Уравнения для проекции и дополнительная проекция	146
§ VIII.3. Решение в виде рядов с использованием альтернативы Фредгольма	148
§ VIII.4. Устойчивость бифуркации Хопфа в общем случае	153
Глава IX. Субгармоническая бифуркация нетривиальных T-периодических решений	163
§ IX.1. Постановка задачи о субгармонической бифуркации	164
§ IX.2. Спектральные задачи и собственные значения $\sigma(\mu)$	166
§ IX.3. Биортогональность	167
§ IX.4. Критическая точка	168
§ IX.5. Альтернатива Фредгольма для $J(\mu)$ - $\sigma(\mu)$ и формула, выражающая строгое пересечение (IX.20)	168
§ IX.6. Предположения о спектре	169
§ IX.7. Рациональные и иррациональные значения отношения частот в критической точке	170
§ IX.8. Оператор J и его собственные векторы	171
§ IX.9. Сопряженный оператор J^* , биортогональность, строгое пересечение и альтернатива Фредгольма для J	172

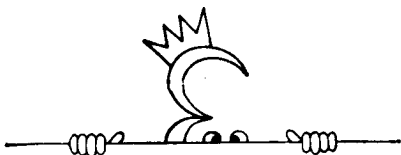
§ IX.10. Амплитуда в и биортогональное разложение бифуркационных субгармонических решений	174
§ IX.11. Уравнения для определения производных от бифуркационных субгармонических решений по ε при $\varepsilon=0$	174
§ IX.12. Бифуркация и устойчивость Т-периодических и 2Т-периодических решений	176
§ IX.13. Бифуркация и устойчивость nТ-периодических решений с $n>2$	179
§ IX.14. Бифуркация и устойчивость 3Т-периодических решений	180
§ IX.15. Бифуркация 4Т-периодических решений	184
§ IX.16. Устойчивость 4Т-периодических решений	187
§ IX.17. Несуществование субгармонических решений более высокого порядка и слабый резонанс	190
§ IX.18. Сводка результатов о субгармонической бифуркации	191
§ IX.19. Теория несовершенств с периодическим дефектом	192
Глава X. Бифуркация нетривиальных Т-периодических решений в асимптотически квазипериодические решения	194
§ X.1. Биортогональное разложение решения и биортогональное разложение уравнений	194
§ X.2. Замена переменных	197
§ X.3. Нормальная форма уравнений	200
§ X.4. Нормальные уравнения в полярных координатах	206
§ X.5. Тор и траектории на торе в иррациональном случае	208
§ X.6. Тор и траектории на торе, если $\omega_0 T/2\pi$ —рациональная точка более высокого порядка ($n \geq 5$)	212
§ X.7. Форма тора в случае $n=5$	214
§ X.8. Траектории на торе при $n=5$	215
§ X.9. Форма тора при $n>5$	217
§ X.10. Траектории на торе при $n \geq 5$	221
§ X.11. Асимптотически квазипериодические решения	223
§ X.12. Устойчивость бифуркационного тора	224
§ X.13. Субгармонические решения на торе	225
§ X.14. Устойчивость субгармонических решений на торе	229
§ X.15. Захват частоты	230
Дополнение X.1. Построение асимптотически квазипериодических решений, ответвляющихся в рациональных точках более высокого порядка ($n \geq 5$) методом степенных рядов с использованием альтернативы Фредгольма	235
Дополнение X.2. Прямое построение асимптотически квазипериодических решений, ответвляющихся в иррациональных точках, методом, включающим две временные переменные, степенные ряды и альтернативу Фредгольма	239
Дополнение X.3. Прямое построение асимптотически квазипериодических решений, ответвляющихся в рациональных	243

точках более высокого порядка, методом двух временных переменных

Глава XI. Вторичная субгармоническая и асимптотически квазипериодическая бифуркация периодических решений (типа Хопфа) в автономном случае	252
§ XI.1. Спектральные задачи	254
§ XI.2. Критическая точка и рациональные точки	256
§ XI.3. Предположения о спектре оператор J_0	257
§ XI.4. Предположения о спектре оператора J в критической точке	258
§ XI.5. Строгая потеря устойчивости в простом собственном значении оператора J_0	260
§ XI.6. Строгая потеря устойчивости в двойном полупростом собственном значении оператора J_0	261
§ XI.7. Строгая потеря устойчивости в двойном собственном значении с индексом два	262
§ XI.8. Постановка задачи о субгармонической бифуркации периодических решений автономных задач	265
§ XI.9. Амплитуда бифуркационного решения	266
§ XI.10. Решения бифуркационной задачи в форме степенных рядов	267
§ XI.11. Субгармоническая бифуркация для $n=2$	269
§ XI.12. Субгармоническая бифуркация для $n>2$	271
§ XI.13. Субгармоническая бифуркация для $n=1$ в полупростом случае	274
§ XI.14. "Субгармоническая" бифуркация для $n=1$ в случае, когда нуль является двойным собственным значением оператора J_0 с индексом два	276
§ XI.15. Устойчивость субгармонических решений	278
§ XI.16. Обзор результатов о субгармонической бифуркации в автономном случае	282
§ XI.17. Бифуркация тора в автономных нерезонансных случаях	283
§ XI.18. Асимптотически квазипериодические решения на инвариантном торе	286
§ XI.19. Строго квазипериодические решения на бифуркационном торе	288
Послесловие	291

*Все должно быть сделано настолько
просто, насколько это возможно,
но не проще.*

Альберт Эйнштейн



ПРЕДИСЛОВИЕ

В своей наиболее общей форме теория бифуркаций представляет собой теорию равновесных решений нелинейных уравнений. Под равновесными решениями понимаются, например, стационарные решения, решения периодические по времени и квазипериодические решения. Цель этой книги — научить читателей теории бифуркаций равновесных решений эволюционных задач, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Мы написали ее для самой широкой аудитории заинтересованных лиц: инженеров, биологов, химиков, физиков, математиков, экономистов и всех, кто встречается в своей работе с равновесными решениями нелинейных дифференциальных уравнений.

Мы считаем, что для достижения нашей цели нужно сделать изложение, во-первых, достаточно общим — с тем, чтобы его можно было применить к огромному разнообразию задач, возникающих в науке и технике, и, во-вторых, достаточно простым, чтобы оно было понятно читателям, математическая подготовка которых не выходит за рамки классического анализа, распространенного в прошлом столетии.

Естественно, полной гармонии между общностью и простотой достичь нельзя, но, на самом деле, общая теория проще, чем детализированная, нужная для конкретных приложений. В общей теории от конкретных задач берутся лишь существенные свойства и строится основа, на которую должны опираться детали приложений.

Принято считать, что для овладения математической теорией бифуркаций необходимо знание основ функционального анализа и некоторых методов топологии и динамики. Это убеждение несомненно справедливо, но его полезно расшифровать, чтобы обосновать принятый в книге подход.

Использование функционального анализа в задачах бифуркации главным образом связано с обоснованием возможности сведения задач высокой и даже бесконечной размерности к одномерным или двумерным задачам. Такие задачи низкой размерности связаны с проекциями на пространство собственных функций, а в некоторых частных случаях (подобных тем, которые возникают в вырожденных задачах, приводящих к разрушению симметрии бифуркации стационарных решений) требуется анализ задач с размерностью больше двух. Однако наиболее

важны одно- и двумерные проекции. Они относятся к классу математических задач, называемых бифуркацией в простом собственном значении.

Существование и структура бифуркации и устойчивости бифуркационных решений полностью определяются при анализе нелинейных обыкновенных дифференциальных или алгебраических уравнений, к которым приводят методы редукции с использованием проекций. Поэтому наиболее простой способ обучения — начать с описания задач низкой размерности и лишь затем показать, как эти задачи получаются при проектировании задач высокой размерности. Для первой части исследования нужны только классические методы теории дифференциальных уравнений и теории функций. Во второй части, составляющей содержание гл. VI и VII, анализ можно проводить формально, не прибегая к более сложному математическому аппарату, необходимому для полного обоснования теории. Само собой разумеется, что все сделанные утверждения строго обоснованы в опубликованных работах; мы на них ссылаемся и оставляем для дальнейшего изучения любознательным читателям.

Быть может, полезно подчеркнуть, что мы сосредотачиваем внимание на задачах, которые можно привести к одномерным или двумерным. В этих рамках можно исследовать следующие типы бифуркаций: бифуркацию стационарных решений в одномерном случае (гл. II) и для общих задач, которые можно привести к одномерным (гл. VI); бифуркацию изолированных решений, которые нарушают бифуркацию в одномерных задачах (гл. III), и бифуркацию для общих задач, которые проектированием приводятся к одномерным (гл. VI); бифуркацию стационарных решений из стационарных решений двумерных задач (гл. IV и V) и для общих задач, которые проектированием приводятся к двумерным (гл. VIII); бифуркацию субгармонических решений из T -периодических решений в случае T -периодических правых частей уравнений (гл. IX); бифуркационный тор «асимптотически квазипериодических» решений, ответвляющихся от T -периодических решений в случае T -периодических правых частей уравнений (гл. X), бифуркацию субгармонических решений и торов самовозбуждаемых периодических решений (автономный случай, гл. XI). От элементарной книги нельзя требовать большего, потому что даже в случае достаточно простых систем трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений возможна очень сложная динамика с турбулентноподобными притягивающими множествами, которая не поддается описанию простыми способами. В одномерных задачах все решения лежат на вещественной прямой, в двумерных задачах все решения с заданными начальными условиями лежат на плоскости, а их траектории не могут пересекаться в силу единственности решений. Это строгое ограничение на решения двумерных задач не имеет силы для пространственных задач, в которых пересекающиеся траектории могут в конечном счете генерировать притягивающие множества значительной сложности.

ти (см., например, Lorenz N.E., *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmos. Sci., 20, 130 (1963)).

Мы рассматриваем эту книгу как пособие по изучению основ бифуркации. Наша цель состояла в изложении общей теории задач, которые посредством проектирования можно привести к двумерным. При выполнении этой работы мы получили большое число новых научных результатов — они содержатся во всех главах книги, особенно в задаче о бифуркации периодических решений, которая излагается в гл. X и XI. Студенты, желающие углубить свои знания после овладения элементарной теорией, могут ознакомиться с литературой, указанной в конце гл. I.

Среди нескольких тысяч статей, опубликованных начиная с 1963 г., имеется много хороших и важных. Мы отказались от намерения сделать систематический обзор этих работ, поскольку хотели сосредоточить внимание лишь на элементарной части теории. Тем не менее полезно отметить, что в некоторых работах используется метод Ляпунова — Шмидта для разложения пространства решений и уравнений на конечномерную и бесконечномерную части. Уравнения для бесконечномерной части можно решить, и полученная в итоге конечномерная задача содержит всю информацию о бифуркации. В других работах для сведения к задачам конечной размерности используется центральное многообразие. Этот метод использует то обстоятельство, что в задачах, подобных рассматриваемым в этой книге, решения притягиваются к центральному многообразию конечной размерности. Оба метода хороши для доказательства теорем существования. Их можно также использовать для построения решений, но в действительности они приводят к громоздким вычислениям. В своей книге мы систематически избегаем этих методов. Вместо них мы применяем теорему о неявной функции для обоснования прямого последовательного вычисления решений в виде степенных рядов по степеням амплитуды, используя альтернативу Фредгольма как наиболее экономный способ определения качественных основ свойств бифуркационных решений и их вычисления.

Благодарности

Работа над этой книгой была начата во время посещения Дж. Йоссом Миннесоттского университета в 1978 г. в соответствии с контрактом фирмы Army Research Office in Durham. Большой благодарности заслуживает также постоянная поддержка научных исследований Д. Джозефа из фонда Fluid Mechanics program of N.S.F.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Все символы полностью определяются там, где они впервые вводятся. Для удобства читателя некоторые из наиболее часто встречающихся символов перечисляются в нескольких местах. Достаточно полный список приведен ниже. Краткие списки, которые могут понадобиться в дальнейшем, помещены во введениях к гл. IX и XI.

$\stackrel{\text{def}}{=}$	равно по определению
$\mathbb{N}$	множество неотрицательных целых чисел (включая нуль)
$\mathbb{N}^*$	множество положительных целых чисел (без нуля)
$\mathbb{Z}$	множество положительных и отрицательных целых чисел (включая нуль)
$\mathbb{R}$	множество вещественных чисел (вещественная прямая)
$\mathbb{R}^n$	множество упорядоченных n -наборов вещественных чисел; $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Кроме того, $\mathbb{R}^n$ — это евклидово пространство
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$\mathbb{C}^n$	множество упорядоченных n -наборов комплексных чисел
$\mathcal{C}^n(\mathcal{V})$	множество n раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathcal{C}$. Можно также задать область значений этих функций E посредством записи $\mathcal{C}^n(\mathcal{V}; E)$
$\ \mathbf{u}\ $	норма вектора $\mathbf{u}$
$\mathbf{A}(\cdot)$	линейный оператор
$\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$	билинейный оператор
$\mathbf{C}(\cdot, \cdot, \cdot)$	трилинейный оператор
$\mathbf{N}(\cdot)$	нелинейный оператор общего вида без постоянного и линейного членов в окрестности нуля:

$$\stackrel{\text{def}}{\mathbf{N}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + Q(\|\mathbf{u}\|)^4$$

$\mathbf{F}(t, \mu, \mathbf{U})$	нелинейный оператор (см. начало гл. I)
$\mathbf{f}(t, \mu, \mathbf{u})$	редукция $\mathbf{F}$ к локальной форме, см. § 1.3
$\mathbf{F}_a, \mathbf{F}_{aa}$ и т. д.	производные от $\mathbf{F}$; см. §§ 1.6, 1.7
$\mathbf{F}_a(t, \mu, \mathbf{U}_0 \cdot)$	линейный оператор, отвечающий производной от $\mathbf{F}$, вычисленной при $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$
$\sigma = \xi + i\eta$	собственное значение линейного оператора, применяемого при анализе устойчивости решения
$\lambda = e^{\sigma T}$	множитель Флоке; см. § VII.6.2
ω ; $T = 2\pi\omega$	частота ω и период T
ε	амплитуда бифуркационного решения
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$	скалярное произведение; $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	скалярное произведение для 2π -периодических функций

РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Мы будем изучать равновесные решения эволюционных уравнений вида

$$\frac{dU}{dt} = F(t, \mu, U), \quad (1.1)$$

где $t \geq 0$ — время, а μ — параметр, который лежит на вещественной прямой $-\infty < \mu < \infty$. Неизвестной в (1.1) является $U(t)$. $F(t, \mu, U)$ — заданная нелинейная функция или оператор¹⁾. Если F не зависит от t , то мы будем опускать t и писать $F(\mu, U)$. Уравнение (1.1) описывает эволюцию $U(t)$, порождаемую ее начальным значением $U(0) = U_0$. Равновесным решением является решение, к которому стремится $U(t)$ после сообщения системе начальных возмущений. Необходимо точнее определить, что означают $U(t)$, $F(t, \mu, U)$ и равновесное их решение. Это уточнение связано с некоторыми предварительными объяснениями и определениями.

§ 1.1. Одномерная, двумерная, n -мерная и бесконечномерная интерпретации уравнения (1.1)

В одномерных задачах $U(t)$ — скаляр, $-\infty < U < \infty$, а $F(t, \mu, U)$ — скалярная функция от (t, μ, U) . Например, в грубом приближении экологической логистической задачи U может означать плотность комаров в Миннесоте, а μ — имеющийся в наличии запас пищи. Скорость возрастания плотности комаров дается нелинейной функцией $F(\mu, U)$. Популяция комаров возрастает, если $F > 0$, убывает, если $F < 0$, и находится в равновесии, если $F(\mu, U) = 0$. Для равновесного распределения запас пищи μ и плотность популяции U связаны соотношением $F = 0$. Может существовать много равновесных распределений; например,

$$F(\mu, U) = (a_1(\mu) - U)(a_2(\mu) - U) \dots (a_n(\mu) - U) \quad (1.2)$$

может иметь n равновесных распределений, каждое из которых соответствует равенству нулю одного из множителей: $a_i(\mu) = U$.

¹⁾ Здесь предполагается, что F зависит от текущего значения функции $U(t)$ и не зависит от ее предистории. Относительно более общих случаев см. замечания к гл. I.

Определение равновесных распределений ничего не говорит нам о том, какой плотности комаров следует ожидать при имеющемся количестве доступной для них пищи (человеческой крови), потому что некоторые равновесные распределения неустойчивы и будут нарушены при действии возмущений. Поэтому необходимо найти не только равновесные распределения, но и исследовать их устойчивость.

В двумерных задачах $\mathbf{U}(t)$ —это двумерный вектор с компонентами $(U_1(t), U_2(t))$, а $\mathbf{F}(t, \mu, \mathbf{U})$ —вектор-функция, компоненты которой $[F_1(t, \mu, U_1, U_2), F_2(t, \mu, U_1, U_2)]$ суть нелинейные функции компонент $\mathbf{U}$. Такие же самые обозначения приняты для n -мерных задач при $n > 2$; в этом случае векторы имеют n компонент.

Мы будем употреблять обычные математические обозначения и определим

$$(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) = (\text{вещественная прямая, плоскость, } n\text{-мерное пространство}).$$

Скаляры принимают значения в $\mathbb{R}^1$, а n -мерные векторы—значения в $\mathbb{R}^n$. Обычно для $\mathbb{R}^1$ упрощают обозначение и не указывают верхний индекс: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

В математике также принято говорить о бесконечномерных задачах, однако, вообще говоря, это означает нечто большее и нечто иное, чем $n \rightarrow \infty$. В бесконечномерной задаче мы считаем, что $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x_1, \dots, x_n, t)$ —это поле в n -мерной (обычно размерности ≤ 3) области $\mathcal{V}$ пространства $(x_1, \dots, x_n)$ и что $\mathbf{F}(t, \mu, \mathbf{U})$ —оператор с операциями над пространственными переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$, который отображает векторные поля в $\mathcal{V}$ в векторные поля в $\mathcal{V}$. Этому описанию соответствуют уравнения с частными производными и интегральные уравнения. Для уравнений с частными производными необходимо добавить к (I.1) граничные условия. Например, в задачах реакции и диффузии, включающих n полей (для n видов) $C_i(\mathbf{x}, t)$ в температурном поле $T(\mathbf{x}, t)$, определенных в области $\mathcal{V}$ трехмерного физического пространства, эволюция $(n+1)$ -мерного векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (C_1(\mathbf{x}, t), C_2(\mathbf{x}, t), \dots, C_n(\mathbf{x}, t), T(\mathbf{x}, t)) = (U_1(\mathbf{x}, t), U_2(\mathbf{x}, t), \dots, U_{n+1}(\mathbf{x}, t))$ описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{F}(t, \mu, \mathbf{U}), \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial U_\alpha}{\partial t} = F_\alpha(t, \mu, \mathbf{U}), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n+1, \quad (\text{I.3})$$

где

$$F_{\alpha i}(t, \mu, \mathbf{U}) = \nabla \cdot (D_{\alpha \beta} \nabla) U_\beta + g_\alpha(\mu, \mathbf{U}) + h_\alpha(\mathbf{x}, t, \mu); \quad (\text{I.4})^1$$

$(D_{\alpha \beta}) = (n+1) \times (n+1)$ -матрица коэффициентов диффузии;

$$g_\alpha(\mu, \mathbf{U}) \text{—нелинейная функция от } \mu \text{ и } \mathbf{U}, \quad g_\alpha(\mu, 0) = 0; \quad (\text{I.5})$$

$$h_\alpha(\mathbf{x}, t, \mu) \text{—заданная функция от } \mu \text{ и } t.$$

¹⁾ Здесь мы пользуемся соглашением о повторяющихся индексах. По повторяющемуся индексу производится суммирование на всем диапазоне его изменения: $D_{\alpha \beta \mu \nu} = D_{\alpha 1} u_1 + D_{\alpha 2} u_2 + D_{\alpha 3} u_3$.

На границе $\partial\mathcal{V}^0$ области $\mathcal{V}^0$ с внешней нормалью $\mathbf{n}$ заданы некоторые линейные комбинации нормальных производных и значений компонент $\mathbf{U}$:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) M_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \mu) U_\beta + N_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \mu) U_\beta = P_\alpha(\mathbf{x}, t, \mu), \quad (1.6)$$

где $M_{\alpha\beta}$ и $N_{\alpha\beta}$ — квадратные матрицы, а $P_\alpha(\mathbf{x}, t, \mu)$ заданы. Эта задача бесконечномерна, потому что определена для каждого из бесконечно большого числа значений $\mathbf{x}$ из $\mathcal{V}^0$.

Другим примером служат уравнения Навье—Стокса для однородной несжимаемой жидкости. Здесь (1.1) можно взять в форме уравнения для вихря $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{V}$, где $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ — скорость, ν — кинематическая вязкость и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} &= \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{p}(\mathbf{x}, t, \mu), \\ \boldsymbol{\omega} &= \text{rot } \mathbf{V}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t, \mu)$ — заданный вынуждающий член. Решения $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega})$ (1.7) вместе с налагаемыми на $\mathbf{V}$ граничными условиями, скажем

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t, \mu) \text{ для } \mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}^0, \quad (1.8)$$

определяют $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ в $\mathcal{V}^0$.

Здесь уместно отметить, что во многих случаях задачи высокой размерности можно свести к одно- или двумерным задачам (см., например, гл. VI и VIII).

§ 1.2. Нетривиальные решения; стационарные и T -периодические решения; автономные и неавтономные задачи

Теперь мы сделаем предположение, которому, очевидно, удовлетворяют примеры, приведенные в § 1.1, о том, что $\mathbf{U} \equiv 0$ не является решением эволюционной задачи, связанной с (1.1). Функция $\mathbf{U} = 0$ не является решением этой задачи в силу того, что правая часть уравнения отлична от нуля при $\mathbf{U} = 0$. В примерах, упоминаемых в § 1.1, правая часть при $\mathbf{U} = 0$ есть $a_1(\mu) a_2(\mu) \dots a_n(\mu) \neq 0$ в (1.2), $h_\alpha(\mathbf{x}, t, \mu) \neq 0$, $P_\alpha(\mathbf{x}, t, \mu) \neq 0$ в (1.3–6) и $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t, \mu) \neq 0$, $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t, \mu) \neq 0$ в (1.7, 8). Если не учитывать граничные условия в задачах, связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных, то правая часть при $\mathbf{U} = 0$ дается выражением $\mathbf{F}(t, \mu, 0) \neq 0$.

Ограничимся задачами, в которых правая часть при $\mathbf{U} = 0$ удовлетворяет условию¹⁾

$$\mathbf{F}(t, \mu, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(\mu, 0) \neq 0 \text{ и } \mathbf{F}(\mu, \mathbf{U}) \text{ не зависит от } t \quad (1.9)$$

¹⁾ Символ def над знаком равенства означает, что это равенство принимается по определению. — *Прим. перев.*

или

$$F(t, \mu, 0) = F(t + T, \mu, 0) \neq 0 \text{ и } F(t, \mu, U) \text{ } T\text{-периодична} \quad (I.10)$$

Если $F(\mu, U)$ не зависит от t , то задача

$$\frac{dU}{dt} = F(\mu, U) \quad (I.11)$$

называется *автономной*. Если $F(t, \mu, U)$ — периодическая по t с периодом T , то задача

$$\frac{dU}{dt} = F(t, \mu, U) = F(t + T, \mu, U) \quad (I.12)$$

называется *неавтономной T -периодической*. Как правило, мы будем опускать слова « T -периодическая» при описании неавтономных задач, поскольку лишь T -периодические задачи будут рассматриваться в этой книге.

§ 1.3. Редукция к локальной форме

Предположим, что для μ из некоторого интервала $\mathbb{R}^1$ существуют равновесные решения (I.11) и (I.12), имитирующие эволюционные свойства правой части при $U=0$. Тогда существует стационарное решение $\tilde{U}(\mu)$ (I.11) и T -периодическое решение $\tilde{U}(t, \mu) = \tilde{U}(t+T, \mu)$ (I.12).

Рассмотрим произвольное возмущение u решения $\tilde{U}$. Уравнение, описывающее это возмущение, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = F(\mu, U + u) - F(t, \mu, \tilde{U}) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mu, u) \quad (I.13)$$

в автономном случае и

$$\frac{du}{dt} = F(t, \mu, \tilde{U} + u) - F(t, \mu, \tilde{U}) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, \mu, u), \quad (I.14)$$

где $f(t, \mu, u) = f(t+T, \mu, u)$, в неавтономном случае. Функция u , тождественно равная нулю, является решением (I.13) и (I.14).

Задачи (I.13) и (I.14), в которых $u=0$ является решением, называют задачами, *приведенными к локальной форме*. Приведение к локальной форме не вызывает большой потери общности. Эта редукция имеет место для таких значений μ , для которых существуют $\tilde{U}(\mu)$ и $\tilde{U}(t, \mu)$.

Уравнения (I.13) и (I.14) тождественны, за исключением того обстоятельства, что в $f(t, \mu, u)$ в (I.14) явно входит t . Однако поведение решений этих двух задач очень различно. Это не удивительно. Такое различие обусловлено большим отличием свойств правых частей при $U=0$, которые описывают внешнее воздействие, оказываемое на динамическую систему.

§ 1.4. Равновесные решения

Мы уже определили два типа равновесных решений: (1) стационарные решения автономных задач и (2) T -периодические решения неавтономных задач.

Одна из основных особенностей бифуркации состоит в появлении решений, которые нарушают свойства симметрии правой части при $U=0$. Например, можно получить (3) τ -периодическое решение $U(t)=U(t+\tau)$ или $u(t)=u(t+\tau)$ автономной задачи (I.11) или (I.13) соответственно. Можно получить (4) субгармонические решения $U(t)=U(t+nT)$ или $u(t)=u(t+nT)$, где $n=1, 2, 3, \dots$, неавтономных T -периодических задач (I.12) или (I.14) соответственно. Мы можем также получить (5) субгармонические бифуркационные решения от τ -периодических решений автономных задач и т. д.

Допустим, что существует τ -периодическое решение (I.13)

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u(\mu, t)), \quad u(\mu, t) = u(\mu, t + \tau). \quad (\text{I.15})$$

В этом случае f автономна даже тогда, когда u зависит от t . Возмущение v решения $u(\mu, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d(u+v)}{dt} = f(\mu, u(\mu, t) + v(t)). \quad (\text{I.16})$$

Если существуют периодические решения (I.16) $u(\mu, t) + v(t) = u(\mu, t + \bar{\tau}) + v(t + \bar{\tau})$, где $\bar{\tau} \rightarrow n\tau$, $n=1, 2, 3, \dots$, при $v \rightarrow 0$, то решение $u+v$ называется субгармоническим. Наконец, можно получить (6) бифуркацию периодических решений автономных и неавтономных задач в «асимптотически квазипериодические» решения. Иногда говорят, что эти решения лежат на бифуркационных торах, и они будут рассмотрены в гл. X.

Мы не даем общего определения равновесных решений. Вместо этого «равновесное решение» будет означать один из шести типов решений, перечисленных выше.

§ 1.5. Равновесные решения и бифуркационные решения

Бифуркационные решения представляют собой равновесные решения, которые образуют пересекающиеся ветви в соответствующем функциональном пространстве. Например, если U лежит в $\mathbb{R}^1$, то бифуркационные решения образуют пересекающиеся ветви кривой $F(\mu, U)=0$ на (μ, U) -плоскости. Если U лежит в $\mathbb{R}^2$, то бифуркационные решения образуют связанные пересекающиеся поверхности или кривые в трехмерном (μ, U_1, U_2) -пространстве. Скажем, что одно равновесное решение ответвляется от другого при $\mu=\mu_0$, если существуют два различных равновесных решения $U^{(1)}(\mu, t)$ и $U^{(2)}(\mu, t)$ эволюционной задачи, непрерывные по μ и такие, что $U^{(1)}(\mu_0, t) = U^{(2)}(\mu_0, t)$.

Не все равновесные решения происходят от бифуркации. В нелинейных задачах часто имеются изолированные решения и пересекающиеся ветви решений (см. рис. II.7).

§ 1.6. Бифуркационные решения и линейная теория устойчивости

Для построения линейной теории сообщим равновесному решению малое начальное возмущение. Если возмущение растет, то равновесное решение неустойчиво, а если оно затухает, то равновесное решение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Оно может быть неустойчиво по отношению к большим возмущениям; однако если оно устойчиво по отношению к малым возмущениям, то не существует другого равновесного решения эволюционной задачи, близкого к рассматриваемому решению. Поскольку решения, которые ответвляются от данного решения, непрерывны по μ , то часто (но не всегда) справедливо заключение о том, что необходимым условием бифуркации является неустойчивость равновесного решения по отношению к бесконечно малым возмущениям. (Это необходимое условие верно для бифуркации с простым собственным значением.) Теория устойчивости по отношению к бесконечно малым возмущениям является линейной, потому что квадратичными членами в возмущенных уравнениях пренебрегают по сравнению с линейными членами.

Пусть, например, $\tilde{U}(t, \mu)$ — решение (I.12), а δv — возмущение $\tilde{U}$, где δ — постоянная. Тогда

$$\delta \frac{dv}{dt} = F(t, \mu, \tilde{U}(t, \mu) + \delta v(t)) - F(t, \mu, \tilde{U}),$$

и поэтому

$$\frac{dv}{dt} \cong \left[\frac{d}{d\delta} F(t, \mu, \tilde{U} + \delta v) \right]_{\delta=0} \stackrel{\text{def}}{=} F_U(t, \mu, \tilde{U} | v),$$

где $F_U(t, \mu, \tilde{U} | \cdot)$ — линейный оператор, линейный относительно переменной, стоящей после вертикальной черты, который называется производной или линеаризацией F , вычисленной для $\tilde{U}(t, \mu)$. Точно так же $f_u(t, \mu, 0 | \cdot)$ — производная от f , вычисленная для решения $u=0$, и

$$\frac{dv}{dt} = f_u(t, \mu, 0 | v) \quad (\text{I.17})_1$$

определяет линеаризованное уравнение, приведенное к локальной форме. Для упрощения обозначений будем писать

$$f_u(t, \mu | \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(t, \mu, 0 | \cdot). \quad (\text{I.17})_2$$

Решение $u=0$ (I.14) называется *асимптотически устойчивым*, если $v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (см. §II.7).

§ 1.7. Обозначение для функционального разложения $F(t, \mu, U)$

Часто представляется удобным разлагать нелинейный оператор $F(t, \mu, U)$ в ряд Тейлора в окрестности вектора U_0 . Так,

$$\begin{aligned} F(t, \mu, U_0 + v) = & F(t, \mu, U_0) + F_U(t, \mu, U_0 | v) + \\ & + \frac{1}{2} F_{UU}(t, \mu, U_0 | v | v) + \frac{1}{3!} F_{UUU}(t, \mu, U_0 | v | v | v) + \\ & + O(\|v\|^4), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где, например,

$$\begin{aligned} F_{UU}(t, \mu, U_0 | a | b) = F_{UU}(t, \mu, U_0 | b | a) = \\ = \frac{\text{del } \partial^2 F(t, \mu, U_0 + \delta_1 a + \delta_2 b)}{\partial \delta_1 \partial \delta_2} \Big|_{\delta_1 = \delta_2 = 0} \end{aligned} \quad (1.19)$$

— билинейный оператор, переводящий векторы в векторы. $F_{UUU}(t, \mu, U_0 | v | v | v)$ порождается трилинейным оператором точно таким же образом. Многолинейные операторы, очевидно, симметричны относительно векторных аргументов, стоящих справа от вертикальных черточек.

Если $U(t) \in \mathbb{R}^n$, то функциональные производные можно выразить через матрицы

$$\begin{aligned} \{F_U(t, \mu, U_0 | v)\}_i &= \{A(t, \mu, U_0) \cdot v\}_i = \\ &= A_{ij}(t, \mu, U) v_j, \\ \frac{1}{2} \{F_{UU}(t, \mu, U_0 | v | v)\} &= \{B(t, \mu, U_0) \cdot v \cdot v\} = \\ &= B_{ijk}(t, \mu, U_0) v_j v_k, \\ \frac{1}{3!} \{F_{UUU}(t, \mu, U_0 | v | v | v)\}_i &= \{C(t, \mu, U_0) v \cdot v \cdot v\}_i = \\ &= C_{ijkl}(t, \mu, U_0) v_j v_k v_l, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где индексы пробегает значения от 1 до n ; по повторяющимся индексам производится суммирование; B_{ijk} и C_{ijkl} симметричны по отношению к перестановке индексов, следующих за i .

Точно такие же разложения имеют место в случае, если задача приведена к локальной форме. В этом случае (см. (1.17)₂) имеем

$$\frac{du}{dt} = f(t, \mu, u) = f_a(t, \mu | u) + \frac{1}{2} f_{aa}(t, \mu | u | u) + \frac{1}{3!} f_{aaa}(t, \mu | u | u | u) + \dots \quad (1.21)$$

и в $\mathbb{R}^n$

$$f(t, \mu, u) = A(t, \mu) \cdot u + B(t, \mu) \cdot u \cdot u + C \cdot u \cdot u \cdot u + \dots \quad (1.22)$$

Замечания

Теория бифуркаций применима, вообще говоря, к нелинейным задачам не только когда бифуркационными решениями являются равновесные решения эволюционных задач типа (I.1), но также и в случае интегральных уравнений, нелинейных алгебраических и функциональных уравнений, интегро-дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, особенно уравнений с запаздыванием, в которых важно влияние памяти; например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) F(\tau, u, u(\tau)) d\tau.$$

Теория, развиваемая в этой книге, может служить руководством при исследовании других задач; во многих случаях требуется внести только незначительные и очевидные изменения.

Наличие в (I.1) производной по времени важно для определения равновесных решений и анализа их устойчивости. Например, в следующей главе будет показано, что теория бифуркаций плоских кривых $F(\mu, \varepsilon) = 0$ представляет собой не что иное, как исследование особых точек этих кривых. Анализ особых точек этих кривых может быть связан с устойчивостью, однако эта связь несущественна и не является внутренней. Задача устойчивости зависит от того, является ли система диссипативной или консервативной. Консервативные системы являются более трудными в том смысле, что их малые возмущения не затухают. В этой книге будут рассматриваться только диссипативные системы.

Имеется много работ и несколько монографий, посвященных задачам бифуркации. Слово бифуркация, или *Abzweigung*, видимо, введено К. Якоби (*Über die Figur des Gleichgewichts*, *Pogg. Ann.*, 32, 229 (1834)) в его исследовании бифуркации сферических фигур равновесия (эллипсоидов Маклорена) самогравитирующих вращающихся тел. Французское слово *bifurcation* введено А. Пуанкаре (*Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, *Acta Math.*, 7, 259—380 (1885)). Имеется много книг и монографий, посвященных задачам бифуркации и устойчивости. Большинство из них не элементарны или если элементарны, то слишком специфичны—относятся к анализу частных прикладных задач, и хотя эти исследования достойны похвалы, они содержат много деталей анализа конкретных задач, которые не являются центральными в задачах бифуркации и устойчивости. Ниже приводится неполный список обзорных статей, отдельных работ, книг и монографий, которые могут помочь студентам после овладения ими элементарной теорией.

ЛИТЕРАТУРА

- Аманн, Бэйзли, Кирхгэсснер (Amann H., Bazley N., Kirchgässner K.)
Applications of nonlinear analysis in the physical science. Boston—London—Melbourne: Pitman, 1981.
- Арнольд В. И.
Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
- Вайнберг М. М., Треногин В. А.
Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие.— УМН, 17:2 (1962), 13—75.
- Гурел, Росслер (Gurel O., Rossler O., eds.)
Bifurcation theory and its applications in scientific disciplines.— Annals of the New York Academy of Sciences, 316, 1979.
- Джозеф (Joseph D. D.)
Stability of fluid motions, I and II.— Springer Tracts in Natural Philosophy. Vol. 27 and 28. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1976.

- [Имеется перевод: Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости.— М.: Мир, 1981.]
- Йосс (Jooss G.)
Bifurcation of maps and applications. Lecture Notes, Mathematical Studies. Amsterdam: North-Holland, 1979.
- Келлер, Антман (Keller J., Antman S., eds.)
Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems. New York: W. A. Benjamin, 1969.
- Красносельский М. А.
Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1956.
- Марсден, Мак-Кракен (Marsden J., McCracken M.)
The Hopf bifurcation and its applications. Lecture notes in applied mathematical sciences. Vol. 18. Berlin-Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1976. [Имеется перевод: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1981.]
- Пимбл (Pimbley G. H.)
Eigenfunction branches of nonlinear operators and their bifurcations. Lecture notes in mathematics No. 104. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1969.
- Рабинович (Rabinowitz P., ed.)
Applications of bifurcation theory. New York: Academic Press, 1977.
- Саттингер (Sattinger D. H.)
Topics in stability and bifurcation theory. Lecture notes in mathematics No. 309. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1972.
Group theoretic methods in bifurcation theory. Lecture notes in mathematics No. 762. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1980.
- Стакгольд (Stakgold J.)
Branching of solutions of nonlinear equations. SIAM Review B, 289 (1971).
- Хакен (Haken H., ed.)
Synergetics. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1977. [Имеется перевод: Синергетика.— М.: Мир, 1980.]

БИФУРКАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим эволюционное уравнение в $\mathbb{R}^1$ вида

$$\frac{du}{dt} = F(\mu, u), \quad (II.1)$$

где $F(\cdot, \cdot)$ имеет две непрерывные производные по μ и u . При исследовании устойчивости и бифуркации принято считать, что

$$F(\mu, 0) = 0 \quad (II.2)$$

для всех вещественных чисел μ .

Однако мы не будем требовать выполнения условия (II.2). Вместо этого потребуем, чтобы равновесные решения уравнения (II.1) независимо от t удовлетворяли условию $u = \varepsilon$ и

$$F(\mu, \varepsilon) = 0. \quad (II.3)$$

Исследование бифуркации равновесных решений автономной задачи (II.1) эквивалентно исследованию особых точек кривых (II.3) на (μ, ε) -плоскости.

§ II.1. Теорема о неявной функции

Теорема о неявной функции является основным математическим результатом, используемым в теории бифуркаций. В наиболее простой форме эту теорему можно сформулировать следующим образом.

Пусть $F(\mu_0, \varepsilon_0) = 0$, и пусть F — функция, непрерывно дифференцируемая в некоторой открытой области (μ, ε) -плоскости, содержащей точку (μ_0, ε_0) . Тогда если $F_\varepsilon(\mu_0, \varepsilon_0) \neq 0$, то существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие что:

(1) Уравнение $F(\mu, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, когда $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$, такое что $\varepsilon_0 - \beta < \varepsilon < \varepsilon_0 + \beta$.

(2) Функция $\varepsilon(\cdot)$ непрерывно дифференцируема при $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$.

(3) $\varepsilon_\mu(\mu) = -F_\mu(\mu, \varepsilon(\mu))/F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu))$.

Замечание 1. Уравнение можно разрешить относительно $\mu(\varepsilon)$, если $F_\mu(\mu_0, \varepsilon_0) \neq 0$.

Замечание 2. Если F — аналитическая функция, то аналитическими будут $\mu(\varepsilon)$ или $\varepsilon(\mu)$.

Замечание 3. Предположим, что нам нужно решить уравнение

$$F[\mu, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}] = 0$$

относительно μ . Если $F(\mu_0, \varepsilon_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_0^{(n)}) = 0$ и $F_\mu(\mu_0, \varepsilon_0^{(1)}, \dots, \varepsilon_0^{(n)}) \neq 0$, то выполняются условия теоремы о неявной функции, при этом $\varepsilon_0^{(k)} - \beta_k < \varepsilon^{(k)} < \varepsilon_0^{(k)} + \beta_k$, $k = 1, \dots, n$, и мы получаем единственную функцию $\mu = \mu(\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)})$ в интервале $\mu_0 - \alpha < \mu < \mu_0 + \alpha$.

Замечание 4. Доказательство теоремы о неявной функции дается почти во всех учебниках по математическому анализу и здесь опускается.

§ 11.2. Классификация точек кривых, изображающих решения

В нашем исследовании равновесных решений (11.3) желательно ввести следующую классификацию точек.

(1) *Регулярная точка* уравнения $F(\mu, \varepsilon) = 0$ — это такая точка, для которой выполняются условия теоремы о неявной функции:

$$F \neq 0 \text{ или } F_\varepsilon \neq 0. \quad (11.4)$$

Если (11.4) выполняется, то можно найти единственную кривую $\mu = \mu(\varepsilon)$ или $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, проходящую через эту точку.

(2) *Регулярная экстремальная точка* — это точка, в которой $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ изменяет знак и $F_\mu(\mu, \varepsilon) \neq 0$.

(3) *Особая точка* кривой $F(\mu, \varepsilon) = 0$ — это точка, в которой

$$F_\mu = F_\varepsilon = 0. \quad (11.5)$$

(4) *Двойная точка* кривой $F(\mu, \varepsilon) = 0$ — это особая точка, через которую проходят две и только две ветви $F(\mu, \varepsilon) = 0$, имеющие разные касательные. Мы будем предполагать, что в двойной точке все вторые производные от F одновременно не обращаются в нуль.

(5) *Особая экстремальная (двойная) точка* кривой $F(\mu, \varepsilon) = 0$ — это двойная точка, в которой μ_ε изменяет знак на одной ветви.

(6) *Точка возврата* кривой $F(\mu, \varepsilon) = 0$ — это точка касания второго порядка между двумя ветвями кривой. Две ветви кривой имеют в точке возврата одну и ту же касательную.

(7) *Сопряженная точка* — это изолированное особое точечное решение уравнения $F(\mu, \varepsilon) = 0$.

(8) *Особая точка высокого порядка* кривой $F(\mu, \varepsilon) = 0$ — это особая точка, в которой все три вторые производные от F равны нулю.

Замечания. Элементарная теория особых точек плоских кривых излагается во многих книгах по классическому анализу; например, см. R. Courant, *Differential and Integral Calculus*, Vol. II, Chap. III.

(New York: Interscience, 1956). Для того, чтобы дополнить исследование бифуркации в $\mathbb{R}^1$, нам, кроме того, понадобится провести исследование устойчивости бифуркационных решений (см. разд. II.8—II.14, содержащие результаты, опубликованные в работе: D. D. Joseph, Factorization theorems and repeated branching of solutions at a simple eigenvalue, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 316, 150—167 (1979).

§ II.3. Характеристическая квадратичная форма. Двойные точки, точки возврата и сопряженные точки

Необходимо уточнить понятие двойных точек. Пусть (μ_0, ε_0) — особая точка. Тогда равновесные кривые, проходящие через особые точки, должны удовлетворять уравнению

$$2F(\mu, \varepsilon) = F_{\mu\mu}\delta\mu^2 + 2F_{\varepsilon\mu}\delta\varepsilon\delta\mu + F_{\varepsilon\varepsilon}\delta\varepsilon^2 + o[(|\delta\mu| + |\delta\varepsilon|)^2] = 0, \quad (\text{II.6})$$

где $\delta\mu = \mu - \mu_0$, $\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$, $F_{\mu\mu} = F_{\mu\mu}(\mu_0, \varepsilon_0)$ и т. д. В пределе при $(\mu, \varepsilon) \rightarrow (\mu_0, \varepsilon_0)$ уравнение (II.6) для кривых $F(\mu, \varepsilon) = 0$ приводится к квадратному уравнению

$$F_{\mu\mu}d\mu^2 + 2F_{\varepsilon\mu}d\varepsilon d\mu + F_{\varepsilon\varepsilon}d\varepsilon^2 = 0 \quad (\text{II.7})$$

для тангенсов угла наклона касательных к кривым. Отсюда находим

$$\begin{bmatrix} \mu_{\varepsilon}^{(1)}(\varepsilon_0) \\ \mu_{\varepsilon}^{(2)}(\varepsilon_0) \end{bmatrix} = -\frac{F_{\varepsilon\mu}}{F_{\mu\mu}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{D}{F_{\mu\mu}^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

или

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mu}^{(1)}(\mu_0) \\ \varepsilon_{\mu}^{(2)}(\mu_0) \end{bmatrix} = -\frac{F_{\varepsilon\mu}}{F_{\varepsilon\varepsilon}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sqrt{\frac{D}{F_{\varepsilon\varepsilon}^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.9})$$

где

$$D = F_{\varepsilon\mu}^2 - F_{\mu\mu}F_{\varepsilon\varepsilon}. \quad (\text{II.10})$$

Если $D < 0$, то не существует вещественных касательных, проходящих через (μ_0, ε_0) , и точка (μ_0, ε_0) является изолированной (сопряженной) точкой — решением уравнения $F(\mu, \varepsilon) = 0$.

Рассмотрим случай, когда (μ_0, ε_0) не является особой точкой высокого порядка. Значит, (μ_0, ε_0) есть двойная точка тогда и только тогда, когда $D > 0$. Если две кривые проходят через особую точку и $D = 0$, то тангенс угла наклона касательной в особой точке, в которой касание кривых имеет высокий порядок, определяется уравнением (II.8) или (II.9). Если $D > 0$ и $F_{\mu\mu} \neq 0$, то существуют две касательные с тангенсами углов наклона $\mu_{\varepsilon}^{(1)}(\varepsilon_0)$ и $\mu_{\varepsilon}^{(2)}(\varepsilon_0)$, даваемыми уравнением (II.8). Если $D > 0$ и $F_{\mu\mu} = 0$, то $F_{\varepsilon\mu} \neq 0$,

$$d\varepsilon [2d\mu F_{\varepsilon\mu} + d\varepsilon F_{\varepsilon\varepsilon}] = 0 \quad (\text{II.11})$$

и существуют две касательные с тангенсами углов наклона $\varepsilon_\mu(\mu_0)=0$ и $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0)=-F_{\varepsilon\varepsilon}/2F_{\varepsilon\mu}$. Если $\varepsilon_\mu(\mu_0)=0$, то $F_{\mu\mu}(\mu_0, \varepsilon_0)=0$. Таким образом, все возможные ситуации исчерпываются следующими двумя случаями:

(А) $D > 0$, $F_{\mu\mu} \neq 0$ с тангенсами угла наклона касательных $\mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon_0)$ и $\mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon_0)$.

(Б) $D > 0$, $F_{\mu\mu}=0$ с тангенсами угла наклона касательных $\varepsilon_\mu(\mu_0)=0$ и $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0)=-F_{\varepsilon\varepsilon}/2F_{\varepsilon\mu}$.

§ II.4. Двойная точка бифуркации и теорема о неявной функции

Говорят, что решения (μ, ε) уравнения $F(\mu, \varepsilon)=0$ имеют двойную точку бифуркации в (μ_0, ε_0) , если две кривые с различными касательными проходят через (μ_0, ε_0) . Предположим, что $D > 0$, и для нахождения кривых применим теорему о неявной функции. Рассмотрим случай (А), указанный в последнем абзаце § II.3, и определим функцию $v(\varepsilon)$, удовлетворяющую уравнению $\mu - \mu_0 = v(\varepsilon)$ ($\varepsilon - \varepsilon_0$) и такую, что

$$\stackrel{\text{def}}{v_0} = v(\varepsilon_0) = \mu_\varepsilon(\varepsilon_0),$$

где $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0)$ имеет одно из двух значений $\mu_\varepsilon^{(1)}, \mu_\varepsilon^{(2)}$, даваемых формулой (II.8) и представляющих собой решение характеристического квадратного уравнения. Определим

$$\begin{aligned} G(v, \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{2F(\mu, \varepsilon)}{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2} = \\ &= F_{\mu\mu}v^2 + 2F_{\varepsilon\mu}v + F_{\varepsilon\varepsilon} + \\ &+ \frac{1}{3}\{F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 3F_{\varepsilon\varepsilon\mu}v + 3F_{\varepsilon\mu\mu}v^2 + F_{\mu\mu\mu}v^3\}(\varepsilon - \varepsilon_0) + o(|\varepsilon - \varepsilon_0|). \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Мы определили G так, чтобы

$$G(v_0, \varepsilon_0) = F_{\mu\mu}v_0^2 + 2F_{\varepsilon\mu}v_0 + F_{\varepsilon\varepsilon} = 0$$

для обоих значений v_0 . Более того, дифференцирование (II.12) с использованием (II.8) показывает, что

$$G_v(v_0, \varepsilon_0) = 2(\mu_\varepsilon(\varepsilon_0)F_{\mu\mu} + F_{\varepsilon\mu}) = \pm 2\sqrt{D} \operatorname{sgn} F_{\mu\mu} \neq 0. \quad (\text{II.13})$$

Таким образом, теоремой о неявной функции гарантируется существование двух функций $v^{(1)}(\varepsilon)$ и $v^{(2)}(\varepsilon)$, удовлетворяющих условиям $v^{(1)}(\varepsilon_0) = \mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon_0)$ и $v^{(2)}(\varepsilon_0) = \mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon_0)$.

Мы оставляем читателю в качестве упражнения строгое доказательство существования бифуркации в случае (Б) с использованием теоремы о неявной функции.

§ II.5. Бифуркация в точке возврата и характеристические квадратные уравнения

Предположим теперь, что $F(\cdot, \cdot)$ имеет непрерывные частные производные четвертого порядка, и покажем, что происходит в точке возврата с касанием второго порядка. При $\mu = \mu(\varepsilon)$ все производные от $\mathcal{F}(\varepsilon) \equiv F(\mu(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$ равны нулю. Тогда имеем

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{d\varepsilon^2} = F_{\varepsilon\varepsilon} + 2\mu_\varepsilon F_{\varepsilon\mu} + \mu_\varepsilon^2 F_{\mu\mu} + \mu_{\varepsilon\varepsilon} F_\mu = 0, \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \mathcal{F}}{d\varepsilon^3} = & F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 3\mu_\varepsilon F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 3\mu_\varepsilon^2 F_{\varepsilon\mu\mu} + \mu_\varepsilon^3 F_{\mu\mu\mu} + \\ & + 3\mu_{\varepsilon\varepsilon} F_{\varepsilon\mu} + 3\mu_{\varepsilon\varepsilon}\mu_\varepsilon F_{\mu\mu} + \mu_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} F_\mu = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \mathcal{F}}{d\varepsilon^4} = & F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 4\mu_\varepsilon F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\mu} + 6\mu_\varepsilon^2 F_{\varepsilon\varepsilon\mu\mu} + 4\mu_\varepsilon^3 F_{\varepsilon\mu\mu\mu} + \\ & + \mu_\varepsilon^4 F_{\mu\mu\mu\mu} + 4\mu_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} F_{\varepsilon\mu} + 4\mu_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}\mu_\varepsilon F_{\mu\mu} + 3\mu_{\varepsilon\varepsilon}^2 F_{\mu\mu} + \\ & + 6\mu_{\varepsilon\varepsilon} F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 12\mu_{\varepsilon\varepsilon}\mu_\varepsilon F_{\varepsilon\mu\mu} + 6\mu_{\varepsilon\varepsilon}\mu_\varepsilon^2 F_{\mu\mu\mu} + \mu_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon} F_\mu = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Если $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, то $f(\mu) \equiv F(\mu, \varepsilon(\mu)) \equiv 0$ и

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\mu^2} = & F_{\mu\mu} + 2\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\mu} + \varepsilon_\mu^2 F_{\varepsilon\varepsilon} + \varepsilon_{\mu\mu} F_\varepsilon = 0, \\ \frac{d^3 f}{d\mu^3} = & F_{\mu\mu\mu} + 3\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\mu\mu} + 3\varepsilon_\mu^2 F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + \varepsilon_\mu^3 F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \\ & + 3\varepsilon_{\mu\mu} F_{\varepsilon\mu} + 3\varepsilon_{\mu\mu}\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\varepsilon} + \varepsilon_{\mu\mu\mu} F_\varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 f}{d\mu^4} = & F_{\mu\mu\mu\mu} + 4\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\mu\mu\mu} + 6\varepsilon_\mu^2 F_{\varepsilon\varepsilon\mu\mu} + 4\varepsilon_\mu^3 F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\mu} + \\ & + \varepsilon_\mu^4 F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 4\varepsilon_{\mu\mu\mu} F_{\varepsilon\mu} + 4\varepsilon_{\mu\mu\mu}\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\varepsilon} + 3\varepsilon_{\mu\mu}^2 F_{\varepsilon\varepsilon} + \\ & + 6\varepsilon_{\mu\mu} F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 12\varepsilon_{\mu\mu}\varepsilon_\mu F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 6\varepsilon_{\mu\mu}\varepsilon_\mu^2 F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \varepsilon_{\mu\mu\mu\mu} F_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

В точке возврата $F = F_\varepsilon = F_\mu = D = 0$. В случае (А) $F_{\mu\mu} \neq 0$, $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0) = -F_{\varepsilon\mu}/F_{\mu\mu}$, (II.14) удовлетворяется тождественно, а (II.15) принимает вид

$$F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 3\mu_\varepsilon(\varepsilon_0) F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 3\mu_\varepsilon^2(\varepsilon_0) F_{\varepsilon\mu\mu} + \mu_\varepsilon^3 F_{\mu\mu\mu} = 0.$$

В (II.16) коэффициент при $\mu_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}$ обращается в нуль, и это соотношение переходит в квадратное уравнение для кривизны $\mu_{\varepsilon\varepsilon}$ при ε_0 :

$$\mu_{\varepsilon\varepsilon}^2 + 2 \left(\frac{\mu_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}}{F_{\mu\mu}} \right) + \left(\frac{\xi}{F_{\mu\mu}} \right) = 0, \quad (\text{II.19})$$

где

$$\xi = F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 2\mu_\varepsilon F_{\varepsilon\mu\mu} + \mu_\varepsilon^2 F_{\mu\mu\mu}$$

и

$$3\xi = F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + 4\mu_\varepsilon F_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 6\mu_\varepsilon^2 F_{\varepsilon\varepsilon\mu\mu} + 4\mu_\varepsilon^3 F_{\varepsilon\mu\mu\mu} + \mu_\varepsilon^4 F_{\mu\mu\mu\mu}.$$

Уравнение (II.19) имеет два корня

$$\begin{bmatrix} \mu_{\varepsilon\varepsilon}^{(1)}(\varepsilon_0) \\ \mu_{\varepsilon\varepsilon}^{(2)}(\varepsilon_0) \end{bmatrix} = -\frac{\xi}{F_{\mu\mu}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{\mathcal{D}_1}{F_{\mu\mu}^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.20})$$

где

$$\mathcal{D}_1 = \xi^2 - F_{\mu\mu} \xi. \quad (\text{II.21})$$

В случае (Б) $F_{\mu\mu} = 0$, и поскольку $D = 0$, то $F_{\varepsilon\mu} = 0$, $F_{\varepsilon\varepsilon} \neq 0$ и $\varepsilon_\mu(\mu_0) = 0$. Тогда из (II.17) следует, что $F_{\mu\mu\mu} = 0$, а (II.18) приводится к квадратному уравнению для кривизны $\varepsilon_{\mu\mu}(\mu_0)$:

$$\varepsilon_{\mu\mu}^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon_{\mu\mu} F_{\varepsilon\mu\mu}}{F_{\varepsilon\varepsilon}} \right) + \left(\frac{F_{\mu\mu\mu\mu}}{3F_{\varepsilon\varepsilon}} \right) = 0. \quad (\text{II.22})$$

Уравнение (II.22) имеет два корня

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{\mu\mu}^{(1)}(\mu_0) \\ \varepsilon_{\mu\mu}^{(2)}(\mu_0) \end{bmatrix} = -\frac{F_{\varepsilon\mu\mu}}{F_{\varepsilon\varepsilon}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{\mathcal{D}_2}{F_{\varepsilon\varepsilon}^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.23})$$

где

$$\mathcal{D}_2 = F_{\varepsilon\mu\mu}^2 - \left(\frac{F_{\varepsilon\varepsilon} F_{\mu\mu\mu\mu}}{3} \right). \quad (\text{II.24})$$

В точке касания второго порядка двух кривых они имеют общую касательную и разные вещественные кривизны. Отсюда следует, что $\mathcal{D}_1 > 0$ или $\mathcal{D}_2 > 0$ в точке касания второго порядка.

На основе теоремы о неявной функции можно показать, что кривизны, даваемые формулами (II.20) и (II.23), соответствуют вещественным кривым, проходящим через точку возврата.

§ II.6. Тройная точка бифуркации

Мы переходим теперь к случаю, когда все производные второго порядка от $F(\cdot, \cdot)$ равны нулю в особой точке. Ограничиваясь случаем, когда $F_{\mu\mu\mu} \neq 0$, перепишем (II.15) в виде

$$\begin{aligned} (\mu_\varepsilon - \mu_\varepsilon^{(1)})(\mu_\varepsilon - \mu_\varepsilon^{(2)})(\mu_\varepsilon - \mu_\varepsilon^{(3)}) &= \mu_\varepsilon^3 + 3\mu_\varepsilon^2 \frac{F_{\varepsilon\mu\mu}}{F_{\mu\mu\mu}} + \\ &+ 3\mu_\varepsilon \frac{F_{\varepsilon\varepsilon\mu}}{F_{\mu\mu\mu}} + \frac{F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}}{F_{\mu\mu\mu}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

где $\mu_\varepsilon^{(1)}$, $\mu_\varepsilon^{(2)}$ и $\mu_\varepsilon^{(3)}$ — значения $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$. Из (II.25) следует, что

$$\frac{F_{\varepsilon\varepsilon\mu}}{F_{\mu\mu\mu}} = \frac{1}{3} (\mu_\varepsilon^{(1)}\mu_\varepsilon^{(2)} + \mu_\varepsilon^{(1)}\mu_\varepsilon^{(3)} + \mu_\varepsilon^{(2)}\mu_\varepsilon^{(3)}), \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{F_{\varepsilon\mu\mu}}{F_{\mu\mu\mu}} = -\frac{1}{3} (\mu_\varepsilon^{(1)} + \mu_\varepsilon^{(2)} + \mu_\varepsilon^{(3)}) \quad (\text{II.27})$$

и

$$\frac{F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}}{F_{\mu\mu\mu}} = -\mu_\varepsilon^{(1)}\mu_\varepsilon^{(2)}\mu_\varepsilon^{(3)}.$$

Если три корня уравнения (II.25)—вещественные и различные, то через особую точку (μ_0, ε_0) проходят три бифуркационных решения. Если два корня комплексные, то бифуркации не происходит. Формулы (II.26, 27) удобны при исследовании связи между характером устойчивости и видом бифуркационных кривых в тройной точке.

§ II.7. Теорема о достаточных условиях устойчивости

Одни из бифуркационных решений являются устойчивыми, а другие неустойчивыми. Для исследования устойчивости решения $u = \varepsilon$ очень часто исследуют линеаризованное уравнение

$$Z_t = F_\varepsilon(\mu, \varepsilon) Z, \quad (\text{II.28})$$

общее решение которого имеет вид

$$Z = e^{\sigma t} Z_0, \quad (\text{II.29})$$

где

$$\sigma = F_\varepsilon(\mu, \varepsilon). \quad (\text{II.30})$$

Поскольку все решения (II.28) имеют вид (II.29), то мы заключаем, что возмущение Z или ε растет, если $\sigma > 0$, и затухает, если $\sigma < 0$. Поэтому линейная теория приводит к заключению о том, что $(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$, удовлетворяющее уравнению $F(\mu, \varepsilon) = 0$, устойчиво, если $\sigma < 0$, и неустойчиво, если $\sigma > 0$.

Теперь мы докажем, что заключение, полученное на основе линейной теории, сохраняется для нелинейных уравнений, если возмущение не слишком большое.

Пусть v —возмущение ε , $u = \varepsilon + v$, где

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= F(\mu(\varepsilon), \varepsilon + v) - F(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = \\ &= F_\varepsilon(\mu(\varepsilon), \varepsilon) v + R(\varepsilon, v) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

и

$$|R(\varepsilon, v)| \leq K |v|^2, \quad (\text{II.32})$$

если $|v|$ достаточно мало. Покажем, что вблизи начала v изменяется подобно $Z(t) = e^{\sigma t} Z_0$, $\sigma = F_\varepsilon(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$, и стремится к нулю экспоненциально или экспоненциально растет в зависимости от того, какое из неравенств $\sigma < 0$ или $\sigma > 0$ имеет место. Уравнение (II.31) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} (v e^{-\sigma t}) = R(\varepsilon, v) e^{-\sigma t}. \quad (\text{II.33})$$

Следовательно,

$$v(t) e^{-\sigma t} = v(0) + \int_0^t R(\varepsilon, v(s)) e^{-\sigma s} ds, \quad (\text{II.34})$$

и, используя (II.32), находим, что

$$|v(t) - v(0)e^{\sigma t}| \leq K \int_0^t e^{\sigma(t-s)} |v(s)|^2 ds. \quad (\text{II.35})$$

Покажем, что из (II.35) следует, что $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $\sigma(\varepsilon) < 0$ и $|v(0)|$ достаточно мало. Предположим, что $\sigma < 0$. Тогда существует $\eta > 0$, такое, что $\sigma(\varepsilon) + \eta < 0$. Допустим теперь, что

$$|v(t)| \leq \frac{\eta}{K} \quad \text{для всех } t \geq 0. \quad (\text{II.36})$$

Комбинируя (II.35) и (II.36), находим, что

$$|v(t) - v(0)e^{\sigma t}| \leq \eta e^{\sigma t} \int_0^t e^{-\sigma s} |v(s)| ds. \quad (\text{II.37})$$

Из (II.37) заключаем

$$|v(t)| \leq |v(0)| e^{\sigma t} + \eta e^{\sigma t} \int_0^t e^{-\sigma s} |v(s)| ds. \quad (\text{II.38})$$

Полагая

$$y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t e^{-\sigma s} |v(s)| ds, \quad (\text{II.39})$$

представим (II.38) в форме

$$0 \leq \dot{y}(t) \leq |v(0)| + \eta y(t), \quad y(0) = 0. \quad (\text{II.40})$$

Умножая (II.40) на интегрирующий множитель $e^{-\eta t}$ и интегрируя, получаем

$$y(t) e^{-\eta t} \leq \{1 - e^{-\eta t}\} |v(0)| / \eta. \quad (\text{II.41})$$

Возвращаясь теперь к (II.37) и используя (II.41), находим, что

$$|v(t) - v(0)e^{\sigma t}| \leq |v(0)| e^{(\sigma + \eta)t}. \quad (\text{II.42})$$

Неравенство (II.42) показывает, что $v(t) \rightarrow 0$ экспоненциально, если $\sigma(\varepsilon) < 0$, и что неравенство $|v(t)| \leq \eta/K$ выполняется для всех $t \geq 0$, если $|v(0)|$ достаточно мало.

Мы показали, что $(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$ экспоненциально устойчиво, если $\sigma(\varepsilon) = F_\varepsilon(\mu(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ и $|v(0)|$ достаточно мало. Условие на $|v(0)|$ является причиной того, что решение $(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$ называют условно устойчивым. Если бы на $|v(0)|$ не было ограничений, то мы имели бы безусловную или глобальную устойчивость. Глобальная устойчивость является редким свойством, поскольку из него следует, что при фиксированном значении μ существует только одно стационарное решение $u = \varepsilon$, которое при данном фиксированном значении μ

притягивает все решения уравнения (II.1). Часто при одном и том же μ существуют несколько решений, и каждое устойчивое равновесное решение имеет свою собственную ограниченную область притяжения (см. рис. II.7).

Докажем теперь, что нулевое решение уравнения (II.31) неустойчиво, если $\sigma > 0$. Уравнение (II.34) по-прежнему остается в силе. Поэтому если допустить, что

$$|v(t)| \leq \varepsilon$$

для всех $t \geq 0$ и в (II.34) положить $t \rightarrow \infty$, то получим

$$v(0) = - \int_0^{\infty} R(\varepsilon, v(s)) e^{-\sigma s} ds.$$

Тогда (II.34) можно переписать в виде

$$v(t) = - \int_t^{\infty} R(\varepsilon, v(s)) e^{\sigma(t-s)} ds.$$

Теперь, используя оценку (II.32), имеем

$$|v(t)| \leq K\varepsilon^2 \int_t^{\infty} e^{\sigma(t-s)} ds = \frac{K\varepsilon^2}{\sigma}$$

и ε должно удовлетворять неравенству

$$\varepsilon \leq K\varepsilon^2/\sigma. \quad (\text{II.43})$$

Выбирая $v(0) \neq 0$ и $\varepsilon < \sigma/K$, приходим к противоречию с (II.43). Поэтому невозможно удовлетворить неравенству $|v(t)| \leq \varepsilon$ для всех t . Следовательно, решение $v(t)$ покинет фиксированный интервал в момент $t_0 < +\infty$. Этим завершается доказательство эквивалентности заключений об устойчивости нулевого решения уравнения (II.31), выводимых из линейной и нелинейной теорий.

Замечания. Доказательство теоремы об условной устойчивости в $\mathbb{R}^1$ соответствует доказательству классической теоремы Ляпунова для систем в $\mathbb{R}^n$ (см., например, Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: ИЛ, 1958, гл. 3).

§ II.8. Теорема о факторизации в одномерном случае

Теорема 1. (Теорема о факторизации.) Для каждого равновесного решения $F(\mu, \varepsilon) = 0$, для которого $\mu = \mu(\varepsilon)$, имеем

$$\sigma(\varepsilon) = F_{\varepsilon}(\mu(\varepsilon), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu_{\varepsilon}(\varepsilon) F_{\mu}(\mu(\varepsilon), \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} -\mu_{\varepsilon} \hat{\sigma}(\varepsilon). \quad (\text{II.44})$$

Доказательство теоремы 1 следует из уравнения

$$\frac{dF(\mu(\varepsilon), \varepsilon)}{d\varepsilon} = F_\varepsilon(\mu(\varepsilon), \varepsilon) + \mu_\varepsilon(\varepsilon) F_\mu(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = 0.$$

Этот тип факторизации может быть установлен для анализа устойчивости бифуркационных решений в пространствах более сложных, чем $\mathbb{R}^1$. Однако эта теорема наиболее проста для понимания в $\mathbb{R}^1$. Одно из основных следствий теоремы о факторизации состоит в том, что $\sigma(\varepsilon)$ должно изменять знак, когда ε проходит значение, соответствующее регулярной экстремальной точке. Отсюда следует, что решение $u = \varepsilon$, $\mu = \mu(\varepsilon)$ устойчиво с одной стороны от регулярной экстремальной точки и неустойчиво с другой стороны (рис. II.1).



Рис. II.1. Смена устойчивости в регулярной экстремальной точке.

Следствие 1. (А) Всякая точка (μ_0, ε_0) кривой $\mu = \mu(\varepsilon)$, для которой $\hat{\sigma}(\varepsilon_0) = 0$, является особой точкой. (Б) Всякая точка (μ_0, ε_0) кривой $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$, для которой $\sigma(\mu_0) = 0$, является особой точкой.

Доказательство утверждения (А) следует из (II.44), а доказательство утверждения (Б)—из соотношений

$$\sigma(\mu) = F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu)), \quad \frac{dF}{d\mu} = F_\mu + \varepsilon_\mu F_\varepsilon = 0. \quad (\text{II.45})$$

§ II.9. Эквивалентность строгой потери устойчивости и двойной точки бифуркации

Исследование устойчивости мы связываем с исследованием бифуркации в предположении о «строгом пересечении», введенном Хопфом¹⁾ и используемом почти во всех работах по бифуркации и устойчивости. Это предположение ограничивает исследование бифуркации *двойными точками*; точка возврата и особые точки высокого порядка исключаются.

¹⁾ Hopf E., Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems, *Berichten der Mathematisch-Physischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, XCIV, 1—22 (1942). Английский перевод этой статьи, выполненный Л. Н. Ховардом и Н. Коппель, можно найти в книге Дж. Марсдена и М. Мак-Кракена (см. литературу к гл. I).

Следствие 2. Пусть (μ_0, ε_0) — особая точка и (А) $\sigma_\varepsilon(\varepsilon_0) \neq 0$ или (Б) $\sigma_\mu(\mu_0) \neq 0$. Тогда (μ_0, ε_0) — двойная точка.

В случае (А) находим из (II.44), что в особой точке $(\mu(\varepsilon_0), \varepsilon_0)$

$$\sigma_\varepsilon(\varepsilon_0) = F_{\varepsilon\varepsilon} + \mu_\varepsilon F_{\varepsilon\mu} = -\mu_\varepsilon^2 F_{\mu\mu} - \mu_\varepsilon F_{\varepsilon\mu} \neq 0. \quad (\text{II.46})$$

Соотношение (II.46) показывает, что для $(\mu(\varepsilon_0), \varepsilon_0)$ выполняется характеристическое квадратное уравнение (II.7). Поскольку существует кривая, проходящая через эту точку, то $D \geq 0$, и нам необходимо показать, что $D \neq 0$. Предположим, что $D = F_{\varepsilon\mu}^2 - F_{\mu\mu}F_{\varepsilon\varepsilon} = 0$, и покажем, что это предположение противоречит (II.46). Сначала отметим, что из (II.46) следует, что не все вторые производные от F равны нулю в $(\mu(\varepsilon_0), \varepsilon_0)$. Если $F_{\mu\mu}F_{\varepsilon\varepsilon} \neq 0$ и $D = 0$, то (II.8) принимает вид $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0) = -F_{\varepsilon\mu}/F_{\mu\mu}$, а (II.46) можно записать в форме $F_{\varepsilon\varepsilon} - (F_{\varepsilon\mu}^2/F_{\mu\mu}) = -D/F_{\mu\mu} \neq 0$. В результате получаем $D \neq 0$. Если $F_{\mu\mu}F_{\varepsilon\varepsilon} = 0$ и $D = 0$, то $F_{\varepsilon\mu} = 0$ и (II.66) можно записать в виде $\sigma_\varepsilon = F_{\varepsilon\varepsilon} = -\mu_\varepsilon^2 F_{\mu\mu} \neq 0$. Поэтому в итоге $D \neq 0$.

В случае (Б) разрешим $F(\mu, \varepsilon) = 0$ относительно $\varepsilon(\mu)$. В особой точке (μ_0, ε_0) имеет место строгая потеря устойчивости, потому что $\sigma_\mu = F_{\varepsilon\mu} + F_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon_\mu = F_{\varepsilon\mu} = \sqrt{D} \operatorname{sgn} F_{\varepsilon\mu}$.

§ II.10. Смена устойчивости в двойной точке

Можно сделать точные заключения относительно устойчивости решений вблизи двойных точек. Все возможные результаты о характере устойчивости двойной точки бифуркации можно описать случаями (А) и (Б), которые были точно охарактеризованы после уравнения (II.11). В случае (А) через двойную точку (μ_0, ε_0) проходят две кривые $\mu^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$. В случае (Б) через двойную точку проходят две кривые $\varepsilon^{(1)}(\mu)$ ($\varepsilon_\mu^{(1)}(\mu_0) = 0$) и $\mu^{(2)}(\varepsilon)$. Собственное значение $\sigma^{(1)}$ соответствует кривой с верхним индексом (1), а $\sigma^{(2)}$ — кривой с верхним индексом (2).

Теорема 2. Пусть (μ_0, ε_0) — двойная точка. Тогда в случае (А)

$$\sigma^{(1)}(\varepsilon) = -\mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon) \{ \hat{s} \sqrt{D} (\varepsilon - \varepsilon_0) + o(\varepsilon - \varepsilon_0) \}, \quad (\text{II.47})$$

$$\sigma^{(2)}(\varepsilon) = \mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon) \{ \hat{s} \sqrt{D} (\varepsilon - \varepsilon_0) + o(\varepsilon - \varepsilon_0) \}, \quad (\text{II.48})$$

где $\hat{s} = F_{\mu\mu}/|F_{\mu\mu}|$, а D и $F_{\mu\mu}$ вычисляются при $\varepsilon = \varepsilon_0$. В случае (Б)

$$\sigma^{(1)}(\mu) = s \sqrt{D} (\mu - \mu_0) + o(\mu - \mu_0), \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma^{(2)}(\varepsilon) = -s \mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon) \{ \sqrt{D} (\varepsilon - \varepsilon_0) + o(\varepsilon - \varepsilon_0) \}, \quad (\text{II.50})$$

где $s = F_{\varepsilon\mu}/|F_{\varepsilon\mu}|$.

Доказательство. Если $\mu = \mu(\varepsilon)$, то (II.44) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= -\mu_\varepsilon(\varepsilon) F_{\mu\mu}(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = \\ &= -\mu_\varepsilon(\varepsilon) \{ [F_{\mu\mu}(\mu_0, \varepsilon_0) \mu_\varepsilon(\varepsilon_0) + F_{\varepsilon\mu}(\mu_0, \varepsilon_0)] (\varepsilon - \varepsilon_0) + o(\varepsilon - \varepsilon_0) \}. \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

Формулы (II.47) и (II.48) получаются из (II.51) при подстановке вместо $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0)$ значений, даваемых (II.8). Если $\varepsilon = \varepsilon(\mu)$ и одновременно $\varepsilon_\mu(\mu_0) = 0$, то $F_{\mu\mu}(\mu_0, \varepsilon_0) = 0$, $F_{\varepsilon\mu}^2(\mu_0, \varepsilon_0) = D$ и

$$\begin{aligned}\sigma(\mu) &= F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu)) = F_{\varepsilon\mu}(\mu_0, \varepsilon_0)(\mu - \mu_0) + o(\mu - \mu_0) = \\ &= s\sqrt{D}(\mu - \mu_0) + o(\mu - \mu_0).\end{aligned}$$

Теорема 2 дает исчерпывающую классификацию связи устойчивости решений вблизи двойной точки с наклоном бифуркационных кривых вблизи этой точки. Полученный результат можно сформулировать следующим образом. Пусть $|\varepsilon - \varepsilon_0| > 0$ мало. Тогда из

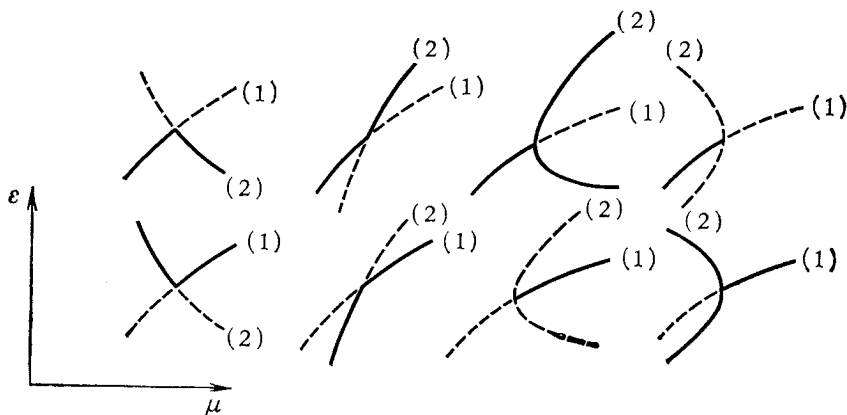


Рис. II.2. Устойчивость решений в окрестности двойной точки бифуркации. На каждой из восьми схем двойной точкой является (μ_0, ε_0) . Для верхних четырех схем $\hat{s} = -1$, а для нижних схем $\hat{s} = 1$. Устойчивость определяется знаком собственного значения, даваемого формулами (II.47) и (II.48).

(II.47) и (II.48) следует, что $\sigma^{(1)}(\varepsilon)$ и $\sigma^{(2)}(\varepsilon)$ имеют одинаковый (разный) знак, если $\mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon)$ и $\mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon)$ имеют разный (одинаковый) знак. Аналогичное утверждение можно вывести из (II.49) и (II.50). Возможные распределения устойчивости решений схематично показаны на рис. II.2 (пунктирные линии соответствуют неустойчивым решениям).

Теорема 3. *Предположим, что все особые точки решений $F(\mu, \varepsilon) = 0$ являются двойными точками. Смена устойчивости таких решений должна происходить в каждой регулярной экстремальной точке и в каждой особой точке (не являющейся экстремальной точкой), и только в таких точках.*

§ II.11. Смена устойчивости в двойной точке для задач, приведенных к локальной форме

Анализ двойной точки бифуркации оказывается еще проще, если сначала сделать редукцию (I.14) к локальной форме. Уместно сделать несколько замечаний о бифуркационных диаграммах, которые следуют из анализа (I.14). Обычно в литературе исследование начинают со случая, когда $u=0$ — решение эволюционной задачи.

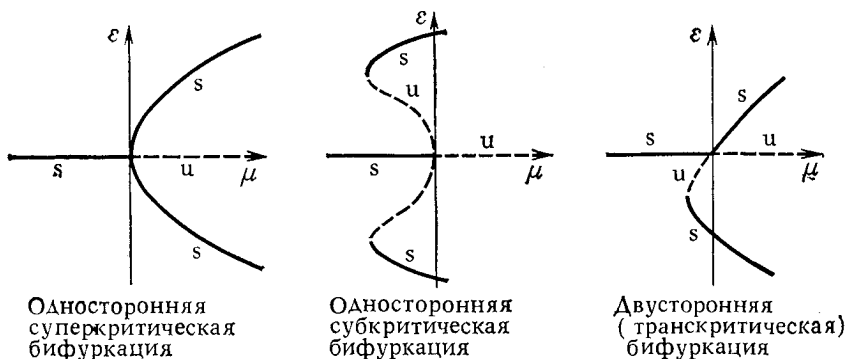


Рис. II.3. Устойчивость решений, ответвляющихся при $\epsilon=0$. Для субкритических решений $|\epsilon| > 0$ для тех значений μ (> 0 на диаграмме), для которых $\epsilon=0$ неустойчиво. Для субкритических решений $|\epsilon| > 0$ для тех μ , для которых $\epsilon=0$ устойчиво.

Если $F(\mu, 0) = 0$ для всех μ , то $F_\mu(0, 0) = F_{\mu\mu}(0, 0) = 0$ и условие строгой потери устойчивости решения $u=0$ при переходе μ через нуль принимает вид

$$\sigma_\mu^{(1)}(0) = F_{\mu\epsilon}(0, 0) \neq 0, \text{ пусть } > 0. \quad (\text{II.52})$$

Тогда $D = F_{\epsilon\mu}^2 > 0$ и

$$\sigma_\mu^{(2)}(\epsilon) = -\mu_\epsilon^{(2)}(\epsilon) \sigma_\mu^{(1)}(0) \{\epsilon + o(\epsilon)\}. \quad (\text{II.53})$$

Бифуркационные диаграммы, которые следуют из этих результатов, и относящиеся к ним заключения приведены на рис. II.3 и подписях под ним.

Прекрасный демонстрационный опыт, помогающий понять идеи, содержащиеся в теореме 3, придумал Т. Бенджамин. Его опыт — это пример выпучивания простой конструкции под действием собственного веса. Прибор представляет собой доску с двумя отверстиями, через которые пропущена проволока, образующая над доской дугу длиной l . Проволока, фактически используемая в приборе Бенджамина, похожа на велосипедный тормозной тросик: она свита в тугую спиральную пружину и покрыта пластмассовой трубкой. Прибор схематически изображен на рис. II.4.

Пусть уравнение движения проволочной дуги имеет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = F(l, \theta). \quad (II.54)$$

Равновесные решения этого уравнения вида $F(l(\theta), \theta) = 0$ показаны на рис. II.5. Здесь $\theta = 0$ — это одно решение (прямостоящая дуга), а $l(\theta)$ — другое решение (согнутая дуга). Фактически существует взаимно-однозначное соответствие между опытом Бенджамина и бифуркационной диаграммой (II.5): все, что можно наблюдать в опыте,

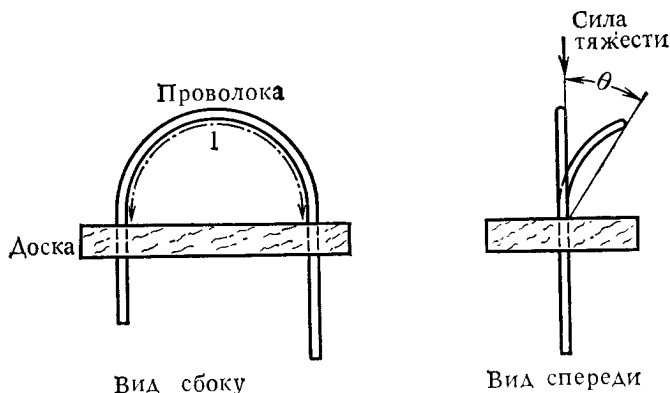


Рис. II.4. Прибор Бенджамина для демонстрации выпучивания дуги проволоки под действием гравитационной нагрузки. Бифуркационная диаграмма, соответствующая этой системе, показана на рис. II.5. Для малых l единственному устойчивому решению уравнения (II.54) отвечает вертикальное положение дуги проволоки ($\theta = 0$). Если $l > l_c$ велико, то вертикальное положение неустойчиво и дуга наклоняется влево или вправо, как показано на эскизе (вид спереди). Наклонное положение проволоки устойчиво также, если $l < l_c$. Если $l_0 < l < l_c$, то существуют три стационарные решения: вертикальное положение ($\theta = 0$) и левое или правое наклонное положение ($|\theta| \neq 0$).

присутствует и в диаграмме, и напротив, все особенности диаграммы наблюдаются в опыте. Объяснение наблюдаемых при этом событий содержится в подписи к рис. II.5.

Бифуркация в двойной точке — самая распространенная форма бифуркации в сингулярной точке. Другие виды бифуркаций (точки возврата, тройные точки и др.) встречаются реже, поскольку для них необходимы определенные соотношения между старшими производными от $F(\mu, \epsilon)$. Такие ситуации часто называют *необычными* бифуркациями. Существует строгая математическая трактовка термина «*общий*» (связанная со всюду плотными множествами специального вида), но чаще всего он используется вместо обычного слова «*типичный*». Анализ типичных задач неприменим к нетипичным случаям. Например, безусловно разумнее основывать вычисления

притяжения между точечными массами на ньютоновом законе обратной пропорциональности квадрату расстояния, а не на некотором воображаемом общем законе, скажем, $\sim 1/r^2 + \varepsilon$ (что привело бы к еще более странному миру с $\varepsilon \neq 0$, чем известный нам мир с $\varepsilon = 0$).

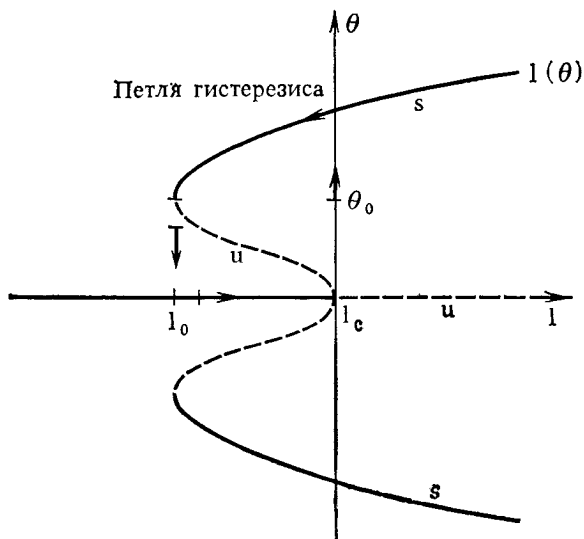


Рис. II.5. Бифуркационная диаграмма нагружения проволоочной дуги. Если l мало, то единственным положением равновесия уравнения (II.5) является вертикальное положение ($\theta = 0$). Решение $\theta = 0$ теряет устойчивость, если $\mu = l - l_c$, возрастая, проходит через нуль. Тогда решение $\mu(\theta) = l(\theta) - l_c$, соответствующее наклонной дуге, имеет двойную точку бифуркации в особой экстремальной точке $(l, \theta) = (l_c, 0)$. Система обладает симметрией по θ . Если $l > l_c$, то устойчивыми являются только левая и правая наклонные конфигурации. Точки $(l, \theta) = (l_0, \pm \theta_0)$ суть регулярные экстремальные точки. Если $l_0 \leq l \leq l_c$, то существуют три устойчивые решения: $\theta = 0$ и симметричные левое и правое наклонные положения. В этой области система имеет гистерезис. Если длина дуги l части проволоки, расположенной над доской, уменьшается и проволока находится в наклонном положении, то наклонная конфигурация продолжает наблюдаться до $l = l_0$. Если $l = l_0$, то бифуркационное наклонное положение соответствует регулярной экстремальной точке. Если $l < l_0$, то единственное положение равновесия $\theta = 0$ устойчиво. Поэтому, если l сделать меньше, чем l_0 , то дуга моментально примет вертикальное положение. Теперь, если увеличивать l , то дуга будет оставаться в вертикальном положении до $l = l_c$. Если $l > l_c$, то вертикальное положение теряет устойчивость и дуга принимает левое или правое устойчивое наклонное положение.

В том же смысле можно сказать, что если в вашей задаче $D = 0$, когда все вторые производные отличны от нуля, то вы неизбежно получите бифуркацию в точке возврата независимо от того, насколько типична бифуркация в двойной точке.

§ II.12. Смена устойчивости в точке возврата

Ограничиваясь рассмотрением точки касания второго порядка, разложим множитель $F_\mu(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$ в ряд по степеням $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ и в слу-

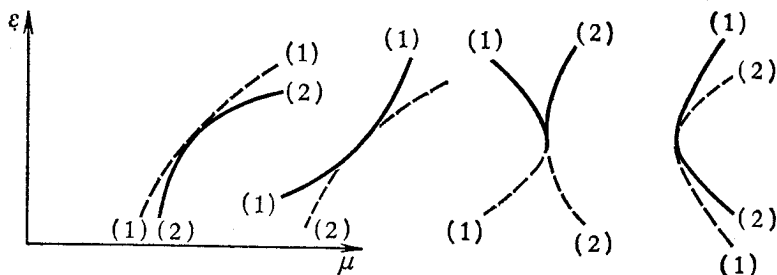


Рис. II.6. Устойчивость решений, ответвляющихся в точке возврата второго порядка.

чае (А) найдем

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)}(\varepsilon) \\ \sigma^{(2)}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \hat{s} \sqrt{\mathcal{D}_1} \begin{bmatrix} \mu_\varepsilon^{(1)}(\varepsilon) \\ -\mu_\varepsilon^{(2)}(\varepsilon) \end{bmatrix} [(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)^3], \quad (\text{II.55})$$

где $\hat{s} = \text{sgn } F_{\mu\mu}$. В случае (Б) разложим $\sigma(\mu) = F_\varepsilon(\mu, \varepsilon(\mu))$ в ряд по степеням $(\mu - \mu_0)$ и найдем, что

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)}(\mu) \\ \sigma^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} s \sqrt{\mathcal{D}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} [(\mu - \mu_0)^2 + O(\mu - \mu_0)^3], \quad (\text{II.56})$$

где $s = \text{sgn } F_{\varepsilon\varepsilon}$. Из (II.55) и (II.56) следует, что на каждой ветви, проходящей через точку возврата второго порядка, смена устойчивости происходит тогда и только тогда, когда $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ изменяет знак. Возможные распределения устойчивости в точке возврата представлены на рис. II.6.

§ II.13. Смена устойчивости в тройной точке

Устойчивость решений уравнения (II.25) можно установить из анализа знака выражения

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= -\mu_\varepsilon(\varepsilon) F_\mu(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = \\ &= -\frac{1}{2} \mu_\varepsilon(\varepsilon) F_{\mu\mu\mu} \left\{ \frac{1}{3} (\mu_\varepsilon^{(1)} \mu_\varepsilon^{(2)} + \mu_\varepsilon^{(1)} \mu_\varepsilon^{(3)} + \mu_\varepsilon^{(2)} \mu_\varepsilon^{(3)}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \mu_\varepsilon(\varepsilon_0) (\mu_\varepsilon^{(1)} + \mu_\varepsilon^{(2)} + \mu_\varepsilon^{(3)}) + \mu_\varepsilon^2(\varepsilon_0) \right\} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + O(\varepsilon - \varepsilon_0)^3, \end{aligned}$$

где при разложении $F_\mu(\mu(\varepsilon), \varepsilon)$ в ряд по степеням $\varepsilon - \varepsilon_0$ были использованы формулы (II.26), (II.27). Это выражение можно пред-

ставить на каждой из трех ветвей в следующей форме:

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)}(\varepsilon) \\ \sigma^{(2)}(\varepsilon) \\ \sigma^{(3)}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} F_{\mu\mu\mu} \begin{bmatrix} \mu_{\varepsilon}^{(1)}(\varepsilon) (\mu_{\varepsilon}^{(1)} - \mu_{\varepsilon}^{(2)}) (\mu_{\varepsilon}^{(1)} - \mu_{\varepsilon}^{(3)}) \\ \mu_{\varepsilon}^{(2)}(\varepsilon) (\mu_{\varepsilon}^{(1)} - \mu_{\varepsilon}^{(2)}) (\mu_{\varepsilon}^{(2)} - \mu_{\varepsilon}^{(3)}) \\ \mu_{\varepsilon}^{(3)}(\varepsilon) (\mu_{\varepsilon}^{(1)} - \mu_{\varepsilon}^{(3)}) (\mu_{\varepsilon}^{(2)} - \mu_{\varepsilon}^{(3)}) \end{bmatrix} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \\ + O(\varepsilon - \varepsilon_0)^3, \quad (II.57)$$

где без ограничения общности можно считать, что $\mu_{\varepsilon}^{(1)} > \mu_{\varepsilon}^{(2)} > \mu_{\varepsilon}^{(3)}$.

Из (II.57) легко определить распределение устойчивости на трех различных ветвях. Например, знак

$$\frac{6\sigma^{(j)}(\varepsilon)}{\mu_{\varepsilon}^{(j)}(\varepsilon) F_{\mu\mu\mu}}$$

совпадает со знаком $(-1)^j$.

Мы оставляем в качестве упражнения для интересующегося читателя дальнейшие заключения о бифуркации и устойчивости в особой точке, в которой все вторые производные равны нулю. Здесь

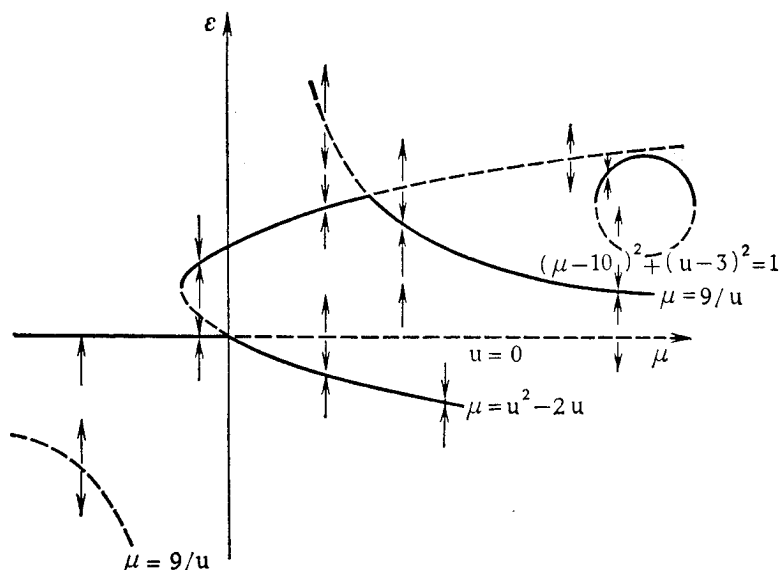


Рис. 11.7. Бифуркация, устойчивость и области притяжения положением равновесия решений уравнения

$$\frac{du}{dt} = u(9 - \mu u)(\mu + 2u - u^2)((\mu - 10)^2 + (u - 3)^2 - 1). \quad (II.58)$$

Равновесное решение $\mu = 9/u$ в третьем квадранте и окружность являются изолированными решениями, которые нельзя получить из анализа бифуркации.

достаточно будет лишь отметить, что смена устойчивости на ветви, проходящей через такую точку, может происходить тогда и только тогда, когда $\mu_e(\varepsilon)$ изменяет на ней знак.

II.14. Глобальные свойства устойчивости изолированных решений

Можно показать, что все полученные до сих пор результаты приложимы к задачам, которые описываются дифференциальными уравнениями с частными производными, вроде уравнений Навье — Стокса, при условии бифуркации в простом собственном значении

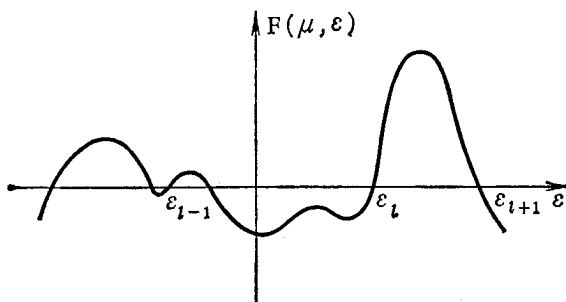


Рис. II.8. Изменение F , удовлетворяющей хорошим условиям на прямой $\mu = \text{const}$. Непосредственно видно, что знак тангенса углов наклона чередуется.

(объяснение этого условия будет дано в гл. IV). Теорема 2 применима к этим более общим задачам, так как все ветви связаны; на самом деле эти ветви принадлежат пространству высокой размерности, а их проекциями служат плоские кривые.

Здесь необходимо подчеркнуть, что равновесные решения эволюционных уравнений не обязательно должны иметь ветвления. Существуют изолированные решения, столь же обычные, как дождь, которые не связаны с другими решениями посредством ветвления. Такие изолированные решения уравнения $F(\mu, \varepsilon)$ существуют даже в одномерных задачах (см. рис. II.7, где приведен типичный пример). В одномерном случае можно доказать, что устойчивые и неустойчивые решения, пересекающие прямую $\mu = \text{const}$, чередуются, как показано на рис. II.7. Этот результат, однако, строго одномерен и неприменим к одномерным проекциям задач высших размерностей, для которых кривые решений, выглядящие пересекающимися после их проектирования на плоскость бифуркационной диаграммы, на самом деле не пересекаются в пространстве высшей размерности. Строго одномерный результат, на который мы только что сослались, дает полное описание областей начальных значений, притягиваемых равновесным решением.

Чтобы получить сильный результат в $\mathbb{R}^1$ о чередовании устойчивых и неустойчивых решений, необходимо потребовать от F некото-

рых разумных условий гладкости. Например, если для фиксированного μ решения e уравнения $F(\mu, e) = 0$ изолированы, то они счетны и мы можем обозначить их e_l , где $e_{l-1} < e_l < e_{l+1}$ и $l \in \mathbb{Z}$ (множеству положительных или отрицательных целых чисел). Теперь потребуем, чтобы линия $\mu = \text{const}$ не проходила ни через одну особую точку функции F и чтобы $F_e(\mu, e_l) \neq 0$ для всех l . Эта ситуация изображена на рис. II.8.

Важность этого результата подчеркивает схема области притяжения равновесных решений уравнения (II.58), показанная на рис. II.7.

ТЕОРИЯ НЕСОВЕРШЕНСТВ И ИЗОЛИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ, РАЗРУШАЮЩИЕ БИФУРКАЦИЮ

Изолированные решения, вероятно, весьма часто встречаются в динамических задачах. Один из путей их исследования состоит в возмущении задач, в которых происходит бифуркация. Этот метод исследования изолированных решений, которые близки к бифуркационным решениям, известен как теория несовершенств. Некоторые основные идеи, содержащиеся в теории несовершенств, можно понять из сравнения изгиба первоначально прямолинейной колонны с изгибом первоначально несовершенной, скажем изогнутой колонны (см. рис. III.1).

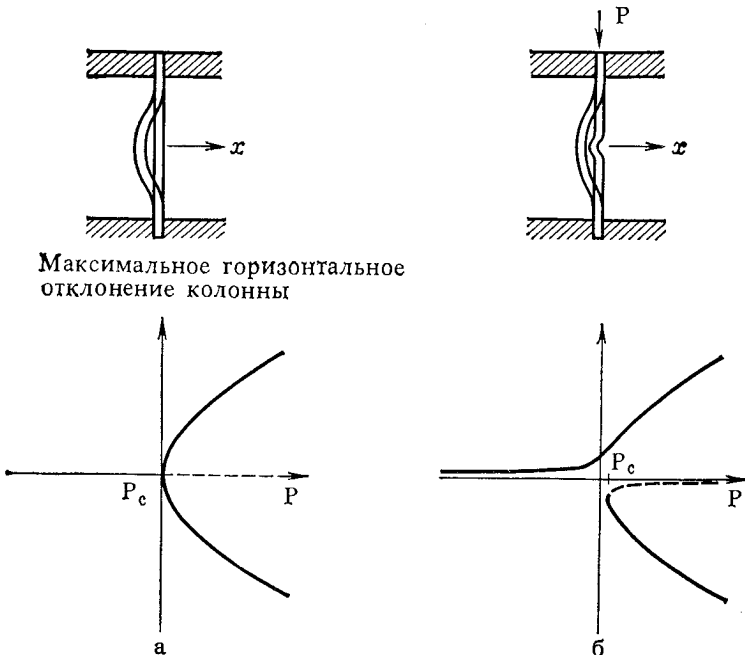


Рис. III.1. (а) Выпучивание прямолинейной колонны. Двойная точка суперкритической бифуркации. (б) Выпучивание изогнутой колонны. Изолированные решения, разрушающие двойную точку бифуркации.

Первая колонна будет оставаться прямолинейной при увеличении концевой нагрузки P до достижения критической нагрузки P_c . Затем в колонне происходит суперкритическая односторонняя бифуркация с двойной точкой (эйлеров продольный изгиб). В этой идеальной (плоской) задаче невозможно решить, куда будет происходить выпучивание колонны—влево или вправо. Другая ситуация наблюдается для предварительно искривленной колонны. Боковое отклонение начинается одновременно с нагружением искривленной колонны, и она изгибается в направлении $x < 0$, т. е. в направлении начального изгиба. Если начальный изгиб мал, то прогиб будет похож на прогиб идеальной колонны. Он будет малым, отличным от нуля при увеличении нагрузки вплоть до достижения значений, близких к P_c , затем прогиб будет быстро расти с увеличением нагрузки. Если P велико, то можно изогнутую колонну в результате толчка перевести в устойчивое «ненормальное» положение ($x > 0$), противоположное по направлению начальному прогибу.

Для понимания изолированных решений, разрушающих бифуркацию, представляется целесообразным проанализировать возможные случаи с общей точки зрения. Это можно сделать просто, снова обращаясь к исследованию одномерных задач.

§ III.1. Структура задач, в которых происходит разрушение двойной точки бифуркации

Рассмотрим одномерное эволюционное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{F}(\mu, x, \delta), \quad (\text{III.1})$$

где δ и μ —параметры, $\tilde{F}$ имеет в окрестности точки $(\mu, x, \delta) = (0, 0, 0)$ по крайней мере три непрерывные производные по каждой из переменных. Для упрощения обозначений будем опускать тильду над $\tilde{F}$ и в частных производных от $\tilde{F}$, когда эти величины вычисляются в точке $(0, 0, 0)$. Например,

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}(0, 0, 0), \quad F_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_\mu(0, 0, 0) \text{ и т. д.}$$

Пусть $(\mu, x) = (0, 0)$ —двойная точка $\tilde{F}(\mu, x, 0) = 0$. В такой точке имеем

$$\begin{aligned} F = 0, \quad F_x = 0, \quad F_\mu = 0, \\ D = F_{x\mu}^2 - F_{\mu\mu}F_{xx} > 0. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Нас интересуют стационарные решения

$$\tilde{F}(\mu, \varepsilon, \delta) = 0, \quad (\text{III.3})$$

которые при $\delta = 0$ разветвляются в двойной точке, а при $\delta \neq 0$ распадаются на изолированные решения. Для разрушения бифуркации достаточно, чтобы

$$F_{\delta} \neq 0. \quad (\text{III.4})$$

§ III.2. Теорема о неявной функции и седлообразная поверхность разрушения бифуркации

Установим вид изолированных решений, разрушающих бифуркацию. Из теоремы о неявной функции, (III.2)₁ и (III.4) следует, что существует функция $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$, такая что $\Delta(0, 0) = 0$ и

$$\tilde{F}(\mu, \varepsilon, \Delta(\mu, \varepsilon)) = 0. \quad (\text{III.5})$$

Из (III.5) заключаем, что

$$F_{\mu} + F_{\delta} \Delta_{\mu} = 0 \quad (\text{III.6})$$

и

$$F_{\varepsilon} + F_{\delta} \Delta_{\varepsilon} = 0. \quad (\text{III.7})$$

Поскольку в двойной точке $F_{\mu} = F_{\varepsilon} = 0$ и $F_{\delta} \neq 0$, то

$$\Delta_{\mu} = \Delta_{\varepsilon} = 0. \quad (\text{III.8})$$

Уравнения (III.8) показывают, что в трехмерном пространстве с координатами $(\mu, \varepsilon, \delta)$ поверхность $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ в точке $(0, 0, 0)$ имеет касательную плоскость $\delta = 0$. Покажем, что эта точка — седловая. Для этого достаточно доказать, что наряду с (III.8) справедливо

$$\Delta_{\mu\varepsilon}^2 - \Delta_{\mu\mu} \Delta_{\varepsilon\varepsilon} > 0. \quad (\text{III.9})$$

Неравенство (III.9) следует из выражений для трех вторых частных производных от (III.5):

$$\begin{aligned} F_{\mu\mu} + F_{\delta} \Delta_{\mu\mu} &= 0, \\ F_{\varepsilon\varepsilon} + F_{\delta} \Delta_{\varepsilon\varepsilon} &= 0, \\ F_{\mu\varepsilon} + F_{\delta} \Delta_{\mu\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

и неравенства $D > 0$, которое выполняется в двойной точке (III.2)₄.

Поскольку $\Delta(\mu, \varepsilon)$ обладает такой же степенью гладкости, что и $\tilde{F}(\mu, \varepsilon, \delta)$, то $\Delta(\mu, \varepsilon)$ можно представить в виде разложения

$$\delta = \Delta(\mu, \varepsilon) = a\varepsilon^2 + 2b\varepsilon\mu + c\mu^2 + d\varepsilon^3 + e\varepsilon^2\mu + f\varepsilon\mu^2 + g\mu^3 + o((|\mu| + |\varepsilon|)^3)^1, \quad (\text{III.11})$$

¹⁾ $o((|\mu| + |\varepsilon|)^3)$ стремится к нулю быстрее, чем $(|\mu| + |\varepsilon|)^3$ при $\mu \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$.

где

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{F_{\varepsilon\varepsilon}}{2F_\delta}, \quad b = -\frac{F_{\varepsilon\mu}}{2F_\delta}, \quad c = -\frac{F_{\mu\mu}}{2F_\delta}, \\
 d &= -\frac{[F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} - 3F_{\varepsilon\varepsilon}F_{\varepsilon\delta}/F_\delta]}{3!F_\delta}, \\
 e &= -\frac{[F_{\mu\varepsilon\varepsilon} - (2F_{\varepsilon\delta}F_{\varepsilon\mu} + F_{\delta\mu}F_{\varepsilon\varepsilon})/F_\delta]}{2F_\delta}, \\
 f &= -\frac{[F_{\mu\mu\varepsilon} - (2F_{\mu\varepsilon}F_{\mu\delta} + F_{\mu\mu}F_{\varepsilon\delta})/F_\delta]}{2F_\delta}, \\
 g &= -\frac{[F_{\mu\mu\mu} - 3F_{\mu\mu}F_{\mu\delta}/F_\delta]}{3!F_\delta}.
 \end{aligned} \tag{III.12}$$

Наша задача теперь состоит в решении уравнения (III.11) с коэффициентами (III.12) относительно $\mu(\varepsilon, \delta)$ (или $\varepsilon(\mu, \delta)$) при фиксированном значении δ . Эти кривые определяются в результате пересечения поверхности $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ с плоскостями $\delta = \text{const}$ (см. рис. III.2).

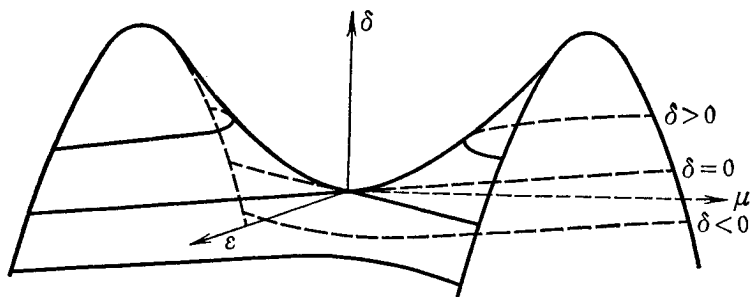


Рис. III.2. Седловая поверхность $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$.

рованном значении δ . Эти кривые определяются в результате пересечения поверхности $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ с плоскостями $\delta = \text{const}$ (см. рис. III.2).

§ III.3. Примеры изолированных решений, разрушающих бифуркацию

Представляет интерес привести некоторые простые типичные примеры изолированных решений, которые рождаются в результате разрушения двойной точки бифуркации с параметром δ . Для малых значений δ локальное представление изолированного решения дается совокупностью членов наименьшего порядка разложения (III.11)

$$\delta = a\varepsilon^2 + 2b\varepsilon\mu + c\mu^2. \tag{III.13}$$

Это локальное сечение поверхности представляет собой гиперболу (см. рис. III.3).

Пример III.1. Двусторонняя бифуркация (рис. III.4)

$$\bar{F}(\mu, \varepsilon, \delta) = \varepsilon(\varepsilon - \mu) + \delta = 0. \quad (\text{III.14})$$

Пример III.2. Двусторонняя бифуркация с экстремальной точкой (рис. III.5):

$$\bar{F}(\mu, \varepsilon, \delta) = \varepsilon(\mu - \varepsilon - \varepsilon^2) + \delta = 0. \quad (\text{III.15})$$

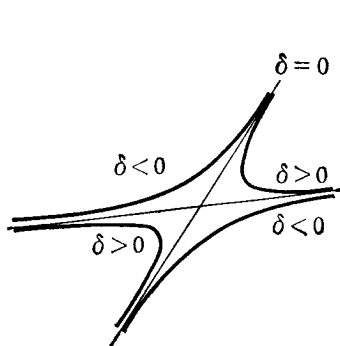


Рис. III.3. Проекция кривых (III.13) на плоскость $\delta = 0$.

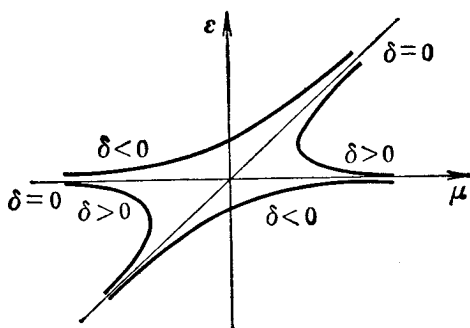


Рис. III.4. Проекция кривых (III.14) на плоскость $\delta = 0$.

Пример III.3. Односторонняя суперкритическая бифуркация (рис. III.6):

$$\bar{F}(\mu, \varepsilon, \delta) = \varepsilon(\varepsilon^2 - \mu) + \delta = 0. \quad (\text{III.16})$$

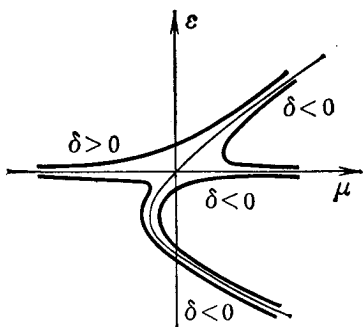


Рис. III.5. Проекция кривых (III.15) на плоскость $\delta = 0$.

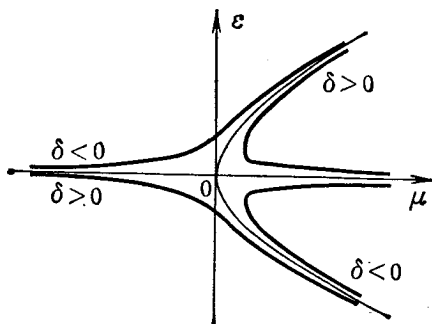


Рис. III.6. Проекция кривых (III.16) на плоскость $\delta = 0$.

§ III.4. Итеративные процедуры построения решений

На следующем этапе нашего анализа укажем алгоритм построения функции $\mu(\varepsilon, \delta)$. Рассмотрим два случая:

(1) $\tilde{F}(\mu, \varepsilon, \delta)$ имеет общий вид и $F_{\mu\mu} \neq 0$.

(2) $\tilde{F}(\mu, \varepsilon, \delta)$ имеет локальную форму (см. § 1.3) т. е. $\tilde{F}(\mu, 0, 0) = 0$ для всех μ из интервала, содержащего нуль.

Случай (1). $F_{\mu\mu} \neq 0$. Введем новый параметр

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon^2}, \quad (\text{III.17})$$

имеющий знак δ . Коэффициенты разложения

$$\mu(\varepsilon, \delta) = \mu_1(\tilde{\delta})\varepsilon + \mu_2(\tilde{\delta})\varepsilon^2 + o(|\varepsilon|^2) \quad (\text{III.18})$$

изолированных решений, разрушающих двойную точку бифуркации, можно вычислить отождествлением членов до порядка $O(\varepsilon^2)$. Если $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ аналитична в окрестности $(0, 0, 0)$, то все члены ряда Тейлора для (III.18) можно вычислить в результате отождествления. Если $\tilde{F}$ достаточно гладкая, но не аналитическая, то можно вычислить единственное асимптотическое представление вида (III.18) с конечным числом членов (полином Тейлора). Для нахождения μ_1 и μ_2 подставим (III.17) и (III.18) в (III.11) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$\tilde{\delta} = a + 2b\mu_1 + c\mu_1^2, \quad (\text{III.19})$$

$$0 = 2b\mu_2 + 2c\mu_1\mu_2 + d + e\mu_1 + f\mu_1^2 + g\mu_1^3. \quad (\text{III.20})$$

Уравнение (III.19) имеет два корня:

$$\begin{aligned} \mu_1^+(\tilde{\delta}) &= -\frac{b}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{D}{4F_8^2} + \tilde{\delta}c}, \\ \mu_1^-(\tilde{\delta}) &= -\frac{b}{c} - \frac{1}{c} \sqrt{\frac{D}{4F_8^2} + \tilde{\delta}c}. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Для каждого из двух корней μ_1^+ и μ_1^- существуют единственные значения μ_2^+ и μ_2^- , даваемые уравнением (III.20), если

$$\frac{D}{4F_8^2} + \tilde{\delta}c \neq 0, \quad (\text{III.22})$$

и единственные изолированные решения, разрушающие бифуркацию и определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} \mu^+(\varepsilon, \delta) &= \mu_1^+(\tilde{\delta})\varepsilon + \mu_2^+\varepsilon^2 + o(|\varepsilon|^2), \\ \mu^-(\varepsilon, \delta) &= \mu_1^-(\tilde{\delta})\varepsilon + \mu_2^-\varepsilon^2 + o(|\varepsilon|^2), \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

где

$$\begin{bmatrix} \mu_1^+(\delta) \\ \mu_1^-(\delta) \end{bmatrix} \varepsilon = -\frac{F_{\varepsilon\mu}}{F_{\mu\mu}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + h(\varepsilon, \delta) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1^+(\varepsilon, \delta) \\ \hat{\mu}_1^-(\varepsilon, \delta) \end{bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

и

$$h(\varepsilon, \delta) = -\frac{1}{F_{\mu\mu}} \sqrt{D\varepsilon^2 - 2F_\delta F_{\mu\mu} \delta} \cdot (\text{sgn}(\varepsilon F_\delta)),$$

$$\text{sgn}(\varepsilon F_\delta) = \begin{cases} +1, & \text{если } \varepsilon F_\delta > 0, \\ -1, & \text{если } \varepsilon F_\delta < 0. \end{cases}$$

Следовательно, $(\hat{\mu}_1^+(\varepsilon, \delta), \hat{\mu}_1^-(\varepsilon, \delta))$ представляет собой первое приближение для $\mu^+(\varepsilon, \delta)$ и $\mu^-(\varepsilon, \delta)$. Чтобы найти второе приближение, разрешим (III.20) относительно μ_2 и при фиксированном $\bar{\delta} = \delta/\varepsilon^2$ найдем, что

$$\begin{bmatrix} \mu^+(\varepsilon, \delta) \\ \mu^-(\varepsilon, \delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1^+(\varepsilon, \delta) \\ \hat{\mu}_1^-(\varepsilon, \delta) \end{bmatrix} - \frac{1}{2ch(\varepsilon, \delta)} \left\{ d\varepsilon^3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e\varepsilon^2 \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1^+(\varepsilon, \delta) \\ -\hat{\mu}_1^-(\varepsilon, \delta) \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + f\varepsilon \begin{bmatrix} (\hat{\mu}_1^+(\varepsilon, \delta))^2 \\ -(\hat{\mu}_1^-(\varepsilon, \delta))^2 \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} (\hat{\mu}_1^+(\varepsilon, \delta))^3 \\ -(\hat{\mu}_1^-(\varepsilon, \delta))^3 \end{bmatrix} \right\} + o(|\varepsilon|^2), \quad (\text{III.25})$$

если $\varepsilon \rightarrow 0$.

Случай (2). $\bar{F}(\mu, 0, 0) = 0$ для μ из интервала, содержащего нуль. В этом случае $\varepsilon = 0$ — решение бифуркационной задачи и $c = g = 0$. Легко проверить, что в этом случае

$$\Delta(\mu, 0) = 0,$$

так что ε входит множителем в правую часть (III.11). Чтобы найти кривую $\mu = \mu(\varepsilon, \delta)$, которая разрушает бифуркацию, снова введем параметр $\hat{\delta}$:

$$\delta = \varepsilon \hat{\delta} = \Delta(\mu, \varepsilon) = \varepsilon \hat{\Delta}(\mu, \varepsilon), \quad (\text{III.26})$$

$$\hat{\delta} = \hat{\Delta}(\mu, \varepsilon) = a\varepsilon + 2b\mu + d\varepsilon^2 + e\varepsilon\mu + f\mu^2 + o[(|\varepsilon| + |\mu|)^2]. \quad (\text{III.27})$$

Уравнение (III.27) можно разрешить относительно μ методом рядов, использованным в случае (1), или методом последовательных приближений, описываемым ниже:

$$\mu = \frac{1}{2b} \{ \hat{\delta} - a\varepsilon - d\varepsilon^2 - e\varepsilon\mu - f\mu^2 \} + o[(|\varepsilon| + |\mu|)^2]. \quad (\text{III.28})$$

Первое приближение дает формула

$$\mu \sim \mu^{(1)} = \frac{1}{2b} \{ \hat{\delta} - a\varepsilon \} = \frac{1}{2b} \left\{ \frac{\delta}{\varepsilon} - a\varepsilon \right\}. \quad (\text{III.29})$$

Знаменатель $b = -F_{\varepsilon\mu}/F_\delta = -\sqrt{D}/F_\delta \neq 0$. Следовательно, (III.29) дает два изолированных решения, разрушающих бифуркацию. На-

пример, если $a=0$ как в (III.16) (пример III.3), то получаем два бифуркационных решения, если $\delta=0$: $\varepsilon=0$ и $\mu=0$. Изолированные решения, разрушающие эти бифуркационные решения при $\delta \neq 0$, да-

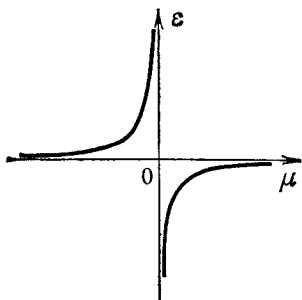


Рис. III.7. Гипербола, разрушающая двойную точку бифуркации в первом приближении, если $a=0$.

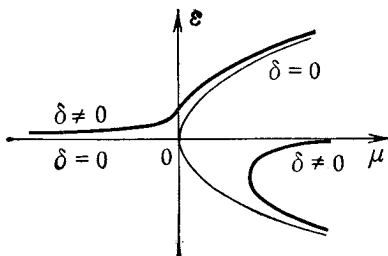


Рис. III.8. Второе приближение для рис. III.7.

ются уравнением гиперболы $\mu = \delta/(2b\varepsilon)$ (рис. III.7). Второе приближение определяется уравнением

$$\begin{aligned} \mu \sim \mu^{(2)} &= \frac{1}{2b} \{ \hat{\delta} - a\varepsilon - d\varepsilon^2 - e\varepsilon\mu^{(1)} - f\mu^{(1)^2} \} = \\ &= \frac{1}{2b} \left\{ \frac{\delta}{\varepsilon} - a\varepsilon - d\varepsilon^2 - \frac{e}{2b} (\delta - a\varepsilon^2) - \frac{f}{4b^2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} - a\varepsilon \right)^2 \right\}. \quad (\text{III.30}) \end{aligned}$$

Например, если $a=0$, то получаем два бифуркационных решения при $\delta=0$. Эти бифуркационные решения локально определяются уравнениями

$$\varepsilon=0 \text{ и } \mu = -\frac{d}{2b^2} \varepsilon^2, \quad (\text{III.31})$$

которые соответствуют односторонней бифуркации, если $d/(2b) \neq 0$ (на рис. III.8 $d/(2b) < 0$). Изолированные решения, разрушающие бифуркацию при $\delta \neq 0$, определяются уравнением (III.30). В суперкритическом случае диаграмма, представленная на рис. III.7, с учетом второго приближения принимает вид, показанный на рис. III.8.

Необходимо добавить, что случаи (1) и (2) исключают некоторые возможности; например, случай $F_{\mu\mu} = 0$, $F_{\mu\mu\mu} \neq 0$, который всегда можно получить из (1) в некоторых новых переменных (μ' , ε'), вводимых при ортогональном преобразовании (μ , ε)-плоскости. Требуемое ортогональное преобразование устраняет смешанное произведение ($\mu\varepsilon$ в уравнении гиперболы (III.13)) и возвращает нас к случаю $F_{\mu'\mu'} \neq 0$.

§ III.5. Устойчивость решений, разрушающих бифуркацию

Устойчивость изолированных решений, соответствующих кривой $\mu(\varepsilon, \delta)$, можно исследовать на основе теоремы о факторизации. Налагая на решения $\mu = \mu(\varepsilon, \delta)$, $x = \varepsilon$ уравнения (III.1) малые возму-

щения, пропорциональные $e^{\nu t}$, находим, что

$$\gamma(\varepsilon) = F_\varepsilon(\mu(\delta, \varepsilon), \varepsilon, \delta) = -\mu_\varepsilon(\delta, \varepsilon) F_\mu(\mu(\delta, \varepsilon), \varepsilon, \delta). \quad (\text{III.32})$$

Можно доказать, что

(1) устойчивые ветви, на которых $\mu_\varepsilon(\varepsilon, 0)$ сохраняет знак, при $\delta \neq 0$ переходят в устойчивые ветви, на которых $\mu_\varepsilon(\varepsilon, \delta)$ имеет тот же самый знак;

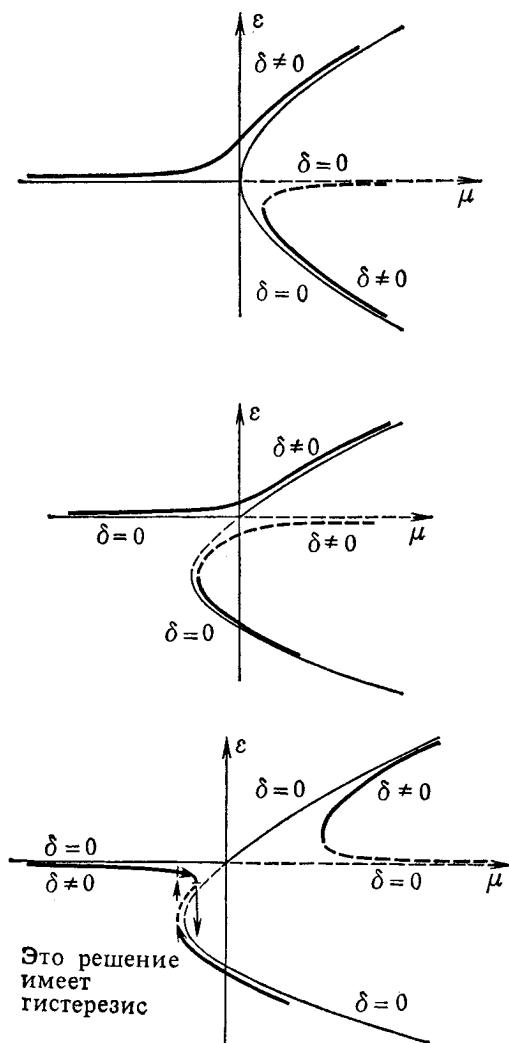


Рис. III.9. Устойчивость изолированных решений, разрушающих бифуркацию.

(2) смена устойчивости на любой ветви $\mu = \mu(\varepsilon, \delta)$ происходит в каждой регулярной экстремальной точке.

Свойство (1) следует из непрерывности, а свойство (2) из (III.32). Типичные примеры применения законов устойчивости (1) и (2) показаны на рис. III.9.

§ III.6. Изоляты

Теперь мы ослабим предположение, введенное в § III.1, и предположим, что (III.2) и (III.4) выполняются для $D < 0$. Это предположение означает, что особая точка уравнения $\tilde{F}(\mu, \varepsilon, 0)$ является изолированной (сопряженной точкой) и бифуркация отсутствует, если $\delta = 0$. Можно поступить так же, как и в § III.2, и вычислить $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon) = O(|\mu| + |\varepsilon|)^2$, где

$$\Delta_{\mu\varepsilon}^2 - \Delta_{\mu\mu}\Delta_{\varepsilon\varepsilon} < 0.$$

Главная часть $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$; т. е. $\delta = (1/2)\Delta_{\varepsilon\varepsilon}\varepsilon^2 + \Delta_{\varepsilon\mu}\varepsilon\mu + (1/2)\Delta_{\mu\mu}\mu^2$ определяет сечения эллиптического параболоида вместо гиперболического параболоида, исследованного в § III.2. При корректном

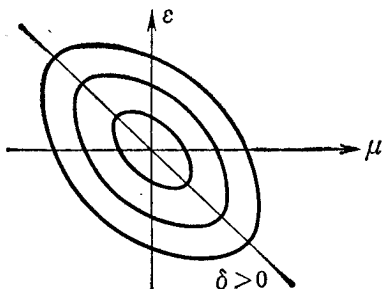


Рис. III.10. Линии уровня изолятов.

выборе знака δ кривые в плоскостях $\delta = \text{const}$ являются *замкнутыми* (изоляты), и они стягиваются в нуль при $\delta \rightarrow 0$. Если δ имеет другой знак, то решений не существует.

Пример III.4

$$\tilde{F}(\mu, \varepsilon, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^2 + \mu\varepsilon + \varepsilon^2 - \delta + O\{\delta^2 + |\delta|(|\varepsilon| + |\mu|) + (|\varepsilon| + |\mu|)^3\} = 0$$

определяет замкнутые кривые, близкие к эллипсам, если δ положительно и мало (см. рис. III.10).

Упражнение

III.1. (Теория несовершенств для «бифуркации в бесконечности» ($\mu \rightarrow \infty$).) Рассмотрим следующие два примера:

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\frac{1}{\mu} - x - x^2 \right) + \delta, \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\frac{1}{\mu} - x^2 \right) - \delta, \quad (\text{III.34})$$

где $\mu > 0$ или $\mu < 0$.

Покажите, что стационарные решения и характер их устойчивости имеют вид, представленный на рис. III.11 и III.12. (Сравните с рис. III.5 и III.6.)

Задачи бифуркации из бесконечности исследованы Розенблатом и Девисом (Rosenblat and Davis, *SIAM J. Appl. Math.*, 1, 1—20 (1979)).

Замечания

Истоки теории несовершенств можно проследить по крайней мере до работ Койтера (1945) по устойчивости упругого равновесия и Зохнера (1933) по ориентации жидких кристаллов. Теория несовершенств Матковского и Рейсса (1977) близка к изложенной здесь, однако цели, преследуемые этими авторами, побудили их рассматривать задачу (аналитическую в случае, когда F аналитична) как задачу сингулярного возмущения. Мы предпочитаем подчеркнуть аналитическую

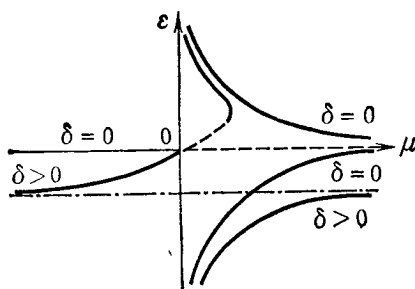


Рис. III.11. Случай (III.34).

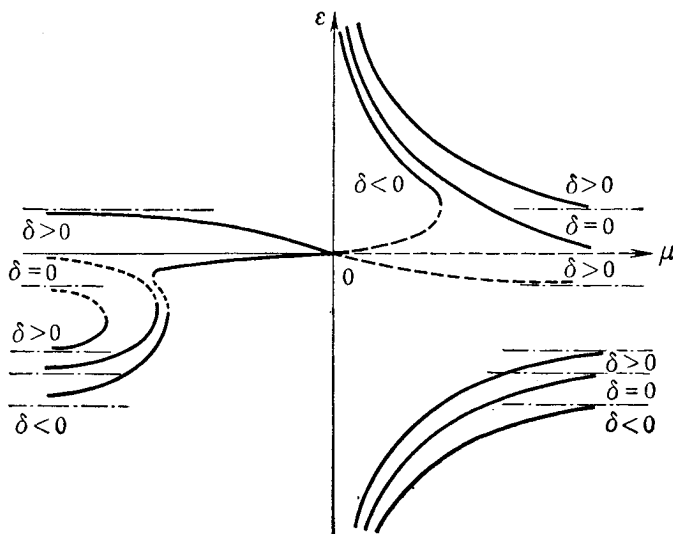


Рис. III.12. Случай (III.33).

природу задачи, обусловленную теоремой о неявной функции, чтобы определить аналитические итеративные процедуры получения кривых. Теорию несовершенств можно рассматривать как частный случай теории катастроф Р. Тома (1968), соответствующий наличию лишь одного управляющего параметра (δ). В этом простейшем случае теории катастроф важную роль играет каноническая кубическая кривая

$$\delta = 2b\epsilon\mu + d\epsilon^3, \quad (\text{III.35})$$

описывающая разрушение односторонней бифуркации. Она служит приближением (с точностью до членов самого низкого порядка) к кривой (III.30), связывающей δ и ϵ на плоскости $\mu = \text{const}$. Анализ членов правой части уравнения (III.30) показывает, что $\delta \sim O(\epsilon^3)$, а члены, отброшенные при переходе от (III.30) к (III.35), имеют порядок $O(\epsilon^4)$. График кривой (III.35) подобен показанному на рис. III.8. Согласно нашей теории, рис. III.7 дает первое приближение к кривым, разрушающим бифуркацию, и нет никакой необходимости рассматривать кубическое уравнение. В недавней работе Голубицкого и Шеффера (1979) некоторые предположения теории Тома ослаблены, и задача о разрушении бифуркации эквивалентными классами управляющих параметров рассматривается с общей, но более или менее разработанной точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

- Голубицкий, Шеффер (Golubitsky M., Schaeffer D. A.) Theory for imperfect bifurcation via singularity theory. — Comm. Pure Appl. Math., 32, 1—78 (1979).
 Зохнер (Zochner H.) The effect of a magnetic field on the nematic state. — Trans. Faraday Soc., 29, 945—957 (1933).
 Койтер (Koiter W. T.) On the stability of elastic equilibrium (in Dutch). — Amsterdam: H. J. Paris, 1945; translated into English as NASA TTF-10833 (1967).
 Матковский, Рейсс (Matkowsky B. J., Reiss E.) Singular perturbation of bifurcations. — SIAM J. Appl. Math., 33, 230—256 (1977).
 Том (Thom R.) Topological methods in biology. — Topology, 8, 313—335 (1968).

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ДВУМЕРНОМ И n -МЕРНОМ СЛУЧАЯХ

Во введении мы отмечали, что решения трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений могут иметь турбулентный характер и в этом случае не поддаются элементарному анализу. В самом деле, наиболее полные результаты, известные в теории бифуркаций, получены для задач, которые можно свести к одномерным или двумерным задачам. Поэтому мы начнем наш анализ с двумерных автономных задач, приведенных к локальной форме (1.21):

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u), \quad (IV.1)$$

где

$$f_i(\mu, u) = A_{ij}(\mu) u_j + B_{ijk}(\mu) u_j u_k + C_{ijkl}(\mu) u_j u_k u_l + O(\|u\|^4). \quad (IV.2)$$

Такие же самые уравнения (IV.1) и (IV.2) можно рассматривать в $\mathbb{R}^n$. В общем случае нижние индексы пробегают значения $(1, 2, \dots, n)$; в $\mathbb{R}^2$ $n=2$.

Для анализа устойчивости стационарного решения $\bar{u}(\mu)$, соответствующего нулевому решению $u=0$ (IV.1), исследуем эволюцию возмущения v решения $u=0$, которое в линейном приближении удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dt} = f_a(\mu, 0 | v) = A(\mu) \cdot v \quad (IV.3)$$

или, с учетом соглашения о повторяющихся индексах,

$$\frac{dv_i}{dt} = A_{ij}(\mu) v_j. \quad (IV.4)$$

Устойчивость решения $u=0$ по отношению к малым возмущениям зависит от собственных значений матрицы $A(\mu)$ (см. § IV.3). Нас особенно интересует случай, когда $A(\mu)$ есть (2×2) -матрица (см. § IV.2). Однако лучше начать с более общего случая.

§ IV.1. Собственные значения и собственные векторы ($n \times n$)-матрицы

Пусть $A(\mu)$ есть $(n \times n)$ -матрица с вещественными элементами $A_{ij}(\mu)$. Пусть x, y суть n -мерные векторы, возможно, с комплексными компонентами.

Система линейных однородных уравнений

$$A \cdot x = \sigma x, \text{ или } A_{ij}x_j = \sigma x_i \quad (IV.5)$$

имеет ненулевое решение x тогда и только тогда, когда $\sigma = \sigma_i$ есть корень полинома

$$P(\sigma) = \det [A - \sigma I] = (-1)^n (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \dots (\sigma - \sigma_n) = 0,$$

где I — единичная матрица с элементами δ_{ij} , $\sigma_i (i = 1, \dots, n)$ — собственное значение матрицы A , а x , решение уравнения $A \cdot x = \sigma_i x$, — собственный вектор.

§ IV.2. Алгебраическая и геометрическая кратности, индекс Риса

Определим μ_i как число повторяющихся значений σ_i в $P(\sigma) = 0$; μ_i называется *алгебраической кратностью* σ_i . Это есть порядок нуля σ_i полинома $P(\sigma) = (\sigma - \sigma_i)^{\mu_i} \tilde{P}(\sigma) = 0$, $\tilde{P}(\sigma_i) \neq 0$; σ_i есть *простое собственное значение* A , если $\mu_i = 1$.

Определим n_i как число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению σ_i ; n_i называется *геометрической кратностью* σ_i .

Всегда существует n комплексных значений σ , для которых полином (степени n) $P(\sigma) = 0$. Конечно, некоторые (или все) из этих значений могут повторяться. Существует один и только один собственный вектор, соответствующий каждому простому собственному значению. Если собственное значение повторяется, то существует по крайней мере один собственный вектор и самое большее μ_i линейно независимых собственных векторов, т. е.

$$\mu_i \geq n_i.$$

Индекс Риса γ_i собственного значения σ_i можно определить как наименьшее целое число, такое, что две системы

$$(A - \sigma_i I)^{\gamma_i} x = 0, (A - \sigma_i I)^{\gamma_i + 1} x = 0 \quad (IV.6)$$

имеют одни и те же решения x . Если $\mu_i = n_i$, то $\gamma_i = 1$ и говорят, что σ_i — *полупростое* собственное значение. Если индекс Риса больше

единицы, то число собственных векторов меньше числа повторяющихся корней и необходимо ввести понятие обобщенных собственных векторов (см. § IV.4)¹⁾.

§ IV.3. Присоединенная задача на собственные значения

Определим теперь скалярное произведение

$$\langle x, y \rangle \stackrel{\text{del}}{=} x \cdot \bar{y} = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad (\text{IV.7})$$

где черта обозначает комплексную сопряженность. A^* — матрица, присоединенная к A , если $\langle x, A \cdot y \rangle = \langle A^* \cdot x, y \rangle$ для всех $x, y \in \mathbb{C}^n$. Поскольку

$$\langle y, A \cdot x \rangle = y_i A_{ij} \bar{x}_j = (A^T)_{ji} y_j \bar{x}_i = \langle A^T \cdot y, x \rangle,$$

то заключаем, что $A^* = A^T$, где A^T — матрица, транспонированная по отношению к A . Если бы элементы A были комплексными, то мы нашли бы, что $A^* = \bar{A}^T$.

Отметим теперь, что

$$\langle y, (A - \sigma I) \cdot x \rangle = \langle (A^T - \bar{\sigma} I) \cdot y, x \rangle = 0$$

для всех $y \in \mathbb{C}^n$, если x — решение (IV.5), и для всех $x \in \mathbb{C}^n$, если y — решение уравнения $A^T y = \bar{\sigma} y$ или

$$A^T \cdot \bar{y} = \bar{\sigma} y. \quad (\text{IV.8})$$

Поскольку

$$\det(A^T - \sigma I) = \det(A - \sigma I) = P(\sigma),$$

то присоединенная задача на собственные значения имеет то же самое множество собственных значений.

Пусть x_J и y_J соответствуют собственному значению σ_J . Тогда, сравнивая (IV.5) и (IV.8), получаем

$$\begin{aligned} (\sigma_I - \sigma_J) \langle x_I, y_J \rangle &= (\sigma_I - \sigma_J) x_I \cdot \bar{y}_J = \\ &= (A \cdot x_I) \cdot \bar{y}_J - x_I \cdot (A^T \cdot \bar{y}_J) = \\ &= \langle A \cdot x_I, y_J \rangle - \langle x_I, A^T \cdot y_J \rangle = 0, \end{aligned}$$

¹⁾ Обобщенные собственные векторы часто связывают с матрицами жордановой формы, которые не приводятся к диагональному виду. Мы дадим теорию этих векторов в $\mathbb{R}^2$ (настоящая глава) и в $\mathbb{R}^n$ (дополнение IV.1). Обобщенные собственные векторы играют важную роль в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Они соответствуют «секулярным» решениям (см., например, Coddington E., Levinson E. and N., Theory of Ordinary Differential Equations (McGraw-Hill, 1955, Chapt. 3) [Имеется перевод: Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.]

так что каждый собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению σ_i , ортогонален каждому собственному вектору A^T , который соответствует собственному значению $\bar{\sigma}_j$, если $\sigma_i \neq \sigma_j$.

Следовательно,

$$\langle x_i, y_j \rangle = 0. \quad (IV.9)$$

Если $\sigma_i = \sigma_j$ полупростое с алгебраической кратностью $\mu_i = m$, то существуют $\mu_i = m$ линейно независимых собственных векторов x_{ij} и присоединенных собственных векторов y_{ij} , которые можно выбрать так, чтобы

$$\langle x_{it}, y_{ij} \rangle = \delta_{ij} \text{ для } i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (IV.10)$$

Поэтому биортогональные базисы можно выбрать на подпространстве, натянутом на $\mu_i = m$ собственных векторов, соответствующих полупростым собственным значениям. Нельзя выбрать биортогональные базисы собственных векторов, если индекс Риса для σ_i больше единицы (см. дополнение IV.1).

Если $A = A^T$, то задача на собственные значения является самосопряженной. Собственные значения самосопряженных операторов являются вещественными и полупростыми (см. дополнение IV.1).

§ IV.4. Собственные значения и собственные векторы (2×2) -матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

IV.4.1. Собственные значения

$$P(\sigma) = \det \begin{bmatrix} a - \sigma & b \\ c & d - \sigma \end{bmatrix} = \sigma^2 - \sigma(a + d) + ad - bc = 0, \\ \sigma_1 = \frac{a+d}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \sigma_2 = \frac{a+d}{2} - \sqrt{\Delta}, \quad (IV.11)$$

где дискриминант дается выражением

$$\Delta^{\text{de}} = \frac{(a-d)^2}{4} + bc = \frac{(a+d)^2}{4} - ad + bc = \frac{1}{4} (\text{tr } A)^2 - \det A$$

и

$$\text{tr } A^{\text{de}} = a + d.$$

IV.4.2. Собственные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} (a - \sigma_1) x_{11} + b x_{12} = 0, \\ c x_{11} + (d - \sigma_1) x_{12} = 0; \end{cases} \\ \mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} (a - \sigma_2) x_{21} + b x_{22} = 0, \\ c x_{21} + (d - \sigma_2) x_{22} = 0; \end{cases} \\ \bar{\mathbf{y}}_1 &= \begin{bmatrix} \bar{y}_{11} \\ \bar{y}_{12} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} (a - \sigma_1) \bar{y}_{11} + c \bar{y}_{12} = 0, \\ b \bar{y}_{11} + (d - \sigma_1) \bar{y}_{12} = 0; \end{cases} \\ \bar{\mathbf{y}}_2 &= \begin{bmatrix} \bar{y}_{21} \\ \bar{y}_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} (a - \sigma_2) \bar{y}_{21} + c \bar{y}_{22} = 0, \\ b \bar{y}_{21} + (d - \sigma_2) \bar{y}_{22} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

IV.4.3. Алгебраически простые собственные значения

Случай 1. $\Delta > 0$. $\sigma_1 \neq \sigma_2$ — вещественные. Существуют два вещественных собственных вектора и два присоединенных собственных вектора.

Случай 2. $\Delta < 0$. $\sigma_2 = \bar{\sigma}_1$. Существуют два собственных вектора, и они являются комплексно-сопряженными. То же самое справедливо для присоединенной задачи.

IV.4.4. Алгебраически двойные собственные значения

Случай 3. $\Delta = 0$. Тогда $\sigma_1 = \sigma_2 = (a + d)/2$ — собственное значение с алгебраической кратностью два. Задачи для собственных векторов приводятся к уравнениям

$$\begin{cases} q x_1 + b x_2 = 0, \\ c x_1 - q x_2 = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{cases} \bar{q} \bar{y}_1 + c \bar{y}_2 = 0, \\ b \bar{y}_1 - q \bar{y}_2 = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

где $q = (a - d)/2$ и $\Delta = q^2 + bc = 0$.

IV.4.4.1. Индекс Рунса 1

$$q = b = c = 0. \quad (\text{IV.14})$$

Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \mathbf{I}$$

и каждый вектор $\mathbf{x}$ есть собственный вектор, соответствующий $\sigma_1 = \sigma_2 = a$. Можно выбрать два ортонормированных вектора. Поэтому a — двойное полупростое собственное значение.

IV.4.4.2. Индекс Руса 2

$$q^2 + bc = 0, \quad |q| + |b| + |c| \neq 0.$$

Собственное значение $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = (a + d)/2$ — алгебраически двойное и геометрически простое.

Существует один и только один собственный вектор, удовлетворяющий $(A - \sigma I) \cdot x = 0$, с произвольным условием нормировки. Компоненты x_1, x_2 вектора x удовлетворяют (IV.12), и если $q \neq 0$, или $c \neq 0$, или $b \neq 0$, то для x имеем выражение

$$x = \begin{bmatrix} -b/q \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} q/c \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -q/b \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ c/q \end{bmatrix} x_1.$$

Аналогично, существует один и только один собственный вектор, удовлетворяющий $(A^T - \sigma I) \cdot \bar{y} = 0$, с произвольным условием нормировки. Компоненты $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ вектора $\bar{y}$ удовлетворяют (IV.13), и если $b \neq 0$, или $q \neq 0$, или $c \neq 0$, то для $\bar{y}$ имеем выражение

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} q/b \\ 1 \end{bmatrix} \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} -c/q \\ 1 \end{bmatrix} \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b/q \end{bmatrix} \bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -q/c \end{bmatrix} \bar{y}_1.$$

Скалярное произведение x с его присоединенным вектором *не может быть* нормировано, потому что

$$\langle x, y \rangle = x \cdot \bar{y} = 0. \quad (\text{IV.15})$$

Рассмотрим теперь обобщенные собственные векторы ξ , удовлетворяющие уравнению

$$(A - \sigma I) \cdot \xi = x. \quad (\text{IV.16})$$

Поскольку x — собственный вектор, имеем

$$(A - \sigma I)^2 \cdot \xi = 0. \quad (\text{IV.17})$$

Каждый вектор в $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет (IV.17), потому что

$$(A - \sigma I)^2 = \begin{bmatrix} q & b \\ c & -q \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Но для ξ , удовлетворяющего (IV.16), необходимо выполнение уравнений

$$\begin{aligned} q\xi_1 + b\xi_2 &= x_1 = \\ &= -(b/q)x_2, \quad \text{если } q \neq 0, \\ c\xi_1 - q\xi_2 &= x_2. \end{aligned}$$

Аналогично, существует обобщенный присоединенный собственный вектор $\bar{\xi}^*$, удовлетворяющий уравнениям

$$(A^T - \sigma I) \cdot \bar{\xi}^* = \bar{y}, \quad (A^T - \sigma I)^2 \cdot \bar{\xi}^* = 0$$

и

$$\begin{aligned} q\bar{\xi}_1^* + c\bar{\xi}_2^* &= \bar{y}_1, \\ b\bar{\xi}_1^* - q\bar{\xi}_2^* &= \bar{y}_2. \end{aligned}$$

Задавая $\bar{y}$, можно пронормировать скалярное произведение обобщенных собственного вектора и присоединенного собственного вектора к какому-то значению, например к 1:

$$\langle \bar{\xi}, y \rangle = 1. \quad (\text{IV.18})$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \langle \bar{\xi}, y \rangle &= \langle \bar{\xi}, (A^T - \bar{\sigma}I) \cdot \bar{\xi}^* \rangle = \langle (A - \sigma I) \cdot \bar{\xi}, \bar{\xi}^* \rangle = \\ &= \langle x, \bar{\xi}^* \rangle = \bar{\xi}_1 \bar{y}_1 + \bar{\xi}_2 \bar{y}_2 = \\ &= -\frac{x_2 \bar{y}_2}{q} = \frac{x_1 \bar{y}_2}{b} = \frac{x_2 \bar{y}_1}{c} = 1, \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

то можно положить $x_1 = b/\bar{y}_2$ для произвольного значения $\bar{y}_2 \neq 0$, если $b \neq 0$.

В случае, который мы примем в качестве канонического, $c = q = 0$, $b \neq 0$, имеем (IV.19), $x_2 = \bar{y}_1 = 0$, $\bar{\xi}_2 = x_1/b$ и $\bar{\xi}_1^* = 1/x_1$, $\bar{y}_2 = b/x_1$, $\bar{\xi}_2^* = -\bar{\xi}_1 b/x_1$ (можно выбрать $\bar{\xi}_1 = 0$).

Результаты, приведенные для $\mathbb{R}^2$ в § IV.4.4.2, представляют собой частный случай общей теории для $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, для собственных значений, которые не являются полупростыми. Общая теория приведена в дополнении к этой главе.

§ IV.5. Спектральная задача и устойчивость решения $u=0$ в $\mathbb{R}^n$

Полагая в (IV.3) $v = e^{\sigma t}x$, находим, что

$$A(\mu) \cdot x = \sigma x, \quad (\text{IV.20})$$

где

$$\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu) \quad (\text{IV.21})$$

— собственное значение $A(\mu)$, если $x \neq 0$. Скажем, что $u=0$ устойчиво на основе критерия спектральной задачи, если $\xi(\mu) < 0$ для всех собственных значений $\sigma(\mu)$, и неустойчиво, если существует σ , удовлетворяющее (IV.20) с $x \neq 0$, для которого $\xi(\mu) > 0$. Присоединенная задача о собственных значениях описывается уравнением (IV.8).

§ IV.6. Узлы, седла и фокусы

В $\mathbb{R}^2$ x — двумерный вектор, а $A(\mu)$ — (2×2) -матрица. Предположим, что σ_1 и σ_2 — простые собственные значения $A(\mu)$. Существуют два собственных вектора. Пусть x_1 — собственный вектор, соответст-

вующий собственному значению σ_1 , а x_2 —собственный вектор, отвечающий σ_2 , и пусть $v_J = e^{\sigma_J t} x_J$, $J = 1, 2$. Тогда

$$\frac{dv_J}{dt} = \sigma_J v_J. \quad (\text{IV.22})$$

На основе (IV.22) можно построить на плоскости картину геометрических свойств равновесных точек. Следует рассмотреть три случая.

(1) $\sigma_J(\mu) = \xi_J(\mu)$ суть вещественные и $\xi_1(\mu)$ и $\xi_2(\mu)$ имеют один знак. По построению v_1 и v_2 —вещественные независимые векторы.

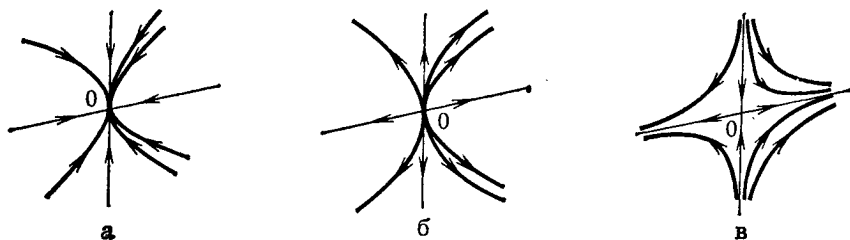


Рис. IV.1. Траектории вблизи равновесной точки в $\mathbb{R}^2$ для вещественного $\sigma_J(\mu)$ (а) Устойчивый узел; (б) Неустойчивый узел; (в) Седло.

Если $\xi_1(\mu)$ и $\xi_2(\mu)$ отрицательные, то v_1 и v_2 стремятся к 0 и тогда 0 называется устойчивым узлом. В другом случае v_1 и v_2 покидают 0 и 0 называется неустойчивым узлом (см. рис. IV.1).

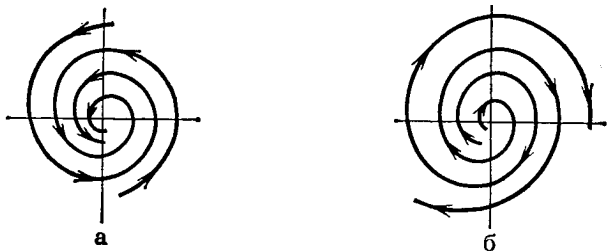


Рис. IV.2. Траектории вблизи равновесной точки в $\mathbb{R}^2$ для комплексного $\sigma_J(\mu)$. (а) Устойчивый фокус, $\xi(\mu) < 0$; (б) Неустойчивый фокус, $\xi(\mu) > 0$.

(2) $\sigma_J(\mu) = \xi_J(\mu)$ и $\xi_1(\mu)$ и $\xi_2(\mu)$ имеют разные знаки. Тогда 0 есть седловая точка, одна из двух траекторий приближается к 0, а другая уходит от 0 (см. рис. IV.1). Седловая точка всегда неустойчива.

(3) Два собственных значения комплексные:

$$\sigma_1 = \xi(\mu) + i\eta(\mu) = \overline{\sigma_2},$$

а собственные векторы обладают свойством $v_1 = \overline{v_2}$.

Общее решение (IV.3) принимает вид

$$\mathbf{v}(t) = \operatorname{Re}(\alpha e^{\sigma_1 t} \mathbf{v}_1) = 1/2 [\alpha e^{\sigma_1 t} \mathbf{v}_1 + \bar{\alpha} e^{\sigma_2 t} \mathbf{v}_2].$$

Это решение можно также записать в форме

$$\mathbf{v}(t) = e^{\xi(\mu)t} [\operatorname{Re}(\alpha \mathbf{v}_1) \cos(\eta(\mu)t) - \operatorname{Im}(\alpha \mathbf{v}_1) \sin(\eta(\mu)t)]. \quad (\text{IV.23})$$

Траектории (IV.23) показаны на рис. IV.2. Точка $\mathbf{v} = 0$ — устойчивый фокус, если $\xi(\mu) < 0$, и неустойчивый фокус, если $\xi(\mu) > 0$.

§ IV.7. Критическое значение и строгая потеря устойчивости

Будем предполагать без ограничения общности, что $\mathbf{u} = 0$ устойчиво ($\xi(\mu) < 0$), если $\mu < 0$, и неустойчиво ($\xi(\mu) > 0$), если $\mu > 0$. Значение $\mu = 0$ является критическим. Для критического значения

$$(\xi(0), \eta(0), \sigma(0)) = (0, \omega_0, i\omega_0). \quad (\text{IV.24})$$

Будем говорить, что потеря устойчивости $\mathbf{u} = 0$ является строгой, если

$$\xi'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\xi(0)}{d\mu} > 0, \quad (\text{IV.25})$$

и напомним, что в $\mathbb{R}^1$ это условие приводит к двойной точке бифуркации. Обозначим $(\cdot)' \stackrel{\text{def}}{=} d(\cdot)/d\mu$. Тогда, предполагая, что σ и $\mathbf{x}$ дифференцируемы, найдем в результате дифференцирования (IV.20):

$$\mathbf{A}(\mu) \cdot \mathbf{x}' + \mathbf{A}'(\mu) \cdot \mathbf{x} = \sigma' \mathbf{x} + \sigma \mathbf{x}'. \quad (\text{IV.26})$$

Построим теперь скалярное произведение (IV.26) и присоединенного собственного вектора, соответствующего собственному значению σ , и заметим, что

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} \rangle = \langle \sigma \mathbf{x}', \mathbf{y} \rangle,$$

и поэтому

$$\sigma' \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad (\text{IV.27})$$

где

$$[\mathbf{A}'(\mu)] = \begin{bmatrix} a'(\mu) & b'(\mu) \\ c'(\mu) & d'(\mu) \end{bmatrix}.$$

Формула (IV.27) справедлива для простого собственного значения $\sigma(\mu)$. В полупростом случае два различных собственных вектора $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ соответствуют одному и тому же σ , и для нахождения $\sigma'(\mu)$ дополнительно необходимо найти линейные комбинации $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, для которых выполняется уравнение (IV.26) (собственные векторы $\mathbf{A}'$ для $\mu = 0$). Уравнение (IV.27) не имеет смысла, если σ — кратное собственное значение с индексом Риса, большим единицы; в этом случае $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ для всех собственных векторов и невозможно произвести нормировку так, чтобы $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1$.

Строгое пересечение в случае простого собственного значения означает, что

$$\sigma'(0) = \langle A'(0) \cdot x_1, y_2 \rangle, \quad \operatorname{Re} \sigma'(0) > 0, \quad (\text{IV.28})$$

если собственное значение с наибольшей вещественной частью удовлетворяет условию $\xi_1(0) = 0$.

Возможные способы пересечения собственным значением $\sigma(\mu)$ прямой $\xi = 0$ в простом и полупростом случаях показаны на рис. IV.3.

Возмущение $\sigma(\mu)$ при $\mu = 0$, когда $\sigma(0)$ — двукратное собственное значение с индексом два (не полупростое), носит специальный характер, потому что, вообще говоря, $\sigma(\cdot)$ не дифференцируема при

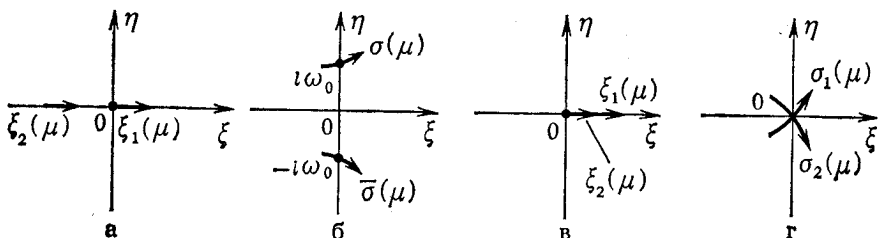


Рис. IV.3. Направления строгого пересечения $\xi_1(0) = 0$, $\xi'_1(0) > 0$ в простом (а, б) и (полупростом (в, г) случаях. (а) Два собственных значения вещественные и различные; $\xi_1(0) = 0$. (б) Пересечение мнимой оси парой комплексно-сопряженных собственных значений. (в) Два вещественных собственных значения пересекают мнимую ось одновременно, однако могут иметь разные скорости (или разные направления). (г) Два комплексно-сопряженных собственных значения проходят через ось η , взаимно пересекаясь.

$\mu = 0$: $\sigma(0)$ представляет собой алгебраически двойное собственное значение с индексом два, если $\Delta = 0$ и $|q| + |b| + |c| \neq 0$. Здесь могут быть три случая: (1) $b \neq 0$, $c = q = 0$; (2) $c \neq 0$, $b = q = 0$; (3) c, b, q отличны от нуля и $q^2 + bc = 0$. Эти три случая эквивалентны, так как соответствующие им матрицы $A(\mu)$ получаются одна из другой посредством преобразования подобия.

В качестве канонического возьмем случай (1) и запишем

$$[A(\mu)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a'(\mu) & b'(\mu) \\ c'(\mu) & d'(\mu) \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.29})$$

где a', b', c' и d' ограничены при $\mu = 0$. Два собственных значения $A(\mu)$ определяются квадратным уравнением

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma + \mu a' & 1 + \mu b' \\ \mu c' & -\sigma + \mu d' \end{bmatrix} = \sigma^2 - \sigma \mu (a' + d') + \mu^2 a' d' - \mu c' (1 + \mu b') = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sigma_{\pm}(\mu) &= {}^{1/2}\mu(a' + d') \pm \sqrt{\mu^2[(a' + d')^2/4 - a'd' + b'c'] + \mu c'} = \\ &= \pm \sqrt{\mu c'} + {}^{1/2}\mu(a' + d') + O(\mu^{2/3}),\end{aligned}\quad (\text{IV.30})$$

где следует взять одно из двух значений $\sqrt{\mu c'}$. Мы видим, что $\sigma_{\pm}(0) = 0$, и отметим, что $|d\sigma_{\pm}(0)/d\mu| = \infty$, однако $d\sigma/d\sqrt{\mu} = \pm\sqrt{c'}$, если $c' \neq 0$. Существуют два собственных значения, и они являются комплексными, если $\mu c' < 0$. Поскольку всегда существует положительное собственное значение, если $\mu c' > 0$, то заключаем, что $u = 0$ неустойчиво, когда $|\mu|$ мало и $\mu c' > 0$. Так как при $\mu c' > 0$ имеет место неустойчивость, то устойчивость возможна только при $\mu c' < 0$, тогда $\sqrt{\mu c'}$ — чисто мнимая величина и устойчивость определяется знаком $\mu(a' + d')$. Если $c' > 0$, то $u = 0$ неустойчиво для малых $\mu > 0$ и устойчиво для $\mu < 0$, если $a' + d' > 0$. Решение $u = 0$ может быть неустойчивым с обеих сторон от критического значения.

Дополнение IV.1. Биортогональность обобщенных собственных векторов

Пусть A — $(n \times n)$ -матрица, $n \geq 2$; определим

$$T = A - \sigma I, \quad (\text{IV.31})$$

где σ — какие-либо из собственных значений A . Пусть

$$N_l = \{\psi: T^l \cdot \psi = 0\}$$

— нуль-пространство матрицы T^l ,

$$T^l = T \cdot T \cdots T \quad (l \text{ раз}),$$

и обозначим через

$$n_l = \dim N_l$$

число независимых векторов ψ , которые обращаются в нуль матрицей T^l , где $l \geq 1$. Если $T \cdot \psi = 0$, то $T^n \cdot \psi = 0$ для $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Поэтому, например, $N_2 \supseteq N_1$ и $N_{n+1} \supseteq N_n$. В § IV.2 было показано, что индекс Риса v — наибольшее целое число, для которого

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_v = N_{v+k} \text{ для всех } k \in \mathbb{N},$$

где вложения являются строгими. Нами уже определены

$$n_v = \text{алгебраическая кратность } \sigma,$$

$$n_1 = \text{геометрическая кратность } \sigma,$$

и, естественно, $n_v \geq n_1$. Векторы $\psi \in N_l$ являются собственными векторами для σ ; они удовлетворяют равенству $T \cdot \psi = 0$. Векторы $\psi \in N_l$, $l > 1$, называются обобщенными собственными векторами.

Если $v=1$, то не существует обобщенных собственных векторов. В этом случае σ — полупростое собственное значение A ; оно простое, если $n_1=1$, и более высокой кратности в противном случае. Индекс Риса, равный единице, означает, что σ — полупростое собственное значение.

Кроме того, для присоединенной задачи имеем следующие обобщенные нуль-пространства:

$$N_l^* = \{\psi^*: (T^T)^l \cdot \psi^* = 0\}.$$

Они имеют ту же самую размерность, что и N_l :

$$n_l = \dim N_l^* = \dim N_l \text{ для } 1 \leq l \leq v. \quad (IV.32)$$

Покажем теперь, что собственные значения σ вещественной симметрической матрицы A являются вещественными и полупростыми, и поэтому собственные векторы A являются собственными, а не обобщенными собственными векторами. Мы имеем $A \cdot x = \sigma x$ и $\langle A \cdot x, x \rangle = \langle x, A \cdot x \rangle$, так что $\sigma \langle x, x \rangle = \bar{\sigma} \langle x, x \rangle$ и $\sigma = \bar{\sigma}$, если $x \neq 0$. Предположим теперь, что $T^2 \cdot \psi = 0$. Тогда

$$0 = \langle T^2 \cdot \psi, \psi \rangle = \langle T \cdot \psi, T \cdot \psi \rangle,$$

где $\bar{T}^T = T$, потому что $\bar{\sigma} = \sigma$. Отсюда следует, что $T \cdot \psi = 0$, и поэтому ψ — собственный, а не обобщенный собственный вектор.

В общем случае можно показать (см. книги по линейной алгебре, в которых излагается теория жордановых базисов), что можно выбрать обобщенные собственные векторы T : $\psi_i^{(1)}, \dots, \psi_i^{(v_i)}$ так, что

$$\begin{aligned} T \cdot \psi_i^{(1)} &= 0, \quad T \cdot \psi_i^{(2)} = \psi_i^{(1)}, \\ T \cdot \psi_i^{(v_i)} &= \psi_i^{(v_i-1)}, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (IV.33)$$

Кроме того, можно выбрать обобщенные собственные векторы T^T : $\bar{\psi}_i^{*(1)}, \dots, \bar{\psi}_i^{*(v_i)}$ так, что

$$\begin{aligned} T^T \cdot \bar{\psi}_i^{*(v_i)} &= 0, \quad T^T \cdot \bar{\psi}_i^{*(v_i-1)} = \bar{\psi}_i^{*(v_i)}, \\ T^T \cdot \bar{\psi}_i^{*(1)} &= \bar{\psi}_i^{*(2)}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (IV.34)$$

где

$$\langle \psi_i^{(l)}, \psi_j^{*(m)} \rangle = \delta_{ij} \delta_{lm}. \quad (IV.35)$$

На самом деле некоторые из соотношений (IV.35) автоматически выполняются, а другие можно удовлетворить в результате соответствующего выбора $\psi_j^{*(k)}$ (см. приведенный ниже пример). Условия биортогональности, которые автоматически выполняются, можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \psi_i^{(m)}, \psi_j^{*(n)} \rangle &= \langle T \cdot \psi_i^{(m+1)}, \psi_j^{*(n)} \rangle = \\ &= \langle \psi_i^{(m+1)}, T^T \cdot \psi_j^{*(n)} \rangle = \\ &= \langle \psi_i^{(m+1)}, \psi_j^{*(n+1)} \rangle, \end{aligned}$$

если $1 \leq m < v_i$, $1 < n \leq v_j$. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \langle \psi_i^{(m)}, \psi_j^{*(v_j)} \rangle &= 0, & 1 \leq m < v_i, \\ \langle \psi_i^{(1)}, \psi_j^{*(n)} \rangle &= 0, & 1 < n \leq v_j, \\ \langle \psi_i^{(m)}, \psi_i^{*(n)} \rangle &= 0, & n \geq m + 1. \end{aligned}$$

Пример IV.1. Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нуль является собственным значением T с алгебраической кратностью, равной трем, и

$$x_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

суть собственные векторы, соответствующие нулевому собственному значению. Легко проверить, что единственная комбинация $\alpha x_1 + \beta x_2$, удовлетворяющая уравнению $T \cdot \psi = \alpha x_1 + \beta x_2$, есть та, для которой $\alpha = 1$, $\beta = -1$, т. е.

$$T \cdot \psi = x_1 - x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{IV.36})$$

Отсюда следует, что невозможно разрешить уравнения

$$T \cdot \psi = x_1, \quad T \cdot \psi = x_2$$

относительно обобщенного собственного вектора $\psi = \psi^{(2)}$. Тем не менее можно выбрать собственный вектор матрицы T в форме

$$\psi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \psi_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обобщенный вектор $\psi = \psi_2^{(2)}$, удовлетворяющий (IV.36), имеет вид

$$\psi_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Присоединенные собственные векторы, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} T^T \cdot \bar{\psi}_2^{*(2)} &= 0, \\ T^T \cdot \bar{\psi}_2^{*(1)} &= \bar{\psi}_2^{*(2)}, \\ T^T \cdot \bar{\psi}_1^{*(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.37})$$

где

$$T^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

суть

$$\psi_1^{*(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad \psi_2^{*(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \psi_2^{*(1)} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, эти векторы удовлетворяют (IV.35), если

$$\psi_1^{*(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2^{*(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_2^{*(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Дополнение IV.2. Проекции

Рассмотрим линейный оператор P , определенный в $\mathbb{R}^n$ соотношением

$$P \cdot x = \langle x, \psi^* \rangle \psi \text{ для любого } x \text{ в } \mathbb{R}^n, \quad (\text{IV.38})$$

где ψ и ψ^* — два вектора, удовлетворяющие условию $\langle \psi, \psi^* \rangle = 1$. Тогда $P^2 \cdot x = P(P \cdot x) = \langle x, \psi^* \rangle P \cdot \psi = \langle x, \psi^* \rangle I \cdot \psi = P \cdot x$, и поэтому имеем

$$P^2 = P. \quad (\text{IV.39})$$

Более обще, всякий линейный оператор P в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию $P^2 = P$, называется проекцией.

Рассмотрим теперь семейство p векторов $(\psi_1, \dots, \psi_p)$ из $\mathbb{R}^n$ и биортогональное семейство $(\psi_1^*, \dots, \psi_p^*)$, удовлетворяющие условиям

$$\langle \psi_i, \psi_j^* \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (\text{IV.40})$$

Тогда можно определить линейный оператор P следующим образом:

$$P \cdot x = \sum_{i=1}^p \langle x, \psi_i^* \rangle \psi_i. \quad (\text{VI.41})$$

Легко проверить, что (IV.39) выполняется; поэтому (IV.41) определяет проекцию на p -мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. Условия (IV.40) необходимы, иначе для этого оператора не выполнялось бы условие $P^2 = P$.

Пример IV.2 (в $\mathbb{R}^3$). Векторы

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \psi_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

удовлетворяют условиям $\langle \psi_i, \psi_j^* \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Матрицу проекции P , определяемую соотношением

$$P \cdot x = \sum_{i=1}^2 \langle x, \psi_i^* \rangle \psi_i, \quad (\text{IV.42})$$

можно построить из столбцов $P \cdot e_j$ матрицы P , где e_j суть стандартные ортонормированные базисные векторы в $\mathbb{R}^n$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Поэтому

$$(P \cdot x) \cdot e_i = (P \cdot x)_i = \sum_{j=1}^3 (P \cdot e_j)_i x_j.$$

Таким образом, $P_{ij} = (P \cdot e_j)_i$. Например, (IV.42) можно было бы записать в виде

$$(P \cdot x)_i = \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^3 \langle e_j, \psi_l^* \rangle \langle \psi_l, e_i \rangle x_j,$$

так что

$$P_{ij} = \sum_{l=1}^2 \langle e_j, \psi_l^* \rangle \langle \psi_l, e_i \rangle.$$

Поэтому

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } P^2 = P.$$

Проекции представляют собой математический инструмент, который мы применяем для уменьшения размерности бифуркационных задач. Чаще используют проекции, коммутирующие с линейным оператором A :

$$P \cdot A = A \cdot P. \quad (\text{IV.43})$$

Пусть A — линейный оператор в $\mathbb{R}^n$ (представимый посредством $(n \times n)$ -матрицы), имеющий собственное значение σ кратности n_σ с индексом Рунса v . Результаты, приведенные в дополнении IV.1, гарантируют возможность построения проекции P , определяемой соотношением

$$P \cdot x = \sum_m \langle x, \psi_i^{*(m)} \rangle \psi_i^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq v_i.$$

Мы утверждаем и затем докажем, что

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} \text{ для любого } \mathbf{x}.$$

Для доказательства определим $\mathbf{T} = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}$ и покажем, что равенство

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$$

эквивалентно (IV.43). Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} &= \sum_m \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i^{*(m)} \rangle \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\psi}_i^{(m)} \text{ для } 2 \leq m \leq v_i, \\ &= \sum_m \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i^{*(m+1)} \rangle \boldsymbol{\psi}_i^{(m)} \text{ для } 1 \leq m \leq v_i - 1. \end{aligned}$$

Дополнительно к этому имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= \sum_m \langle \mathbf{x}, \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\psi}_i^{*(m)} \rangle \boldsymbol{\psi}_i^{(m)} \text{ для } 1 \leq m \leq v_i, \\ &= \sum_m \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i^{*(m+1)} \rangle \boldsymbol{\psi}_i^{(m)} \text{ для } 1 \leq m \leq v_i - 1, \end{aligned}$$

что и доказывает (IV.43).

Пример IV.3 (в $\mathbb{R}^4$)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нулевое собственное значение имеет кратность 3 и индекс 2, и можно взять следующую систему обобщенных собственных векторов:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_1^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\psi}_1^{*(1)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2^{*(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2^{*(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Проекция (являющаяся суммой проекций описанного выше типа)

$$\mathbf{P} = \langle \cdot, \boldsymbol{\psi}_1^{*(1)} \rangle \boldsymbol{\psi}_1^{(1)} + \langle \cdot, \boldsymbol{\psi}_2^{*(1)} \rangle \boldsymbol{\psi}_2^{(1)} + \langle \cdot, \boldsymbol{\psi}_2^{*(2)} \rangle \boldsymbol{\psi}_2^{(2)}$$

имеет матричное представление

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и можно проверить, что

$$P \cdot T = T \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

действительно совпадает с T на подпространстве, порождаемом $\psi_1^{(1)}$, $\psi_2^{(1)}$, $\psi_2^{(2)}$, т. е. $T \cdot x = P \cdot T \cdot x$, где $x = \alpha \psi_1^{(1)} + \beta \psi_2^{(1)} + \gamma \psi_2^{(2)}$. В данном случае это подпространство содержит все векторы, четвертая компонента которых равна нулю.

БИФУРКАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ И УСТОЙЧИВОСТЬ БИФУРКАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Мы теперь переходим к анализу стационарных бифуркационных решений двумерных автономных задач (IV.1). В этой главе мы рассматриваем двумерную задачу и записываем (IV.1) в скалярной форме:

$$\frac{du_l}{dt} = f^{(l)}(\mu, u_1, u_2), \quad l = 1, 2, \quad (\text{V.1})$$

где

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\mu, u_1, u_2) &= a_0 u_1 + b_0 u_2 + \mu(a'(\mu) u_1 + b'(\mu) u_2) + \\ &\quad + \alpha_1(\mu) u_1^2 + 2\beta_1(\mu) u_1 u_2 + \gamma_1(\mu) u_2^2 + O(\|\mathbf{u}\|^3), \\ f^{(2)}(\mu, u_1, u_2) &= c_0 u_1 + d_0 u_2 + \mu(c'(\mu) u_1 + d'(\mu) u_2) + \\ &\quad + \alpha_2(\mu) u_1^2 + 2\beta_2(\mu) u_1 u_2 + \gamma_2(\mu) u_2^2 + O(\|\mathbf{u}\|^3). \end{aligned}$$

Старшие члены в $f^{(l)}$ суть элементы матриц $(A_{lj}(\mu))$ и $(B_{ljk}(\mu))$, определенных формулой (IV.2), и $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2$.

В гл. IV мы исследовали устойчивость решения $\mathbf{u} = 0$ в терминах собственных значений $\sigma(\mu)$ матрицы $\mathbf{A}(\mu)$. Теперь найдем условия, при которых могут ответвляться новые стационарные решения (V.1), и укажем условия, при выполнении которых они будут устойчивы по отношению к малым возмущениям.

§ V.1. Вид стационарных бифуркационных решений и их устойчивость

Существует много эквивалентных способов параметризации одного и того же бифуркационного решения. Можно использовать заданный параметр μ и искать бифуркационные решения в форме $(\mu, u_1(\mu), u_2(\mu))$. Или можно ввести амплитуду ε , определяемую посредством некоторой функции от u_1 и u_2 , и разыскивать решения в форме $(\varepsilon, \mu(\varepsilon), u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon))$. Например, можно взять $\varepsilon = u_1$, или $\varepsilon = u_2$, или $\varepsilon = f(u_1, u_2)$ для некоторой хорошей функции f . В более общих случаях, подобных тем, которые встречаются при исследовании бифуркации решений уравнений в частных производных, амплитуду бифуркационного решения можно определить при помощи соответствующего выбора функционала. Определения, подобные (VI.7), на которых основывается проектирование бифуркационного решения,

особенно удобны. Различные определения ε эквивалентны, если они связаны между собой обратимым преобразованием.

В этой главе мы часто будем параметризовывать бифуркационные ветви соотношениями

$$u_1 = \varepsilon, \quad u_2 = \varepsilon y(\varepsilon), \quad \mu = \varepsilon \lambda(\varepsilon). \quad (V.2)$$

Прежде чем приступить к исследованию решений (V.2), представляет интерес провести анализ задачи, используя заданный параметр μ :

$$(\mu, u_1, u_2) = (\mu, u_1(\mu), u_2(\mu)). \quad (V.3)$$

Для получения решения в форме (V.3) достаточно, чтобы (u_1, u_2) представляли собой точки пересечения на (u_1, u_2) -плоскости двух кривых, определяемых уравнениями

$$f_l(\mu, u_1, u_2) = 0, \quad l = 1, 2,$$

при некотором $\mu = \mu_0$, и чтобы для этого же самого значения μ_0 выполнялось условие

$$\det \mathcal{Y} \neq 0,$$

где

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix},$$

теоремы о неявной функции в $\mathbb{R}^3$ (см. дополнение V.1).

Существует тесная связь между достаточным условием $\det \mathcal{Y} \neq 0$ существования ветви и устойчивостью решений. Устойчивость любого решения по отношению к малым возмущениям v_l для (V.3) или (V.2) определяется на основе линеаризованной эволюционной задачи, описывающей v_l :

$$\frac{dv_l}{dt} = \frac{\partial f_l}{\partial u_1} v_1 + \frac{\partial f_l}{\partial u_2} v_2, \quad l = 1, 2,$$

где для (V.3)

$$f_l = f_l(\mu_0, u_1(\mu_0), u_2(\mu_0))$$

или для (V.2)

$$f_l = f_l(\varepsilon_0 \lambda(\varepsilon_0), \varepsilon_0, \varepsilon_0 y(\varepsilon_0)).$$

Эволюционной задаче удовлетворяют экспоненты

$$v(t) = e^{\gamma t} \xi \quad (v_l(t) = e^{\gamma_l t} \xi_l),$$

если собственное значение γ и собственный вектор ξ удовлетворяют спектральной задаче $\gamma = \mathcal{Y} \cdot \xi$. Собственные значения матрицы Якоби $\mathcal{Y}$ суть $\gamma_1(\mu_0)$ и $\gamma_2(\mu_0)$, и решение (V.3) устойчиво, если при $\mu = \mu_0$

(или при $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu_0 = \mu(\varepsilon_0)$) вещественные части собственных значений отрицательны. Очевидно, что $f_l(\mu_0, u_1, u_2) = 0$ и

$$\det \mathcal{Y} = \gamma_1(\mu_0) \gamma_2(\mu_0) \neq 0$$

представляет собой достаточное условие существования непрерывной ветви решения (V.3) для μ , близких к μ_0 . Это условие выражено через собственные значения, определяющие характер устойчивости.

Если $\gamma_1(\mu_0)$ комплексное, то $\gamma_2(\mu_0) = \overline{\gamma_1(\mu_0)}$ и $\det \mathcal{Y} = |\gamma_1(\mu_0)|^2 > 0$. Если $\gamma_1(\mu_0)$ вещественное, то $\gamma_2(\mu_0)$ тоже вещественное. Особый случай, когда существование ветви, проходящей через точку (μ_0, u_1, u_2) , нельзя установить, отправляясь от (V.3) и используя теорему о неявной функции, характеризуется тем, что одно из двух собственных значений, определяющих характер устойчивости, обращается в нуль. Геометрически этот особый случай можно описать следующим образом: $\det \mathcal{Y} \neq 0$ при $\mu = \mu_0$ тогда и только тогда, когда при $\mu = \mu_0$ кривые, связывающие u_1 и u_2 на (u_1, u_2) -плоскости, т. е. $f_1(\mu_0, u_1, u_2) = 0$ и $f_2(\mu_0, u_1, u_2) = 0$, пересекаются трансверсально. Если эти кривые имеют в точке пересечения общую касательную, то два уравнения

$$\frac{\partial f_l}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f_l}{\partial u_2} \delta u_2 = 0, \quad l = 1, 2,$$

имеют ненулевое решение $(\delta u_1, \delta u_2)$ и поэтому $\det \mathcal{Y} = \gamma_1(\mu_0) \gamma_2(\mu_0) = 0$.

Полагая $(\mu, u_1, u_2) = (\varepsilon \lambda, \varepsilon, \varepsilon y)$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_0 + \varepsilon(\lambda a' + 2\alpha_1 + 2\beta_1 y) & b_0 + \varepsilon(\lambda b' + 2\beta_1 + 2\gamma_1 y) \\ c_0 + \varepsilon(\lambda c' + 2\alpha_2 + 2\beta_2 y) & d_0 + \varepsilon(\lambda d' + 2\beta_2 + 2\gamma_2 y) \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

§ V.2. Классификация трех типов бифуркации стационарных решений

Воспользуемся теоремой о неявной функции для доказательства существования единственных функций $\lambda(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} f_1(\mu, u_1, u_2) &= \varepsilon g_1(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, y(\varepsilon)) = 0, \\ f_2(\mu, u_1, u_2) &= \varepsilon g_2(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, y(\varepsilon)) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, \varepsilon, y) &= a_0 + b_0 y + \varepsilon[\lambda(a' + b' y) + \alpha_1 + 2\beta_1 y + \gamma_1 y^2] + O(\varepsilon^2), \\ g_2(\lambda, \varepsilon, y) &= c_0 + d_0 y + \varepsilon[\lambda(c' + d' y) + \alpha_2 + 2\beta_2 y + \gamma_2 y^2] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Мы ищем стационарные бифуркационные решения уравнения

$$g_i(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, y(\varepsilon)) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{V.5})$$

Для решения (V.5) сначала потребуем, чтобы

$$g_i(\lambda_0, 0, y_0) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{V.6})$$

Из уравнений (V.6) следует, что

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 y_0 &= 0, \\ c_0 + d_0 y_0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Уравнениям (V.7) всегда удовлетворяет собственный вектор $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ y_0 \end{bmatrix}$, соответствующий собственному значению $\sigma_1(0) = 0$ (см. § IV.4.2). Для решения (V.7) необходимо рассмотреть три случая:

(1) $\Delta = (a_0 + d_0)^2/4 - a_0 d_0 + b_0 c_0 \neq 0$. Тогда $\sigma_1(0)$ и $\sigma_2(0)$ различные. Более того, из (V.7) находим, что $a_0 d_0 - b_0 c_0 = 0$ и

$$\Delta = (a_0 + d_0)^2/4 > 0,$$

так что два собственных значения $\sigma_1(0) = \xi_1(0) = 0$, $\sigma_2(0) = \xi_2(0) < 0$ ($a_0 + d_0 < 0$) вещественные. В этом случае мы имеем бифуркацию в простом собственном значении $\xi_1(0) = 0$. В гл. VI эта задача сведена к проекции на $\mathbb{R}^1$.

(2) $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$ имеет индекс Риса, равный двум. Не ограничивая общности (см. § IV.4.4.2), мы будем исследовать этот случай при следующих значениях параметров:

$$a_0 = c_0 = d_0 = b_0 - 1 = y_0 = 0.$$

(3) $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 0$ имеет индекс Риса, равный единице. Этот случай соответствует бифуркации в двойном полупростом собственном значении.

§ V.3. Бифуркация в простом собственном значении

Положим

$$y = y_0 + \varepsilon \tilde{y} \quad (\text{V.8})$$

и определим

$$\varepsilon h_i(\lambda, \varepsilon, \tilde{y}) = g_i(\lambda, \varepsilon, y_0 + \varepsilon \tilde{y}) = 0, \quad (\text{V.9})$$

где

$$\begin{aligned} h_1(\lambda, \varepsilon, \tilde{y}) &= b_0 \tilde{y} + \lambda(a' + b'y_0) + \alpha_1 + 2\beta_1 y_0 + \gamma_1 y_0^2 + O(\varepsilon) = 0, \\ h_2(\lambda, \varepsilon, \tilde{y}) &= d_0 \tilde{y} + \lambda(c' + d'y_0) + \alpha_2 + 2\beta_2 y_0 + \gamma_2 y_0^2 + O(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.10})$$

Находим, что

$$\begin{aligned} h_1(\lambda_0, 0, \tilde{y}_0) &= b_0 \tilde{y}_0 + \lambda_0 (a'_0 + b'_0 y_0) + \\ &\quad + \alpha_{10} + 2\beta_{10} y_0 + \gamma_{10} y_0 = 0, \\ h_2(\lambda_0, 0, \tilde{y}_0) &= d_0 \tilde{y}_0 + \lambda_0 (c'_0 + d'_0 y_0) + \\ &\quad + \alpha_{20} + 2\beta_{20} y_0 + \gamma_{20} y_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

Вспоминая, что $y_0 = -a_0/b_0 = -c_0/d_0$, можно проверить, что уравнения (V.11) определяют единственные значения $\tilde{y}_0$ и λ_0 через коэффициенты, вычисляемые при $\mu = 0$, если только отличен от нуля определитель из коэффициентов при $\tilde{y}_0$ и λ_0 . Этот определитель совпадает с определителем матрицы Якоби

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial h_1}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial h_2}{\partial \tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_0 + b'_0 y_0 & b_0 \\ c'_0 + d'_0 y_0 & d_0 \end{bmatrix},$$

вычисленном при $\varepsilon = 0$, и можно показать, что

$$d_0 (a'_0 + b'_0 y_0) - b_0 (c'_0 + d'_0 y_0) = \xi_1'(0) \xi_2(0) < 0. \quad (\text{V.12})$$

Если условие (V.12) выполняется, то из теоремы о неявной функции следует, что (V.10) можно разрешить относительно $\lambda(\varepsilon)$ и $\tilde{y}(\varepsilon)$. Затем, возвращаясь к (V.8), получим бифуркационные решения в форме (V.2).

Для доказательства (V.12) заметим, что из (V.7) следует

$$\begin{aligned} d_0 (a'_0 + b'_0 y_0) - b_0 (c'_0 + d'_0 y_0) &= \\ &= d_0 a'_0 - c_0 b'_0 - b_0 c'_0 + a_0 d'_0 = \\ &= (ad - bc)'_0. \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

Так как

$$\det \mathbf{A} = ad - bc = \xi_1 \xi_2,$$

то отсюда следует, что

$$(ad - bc)'_0 = \xi_1(0) \xi_2'(0) + \xi_1'(0) \xi_2(0) = \xi_1'(0) \xi_2(0),$$

и (V.12) доказано.

Другой простой метод построения этого же бифуркационного решения приведен в § VI.2.

§ V.4. Устойчивость стационарного решения, отвечающего в простом собственном значении

Устойчивость бифуркационного решения можно установить на основе линейной теории в результате анализа собственных значений матрицы $\mathcal{Y}$. Однако в действительности нас интересуют не все

собственные значения, а лишь наибольшее собственное значение, не равное нулю в критической точке (другое собственное значение отрицательно). Поэтому заманчивой представляется идея проектирования на $\mathbb{R}^1$; тогда можно исследовать интересующее нас собственное значение, от которого зависит характер устойчивости. Это мы сделаем в § VI.4, где будет показано, что суперкритические стационарные решения, которые ответвляются в простом собственном значении, устойчивы, а субкритические решения неустойчивы. Этот результат в точности совпадает с результатом, который уже был доказан при анализе бифуркационных задач в $\mathbb{R}^1$ (см. рис. II.3).

§ V.5. Бифуркация в двойном собственном значении с индексом, равным двум¹⁾

В случае (2) из § V.2 мы ищем стационарные решения, которые ответвляются, если $\sigma(0)=0$ — двойное собственное значение с индексом, равным двум, и $a_0=c_0=d_0=b_0-1=y_0=0$. Стационарные решения имеют вид (V.2), где $\lambda(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ определяются из двух нелинейных уравнений

$$g_1(\lambda, \varepsilon, y) = \tilde{g}_2(\lambda, \varepsilon, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_2(\lambda, \varepsilon, y)}{\varepsilon} = 0, \quad (\text{V.14})_1$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= y + \varepsilon \{ \lambda(a' + b'y) + \alpha_1 + 2\beta_1 y + \gamma_1 y^2 \} + O(\varepsilon^2), \\ g_2 &= \lambda(c' + d'y) + \alpha_2 + 2\beta_2 y + \gamma_2 y^2 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{V.14})_2$$

Для решения (V.14) воспользуемся теоремой о неявной функции. Прежде всего заметим, что (V.14) удовлетворяются при

$$\varepsilon = y_0 = 0, \text{ если только } \lambda_0 = -\alpha_{20}/c'_0, \text{ т. е.}$$

$$\begin{aligned} g_1(-\alpha_{20}/c'_0, 0, 0) &= 0, \\ \tilde{g}_2(-\alpha_{20}/c'_0, 0, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

Уравнения (V.14) можно разрешить относительно $(\lambda(\varepsilon), y(\varepsilon))$, когда ε мало и $(\lambda(\varepsilon), y(\varepsilon))$ близко к $(\lambda(0), y(0)) = (-\alpha_{20}/c'_0, 0)$, если определитель матрицы

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{V.16})$$

¹⁾ Эта задача при более общих предположениях исследована в статье Landman K. A., Rosenblat S. Bifurcation from a multiple eigenvalue and stability of solutions, *SIAM J. Appl. Math.*, **34**, 743 (1978).

отличен от нуля при $(\lambda, y, \varepsilon) = (-\alpha_{20}/c'_0, 0, 0)$, т. е. если

$$\det \tilde{J} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c'_0 & \lambda_0 d'_0 + 2\beta_2 \end{bmatrix} = -c'_0 \neq 0. \quad (V.17)$$

Если $c'_0 = 0$ и $\alpha_{20} \neq 0$, то можно найти стационарное бифуркационное решение в форме $(u_1(\mu), u_2(\mu))$. Построение этого решения дано в упр. V.1 в конце этой главы.

Предполагая теперь $c'_0 \neq 0$, можно легко найти бифуркационное решение в виде ряда по степеням ε . Коэффициенты этого степенного ряда можно вычислить в результате повторного дифференцирования (V.14) по ε при $\varepsilon = 0$. Для первых производных получаем выражения

$$\left. \frac{dg_1(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, y(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{dy}{d\varepsilon} + \lambda_0 (a'_0 + \alpha_{10}) = 0, \quad (V.18)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{g}_2(\lambda(\varepsilon), \varepsilon, y(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= c'_0 \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + \lambda_0 \left(\lambda_0 \frac{dc'(0)}{d\mu} + d'_0 \frac{dy}{d\varepsilon} \right) + \\ &+ 2\beta_{20} \frac{dy}{d\varepsilon} = 0. \end{aligned} \quad (V.19)$$

Уравнение (V.18) дает $dy/d\varepsilon$, а (V.19) определяет $d\lambda/d\varepsilon$.

Другой метод построения решения, отвечающего от двойного собственного значения с индексом, равным двум, будет дан в § VI.11. При этом бесконечномерные задачи проектируются в одномерные. Для бесконечномерных задач размерностью основной проекции является геометрическая кратность n_1 , независимо от алгебраической кратности μ_1 (см. § IV.2 и § VI.11). В настоящем случае $n_1 = 1$ несмотря на то, что $\mu_1 = 2$; мы имеем один собственный вектор и двойное собственное значение.

§ V.6. Устойчивость стационарного решения, отвечающего в двойном собственном значении с индексом, равным двум

Устойчивость по линейному приближению бифуркационного решения, построенного в (V.5), можно установить по знаку вещественных частей собственных значений матрицы Якоби $\mathcal{Y}$, даваемой формулой (V.4). В настоящем случае при $a_0 = c_0 = d_0 = y_0 = b_0 - 1 = -\lambda_0 c'_0 + \alpha_{20} = 0$ имеем

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \varepsilon (\lambda_0 a'_0 + 2\alpha_{10}) & 1 + \varepsilon (\lambda_0 b'_0 + 2\beta_{10}) \\ \varepsilon (\lambda_0 c'_0 + 2\alpha_{20}) & \varepsilon (\lambda_0 d'_0 + 2\beta_{20}) \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2).$$

Собственные значения $\mathcal{Y}$ суть $\gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_2(\varepsilon)$ и определяются уравнением $\det[\mathcal{Y} - \gamma I] = 0$; отсюда находим

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(\varepsilon) \\ \gamma_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = [-\varepsilon \lambda_0 c'_0]^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{2} \{ \lambda_0 (a'_0 + d'_0) + 2\alpha_{10} + 2\beta_{20} \} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Возьмем одно из значений $\sqrt{\varepsilon}$; скажем, $\sqrt{\varepsilon}$ — вещественное и положительное число, если $\varepsilon > 0$; тогда $\gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_2(\varepsilon)$ являются аналитическими по $\sqrt{\varepsilon}$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то имеем

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(\varepsilon) \\ \gamma_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = (-\mu c'_0)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + O[\mu(\varepsilon)].$$

Сравним эти выражения с формулой (IV.30)

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(\mu) \\ \sigma_2(\mu) \end{bmatrix} = (\mu c'_0)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + O(\mu),$$

дающей собственные значения, определяющие характер устойчивости решения $u=0$. Если $\mu c'_0 > 0$, то нулевое решение неустойчиво,

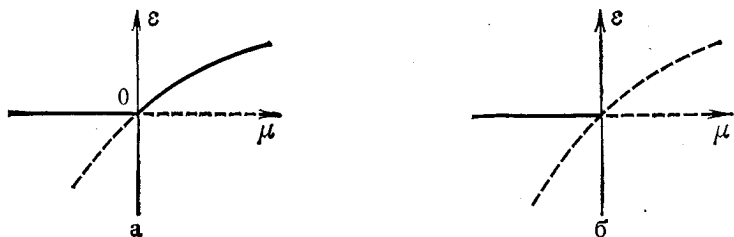


Рис. V.1. Возможные распределения устойчивости стационарных решений, отвечающих от $\varepsilon=0$ в двойном собственном значении с индексом 2 в случае $c'_0 > 0$, где предполагается, что нулевое решение теряет устойчивость строго, когда μ , возрастая, проходит через нуль (см. IV.30))

а устойчивость бифуркационного решения определяется собственными значениями $\gamma_i(\varepsilon)$, а именно членами, имеющими порядок $\mu(\varepsilon)$, или членами порядка $O(\varepsilon)$, так как величина $(-\mu c'_0)^{1/2}$ чисто мнимая. Если $\mu c'_0 < 0$, то бифуркационное решение неустойчиво, в то время как устойчивость нулевого решения определяется членами порядка μ в $\sigma_2(\mu)$.

Пусть $(a'_0 + d'_0) c'_0 < 0$ и $c'_0 > 0$. Тогда нулевое решение устойчиво при $\mu < 0$ и неустойчиво при $\mu > 0$. (Обратное верно, если $c'_0 < 0$.) В этом случае бифуркационное решение неустойчиво при $\mu < 0$ и может быть устойчивым или неустойчивым при $\mu > 0$ в зависимости от коэффициента при ε в $\gamma_i(\varepsilon)$ (см. рис. V.1). Обращаем

внимание читателя на то обстоятельство, что ни нулевое решение, ни бифуркационное решение не могут быть устойчивы с обеих сторон от критического значения.

Если $\lambda_0 = 0$ и $\mu_{ee}(0) \neq 0$, то бифуркация является односторонней и определение характера устойчивости зависит от особенностей конкретной задачи.

§ V.7. Бифуркация и устойчивость стационарных решений в форме (V.2) в двойном собственном значении (полупростом) с индексом, равным единице¹⁾

Здесь и в § V.8 нас будет интересовать бифуркация и устойчивость стационарных решений при условиях (3) из § V.2. Эти условия состоят в том, что $\sigma(0) = 0$ — двойное собственное значение (полупростое) с индексом, равным единице. Из этих условий следует, что $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Бифуркационные решения можно искать как в форме (V.2), так и в форме (V.3). Если решения в обеих формах существуют, то они эквивалентны и можно переходить от одного к другому: $(\mu, u_1(\mu), u_2(\mu)) \longleftrightarrow (e\lambda(e), e, ey(e))$. Здесь мы исследуем форму (V.2), а в § V.8 рассмотрим решение в форме (V.3).

Стационарные решения (V.2) определяются как корни $\lambda(e), y(e)$ двух нелинейных уравнений

$$\tilde{g}_l(\lambda, e, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_l(\lambda, e, y)}{e} = 0, \quad l = 1, 2, \quad (\text{V.20})$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(\lambda, e, y) &= \lambda(a' + b'y) + \alpha_1 + 2\beta_1 y + \gamma_1 y^2 + O(e), \\ \tilde{g}_2(\lambda, e, y) &= \lambda(c' + d'y) + \alpha_2 + 2\beta_2 y + \gamma_2 y^2 + O(e). \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Мы разыскиваем решения (V.20), которые отвечают в $(e, \lambda, y) = (0, \lambda_0, y_0)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1(\lambda_0, 0, y_0) &= \lambda_0(a'_0 + b'_0 y_0) + \alpha_{10} + 2\beta_{10} y_0 + \gamma_{10} y_0^2 = 0, \\ \tilde{g}_2(\lambda_0, 0, y_0) &= \lambda_0(c'_0 + d'_0 y_0) + \alpha_{20} + 2\beta_{20} y_0 + \gamma_{20} y_0^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{V.22})$$

¹⁾ Эта задача исследована Д. Б. Маклеодом и Д. Г. Саттингером (Loss of stability and bifurcation at a double eigenvalue, *J. Functional Analysis*, **14**, 62 (1973)). Задачи с кратными полупростыми собственными значениями возникают в бифуркационных задачах, в которых происходит разрушение пространственной симметрии (см. книгу Саттингера, включенную в список литературы в конце гл. I). Часто случается, что собственные значения, зависящие более чем от одного параметра, являются полупростыми только при специальных соотношениях между параметрами. Поэтому представляется интересным исследовать, что происходит, если параметры изменяются таким образом, что кратные собственные значения расщепляются. Этим способом можно даже обнаружить вторичные бифуркации (см. пример V.6 и упр. V.6 в конце этой главы).

Можно гарантировать бифуркацию, используя теорему о неявной функции в $\mathbb{R}^2$ (см. дополнение V.1), если

$$\det \tilde{\mathbf{J}} \neq 0, \quad (\text{V.23})$$

где матрица $\tilde{\mathbf{J}}$ определяется выражением

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_0 + b'_0 y_0 & 2\beta_{10} + 2\gamma_{10} y_0 + \lambda_0 b'_0 \\ c'_0 + d'_0 y_0 & 2\beta_{20} + 2\gamma_{20} y_0 + \lambda_0 d'_0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.24})$$

при $(\varepsilon, \lambda, y) = (0, \lambda_0, y_0)$.

Устойчивость $(\mu(\varepsilon), u_1(\varepsilon), u_2(\varepsilon)) = (\varepsilon \lambda(\varepsilon), \varepsilon, \varepsilon y(\varepsilon))$ может быть исследована на основе анализа собственных значений матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \varepsilon \begin{bmatrix} \lambda_0 a'_0 + 2\alpha_{10} + 2\beta_{10} y_0 & \lambda_0 b'_0 + 2\beta_{10} + 2\gamma_{10} y_0 \\ \lambda_0 c'_0 + 2\alpha_{20} + 2\beta_{20} y_0 & \lambda_0 d'_0 + 2\beta_{20} + 2\gamma_{20} y_0 \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2) = \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \mathbf{J}_0 + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (\text{V.25})$$

Если ε мало, то можно установить характер устойчивости по знаку вещественных частей двух собственных значений матрицы $\mathbf{J}_0$.

Теперь обратим внимание читателя на большое различие между задачей бифуркации в исследуемом здесь полупростом случае (3) и в ранее рассмотренных случаях (1) и (2) бифуркации в простом собственном значении и в двойном собственном значении с индексом, равным двум. В двух последних случаях $f_l = \varepsilon g_l$, где g_1 и g_2 тождественно не равны нулю при $\varepsilon = 0$. Тогда члены наименьшего порядка пропорциональны ε и приводят к линейным уравнениям (V.7) или (V.15), из которых единственным образом определяется y_0 или λ_0 . В настоящем, полупростом случае, $f_l = \varepsilon^2 g_l$, где $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ отличны от нуля при $\varepsilon = 0$. Члены наименьшего порядка пропорциональны ε^2 и приводят к нелинейным уравнениям. Из этих нелинейных уравнений мы иногда можем получить несколько бифуркационных решений.

Для того чтобы показать, как задача с полупростым собственным значением приводит к кратным решениям, заметим только, что (V.22) эквивалентно кубическому уравнению $\mathcal{E}(y_0) = 0$ относительно y_0 , если $d'_0 \gamma_{10} - b'_0 \gamma_{20} \neq 0$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(y_0) &= (c'_0 + d'_0 y_0)(\alpha_{10} + 2\beta_{10} y_0 + \gamma_{10} y_0^2) - \\ &\quad - (a'_0 + b'_0 y_0)(\alpha_{20} + 2\beta_{20} y_0 + \gamma_{20} y_0^2). \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

Это уравнение имеет или три вещественных корня, или два вещественных корня, один из которых кратный, или один трехкратный вещественный корень (см. рис. V.2).

Для каждого простого вещественного корня $y_0^{[k]}$ кубического уравнения $\mathcal{E}(y_0) = 0$ можно построить бифуркационное решение $(\lambda^{[k]}(\varepsilon), y^{[k]}(\varepsilon))$ в виде ряда по степеням ε . Так как $1 \leq k \leq 3$, то может быть 1, 2 или 3 решения с различными бифуркационными кривыми $\lambda^{[k]}(\varepsilon)$, как показано на рис.

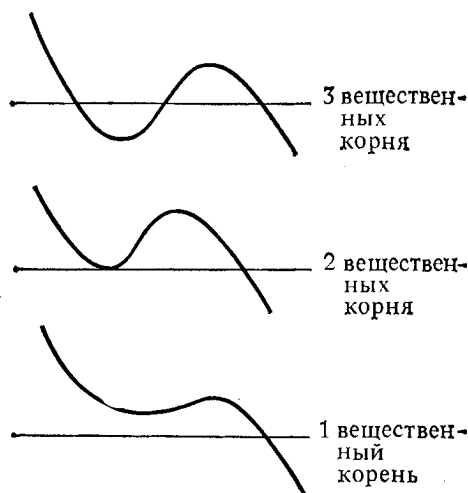


Рис. V.2. Число решений, которые могут ответвляться от $\varepsilon = 0$ в двойном полупростом собственном значении и соответствующие корням кубического уравнения $\mathcal{E}(y_0) = 0$, если $d'_0 \gamma_{10} - b'_0 \gamma_{20} \neq 0$.

V.3. Для того чтобы получить коэффициенты степенных рядов, необходимо произвести повторное дифференцирование $\tilde{g}_l(\lambda^{[k]}(\varepsilon), \varepsilon, y^{[k]}(\varepsilon))$ по ε при $\varepsilon = 0$. Например, можно вычислить $d\lambda^{[k]}(0)/d\varepsilon$ и $dy^{[k]}(0)/d\varepsilon$ из двух уравнений ($l = 1, 2$)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{g}_l(\lambda^{[k]}, 0, y^{[k]})}{\partial \varepsilon} + \\ & + \frac{d\lambda^{[k]}}{d\varepsilon}(0) \frac{\partial \tilde{g}_l(\lambda^{[k]}, 0, y^{[k]})}{\partial \lambda} + \\ & + \frac{\partial \tilde{g}_l}{\partial y} \frac{dy^{[k]}}{d\varepsilon}(0) = 0. \end{aligned}$$

Вторые производные $(dy^{[k]}/d\varepsilon)(0)$ и $(d\lambda^{[k]}/d\varepsilon)(0)$ можно вычислить, дифференцируя $\tilde{g}$ дважды, и т. д.

Распределение устойчивости решений, которые разветвляются в полупростом случае, носит сложный характер. Здесь могут иметь место самые разнообразные случаи (см. § V.9).

§ V.8. Бифуркация и устойчивость стационарных решений (V.3) в полупростом двойном собственном значении

Бифуркационное решение (V.3) можно получить непосредственно из (V.2) или же его можно построить применением процедуры, которая использовалась для (V.3). При этом примем во внимание, что $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$, и определим

$$\begin{aligned} \hat{u}_l & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_l}{\mu}, \\ \hat{f}_l(\mu, \hat{u}_1, \hat{u}_2) & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_l(\mu, u_1, u_2)}{\mu^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

где $l = 1, 2$, и

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\mu, \hat{u}_1, \hat{u}_2) & = a' \hat{u}_1 + b' \hat{u}_2 + \alpha_1 \hat{u}_1^2 + 2\beta_1 \hat{u}_1 \hat{u}_2 + \gamma_1 \hat{u}_2^2 + O(|\mu|), \\ \hat{f}_2(\mu, \hat{u}_1, \hat{u}_2) & = c' \hat{u}_1 + d' \hat{u}_2 + \alpha_2 \hat{u}_1^2 + 2\beta_2 \hat{u}_1 \hat{u}_2 + \gamma_2 \hat{u}_2^2 + O(|\mu|), \end{aligned} \quad (\text{V.28})$$

а a' , b' , c' , d' , α_l , β_l , γ_l суть функции от μ . Если $\mu=0$, то уравнения $\hat{f}_l(0, \hat{u}_{10}, \hat{u}_{20})=0$ описывают конические сечения:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{10}^{\text{def}} &= \hat{f}_{10}(0, \hat{u}_{10}, \hat{u}_{20}) = \\ &= a'_0 \hat{u}_{10} + b'_0 \hat{u}_{20} + \alpha_{10} \hat{u}_{10}^2 + 2\beta_{10} \hat{u}_{10} \hat{u}_{20} + \gamma_{10} \hat{u}_{20}^2 = 0, \\ \hat{f}_{20}^{\text{def}} &= \hat{f}_{20}(0, \hat{u}_{10}, \hat{u}_{20}) = \\ &= c'_0 \hat{u}_{10} + d'_0 \hat{u}_{20} + \alpha_{20} \hat{u}_{10}^2 + 2\beta_{20} \hat{u}_{10} \hat{u}_{20} + \gamma_{20} \hat{u}_{20}^2 = 0.\end{aligned}\quad (\text{V.29})$$

Бифуркационные решения получаются как точки пересечения двух конических сечений. Эти конические сечения пересекаются в $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)=(0, 0)$ при любом μ . Кроме начала существуют самое

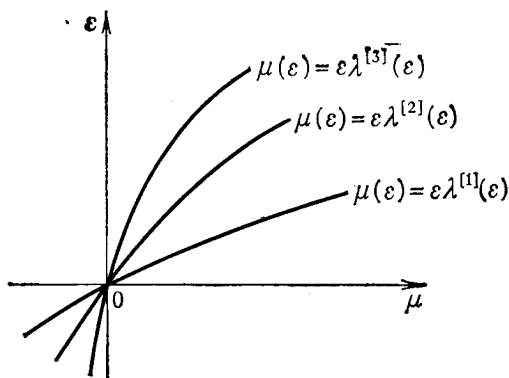


Рис. V.3. Бифуркационные кривые, когда уравнение $\mathcal{E}(y_0)=0$ имеет три корня и выполняется (V.23) для каждой пары $\lambda^{[kl]}(0)$, $y^{[kl]}(0)$.

большее три других решения (см. рис. V.3). Точки пересечения $(\text{V.29})_1$ и $(\text{V.29})_2$, отличные от $(0, 0)$, соответствуют корням кубического уравнения $\mathcal{E}(y_0)=0$ (V.26). В дополнение к $(0, 0)$ существуют или три решения, или два решения, или одно решение (см. рис. V.4). Уравнения (V.7) связаны с приведенными здесь уравнениями преобразованием $(\mu, \hat{u}_1, \hat{u}_2)=(\epsilon\lambda, 1/\lambda, y/\lambda)$.

Связь между существованием и устойчивостью бифуркационных решений, которая упоминалась в § V.1, имеет особенно прозрачную форму в параметризации (V.27). Сначала заметим, что $\mathcal{Y}(\mu) = \mu \mathcal{Y}_0 + O(\mu^2)$ и

$$\det \mathcal{Y} = \mu^2 \det \mathcal{Y}_0 + O(|\mu|^3),$$

где

$$\mathcal{Y}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}_{10}}{\partial \hat{u}_{10}} & \frac{\partial \hat{f}_{10}}{\partial \hat{u}_{20}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{20}}{\partial \hat{u}_{10}} & \frac{\partial \hat{f}_{20}}{\partial \hat{u}_{20}} \end{bmatrix}.$$

Устойчивость решений (V.3) по отношению к малым возмущениям определяется знаком вещественных частей собственных значений

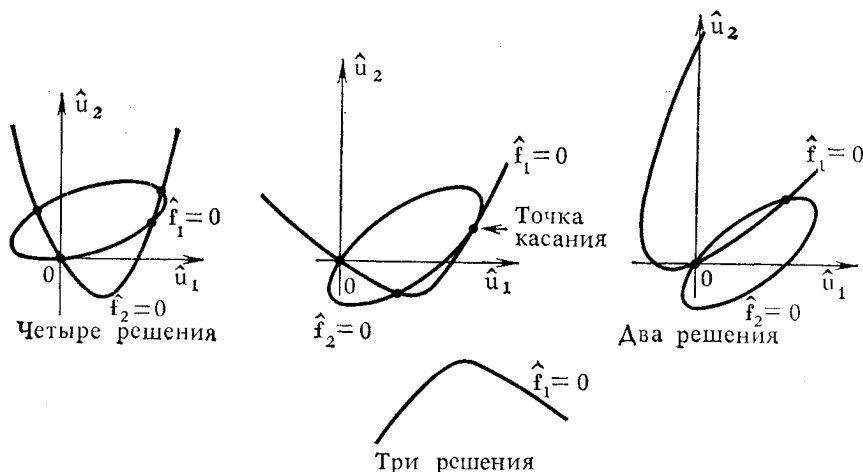


Рис. V.4. Бифуркационные решения вида (V.3) соответствуют гочкам пересечения двух конических сечений (V.28). Бифуркация гарантируется теоремой о неявной функции, если решениям соответствуют точки пересечения, а не точки касания.

$\gamma_1(\mu)$, $\gamma_2(\mu)$ матрицы $\mathcal{Y}(\mu)$. Если μ малó, то

$$(\gamma_1(\mu), \gamma_2(\mu)) = \mu(\gamma_{10}, \gamma_{20}) + o(\mu),$$

где $(\gamma_{10}, \gamma_{20})$ — собственные значения $\mathcal{Y}_0$. Решения (V.3) уравнений $\hat{f}_i(\mu, u_1, u_2) = 0$ устойчивы, когда $\mu > 0$ малó, если $\text{Re } \gamma_{10} < 0$ и $\text{Re } \gamma_{20} < 0$. Если же $\text{Re } \gamma_{10} > 0$ или $\text{Re } \gamma_{20} > 0$, то решения (V.3) неустойчивы.

Теорема о неявной функции гарантирует существование бифуркации для μ , близких к нулю, если удовлетворяются уравнения (V.29) и

$$\det \mathcal{Y}_0 = \gamma_{10}\gamma_{20} \neq 0. \quad (\text{V.30})$$

Это условие не выполняется в точке касания (см. рис. V.4). Если $\det \mathcal{Y}_0 < 0$, то или $\gamma_{10} > 0$, или $\gamma_{20} > 0$, и одно из двух собственных значений

$$\gamma_1(\mu) = \gamma_{10}\mu + O(|\mu|^2) \quad (\text{V.31})_1$$

или

$$\gamma_2(\mu) = \gamma_{20}\mu + O(|\mu|^2) \quad (V.31)_2$$

будет положительным, когда $|\mu|$ мало. Поэтому отсюда следует, что бифуркационное решение (V.3) неустойчиво с обеих сторон от критического значения, если $\det \mathcal{Y}_0 < 0$ (как на рис. V.1(б)).

Если γ_{10} вещественное и $\det \mathcal{Y}_0 < 0$, то γ_{10} и γ_{20} одновременно положительные или одновременно отрицательные. Тогда уравнение

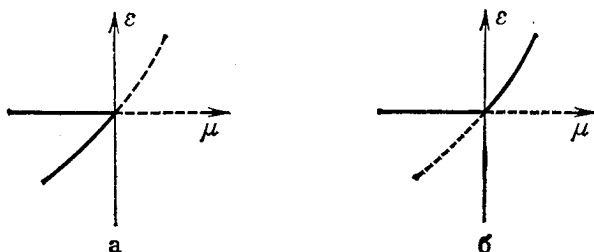


Рис. V.5. Распределение устойчивости, когда $\det \mathcal{Y}_0 > 0$, а собственные значения вещественные. Здесь $\varepsilon = u_1$ или $\varepsilon = u_2$. В (а) суперкритическое решение неустойчиво, а субкритическое решение устойчиво.

(V.31) показывает, что бифуркационное решение устойчиво с одной стороны от критической точки и неустойчиво с другой ее стороны (см. рис. V.5).

Случай, когда $\gamma_{20} = \bar{\gamma}_{10}$ комплексное, не столь очевидным образом связан с $\mathcal{Y}_0$. В этом случае двойное собственное значение распадается на пару комплексно-сопряженных, как на рис. IV.3 (г) (где следует заменить σ на γ). В этом случае, если $\operatorname{Re} \gamma_{10} = \operatorname{Re} \gamma_{20} \neq 0$ (след $\mathcal{Y}_0 \neq 0$), мы имеем тот же тип анализа устойчивости, что и на рис. V.5.

§ V.9. Примеры анализа устойчивости в двойном полупростом (с индексом, равным единице) собственном значении

Дадим теперь некоторые простые примеры, в которых два конических сечения пересекаются или в четырех точках (включая начало), или в двух различных простых точках, не лежащих в бесконечности (см. упражнения для других случаев). Ограничимся, кроме того, случаем, когда нулевое решение устойчиво при $\mu < 0$ и теряет устойчивость при $\mu > 0$

Пример V.1

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \mu u_1 - \mu u_2 - u_1^2 + u_2^2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu u_2 + u_1 u_2. \end{aligned}$$

Конические сечения § V.8 пересекаются в точках $(0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-1, -1)$. Линейная теория устойчивости может быть применена для каждой точки.

Находим, что $(0, 0)$ есть узел (устойчивый при $\mu < 0$ и неустойчивый при $\mu > 0$), а μA , μB , μC представляют собой седловые точки, и поэтому бифуркационные решения неустойчивы с обеих сторон от $\mu = 0$.

Пример V.2

$$\frac{du_1}{dt} = 3\mu u_1 - 5\mu u_2 - u_1^2 + u_2^2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = 2\mu u_1 - u_1 u_2.$$

Конические сечения § V.8 пересекаются в точках $(0, 0)$ и $A = (0, 5)$. Начало и бифуркационное решение μA являются фокусами с одним и тем же характером устойчивости. (Устойчивые при $\mu < 0$ и неустойчивые при $\mu > 0$.)

Пример V.3

$$\frac{du_1}{dt} = 3\mu u_1 - 3\mu u_2 - u_1^2 + u_2^2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mu u_1 - u_1 u_2.$$

Конические сечения § V.8 пересекаются в точках $(0, 0)$, $A = (2, 1)$, $B = (0, 3)$, $C = (1, 1)$. Бифуркационное решение μB и начало являются фокусами с одинаковым характером устойчивости (устойчивые при $\mu < 0$ и неустойчивые при $\mu > 0$). Бифуркационное решение μA представляет собой узел, устойчивый при $\mu > 0$ и неустойчивый при $\mu < 0$, а решение μC есть седловая точка, неустойчивая как при $\mu > 0$, так и при $\mu < 0$.

Пример V.4

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_1 - u_1^2 - u_1 u_2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = -2\mu u_1 + 2\mu u_2 + u_1 u_2 - u_2^2.$$

Конические сечения § V.8 пересекаются в точках $(0, 0)$, $A = (-1, 2)$, $B = (0, 2)$, $C = (1/2, 1/2)$. Бифуркационное решение μB представляет собой узел, подобный началу, но с противоположным характером устойчивости (устойчивый при $\mu > 0$ и неустойчивый при $\mu < 0$). Два других бифуркационных решения представляют собой седловые точки (неустойчивые как при $\mu > 0$, так и при $\mu < 0$).

Пример V.5

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_2 + u_1 u_2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\mu u_1 + \mu u_2 + u_1^2 + u_2^2.$$

Конические сечения § V.8 пересекаются в точках $(0, 0)$ и $A = (1, 0)$. Начало является фокусом (устойчивым при $\mu < 0$ и неустойчивым при $\mu > 0$), а бифуркационное решение μA представляет собой седло (неустойчивое как при $\mu < 0$, так и при $\mu > 0$).

Комментарий к примерам V.1—5. Некоторые общие свойства устойчивости бифуркационных решений можно установить из следующей геометрической интерпретации задачи на собственные значения для $\mathcal{Y}_0$. Рассмотрим точки пересечения двух конических сечений

$$\hat{f}_{10}(\hat{u}_{10}, \hat{u}_{20}) = 0, \quad \hat{f}_{20}(\hat{u}_{10}, \hat{u}_{20}) = 0$$

и предположим, что во всех таких точках не происходит взаимного касания кривых. Тогда

$$\begin{aligned} \det \mathcal{Y}_0 &= \frac{\partial \hat{f}_{20}}{\partial \hat{u}_{10}} \frac{\partial \hat{f}_{10}}{\partial \hat{u}_{20}} - \frac{\partial \hat{f}_{10}}{\partial \hat{u}_{20}} \frac{\partial \hat{f}_{20}}{\partial \hat{u}_{10}} = \\ &= (\nabla \hat{f}_{10} \wedge \nabla \hat{f}_{20}) \cdot \hat{k} = \gamma_{10} \gamma_{20}, \end{aligned}$$

где $\hat{k} = \hat{i} \wedge \hat{j}$, $\hat{i}$ и $\hat{j}$ — ортонормированные базисные векторы, направленные вдоль координатных осей, а

$$\nabla \hat{f}_{10} = \left(\frac{\partial \hat{f}_{10}}{\partial \hat{u}_{10}}, \frac{\partial \hat{f}_{10}}{\partial \hat{u}_{20}} \right)$$

— вектор градиента $\hat{f}_{10}$ в точке пересечения и, следовательно, ортогональный коническому сечению ($\hat{f}_{10} = 0$).

Каждое коническое сечение имеет однозначную кривизну (кривизна равна нулю, если коническое сечение является произведением прямых), поэтому если взять две *последовательные* (невыврожденные) точки пересечения на одной регулярной дуге какого-либо из этих конических сечений (см. рис. V.6), то векторы $\nabla \hat{f}_{10} \wedge \nabla \hat{f}_{20}$ будут иметь противоположные направления в этих точках.

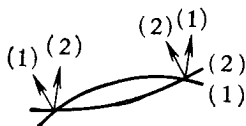


Рис. V.6.

Для случая пересекающихся гипербол мы должны проводить различие между случаем, когда асимптоты гипербол перемежаются, как на рис. V.7, и противоположным случаем, представленным на рис. V.8. По этим рисункам замечаем, что знаки $\det \mathcal{Y}_0$ в точках пересечения

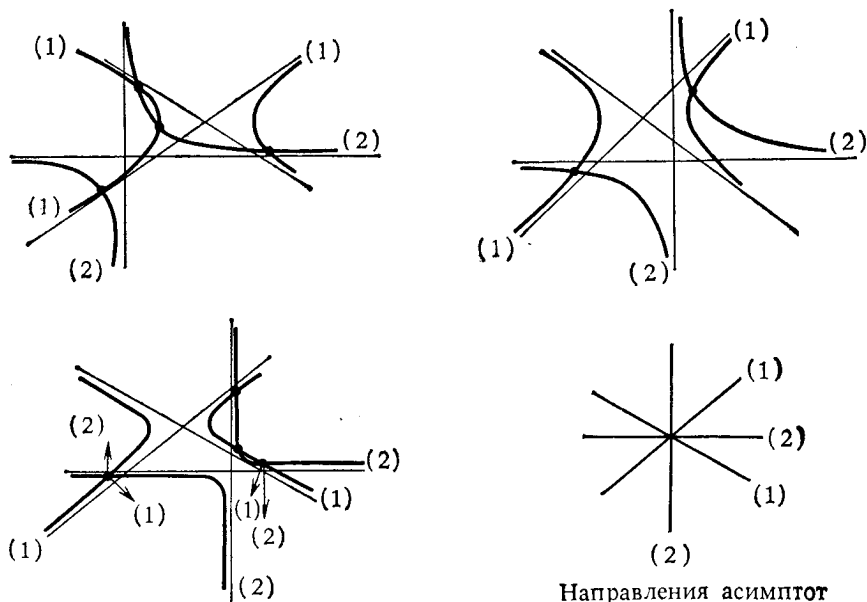


Рис. V.7.

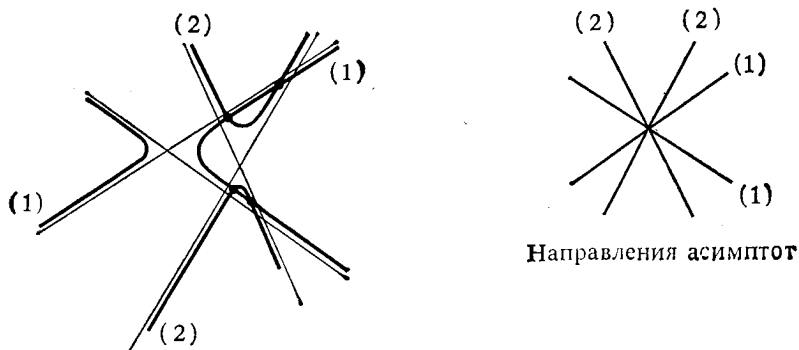


Рис. V.8.

(включая начало) имеют следующие распределения:

- 1) $(+, +, +, -)$, или $(-, -, -, +)$, или $(+, +)$, или $(-, -)$
 для двух гипербол с перемежающимися асимптотами и
 2) $(+, +, -, -)$ или $(+, -)$ в другом случае.

Этот результат строго доказан в статье Маклеода и Саттингера (1973) (ссылку см. в § V.7).

В примере V.1 определитель имеет знаки $(+, -, -, -)$, в примере V.2—знаки $(+, +)$, в примере V.3 $(+, +, +, -)$; при этом во всех примерах началу приписывается знак «+».

В примере V.5 знаки имеют распределение $(+, -)$, тогда как для примера V.4 имеем $(+, +, -, -)$, где началу соответствует знак «+».

Устойчивость решения, для которого якобиан имеет знак «+», остается неопределенной, и из этих результатов нельзя установить

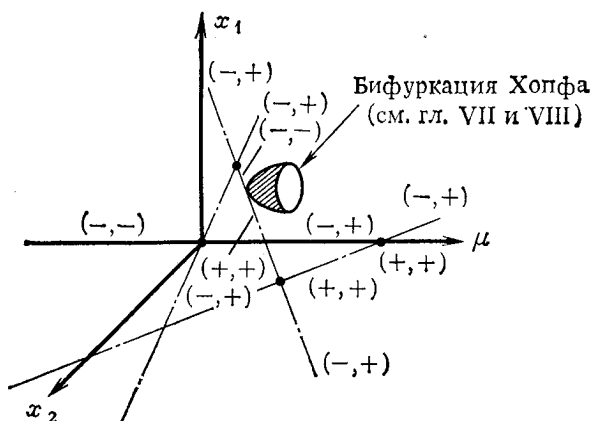


Рис. V.9.

связь между устойчивостью различных решений, для которых якобиан имеет знак «+».

Пример V.6. Рассмотрим дифференциальную систему в $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu x_1 - x_1^2 - 2x_1 x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (\mu - \sigma) x_2 + x_1 x_2 + x_2^2,$$

где σ —фиксированный параметр, а μ —бифуркационный параметр. Если $\sigma=0$, то нуль—двойное полупростое собственное значение линеаризованного оператора при $\mu=0$. Если считать, что $\sigma > 0$, то решения можно представить как на рис. V.9. Эти решения даются значениями

- (1) $x_1=0, \quad x_2=0;$
- (2) $x_1=0, \quad x_2=\sigma-\mu;$
- (3) $x_1=\mu, \quad x_2=0;$
- (4) $x_1=2\sigma-3\mu, \quad x_2=2\mu-\sigma.$

Точки $x_1=0, x_2=\sigma/3$ при $\mu=2\sigma/3$ и $x_1=\sigma/2, x_2=0$ при $\mu=\sigma/2$ являются точками вторичной бифуркации.

Для определения характера устойчивости стационарного решения установим знаки вещественных частей двух собственных значений для этого решения. Эти знаки указаны на рис. V.9. Решение (4) устойчиво $(-, -)$ для суперкритических точек $\mu > \sigma/2$ вблизи точки $(x_1, x_2) = (\sigma/2, 0)$ вторичной бифуркации и неустойчиво $(+, +)$ для субкритических точек $\mu < 2\sigma/3$, близких к точке $(x_1, x_2) = (0, \sigma/3)$ вторичной бифуркации. Между этими двумя точками два комплексно-сопряженных собственных значения пересекают мнимую ось. Для того чтобы это показать, положим

$$(x_1, x_2) = (2\sigma - 3\mu + x'_1, 2\mu - \sigma + x'_2),$$

где (x'_1, x'_2) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx'_1}{dt} = (3\mu - 2\sigma)(x'_1 + 2x'_2) - x'^2_1 - 2x'_1x'_2,$$

$$\frac{dx'_2}{dt} = (2\mu - \sigma)(x'_1 + x'_2) + x'_1x'_2 + x'^2_2.$$

Собственные значения линеаризованной системы удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_1\gamma_2 = (2\mu - \sigma)(2\sigma - 3\mu) > 0,$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 5\mu - 3\sigma.$$

Если $\mu = 3\sigma/5$, то два собственных значения лежат на мнимой оси.

В гл. VII и VIII будет показано, что при пересечении парой комплексно-сопряженных собственных значений мнимой оси рождается периодическое по времени решение исходной задачи. Это обстоятельство известно как бифуркация Хопфа¹⁾. В этом примере третичная бифуркация является вырожденной: она имеет место для единственного значения $\mu = 3\sigma/5$. Если в дифференциальной системе добавить члены более высокого порядка, то получим невырожденную бифуркацию Хопфа, как показано на рис. V.9.

Дополнение V.1. Теорема о неявной функции для системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями от одной переменной

Рассмотрим следующую систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \varepsilon) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \varepsilon) &= 0, \end{aligned} \tag{V.32}$$

где f_1 и f_2 — непрерывно дифференцируемы в открытом «кубе»: $A_1 < x_1 < B_1$, $A_2 < x_2 < B_2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$. Пусть

$$f_1(x_{10}, x_{20}, \varepsilon_0) = f_2(x_{10}, x_{20}, \varepsilon_0) = 0, \tag{V.33}$$

¹⁾ Подробные исследования этой бифуркации были проведены А. М. Ляпуновым и А. А. Андроновым (см. предисловие редакторов перевода к русскому изданию книги Марседена и Мак-Кракена, упомянутой в литературе к гл. I).

$A_1 < x_{10} < B_1$, $A_2 < x_{20} < B_2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon_2$ и предположим, что матрица Якоби

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (\text{V.34})$$

вычисленная в точке $(x_{10}, x_{20}, \varepsilon_0)$, имеет отличный от нуля определитель: $\det \mathcal{Y} \neq 0$. Тогда существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что имеют место следующие утверждения:

(1) Существует единственная пара функций x_1 и x_2 , определенных для $\varepsilon_0 - \alpha < \varepsilon < \varepsilon_0 + \alpha$ и удовлетворяющих условиям $x_{i0} - \beta < x_i(\varepsilon) < x_{i0} + \beta$, $i = 1, 2$, и $f_i(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $i = 1, 2$.

(2) Кроме того, x_1 и x_2 непрерывно дифференцируемы для $\varepsilon_0 - \alpha < \varepsilon < \varepsilon_0 + \alpha$ и

$$\begin{bmatrix} x'_1(\varepsilon) \\ x'_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\mathcal{Y}^{-1}(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \varepsilon) \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial f_2(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \end{bmatrix}. \quad (\text{V.35})$$

Если f_1 и f_2 — аналитические функции всех своих переменных, то $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$ аналитичны вблизи $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Замечание. Этой теоремы достаточно для наших целей. Ее доказательство при более общих предположениях можно найти в любом курсе по математическому анализу.

К условию $\det \mathcal{Y} \neq 0$ мы также приходим при использовании правила Крамера для решения системы уравнений относительно старших производных от $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$. Если все производные от $f_i(x_1, x_2, \varepsilon)$ до порядка n известны в точке $(x_{10}, x_{20}, \varepsilon_0)$, а также известны $\partial^k x_j(\varepsilon_0)/\partial \varepsilon^k$, $j = 1, 2$, $k = 1, \dots, n-1$, то n -я производная от $f(x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon), \varepsilon)$, равная нулю, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial^n x_1}{\partial \varepsilon^n} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial^n x_2}{\partial \varepsilon^n} + g_1 &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial^n x_1}{\partial \varepsilon^n} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial^n x_2}{\partial \varepsilon^n} + g_2 &= 0, \end{aligned}$$

где g_1 и g_2 содержат только известные производные низшего порядка. Согласно правилу Крамера, эти уравнения можно разрешить, если $\det \mathcal{Y} \neq 0$.

Функции $x_1(\varepsilon)$ и $x_2(\varepsilon)$ можно построить в виде степенных рядов по ε до порядка, обеспечиваемого условиями их дифференцируемости. В качестве упражнения читателю рекомендуется показать, что это построение можно выполнить, если $\det \mathcal{Y} \neq 0$.

Упражнения

V.1 (см. § V.5). Рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 + \mu (a'_1 u_1 + b'_0 u_2) + \alpha_{10} u_1^2 + 2\beta_{10} u_1 u_2 + \gamma_{10} u_2^2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mu d'_0 u_2 + \alpha_{20} u_1^2 + 2\beta_{20} u_1 u_2 + \gamma_{10} u_2^2,$$

где $\alpha_{20} \neq 0$.

(I) Построить стационарное бифуркационное решение $(u_1(\mu), u_2(\mu))$ в форме

$$u_i(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{in} \mu^n, \quad i = 1, 2.$$

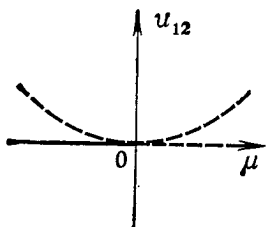


Рис. V.10.

Отметим, что мы имеем случай, в котором нуль — двойное собственное значение линеаризованного оператора при $\mu=0$ с индексом 2 и $c'_0=0$, как в § V.5.

Указание. Сначала покажите, что $u_{21}=u_{11}=u_{22}=0$, $u_{12}=a'_0 d'_0 / \alpha_{20}$ и т. д.

(2) Пусть нулевое решение устойчиво при $\mu < 0$ и строго теряет устойчивость, когда μ при возрастании переходит через нуль (с $a'_0 > 0$ и $d'_0 > 0$). Покажите тогда, что бифуркационное решение *неустойчиво* при $\mu < 0$ и при $\mu > 0$, если $|\mu|$ мало (см. рис. V.10).

V.2. Рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_1 + 2u_1 u_2 + u_1^2 + O(|\mu| \|u\|^2 + |\mu|^2 \|u\| + \|u\|^3),$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mu u_2 - u_1 u_2 + u_2^2 + O(|\mu| \|u\|^2 + |\mu|^2 \|u\| + \|u\|^3),$$

описываемую теорией, построенной в § V.7 и § V.8.

(I) Покажите, что если искать бифуркационные решения в форме

$$u_1 = \varepsilon, \quad u_2 = \varepsilon y(\varepsilon), \quad \mu = \varepsilon \lambda(\varepsilon),$$

то получатся *только два* стационарных решения, отвечающих от нулевого решения:

$$(1) \quad u_1 = \varepsilon, \quad u_2 = O(\varepsilon^2), \quad \mu = -\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

$$(2) \quad u_1 = \varepsilon, \quad u_2 = -2\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \mu = 3\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

(II) Покажите, что если искать бифуркационные решения в форме

$$u_2 = \varepsilon, \quad u_1 = \varepsilon x(\varepsilon), \quad \mu = \varepsilon \lambda(\varepsilon),$$

то также получатся два бифуркационных решения. Первое совпадает с (2). Второе имеет другой вид: (3) $u_1 = O(\varepsilon^2)$, $u_2 = \varepsilon$, $\mu = -\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

(III) Покажите, что если искать бифуркационные решения в форме

$$u_1 = u_1(\mu), \quad u_2 = u_2(\mu),$$

то получатся одновременно три решения (1), (2), (3).

Замечание. Здесь имеют место соотношения $d'_0\gamma_{10} - b'_0\gamma_{20} = 0$ и $c'_0\alpha_{10} - a'_0\alpha_{20} = 0$, из которых следует, что в случаях (I) и (II) «кубическое уравнение» (V.26) приводится к квадратному уравнению.

V.3. Рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_1 + \mu u_2 + u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^3,$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mu u_1 - \mu u_2 + 2u_1^2 - 2u_1 u_2,$$

описываемую теорией, построенной в § V.7 и § V.8.

(I) Покажите, используя метод § V.8, что получатся только два ненулевых бифуркационных решения: (1) $u_1 = -\mu + O(\mu^2)$, $u_2 = -\mu + O(\mu^2)$, (2) $u_1 = -\frac{1}{2}\mu + O(\mu^2)$, $u_2 = \frac{1}{2}\mu + O(\mu^2)$.

(II) Покажите, что метод § V.7 дает третье бифуркационное решение вида (3): $u_2 = \varepsilon$, $u_1 = \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$, $\mu = -2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

Замечание. Это решение обусловлено тем обстоятельством, что два конических сечения

$$u_1 + u_2 + u_1^2 + u_1 u_2 = 0,$$

$$u_1 - u_2 + 2u_1^2 - 2u_1 u_2 = 0$$

имеют общую асимптоту. Эта общая асимптота отвечает третьему решению, построенному в (II) методом § V.7 при $\lambda_0 = 0$.

V.4. Рассмотрим систему ($S_{\pm}$)

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_1 - \mu u_2 - u_1^2 + u_2^2 \pm \mu u_1 u_2^2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\mu u_2 + u_1^2 + u_2^2,$$

которая описывается теорией § V.7 и § V.8. Построить стационарные решения

$$(1) u_1 = u_2 = 0,$$

$$(2) u_1 = 0, u_2 = \mu$$

и показать, что (3) не существует других решений системы (S_+), а система (S_-) имеет два других решения.

V.5. Рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_2 + u_1(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\mu u_1 + u_2(u_1^2 + u_2^2),$$

которая описывается теорией § V.7 и § V.8. Покажите, что бифуркация отсутствует.

Замечание. В этом случае «конические сечения» вырождаются и метод неприменим.

V.6. (Вторичная бифуркация, получаемая при расщеплении двойного полупростого собственного значения, сохраняющего симметрию.) Рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = \mu u_1 - u_1^2 + u_2^2,$$

$$\frac{du_2}{dt} = \mu u_2 - c u_1 u_2, \quad c \neq 0, 1,$$

(1)

которая инвариантна относительно преобразования $u_2 \rightarrow -u_2$. Эта система описывается теорией § V.8.

(1) Покажите, что два конических сечения представляют собой гиперболы, пересекающиеся в двух точках (включая $(0,0)$), если $c > 1$, или в четырех точках, если $c < 1$. Покажите, что направления их асимптот чередуются (как в примерах V.1—3 в § V.9). Покажите, что стационарные бифуркационные решения имеют вид

$$(u_1, u_2) = (\mu, 0), \left(\frac{\mu}{c}, \frac{\mu}{c} \sqrt{1-c} \right), \left(\frac{\mu}{c}, -\frac{\mu}{c} \sqrt{1-c} \right).$$

(2) Исследуйте устойчивость нулевого решения и бифуркационных решений ($c \neq 0, 1$). При $c > 1$ покажите, что начало и бифуркационные решения представляют собой узлы с разным характером устойчивости. При $c < 1$ покажите, что начало является узлом (устойчивым при $\mu < 0$ и неустойчивым при $\mu > 0$); $(\mu, 0)$ — седло, а $(\mu/c, \pm (\mu/c) \sqrt{1-c})$ представляют собой седловые точки, если $c < 0$, и узлы, если $0 < c < 1$ (устойчивые при $\mu > 0$ и неустойчивые при $\mu < 0$).

(3) Рассмотрим теперь систему «с дефектом»

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \mu u_1 - u_1^2 + u_2^2 + \alpha, \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu u_2 - c u_1 u_2 + \beta u_2, \end{aligned} \quad (2)$$

которая получается в результате возмущения системы (1) при добавлении возмущений, сохраняющих инвариантность относительно преобразования $u_2 \rightarrow -u_2$. Задача теперь заключается в том, чтобы

Рис. V.11.

показать, как при возмущении происходит бифуркация, описываемая условиями раздела (1).

Покажите, что стационарные решения (2) даются в (u_1, u_2, μ) -пространстве двумя коническими сечениями, определяемыми уравнениями $u_2 = 0, \mu u_1 - u_1^2 + \alpha = 0$ (гипербола с центром в 0, лежащая в плоскости $u_2 = 0$) и

$$\mu = c u_1 - \beta, (c-1) u_1^2 + u_2^2 - \beta u_1 + \alpha = 0,$$

что определяет эллипс при $c > 1$ и гиперболу при $c < 1$, лежащие в плоскости, параллельной оси u_2 (см. рис. V.11). Заметим, что если $\mu^2 > -4\alpha$ и

$$\frac{1}{c^2} (\mu + \beta)^2 - \frac{\mu}{c} (\mu + \beta) - \alpha > 0,$$

то существуют четыре стационарных решения (u_1, u_2) уравнений (2). Покажите, что если $\beta^2 + 4\alpha(1-c) > 0$, то существуют две бифуркации («вторичные бифуркации»), а если $\beta^2 + 4\alpha(1-c) < 0$, то существуют 3 или 4 изолированные ветви в зависимости от того, будет ли $c > 1$ или $c < 1$, и здесь отсутствует бифуркация.

Замечание. Вообще говоря, дефект, вносимый в систему, имеющую бифуркацию в двойном собственном значении, разрушает бифуркацию, как и в одномерных задачах. Параметром, который описывает вносимый в систему дефект, является α . Если $\alpha = 0$, то мы получаем вторичную бифуркацию для всех $\beta \neq 0$, где β есть параметр, который расщепляет двойное собственное значение $\sigma = 0$ при $\mu = 0$ спектральной задачи, связанной с анализом устойчивости решения $(u_1, u_2) = 0$,

на два простых собственных значения $\sigma = \mu$ и $\sigma = \mu + \beta$. Мы получим вторичную бифуркацию, если расщепим двойное собственное значение, зависящее от β , и сохраним симметрию $u_2 \rightarrow -u_2$ системы (2). Первыми, кто заметил, что расщепление кратных собственных значений может приводить к вторичной бифуркации, были Л. Бауэр, Г. Келлер и Э. Райсс (Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation, *SIAM Review*, 17, 101, 1975). Первыми, кто указал на важность



Рис. V.12. Фазовый портрет решений системы (1)

симметрии при образовании вторичной бифуркации при сообщении расщепляющих возмущений, были М. Голубицкий и Д. Шэффер (Imperfect bifurcation in the presence of symmetry, *Com. Math. Phys.*, 67, 205—232, 1979) и М. Шерп (Secondary bifurcation near a double eigenvalue, *SIAM J. Math. Anal.*, 11, No. 2, 365—389, 1980).

V.7. (Периодические орбиты, ответвляющиеся от начала в двойном собственном значении с индексом 2.) Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \mu c_0 u_1 + \alpha_{20} u_1^2, \quad c_0' > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

принадлежащую к классу систем, исследованных в § V.5, V.6.

(1) Вычислить и исследовать устойчивость стационарного бифуркационного решения (V.2). (Если $\mu < 0$, то $(u_1, u_2) = (0, 0)$ — центр, тогда как (V.2) — седло; если $\mu > 0$, то ситуация обратная.)

(2) Проинтегрируйте нелинейное уравнение второго порядка, эквивалентное системе (1), и покажите, что для каждого μ существует бесконечное число периодических решений системы (1). (См. рис. V.12.)

Замечание. Система (1) имеет вид $\dot{u}_l = f_l(u_1, u_2, \mu)$, $l = 1, 2$, и обладает специальным свойством $(\partial f_1 / \partial u_1 + \partial f_2 / \partial u_2) = 0$. Благодаря этому свойству система (1) является консервативной, а не диссипативной. В консервативных системах решения не могут обладать асимптотической устойчивостью, и эти системы могут иметь другие специальные свойства. Такие системы не будут рассматриваться в этой книге.

V.8. Предположим, что квадратичные члены не содержатся в $f_1(\mu, u_1, u_2) = 0$ и $f_2(\mu, u_1, u_2) = 0$, а кубические члены содержатся. Покажите, что, вообще говоря, имеются 0, 2 или 4 бифуркационные ветви.

Указание. Вспомните, что кривые третьего порядка пересекаются в 1, 3, 5, 7 или 9 точках, и воспользуйтесь симметрией.

МЕТОДЫ ПРОЕКЦИИ ДЛЯ ОБЩИХ ЗАДАЧ БИФУРКАЦИИ В СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Теперь хотелось бы аккуратно показать, как задачи высокой размерности, дифференциальные уравнения в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения на основе методов проекции приводятся к одно- и двумерным задачам.

Лучше начать с задачи, которая уже была рассмотрена в гл. V, воспользовавшись другими обозначениями, а именно с задачи бифуркации в стационарные решения в $\mathbb{R}^2$, если собственные значения $f_a(0|\cdot) = A(0)(\cdot)$ вещественные и различные. Эта задача, в сущности, является одномерной после проектирования, связанного с собственным значением $\xi_1(0) = 0$ в критической точке и собственным вектором x_1 и сопряженным вектором y_1 . Для большей эффективности лучше излагать это доказательство проекции бифуркационной задачи в $\mathbb{R}^1$ в обозначениях, которые можно непосредственно распространить на задачу бифуркации в вещественном простом собственном значении для бесконечномерных задач, таких как задачи, которые возникают при исследовании дифференциальных уравнений в частных производных.

§ VI.1. Эволюционное уравнение и спектральная задача

Запишем сначала эволюционную задачу, пользуясь опять функциональными обозначениями, введенными в (1.21):

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u) = f_a(\mu|u) + \frac{1}{2} f_{aa}(\mu|u|u) + O(\|u\|^3), \quad (\text{VI.1})$$

где $f_a(\mu|u) = A(\mu) \cdot u$ и т. д., как в (1.22). Сейчас мы рассматриваем (VI.1) как двумерную задачу, исследованную в качестве случая (1) в гл. V. Спектральная задача, связанная с анализом устойчивости решения $u=0$, уже была получена в гл. IV. Малое возмущение $v = e^{\sigma(\mu)t} x$ удовлетворяет уравнениям $v = f_a(\mu|v)$ и

$$\sigma(\mu) x = f_a(\mu|x). \quad (\text{VI.2})$$

Мы считаем, что в $\mathbb{R}^2$ оператор $A(\mu) = f_a(\mu|\cdot)$ имеет два различных вещественных собственных значения $\xi_1(\mu)$ и $\xi_2(\mu)$ и два собственных вектора $x_1(\mu)$ и $x_2(\mu)$ (см. § IV.2).

Поэтому

$$\xi_j(\mu) x_j = f_a(\mu | x_j), \quad j = 1, 2, \quad (\text{VI.3})$$

для μ из интервала, содержащего нуль. Задача, сопряженная с (VI.2) относительно скалярного произведения (IV.7), есть

$$\bar{\sigma}(\mu) y = f_a^*(\mu | y), \quad (\text{VI.4})$$

где $f_a^*(\mu | \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} [f_a(\mu | \cdot)]^*$ — линейный оператор, сопряженный с f_a относительно скалярного произведения $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$, которое для $\mathbb{C}^n$ было введено в § IV.3. Определим f_a^* соотношением

$$\langle a, f_a(\mu | b) \rangle = \langle [f_a(\mu | a)]^*, b \rangle = \langle f_a^*(\mu | a), b \rangle$$

для всех a и b из соответствующего пространства (f_a^* не обязательно нужно интерпретировать как линеаризацию некоторого f^*). В $\mathbb{R}^n$

$$f_a^*(\mu | \cdot) = A^T(\mu)$$

можно представить в виде матрицы.

При наших предположениях относительно собственных векторов $f_a(\mu | \cdot)$ (VI.4) приводит к соотношениям

$$\xi_i(\mu) y_i = f_a^*(\mu | y_i), \quad i = 1, 2. \quad (\text{VI.5})$$

Если два собственные значения вещественные и различные, то

$$\langle x_j, y_i \rangle = \delta_{ij}.$$

Для критического значения $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) < 0$, $\xi'_1(0) > 0$ и

$$\xi'_1(0) = \langle f_{aa}(0 | x_1), y_1 \rangle \quad (\text{VI.6})$$

(см. рис. IV.3(a)).

VI.2. Построение стационарных бифуркационных решений в виде степенных рядов от амплитуды

Сначала определим амплитуду как проекцию на собственное подпространство, ассоциированное с сопряженным собственным вектором $y_1 = y_1(0)$, принадлежащим собственному значению $\xi_1(0) = 0$:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \langle u, y_1 \rangle. \quad (\text{VI.7})$$

Затем будем разыскивать решения в виде степенных рядов по e :

$$\begin{bmatrix} u(e) \\ \mu(e) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \begin{bmatrix} u_n \\ \mu_n \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.8})$$

Будем предполагать, что $f(\mu, u)$ аналитическая¹⁾ по (μ, u) в окрест-

¹⁾ Если $f(\mu, u)$ достаточно гладкая, но не аналитическая, наше построение дает производные от $u(e)$ и $\mu(e)$ до некоторого порядка, а усеченные ряды Тейлора (VI.8) дают асимптотическое разложение решения.

ности $(0, 0)$. После подстановки (VI.8) в (VI.1) находим в результате приравнивания нулю совокупностей членов одинакового порядка:

$$f_a(0 | u_1) = 0, \quad (VI.9)_1$$

$$f_a(0 | u_2) + 2\mu_1 f_{a\mu}(0 | u_1) + f_{aa}(0 | u_1 | u_1) = 0, \quad (VI.9)_2$$

$$f_a(0 | u_3) + 3\mu_1 f_{aaa}(0 | u_1 | u_1) + 3\mu_1^2 f_{a\mu\mu}(0 | u_1) + \\ + 3\mu_1 f_{a\mu}(0 | u_2) + 3f_{aa}(0 | u_1 | u_2) + \\ + 3\mu_2 f_{a\mu}(0 | u_1) + f_{aaa}(0 | u_1 | u_1 | u_1) = 0, \quad (VI.9)_3$$

и вообще

$$f_a(0 | u_n) + n\mu_{n-1} f_{a\mu}(0 | u_1) + k_n = 0, \quad (VI.9)_4$$

где k_n зависит от членов более низкого порядка. Уравнения (VI.9) необходимо решить, принимая во внимание условие нормировки (VI.7), которое приводит к условиям

$$\langle u_i, y_i \rangle = 1, \quad \langle u_n, y_i \rangle = 0 \quad \text{для } n > 1. \quad (VI.10)$$

Решение задачи (IV.9)₁ и (VI.10) получаем немедленно, так как задача на собственные значения $f_a(0 | u_1) = A(0) \cdot u_1 = 0$ с $\langle u_1, y_1 \rangle = 1$ имеет только одно решение:

$$u_1 = x_1. \quad (VI.11)$$

Таким путем мы исключаем решение $u = 0$ (VI.1).

Другие задачи в общем случае неразрешимы. Однако они могут быть сделаны разрешимыми, если должным образом выбрать производные от $\mu(\epsilon)$. Метод такого выбора описывается ниже.

Теорема о разрешимости (альтернатива Фредгольма). Для заданного $g \in \mathbb{R}^2$ уравнение

$$f_a(0 | u) = g \quad (VI.12)$$

разрешимо относительно $u \in \mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\langle g, y_1 \rangle = 0. \quad (VI.13)$$

Доказательство. Условие (VI.13) необходимо, так как

$$\langle f_a(0 | u), y_1 \rangle = \langle u, f_a^*(0 | y_1) \rangle = 0.$$

Для доказательства достаточности отметим, что $f_a(0 | u) = A(0) \cdot u$, так что

$$a_0 u_1 + b_0 u_2 - g_1 = 0, \\ c_0 u_1 + d_0 u_2 - g_2 = 0. \quad (VI.14)$$

Расписывая в скалярной форме $f_a^*(0 | y_1) = A^T(0) \cdot y_1 = 0$, имеем

$$a_0 y_{11} + c_0 y_{12} = 0, \\ b_0 y_{11} + d_0 y_{22} = 0, \quad (VI.15)$$

$$\langle g, y_1 \rangle = g_1 y_{11} + g_2 y_{12} = 0. \quad (VI.16)$$

Уравнения (VI.15) и (VI.16) показывают, что два уравнения (VI.14) линейно зависимы; в сущности, у нас одно уравнение, и его можно разрешить, например, относительно u_1 для любого заданного значения u_2 . Для того чтобы сделать решение единственным, необходимо добавить какое-нибудь условие нормировки, например условие

$$\langle u, y_1 \rangle = u_1 y_{11} + u_2 y_{12} = k \quad (\text{VI.17})$$

для любого k , скажем, равного 1 или 0, как в (VI.10), или ε , как в (VI.7). Мы получим единственное решение (u_1, u_2) , решая (VI.14) и (VI.17). В действительности достаточно одного из уравнений (VI.14), другое будет удовлетворяться автоматически.

Для (VI.9)₂ условие (VI.13) с учетом (VI.11) принимает вид

$$2\mu_1 \langle f_{uu}(0 | x_1), y_1 \rangle + \langle f_{uu}(0 | x_1 | x_1), y_1 \rangle = 0. \quad (\text{VI.18})$$

Кроме того, из (IV.27) имеем

$$\langle f_{uu}(0 | x_1), y_1 \rangle = \langle A'(0) \cdot x_1, y_1 \rangle = \xi'(0) > 0. \quad (\text{VI.19})$$

Следовательно,

$$2\mu_1 \xi'(0) + \langle f_{uu}(0 | x_1 | x_1), y_1 \rangle = 0. \quad (\text{VI.20})_1$$

Поскольку $\xi'(0) \neq 0$, то (VI.20)₁ можно разрешить относительно μ_1 . Затем можно найти единственное u_2 , удовлетворяющее (VI.9)₂ и (VI.10).

Тем же способом получаем

$$\begin{aligned} 3\mu_2 \xi'_1(0) + 3 \langle f_{uu}(0 | x_1 | u_2), y_1 \rangle + \langle f_{uuu}(0 | x_1 | x_1 | x_1), y_1 \rangle + \\ + 3\mu_1 \langle f_{uuu}(0 | x_1 | x_1), y_1 \rangle + 3\mu_1^2 \langle f_{u\mu\mu}(0 | x_1), y_1 \rangle + \\ + 3\mu_1 \langle f_{uu}(0 | u_2), y_1 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.20})_2$$

что приводит к определению μ_2 и u_3 в результате решения (VI.9)₃ и (VI.10). Вообще уравнение

$$n\mu_{n-1} \xi'_1(0) + \langle k_n, y_1 \rangle = 0 \quad (\text{VI.20})_3$$

служит для определения μ_n и u_{n-1} (в результате решения (VI.9)₄ и (VI.10)) в виде функций от коэффициентов более низкого порядка.

§ VI.3. $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1$ как проекция

Уравнения (VI.19) и (VI.20) представляют собой, по существу, уравнения в $\mathbb{R}^1$, получаемые в проекции на x_1 . Поучительно сравнить эти уравнения с уравнениями, которые имеют место непосредственно в $\mathbb{R}^1$. Для того чтобы провести такое сравнение, положим $F(\mu, \varepsilon) = f(\mu, \varepsilon)$, где $f(\mu, 0)$ приведена к локальной форме. Тогда (II.52) является $\mathbb{R}^1$ -аналогом (VI.19), и если $\sigma_\mu^{(1)}(0)$ заменить на $\xi'_1(0)$, то (II.52) примет вид

$$\xi'_1(0) = f_{\mu\varepsilon}(0, 0) > 0. \quad (\text{VI.21})$$

Мы можем получить μ_n , $n \geq 1$, разлагая $f(\mu, (\varepsilon), \varepsilon)$ по степеням ε при $\varepsilon = 0$. Отождествляя независимые степени ε и используя (VI.21), находим

$$\begin{aligned} 2\mu_1 \xi'_1(0) + f_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0) &= 0, \\ 3\mu_2 \xi'_1(0) + f_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(0, 0) + 3\mu_1 f_{\varepsilon\varepsilon\mu} + 3\mu_1^2 f_{\varepsilon\mu\mu} &= 0, \\ n\mu_{n-1} \xi'_1(0) + k_n &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

где k_n зависит от коэффициентов более низкого порядка. Таким образом, (VI.21) и (VI.22), которые имеют место в $\mathbb{R}^1$, почти тождественны с (VI.19) и (VI.20), полученными в $\mathbb{R}^1$ как проекции.

§ VI.4. Устойчивость бифуркационного решения

Обратимся теперь к исследованию устойчивости стационарных бифуркационных решений в $\mathbb{R}^2$. Для любого стационарного бифуркационного решения $(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon))$ имеем $f(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon)) = 0$. Бесконечно малое возмущение v решения $u(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dv}{dt} = f_u(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | v), \quad (\text{VI.23})$$

где в $\mathbb{R}^2$

$$f_u(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | v) = \mathcal{A}(\varepsilon) \cdot v,$$

а $\mathcal{A}(\varepsilon)$ есть (2×2) -матрица. Полагая $v = e^{\gamma t} \xi$ и используя (VI.23), получаем спектральное уравнение

$$\gamma \xi = f_u(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | \xi). \quad (\text{VI.24})_1$$

В $\mathbb{R}^2$ существуют два собственных значения γ матрицы $\mathcal{A}(\varepsilon)$. Одно из них близко к $\xi_1(0) = 0$, а другое — к $\xi_2(0)$. Если ε близко к нулю, то два собственных значения обязательно вещественные, если $\xi_2(0) \neq 0$, так как комплексные собственные значения должны появляться комплексно-сопряженными парами. Задача на собственные значения, сопряженная к (VI.24), описывается уравнением

$$\bar{\gamma} \xi^* = f_u^*(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | \xi^*). \quad (\text{VI.24})_2$$

где в $\mathbb{R}^2$

$$f_u^*(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | \xi^*) = \mathcal{A}^T(\varepsilon) \cdot \xi^*$$

и $\mathcal{A}^T(\varepsilon)$ — матрица, транспонированная к $\mathcal{A}(\varepsilon)$.

Теорема о факторизации. Пусть $\xi(\varepsilon)$ и $\bar{\xi}^*(\varepsilon)$ — собственные векторы, принадлежащие $\gamma(\varepsilon)$, и пусть $\gamma(\varepsilon)$ — простое собственное значение $f_u(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | \cdot)$ и $\langle u_\varepsilon(\varepsilon), \xi^*(\varepsilon) \rangle \neq 0$. Тогда

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{-\mu_\varepsilon(\varepsilon) \langle f_\mu(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon)), \xi^*(\varepsilon) \rangle}{\langle u_\varepsilon(\varepsilon), \xi^*(\varepsilon) \rangle}, \quad (\text{VI.25})$$

$$\xi(\varepsilon) = \frac{1}{\langle u_\varepsilon(\varepsilon), \xi^*(\varepsilon) \rangle} \{u'(\varepsilon) + \mu_\varepsilon(\varepsilon) q(\varepsilon)\}, \quad (\text{VI.26})$$

где $q(\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению

$$-\frac{\langle f_\mu, \xi^* \rangle}{\langle u_\varepsilon, \xi^* \rangle} u_\varepsilon + f_\mu(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon)) + (\gamma q - f_u(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | q)) = 0 \quad (VI.27)$$

и

$$\langle q(\varepsilon), \xi^*(\varepsilon) \rangle = 0.$$

Кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\mu(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\xi^*(\varepsilon) \rightarrow y_1$, $u_\varepsilon(\varepsilon) \rightarrow x_1$, $\langle f_\mu(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon)), \xi^* \rangle \rightarrow \langle f_{\mu\mu}(0, 0 | x_1), y_1 \rangle \varepsilon = \xi'_1(0) \varepsilon$

и

$$\gamma_\varepsilon(\varepsilon) = -\mu_\varepsilon(\varepsilon) \{ \xi'_1(0) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \}. \quad (VI.28)$$

Доказательство. Так как $f(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon)) = 0$, то после дифференцирования по ε получаем

$$\mu_\varepsilon(\varepsilon) f_\mu(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon)) + f_u(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | u_\varepsilon(\varepsilon)) = 0. \quad (VI.29)$$

Соотношение (VI.25) получается из скалярного произведения $\langle (VI.29), \xi^* \rangle$ с использованием преобразования $\langle f_\mu(\mu, u | u_\varepsilon), \xi^* \rangle = \langle u_\varepsilon, f_u^*(\mu, u | \xi^*) \rangle = \gamma \langle u_\varepsilon, \xi^* \rangle$. Для того чтобы найти (VI.27), подставим (VI.25) и (VI.26) в (VI.24) и исключим $f_u(\mu, u | u_\varepsilon)$ при помощи (VI.29). Тогда произведение $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ на левую часть (VI.27) равно нулю. Теперь можно показать, что функция q_ε , удовлетворяющая (VI.27), является гладкой по ε , а потому все члены левой части (VI.27) представляют собой гладкие функции по ε . Следовательно, $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ есть истинный множитель, и левая часть (VI.27) равна нулю. Чтобы найти решение q задачи (VI.27), сначала нужно решить задачу (VI.24).

Факторизация (VI.25) для $\mathbb{R}^1$ как проекции аналогична факторизации (II.44) для $\mathbb{R}^1$, а (VI.28) для $\mathbb{R}^1$ как проекции совпадает с (II.53) для $\mathbb{R}^1$. Все заключения о локальных свойствах бифуркационных решений являются одними и теми же в $\mathbb{R}^1$ и в $\mathbb{R}^1$ как проекции.

§ VI.5. Добавочная малая часть для $\mathbb{R}^1$ как проекции

Обращаем внимание читателя на то обстоятельство, что члены $3 \langle f_{uu}(0 | x_1 | u_2), y_1 \rangle$ и $3\mu_1 \langle f_{uu}(0 | u_2), y_1 \rangle$ в (VI.20)₂ для $\mathbb{R}^1$ как проекции не имеют прототипов в (VI.22)₂ для $\mathbb{R}^1$. Добавочные члены обусловлены тем обстоятельством, что в $\mathbb{R}^2$ имеется пассивная часть решения, которая влияет на члены высокого порядка посредством нелинейной связи и имеет нулевую проекцию в $\mathbb{R}^1$.

Добавочная малая часть дается членом w в разложении

$$u = a(t) x_1 + w, \quad f_u(\mu | x_1(\mu)) = \xi_1(\mu) x_1(\mu) \quad (VI.30)$$

на составляющую $a(t)x_1$, где $a(t) = \langle u, y_1 \rangle$, и дополнительную часть $\langle w, y_1 \rangle = 0$ с нулевой проекцией. Представляет интерес вывести уравнения для $a(t)$ и w . Запишем (VI.1) в виде

$$\frac{du}{dt} = f_u(\mu | u) + N(\mu, u), \quad (VI.31)$$

где

$$N(\mu, u) = \frac{1}{2} f_{uu}(\mu | u | u) + O(\|u\|^3).$$

Подставляя (VI.30) в (VI.31), находим

$$(a - \xi_1(\mu)a)x_1 + \frac{dw}{dt} = f_u(\mu | w) + N(\mu, u). \quad (VI.32)$$

Так как

$$\left\langle \frac{dw}{dt}, y_1 \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle w, y_1 \rangle = 0$$

и

$$\langle f_u(\mu | w), y_1 \rangle = \langle w, f_u^*(\mu | y_1) \rangle = \xi_1 \langle w, y_1 \rangle = 0,$$

то находим, что проектируемая часть решения удовлетворяет уравнению

$$a - \xi_1(\mu)a = \langle N(\mu, u), y_1 \rangle, \quad (VI.33)$$

тогда как дополнительная часть с нулевой проекцией на x_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = f_u(\mu | w) + \{N(\mu, u) - \langle N(\mu, u), y_1 \rangle x_1\}. \quad (VI.34)$$

Уравнение (VI.34) показывает, что если все собственные значения $f_u(\mu | \cdot)$, кроме $\xi_1(\mu)$, имеют отрицательные вещественные части (в $\mathbb{R}^2$ существует только одно такое собственное значение $\xi_2(\mu) < 0$), то для достаточно больших t имеем $w = O(a^2)$, так как

$$N(\mu, u) = a^2 f_{uu}(\mu | x_1 | x_1) + 2af_{uu}(\mu | x_1 | w) + f_{uu}(\mu | w | w) + O(\|u\|^3).$$

Поэтому (VI.33) можно записать в виде

$$a - \xi_1(\mu)a = \alpha_1(\mu)a^2 + O(a^3), \quad (VI.35)$$

где $\alpha_1(\mu) = \langle f_{uu}(\mu | x_1 | x_1), y_1 \rangle$. В $\mathbb{R}^2$ можно положить

$$w = b(t)x_2, \quad f_u(\mu | x_2) = \xi_2(\mu)x_2$$

и после проектирования результата на y_2 получаем

$$\dot{b} - \xi_2(\mu)b = \{\alpha_2(\mu)a^2 + 2\beta_2(\mu)ab + \gamma_2(\mu)b^2\} + O(|a| + |b|)^3, \quad (VI.36)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_2(\mu) &= \langle f_{uu}(\mu | x_1 | x_1), y_2 \rangle, \\ \beta_2(\mu) &= \langle f_{uu}(\mu | x_1 | x_2), y_2 \rangle, \\ \gamma_2(\mu) &= \langle f_{uu}(\mu | x_2 | x_2), y_2 \rangle.\end{aligned}$$

Амплитуда $b(t)$ составляющей w входит в (VI.35) только в

$$O(a^3) = 2ab\beta_1(\mu) + b^2\gamma_1(\mu) + O(\|u\|^3), \quad (\text{VI.37})$$

где

$$\begin{aligned}\beta_1(\mu) &= \langle f_{uu}(\mu | x_1 | x_2), y_1 \rangle, \\ \gamma_1(\mu) &= \langle f_{uu}(\mu | x_2 | x_2), y_1 \rangle.\end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

Бифуркационные результаты § VI.2 можно получить из (VI.35), (VI.36) и (VI.37). Например, можно найти бифуркационные решения в форме

$$a = \varepsilon, \quad b = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} b_n \varepsilon^n, \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_n \varepsilon^n.$$

§ VI.6. Проекция задач высокой размерности

Мы приступаем к исследованию бесконечномерных задач, в частности описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных и других задач, которые можно рассматривать с помощью эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве, как если бы они были в $\mathbb{R}^n$. Наша цель — показать, что для широкого класса задач высокой размерности бифуркация происходит в пространствах небольшой размерности, $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$, и поэтому мы можем проектировать эти задачи в пространство малой размерности. В $\mathbb{R}^n$ мы используем операторные обозначения, формально тождественные обозначениям, применяемым при исследовании эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве; все формальные операции те же самые. Поэтому результаты, полученные в $\mathbb{R}^n$, справедливы для широкого класса задач в гильбертовом пространстве¹⁾. Тогда остается только показать, что некоторая граничная задача может быть сформулирована как эволюционное уравнение в подходящем гильбертовом пространстве. Такая процедура вполне рутинна для многих часто встречающихся задач континуальной физики, но во всяком случае выходит за рамки этой элементарной книги.

¹⁾ По существу такие же результаты справедливы для задач, в более общей форме описываемых эволюционными уравнениями в банаховых пространствах. Действительно важное свойство, без которого нельзя обойтись, — это альтернатива Фредгольма для разрешимости возмущенных уравнений. В первом примере дополнения VI.1 рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, не вписывающееся в рамки гильбертовых пространств, для которого альтернатива Фредгольма выполняется. Фактически именно на альтернативе Фредгольма основано

В дополнении VI.1 мы дадим несколько примеров формального построения, которые показывают, как следует применять эту теорию для дифференциальных уравнений с частными производными и для интегральных уравнений.

В дальнейшем под H будем понимать множество векторов $\mathbf{u}$, для которых эволюционная задача вполне определена. Например, для системы в $\mathbb{R}^n$ $H = \mathbb{R}^n$; для эволюционного дифференциального уравнения в частных производных H является множеством всех функций, удовлетворяющих граничным условиям и обладающих достаточной гладкостью, обеспечивающей существование пространственных производных и выполнение определенных свойств $\mathbf{f}(\mu, \cdot)$.

Далее будем считать, что H — *пространство Гильберта*. Но тогда, помимо прочего, это есть векторное пространство со скалярным произведением $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, где $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ суть элементы H , которое можно распространить на комплексные элементы, $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle$; оно, вообще говоря, обладает свойствами скалярного произведения (см. § IV.3) в $\mathbb{C}^n$.

Рассмотрим линейный оператор A со значениями в H , областью определения которого является некоторое плотное подмножество в H , как в случае дифференциальных уравнений с частными производными. (Если $H = \mathbb{R}^n$, то A определен для всех элементов из H и может быть выражен при помощи $(n \times n)$ -матрицы.) В общем случае спектральная задача

$$A \cdot \xi = \sigma \xi \text{ для } \xi \text{ из } H \quad (\text{VI.39})$$

имеет смысл и определяет собственные значения σ и собственные векторы ξ . В простейших случаях все значения σ , для которых (VI.39) имеет ненулевые решения, являются изолированными, алгебраически простыми собственными значениями. Трудность состоит в том, что в H могут существовать бесконечно много собственных значений и даже континуум. Даже в случае, если исключить континуальные собственные значения, может случиться, что все решения линейной эволюционной задачи

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = A \cdot \mathbf{v} \text{ в } H \quad (\text{VI.40})$$

нельзя представить линейными комбинациями (даже бесконечными комбинациями) членов, пропорциональных $e^{\sigma n t} \xi_n$. В наиболее простом случае, когда спектр состоит из простых собственных значений

утверждение, что для тех задач, для которых она справедлива и действие переносится в нуль-пространство некоторого линейного оператора, та часть задачи, проекция которой в нуль-пространство нулевая, подобна маленькому хвосту резвой собаки. Поэтому ни в каком смысле использование здесь гильбертова пространства не является существенным; это лишь один из способов показать, что анализ, проводимый нами в $\mathbb{R}^n$, справедлив и в более общем случае, например в гильбертовом пространстве.

и $\mathbf{A}$ удовлетворяет другим требованиям, часто встречающимся в приложениях (например, в $\mathbb{R}^n$ и для полей, определенных на ограниченных областях пространства, которые описываются уравнениями типа реакции-диффузии или типа уравнений Навье—Стокса), решения можно представить такими линейными комбинациями, как в (VI.57).

На самом деле наша теория имеет большую область применения; мы не требуем, чтобы решения можно было представить в виде таких линейных комбинаций. Достаточно, чтобы эволюционная задача обладала одним решением вида $e^{\sigma_1 t} \xi$, где σ_1 — *изолированное собственное значение*, обладающее следующими свойствами.

(1) Не существует значений σ , для которых уравнение (VI.39) имело бы ненулевые решения и вещественная часть которых была бы больше, чем σ_1 .

(2) σ_1 имеет конечную кратность и конечный индекс Риса (определения индекса и кратности даны в гл. IV).

(3) Свойствами (1) и (2) должны обладать собственные значения $\bar{\sigma}$ сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$, удовлетворяющего условию

$$\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{v} \rangle \quad (\text{VI.41})$$

для всех $\mathbf{u}$ из области определения оператора $\mathbf{A}$ и всех $\mathbf{v}$ из области определения оператора $\mathbf{A}^*$.

Тогда, как и в дополнении IV.1, можно найти в H элементы $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, n}$, $\{\psi_i^*\}_{i=1, \dots, n}$, удовлетворяющие соотношениям

$$(\sigma \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \psi_i = 0,$$

$$(\bar{\sigma} \mathbf{I} - \mathbf{A}^*) \psi_i^* = 0,$$

и

$$\langle \psi_i, \psi_j^* \rangle = \delta_{ij}, \quad (\text{VI.42})$$

где n — кратность собственного значения, а v — его индекс Риса. Кроме того, как в дополнении VI.2, можно определить проекцию $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{u}, \psi_i^* \rangle \psi_i, \quad (\text{VI.43})$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{VI.44})$$

для любого $\mathbf{u}$ в H^1 . Действительно, (VI.43) и (VI.44) выражают фундаментальные свойства проекций в общем случае.

Во всех наших задачах кратность и индекс Риса не будут больше двух, и поэтому размерность проекции $\mathbf{P}$ будет равна единице или двум. В этих задачах часто удобнее оперировать с компонентами $\langle \mathbf{u}, \psi_i^* \rangle$ проекции, чем с самой проекцией.

¹⁾ В области определения оператора $\mathbf{A}$ для $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$.

§ VI.7. Спектральная задача для анализа устойчивости решения $u=0$

Теперь мы будем рассматривать эволюционное уравнение

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u), \quad f(\mu, 0) = 0, \quad u \in H. \quad (\text{VI.45})$$

Малое возмущение $v = e^{\sigma t} \xi$ решения $u=0$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dv}{dt} = f_u(\mu | v), \quad \sigma \xi = f_u(\mu | \xi), \quad (\text{VI.46})$$

где

$$f_u(\mu | \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(\mu, 0 | \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} A(\mu)(\cdot)$$

— линейная часть $f(\mu, u)$, вычисленная в точке $u=0$, а $f_u(\mu | \cdot)$ — линеаризованный оператор, введенный в § VI.6. Собственные значения

$$\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu) \quad (\text{VI.47})$$

оператора $f_u(\mu | \cdot)$ удовлетворяют уравнению $(\text{VI.46})_2$ для ненулевого ξ . Они составляют часть того, что называется *спектром* $f_u(\mu | \cdot)$. Если $H = \mathbb{R}^n$, то спектр целиком состоит из собственных значений. Во многих задачах, связанных с дифференциальными уравнениями с частными производными (например, в эволюционных задачах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа, или в задачах, связанных с уравнениями Навье—Стокса для ограниченных областей), спектр целиком состоит из собственных значений.

Нас будет интересовать случай, когда часть спектра, определяющая характер устойчивости решения $u=0$, является конечным множеством изолированных собственных значений. Вообще говоря, это верно в $\mathbb{R}^n$ и в большей части приложений, относящихся к полям, которые встречаются в континуальной физике и механике.

Вообще говоря, $\xi(\mu)$ и $\eta(\mu)$, а, стало быть, и $\sigma(\mu)$ представляют собой непрерывные функции от μ . Если собственное значение σ является *алгебраически простым* для некоторого значения μ_0 параметра μ , то в окрестности μ_0 функции ξ , η и σ обладают такой же степенью гладкости, что и $f_u(\mu | \cdot)$. Такой же степенью гладкости обладают *полупростые* собственные значения, например, когда возмущение кратного собственного значения на $\mu = \mu_0$ расщепляет в первом порядке по $\mu - \mu_0$ это собственное значение на некоторое число собственных значений, равное кратности собственного значения $\sigma(\mu)$ при $\mu = \mu_0$. В § IV.7 уже было показано, что если σ представляет собой кратное собственное значение с индексом Риса, большим единицы, для некоторого значения μ_0 параметра μ , то, вообще говоря, ξ , η , σ не обязательно должны быть дифференцируемыми по μ при $\mu = \mu_0$, даже если оператор $f_u(\mu | \cdot)$ является аналитическим по μ .

Сопряженным для оператора $f_u(\mu|\cdot) = A(\mu)$ является оператор

$$f_u^*(\mu|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} A^*(\mu), \quad (\text{VI.48})$$

удовлетворяющий (VI.41), а сопряженная спектральная задача имеет вид

$$\bar{\sigma} \xi^* = f_u^*(\mu|\xi^*). \quad (\text{VI.49})$$

Устойчивость решения $u=0$ уравнения (VI.45) может быть установлена на основе знания спектра оператора $f_u(\mu|\cdot)$. Предположим, что спектр состоит исключительно из собственных значений. Тогда $u=0$

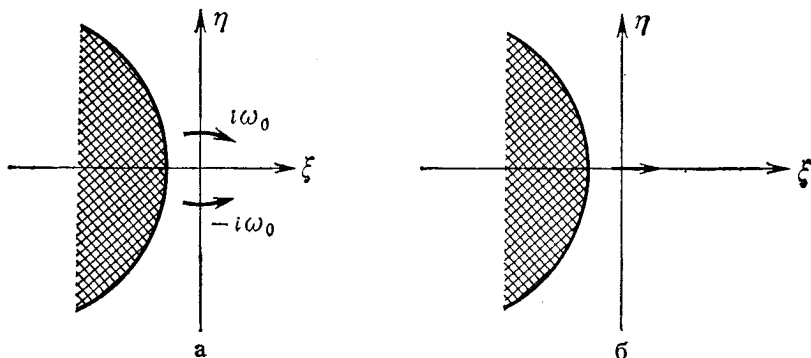


Рис. VI.1. Собственные значения $\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu)$ оператора $f_u(\mu|\cdot)$ в критической точке $\mu=0$. В случае (а) пара комплексно-сопряженных простых собственных значений пересекает мнимую ось. В случае (б) одно вещественное собственное значение проходит через начало.

условно устойчиво, если все собственные значения имеют отрицательные вещественные части ($\xi < 0$), и неустойчиво, если какое-нибудь собственное значение имеет положительную вещественную часть. Условная устойчивость¹⁾ означает, что $u=0$ устойчиво по отношению к малым возмущениям. Условно устойчивое решение может быть неустойчивым по отношению к большим возмущениям, эволюция которых не описывается линейной теорией.

Пусть при $\mu < 0$ нулевое решение $u=0$ условно устойчиво, а при прохождении параметра μ через 0 это решение теряет свою устойчивость. Мы рассмотрим два случая.

(а) Для $\mu=0$ пара простых собственных значений $\pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$, лежит на мнимой оси, а другие собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Для критического значения $\mu=0$ параметра μ

$$\sigma(0) = i\eta(0) = i\omega_0, \quad \xi(0) = 0,$$

¹⁾ В отечественной литературе этот термин имеет иной смысл. — Прим. перев.

и мы предполагаем, что $\xi_\mu(0) > 0$. В этом случае мы получаем бифуркацию в периодические по времени решения (см. гл. VII и VIII). Для приводимого здесь анализа достаточно заметить, что линеаризованная задача

$$\frac{dv}{dt} = f_a(0 | v)$$

имеет только два независимых периодических по времени решения:

$$v(t) = e^{i\omega_0 t} \xi \quad \text{и} \quad \bar{v}(t).$$

Другие решения экспоненциально убывают со временем. В этом случае построение бифуркационного решения связано с проектированием в двумерное пространство.

(б) Для $\mu = 0$ единственное собственное значение проходит через начало. Если $\sigma = 0$ — простое собственное значение, то задача может быть сведена к $\mathbb{R}^1$ на основе методов, тождественных методам, использованным для сведения к $\mathbb{R}^1$ задачи бифуркации решений в $\mathbb{R}^2$, когда собственные значения (2×2) -матрицы $A(0)$ вещественные и различные (см. рис. VI.1).

§ VI.8. Спектральная задача и преобразование Лапласа

Лучшего понимания эволюции линеаризованной задачи с начальным значением

$$\frac{dv}{dt} = f_a(\mu | v), \quad v(0) = v_0 \quad (\text{VI.50})$$

можно достичь на основе методов преобразования Лапласа. Сначала определим преобразование

$$V(\lambda) = \int_0^\infty v(t) e^{-\lambda t} dt \quad (\text{VI.51})$$

и формулу Меллина для обратного преобразования

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\xi} - i\infty}^{\hat{\xi} + i\infty} V(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad (\text{VI.52})$$

где $\lambda = \hat{\xi} + i\hat{\eta}$. Теперь будем считать, что $\hat{\xi}$ достаточно велико, так что при $t \rightarrow \infty$

$$v(t) e^{-\hat{\xi} t} \rightarrow 0, \quad (\text{VI.53})$$

где $v(t)$ удовлетворяет (VI.50). Покажем, что (VI.53) выполняется, если $\hat{\xi} > \xi_1(\mu)$, где $\xi_1(\mu)$ — наибольшая вещественная часть среди собственных значений $f_a(\mu | \cdot)$.

Применяя преобразование Лапласа к (VI.50), находим, что

$$\mathbf{v}_0 = \lambda \mathbf{V} - \mathbf{f}_u(\mu | \mathbf{V}). \quad (\text{VI.54})$$

Спектр оператора $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$ теперь можно определить как множество значений λ , для которых (VI.54) нельзя разрешить относительно $\mathbf{V}$. Все собственные значения принадлежат этому особому множеству.

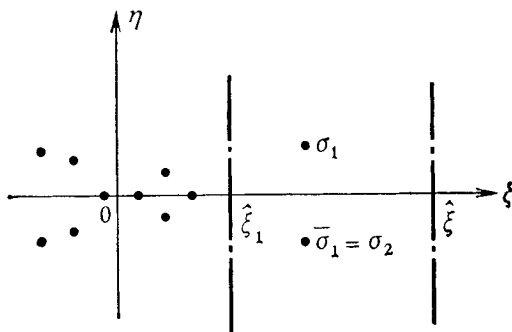


Рис. VI.2. Полюсы резольвенты $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$ на комплексной λ -плоскости являются собственными значениями σ оператора $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$. Полюсы вместе с другими особыми точками $\mathbf{R}(\cdot | \mu)$ определяют полный спектр $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$.

Говорят, что значения λ , которые не входят в спектр, принадлежат резольвентному множеству. Для этих значений (VI.54) можно обратить:

$$\mathbf{V}(\lambda, \mu) = \mathbf{R}(\lambda, \mu) \cdot \mathbf{v}_0, \quad (\text{VI.55})$$

где $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$ — резольвентный оператор, представляющий собой обратный оператор по отношению к линейному оператору $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$. Для широкого класса дифференциальных уравнений с частными производными $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$ имеет форму интегрального оператора Грина.

Объединяя (VI.55) и (VI.52), находим, что

$$\mathbf{v}(t, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} e^{\lambda t} \mathbf{R}(\lambda, \mu) \cdot \mathbf{v}_0 d\lambda. \quad (\text{VI.56})$$

Выберем ξ столь большим, чтобы все особые точки $\mathbf{R}(\cdot, \mu)$ находились слева от прямой $\xi = \text{const}$ (см. рис. VI.2). Эти особые точки представляют собой не что иное, как спектр $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$; собственные значения σ оператора $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$ являются полюсами $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$. Простые собственные значения являются простыми полюсами $\mathbf{R}(\lambda, \mu)$.

Поучительно рассмотреть случай, когда одна комплексно-сопряженная пара простых собственных значений σ_1 и $\bar{\sigma}_1$ имеет вещественные части большие, чем вещественные части любых других собственных значений в спектре $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$.

Нетрудно показать, что

$$\langle \mathbf{v}(t), \xi_1^* \rangle = \langle \mathbf{v}_0, \xi_1^* \rangle e^{\sigma_1 t}.$$

Для доказательства сначала спроектируем (VI.52) на ξ_1^* и найдем, что

$$\langle \mathbf{v}(t), \xi_1^* \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\xi}_1 - i\infty}^{\hat{\xi}_1 + i\infty} \langle \mathbf{V}(\lambda, \mu), \xi_1^* \rangle e^{\lambda t} d\lambda.$$

Затем, проектируя (VI.54), получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_0, \xi_1^* \rangle &= \lambda \langle \mathbf{V}, \xi_1^* \rangle - \langle f_a(\mu | \mathbf{V}), \xi_1^* \rangle = \\ &= \lambda \langle \mathbf{V}, \xi_1^* \rangle - \langle \mathbf{V}, f_a^*(\mu | \xi_1^*) \rangle = \\ &= (\lambda - \sigma_1) \langle \mathbf{V}, \xi_1^* \rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}(t), \xi_1^* \rangle &= \frac{\langle \mathbf{v}_0, \xi_1^* \rangle}{2\pi i} \int_{\hat{\xi}_1 - i\infty}^{\hat{\xi}_1 + i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \sigma_1} d\lambda = \\ &= \langle \mathbf{v}_0, \xi_1^* \rangle e^{\sigma_1 t}. \end{aligned}$$

Таким образом, метод вычетов (VI.56), использованный в настоящем случае (и подавляющий зависимость $\mathbf{v}$ от μ), приводит нас к интегральному представлению вычета

$$\mathbf{v}(t) - \langle \mathbf{v}_0, \xi_1^* \rangle e^{\sigma_1 t} \xi_1 - \langle \mathbf{v}_0, \bar{\xi}_1^* \rangle e^{\bar{\sigma}_1 t} \bar{\xi}_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\xi}_1 - i\infty}^{\hat{\xi}_1 + i\infty} e^{\lambda t} \mathbf{V}(\lambda) d\lambda, \quad (\text{VI.57})$$

где $\hat{\xi}_1 < \text{Re } \sigma_1 < \hat{\xi}_1$ (см. рис. VI.2) и интеграл в правой части (VI.57) ортогонален ξ_1^* и $\bar{\xi}_1^*$. Если t велико, то (VI.57) показывает, что

$$\mathbf{v}(t) \sim e^{\xi_1 t} (e^{i\eta_1 t} \langle \mathbf{v}_0, \xi_1^* \rangle \xi_1 + e^{-i\eta_1 t} \langle \mathbf{v}_0, \bar{\xi}_1^* \rangle \bar{\xi}_1).$$

Более обще, если собственное значение σ_1 кратное, то $\bar{\sigma}_1$ — также кратное собственное значение, так как оператор $f_a(\mu | \cdot)$ — вещественный, и метод вычетов можно применить для вывода нового представления (VI.56):

$$\mathbf{v}(t) = e^{\sigma_1 t} \mathbf{P}(t) + e^{\bar{\sigma}_1 t} \bar{\mathbf{P}}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\xi}_1 - i\infty}^{\hat{\xi}_1 + i\infty} e^{\lambda t} \mathbf{R}(\lambda, \mu) \cdot \mathbf{v}_0 d\lambda, \quad (\text{VI.58})$$

где $\mathbf{R}(\lambda, \mu) = (\lambda \mathbf{I} - f_a(\mu | \cdot))^{-1}$, а $\mathbf{P}(t)$ — полином относительно t степени $\nu - 1$ с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{v}_0$, при этом ν — индекс Риса собственного значения σ_1 .

Для интеграла в (VI.58) можно получить оценку следующего типа:

$$\|v(t) - 2 \operatorname{Re} (e^{\sigma_1 t} P(t))\| \leq k e^{\hat{\xi}_1 t} \|v_0\|.$$

Поскольку $\xi_1 = \operatorname{Re} \sigma_1 > \hat{\xi}_1$, то первые два члена в правой части (VI.58) доминируют в определении характера поведения $v(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

В заключение этого раздела заметим, что формула (VI.56) представляет собой обобщение матричной экспоненты. Если $H = \mathbb{R}^n$, то

$$v(t, \mu) = e^{A(\mu)t} v_0, \quad (\text{VI.59})$$

где экспонента определена для $t \geq 0$ и $t < 0$. В более общих случаях, например в эволюционных задачах, для которых $H \neq \mathbb{R}^n$, можно определить (VI.56) только для $t > 0$, потому что вместо свойства группы

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2},$$

где $-\infty < t_j < \infty$, $j=1, 2$, мы имеем свойство *полугруппы*, так как требуем, чтобы t_1 и $t_2 \geq 0$.

§ VI.9. Проекции в $\mathbb{R}^1$

Если вещественное изолированное простое собственное значение $\sigma(\mu) = \xi(\mu)$ оператора $f_\mu(\mu|\cdot)$ строго пересекает начало комплексной σ -плоскости при $\mu=0$, то получаем бифуркацию решения $u=0$ в стационарное решение $u \neq 0$ при $\mu \neq 0$. Это решение можно разложить на часть, принадлежащую нуль-пространству оператора $f_\mu(0|\cdot)$, и малую часть, которая ортогональна собственному вектору ξ^* оператора $f_\mu^*(0|\cdot)$, соответствующему $\sigma=0$. Анализ *идентичен* анализу, проведенному для случая, когда u принадлежит $\mathbb{R}^2$, при этом следует иметь в виду, что добавочная малая часть w , определенная в (VI.30), представляет собой некоторый тип «суперпозиции всех других мод» — собственных функций оператора $f_\mu(0|\cdot)$. В $\mathbb{R}^n$ существует $n-1$ других мод. С другой стороны, для дифференциальных уравнений с частными производными такие суперпозиции, даже бесконечные суперпозиции, не всегда возможны. Однако всегда можно определить w как вектор, ортогональный ξ^* .

В задачах общего типа в H основным моментом является проверка применимости альтернативы Фредгольма. Говорят, что альтернатива Фредгольма применима, если необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения

$$f_\mu(0|v) = \tilde{w}, \quad v \in H \quad (\text{VI.60})$$

состоит в выполнении соотношения

$$\langle \tilde{w}, \xi^* \rangle = 0 \quad (\text{VI.61})$$

для всех ξ^* , таких, что $f_\mu^*(0|\xi^*) = 0$. Тогда решение v определяется с точностью до элементов ξ , удовлетворяющих уравнению $f_\mu(0|\xi) = 0$.

В случаях, уже изученных нами, размерности нуль-пространств операторов $f_a(0|\cdot)$ и $f_a^*(0|\cdot)$ совпадают. В этой главе мы имеем одно- или двумерные нуль-пространства, ассоциированные с собственным вектором ξ , и одно- или двумерное сопряженное нуль-пространство, ассоциированное с ξ^* . Поэтому можно найти *единственное решение* v уравнения (VI.60), удовлетворяющее

$$\langle v, \xi^* \rangle = 0 \quad (\text{VI.62})$$

для всех ξ^* из нуль-пространства $f_a^*(0|\cdot)$.

Тогда можно смотреть на теорию § VI.2 как на соответствующий метод проекции в случае бифуркации в алгебраически простом собственном значении в $\mathbb{R}^n$ или в гильбертовом пространстве. Придерживаясь последовательности изложения, которая была уже принята при анализе задач в $\mathbb{R}^1$ и в $\mathbb{R}^2$, мы в § VI.10 дадим анализ проекции изолированных решений, которые разрушают бифуркацию в двойном собственном значении с индексом, равным двум, а в § VI.12 применим этот метод для исследования бифуркации в двойном полупростом собственном значении с индексом, равным единице.

§ VI.10. Метод проекции для изолированных решений, разрушающих бифуркацию в простом собственном значении (теория несовершенств)

Рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = \tilde{\mathcal{F}}(\mu, u, \delta) \text{ для } u \text{ в } H, \quad (\text{VI.63})$$

где H есть $\mathbb{R}^n$ или некоторое другое функциональное пространство, определенное для бесконечномерных задач, таких как задачи с дифференциальными уравнениями в частных производных, удовлетворяющими условиям, принятым в §§ VI.6—8. Далее будем считать, что $u=0$ есть решение уравнения

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mu, u, 0) = 0, \quad (\text{VI.64})$$

которое строго теряет устойчивость, когда μ , возрастая, проходит через нуль. Отсюда следует, что (VI.64) имеет двойную точку бифуркации $(\mu, u) = (0, 0)$. Спектральная задача, связанная с анализом устойчивости решения $u=0$, описывается уравнением

$$\sigma(\mu) \xi(\mu) = \tilde{\mathcal{F}}_a(\mu, 0, 0|\xi(\mu)).$$

Для критического значения $\sigma(0)=0$ есть изолированное простое собственное значение оператора $\tilde{\mathcal{F}}_a(\cdot)$ и сопряженного оператора $\tilde{\mathcal{F}}_a^*(\cdot)$, т. е.

$$\tilde{\mathcal{F}}_a(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{F}}_a(0, 0, 0|\xi) = 0, \quad \xi = \xi(0), \quad (\text{VI.65})$$

и

$$\mathcal{F}_u^*(\xi^*) = 0. \quad (\text{VI.66})$$

Все другие собственные значения оператора $\mathcal{F}_u(\cdot)$ имеют отрицательные вещественные части. Оператор $\mathcal{F}_u(\cdot)$, такой, что уравнение

$$\mathcal{F}_u(v) = f \quad (\text{VI.67})$$

имеет единственное решение с точностью до аддитивного члена, пропорционального вектору ξ , который удовлетворяет уравнению (VI.65), если

$$\langle f, \xi^* \rangle = 0, \quad (\text{VI.68})$$

где ξ^* удовлетворяет уравнению (VI.66), и

$$v = \xi + w, \quad \langle w, \xi^* \rangle = 0; \quad (\text{VI.69})$$

$w = \mathcal{F}_u^{-1}(f)$, а $\mathcal{F}_u^{-1}(\cdot)$ представляет собой корректно определенный оператор, обладающий свойством $\langle \mathcal{F}_u^{-1}(f), \xi^* \rangle = 0$ для любого f , удовлетворяющего условию (VI.68). Строгая потеря устойчивости решения $u=0$ уравнения (VI.64), когда μ , возрастая, проходит через нуль, приводит к неравенству

$$\sigma_\mu(0) = \langle \mathcal{F}_{\mu u}(\xi), \xi^* \rangle > 0, \quad (\text{VI.70})$$

где

$$\mathcal{F}_{\mu u}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{F}}_{\mu u}(0, 0, 0 | \cdot).$$

Обращаясь теперь к (VI.63), будем считать, что δ мало, и будем разыскивать изолированные стационарные решения, разрушающие бифуркацию в $(0, 0)$, при условии, что

$$\langle \mathcal{F}_\delta, \xi^* \rangle \neq 0. \quad (\text{VI.71})$$

Напомним, что $\mathcal{F}_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{F}}_\delta(0, 0, 0)$. Удобно ввести амплитуду

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \langle u, \xi^* \rangle. \quad (\text{VI.72})$$

Условие (VI.71) и теорема о неявной функции гарантируют существование решения $u(\mu, \varepsilon)$ и $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$ уравнений

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mu, u(\mu, \varepsilon), \Delta(\mu, \varepsilon)) = 0, \quad \varepsilon = \langle u(\mu, \varepsilon), \xi^* \rangle. \quad (\text{VI.73})$$

Полагая в (VI.73) $\varepsilon = 0$, находим, что

$$u(\mu, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta(\mu, 0) = 0. \quad (\text{VI.74})$$

Дифференцирование (VI.73) по ε при $\varepsilon = 0$ приводит к соотношениям

$$\mathcal{F}_u(u_\varepsilon) + \mathcal{F}_\delta \Delta_\varepsilon = 0, \quad 1 = \langle u_\varepsilon, \xi^* \rangle. \quad (\text{VI.75})$$

Из условия разрешимости (VI.68) получаем $\Delta_\varepsilon = 0$ и

$$u_\varepsilon = \xi. \quad (\text{VI.76})$$

Вторые производные от (VI.73) имеют вид

$$\mathcal{F}_\alpha(u_{ee}) + \mathcal{F}_{\alpha\alpha}(\xi|\xi) + \mathcal{F}_\delta \Delta_{ee} = 0, \quad (\text{VI.77})$$

$$\mathcal{F}_\alpha(u_{\mu e}) + \mathcal{F}_{\mu\mu}(\xi) + \mathcal{F}_\delta \Delta_{\mu e} = 0, \quad (\text{VI.78})$$

где u_{ee} и $u_{\mu e}$ ортогональны ξ^* . Условие разрешимости (VI.68) приводит к равенствам

$$\Delta_{ee} = - \frac{\langle \mathcal{F}_{\alpha\alpha}(\xi|\xi), \xi^* \rangle}{\langle \mathcal{F}_\delta, \xi^* \rangle}, \quad (\text{VI.79})$$

$$\Delta_{\mu e} = - \frac{\langle \mathcal{F}_{\mu\mu}(\xi), \xi^* \rangle}{\langle \mathcal{F}_\delta, \xi^* \rangle} = - \frac{\sigma_\mu(0)}{\langle \mathcal{F}_\delta, \xi^* \rangle} \neq 0. \quad (\text{VI.80})$$

Если Δ_{ee} и $\Delta_{\mu e}$ удовлетворяют (VI.79) и (VI.80), то (VI.77) и (VI.78) можно единственным образом разрешить. Обращаясь теперь к третьим производным, находим

$$\mathcal{F}_\alpha(u_{eee}) + \Delta_{eee} \mathcal{F}_\delta + 3\Delta_{ee} \mathcal{F}_{\mu\delta}(\xi) + 3\mathcal{F}_{\mu\mu}(\xi|u_{ee}) + \mathcal{F}_{\alpha\mu\mu}(\xi|\xi|\xi) = 0, \quad (\text{VI.81})$$

$$\mathcal{F}_\alpha(u_{\mu ee}) + \Delta_{\mu ee} \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_{\delta\mu} \Delta_{ee} + \mathcal{F}_{\mu\mu}(u_{ee}) + 2\mathcal{F}_{\mu\delta}(\xi) \Delta_{\mu e} + \\ + 2\mathcal{F}_{\alpha\alpha}(\xi|u_{\mu e}) + \mathcal{F}_{\mu\mu\mu}(\xi, \xi) = 0, \quad (\text{VI.82})$$

$$\mathcal{F}_\alpha(u_{\mu\mu e}) + \Delta_{\mu\mu e} \mathcal{F}_\delta + \mathcal{F}_{\mu\mu\mu}(\xi) + 2\mathcal{F}_{\mu\mu}(u_{\mu e}) + 2\mathcal{F}_{\mu\delta} \Delta_{\mu e} = 0. \quad (\text{VI.83})$$

Среди векторов, ортогональных ξ^* , эти уравнения имеют единственное решение, если Δ_{eee} , $\Delta_{\mu ee}$ и $\Delta_{\mu\mu e}$ выбираются так, что удовлетворяется условие (VI.68).

Продолжая этот процесс далее, получим ряд Тейлора

$$\Delta(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{2} [\Delta_{eee} \varepsilon^2 + 2\Delta_{e\mu} \varepsilon \mu] + \frac{1}{3!} [\Delta_{eee} \varepsilon^3 + 3\Delta_{\mu ee} \mu \varepsilon^2 + \\ + 3\Delta_{\mu\mu e} \mu^2 \varepsilon] + O[\varepsilon(|\mu| + |\varepsilon|)^3]. \quad (\text{VI.84})$$

Уравнение (VI.84) имеет вид (III.26). Теперь мы переходим к отысканию функции $\mu(\varepsilon, \delta)$ методом последовательных приближений в $\mathbb{R}^1$. Итак, задача отыскания изолированных решений, разрушающих бифуркацию в двойной точке, приведена к одномерной задаче. Мы оставляем читателю в качестве упражнения доказательство того, что задача устойчивости изолированных решений может быть сведена к одномерной задаче, как в (III.32).

§ VI.11. Метод проекции в двойном собственном значении с индексом, равным двум

Нас интересуют стационарные решения, которые ответвляются от решения $u=0$, где u в H удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u) = f_\alpha(\mu|u) + \frac{1}{2} f_{\alpha\alpha}(\mu|u|u) + O(\|u\|^3). \quad (\text{VI.85})$$

Устойчивость $u=0$ определяется знаком вещественной части $\sigma(\mu)$, где $\sigma(\mu)$ — собственное значение $f_u(\mu | \cdot)$ с наибольшей вещественной частью

$$\sigma(\mu) \xi = f_u(\mu | \xi) \text{ для } \xi \text{ в } H. \quad (VI.86)$$

Предположим, что для критического значения $\sigma(0)$ является двойным собственным значением с индексом, равным двум, линейного оператора

$$f_u(0 | \cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(\cdot). \quad (VI.87)$$

Так как $\sigma(0)=0$ — двойное собственное значение с индексом 2, то имеем следующую жорданову цепочку уравнений для собственных векторов и обобщенных собственных векторов (см. дополнения IV.1 и IV.2):

$$\begin{aligned} f_u(\xi_1) &= 0, & f_u^*(\xi_2^*) &= 0, \\ f_u(\xi_2) &= \xi_1, & f_u^*(\xi_1^*) &= \xi_2^*, \end{aligned} \quad (VI.88)$$

где $f_u^* \stackrel{\text{def}}{=} [f_u(0 | \cdot)]^*$ — линейный сопряженный оператор, определенный относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в H_1

$$\begin{aligned} \langle \xi_1, \xi_2^* \rangle &= \langle f_u(\xi_2), \xi_2^* \rangle = \langle \xi_2, f_u^*(\xi_2^*) \rangle = 0, \\ \langle \xi_1, \xi_1^* \rangle &= \langle f_u(\xi_2), \xi_1^* \rangle = \langle \xi_2, f_u^*(\xi_1^*) \rangle = \langle \xi_2, \xi_1^* \rangle. \end{aligned}$$

Выберем ξ_2 и ξ_1^* так, чтобы $\langle \xi_1, \xi_1^* \rangle = \langle \xi_2, \xi_2^* \rangle = 1$, $\langle \xi_2, \xi_1^* \rangle = 0$. Теперь будем искать решения, которые отвечают от $u=0$, в виде рядов по степеням амплитуды как проекции

$$e = \langle u, \xi_1^* \rangle, \quad (VI.89)$$

т. е.

$$\begin{bmatrix} u(e) \\ \mu(e) \end{bmatrix} = \sum_{n=1} \frac{e^n}{n!} \begin{bmatrix} u_n \\ \mu_n \end{bmatrix}. \quad (VI.90)$$

Находим, что

$$\begin{aligned} f_u(u_1) &= 0, & \langle u_1, \xi_1^* \rangle &= 1, \\ f_u(u_2) + 2\mu_1 f_{u\mu}(u_1) + f_{uu}(0 | u_1 | u_1) &= 0, \\ \langle u_2, \xi_1^* \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (VI.91)$$

и

$$f_u(u_n) + n\mu_{n-1} f_{u\mu}(u_1) + f_n = 0, \quad \langle u_n, \xi_1^* \rangle = 0, \quad (VI.92)$$

где f_n зависит от производных от μ и u более низкого порядка. Условию ортогональности $\langle u_n, \xi_1^* \rangle = 0$ всегда можно удовлетворить, так как, если $\tilde{u}_n$ — решение уравнения, которое не удовлетворяет условию ортогональности, то $u_n = \tilde{u}_n - \langle \tilde{u}_n, \xi_1^* \rangle \xi_1$ удовлетворяет и уравнению, и условию ортогональности.

Уравнение (VI.91) показывает, что

$$u_1 = \xi_1. \quad (VI.93)$$

Для построения полного решения нам необходим следующий результат.

Лемма (альтернатива Фредгольма, когда нуль есть двойное собственное значение с индексом, равным двум, оператора $f_a(\cdot)$).

Уравнение

$$f_a(\varphi) = \psi, \quad \varphi \in H \quad (VI.94)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\langle \psi, \xi_2^* \rangle = 0. \quad (VI.95)$$

Критерий (VI.95) не отличается от (VI.61); неоднородные члены в (VI.92) должны быть ортогональны всем независимым нуль-векторам оператора f_a^* . В двойном собственном значении с индексом Риса, равным двум, существует только один нуль-вектор. В вопросе разрешимости имеет значение только *геометрическая* кратность. Необходимость условия (VI.95) очевидна. Доказательство достаточности (VI.95) для разрешимости в $\mathbb{R}^n$ следует из линейной алгебры. Для более общих задач требование (VI.95) имеет в точности ту форму, которую принимает альтернатива Фредгольма, определенная в § VI.9, для собственного значения с индексом, равным двум.

Записывая (VI.95) для (VI.91)₂, находим, что

$$2\mu_1 C'_0 + \langle f_{aa}(0 | \xi_1 | \xi_1), \xi_2^* \rangle = 0,$$

а для порядка n

$$n\mu_{n-1}C'_0 + \langle f_n, \xi_2^* \rangle = 0, \quad (VI.96)$$

где

$$C'_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle f_{a\mu}(\xi_1), \xi_2^* \rangle. \quad (VI.97)$$

Наше *бифуркационное предположение*

$$C'_0 \neq 0 \quad (VI.98)$$

эквивалентно предположению (V.17), которое мы делали в $\mathbb{R}^2$. Поэтому, если $C'_0 \neq 0$, то можно вычислить ряды (VI.90) (на каждом шаге определяются μ_{n-1} , u_n).

Обращаясь теперь к анализу устойчивости бифуркационного решения (VI.90), введем в рассмотрение спектральную задачу

$$\gamma\psi = f_a(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon) | \psi) \quad (VI.99)$$

для малых возмущений $e^{\gamma t}\psi$ решения $u(\varepsilon)$. Подставляя разложение (VI.90) в (VI.99), находим, что

$$\gamma\psi = f_a(\psi) + \varepsilon [\mu_1 f_{a\mu}(\psi) + f_{aa}(0 | \xi_1 | \psi)] + O(\varepsilon^2) \cdot \psi. \quad (VI.100)$$

Разложим ψ в виде

$$\psi = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + W, \quad (VI.101)$$

где

$$\alpha_i = \langle \psi, \xi_i^* \rangle, \quad \langle W, \xi_i^* \rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Замечая, что

$$\langle f_u(\psi), \xi_2^* \rangle = 0, \quad \langle f_u(\psi), \xi_1^* \rangle = \langle \psi, \xi_2^* \rangle = \alpha_2, \quad (\text{VI.102})$$

и используя (VI.97), уравнение (VI.100) можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} \gamma \alpha_1 &= \alpha_2 + \varepsilon (a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2) + O(\varepsilon) \cdot W + O(\varepsilon^2) \cdot \psi, \\ \gamma \alpha_2 &= -\varepsilon \mu_1 C'_0 \alpha_1 + \varepsilon b_2 \alpha_2 + O(\varepsilon) \cdot W + O(\varepsilon^2) \cdot \psi, \\ \gamma W &= f_u(W) + O(\varepsilon) \psi. \end{aligned} \quad (\text{VI.103})$$

В силу того, что γ близко к нулю ($O\sqrt{\varepsilon}$), а оператор f_u обратим в пространстве, ортогональном $\{\xi_1^*, \xi_2^*\}$, (VI.103)₃ приводит к оценке $W = O(\varepsilon) \cdot \psi$. Подставляя это выражение для W в (VI.103)₁ и (VI.103)₂, можно проверить¹⁾, что γ является собственным значением (2×2) -матрицы

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \alpha_1 + O(\varepsilon^2) & 1 + \varepsilon b_1 + O(\varepsilon^2) \\ -\varepsilon \mu_1 C'_0 + O(\varepsilon^2) & \varepsilon b_2 + O(\varepsilon^2) \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.104})$$

Поэтому имеем

$$\gamma_{\pm} = \pm \sqrt{-\varepsilon \mu_1 C'_0} + \frac{1}{2} \varepsilon (a_1 + b_2) + O(|\varepsilon|^{3/2}). \quad (\text{VI.105})$$

Здесь мы получили в $\mathbb{R}^2$ как проекции результаты, связанные с анализом устойчивости в случае двойного собственного значения с индексом Риса, равным двум, которые в точности совпадают с результатами, полученными в § V.6 для того же случая в $\mathbb{R}^2$. Полученные в § V.6 результаты исследования устойчивости и рис. V.1 полностью описывают все выводы, которые следуют из (VI.105).

§ VI.12. Метод проекции в двойном полупростом собственном значении

Мы хотим показать, что бифуркация решения $u=0$ в двойном полупростом собственном значении для задачи высокой размерности (VI.45) является той же самой, что и в $\mathbb{R}^2$ (см. §§ V.7—9), если исключить малую пассивную часть, которая ортогональна проектируемой части и имеет более высокий порядок относительно амплитуды.

Устойчивость стационарного решения $u=0$ уравнения (VI.45) описывается спектральной задачей (VI.46) и связанной с ней сопря-

¹⁾ Это можно также проверить при помощи теории, разработанной в книге Т. Като, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, 1966.

женной спектральной задачей (VI.49). Предположим, что $\sigma(0) = 0$ — двойное полупростое собственное значение $f_u(0|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(\cdot)$. В отличие от матрицы A_0 в $\mathbb{R}^3$ оператор $f_u(\cdot)$ не обращается в нуль тождественно. Например, если $f_u(\cdot) = A$ в $\mathbb{R}^3$, то имеем

$$A_0 \cdot \xi = \sigma \xi,$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \neq 0$$

и $\sigma = 0$ — двойное полупростое собственное значение матрицы A_0 . Говорят, что два независимых вектора ξ_1 и ξ_2 , которые аннулируются матрицей A_0 ,

$$A_0 \cdot \xi_1 = 0, \quad A_0 \cdot \xi_2 = 0,$$

лежат в нуль-пространстве матрицы A_0 , и можно эти векторы выбрать так, чтобы

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Третий вектор

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

определяется единственным образом из уравнения $A_0 \cdot \xi_3 = -\lambda \xi_3$ и условия нормировки.

В общей задаче $f_u^*(\cdot)$ имеет двумерное нуль-пространство (с собственными векторами ξ_1^* и ξ_2^* , принадлежащими $\sigma = 0$), если $f_u(\cdot)$ обладает таким же свойством, и уравнение

$$f_u(\varphi) = \psi \tag{VI.106}$$

разрешимо относительно φ в H тогда и только тогда, когда $\langle \psi, \xi_1^* \rangle = \langle \psi, \xi_2^* \rangle = 0$.

Теперь рассмотрим задачу бифуркации и покажем, что она сводится к задаче, уже рассмотренной в $\mathbb{R}^2$. Сначала будем искать решение в форме (V.3) из § V.8:

$$u(\mu) = u_1 \mu + \frac{1}{2} u_2 \mu^2 + \frac{1}{3!} u_3 \mu^3 + O(\mu^4). \tag{VI.107}$$

(Аналогичные методы можно использовать для построения решений в форме (V.2) из § V.7.) Подставляя (VI.107) в (VI.45), находим после отождествления, что

$$\frac{du_1}{dt} = f_u(u_1).$$

Отсюда следует, что $\langle \mathbf{u}_1, \xi_1^* \rangle$ и $\langle \mathbf{u}_1, \xi_2^* \rangle$ не зависят от времени. Будем разыскивать стационарные решения (VI.45). Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a(\mathbf{u}_1) &= 0, \\ 2\mathbf{f}_{\mu\mu}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{f}_{aa}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + \mathbf{f}_a(\mathbf{u}_2) &= 0, \\ \mathbf{f}_{aaa}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + 3\mathbf{f}_{a\mu\mu}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + 3\mathbf{f}_{\mu\mu\mu}(\mathbf{u}_1) + \\ &+ 3\mathbf{f}_{\mu\mu}(\mathbf{u}_2) + 3\mathbf{f}_{aa}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) + \mathbf{f}_a(\mathbf{u}_3) = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.108})$$

где в упрощенных обозначениях мы вычисляем производные от $\mathbf{f}$ в точке $(\mu, \mathbf{u}) = (0, 0)$. Уравнения (VI.108)₂ и (VI.108)₃ разрешимы тогда и только тогда, когда для $l=1$ и $l=2$ выполняются соотношения

$$2\langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\mathbf{u}_1), \xi_l^* \rangle + \langle \mathbf{f}_{aa}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1), \xi_l^* \rangle = 0, \quad (\text{VI.109})$$

$$\langle \mathbf{M}(\mathbf{u}_1), \xi_l^* \rangle + 3\langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\mathbf{u}_2), \xi_l^* \rangle + 3\langle \mathbf{f}_{aa}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2), \xi_l^* \rangle = 0, \quad (\text{VI.110})$$

где

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{f}_{aaa}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + 3\mathbf{f}_{a\mu\mu}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + 3\mathbf{f}_{\mu\mu\mu}(\mathbf{u}_1).$$

Решение $\mathbf{u}(\mu)$ всегда можно разложить на часть, принадлежащую двумерному нуль-пространству оператора $\mathbf{f}_a(\cdot)$, и часть, которая ортогональна ξ_1^* и ξ_2^* :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mu) &= \mu \{ \chi(\mu) \xi_1 + \theta(\mu) \xi_2 \} + \mu \mathbf{W}(\mu), \\ \langle \mathbf{u}(\mu), \xi_1^* \rangle &= \mu \chi(\mu), \\ \langle \mathbf{u}(\mu), \xi_2^* \rangle &= \mu \theta(\mu), \\ \langle \mathbf{W}, \xi_1^* \rangle &= \langle \mathbf{W}, \xi_2^* \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.111})$$

Поскольку все решения $\mathbf{f}_a(\mathbf{u}_1) = 0$ можно представить в виде линейной комбинации двух независимых решений, то имеем

$$\mathbf{u}_1 = \chi_0 \xi_1 + \theta_0 \xi_2 \quad (\text{VI.112})$$

и $\mathbf{W}_0 = 0$. Комбинируя (VI.112) и (VI.109), находим, что

$$\begin{aligned} f_1(\chi_0, \theta_0) &= a_1 \chi_0 + b_1 \theta_0 + \alpha_1 \chi_0^2 + 2\beta_1 \chi_0 \theta_0 + \gamma_1 \theta_0^2 = 0, \\ f_2(\chi_0, \theta_0) &= a_2 \chi_0 + b_2 \theta_0 + \alpha_2 \chi_0^2 + 2\beta_2 \chi_0 \theta_0 + \gamma_2 \theta_0^2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.113})$$

где для $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} a_j &= \langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\xi_j), \xi_j^* \rangle, \quad b_j = \langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\xi_2), \xi_j^* \rangle, \\ \alpha_j &= \frac{\langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\xi_1 | \xi_1), \xi_j^* \rangle}{2}, \quad \beta_j = \frac{\langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\xi_1 | \xi_2), \xi_j^* \rangle}{2}, \\ \gamma_j &= \frac{\langle \mathbf{f}_{\mu\mu}(\xi_2 | \xi_2), \xi_j^* \rangle}{2}. \end{aligned}$$

Уравнения (VI.113) являются уравнениями пересекающихся конических сечений (V.29), которые получены в $\mathbb{R}^2$; $(\chi_0, \theta_0) = (0, 0)$ является

всегда точкой пересечения. Кроме этой точки пересечения могут существовать до трех других точек. Если, как в $\mathbb{R}^3$, в точке пересечения выполняется условие

$$\det \mathcal{J}_0 \neq 0, \text{ где } \mathcal{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \chi_0} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \chi_0} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_0} \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.114})$$

то в этой точке ответвляется решение. В общем случае кроме решения $\mathbf{u}(\mu) = 0$ может существовать несколько других решений, от одного до трех:

$$\mathbf{u}^{[k]}(\mu) = \mathbf{u}_1^{[k]}\mu + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2^{[k]}\mu^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{u}_3^{[k]}\mu^3 + O(\mu^4). \quad (\text{VI.115})$$

Для того чтобы показать, что условий (VI.113) и (VI.114) достаточно для существования бифуркации, мы сначала отметим, что

$$\mathbf{u}_2 = \chi_1 \xi_1 + \theta_1 \xi_2 + \mathbf{W}_1, \quad (\text{VI.116})$$

где соотношение $\mathbf{f}_u(\mathbf{W}_1) = 2\mathbf{f}_{uu}(\mathbf{u}_1) + \mathbf{f}_{uu}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1)$ разрешимо в силу (VI.113). Для каждого решения $\mathbf{u}_1^{[k]}$ существует $\mathbf{W}_1^{[k]}$. Комбинируя (VI.116) и (VI.110), находим для $l=1$ и $l=2$, что

$$P_l + \chi_1 \{ \langle \mathbf{f}_{u\mu}(\xi_1), \xi_l^* \rangle + \langle \mathbf{f}_{uu}(\mathbf{u}_1 | \xi_1), \xi_l^* \rangle \} + \\ + \theta_1 \{ \langle \mathbf{f}_{u\mu}(\xi_2), \xi_l^* \rangle + \langle \mathbf{f}_{uu}(\mathbf{u}_1 | \xi_2), \xi_l^* \rangle \} = 0, \quad (\text{VI.117})$$

где

$$P_l = \frac{1}{3} \langle \mathbf{M}(\mathbf{u}_1), \xi_l^* \rangle + \langle \mathbf{f}_{u\mu}(\mathbf{W}_1), \xi_l^* \rangle + \langle \mathbf{f}_{uu}(\mathbf{u}_1 | \mathbf{W}_1), \xi_l^* \rangle$$

известно после вычисления членов более низкого порядка. Нам нужно найти χ_1 и θ_1 . Подставляя $\mathbf{u}_1 = \chi_0 \xi_1 + \theta_0 \xi_2$ в $\mathbf{f}_{uu}$ и используя (VI.113), мы приводим (VI.117) к виду

$$\mathbf{P} + \mathcal{J}_0 \cdot \chi = 0, \text{ где } \chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.118})$$

Эти два уравнения имеют единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\det \mathcal{J}_0 \neq 0.$$

В точности это же самое уравнение разрешимости получаем при вычислении членов более высокого порядка.

Теперь мы покажем, что устойчивость бифуркационных решений $\mathbf{u}^{[k]}(\mu)$, $k=1, 2$ или 3 , и решения $\mathbf{u}=0$ определяется собственными значениями матрицы $\mathcal{J}_0$. Пусть $\mathbf{u}(\mu)$ — одно из указанных четырех решений, и пусть $e^{i\gamma}\xi$ — малое возмущение решения $\mathbf{u}$, удовлетворяющее спектральной задаче

$$\gamma \xi = \mathbf{f}_u(\mu, \mathbf{u}(\mu) | \xi). \quad (\text{VI.119})$$

Если $\mu = 0$, то $u = 0$, $\gamma(0) = 0$ и $f_u(0, 0 | \xi(0)) = f_u(\xi(0)) = 0$ имеет два независимых решения ξ_1 и ξ_2 . Поэтому $\xi(0) = A\xi_1 + B\xi_2$, где A и B подлежат определению. Дифференцируя (VI.119) один раз по μ при $\mu = 0$ и заменяя $\xi(0)$ в получаемом уравнении, находим с помощью условий разрешимости, что

$$-\gamma_\mu A + A \{ \langle f_{u\mu}(\xi_1), \xi_1^* \rangle + \langle f_{uu}(u_1 | \xi_1), \xi_1^* \rangle \} + \\ + B \{ \langle f_{u\mu}(\xi_2), \xi_2^* \rangle + \langle f_{uu}(u_1 | \xi_2), \xi_2^* \rangle \} = 0$$

и

$$-\gamma_\mu B + A \{ \langle f_{u\mu}(\xi_1), \xi_2^* \rangle + \langle f_{uu}(u_1 | \xi_1), \xi_2^* \rangle \} + \\ + B \{ \langle f_{u\mu}(\xi_2), \xi_2^* \rangle + \langle f_{uu}(u_1 | \xi_2), \xi_2^* \rangle \} = 0.$$

Подставляя $u_1 = \chi_0 \xi_1 + \theta_0 \xi_2$ в $f_{u\mu}(u_1 | \cdot)$, находим, что

$$\gamma_\mu A = \mathcal{J}_0 \cdot A,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

Следовательно, γ_μ суть собственные значения матрицы $\mathcal{J}_0$, как в $\mathbb{R}^2$. Строгое обоснование этого метода вычислений можно найти в монографии Като (1966), указанной в § VI.11.

Дополнение VI.1. Примеры применения метода проекции

В этом дополнении мы применим методы проекции, изложенные в настоящей главе, к специальным задачам, которые приводят к интегро-дифференциальным уравнениям и к уравнениям с частными производными. Эти примеры можно рассматривать в качестве упражнений для студентов. Их цель — обучить интересующихся читателей, например, тому, как поставить их специальные задачи в рамки нашей общей теории.

Запишем эволюционную задачу, приведенную к локальной форме, в виде

$$\frac{du}{dt} = f(\mu, u) = f_u(\mu | u) + \frac{1}{2} f_{uu}(\mu | u | u) + \frac{1}{3!} f_{uuu}(\mu | u | u | u) + \dots$$

В некоторых задачах, исследуемых в настоящем дополнении, этот ряд для f обрывается и производные от f выше первого порядка не зависят от μ :

$$\frac{1}{2} f_{uu}(\mu | u | u) = B(u, u),$$

$$\frac{1}{3!} f_{uuu}(\mu | u | u | u) = C(u, u, u).$$

Читатель обратит внимание на то, что некоторые из задач, рассматриваемых в качестве примеров и упражнений, излагаются в тер-

минах гильбертовых пространств, как в общей теории. Аппарат гильбертова пространства удобен для строгого доказательства и изложения принципов бифуркации в терминах, аналогичных применяемым в $\mathbb{R}^n$. Будет очевидно, что для *вычисления* бифуркации гильбертово пространство не требуется. То, что действительно требуется для формального вычисления бифуркации, так это альтернатива Фредгольма. Во всех случаях эта альтернатива указывает путь, гарантирующий разрешимость уравнений, к которым приводит построение бифуркационного решения, и определяет проекции наименьшей размерности, которые фигурируют в этом построении.

Пример VI.1. (Интегро-дифференциальное уравнение.)¹⁾ Рассмотрим задачу об устойчивости и бифуркации решения $U=0$ следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + (1 - \mu) U(t, x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \{ \sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y \} \times \\ \times \{ U(t, y) + U^*(t, y) \} dy = 0, \quad (\text{VI.120})$$

где U — вещественная функция, определенная для $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$, непрерывная и один раз непрерывно дифференцируемая по t . Параметр b фиксирован и удовлетворяет условиям $0 < b < 1$; μ — бифуркационный параметр.

$U(t, x)$ — непрерывная функция от x на интервале $0 \leq x \leq \pi$ для каждого фиксированного $t \geq 0$. Мы проводим различие между функцией $U(t, \cdot)$ и значением функции $U(t, x)$ при некотором x . Поэтому определим

$$u(t) \stackrel{\text{def}}{=} [u(t)](\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} U(t, \cdot),$$

где $U(t, \cdot) \in C[0, \pi]$ принадлежит пространству непрерывных функций от $x \in [0, \pi]$. В этих обозначениях t играет роль параметра и значение функции для x есть $[u(t)](x) = U(t, x)$. Тогда можно (VI.120) представить в виде

$$\frac{du}{dt} = f_a(\mu | u) + C(u, u, u), \quad u(t) \in C[0, \pi], \quad (\text{VI.121})$$

где $u(t) \in C[0, \pi]$ означает, что $[u(t)](x)$ — непрерывная функция на $[0, \pi]$,

$$[f_a(\mu | u(t))](x) = -(1 - \mu) U(t, x) + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y] \times U(t, y) dy$$

¹⁾ Подробное изложение см. в монографии Пимбли, указанной в литературе к гл. I.

и

$$[C(u(t), u(t), u(t))](x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y] U^3(t, y) dy.$$

Мы хотим вычислить стационарные решения (VI.121) и исследовать их устойчивость. Сначала отметим, что $u=0$ — решение (VI.121). Для того чтобы исследовать устойчивость решения $u=0$, рассмотрим спектральную задачу

$$\sigma v = f_v(\mu | v). \quad (\text{VI.122})$$

Говорят, что значения $\sigma(\mu)$, для которых существуют решения $v \neq 0$, принадлежат спектру оператора $f_{\mu}(\mu | \cdot)$. Точнее, спектр можно определить как множество специальных значений σ , для которых задача

$$\sigma v - f_v(\mu | v) = g \quad (\text{VI.123})$$

не имеет единственного решения (см. § VI.8 о преобразовании Лапласа для более полного объяснения). В данном случае мы имеем

$$\sigma V(x) + (1 - \mu)V(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y) V(y) dy = F(x). \quad (\text{VI.124})$$

Следовательно, $F(\cdot)$ в (VI.124) представляет собой то же самое, что и g в (VI.123).

Чтобы решить (VI.124), представим F и V в виде

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1 \sin x + F_2 \sin 2x + F_3(x), \\ V(x) &= V_1 \sin x + V_2 \sin 2x + V_3(x), \end{aligned} \quad (\text{VI.125})$$

где

$$\int_0^{\pi} V_3(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} V_3(x) \sin 2x dx = 0. \quad (\text{VI.126})$$

Функция $F_3(x)$ удовлетворяет условиям, получаемым из (VI.126) при замене $V_3(x)$ на $F_3(x)$. Комбинируя (VI.124) и (VI.125), вычисляем

$$\begin{aligned} (\sigma + 1 - \mu) V_3(x) &= F_3(x), \\ (\sigma - \mu) V_1 &= F_1, \\ (\sigma + 1 - \mu - b) V_2 &= F_2. \end{aligned} \quad (\text{VI.127})$$

Очевидно, что спектр $f_{\mu}(\mu | \cdot)$ целиком состоит из собственных значений

$$\sigma_0(\mu) = \mu, \quad \sigma_1(\mu) = \mu + b - 1, \quad \sigma_2(\mu) = \mu - 1. \quad (\text{VI.128})$$

Можно получить (VI.128) непосредственно из решения уравнения (VI.122), которое для рассматриваемой задачи имеет вид (VI.124) с $F(x) = 0$.

Поскольку $0 < b < 1$, то наибольшим из значений (VI.128) является $\sigma_0(\mu)$. Отсюда следует, что решение $U = 0$ уравнения (VI.120) устойчиво, если $\mu < 0$, и неустойчиво, если $\mu > 0$. Более того, имеет место альтернатива Фредгольма. Рассмотрим задачу

$$f_u(0|v) = g.$$

Мы знаем, что $\sigma_0(0) = 0$ — собственное значение $f_u(0|\cdot)$ и разложение (VI.128) приводится к виду

$$\begin{aligned} -V_3(x) &= F_3(x), \\ 0 &= F_1, \quad (b-1)V_2 = F_2. \end{aligned} \quad (\text{VI.129})$$

Поэтому если $b \neq 1$, то условие совместимости для разрешимости (VI.129) есть $F_1 = 0$; это приводит к условию

$$\int_0^\pi F(x) \sin x \, dx = 0. \quad (\text{VI.130})_1$$

Если $b = 1$, то $\sigma_0(0) = \sigma_1(0) = 0$ — двойное собственное значение $f_u(0|\cdot)$, и, в дополнение к (VI.130), необходимо, чтобы

$$\int_0^\pi F(x) \sin 2x \, dx = 0. \quad (\text{VI.130})_2$$

Несмотря на то что задача (VI.120) поставлена не в контексте гильбертовых пространств, которые были использованы при изложении общей теории этой главы, альтернатива Фредгольма здесь работает хорошо, и мы можем вычислить бифуркационные стационарные решения с помощью разложения по степеням амплитуды ε :

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) &= \varepsilon U_1(x) + \varepsilon^2 U_2(x) + \varepsilon^3 U_3(x) + O(\varepsilon^4), \\ \mu &= \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{\sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y\} U_1(y) \, dy, \\ -\mu_1 U_1(x) + U_2(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{\sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y\} U_2(y) \, dy, \\ -\mu_2 U_1(x) - \mu_1 U_2(x) + U_3(x) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{\sin x \sin y + b \sin 2x \sin 2y\} (U_3(y) + U_1^3(y)) \, dy. \end{aligned}$$

Находим, что

$$\begin{aligned} U(x, \varepsilon) &= \varepsilon \sin x + O(\varepsilon^3), \\ \mu &= -\frac{3}{4} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{VI.131})$$

Бифуркационное решение является односторонним и субкритическим; следовательно, оно неустойчиво.

Бифуркационная задача, ассоциированная с (VI.120), имеет специфические особенности, которые дают возможность точного вычисления всех бифуркационных ветвей. Сначала заметим, что для всех стационарных решений (VI.120) имеет место $U(x) = 0$ для $x = 0$ и $x = \pi$. Поэтому мы можем разложить $U(x)$ в ряд Фурье по синусам и найдем, что все коэффициенты Фурье, за исключением первых двух, равны нулю. Поэтому

$$U(x) = u_1 \sin x + u_2 \sin 2x,$$

и (VI.120) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mu u_1 + \frac{3}{4} u_1^3 + \frac{3}{2} u_1 u_2^2 &= 0, \\ (\mu + b - 1) u_2 + \frac{3}{2} b u_1^2 u_2 + \frac{3}{4} b u_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.132})$$

Решения (VI.132) суть:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 &= 0 \text{ (нулевое решение),} \\ u_1 &= \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-\mu}, \quad u_2 = 0 \text{ (решение (VI.131)),} \\ u_1 &= 0, \quad u_2 = \pm (2/\sqrt{3}) \sqrt{-(\mu + b - 1)/b}, \\ u_1^2 &= \frac{4}{9} \left[\frac{2}{b} (1 - \mu) + \mu - 2 \right], \quad u_2^2 = \frac{4}{9} \left[\frac{\mu - 1}{b} + 1 - 2\mu \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.133})$$

Упражнение

VI.1. Покажите, что вторичное бифуркационное решение ответвляется от (VI.133)₁ при $\mu = (b-1)/(2b-1)$, если $b > 1/2$.

Пример VI.2 (Бифуркация решений уравнений с частными производными). Рассмотрим следующее уравнение с частными производными:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{4}(\mu - 1)U - \mu x \frac{\partial U}{\partial x} + U^2 - 4U \frac{\partial U}{\partial x} + 4U \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (\text{VI.134})_1$$

где U — вещественная функция, определенная для $t \geq 0$, $0 \leq x \leq \pi$, и удовлетворяющая граничным условиям

$$U(t, 0) = \frac{\partial U}{\partial x}(t, \pi) = 0. \quad (\text{VI.134})_2$$

В этом примере возьмем $H = L^2(0, \pi)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на $(0, \pi)$, которое является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t) \rangle = \int_0^\pi U(t, x) \bar{V}(t, x) dx,$$

где $\mathbf{u}(t) = U(t, \cdot)$ — вектор с разными компонентами $\mathbf{u}(t)(x)$ для каждого x . Далее мы будем опускать переменную t .

Уравнения (VI.134) имеют в H следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}_u(\mu | \mathbf{u}) + \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (\text{VI.135})$$

где операторы $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ определены для $\mathbf{u} = U(\cdot)$ в подпространстве H , состоящем из $U(\cdot)$, удовлетворяющих граничным условиям $U(0) = \partial U(\pi)/\partial x = 0$ и таких, что U , $\partial U/\partial x$ и $\partial^2 U/\partial x^2$ квадратично интегрируемы на $(0, \pi)$; например, $\langle \partial U/\partial x, \partial U/\partial x \rangle < \infty$. Для более полного определения операторов, входящих в (VI.135), отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u(\mu | \cdot) &= \mathbf{f}_u(0 | \cdot) + \mu \mathbf{f}_{u\mu}(0 | \cdot), \\ [\mathbf{f}_u(0 | \mathbf{u})](x) &= \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{4} U(x), \\ [\mathbf{f}_{u\mu}(0 | \mathbf{u})](x) &= -\frac{1}{4} U(x) + x \frac{\partial U(x)}{\partial x}, \\ [B(\mathbf{u}, \mathbf{v})](x) &= -U(x) V(x) + 2U(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} + 2V(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x}, \\ [C(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})](x) &= -\frac{4}{3} \left\{ U \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \right\}. \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости нулевого решения (VI.134) сначала заметим, что спектр $\mathbf{f}_u(\mu | \cdot)$ состоит только из собственных значений σ , удовлетворяющих краевой задаче

$$\begin{aligned} \sigma U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{4} U + \mu \left(-\frac{1}{4} U + x \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ U(0) &= \frac{\partial U}{\partial x}(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.136})$$

для дважды непрерывно дифференцируемых функций U , не равных тождественно нулю. Аналитическое вычисление собственных значений задачи (VI.136) очень трудно, за исключением случая, когда $\mu = 0$; собственные значения оператора $\mathbf{A}_0$ (отвечающего (VI.136) при $\mu = 0$) суть

$$\sigma(0) = \frac{1}{4} - \frac{(2k+1)^2}{4}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N},$$

а ассоциированные собственные векторы пропорциональны $\sin((2k+1)/2)x$. Нуль является собственным значением $f_a(0|\cdot)$ для $k=0$; другие собственные значения отрицательные.

Критическое собственное значение оператора $f_a(\mu|\cdot)$ для значений μ , близких к нулю, можно получить на основе метода возмущений. Находим, что

$$\sigma(\mu) = \xi'(0)\mu + O(\mu^2),$$

$$\xi'(0) = \langle f_{a\mu}(0|\xi), \xi^* \rangle,$$

где $\xi(x)$ и $\xi^*(x)$ пропорциональны, потому что $f_a(0|\cdot) = f_a^*(0|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} [f_a(0|\cdot)]^*$. Тогда, поскольку

$$\xi(x) = \sin \frac{x}{2}, \quad \xi^*(x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2},$$

имеем

$$\langle \xi, \xi^* \rangle = 1, \quad \xi'(0) = \frac{1}{4} > 0.$$

Следовательно, нулевое решение устойчиво, если $\mu < 0$, и неустойчиво, если $\mu > 0$.

Непосредственно следуя методам, использованным в § VI.2 для построения стационарных бифуркационных решений в виде рядов по степеням амплитуды, положим

$$\begin{bmatrix} u(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \begin{bmatrix} u_n \\ \mu_n \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.137})$$

Из (VI.137) и (VI.135) после отождествления членов при одинаковых степенях ε находим уравнения для коэффициентов рядов Тейлора. В настоящем примере эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_a(0|u_1) &= 0, \\ f_a(0|u_2) + 2\mu_1 f_{a\mu}(0|u_1) + 2B(u_1, u_1) &= 0, \\ f_a(0|u_3) + 3\mu_1 f_{a\mu}(0|u_2) + 6B(u_1, u_2) + \\ &+ 3\mu_2 f_{a\mu}(0|u_1) + 6C(u_1, u_1, u_1) = 0, \\ f_a(0|u_n) + n\mu_{n-1} f_{a\mu}(0|u_1) + \text{члены более низкого порядка} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.138})$$

Из уравнения (VI.138) следует, что $u_1 = \xi$ (см. (VI.7) и (VI.11)). Поэтому

$$U_1(x) = \sin \frac{x}{2}.$$

Далее вычисляем условие разрешимости для (VI.138)₂:

$$\begin{aligned} \mu_1 \langle f_{a\mu}(0|u_1), \xi^* \rangle &= -\langle B(u_1, u_1), \xi^* \rangle = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right\} \sin \frac{x}{2} dx = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\langle f_{u\mu}(0|\xi), \xi^* \rangle = \xi'(0) = 1/4$, то $\mu_1 = 0$ и

$$f_u(0|u_2) = -2B(\xi, \xi), \quad \langle u_2, \xi^* \rangle = 0. \quad (VI.139)$$

Уравнение (VI.139) эквивалентно уравнениям

$$\begin{aligned} U_2'' + \frac{1}{4} U_2 &= 1 - \cos x - 2 \sin x, \\ U_2(0) &= U_2'(\pi), \\ 0 &= \int_0^\pi U_2(x) \sin \frac{x}{2} dx. \end{aligned} \quad (VI.140)$$

Единственное решение (VI.140) имеет вид (упражнение для читателя)

$$U_2(x) = 4 - \frac{32}{3\pi} \sin \frac{x}{2} - \frac{16}{3} \cos \frac{x}{2} + \frac{4}{3} \cos x + \frac{8}{3} \sin x. \quad (VI.141)$$

В функциональных обозначениях запишем (VI.141) в виде

$$u_2 = -2f_u^{-1}(0|B(\xi, \xi)),$$

имея в виду, что u_2 принадлежит подпространству, ортогональному ξ^* .

Для того чтобы решить уравнение (VI.138)₃, мы должны сначала вычислить

$$\begin{aligned} 6 \langle B(\xi, u_2), \xi^* \rangle &= 20 - \frac{176}{3\pi}, \\ 6 \langle C(\xi, \xi, \xi), \xi^* \rangle &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому условие разрешимости (VI.138)₃ дает

$$3\mu_2 \xi'(0) - \frac{3}{2} + 20 - \frac{176}{3\pi} = 0, \quad (VI.142)$$

или $\mu_2 \approx 0.232$.

Окончательно бифуркационное решение можно представить в виде

$$U(x) = \varepsilon \sin \frac{x}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} U_2(x) + O(\varepsilon^3), \quad (VI.143)_1$$

где U_2 определяется выражением (VI.141) и

$$\mu \approx 0.116\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (VI.143)_2$$

Бифуркационное решение является суперкритическим; если $|\varepsilon|$ мало, то оно существует только для $\mu > 0$ и имеет две ветви: $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$. Обе ветви устойчивые.

Пример VI.3 (На котором читатель может проверить себя — может ли он идти дальше!). Рассмотрим следующую систему урав-

нений с частными производными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial U_2}{\partial x} - \lambda U_1 - U_1 U_2 &= 0, \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} - \lambda^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \lambda^4 U_2 - U_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\lambda x}{2} \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.144})_1$$

где $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, а функции U_1 и U_2 удовлетворяют граничным условиям

$$U_i(0, t) = U_i(1, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{VI.144})_2$$

(Для эволюционной задачи должны быть заданы некоторые начальные условия: $U_i(x, 0)$, $i = 1, 2$.)

(1) Пространством H здесь является $\{L^2(0, 1)\}^2 = \{(u_1, u_2) : u_i \in L^2(0, 1), i = 1, 2\}$ со скалярным произведением

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle = \int_0^1 (u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2) dx.$$

Покажите, что собственные значения линеаризованного оператора, появляющегося при исследовании устойчивости нулевого решения (VI.144)₁, имеют вид $-\lambda^2 k^2 \pi^2 + \lambda^4$ и $\lambda - k^2 \pi^2 / \lambda$, где $k = 1, 2, \dots$. Поэтому если $0 < \lambda < \pi$, то все собственные значения вещественные и отрицательные, в то время как при $\lambda > \pi$ некоторые собственные значения положительные. Следовательно, нулевое решение устойчиво, если $\lambda < \pi$, и неустойчиво, если $\lambda > \pi$. Если $\mu = \lambda - \pi = 0$, то собственное значение, равное нулю, является двойным и имеет индекс 1; собственные векторы можно взять такими:

$$\xi_1(x) = \begin{bmatrix} \sin \pi x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi_2(x) = \begin{bmatrix} x \sin \pi x \\ (2/\pi) \sin \pi x \end{bmatrix}.$$

(2) Покажите, что сопряженный оператор $f_u^*(0|\cdot)$ имеет вид

$$f_u^*(0|u) = \begin{bmatrix} (1/\pi) U_1'' + \pi U_1 \\ \pi^2 U_2'' + U_1 + \pi^4 U_2 \end{bmatrix}, \quad \text{где } u = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad U_i \equiv \frac{\partial U_i}{\partial x},$$

и U_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют граничным условиям (VI.144)₂. Вычислите собственные векторы ξ_1^* , ξ_2^* оператора $f_u^*(0|\cdot)$, такие, что $\langle \xi_i, \xi_j^* \rangle = \delta_{ij}$. Покажите, что можно взять

$$\xi_1^*(x) = \begin{bmatrix} 2 \sin \pi x \\ \left(-\frac{x}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} - \frac{\pi}{2} \right) \sin \pi x \end{bmatrix}, \quad \xi_2^*(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \sin \pi x \end{bmatrix}.$$

(3) Теперь мы обратимся к ситуации § VI.12 и найдем бифуркационное стационарное решение вида

$$u(\mu) = \mu u_1 + \frac{1}{2} \mu^2 u_2 + O(\mu^3), \quad \mu = \lambda - \pi, \quad (\text{VI.145})_1$$

где

$$\mathbf{u}_1 = \chi_0 \xi_1 + \theta_0 \xi_2. \quad (\text{VI.145})_2$$

Подставляя (VI.145) в (VI.144), получаем для χ_0 , θ_0 систему двух нелинейных уравнений (см. (VI.113)):

$$\begin{aligned} a_1 \chi_0 + b_1 \theta_0 + \alpha_1 \chi_0^2 + 2\beta_1 \chi_0 \theta_0 + \gamma_1 \theta_0^2 &= 0, \\ a_2 \chi_0 + b_2 \theta_0 + \alpha_2 \chi_0^2 + 2\beta_2 \chi_0 \theta_0 + \gamma_2 \theta_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.146})$$

Вычислите коэффициенты в (VI.146) и покажите, что $a_1 = 2$, $b_1 = -1 - \pi^2$, $a_2 = 0$, $b_2 = 2\pi^3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = -(16/3\pi^2) - (64/9\pi^4)$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = (4/3\pi)(-1 + (2/\pi) + (1/\pi^3))$, $\gamma_2 = -8/3\pi$. Покажите, что два конических сечения (VI.146) пересекаются в начале и еще в одной (и только одной) другой точке. Эта другая точка соответствует бифуркационному стационарному решению.

(4) Теперь попытайтесь найти стационарные бифуркационные решения в форме

$$\mathbf{u}(\varepsilon) = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + O(\varepsilon^3), \quad \mu = \varepsilon \mu_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^3),$$

где $\mathbf{u}_1 = \xi_1 + \theta_0 \xi_2$. Покажите, что все решения, найденные в (3), можно представить в виде рядов по степеням ε ; однако, возможно, существует другое решение, не найденное в (3), для которого $\theta_0 = 0$ и $\mu_1 = 0$. Установите, действительно ли реализуется такая возможность, и пришлите ответ авторам. (Если ваша работа окажется корректной, то вы получите поздравительное письмо от одного из нас.)

Пример VI.4. (Теория несовершенств). В этом примере мы рассматриваем задачу, используя наши аналитические методы. Эту же задачу Матковский и Райсс (1977; см. замечания к гл. III этой книги) изучали на основе использования их метода выбора соответствующих асимптотических разложений.

Рассматриваемая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda [G(U) + \delta g(x, U)], \\ U(t, x) &= 0 \text{ при } x=0, \pi, \end{aligned} \quad (\text{VI.147})$$

где $0 \leq x \leq \pi$ и $t \geq 0$. Мы сначала исследуем бифуркацию стационарных решений, когда $\delta = 0$. Затем мы нарушим бифуркацию, считая $\delta \neq 0$.

Конкретизируя (VI.147), будем считать, что

$$G(U) = \sum_{n \geq 1} a_n U^n, \quad a_1 > 0, \quad (\text{VI.148})$$

причем этот ряд сходится для достаточно малых $|U(t, x)|$, и что $g(x, 0) \neq 0$.

$$(\text{VI.149})$$

Условие (VI.149) гарантирует, что $U=0$ не является решением (VI.147) при $\delta \neq 0$.

В этом примере, как и в примере VI.2, $H=L^2(0, \pi)$ с тем же самым скалярным произведением. Определим линейризованный «производный» оператор

$$f_u(\mu|u) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda a_1 U = f_u(0|u) + \mu f_{u\mu}(0|u),$$

где $\mu = \lambda - 1/a_1$; его областью определения служит пространство

$$\left\{ u \stackrel{\text{def}}{=} U(\cdot) \in H: U(0) = U(\pi) = 0, \text{ где } U, \partial U / \partial x, \partial^2 U / \partial x^2 \text{ квадратично интегрируемы на } (0, \pi) \right\}^1.$$

Собственные значения оператора $f_u(\mu|\cdot)$ суть $\sigma_n = \lambda a_1 - n^2$, $n=1, 2, \dots$. Поэтому нулевое решение (VI.147) устойчиво, если $\mu < 0$, и неустойчиво, если $\mu > 0$.

Обращаясь теперь к построению бифуркационного решения (которое существует только если $\delta=0$), находим, что

$$u = \varepsilon \xi + \frac{\varepsilon^2}{2} u_2 + \frac{\varepsilon^3}{6} u_3 + O(\varepsilon^4), \quad \mu = \varepsilon \mu_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mu_2 + O(\varepsilon^3),$$

при этом

$$\begin{aligned} f_u(0|\xi) &= 0, \\ f_u(0|u_2) + 2a_1\mu_1\xi + \frac{2a_2\xi^2}{a_1} &= 0, \\ f_u(0|u_3) + 3a_1\mu_2\xi + 3a_1\mu_1u_2 + \frac{6a_2\xi u_2}{a_1} + \frac{6a_3\xi^3}{a_1} + 6\mu_1a_2\xi^2 &= 0, \\ f_u(0|u_n) + na_1\mu_{n-1}\xi + \text{члены более низкого порядка} &= 0. \end{aligned}$$

Возьмем

$$\xi(x) = \sin x, \quad \xi^*(x) = \frac{2}{\pi} \sin x,$$

так что

$$\mu_1 = -\frac{a_2}{a_1^2} \frac{8}{3\pi}.$$

Если $a_2=0$, то получаем $\mu_1=0$ и $u_2=0$, и тогда $\mu_2 = -3a_3/(2a_1^2)$. Поэтому бифуркационное решение (VI.147) с $\delta=0$ является двусторонним, если $a_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \varepsilon \sin x + O(\varepsilon^2), \\ \mu &= \lambda - \frac{1}{a_1} = -\frac{8a_2}{3\pi a_1^2} + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{VI.150})$$

¹⁾ Это пространство есть алгебра, т. е. произведение любых его двух элементов также принадлежит ему. Выражения, подобные ξu_2 , суть билинейные функционалы в этом пространстве.

или односторонним, если $a_2 = 0$ и $a_3 \neq 0$:

$$\begin{aligned} U(x) &= \varepsilon \sin x + O(\varepsilon^2), \\ \mu &= \lambda - \frac{1}{a_1} = -\frac{3a_3}{4a_1^2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{VI.151})$$

Изучим теперь задачу с дефектом ($\delta \neq 0$), используя обозначения § VI.10. Имеем

$$0 = \tilde{\mathcal{F}}(\mu, u, \delta) \equiv f_u(0 | u) + \mu f_{u\mu}(0 | u) + \left(\mu + \frac{1}{a_1}\right) \left[\sum_{n \geq 2} a_n u^n + \delta g(\cdot, u) \right]. \quad (\text{VI.152})$$

Будем предполагать, что

$$g(\cdot, u) = g_0 + g_1 u + O(u^2), \quad (\text{VI.153})$$

где g_i суть известные функции на $[0, \pi]$. Условие (VI.71) здесь принимает вид

$$\frac{1}{a_1} \langle g_0, \xi^* \rangle \neq 0,$$

или

$$\int_0^\pi g_0(x) \sin x \, dx \neq 0. \quad (\text{VI.154})$$

Найдем теперь $u(\mu, \varepsilon)$ и $\delta = \Delta(\mu, \varepsilon)$, где

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \langle u, \xi^* \rangle. \quad (\text{VI.155})$$

Формулы (VI.79), (VI.80) приводят к выражениям

$$\Delta_{\varepsilon\varepsilon} = -2a_2 \frac{\langle \xi^2, \xi^* \rangle}{\langle g_0, \xi^* \rangle}, \quad \Delta_{\mu\varepsilon} = \frac{-a_1^2}{\langle g_0, \xi^* \rangle},$$

и поэтому получаем зависимость

$$\delta = - \left(\frac{8}{3\pi} a_2 \varepsilon^2 + a_1^2 \varepsilon \mu \right) \langle g_0, \xi^* \rangle^{-1} + O[|\varepsilon|(|\varepsilon| + |\mu|)^2],$$

которая описывает разрушение бифуркации (VI.150) при $a_2 \neq 0$. В случае, когда $a_2 = 0$, имеем $\Delta_{\varepsilon\varepsilon} = 0$, $u_{\varepsilon\varepsilon} = 0$ и

$$\Delta_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = -\frac{6a_3 \langle \xi^3, \xi^* \rangle}{\langle g_0, \xi^* \rangle}, \quad \Delta_{\mu\varepsilon\varepsilon} = \frac{2a_1^2 \langle g_1 \xi, \xi^* \rangle}{\langle g_0, \xi^* \rangle^2}, \quad \Delta_{\mu\mu\varepsilon} = \frac{2a_1^3}{\langle g_0, \xi^* \rangle}.$$

Поэтому если $a_2 = 0$, то разрушение бифуркации (VI.151) описывается зависимостью

$$\delta = \left[-a_1^2 \varepsilon \mu - \frac{3a_3}{4} \varepsilon^3 + a_1^2 \frac{\langle g_1 \xi, \xi^* \rangle}{\langle g_0, \xi^* \rangle} \mu \varepsilon^2 + a_1^3 \mu^2 \varepsilon \right] \langle g_0, \xi^* \rangle^{-1} + O(|\varepsilon| (|\varepsilon| + |\mu|)^3). \quad (\text{VI.156})$$

Отметим, что равенство $\delta = 0$ снова дает бифуркационные решения (VI.150), (VI.151). Если $a_2 \neq 0$, то зависимость $\mu(\varepsilon, \delta/\varepsilon)$ имеет вид

$$\mu = -\frac{\langle g_0, \xi^* \rangle}{a_1^2} \frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{8}{3\pi} \frac{a_2}{a_1^2} \varepsilon + O\left(|\varepsilon| + \left|\frac{\delta}{\varepsilon}\right|\right)^2. \quad (\text{VI.157})$$

Если же $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$, то

$$\mu = -\frac{\langle g_0, \xi^* \rangle}{a_1^2} \frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{3a_3}{4a_1^2} \varepsilon^2 - \frac{\langle g_1 \xi, \xi^* \rangle}{a_1^2} \frac{\delta}{\varepsilon} \varepsilon + \frac{\langle g_0, \xi^* \rangle^2}{a_1^3} \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 + O\left(|\varepsilon| + \left|\frac{\delta}{\varepsilon}\right|\right)^3.$$

БИФУРКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ (БИФУРКАЦИЯ ХОПФА) НА ПЛОСКОСТИ

До сих пор среди равновесных решений рассматривались только стационарные. Теперь мы покажем, как периодическое по времени решение может родиться из бифуркации стационарного решения. В этом случае симметрия правых частей уравнений, первоначально не зависевших от времени, разрушается периодическим по времени решением. Тогда динамическая система ведет себя «самостоятельно» в том смысле, что решение не отвечает симметрии правых частей уравнений.

Следуя процедуре, уже принятой для стационарных решений, мы начнем с задач наименьшей размерности, в которых имеет место характерная бифуркация, и затем, используя метод проекции, покажем, что к этой задаче приводятся задачи более высокой размерности.

§ VII.1. Структура двумерной задачи, описывающей бифуркацию Хопфа

Задача бифуркации стационарного потока в периодический по времени поток является существенно двумерной. В одномерной задаче невозможно, чтобы периодическое по времени решение отвечало от стационарного решения. В двумерном автономном случае снова рассмотрим эволюционную задачу (IV.2):

$$\dot{u}_i = A_{ij}(\mu) u_j + B_{ijk}(\mu) u_j u_k + \text{ч. в. п.}, \quad (\text{VII.1})$$

где $\dot{u}_i \stackrel{\text{def}}{=} du_i/dt$, а $A_{ij}(\mu)$ суть компоненты $\mathbf{A}(\mu)$.

Мы предполагаем, что дискриминант $(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}$ отрицателен в окрестности $\mu = 0$. Тогда собственные значения $\sigma(\mu) = \zeta(\mu) + i\eta(\mu)$ и собственные векторы $\xi(\mu)$ матрицы $\mathbf{A}(\mu)$ являются комплексно-сопряженными и

$$\sigma(\mu) \xi = \mathbf{A} \xi \quad (\sigma \xi_i = A_{ij} \xi_j), \quad (\text{VII.2})_1$$

$$\sigma(\mu) \bar{\xi}^* = \mathbf{A}^T \bar{\xi}^*, \quad (\text{VII.2})_2$$

где $\bar{\xi}^*(\mu)$ — сопряженный собственный вектор, отвечающий собственному значению $\bar{\sigma}(\mu)$, со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x \cdot \bar{y}$. Можно

ввести следующую нормировку:

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi^* \rangle &= \xi \cdot \bar{\xi}^* = \xi_k \bar{\xi}_k^* = 1, \\ \langle \xi, \bar{\xi}^* \rangle &= \xi_k \xi_k^* = 0.\end{aligned}\quad (\text{VII.3})$$

Собственные значения $\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu)$ порождаются спектральной задачей при исследовании устойчивости решения $u_i = 0$ системы (VII.1). Мы предполагаем, что эта потеря устойчивости происходит при $\mu = 0$, так что $\xi(0) = 0$. Мы будем исследовать бифуркацию в периодические решения при выполнении следующих условий:

$$\eta(0) = \omega_0 \neq 0 \text{ и } \frac{d\xi(0)}{d\mu} = \xi_\mu(0) \neq 0 \quad (\text{VII.4})$$

(скажем, $\xi_\mu(0) > 0$).

§ VII.2. Амплитудное уравнение для бифуркации Хопфа

Для того чтобы доказать бифуркацию в периодические решения при выполнении условий (VII.4), заметим, что ξ и $\bar{\xi}$ независимы и поэтому любой вещественный двумерный вектор $u = (u_1, u_2)$ можно представить в виде

$$u_i = a(t) \xi_i + \bar{a}(t) \bar{\xi}_i.$$

Подставляя эти соотношения в (VII.1) и используя (VI.2), находим

$$\begin{aligned}\dot{a} \xi_i + \dot{\bar{a}} \bar{\xi}_i &= \sigma(\mu) \xi_i + \bar{\sigma}(\mu) \bar{\xi}_i + a^2 B_{ijk} \xi_j \xi_k + 2|a|^2 B_{ijk} \xi_i \bar{\xi}_k + \\ &\quad + \bar{a}^2 B_{ijk} \bar{\xi}_j \bar{\xi}_k + O(|a|^3).\end{aligned}$$

Используем теперь свойства ортогональности (VII.3) для приведения последних уравнений к одному комплексному амплитудному уравнению:

$$\dot{a} = f(\mu, a) = \sigma(\mu) a + \alpha(\mu) a^2 + 2\beta(\mu) |a|^2 + \gamma(\mu) \bar{a}^2 + O(|a|^3), \quad (\text{VII.5})$$

где, например, $\alpha(\mu) = B_{ijk}(\mu) \xi_j \xi_k \bar{\xi}_i^*$. (Для простоты в этой главе отбросим в $f(\mu, a)$ кубические члены. В бифуркационном решении наличие этих членов скажется во втором порядке, однако их учет не приводит к каким-либо новым особенностям. В гл. VIII мы сохраним отбрасываемые здесь члены.) Устойчивость по первому приближению решения $a = 0$ уравнения (VII.5) определяется уравнением $\dot{a} = \sigma(\mu) a$, $a = \text{const} \times e^{\sigma(\mu)t}$. В критической точке ($\mu = 0$) решение $a = \text{const} \times e^{i\omega_0 t}$ является 2π -периодичным по $s = \omega_0 t$.

§ VII.3. Решение в виде рядов

Покажем, что бифуркация периодического по времени решения может быть построена из решения линеаризованной задачи в критической точке. Это бифуркационное решение представимо в форме

$$a(t) = b(s, \varepsilon), \quad s = \omega(\varepsilon)t, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \mu = \mu(\varepsilon), \quad (\text{VII.6})_1$$

где ε — это амплитуда, определяемая соотношением

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-is} b(s, \varepsilon) ds = [b]. \quad (\text{VII.6})_2$$

Решение (VII.6) уравнения (VII.5) единственно с точностью до произвольного переноса начала отсчета времени. Это означает, что при замене $t \rightarrow t + c$ решение $b(s + c\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ изменяет свою фазу. Это единственное решение является аналитическим по ε , если функция $f(\mu, a)$ аналитическая по переменным $(\mu, a, \bar{a})$, и может быть представлено в виде ряда

$$\begin{bmatrix} b(s, \varepsilon) \\ \omega(\varepsilon) - \omega_0 \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \begin{bmatrix} b_n(s) \\ \omega_n \\ \mu_n \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.7})$$

VII.4. Уравнения для коэффициентов рядов Тейлора

Возмущенные задачи для определения $b_n(s)$, ω_n и μ_n можно получить в результате подстановки (VII.7) в уравнения $\dot{\omega}b = f(\mu, b)$ и $\varepsilon = [b]$ и приравнивания в их левых и правых частях членов при одинаковых степенях ε . В первом приближении находим

$$\omega_0 \dot{b}_1 - i\omega_0 b_1 = 0, \quad [b_1] = 1, \quad b_1(s) = e^{is}.$$

Во втором приближении находим, что $[b_2] = 0$ и

$$\omega_0 [\dot{b}_2 - ib_2] + \omega_1 \dot{b}_1 = \mu_1 \sigma_\mu b_1 + \alpha_0 b_1^2 + 2\beta_0 |b_1|^2 + \gamma_0 \bar{b}_1^2,$$

где $\sigma_\mu = d\sigma(0)/d\mu$ и, например, $\alpha_0 = \alpha(0)$.

§ VII.5. Условия разрешимости (альтернатива Фредгольма)

Уравнения вида $\dot{b}(s) - ib(s) = f(s) = f(s + 2\pi)$ разрешимы для $b(s) = b(s + 2\pi)$ тогда и только тогда, когда ряд Фурье для $f(s)$ не содержит члена, пропорционального e^{is} . Поэтому, поскольку $\xi_\mu \neq 0$, получаем $\mu_1 = \omega_1 = 0$ в (VII.7) и

$$\dot{b}_2 - ib_2 = \frac{(\alpha_0 e^{2is} + 2\beta_0 + \gamma_0 e^{-2is})}{\omega_0}.$$

Отсюда находим

$$b_2(s) = \frac{(\alpha_0 e^{2is} - 2\beta_0 - (\gamma_0 e^{-2is}/3))}{i\omega_0}.$$

В третьем приближении, пренебрегая кубическими относительно b членами¹⁾, имеем задачу

$$\dot{b}_3 - ib_3 = \frac{\{-\omega_2 \dot{b}_1 + \mu_2 \sigma_\mu b_1 + 2\alpha_0 b_1 b_2 + 2\beta_0 (b_1 \bar{b}_2 + \bar{b}_1 b_2) + 2\gamma_0 \bar{b}_1 \bar{b}_2\}}{\omega_0}. \quad (\text{VII.8})$$

Для решения задачи (VII.8) мы должны исключить в правой части (VII.8) члены, пропорциональные e^{is} . Для этого необходимо, чтобы $[b_3] = 0$, т. е. чтобы

$$i\omega_2 - \mu_2 \sigma_\mu = - \frac{\{4\alpha_0 \beta_0 - 4|\beta_0|^2 - 2\alpha_0 \beta_0 - (2|\gamma_0|^2/3)\}}{i\omega_0}. \quad (\text{VII.9})$$

Вещественная часть (VII.9) разрешима относительно μ_2 , если $\xi_\mu \neq 0$. Мнимая часть (VII.9) всегда разрешима относительно ω_2 .

Вычисляя члены более высокого порядка, легко убедиться, что все возмущенные задачи разрешимы при выполнении условий (VII.4) и что $\omega(\epsilon) = \omega(-\epsilon)$, $\mu(\epsilon) = \mu(-\epsilon)$ суть четные функции. Отсюда следует, что периодические решения, ответвляющиеся от стационарных решений, ответвляются либо с одной, либо с другой стороны от критической точки, и никогда с обеих сторон; периодические бифуркационные решения не могут образовывать двусторонней или транскритической бифуркации (см. рис. II.3 и VII.2).

§ VII.6. Теория Флоке

Теория Флоке представляет собой линейную теорию устойчивости периодически зависящих от времени решений. Непосредственным объектом исследования теории Флоке служит линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Такие уравнения появляются при исследовании вынужденных T -периодических решений неавтономного линейного уравнения с T -периодическими коэффициентами или при исследовании устойчивости периодических решений стационарных (автономных) задач. Теория устойчивости более сложных решений, например квазипериодических, значительно труднее теории Флоке и не допускает элементарного анализа.

¹⁾ Такие члены приводятся к тройным произведениям, составленным из b_1 и $\bar{b}_1$, и всегда без труда могут быть учтены.

VII.6.1. Теория Флоке в $\mathbb{R}^1$

Начнем с анализа устойчивости T -периодических решений $U(t) = U(t+T)$ уравнения $\dot{V} = F(V, t) = F(V, t+T)$, где $F(0, t) = F(0, t+T) \neq 0$ — известная T -периодическая функция. Положим $V = U(t) + u$. Тогда уравнение

$$\begin{aligned}\dot{u} &= F(U(t) + u, t) - F(U(t), t) = \\ &= f(u, t) = f(u, t+T)\end{aligned}\quad (\text{VII.10})$$

имеет «локальную форму», $f(0, t) = 0$, и $f(u, t)$ допускает тейлоровское разложение: $f(u, t) = a_1(t)u + a_2(t)u^2 + O(|u|^3)$, где $a_i(t) = a_i(t+T)$. Линеаризованная эволюционная задача описывается уравнением

$$\dot{v} = a_1(t)v, \quad (\text{VII.11})$$

и

$$v(t) = \left(\exp \int_0^t a_1(s) ds \right) v_0. \quad (\text{VII.12})$$

Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (VII.11), для которого $v(0) = v_0 = 1$,

$$\varphi(t) = \exp \int_0^t a_1(s) ds.$$

Поскольку $a_1(t) = a_1(t+T)$, то имеем

$$\int_T^{t+T} a_1(s) ds = \int_0^t a_1(s) ds$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(t+T) &= \left(\exp \int_T^{t+T} a_1(s) ds \right) \left(\exp \int_0^T a_1(s) ds \right) = \varphi(t) \varphi(T), \\ \varphi(2T) &= \varphi(T) \varphi(T), \quad \varphi(nT) = \varphi^n(T).\end{aligned}\quad (\text{VII.13})$$

Функция

$$\varphi(T) = e^{\sigma T}, \quad (\text{VII.14})$$

удовлетворяющая функциональному уравнению (VII.13), называется *множителем Флоке*, а числа σ называются *экспонентами Флоке*. Экспоненты определяются множителем неоднозначно:

$$\sigma = \frac{1}{T} \ln \varphi(T) + \frac{2k\pi i}{T}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{VII.15})$$

Экспоненты являются собственными значениями приводимого ниже дифференциального уравнения (VII.17). Определим функцию

$$\xi(t) = \varphi(t) e^{-\sigma t}.$$

Тогда

$$\zeta(t+T) = \varphi(t+T) e^{-\sigma t} e^{-\sigma T} = \varphi(t) e^{-\sigma t} = \zeta(t), \quad (\text{VII.16})$$

и $\zeta(t)$ является T -периодической, а поскольку $\dot{\varphi} = a_1(t) \varphi$, то

$$\sigma \zeta = -\dot{\zeta} + a_1(t) \zeta. \quad (\text{VII.17})$$

Поэтому общее решение уравнения (VII.11) можно записать в виде

$$v(t) = \zeta(t) e^{\sigma t} v_0,$$

где $\zeta(t) = \zeta(t+T)$. Если $\sigma < 0$, то $v(t) \rightarrow 0$ экспоненциально. Если $\sigma > 0$, то $v(t) \rightarrow \infty$. Эквивалентно, если $\varphi(T) = \exp \int_0^T a_1(s) ds < 1$, то $v(t) \rightarrow 0$.

Покажем теперь, что если $\varphi(T) < 1$ (или, что эквивалентно, если $\sigma < 0$), то решение $u=0$ уравнения (VII.10) условно устойчиво. Доказательство почти совпадает с приведенным в § II.7 для автономной задачи. Сначала перепишем (VII.10) в виде

$$\dot{u} = a_1(t) u + b(t, u). \quad (\text{VII.18})$$

Это эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(t) u_0 + \int_0^t \varphi(t) \varphi^{-1}(s) b(s, u(s)) ds = \\ &= \zeta(t) e^{\sigma t} u_0 + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \zeta(t) \zeta^{-1}(s) b(s, u(s)) ds, \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

где $\varphi^{-1} = 1/\varphi$, $\zeta^{-1} = 1/\zeta$. Чтобы это увидеть, проще всего продифференцировать (VII.19). Получаем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{d}{dt} (\zeta(t) e^{\sigma t}) u_0 + b(t, u(t)) + \int_0^t \frac{d}{dt} (\zeta(t) e^{\sigma t}) e^{-\sigma s} \zeta^{-1}(s) b(s, u(s)) ds, \\ \frac{d}{dt} (\zeta(t) e^{\sigma t}) &= a_1(t) e^{\sigma t} \zeta(t) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{u} &= b(t, u(t)) + a_1(t) \left\{ \zeta(t) e^{\sigma t} u_0 + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \zeta(t) \zeta^{-1}(s) b(s, u(s)) ds \right\} = \\ &= b(t, u(t)) + a_1(t) u. \end{aligned}$$

Дальше доказательство совпадает с приведенным в § II.7. Мы находим, что решение $u=0$ экспоненциально устойчиво, если u_0 достаточно мало и $\sigma < 0$.

VII.6.2. Теория Флоке в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^n$

Если u — вектор, то теория Флоке обладает некоторыми новыми особенностями. Однако переход от $\mathbb{R}^2$ к $\mathbb{R}^n$ с $n > 2$ не вносит новых свойств в обобщенную теорию Флоке. Поэтому мы можем излагать эту теорию для уравнения

$$\frac{dv}{dt} = A(t) \cdot v, \quad (\text{VII.20})$$

где v — вектор с n компонентами, а

$$A(t) = A(t + T) \quad (\text{VII.21})$$

есть T -периодическая $(n \times n)$ -матрица, рассматривая случай $n = 2$ в качестве примера.

Матрица $A(t)$ может получаться в результате линеаризации неавтономного уравнения $\dot{V} = F(t, V) = F(t + T, V)$, $F(t, 0) \neq 0$, имеющего T -периодические решения $V = U(t) = U(t + T)$. Линеаризация этого нелинейного уравнения, приведенного к «локальной форме», дает

$$\begin{aligned} V &= U(t) + v, \\ \dot{v} &= F(t, U(t) + v) - F(t, U(t)) \stackrel{\text{def}}{=} f(t, v), \end{aligned} \quad (\text{VII.22})$$

где $f(t, 0) = 0$ и $f(t + T, v) = f(t, v)$. В этом случае

$$\dot{v} = A(t) \cdot v, \quad (\text{VII.23})_1$$

где

$$A(t) = F_v(t, U(t) | \cdot) = f_v(t | \cdot). \quad (\text{VII.23})_2$$

Если $n > 1$, то периодические решения $u(t) = u(t + T)$ могут отвечаться¹⁾ от стационарных решений $V = V_0$ автономных задач $\dot{V} = F(V)$, $F(0) \neq 0$. Тогда возмущение v в $V = V_0 + u(t) + v$ удовлетворяет T -периодической задаче, приводимой к локальной форме:

$$\dot{v} = F(V_0 + u(t) + v) - F(V_0 + u(t)) \stackrel{\text{def}}{=} f(u(t), v) = f(u(t + T), v), \quad (\text{VII.24})$$

где $f(u(t), 0) = 0$. В этом случае

$$\dot{v} = A(t) v, \quad (\text{VII.25})_1$$

где

$$A(t) = F_v(V_0 + u(t) | \cdot) = f_v(u(t) | \cdot). \quad (\text{VII.25})_2$$

В нашем изложении теории Флоке нет необходимости сохранять различие между периодическими матрицами $A(t) = A(t + T)$, которые

¹⁾ Мы можем иметь также периодические решения автономных задач, не происходящие от указанной бифуркации.

получаются из неавтономных T -периодических задач, и матрицами, получаемыми из автономных задач, имеющих периодическое решение. Однако это различие существенно, потому что неавтономная задача инвариантна по отношению к сдвигу начала отсчета времени на $t = T$, а автономная задача инвариантна по отношению к произвольному сдвигу начала отсчета времени. Математическим следствием этого различия является то обстоятельство, что $\dot{\mathbf{u}}(t)$ есть T -периодическое решение уравнения (VII.25), тогда как $\dot{\mathbf{U}}(t)$ не является T -периодическим решением уравнения (VII.23) (дальнейшее обсуждение этого вопроса см. в предпоследнем абзаце этого подраздела).

Пусть $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ суть линейно независимые решения уравнения $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{v}$ для $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^n$. Тогда любое решение является линейной комбинацией этих двух решений:

$$\mathbf{v}(t) = a\mathbf{v}_1(t) + b\mathbf{v}_2(t). \quad (\text{VII.26})$$

Далее, $\mathbf{v}(t+T)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(t+T) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{v}$, если $\mathbf{v}(t)$ — решение этого уравнения. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t+T) &= a_1\mathbf{v}_1(t) + b_1\mathbf{v}_2(t), \\ \mathbf{v}_2(t+T) &= a_2\mathbf{v}_1(t) + b_2\mathbf{v}_2(t). \end{aligned} \quad (\text{VII.27})$$

Введем следующее определение фундаментального матричного решения в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $v_i^{(j)} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}_i$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) есть j -я компонента вектора $\mathbf{v}_i$. Фундаментальное матричное решение представляет собой любую матрицу, столбцы которой являются компонентами линейно независимых решений уравнения $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что

$$\tilde{\mathbf{V}}(t) = [\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_n(t)] \quad (\text{VII.28})$$

есть фундаментальное матричное решение. Тогда

$$\dot{\tilde{\mathbf{V}}}(t+T) = \mathbf{A}(t+T) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t+T) = \mathbf{A}(t) \tilde{\mathbf{V}}(t+T). \quad (\text{VII.29})$$

Поэтому $\dot{\tilde{\mathbf{V}}}(t+T)$ представляет собой фундаментальное матричное решение, если этим же свойством обладает $\tilde{\mathbf{V}}(t)$. Отсюда следует, что $\tilde{\mathbf{V}}(t+T)$ можно представить в виде линейных комбинаций столбцов матрицы $\tilde{\mathbf{V}}(t)$. Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{V}}(t+T) = \tilde{\mathbf{V}}(t) \cdot \mathbf{C}, \quad (\text{VII.30})$$

где $\mathbf{C}$ — постоянная $(n \times n)$ -матрица, которая на самом деле зависит от $\tilde{\mathbf{V}}(0)$ (и, конечно, является функционалом от $\mathbf{A}(t)$).

В $\mathbb{R}^2$ имеем

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix},$$

и (VII.30) есть не что иное, как (VII.27).

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальное матричное решение с начальным значением, равным единичной матрице:

$$\Phi(0) = I \quad (\Phi_{ij} = \delta_{ij}). \quad (\text{VII.31})$$

Тогда $\Phi(t+T) = \Phi(t) \cdot C$, и поэтому при $t=0$

$$\Phi(T) = C. \quad (\text{VII.32})$$

Значение при $t=T$ фундаментального матричного решения $\tilde{V}(t)$, удовлетворяющего уравнению (VII.29) с начальным условием $\tilde{V}(0) = I$, называется *матрицей монодромии*. Соотношение (VII.30) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t+T) &= \Phi(t) \Phi(T), \\ \Phi(2T) &= \Phi^2(T), \\ \Phi(3T) &= \Phi(2T) \Phi(T) = \Phi^3(T) \end{aligned}$$

и

$$\Phi(nT) = \Phi^n(T). \quad (\text{VII.33})$$

Собственные значения матрицы $\Phi(T)$ называются *множителями Флоке*. Находим, что

$$\begin{aligned} \Phi(T) \cdot \psi &= \lambda(T) \psi, \\ \Phi(nT) \cdot \psi &= \lambda^n(T) \psi, \\ \Phi^n(T) \cdot \psi &= \lambda^n(T) \psi. \end{aligned} \quad (\text{VII.34})$$

Поскольку $\Phi(nT) = \Phi^n(T)$, то имеем $\lambda^n(T) = \lambda(nT)$, и поэтому можно определить *экспоненту Флоке* $\sigma = \xi + i\eta$ соотношением

$$\lambda(T) = \exp \sigma T$$

и записать задачу на собственные значения в виде

$$\Phi(T) \cdot \psi = e^{\sigma T} \psi. \quad (\text{VII.35})$$

Если σ — экспонента Флоке, соответствующая $\lambda(T)$, то $\sigma + (2\pi i k/T)$, $k \in \mathbb{Z}$, является также экспонентой Флоке, соответствующей $\lambda(T)$.

Получим теперь для экспоненты задачу на собственные значения. Сначала определим вектор

$$v(t) = \Phi(t) \cdot \psi. \quad (\text{VII.36})$$

Отсюда тогда следует, что

$$\begin{aligned} v(0) &= \psi, \\ v(t+T) &= \Phi(t+T) \cdot \psi = \Phi(t) \Phi(T) \cdot \psi = \\ &= e^{\sigma T} \Phi(t) \cdot \psi = e^{\sigma T} v(t) \end{aligned}$$

и $\dot{v} = A(t) v$. Определим функцию

$$\xi(t) = e^{-\sigma t} v(t),$$

которая является T -периодической:

$$\xi(t+T) = e^{-\sigma(t+T)} \mathbf{v}(t+T) = e^{-\sigma t} \mathbf{v}(t) = \xi(t), \quad (\text{VII.37})_1$$

$$\dot{\xi} = -\sigma \xi + \mathbf{v} e^{-\sigma t} = -\sigma \xi + \mathbf{A}(t) \xi. \quad (\text{VII.37})_2$$

Уравнения (VII.37) определяют для экспонент Флоке задачу на собственные значения.

Напомним теперь, что $\mathbf{v}(t)$ представляет собой малое возмущение T -периодического решения $\mathbf{U}(t)$ неавтономной задачи или периодического бифуркационного решения $\mathbf{u}(t)$ автономной задачи. Из представлений (VII.36) и (VII.34) находим, что

$$\mathbf{v}(t+nT) = \Phi(t) \Phi(nT) \psi = \lambda^n \Phi(t) \psi,$$

и заключаем, что $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (для значений t , лежащих между nT и $(n+1)T$, $\|\Phi(t)\psi\|$ ограничена сверху и снизу), если $|\lambda| = e^{\epsilon T} < 1$ для всех множителей Флоке $\lambda_i = e^{\sigma_i T}$, принадлежащих спектру матрицы $\Phi(T)$. Эквивалентное утверждение с использованием

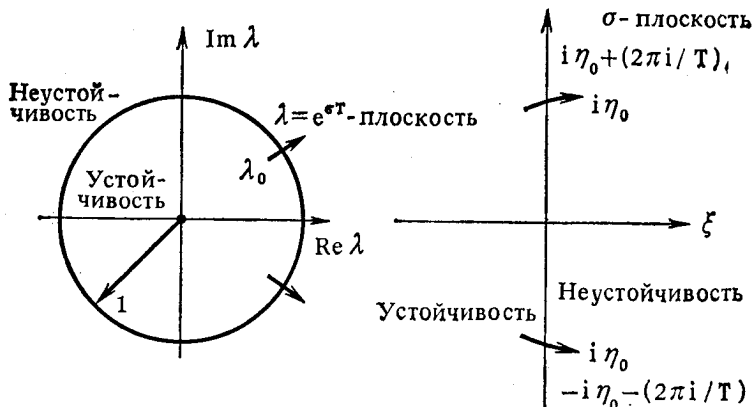


Рис. VII.1. Множители Флоке и экспоненты Флоке. Повторяющиеся точки $i\eta_0 + (2\pi i k/T)$, $k \in \mathbb{Z}$, на мнимой оси σ -плоскости отображаются в одни и те же точки комплексной λ -плоскости. Периодическое решение теряет устойчивость, когда пара комплексно-сопряженных экспонент пересекает мнимую ось σ -плоскости или пара комплексно-сопряженных множителей выходит из единичного круга. Экспонента, пересекающая мнимую ось в начале ($\sigma = 0$), соответствует множителю, выходящему из единичного круга в точке $\lambda = 1$. Экспоненты, пересекающие мнимую ось в точках $\sigma = \pm i\pi/T$, соответствуют множителю $\lambda = -1$. В определенном смысле пересечение единичной окружности является «типичным» (см. упражнение XI.2).

экспонент состоит в том, что $\mathbf{v}(t) = e^{\sigma t} \xi(t)$, $\xi(t) = \xi(t+T)$, стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, если $\xi_n = \text{Re } \sigma_n < 0$ для всех собственных значений σ_n задачи (VII.37). На рис. VII.1 графически представлено влияние на устойчивость множителей и экспонент Флоке.

В заключение отметим снова, что в автономном случае, когда $u(t+T) = u(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{u} = f(u)$, функция $\xi = u$, удовлетворяющая уравнению $\ddot{u} = f_u(u|\dot{u})$, является собственной функцией задачи (VII.37) с собственным значением $\sigma = 0$. Поэтому условная устойчивость решения $u(t)$ (см. монографию Коддингтона и Левинсона, указанную в § IV.2) обеспечивает асимптотическую устойчивость не одного, а множества решений $u(t+\alpha)$, зависящего от фазы α . Если малые возмущения притягиваются к этому множеству, то говорят, что множество периодических решений обладает условной асимптотической орбитальной устойчивостью.

Закончив это длинное отступление в область теории Флоке, мы готовы возвратиться к задаче устойчивости бифуркационных периодических решений.

§ VII.7. Уравнения, определяющие устойчивость периодических решений

Найдем теперь условия устойчивости бифуркационных периодических решений. Рассмотрим малое возмущение $z(t)$ решения $b(s, \epsilon)$. Полагая в (VII.5) $a(t) = b(s, \epsilon) + z(t)$, находим линеаризованное уравнение $\dot{z}(t) = f_a(\mu(\epsilon), b(s, \epsilon))z(t)$, где $f_a = \partial f / \partial a$, а $s = \omega(\epsilon)t$. Затем, используя теорию Флоке, положим $z(t) = e^{\gamma t}y(s)$, где $y(s) = y(s + 2\pi)$, и найдем, что

$$\gamma y(s) = -\omega \dot{y}(s) + f_a(\mu, b)y(s) = [\overset{\text{det}}{J}(s, \epsilon)y](s), \quad (\text{VII.38})$$

где $\dot{y}(s) = dy(s)/ds$.

§ VII.8. Теорема о факторизации

Результат, относящийся к устойчивости, мы сформулируем в виде теоремы о факторизации. Для доказательства этой теоремы мы используем то обстоятельство, что $\gamma = 0$ всегда является собственным значением оператора J с собственной функцией $\dot{b}(s, \epsilon)$:

$$J\dot{b} = 0, \quad (\text{VII.39})$$

а также соотношение

$$\omega_\epsilon(\epsilon)\dot{b}(s, \epsilon) = \mu_\epsilon(\epsilon)f_\mu(\mu(\epsilon), b(s, \epsilon)) + Jb_\epsilon, \quad (\text{VII.40})$$

которое получается в результате дифференцирования уравнения $\omega b = f(\mu, b)$ по ϵ при любом ϵ .

Теорема о факторизации. Собственная функция задачи (VII.38) и экспонента Флоке γ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} y(s, \varepsilon) &= c(\varepsilon) \left\{ \frac{\tau}{\gamma} \dot{b}(s, \varepsilon) + b_\varepsilon(s, \varepsilon) + \mu_\varepsilon(\varepsilon) e q(s, \varepsilon) \right\}, \\ \tau(\varepsilon) &= \omega_\varepsilon(\varepsilon) + \mu_\varepsilon(\varepsilon) \hat{\tau}(\varepsilon), \\ \gamma(\varepsilon) &= \mu_\varepsilon(\varepsilon) \hat{\gamma}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{VII.41})$$

где $c(\varepsilon)$ — произвольная постоянная, а $q(s, \varepsilon) = q(s + 2\pi, \varepsilon)$, $\hat{\tau}(\varepsilon)$ и $\hat{\gamma}(\varepsilon)$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\tau} \dot{b} + \hat{\gamma} b_\varepsilon + f_\mu(\mu, b) + \varepsilon \{ \gamma q - J q \} = 0 \quad (\text{VII.42})$$

и являются гладкими функциями в окрестности $\varepsilon = 0$. Более того, $\hat{\tau}(\varepsilon)$ и $\hat{\gamma}(\varepsilon)/\varepsilon$ суть четные функции и такие, что

$$\hat{\gamma}_\varepsilon(0) = -\xi_\mu(0), \quad \hat{\tau}(0) = -\eta_\mu(0). \quad (\text{VII.43})$$

Замечание. Если $\omega_\varepsilon(0) \neq 0$, то $c(\varepsilon)$ можно выбрать так, что

$$y(s, \varepsilon) \rightarrow b(s, \varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство. Подставим выражения (VII.41) в (VII.38) и используем (VII.39) для исключения $J\dot{b}$ и (VII.40) для исключения Jb_ε . Это приводит к уравнению (VII.42), решение которого можно найти в виде ряда

$$\begin{bmatrix} q(s, \varepsilon) \\ \hat{\gamma}(\varepsilon)/\varepsilon \\ \hat{\tau}(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} q_l(s) \\ \hat{\gamma}_l \\ \hat{\tau}_l \end{bmatrix} \varepsilon^l, \quad (\text{VII.44})$$

где $\hat{\gamma}_0 = \hat{\gamma}_\varepsilon(0)$, а $\hat{\tau}_0 = \hat{\tau}(0)$. Используя то обстоятельство, что в членах наименьшего порядка $b = \varepsilon e^{is}$, $\gamma = O(\varepsilon^2)$ и (из (VII.5)) $f_\mu(\mu, b) = \sigma_\mu(0) e^{is} \varepsilon$, находим, что

$$e^{is} [i\hat{\tau}(0) + \hat{\gamma}_\varepsilon(0) + \sigma_\mu] - J_0 q_0 = 0, \quad J_0 \stackrel{\text{de}}{=} J(\cdot, 0). \quad (\text{VII.45})$$

Уравнение (VII.45) разрешимо относительно $q_0(s) = q_0(s + 2\pi)$ тогда и только тогда, когда выражение в квадратных скобках равно нулю; это выражение равно нулю, если выполняются условия (VII.43). Остальные свойства, содержащиеся в теореме, можно установить, используя степенной ряд (VII.44) и применяя метод математической индукции (см. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981, гл. 2).

Заклучения об устойчивости по первому приближению периодического решения для малых значений ε можно теперь получить из анализа спектральной задачи: решение $u(s, \varepsilon) = u(s + 2\pi, \varepsilon)$ устойчиво, если $\gamma(\varepsilon) < 0$ ($\gamma(\varepsilon)$ — вещественное), и неустойчиво, если $\gamma(\varepsilon) > 0$, где

$$\gamma(\varepsilon) = \mu_\varepsilon(\varepsilon) \hat{\gamma}(\varepsilon) = -\mu_\varepsilon(\varepsilon) \{ \xi_\mu(0) \varepsilon + O(\varepsilon^3) \}. \quad (\text{VII.46})$$

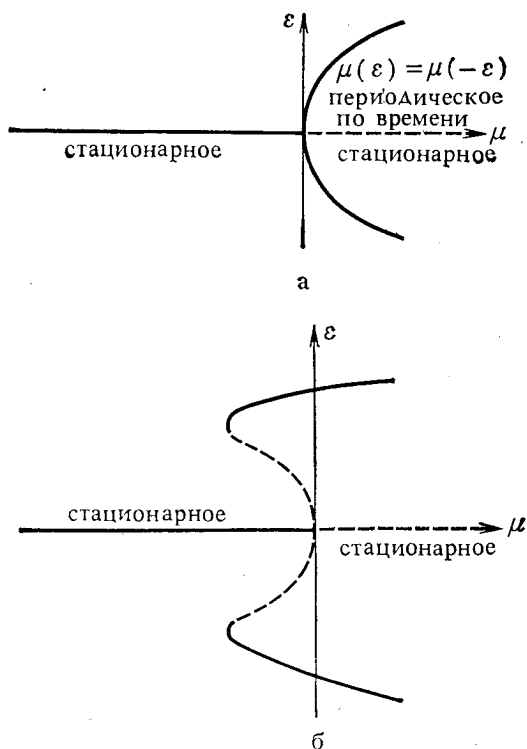


Рис. VII.2. (а) Суперкритическая (устойчивая) бифуркация Хопфа. (б) Субкритическая (неустойчивая) бифуркация Хопфа с экстремальной точкой. В случае (б), если нулевое решение теряет устойчивость строго, когда μ , возрастая, проходит через нуль, то ξ_μ и нулевое решение неустойчиво для $\mu > 0$ (как показано); двойное собственное значение оператора J_0 расщепляется на два простых собственных значения $J(\cdot, \epsilon)$: одно из них есть нуль, а другое ($\gamma(\epsilon)$) определяет характер устойчивости. Для случая (б) $\mu(\epsilon) = \mu(-\epsilon)$ есть бифуркационная кривая периодического по времени решения $u(s, \epsilon)$. Экспонента, соответствующая $u(s, \epsilon)$ и определяющая характер устойчивости, есть $\gamma(\epsilon)$, и $\gamma(\epsilon) = \mu_\epsilon(\epsilon) \hat{\gamma}(\epsilon) = \gamma(-\epsilon) = \mu_\epsilon(\epsilon) \{\hat{\gamma}_\epsilon(0) \epsilon + O(\epsilon^3)\} = \mu_\epsilon(\epsilon) \{-\xi_\mu \epsilon + O(\epsilon^3)\}$. Если $\omega_\epsilon(\epsilon_*) \neq 0$ в экстремальной точке, то в этой точке $\tau \neq 0$, а собственная функция, определяющая характер устойчивости, пропорциональна $u(s, \epsilon_*)$.

§ VII.9. Интерпретация условия устойчивости

Мы уже сделали предположение о том, что решение $u=0$ уравнения (VII.1) теряет устойчивость, когда μ , возрастая, проходит через нуль, и $\xi_\mu(0) > 0$. Поэтому ветви, для которых $\mu_\epsilon(\epsilon) \epsilon > 0$, устойчивые, а ветви, для которых $\mu_\epsilon(\epsilon) \epsilon < 0$, неустойчивые. Имеются две возможности, когда ϵ мало: суперкритическая бифуркация (рис. VII.2(а)) или субкритическая бифуркация (рис. VII.2(б)). Транс-

критические периодические бифуркации, как на рис. II.3, невозможны, потому что $\mu(\varepsilon) = \mu(-\varepsilon)$.

Пример VII.1. (Теорема о факторизации и повторное ветвление периодических решений.) Пусть $F(\mu, V)$ и $\omega(V)$ суть аналитические функции от μ и V , такие что $\omega(0) = 1$, $F(\mu, 0) = 0$, $F(0, V) \neq 0$, если $V \neq 0$, $F_V(\mu, 0) \leq 0$, если $\mu \leq 0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(\mu, x^2 + y^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \omega(x^2 + y^2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (\text{VII.47})$$

Каждое решение (VII.47) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2) F(\mu, x^2 + y^2). \quad (\text{VII.48})$$

Вблизи $x^2 + y^2 = 0$ имеем $F(\mu, x^2 + y^2) \sim F_V(\mu, 0)(x^2 + y^2)$, и поэтому решение $x^2 + y^2 = 0$ устойчиво, если $\mu < 0$, и неустойчиво, если $\mu > 0$. Решение $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ с постоянным радиусом отвечает в точке $(\mu, \varepsilon) = (0, 0)$. Это решение существует, если зависимость $\mu = \mu(\varepsilon^2)$ определяется из уравнения

$$F(\mu, \varepsilon^2) = 0, \quad (\text{VII.49})$$

и оно дается формулами

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} = X, \quad s = \omega(\varepsilon^2) t. \quad (\text{VII.50})$$

Малые возмущения $\psi = x^2 + y^2 - \varepsilon^2$ решения (VII.50) удовлетворяют уравнению $\dot{\psi} = 2\varepsilon^2 F_V(\mu(\varepsilon^2), \varepsilon^2) \psi$. Решение $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ устойчиво (неустойчиво), если $F_V(\mu(\varepsilon^2), \varepsilon^2) < 0$ (> 0). Интересно сформулировать задачу Флоке об устойчивости бифуркационного решения (VII.50).

Находим, что малые возмущения $\varphi(t) = e^{\gamma t} \Gamma(s)$, $s = \omega(\varepsilon^2) t$ решения (VII.50) описываются задачей

$$-\gamma \Gamma + \mathcal{Y}(\varepsilon) \Gamma = 0, \quad \Gamma(s) = \Gamma(s + 2\pi), \quad (\text{VII.51})$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\varepsilon) &= -\omega(\varepsilon^2) \frac{d}{ds} + J(\varepsilon), \\ J(\varepsilon) &= 2\varepsilon^2 F_V(\mu, \varepsilon^2) \begin{bmatrix} \cos^2 s & \sin s \cos s \\ \sin s \cos s & \sin^2 s \end{bmatrix} - \\ &\quad - 2\varepsilon^2 \omega'(\varepsilon^2) \begin{bmatrix} \sin s \cos s & \sin^2 s \\ -\cos^2 s & -\sin s \cos s \end{bmatrix} + \omega(\varepsilon^2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \omega'(\varepsilon^2) &= \frac{d\omega(\varepsilon^2)}{d\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\dot{X} \equiv dX/ds$ является решением спектральной задачи (VII.51) с $\gamma = 0$. Это решение и решение $X_\varepsilon \equiv dX/d\varepsilon$ независимы.

Задача

$$-\gamma \bar{\Gamma}^* + \mathcal{Y}^* \bar{\Gamma}^* = 0, \quad \bar{\Gamma}^*(s) = \bar{\Gamma}^*(s + 2\pi), \quad (\text{VII.52})$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^*(e) &= \omega(e^2) \frac{d}{ds} + J^*(e), \\ J^*(e) &= 2e^2 F_V(\mu, e^2) \begin{bmatrix} \cos^2 s & \sin s \cos s \\ \sin s \cos s & \sin^2 s \end{bmatrix} - \\ &- 2e^2 \omega'(e^2) \begin{bmatrix} \sin s \cos s & -\cos^2 s \\ \sin^2 s & -\sin s \cos s \end{bmatrix} + \omega(e^2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

является сопряженной по отношению к задаче (VII.51).

Поскольку уравнение (VII.47) удовлетворяет всем условиям бифуркации Хопфа, то применима теорема о факторизации. Факторизацию можно представить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = b \left\{ \frac{2\varepsilon \omega'}{\gamma} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_e \\ Y_e \end{bmatrix} + 2\varepsilon \mu_e \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{VII.53})$$

и

$$\gamma(e^2) = 2e^2 F_V(\mu(e^2), e^2) = -\varepsilon \mu_e F_\mu(\mu, e^2). \quad (\text{VII.54})$$

Подставляя (VII.53) и (VII.54) в (VII.51), находим, что

$$-(\hat{\gamma} \mathbf{X}_e + F_\mu(\mu, e^2) \mathbf{X}) + 2\varepsilon \{-\gamma \mathbf{q} + \mathcal{Y}(e) \mathbf{q}\} = 0. \quad (\text{VII.55})$$

Уравнение (VII.55) можно упростить, положив $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{X}_e$.

Теперь мы отметим, что если $\varepsilon \neq 0$ мало, то $\gamma(e^2)$ является простым собственным значением задачи (VII.51). (Это следует из локального анализа бифуркации Хопфа.) Из теории Фредгольма следует, что уравнение (VII.55) имеет единственное решение, принадлежащее пространству, дополнительному к нулевому пространству оператора $-\gamma + \mathcal{Y}(e)$, тогда и только тогда, когда

$$(\hat{\gamma} + \varepsilon F_\mu(\mu, e^2)) \int_0^{2\pi} (\Gamma_1^* \cos s + \Gamma_2^* \sin s) ds = 0. \quad (\text{VII.56})$$

Более того, нетрудно проверить, что

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1^* \\ \Gamma_2^* \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.57})$$

если выполняются условия (VII.54). Поэтому

$$\hat{\gamma} = -\varepsilon F_\mu(\mu(e^2), e^2)$$

и все решения задачи (VII.55) с $\gamma = 2e^2 F_V(\mu, e^2)$ пропорциональны Γ и $q_1 = q_2 = 0$.

Возвращаясь теперь к задаче (VII.53) с $\gamma = -\mu_\varepsilon \varepsilon F_\mu(\mu, \varepsilon^2) = -2\mu'(\varepsilon^2)\varepsilon^2 F_\mu(\mu, \varepsilon^2)$, имеем

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} &= \frac{-\omega'(\varepsilon^2)}{\varepsilon \sqrt{\omega'^2 + \mu'^2 F_\mu^2}} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} + \frac{\mu' F_\mu}{\sqrt{\omega'^2 + \mu'^2 F_\mu^2}} \begin{bmatrix} X_\varepsilon \\ Y_\varepsilon \end{bmatrix} = \\ &= \frac{-\omega'(\varepsilon^2)}{\sqrt{\omega'^2 + \mu'^2 F_\mu^2}} \begin{bmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{bmatrix} + \frac{\mu' F_\mu}{\sqrt{\omega'^2 + \mu'^2 F_\mu^2}} \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix}, \quad (\text{VII.58}) \end{aligned}$$

где $\mu' F_\mu = \mu'(\varepsilon^2) F_\mu(\mu, \varepsilon^2)$.

Интересно дать анализ устойчивости решения (VII.50) с другой точки зрения, используя матрицу монодромии, ее собственные значения и множители Флоке. Малое возмущение φ решения X удовлетворяет уравнению

$$-\dot{\varphi} + J(\varepsilon)\varphi = 0. \quad (\text{VII.59})$$

Существуют только два независимых решения $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ уравнения (VII.59). Выберем $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$ так, чтобы фундаментальное матричное решение

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(t) & \varphi_1^{(2)}(t) \\ \varphi_2^{(1)}(t) & \varphi_2^{(2)}(t) \end{bmatrix}$$

удовлетворяло начальному условию $\Phi(0) = I$, где I — единичная матрица. Имеем

$$\varphi^{(1)}(t) = -\frac{\omega'}{F_V}(1 - e^{\gamma t}) \begin{bmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} e^{\gamma t}, \quad s = \omega t,$$

где γ удовлетворяет уравнению (VII.54) и

$$\varphi^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \dot{X}(s), \quad s = \omega t.$$

Множители Флоке λ являются собственными значениями матрицы монодромии $\Phi(2\pi/\omega)$, т. е. матрицы

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) & \varphi_1^{(2)}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \\ \varphi_2^{(1)}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) & \varphi_2^{(2)}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2\pi\gamma/\omega} & 0 \\ -\frac{\omega'}{F_V}(1 - e^{2\pi\gamma/\omega}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\lambda = 1$ и $\lambda = e^{2\pi\gamma/\omega}$ являются алгебраически простыми собственными значениями матрицы монодромии, если $e^{2\pi\gamma/\omega} \neq 1$, и представляют собой алгебраически двойное собственное значение, если $\gamma = 2\varepsilon^2 F_V = 0$. Если $\gamma = 0$, то по-прежнему существуют два

фундаментальных решения уравнения (VII.59): $\Phi^{(2)}$ и

$$\Phi^{(1)}(t) = 2\varepsilon^2 \omega'(\varepsilon^2) t \begin{bmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix}.$$

Из них только $\Phi^{(2)}$ является 2π -периодическим вектором. Поскольку $\Phi^{(2)} = \dot{X}/\varepsilon$, то $\mathcal{Z}(\dot{X}) = 0$, если $\gamma = 0$, и $\mathcal{Z}(X_\varepsilon/\omega_\varepsilon) = \dot{X}$. Поэтому если $\gamma = 0$, то мы имеем двухзвенную цепь Жордана в рамках теоремы, которая будет сформулирована и доказана в конце § VIII.4.

Этот пример обнаруживает следующие свойства.

1. Он обладает бифуркацией Хопфа при $\varepsilon = 0$.
2. Теорема о факторизации имеет место для всех значений ε , для которых определены ω и F и их первые производные.
3. $F(\mu, \varepsilon^2)$ и $\omega(\varepsilon^2)$ являются независимыми функциями. В общем случае $\mu'(\varepsilon^2)$ и $\omega'(\varepsilon^2)$ не обращаются в нуль одновременно.
4. $\gamma = 0$ всегда является собственным значением $\mathcal{Z}(\varepsilon)$. Оно является геометрически простым и алгебраически двойным собственным значением, если $\omega'(\varepsilon^2) \neq 0$ в точках, в которых $\gamma(\varepsilon) = 0$. Если $\omega'(\varepsilon^2) = 0$ для значений, в которых $\gamma(\varepsilon) = 0$, то $\gamma = 0$ может быть геометрически и алгебраически двойным собственным значением (см. § VIII.4).
5. При соответствующем выборе функции $F(\mu, V)$ можно получить вторичную и повторяющуюся бифуркацию $T(\varepsilon)$ -периодических по t решений (2π -периодических по s решений) с постоянным радиусом ε . В самом деле, уравнение (VII.48) показывает, что исследование такой бифуркации можно свести к анализу уравнения в $\mathbb{R}^1$, бифуркационные свойства которого были полностью охарактеризованы в гл. II.

БИФУРКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В этой главе мы покажем, что анализ бифуркации периодических решений от стационарных решений в $\mathbb{R}^2$, который был предметом обсуждения в гл. VII, приложим также в $\mathbb{R}^n$ и в бесконечномерных пространствах; например, для дифференциальных уравнений в частных производных и для функциональных дифференциальных уравнений, если стационарное решение теряет устойчивость в простом комплексном собственном значении. Математический анализ, проведенный для автономного эволюционного уравнения (VI.45), приведенного к локальной форме, и анализ потери устойчивости решения $u=0$, данный в § VII.9, справедлив и для настоящей задачи.

§ VIII.1. Собственные проекции спектральной задачи

Запишем уравнение (VI.45) в виде

$$\dot{u} = f(\mu, u) = f_\mu(\mu | u) + N(\mu, u), \quad (\text{VIII.1})$$

где $N(\mu, u) = O(|u|^2)$. Малое возмущение $v = e^{\sigma t} \xi$ решения $u=0$ удовлетворяет следующей задаче на собственные значения:

$$\sigma \xi = f_\mu(\mu | \xi). \quad (\text{VIII.2})$$

Сопряженная задача описывается уравнением (см. § VI.7)

$$\sigma \bar{\xi}^* = f_\mu^*(\mu | \bar{\xi}^*), \quad (\text{VIII.3})$$

и весьма часто в приложениях существует счетное бесконечное число собственных значений $\{\sigma_n\}$, которые можно представить в виде последовательности в соответствии с величиной их вещественных частей

$$\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_n \geq \dots,$$

скопляющихся в $-\infty$ (см. рис. VI.1). Каждому собственному значению соответствует по крайней мере конечное число собственных векторов ξ_n и сопряженных собственных векторов ξ_n^* . Как было указано в дополнении IV.1, в случае полупростого собственного значения σ_n можно выбрать собственные векторы операторов $f_\mu(\mu | \cdot)$ и $f_\mu^*(\mu | \cdot)$ так, чтобы они образовывали биортогональные семейства:

$$\langle \xi_{nk}, \xi_{nj}^* \rangle = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, m_n, \quad (\text{VIII.4})$$

где m_n — кратность собственного значения σ_n (предполагаемого простым). Умножая теперь обе части уравнения (VIII.1) скалярно на ξ_n^* , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \xi_n^* \rangle &= \langle \mathbf{f}_a(\mu | \mathbf{u}), \xi_n^* \rangle + \langle \mathbf{N}(\mu, \mathbf{u}), \xi_n^* \rangle = \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{f}_a^*(\mu | \xi_n^*) \rangle + \langle \mathbf{N}(\mu, \mathbf{u}), \xi_n^* \rangle = \\ &= \sigma_n \langle \mathbf{u}, \xi_n^* \rangle + \langle \mathbf{N}(\mu, \mathbf{u}), \xi_n^* \rangle. \end{aligned} \quad (\text{VIII.5})$$

Если $\mathbf{u}$ мало, то линеаризованные уравнения приводят к выражениям

$$\langle \mathbf{u}(t), \xi_n^* \rangle \simeq \langle \mathbf{u}(0), \xi_n^* \rangle e^{\xi_n(\mu) t} e^{i\eta_n(\mu) t},$$

так что если $\xi_n(\mu) < 0$, то проекция $\langle \mathbf{u}(t), \xi_n^* \rangle$ убывает до нуля. В действительности для полной нелинейной задачи существует связь между различными проекциями, и если некоторые из них не убывают, то этот последний результат уже не имеет места. Тем не менее важная часть эволюционной задачи (VIII.1) связана с частью спектра оператора $\mathbf{f}_a(\mu | \cdot)$, для которой $\xi_n(\mu) \geq 0$.

В задаче бифуркации, изучаемой в этой главе, мы будем предполагать, что вещественная часть двух комплексно-сопряженных простых собственных значений $\sigma(\mu)$, $\bar{\sigma}(\mu)$ изменяет знак, когда μ проходит через 0, а остальная часть спектра остается в левой части комплексной плоскости. Пусть ξ и $\bar{\xi}^*$ суть собственные векторы операторов $\mathbf{f}_a(\mu | \cdot)$, $\mathbf{f}_a^*(\mu | \cdot)$, соответствующие собственному значению $\sigma(\mu)$. Тогда уравнение, описывающее эволюцию проекции,

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \xi^* \rangle = \sigma(\mu) \langle \mathbf{u}, \xi^* \rangle + \langle \mathbf{N}(\mu, \mathbf{u}), \xi^* \rangle \quad (\text{VIII.6})$$

является комплекснозначным, т. е. двумерным. Поэтому наша задача представляет собой существенно двумерную задачу всякий раз, когда

$$\mathbf{u} - \langle \mathbf{u}, \xi^* \rangle \xi - \langle \mathbf{u}, \bar{\xi}^* \rangle \bar{\xi}$$

является «весьма малой частью», как в § VI.5.

§ VIII.2. Уравнения для проекции и дополнительная проекция

Теперь мы укажем смысл, в котором существенно двумерная задача является строго двумерной. Сначала представим бифуркационное решение $\mathbf{u}$ в виде вещественной суммы

$$\mathbf{u}(t) = a(t) \xi + \bar{a}(t) \bar{\xi} + \mathbf{w}(t), \quad (\text{VIII.7})$$

где

$$\langle \mathbf{w}, \xi^* \rangle = \langle \bar{\xi}, \xi^* \rangle = \langle \xi, \xi^* \rangle - 1 = 0. \quad (\text{VIII.8})$$

Подставляя (VIII.7) в (VIII.1) и используя (VIII.2), находим

$$[\dot{a} - \sigma(\mu)a]\xi + [\dot{\bar{a}} - \bar{\sigma}(\mu)\bar{a}]\bar{\xi} + \frac{dw}{dt} = f_a(\mu|w) + N(\mu, u). \quad (\text{VIII.9})$$

Проектирование уравнения (VIII.9) на ξ^* приводит нас к эволюционной задаче для «малой части» w на пространстве, дополнительном к натянутому на векторы ξ и $\bar{\xi}$:

$$\frac{dw}{dt} = f_a(\mu|w) + (N(\mu, u) - \langle N(\mu, u), \xi^* \rangle \xi - \langle N(\mu, u), \bar{\xi}^* \rangle \bar{\xi}), \quad (\text{VIII.10})$$

и к эволюционному уравнению для проектируемой части

$$\dot{a} - \sigma(\mu)a = \langle N(\mu, u), \xi^* \rangle. \quad (\text{VIII.11})$$

При выводе уравнения (VIII.11) были использованы соотношения

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dw}{dt}, \xi^* \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle w, \xi^* \rangle = 0, \\ \langle f_a(\mu|w), \xi^* \rangle &= \langle w, f_a^*(\mu|\xi^*) \rangle = \sigma \langle w, \xi^* \rangle = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (VIII.10) теперь легко следует из (VIII.9) и (VIII.11).

Итак, уравнение (VIII.11) описывает эволюцию проекции решения u на подпространство, соответствующее собственному значению $\sigma_1(\mu) = \sigma(\mu)$, а уравнение (VIII.10) описывает эволюцию части решения, которая ортогональна подпространству, натянутому на векторы ξ^* и $\bar{\xi}^*$.

В бифуркационных задачах дополнительная проекция w играет меньшую роль; от нее зависит только порождаемая нелинейной связью реакция на компоненту решения, натянутую на ξ и $\bar{\xi}$. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$\langle N(\mu, u), \xi^* \rangle = \frac{1}{2} \langle (f_{uu}(\mu|u|u) + O(\|u\|^3)), \xi^* \rangle,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle f_{uu}(\mu|u|u), \xi^* \rangle &= \alpha(\mu)a^2 + 2\beta(\mu)|a|^2 + \gamma(\mu)\bar{a}^2 + \\ &+ 2a \langle f_{uu}(\mu|\xi|w), \xi^* \rangle + 2\bar{a} \langle f_{uu}(\mu|\bar{\xi}|w), \xi^* \rangle + \\ &+ \langle f_{uu}(\mu|w|w), \xi^* \rangle, \end{aligned} \quad (\text{VIII.12})$$

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{2} \langle f_{uu}(\mu|\xi|\xi), \xi^* \rangle,$$

$$\beta(\mu) = \frac{1}{2} \langle f_{uu}(\mu|\xi|\bar{\xi}), \xi^* \rangle$$

$$\gamma(\mu) = \frac{1}{2} \langle f_{uu}(\mu|\bar{\xi}|\bar{\xi}), \xi^* \rangle.$$

Отсюда следует, что амплитудное уравнение (VIII.11) может быть представлено в виде

$$\dot{a} - \sigma(\mu) a = \alpha(\mu) a^2 + 2\beta(\mu) |a|^2 + \gamma(\mu) \bar{a}^2 + \\ + O(|a|^3 + |a| \|w\| + \|w\|^2). \quad (\text{VIII.13})$$

Возвращаясь теперь к уравнению (VIII.10) и принимая во внимание (VIII.12), находим, что по истечении достаточно большого промежутка времени будем иметь $w = O(|a|^2)$, и получаем двумерную структуру бифуркации Хопфа в общем случае в результате сравнения (VIII.13) с уравнением (VII.5), которое описывает устойчивость строгой двумерной задачи.

§ VIII.3. Решение в виде рядов с использованием альтернативы Фредгольма

Можно построить периодическое по времени решение, которое отвечается от решения $u=0$ в критической точке ($\mu=0$), в виде рядов по степеням некоторой амплитуды ε , как в (VII.44). В этом построении коэффициенты рядов можно было бы вычислить как решения дифференциальных уравнений, которые получаются в результате подстановки этих рядов в (VIII.10) и (VIII.11) и приравнивания в получаемых уравнениях членов при одинаковых степенях ε . В этом случае стратегия¹⁾ заключается в проектировании (получении уравнений (VIII.10) и (VIII.11)) и последующем разложении. Альтернативная стратегия — разложение и последующее проектирование, — излагаемая ниже, является более определенной и простой для реализации.

В этих построениях вычисляются величины, связанные со спектральными задачами (VIII.2) и (VIII.3) при $\mu=0$:

$$[\varepsilon, \mu, \xi(\mu), \eta(\mu), \sigma(\mu), \xi(\mu), \xi^*(\mu)] \rightarrow [0, 0, 0, \omega_0, i\omega_0, \xi_0, \xi_0^*].$$

Мы предполагаем, что $\pm i\omega_0$ представляют собой простые изолированные собственные значения оператора $f_u(0|\cdot)$, т. е. $i\omega_0 \xi_0 = f_u(0|\xi_0)$, $-i\omega_0 \bar{\xi}_0 = f_u(0|\bar{\xi}_0)$, и что все другие собственные значения $f_u(0|\cdot)$ имеют отрицательные вещественные части. Предполагается также, что потеря устойчивости решения $u=0$ строгая, если $\varepsilon_\mu(0) > 0$. Замечая теперь, что уравнение, получаемое в результате однократного дифференцирования по μ соотношения (VIII.2) при $\mu=0$:

$$\sigma_\mu(0) \xi_0 + i\omega_0 \xi_\mu = f_u(0|\xi_\mu) + f_{u\mu}(0|\xi_0),$$

¹⁾ Она разработана для дифференциальных уравнений с частными производными в статье Ж. Йосса *Existence et stabilité de la solution périodique secondaire intervenant dans les problèmes d'évolution du type Navier—Stokes*. *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 47, 301—329 (1972).

разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{\mu}(0) = \langle f_{\mu}(0 | \xi_0), \xi_0^* \rangle, \quad (\text{VIII.14})$$

из нашего предположения о строгой потере устойчивости следует, что вещественная часть (VIII.14) положительна.

Переходим к построению периодического решения, которое отбрасывается от решения $u=0$ в критической точке. Существуют два периодических решения линеаризованной задачи $\dot{v} = f_{\mu}(0 | v)$ в критической точке: $v(t) = e^{i\omega_0 t} \xi_0$ и $\bar{v}(t)$. Обозначим $\omega_0 t = s$ и положим $z(s) = e^{is} \xi_0 = v(s/\omega_0)$. Теперь введем пространство 2π -периодических функций¹⁾. Обозначим это пространство 2π -периодических функций символом $P_{2\pi}$. Тогда z и $\bar{z}$ принадлежат $P_{2\pi}$. Определим также скалярное произведение в $P_{2\pi}$

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle a(s), b(s) \rangle ds$$

и оператор

$$J_0 = -\omega_0 \frac{d}{ds} + f_{\mu}(0 | \cdot), \quad (\text{VIII.15})$$

в нуль-пространстве которого лежат $z = e^{is} \xi_0$ и $\bar{z} \in P_{2\pi}$:

$$J_0 z = J_0 \bar{z} = 0. \quad (\text{VIII.16})$$

Определим сопряженный оператор J_0^* , действующий на произвольные поля $a(s), b(s) \in P_{2\pi}$,

$$[J_0 a, b] = [a, J_0^* b] \quad (\text{VIII.17})$$

и найдем, что

$$J_0^* = \omega_0 \frac{d}{ds} + A^*(0), \quad (\text{VIII.18})$$

где оператор $A^*(0)$ определен формулой (VI.48) и

$$J_0^* z^* = J_0^* \bar{z}^* = 0, \quad (\text{VIII.19})$$

где

$$z^* = e^{is} \xi_0^* \in P_{2\pi} \quad (\text{VIII.20})$$

(ξ_0^* есть решение задачи (VIII.2)). Можно представить (VIII.14) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu}(0) &= \langle f_{\mu}(0 | \xi_0 e^{is}) e^{-is}, \xi_0^* \rangle = \\ &= \langle f_{\mu}(0 | z), z^* \rangle = [f_{\mu}(0 | z), z^*]. \end{aligned} \quad (\text{VIII.21})$$

¹⁾ Естественно, мы предполагаем, что функции, принадлежащие $P_{2\pi}$, обладают гладкостью, требуемой для наших вычислений. Точная степень гладкости указана в работах, цитируемых в этой главе, и здесь не отмечается.

Теперь мы готовы к построению периодических бифуркационных решений уравнения $\dot{u} = f(\mu, u)$ в виде рядов по степеням амплитуды

$$e = [u, z^*]. \quad (\text{VIII.22})$$

Возможны различные определения амплитуды. Например, можно положить $e^n = f[u]$, где $f[u]$ есть однородный функционал с показателем однородности n , так что если $u = \varepsilon v$, то $1 = f[v]$. Обычно лучше выбрать такую амплитуду, которая отражает физический смысл задачи. Например, в нелинейных задачах о переносе тепла при заданной на границе температуре удобно было бы определить e через суммарный тепловой поток.

Мы ищем 2π -периодические по $s = \omega(e)t$ решения в форме

$$u(s, e) = u(s + 2\pi, e), \quad \mu(e), \quad \omega(e),$$

где

$$u(s, 0) = 0, \quad \mu(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0$$

и

$$\omega(e) \frac{du}{ds} = f(\mu(e), u). \quad (\text{VIII.23})$$

Это решение можно найти в виде степенных рядов, используя альтернативу Фредгольма:

$$\begin{bmatrix} u(s, e) \\ \mu(e) \\ \omega(e) - \omega_0 \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \begin{bmatrix} u_n(s) \\ \mu_n \\ \omega_n \end{bmatrix}. \quad (\text{VIII.24})$$

Подставляя (VIII.24) в (VIII.23) и (VIII.22), находим уравнения для определения коэффициентов правой части (VIII.24). Для того чтобы сохранить определение (VIII.22) амплитуды e , мы должны иметь

$$[u_1, z^*] - 1 = [u_n, z^*] = 0, \quad n \geq 2. \quad (\text{VIII.25})$$

Уравнение (VIII.23) будет удовлетворено, если

$$\mathbb{J}_0 u_1 = 0, \quad (\text{VIII.26})$$

$$\mathbb{J}_0 u_2 - 2\omega_1 \frac{du_1}{ds} + 2\mu_1 f_{u\mu}(0 | u_1) + f_{uu}(0 | u_1 | u_1) = 0, \quad (\text{VIII.27})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_0 u_3 - 3\omega_1 \frac{du_2}{ds} + 3\mu_1 f_{uu}(0 | u_2) - 3\omega_2 \frac{du_1}{ds} + \\ + 3\mu_2 f_{u\mu}(0 | u_1) + 3\mu_1 f_{u\mu\mu}(0 | u_1 | u_1) + \\ + 3\mu_1^2 f_{u\mu\mu}(0 | u_1) + 3f_{uu}(0 | u_1 | u_2) + \\ + f_{uuu}(0 | u_1 | u_1 | u_1) = 0, \end{aligned} \quad (\text{VIII.28})$$

и вообще

$$\mathbb{J}_0 u_n - n\omega_{n-1} \frac{du_{n-1}}{ds} + n\mu_{n-1} f_{u\mu}(0 | u_1) + R_{n-2} = 0, \quad (\text{VIII.29})$$

где R_{n-2} зависит от членов, порядок которых меньше, чем $n-1$.

Теперь нам нужно решить уравнения (VIII.25—29). Из нашего предположения о том, что $\pm i\omega_0$ являются простыми собственными значениями оператора $f_a(0|\cdot)$, следует, что нуль есть полупростое двойное собственное значение оператора $\mathbb{J}_0$ с двумя линейно независимыми решениями z и $\bar{z}$. Любой другой вектор, обращаемый в нуль оператором $\mathbb{J}_0$, скажем u_1 , можно представить в виде линейной комбинации независимых решений. Поскольку u_1 — вещественный вектор, то

$$u_1 = cz + \bar{c}\bar{z} = ce^{is}\xi_0 + \bar{c}e^{-is}\bar{\xi}_0.$$

Теперь, так как начало отсчета s не определено, можно использовать подстановку $s \sim s + \alpha$, где α можно выбрать так, что $ce^{i\alpha} = c'$ вещественно. Тогда, не ограничивая общности, будем иметь

$$u_1 = c'(z + \bar{z}) = z + \bar{z}, \quad (\text{VIII.30})$$

где $c' = 1$ в силу (VIII.25)₁.

Уравнения (VIII.27—29) имеют форму

$$(\mathbb{J}_0 u)(s) = g(s) = g(s + 2\pi). \quad (\text{VIII.31})$$

Мы хотим найти $u(s) = u(s + 2\pi)$, являющееся решением уравнения (VIII.31). Последнее имеет решения $u \in \mathbb{P}_{2\pi}$ только тогда, когда g удовлетворяет некоторым условиям совместности, которые обычно формулируются как альтернатива Фредгольма.

Теорема. Уравнение (VIII.31) разрешимо для $u \in \mathbb{P}_{2\pi}$ тогда и только тогда, когда

$$[g, z^*] = [g, \bar{z}^*] = 0. \quad (\text{VIII.32})$$

Если g — вещественная вектор-функция, то для разрешимости (VIII.31) достаточно одного условия в комплексной форме (двух условий в вещественной форме)

$$[g, z^*] = [\bar{g}, \bar{z}^*] = 0. \quad (\text{VIII.33})$$

Вторую часть («только тогда») альтернативы Фредгольма легко доказать, так как

$$[g, z^*] = [\mathbb{J}_0 u, z^*] = [u, \mathbb{J}_0^* z^*] = 0.$$

Что касается первой части («тогда»), то мы отсылаем читателя к известным работам, в которых используются элементарные результаты функционального анализа, не рассматриваемые в этой книге¹⁾.

¹⁾ См., например, Joseph D. D., Sattinger D. H., Bifurcating time-periodic solutions and their stability, Arch. Rational Mech. Anal., 45, 79—108 (1972), или Sattinger D. H., Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics 309 (Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1972), или Одович В. И., Возникновение автоколебаний в жидкости (ПММ 35, с. 638—655, 1971 г.).

Можно выбрать ω_{n-1} и μ_{n-1} так, что уравнения (VIII.29) будут разрешимы. Используя (VIII.30) и (VIII.33), находим, что (VIII.29) разрешимо, если

$$-n\omega_{n-1} \left(\left[\frac{dz}{ds}, z^* \right] + \left[\frac{d\bar{z}}{ds}, z^* \right] \right) + n\mu_{n-1} ([f_{u\mu}(0|z), z^*] + [f_{u\mu}(0|\bar{z}), z^*]) + [R_{n-2}, z^*] = 0.$$

Далее, из соотношения $\langle \xi, \xi^* \rangle = 1$ следует, что $[z, z^*] = 1$. Более того, $[z, \bar{z}^*] = [\bar{z}, z^*] = [f_{u\mu}(0|\bar{z}), z^*] = 0$; например, $[f_{u\mu}(0|\bar{z}), z^*] = [e^{-2is}f_{u\mu}(0|\xi), \xi^*] = 0$ после интегрирования по s . Поэтому, используя только что приведенные результаты и (VIII.21), получаем одно уравнение в комплексной форме

$$n \{-i\omega_{n-1} + \mu_{n-1}\sigma_\mu\} + [R_{n-2}, z^*] = 0, \quad n \geq 2$$

или два уравнения в вещественной форме:

$$n\mu_{n-1}\xi_\mu + \operatorname{Re}[R_{n-2}, z^*] = 0, \quad (\text{VIII.34})_1$$

$$n \{-\omega_{n-1} + \mu_{n-1}\eta_\mu\} + \operatorname{Im}[R_{n-2}, z^*] = 0. \quad (\text{VIII.34})_2$$

Уравнение (VIII.34)₁ можно разрешить относительно μ_{n-1} , если $\xi_\mu \neq 0$ ($\xi_\mu > 0$ в силу предположения о строгой потере устойчивости). Затем (VIII.34)₂ можно разрешить относительно ω_{n-1} . Если $n=2$, то

$$[R_0, z^*] = [f_{uu}(0|u_1|u_1), z^*] = 0,$$

и поэтому $\omega_1 = \mu_1 = 0$ и

$$J_0 u_2 = -f_{uu}(0|z + \bar{z}|z + \bar{z}), \quad [u_2, z^*] = 0.$$

Если $n=3$, то находим, что

$$3 \{-i\omega_2 + \mu_2\sigma_\mu\} + 3[f_{uu}(0|z + \bar{z}|u_2), z^*] + [f_{uuu}(0|z + \bar{z}|z + \bar{z}|z + \bar{z}), z^*] = 0. \quad (\text{VIII.35})$$

Можно показать, используя метод математической индукции¹⁾, что

$$\mu_{2n+1} = \omega_{2n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

так что $\mu(\varepsilon)$ и $\omega(\varepsilon)$ суть четные функции. Бифуркационное решение, только что построенное, приводится к решению, найденному в гл. VII для двумерной задачи. В самом деле, для общей задачи и для двумерной задачи формулы для $\mu(\varepsilon)$ и $\omega(\varepsilon)$ совпадают до членов второго порядка по ε .

¹⁾ См. цитированную статью Джозефа и Саттингера (1972).

§ VIII.4. Устойчивость бифуркации Хопфа в общем случае

Нас интересует решение $V(t)$ автономной задачи $\dot{V} = f(\mu, V)$. Положим $V = u(s, \varepsilon) + v(t)$, $s = \omega(\varepsilon)t$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, где $v(t)$ — малое возмущение решения u . Используя тождество $\omega u = f(\mu(\varepsilon), u)$, находим после линеаризации, что

$$\dot{v} = f(\mu, u + v) - f(\mu, u) \sim f_{\alpha}(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon) | v). \quad (\text{VIII.36})$$

Уравнение (VIII.36) можно исследовать, используя метод Флоке (см. § VII.6):

$$v(t) = e^{\gamma t} \zeta(s), \quad s = \omega(\varepsilon)t,$$

где

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \zeta(s + 2\pi), \quad \zeta \in \mathbb{P}_{2\pi}, \\ \gamma \zeta + \omega(\varepsilon) \frac{d\zeta}{ds} &= f_{\alpha}(\mu(\varepsilon), u | \zeta). \end{aligned}$$

Полезно ввести оператор

$$\mathbb{J}(\varepsilon)(\cdot) = -\omega(\varepsilon) \frac{d(\cdot)}{ds} + f_{\alpha}(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon) | \cdot).$$

Тогда

$$\gamma \zeta = \mathbb{J} \zeta. \quad (\text{VIII.37})$$

Дифференцируя $\omega(\varepsilon) \dot{u}(s, \varepsilon) = f(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon))$ сначала по s , получаем

$$\mathbb{J}(\varepsilon) \dot{u} = 0, \quad (\text{VIII.38})$$

а затем, дифференцируя по ε , находим

$$\omega_{\varepsilon} \dot{u} = \mu_{\varepsilon} f_{\mu}(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon)) + \mathbb{J} u_{\varepsilon}. \quad (\text{VIII.39})$$

Конечно, мы предполагаем, что ряды (VIII.24) сходятся на интервале $I_1(\varepsilon)$, окружающем $\varepsilon = 0$. Теперь, комбинируя (VIII.37—39), доказываем следующий результат.

Теорема о факторизации (общий случай). *Имеют место следующие представления:*

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu_{\varepsilon}(\varepsilon) \hat{\gamma}(\varepsilon), \\ \zeta(s, \varepsilon) &= c(\varepsilon) \left\{ \frac{\tau}{\gamma} \dot{u}(s, \varepsilon) + u_{\varepsilon}(s, \varepsilon) + \varepsilon \mu_{\varepsilon} q(s, \varepsilon) \right\}, \\ \tau &= \omega_{\varepsilon}(\varepsilon) + \mu_{\varepsilon}(\varepsilon) \hat{\tau}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{VIII.40})$$

где $c(\varepsilon)$ — нормализующий множитель, а $\hat{\tau}(\varepsilon)$, $\hat{\gamma}$ и $q(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{P}_{2\pi}$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\tau} \dot{u} + \hat{\gamma} u_{\varepsilon} + f_{\mu}(\mu(\varepsilon), u(\cdot, \varepsilon)) + \varepsilon \{ \gamma q - \mathbb{J} q \} = 0$$

и являются гладкими функциями на интервале $I_2 \subseteq I_1$, содержащем точку $\varepsilon = 0$. Более того, $\hat{\tau}(\varepsilon)$ и $\hat{\gamma}(\varepsilon)/\varepsilon$ суть четные функции и та-

кие, что

$$\hat{\gamma}_\varepsilon(0) = -\xi_\mu(0), \quad \hat{\tau}(0) = -\eta_\mu(0). \quad (\text{VIII.41})$$

Интерпретация результатов исследования устойчивости для общего случая в точности совпадает с интерпретацией, данной в § VII.9 для строго двумерной задачи. В частности, она показывает, что $\gamma(\varepsilon)$ меняет знак в каждой точке, в которой $\hat{\gamma}(\varepsilon) \neq 0$ и $\mu_\varepsilon(\varepsilon)$ меняет знак. (В $\mathbb{R}^1$ такие точки были названы регулярными экстремальными точками; см. § II.8.) Пусть такой точке соответствует значение $\varepsilon = \varepsilon_0$; предположим, что $c(\varepsilon)$ выбрана так, что $c(\varepsilon) \sim \mu_\varepsilon(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$. Тогда

$$\xi(s, \varepsilon) \sim \frac{\omega_\varepsilon(\varepsilon)}{\hat{\gamma}(\varepsilon)} \dot{\mathbf{u}}(s, \varepsilon) + \mu_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(s, \varepsilon) + \varepsilon \mu_\varepsilon^2(\varepsilon) \mathbf{q}(s, \varepsilon). \quad (\text{VIII.42})$$

Если $\omega_\varepsilon(\varepsilon_0) \neq 0$, то $\xi(s, \varepsilon_0) = \omega_\varepsilon(\varepsilon_0) \dot{\mathbf{u}}(s, \varepsilon_0) / \hat{\gamma}(\varepsilon_0)$ — собственная функция оператора $\mathbb{J}(\varepsilon_0)$. Имеет место следующая теорема¹⁾.

Теорема. Предположим, что при $\varepsilon_0 \neq 0$ имеем $\gamma(\varepsilon_0) = 0$ и $\hat{\gamma}(\varepsilon_0) \neq 0$; тогда нулевое собственное значение оператора $\mathbb{J}(\varepsilon_0)$ имеет алгебраическую кратность, по крайней мере равную 2; $\dot{\mathbf{u}}(s, \varepsilon_0)$ — собственный вектор оператора $\mathbb{J}(\varepsilon_0)$,

$$\mathbb{J}(\varepsilon_0) \dot{\mathbf{u}}(\cdot, \varepsilon_0) = 0, \quad (\text{VIII.43})$$

и если $\omega_\varepsilon(\varepsilon_0) \neq 0$, то $\mathbf{u}_\varepsilon(s, \varepsilon_0)$ является обобщенным собственным вектором оператора $\mathbb{J}(\varepsilon_0)$:

$$[\mathbb{J}(\varepsilon_0) \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \varepsilon_0)](s) = \omega_\varepsilon(\varepsilon_0) \dot{\mathbf{u}}(s, \varepsilon_0). \quad (\text{VIII.44})$$

Если $\omega_\varepsilon(\varepsilon_0) = 0$, то геометрическая кратность нуля равна по крайней мере двум и $\dot{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}_\varepsilon$ являются собственными векторами оператора $\mathbb{J}(\varepsilon_0)$.

Доказательство этой теоремы следует из тождества

$$\mathbb{J}(\varepsilon) \mathbf{u}_\varepsilon = \omega_\varepsilon \dot{\mathbf{u}} - \mu_\varepsilon \mathbf{f}_\mu(\mu(\varepsilon), \mathbf{u});$$

напоминаем, что здесь $\mu_\varepsilon(\varepsilon_0) = 0$.

Некоторые результаты относительно бифуркации и устойчивости периодических решений, приведенные в примере VII.1, можно рассматривать как приложения сформулированной выше теоремы.

Пример VIII.1. (Периодические решения дифференциальных уравнений с частными производными.) Рассмотрим следующую систему

¹⁾ См. Джозеф Д. Д. и Нилд Д. А. "Stability of bifurcating time-periodic and steady solutions of arbitrary amplitude".— *Arch. Rational. Mech. Anal.*, **49**, 321 (1973). См. также Д. Д. Джозеф "Factorization theorems, stability and repeated bifurcation".— *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 99—118 (1977).

дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + (\pi^2 + \mu)(U_1 - U_2) - U_1 \left\{ U_1^2 + U_2^2 + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \quad (\text{VIII.45})_1$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + (\pi^2 + \mu)(U_1 + U_2) - U_2 \left\{ U_1^2 + U_2^2 + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 \right] \right\},$$

где U_i , $i = 1, 2$, суть вещественные функции, определенные для $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, и удовлетворяющие граничным условиям

$$U_i(t, 0) = U_i(t, 1) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{VIII.45})_2$$

В этом примере (как и в примере VI.2) возьмем $H = [L^2(0, 1)]^2 = \{(u_1, u_2) : u_i \in L^2(0, 1)\}$ со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^1 [U_1(x) \bar{V}_1(x) + U_2(x) \bar{V}_2(x)] dx, \quad (\text{VIII.46})$$

где использовано обозначение $\mathbf{u} = (U_1(\cdot), U_2(\cdot))$, $\mathbf{v} = (V_1(\cdot), V_2(\cdot))$. Систему (VIII.45) можно записать в H -пространстве в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mu, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_\mu(\mu | \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mu, \mathbf{u}), \quad (\text{VIII.47})$$

где линейный оператор $\mathbf{f}_\mu(\mu | \cdot)$ и нелинейный оператор $\mathbf{N}(\mu, \cdot)$ определены на *подпространстве* пространства H , состоящем из $\mathbf{u} = (U_1(\cdot), U_2(\cdot))$, таких, что

$$U_i(\cdot), \quad \frac{\partial U_i(\cdot)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U_i(\cdot)}{\partial x^2} \quad \text{принадлежат } L^2(0, 1)$$

и $U_i(0) = U_i(1) = 0$.

Эволюционное уравнение (VIII.47) в H представляет собой форму записи (VIII.45) в гильбертовом пространстве, если

$$\mathbf{f}_\mu(\mu | \cdot) = \mathbf{f}_\mu(0 | \cdot) + \mu \mathbf{f}_{\mu\mu}(0 | \cdot),$$

$$\mathbf{N}(\mu, \mathbf{u}) = \mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{6} \mathbf{f}_{\mu\mu\mu}(0 | \mathbf{u} | \mathbf{u} | \mathbf{u}),$$

$$[\mathbf{f}_\mu(0 | \mathbf{u})](x) = \left(\frac{\partial^2 U_1(x)}{\partial x^2} + \pi^2 (U_1(x) - U_2(x)), \quad \frac{\partial^2 U_2(x)}{\partial x^2} + \pi^2 (U_1(x) + U_2(x)) \right),$$

$$[\mathbf{f}_{\mu\mu}(0 | \mathbf{u})](x) = (U_1(x) - U_2(x), U_1(x) + U_2(x)),$$

$$[\mathbf{C}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u})](x) = - \left\{ U_1^2(x) + U_2^2(x) + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{\partial U_1(x)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2(x)}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times (U_1(x), U_2(x)).$$

Спектр оператора $\mathbf{f}_\mu(\mu | \cdot)$ может быть вычислен точно: это есть множество собственных значений $\{\lambda_k^\pm = -k^2\pi^2 + (1 \pm i)(\pi^2 + \mu)\}$; где k — любое положительное целое число. Собственный вектор, отве-

чающий $\lambda_k^\pm$, есть

$$\xi_0^{(k)}(x) = \sin(k\pi x) (i, 1).$$

Собственное значение с наибольшей вещественной частью представляет собой собственное значение с $k=1$. Если $\mu=0$, то эта наибольшая вещественная часть обращается в нуль; $\pm i\pi^2$ являются простыми собственными значениями оператора $f_\mu(0|\cdot)$;

$$\xi_0(x) = \sin(\pi, x) (i, 1) \quad (\text{VIII.48})$$

— собственный вектор для $i\pi^2$, а $\bar{\xi}_0$ — собственный вектор для $-i\pi^2$. Поэтому имеем

$$\omega_0 = \pi^2, \quad \sigma_\mu = 1 + i, \quad (\text{VIII.49})$$

и потеря устойчивости строгая, т. е. $\xi_\mu = 1 > 0$.

Оператор, сопряженный $f_\mu(\mu|\cdot)$ относительно скалярного произведения в H , есть $f_\mu^*(\mu|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} [f_\mu(\mu|\cdot)]^*$. Легко проверить, что

$$[f_\mu^*(\mu|u)](x) = \left(\frac{\partial^2 U_1(x)}{\partial x^2} + (\pi^2 + \mu)[U_1(x) + U_2(x)], \right. \\ \left. \frac{\partial^2 U_2(x)}{\partial x^2} + (\pi^2 + \mu)[U_2(x) - U_1(x)] \right). \quad (\text{VIII.50})$$

Читатель может проверить, что $\xi_0 = \xi_0^*$, где

$$f_\mu^*(0|\xi_0^*) = -i\pi^2 \xi_0^*, \quad \langle \xi_0, \xi_0^* \rangle = 1, \\ \langle f_{\mu\mu}(0|\xi_0), \xi_0^* \rangle = 1 + i = \sigma_\mu.$$

Для получения бифуркационного периодического решения используем метод степенных рядов, изложенный выше. В настоящем случае условия разрешимости Фредгольма (VIII.35) принимают вид

$$\mu_2 \sigma_\mu - i\omega_2 = -6 \langle C(\xi_0, \xi_0, \bar{\xi}_0), \xi_0^* \rangle = 8.$$

Поэтому

$$\mu_2 = \omega_2 = 8$$

и уравнения

$$[u(s, \varepsilon)](x) = 2\varepsilon \sin \pi x (-\sin s, \cos s) + O(\varepsilon^3), \\ \mu(\varepsilon) = 4\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad (\text{VIII.51}) \\ \omega(\varepsilon) = \pi^2 + 4\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

дают искомое бифуркационное периодическое решение. В действительности члены более высокого порядка в (VIII.51) тождественно равны нулю, а остающаяся приведенная часть является точным решением уравнений (VIII.45).

Пример VIII.2. (Бифуркация в функциональных дифференциальных уравнениях.) Рассмотрим функциональное дифференциальное

уравнение

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) U(t-1)[1 + U(t)], \quad (\text{VIII.52})$$

называемое уравнением Хатчинсона—Райта. (Систематическое исследование этого уравнения можно найти в книге Дж. Хейла «Функциональные дифференциальные уравнения» (J. K. Hale, Functional Differential Equations, New York—Heidelberg—Berlin: Springer—Verlag, 1977). В (VIII.52) $U(t)$ — неизвестная вещественная функция, зависящая от значений $U(s)$ для $t-1 \leq s \leq t$. Поэтому можно рассматривать $U(s)$ как элемент пространства

$$C = \{\text{непрерывные функции на } [-1, 0]\},$$

а операторы на этом пространстве, соответствующие уравнению (VIII.52), можно определить так:

$$[f_\mu(\mu | \varphi)](\theta) = \begin{cases} d\varphi(\theta)/d\theta, & \text{если } -1 \leq \theta < 0, \\ -(\pi/2 + \mu)\varphi(-1), & \text{если } \theta = 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.53})$$

$$[N(\mu, \varphi)](\theta) = \left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) \times \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leq \theta < 0, \\ -\varphi(-1)\varphi(0), & \text{если } \theta = 0. \end{cases} \quad (\text{VIII.54})$$

Уравнение (VIII.52) может быть записано в виде

$$du/dt = f_\mu(\mu | u) + N(\mu, u), \quad (\text{VIII.55})$$

где

$$[u(t)](\theta) \stackrel{\text{def}}{=} U(t + \theta).$$

Из этого определения следует, что (VIII.55) можно записать в виде

$$\frac{dU(t+\theta)}{dt} = \begin{cases} dU(t+\theta)/d\theta, & \text{если } -1 \leq \theta < 0, \\ -(\pi/2 + \mu)U(t-1)(1 + U(t)), & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

Спектр линейного оператора $f_\mu(\mu | \cdot)$ состоит лишь из собственных значений σ конечной кратности, удовлетворяющих уравнению

$$\sigma + \left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) e^{-\sigma} = 0. \quad (\text{VIII.56})$$

Для $\mu = 0$ получаем два собственных значения: $\pm i\omega_0$, $\omega_0 = \pi/2$, остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Дифференцируя (VIII.56) по μ при $\mu = 0$, находим, что

$$\sigma_\mu(0) = \left(i + \frac{\pi}{2}\right) \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}, \quad (\text{VIII.57})$$

так что условие Хопфа $\xi_\mu > 0$ выполнено.

Для исследования бифуркации нам нужно определить сопряженный оператор по отношению к дуальному произведению (см. цитированную книгу Дж. Хейла)

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \varphi(0) \bar{\psi}(0) - \frac{\pi}{2} \int_{-1}^0 \varphi(\xi) \bar{\psi}(\xi+1) d\xi \quad (\text{VIII.58})$$

между всеми элементами $\varphi \in C$ и всеми элементами

$$\psi \in C^* = \{\text{непрерывные функции на } [0, 1]\}.$$

Тогда отсюда следует, что оператор, сопряженный $f_\mu(\mu|\cdot)$ по отношению к (VIII.58), дается формулами

$$[f_\mu^*(\mu|\psi)](\theta) = \begin{cases} -d\psi(\theta)/d\theta, & \text{если } 0 < \theta \leq 1, \\ -(\pi/2 + \mu)\psi(1), & \text{если } \theta = 0. \end{cases} \quad (\text{VIII.59})$$

Поэтому имеем дуальные задачи на собственные значения:

$$\begin{aligned} f_\mu(0|\xi_0) &= i \frac{\pi}{2} \xi_0, \\ f_\mu^*(0|\xi_0^*) &= -i \frac{\pi}{2} \xi_0^*, \\ \langle \xi_0, \xi_0^* \rangle &= 1, \end{aligned}$$

которым удовлетворяют

$$\begin{aligned} \xi_0(\theta) &= \exp i \frac{\pi}{2} \theta, \\ \xi_0^*(\theta) &= \frac{1}{1 - i(\pi/2)} \exp i \frac{\pi}{2} \theta. \end{aligned}$$

Читатель может проверить, что

$$\langle f_{\mu\mu}(0|\xi_0), \xi_0^* \rangle = \frac{i}{1 + i(\pi/2)} = \sigma_\mu(0).$$

Используем теперь альтернативу Фредгольма (VIII.32) для вычисления рядов (VIII.24), дающих периодическое по времени решение, которое ответвляется от нулевого решения. Находим, что $\mu_1 = \omega_1 = 0$,

$$\begin{aligned} [u_1(s)](\theta) &= \xi_0(\theta) e^{is} + \bar{\xi}_0(\theta) e^{-is}, \\ f_{\mu\mu}(0|\xi_0|\bar{\xi}_0) &= 0, \\ \omega_0 \frac{du_2}{ds} &= f(0|u_2) + e^{2is} f_{\mu\mu}(0|\xi_0|\xi_0) + e^{-2is} f_{\mu\mu}(0|\bar{\xi}_0|\bar{\xi}_0), \\ [u_2(s)](\theta) &= \xi_2(\theta) e^{2is} + \bar{\xi}_2(\theta) e^{-2is}, \\ \xi_2(\theta) &= \frac{8-4i}{5\pi} e^{i\pi\theta}, \quad -1 \leq \theta \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$[u_2(s)](\theta) = \frac{4(2-i)}{5\pi} e^{i\pi\theta} e^{2is} + \frac{4(2+i)}{5\pi} e^{-i\pi\theta} e^{-2is},$$

и (VIII.35) можно записать в виде

$$\mu_2 \tau_\mu - i\omega_2 = -4 \left\langle f_{uu} \left(0 \mid \bar{\zeta}_0 \right) \frac{2-i}{5\pi} e^{i\pi\theta} \right\rangle, \quad \zeta_0^* = \frac{2[3\pi - 2 + i(6 + \pi)]}{5\pi(1 + (\pi^2/4))},$$

$$\mu_2 = \frac{4(3\pi - 2)}{5\pi^2} > 0, \quad \omega_2 = -\frac{8}{5\pi^2}.$$

Собирая наши результаты, находим, что главная часть бифуркационного решения дается уравнениями

$$\mu = \varepsilon^2 \frac{\mu_2}{2} + O(\varepsilon^4),$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 \frac{\omega_2}{2} + O(\varepsilon^4).$$

и

$$U(t) = [u(\omega t)](0) = 2\varepsilon \cos \omega t + 4\varepsilon^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{2-i}{5\pi} e^{2i\omega t} \right\} + O(\varepsilon^3).$$

Пример VIII.3. (Бифуркация в уравнениях, не приведенных к локальной форме.)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(\dot{x}, x, \mu), \quad (\text{VIII.60})$$

где $\dot{x} \stackrel{\text{def}}{=} dx/dt$, а функция f обладает необходимой степенью гладкости по отношению ко всем ее аргументам для малых их значений. Кроме того, предположим, что

$$f(0, 0, 0) = f_x(0, 0, 0) = f_{\dot{x}}(0, 0, 0) = 0, \quad (\text{VIII.61})$$

и используем разложение

$$f(u_1, u_2, \mu) = \sum_{p, q_1, q_2} \mu^p u_1^{q_1} u_2^{q_2} f_{pq, q_1, q_2}, \quad (\text{VIII.62})$$

где $f_{000} = f_{010} = f_{001} = 0$, и это разложение проведено до членов такого порядка, который допускается гладкостью функции f . Уравнение (VIII.60) можно записать в $\mathbb{R}^2$ следующим образом. Определим

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда

$$\frac{dU}{dt} = A_0 U + F(\mu, U), \quad (\text{VIII.63})$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad F(\mu, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(u_1, u_2, \mu) \end{bmatrix}.$$

Здесь $U=0$, вообще говоря, не является установившимся решением (VIII.63), за исключением случая, когда $\mu=0$. Однако существование установившегося решения при $\mu \neq 0$ может быть гарантиро-

вано теоремой о неявной функции в $\mathbb{R}^2$, и его можно построить, используя разложения в ряды

$$U(\mu) = \sum_{n \geq 1} \mu^n U_n, \quad (\text{VIII.64})$$

$$F(\mu, U) = \sum_{p, q} \mu^p F_{pq}(U, \dots, U), \quad F_{00} = F_{01} = 0, \quad (\text{VIII.65})$$

где F_{pq} есть q -линейная по U и симметрическая функция. Получаем

$$\begin{aligned} A_0 U_1 + F_{10} &= 0, \\ A_0 U_2 + F_{20} + F_{11}(U_1) + F_{02}(U_1, U_1) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{p0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ f_{p00} \end{bmatrix}, \\ F_{02}(U, V) &= \begin{bmatrix} 0 \\ f_{020}u_1v_1 + \frac{1}{2}f_{011}(u_1v_2 + u_2v_1) + f_{002}u_2v_2 \end{bmatrix}, \\ F_{11}(U) &= \begin{bmatrix} 0 \\ f_{110}u_1 + f_{101}u_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$U_1 = \begin{bmatrix} f_{100}/\omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

и так далее.

Поскольку собственными значениями матрицы A_0 являются $\pm i\omega_0$, то нам нужно рассмотреть возможность бифуркации Хопфа в периодические решения. В теоретической части этой главы мы сначала привели задачу к локальной форме (см. § 1.3) и использовали предположение о том, что потеря устойчивости решения $u=0$ является строгой. В нашем случае $U=0$ не является решением для всех μ , близких к нулю, и нам необходимо сформулировать снова условие того, что решение $U(\mu)$ теряет устойчивость строго, когда μ , возрастаая, проходит через нуль. Сначала произведем линеаризацию

$$A + F_U(\mu, U(\mu) \cdot) = A_0 + \mu [F_{11}(\cdot) + 2F_{02}(U_1, \cdot)] + O(\mu^2). \quad (\text{VIII.66})$$

Собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\pm i\omega_0$, суть $\xi_0 = (1, i\omega_0)$ и $\bar{\xi}_0$. Точно так же находим сопряженные собственные векторы

$$\xi_0^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2\omega_0} \right) \quad \text{и} \quad \bar{\xi}_0^*.$$

Собственное значение $\sigma(\mu)$, отходящее от собственного значения $i\omega_0$, удовлетворяет соотношению (VIII.14); поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_\mu(0) &= \langle F_{11}(\xi_0) + 2F_{02}(U_1, \xi_0), \xi_0^* \rangle = \\ &= -\frac{i}{2\omega_0} \left[f_{110} + f_{101}i\omega_0 + 2f_{020} \left(\frac{f_{100}}{\omega_0^2} \right) + if_{011} \left(\frac{f_{100}}{\omega_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{VIII.67})$$

Условие Хопфа имеет вид

$$2 \operatorname{Re} \sigma_{\mu}(0) = f_{101} + \frac{f_{011} f_{100}}{\omega_0^2} > 0. \quad (\text{VIII.68})$$

Предположим теперь, что условие (VIII.68) выполнено и

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{n \geq 1} \mu_n \varepsilon^n, \\ \omega &= \omega_0 + \sum_{n \geq 1} \omega_n \varepsilon^n, \\ U &= \sum_{n \geq 1} V_n \varepsilon^n, \quad V_n(s) = V_n(s + 2\pi). \end{aligned} \quad (\text{VIII.69})$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях ε в обеих частях уравнения

$$\omega \frac{dU}{ds} - A_0 U = F(\mu, U),$$

находим, что

$$\mathbb{J}_0 V_1 = \mu_1 F_{10}. \quad (\text{VIII.70})$$

Поэтому получаем

$$\begin{aligned} V_1 &= \xi_0 e^{is} + \bar{\xi}_0 e^{-is} + \mu_1 U_1, \\ \mathbb{J}_0 V_2 + \omega_1 \frac{dV_1}{ds} &= \mu_2 F_{10} + F_{02}(V_1, V_1) + \mu_1 F_{11}(V_1) + \mu_1^2 F_{20} \end{aligned} \quad (\text{VIII.71})$$

и, используя (VIII.67),

$$i\omega_1 = \mu_1 \sigma_{\mu}(0).$$

Находим, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mu_1 = 0, \\ V_1 &= \xi_0 e^{is} + \bar{\xi}_0 e^{-is}, \\ V_2 &= \mathbb{J}_0^{-1} F_{02}(V_1, V_1) + \mu_2 U_1, \end{aligned} \quad (\text{VIII.72})$$

где $\mathbb{J}_0^{-1}$ — оператор, обратный $\mathbb{J}_0$ на подпространстве, ортогональном к $\xi_0^* e^{is}$, $\bar{\xi}_0 e^{-is}$.

Теперь определим ω_2 и μ_2 , применяя (VIII.67) к уравнению

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_0 V_3 + \omega_2 \frac{dV_1}{ds} &= \mu_3 F_{10} + 2F_{02}(V_1, V_2) + \mu_2 F_{11}(V_1) + \\ &+ F_{03}(V_1, V_1, V_1). \end{aligned} \quad (\text{VIII.73})$$

Следовательно, V_2 и V_3 суть функции от μ_2 . Продолжая этот процесс, получаем ряды (VIII.69), дающие бифуркацию Хопфа, где, как обычно, μ и ω представляют собой *четные* функции относительно ε .

Замечания

Исследованы следующие специальные задачи бифуркации Хопфа (рис. VIII.1):

(1) Четыре простых собственных значения, две пары комплексно-сопряженных, пересекают мнимую ось одновременно. Эта задача исследована Йоссом (G. Iooss, Direct bifurcation of a steady solution of the Navier—Stokes equations into an invariant torus, *Turbulence and Navier Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics, No. 565, New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag, 1975, pp. 69—84).

(2) Два простых комплексно-сопряженных собственных значения пересекают мнимую ось в критической точке, но не строго; например, $\xi(0) = \xi'(0) = \xi''(0) = 0$, $\xi'''(0) \neq 0$. Эта задача исследована Кильхёфером (H. Kielhöfer, Generalized Hopf bifurcation in Hilbert space, *Math. Methods in Applied Sciences*, в печати).

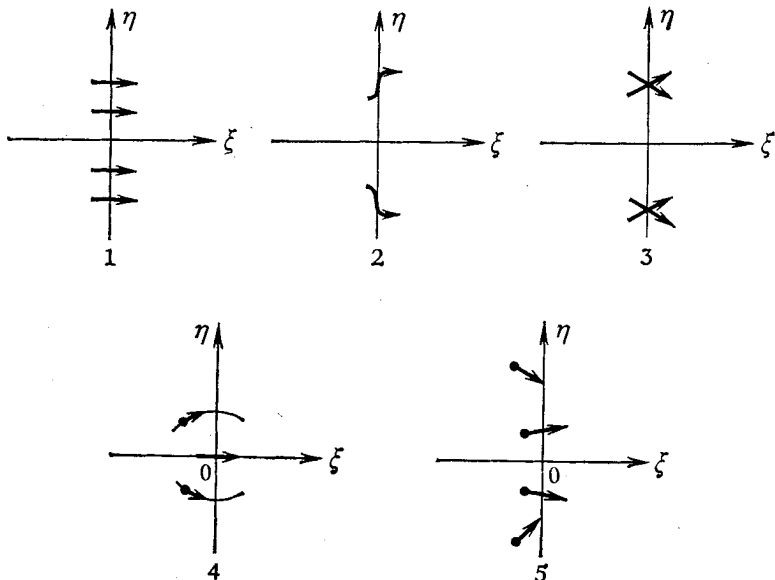


Рис. VIII.1. Бифуркация Хопфа в специальных случаях.

(3) Два кратных собственных значения пересекают мнимую ось в критической точке: H. Kielhöfer, Hopf bifurcation at multiple eigenvalues, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **69**, 53—83 (1979).

Более общими и интересными для приложений являются задачи, в которых различные собственные значения пересекают мнимую ось почти одновременно. В таких исследованиях удобно вводить два возмущающих параметра, как в работе Ленгфорда (W. F. Langford, Periodic and steady-state mode interactions lead to tori, *SIAM J. Appl. Math.*, **37**, 22—48, 1979). При наличии дополнительной симметрии смотрите результаты Кинера (J. Keener, Secondary bifurcation in nonlinear diffusion reaction equations, *Stud. Appl. Math.*, **55**, 187—211, 1976), Холмса (P. Holmes, Unfolding a degenerate nonlinear oscillator: a codimension two bifurcation, *New York Academy of Sciences Proceedings*, Dec., 1979) и Йосса и Ленгфорда (G. Iooss, W. Langford, Conjectures on the routes to turbulence via bifurcations, *New York Academy of Sciences Proceedings*, Dec., 1979). Указанные авторы исследовали случай (4), когда пара простых комплексно-сопряженных собственных значений и одно вещественное простое собственное значение пересекают мнимую ось почти одновременно, и случай (5), который также представляет интерес, когда две пары комплексно-сопряженных собственных значений пересекают мнимую ось почти одновременно.

Другой интересный специальный класс задач обладает инвариантностью по отношению к некоторой группе преобразований и приводит к волноподобным решениям. В задачах, инвариантных относительно поворотов вокруг оси, бифуркационное решение зависит от θ и t только в комбинации $\theta - \omega t$. В задачах, инвариантных относительно переносов вдоль оси x на периоды $2\pi/\alpha$, решение зависит от x и t через $\alpha x - \omega t$, где $C = \omega/\alpha$ — волновая скорость (см. § XI.19).

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ T-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В этой главе и в гл. X мы рассмотрим бифуркацию нетривиальных T -периодических решений. Относительно происхождения и структуры таких задач читателю было бы полезно прочитать вновь объяснения, приведенные в § I.2 и § I.3. Следуя нашей обычной процедуре, мы будем строить эту теорию в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и покажем, как анализ приводится к $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$ на основе использования проекций, связанных с альтернативой Фредгольма. В определенном смысле задача в $\mathbb{R}^n$ с конечным n на самом деле является бесконечномерной. В отличие от стационарных задач, в которых встречаются только постоянные векторы, здесь мы должны иметь дело с векторными функциями, которые периодически зависят от времени и потому принимают бесконечное множество различных значений. Поэтому в этой главе вычислительные упрощения, связанные с рассмотрением преимущественно $\mathbb{R}^2$, а не $\mathbb{R}^n$, не очень большие. В $\mathbb{R}^n$ мы используем те же самые обозначения, которые можно было использовать для эволюционного уравнения в пространстве Банаха. Поэтому наши результаты одинаково имеют место и в $\mathbb{R}^n$, и, например, для эволюционных задач, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, аналогичными уравнениям Навье—Стокса или уравнениям, описывающим реакцию или диффузию в химических системах, если эти дифференциальные уравнения с частными производными можно представить в форме эволюционных задач в банаховом пространстве.

Обозначения

$\mathbb{P}_{nT} = \{u: u(t) = u(t + nT), \text{ } nT\text{-периодические непрерывные функции}\};$
 $J(\mu)$ — линейный оператор, определенный в § IX.2 как

$$J(\mu) = -\frac{d}{dt} + f_u(t, \mu, 0|\cdot)$$

и действующий в $\mathbb{P}_T$, областью определения которого является множество непрерывно дифференцируемых T -периодических функций. Поэтому оператор $J(\mu)$ является T -периодическим. Аналогично, оператор $J_0 \stackrel{\text{def}}{=} J(0)$ T -периодический. Оператор $\mathbb{J}$ — линейный опера-

тор, определенный в § IX.8, который имеет T -периодические коэффициенты и действует в $\mathbb{P}_{nT}$ (расширенное пространство). Далее,

$$\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu)$$

— экспонента Флоке при исследовании устойчивости решения $u \equiv 0$,

$$\gamma(\varepsilon) = \xi(\varepsilon) + i\eta(\varepsilon)$$

— экспонента Флоке при анализе устойчивости субгармонического решения $u(t, \varepsilon) \not\equiv 0$. (Замечание. Мы используем одни и те же обозначения ξ и η для разных функций.) Как и прежде,

$$f_u(t|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_u(t, 0, 0|\cdot)$$

— линейный оператор (в $\mathbb{R}^n$) (см. § I.6, § I.7);

$$f_{uu}(t|\cdot|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_{uu}(t, 0, 0|\cdot|\cdot)$$

— билинейный симметричный оператор: $f_{uu}(t|u_1|u_2) = f_{uu}(t|u_2|u_1)$;

$$f_{uuu}(t|\cdot|\cdot|\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_{uuu}(t, 0, 0|\cdot|\cdot|\cdot)$$

— трилинейный симметричный оператор:

$$f_{uuu}(t|u_1|u_2|u_3) = f_{uuu}(t|u_1|u_3|u_2) = f_{uuu}(t|u_2|u_1|u_3).$$

Мультилинейные операторы появляются в результате повторного дифференцирования $f(t, \mu, u)$ по u в точке $\mu=0, u=0$. В приведенных операторах предполагается, что производные вычисляются в точке $(\mu, u) = (0, 0)$.

Содержание этой главы основано на результатах, полученных в работе Ж. Йосса и Д. Джозефа *Bifurcation and stability of nT -periodic solutions branching from T -periodic solutions at points of resonance*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **66**, 135—172 (1977).

§ IX.1. Постановка задачи о субгармонической бифуркации

Нас интересуют nT -периодические решения, где $n \in \mathbb{N}^*$ — положительное целое число, отвечающие от нетривиального T -периодического решения $U(t) \in \mathbb{P}_T$. Если задача «приведена к локальной форме», как в § I.3, то речь идет об исследовании бифуркации решения $u=0$ эволюционной задачи

$$\frac{du}{dt} = f(t, \mu, u), \quad (\text{IX.1})$$

где функция $f(t, \cdot, \cdot) = f(t+T, \cdot, \cdot)$ имеет период T нетривиального решения, от которого она зависит. Наше исследование бифуркации предполагает, что некоторая мера амплитуды решения u мала

и f допускает разложение в окрестности $u=0$ вида

$$f(t, \mu, u) = f_a(t, \mu, 0|u) + \frac{1}{2} f_{aa}(t, \mu, 0|u|u) + \\ + \frac{1}{3!} f_{aaa}(t, \mu, 0|u|u|u) + O(\|u\|^4). \quad (IX.2)_1$$

Мы будем предполагать, что f — аналитическая функция от μ и u в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Правую часть уравнения (IX.2) можно также разложить по степеням μ и отбросить члены высокого порядка, которые не влияют на локальный анализ устойчивости и бифуркации:

$$f(t, \mu, u) = f_a(t|u) + \mu f_{a\mu}(t|\mu) + \frac{1}{2} \mu^2 f_{a\mu\mu}(t|\mu) + \\ + \frac{1}{2} \{f_{aa}(t|u|u) + \mu f_{a\mu\mu}(t|u|u)\} + \frac{1}{3!} f_{aaa}(t|u|u|u) + \\ + O(\|\mu\|^3 \|u\| + \mu^2 \|u\|^2 + \|\mu\| \|u\|^3 + \|u\|^4). \quad (IX.2)_2$$

Здесь, как и выше, предполагается, что производные от f вычисляются в точке $(\mu, u) = (0, 0)$ (см. (IX.21)).

Пусть субгармоническое решение с амплитудой ε

$$u(t, \varepsilon) = u(t + nT, \varepsilon), \quad u(t, 0) = 0, \\ \mu = \mu(\varepsilon), \quad \mu(0) = 0 \quad (IX.3)$$

ответвляется от решения $u=0$, когда μ , возрастая, проходит через нуль. Для исследования устойчивости решения (IX.3) по отношению к малым возмущениям v линеаризуем уравнение (IX.1) и найдем, что

$$\frac{dv}{dt} = f_a(t, \mu(\varepsilon), u(t, \varepsilon)|v) = \\ = f_a(t, \mu(\varepsilon), 0|v) + f_{aa}(t, \mu(\varepsilon), 0|u(t, \varepsilon)|v) + \\ + \frac{1}{2} f_{aaa}(t, \mu(\varepsilon), 0|u(t, \varepsilon)|u(t, \varepsilon)|v) + \\ + R(t, \mu(\varepsilon), u(t, \varepsilon)|v). \quad (IX.4)$$

Линейный оператор R не окажет влияния на локальный анализ, потому что он является кубическим относительно u , и, следовательно, имеет третий порядок малости относительно ε .

Для исследования (IX.4) используем метод Флоке (см. § VII.6.2). Нам понадобятся дополнительные сведения из теории устойчивости. Однако для целей настоящего исследования достаточно сделать несколько предварительных замечаний. Для получения спектральной задачи положим

$$v(t, \varepsilon) = e^{\gamma(\varepsilon)t} y(t, \varepsilon), \quad (IX.5)$$

где $y(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}_{nT}$ и

$$\gamma(\varepsilon)y + \frac{dy}{dt} = f_a(t, \mu(\varepsilon), u(t, \varepsilon)|y). \quad (IX.6)$$

В общем случае $\gamma(\varepsilon)$ — комплексное число:

$$\gamma(\varepsilon) = \xi(\varepsilon) + i\eta(\varepsilon). \quad (\text{IX.7})$$

При исследовании устойчивости решения $u=0$ в качестве параметра предпочтительно использовать μ , а не ε . Положив $v = e^{\sigma t} \xi$, получаем спектральную задачу

$$\sigma(\mu) \xi + \frac{d\xi}{dt} = f_u(t, \mu, 0 | \xi), \quad \xi \in \mathbb{P}_T, \quad (\text{IX.8})$$

где

$$\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu). \quad (\text{IX.9})$$

Предостерегаем читателя о возможной путанице, которая была бы результатом использования одних и тех же обозначений для вещественных и мнимых частей σ и γ . В действительности нам не понадобятся собственные значения $\gamma(\varepsilon)$ до § IX.13.

§ IX.2. Спектральные задачи и собственные значения $\sigma(\mu)$

Для анализа устойчивости решения $u=0$ рассмотрим линейаризованную эволюционную задачу

$$\frac{dv}{dt} = f_u(t, \mu, 0 | v) = f_u(t+T, \mu, 0 | v) \quad (\text{IX.10})_1$$

с начальным условием

$$v(0) = v_0. \quad (\text{IX.10})_2$$

Решения уравнения (IX.10) можно выразить через специальное матричное решение $\Phi(t, \mu)$ с начальным условием $\Phi(0, \mu) = I$, где I — единичная матрица, следующим образом:

$$v(t, \mu) = \Phi(t, \mu) \cdot v_0. \quad (\text{IX.11})$$

Собственными значениями матрицы монодромии $\Phi(T, \mu)$ служат множители Флоке

$$\lambda(\mu) = e^{\sigma(\mu) T}, \quad (\text{IX.12})$$

где комплексные числа $\sigma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu)$ суть экспоненты Флоке. Эти экспоненты являются собственными значениями задачи (IX.8). Назовем $\sigma(\mu)$ собственным значением оператора

$$J(\mu) = -\frac{d}{dt} + f_u(t, \mu, 0 | \cdot);$$

тогда задачу (IX.8) можно записать в форме

$$\sigma \xi = J(\mu) \xi, \quad \xi \in \mathbb{P}_T. \quad (\text{IX.13})$$

Отметим, что если σ есть собственное значение оператора $J(\mu)$, то $\sigma + (2\pi ki/T)$ также является его собственным значением для любого

k из $\mathbb{Z}$ (ассоциированным собственным вектором служит $\hat{\xi}(t) = \xi(t) \exp(-2\pi k i / T)$).

Теперь сопряженную задачу на собственные значения

$$\bar{\sigma} \xi^* = J^*(\mu) \xi^*, \quad \xi^* \in \mathbb{P}_T, \quad (\text{IX.14})$$

где

$$J^*(\mu) = \frac{d}{dt} + f_u^*(t, \mu | \cdot),$$

определим следующим образом. Линейный оператор $f_u^*(t, \mu | \cdot)$ является сопряженным по отношению к оператору $f_u(t, \mu, 0 | \cdot)$; это означает, что

$$\langle a, f_u^*(t, \mu | b) \rangle = \langle f_u(t, \mu, 0 | a), b \rangle. \quad (\text{IX.15})$$

В $\mathbb{R}^n$ оператором $f_u(t, \mu, 0 | \cdot)$ служит матрица $A(t, \mu)$, а оператором $f_u^*(t, \mu | \cdot)$ — матрица $A^T(t, \mu)^1$. Второе скалярное произведение, удобное для nT -периодических функций, определим равенством

$$[a, b]_{nT} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \langle a, b \rangle dt, \quad (\text{IX.16})$$

где $\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$. Линейный оператор $J^*(\mu)$ определим соотношением

$$[a, J(\mu) b]_T = [J^*(\mu) a, b]_T. \quad (\text{IX.17})$$

Проверим, что

$$[\xi, \bar{\sigma} \xi^*]_T = \sigma [\xi, \xi^*]_T = [J(\mu) \xi, \xi^*]_T = [\xi, J^*(\mu) \xi^*]_T.$$

§ IX.3. Биортогональность

Как показано в гл. VI, собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, биортогональны:

$$[\xi_i, \xi_j^*]_T = 0,$$

если $i \neq j$. Мы также имеем $[\xi_i, \bar{\xi}_i^*]_T = 0$ даже когда $i = j$, если только $\eta(\mu) \neq 0$. Если $\eta = 0$, то σ, ξ и ξ^* являются вещественными. Для каждого полупростого собственного значения можно выбрать биортогональное множество собственных векторов так, чтобы

$$[\xi_i, \xi_j^*]_T = \delta_{ij}. \quad (\text{IX.18})$$

¹⁾ $f_u(t, \mu, 0 | \cdot)$ есть производная от $f(t, \mu, u)$ при $u=0$, но мы не предполагаем, что существует $f^*(t, \mu, u)$ с производной f_u^* . Мы определяем f_u^* уравнением (IX.15).

§ IX.4. Критическая точка

Пусть потеря устойчивости решения $u=0$ является строгой, когда μ при возрастании от отрицательных к положительным значениям проходит через нуль. Тогда при $\mu=0$ вещественная часть $\xi(0)$ собственного значения $\sigma(0)$ обращается в нуль и

$$\sigma(0) = i\eta(0) \stackrel{\text{def}}{=} i\omega_0$$

является собственным значением операторов $J(\mu)$ и $J^*(\mu)$ при $\mu=0$; это означает, что

$$i\omega_0 \xi = J_0 \xi, \quad -i\omega_0 \xi^* = J_0^* \xi^*, \quad (\text{IX.19})$$

где $J_0 \stackrel{\text{def}}{=} J(0)$, а $J_0^* \stackrel{\text{def}}{=} J^*(0)$. Строгая потеря устойчивости в критической точке означает, что

$$\xi_\mu(0) \stackrel{\text{def}}{=} \xi'(0) > 0. \quad (\text{IX.20})$$

Критическая точка имеет очень большое значение. В возмущенном решении бифуркационной задачи все характеристики вычисляются в критической точке. Для упрощения наших обозначений для производных от $\mathbf{f}$ в критической точке будем писать

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_u(t, 0, 0|\cdot) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_u(t|\cdot), \\ \mathbf{f}_{uu}(t, 0, 0|\cdot|\cdot) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_{uu}(t|\cdot|\cdot), \\ \mathbf{f}_u^*(t, 0|\cdot) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{f}_u^*(t|\cdot) \end{aligned} \quad (\text{IX.21})$$

и так далее.

§ IX.5. Альтернатива Фредгольма для $J(\mu) - \sigma(\mu)$ и формула, выражающая строгое пересечение (IX.20)

Пусть $\sigma(\mu)$ — полупростое собственное значение оператора $J(\mu)$ кратности l , а ξ_i^* ($i=1, 2, \dots, l$) — какое-нибудь множество независимых сопряженных собственных векторов. Тогда уравнение

$$(J(\mu) - \sigma(\mu)) \mathbf{a} = \mathbf{b}(t) = \mathbf{b}(t+T) \quad (\text{IX.22})$$

может иметь решения $\mathbf{a}$ в P_T ($\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t+T)$) тогда и только тогда, когда заданный вектор $\mathbf{b}(t)$ удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$[\mathbf{b}, \xi_i^*]_T = 0. \quad (\text{IX.23})$$

Предположим теперь, что $i\omega_0$ есть алгебраически простое собственное значение оператора J_0 . Для вывода формулы, выражающей (IX.20),

продифференцируем (IX.13) по μ при $\mu=0$ и найдем, что

$$\sigma_{\mu}(0)\xi - f_{\mu\mu}(t|\xi) + (i\omega_0 - J_0)\xi_{\mu} = 0, \quad (\text{IX.24})$$

где $J_{\mu}(0) = f_{\mu\mu}(t|\cdot)$ в обозначениях (IX.21), и $\xi_{\mu} \in \mathbb{P}_T$. Используя (IX.23) для (IX.24), находим, что

$$\sigma_{\mu}(0) = \xi_{\mu}(0) + i\eta_{\mu}(0) = [f_{\mu\mu}(t|\xi), \xi^*]_T. \quad (\text{IX.25})$$

§ IX.6. Предположения о спектре

Необходимо особо отметить, что здесь и далее $\sigma(\mu)$ представляет собой собственное значение оператора $J(\mu)$ с наибольшей вещественной частью. Тогда в критической точке не существует собственных значений оператора J_0 с положительными вещественными частями. Если $\eta(\mu) \neq 0$, то всегда существуют по крайней мере два семейства собственных значений $\sigma(\mu) + (2\pi ki/T)$ и $\bar{\sigma}(\mu) - (2\pi ki/T)$, где k — любое число из $\mathbb{Z}$, имеющих наибольшие вещественные части, и если $i\omega_0$ есть собственное значение оператора J_0 , то таковым является и $-i\omega_0$.

Теперь мы сформулируем основные предположения о спектре при исследовании T -периодических решений. В сущности они представляют собой те же самые предположения, которые были введены при анализе бифуркации в двойной точке и бифуркации Хопфа. Эти предположения выражаются характером собственных значений в критической точке. Поскольку мы рассматриваем только такие задачи, в которых величины изменяются непрерывно по отношению к μ , а собственные значения предполагаются изолированными, то утверждения, имеющие место для собственных значений при $\mu=0$, остаются справедливыми также в малой (возможно большой) окрестности $\mu=0$. Сначала сформулируем предположения о спектре оператора J_0 :

(I) $i\omega_0$ — изолированное, алгебраически простое собственное значение оператора J_0 .

(II) $\pm i(\omega_0 + (2\pi k/T))$, $k \in \mathbb{Z}$ суть только те собственные значения оператора J_0 , которые лежат на мнимой оси σ -плоскости. (Если ξ есть T -периодический собственный вектор оператора J_0 , $i\omega_0\xi = J_0\xi$, то $e^{-2\pi ikt/T}\xi(t) = \hat{\xi}(t) = \hat{\xi}(t+T)$ является также T -периодическим собственным вектором J_0 , $J_0\hat{\xi} = i(\omega_0 + (2\pi k/T))\hat{\xi}$.) Все другие собственные значения оператора J_0 лежат в левой части σ -плоскости.

(III) Выполняется условие (IX.20).

Три только что указанные предположения можно также сформулировать и по отношению к собственным значениям λ_0 (множителям) оператора монодромии $\Phi(T, 0)$.

(I) λ_0 — изолированное, алгебраически простое собственное значение $\Phi(T, 0)$.

(II) λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ суть только те собственные значения $\Phi(T, 0)$, которые лежат на единичной окружности на λ -плоскости. Все другие собственные значения $\Phi(T, 0)$ лежат внутри единичного круга.

(III) Выполняется условие (IX.20), так что $|\lambda|_\mu > 0$.

Для того чтобы сделать $\lambda_0 = e^{i\omega_0 T}$ однозначной функцией ω_0 , можно, не теряя общности, потребовать, чтобы

$$0 \leq \omega_0 < \frac{2\pi}{T}. \quad (\text{IX.26})$$

§ IX.7. Рациональные и иррациональные значения отношения частот в критической точке

Почти-периодические функции являются обобщением периодических функций, сохраняющим свойство полноты рядов Фурье. Почти-периодическая функция на прямой $-\infty < x < \infty$ может извигаться более или менее произвольно, но таким образом, что всякое значение этой функции весьма точно повторяется по крайней мере один раз на каждом достаточно большом, но конечном интервале.

(Комплексная) непрерывная функция $f(t)$ ($-\infty < t < \infty$) называется *почти-периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$ такое, что всякий вещественный интервал длины $l(\varepsilon)$ содержит, по крайней мере, одно число τ , для которого $|f(t + \tau) - f(t)| \leq \varepsilon$. Всякое такое τ называется числом переноса. Если $\varepsilon = 0$, то $f(t)$ является периодической функцией, а τ — периодом.

Квазипериодической функцией от n переменных называется функция $g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t) = f(t)$, содержащая конечное число n рациональных независимых частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, которая является периодической с периодом 2π по каждой из ее переменных. Все квазипериодические функции являются почти-периодическими; в наиболее общем случае n равно ∞ . Например, функция $g(\omega_1 t, \omega_2 t) = \cos t \cos \pi t = f(t)$ есть квазипериодическая функция с двумя частотами $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 2$. Значение $f(t) = 1$ достигается, если $t = 0$ и никогда не повторяется; несмотря на то что $g(t) < 1$, если $t \neq 0$, всегда существует $t(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$ для заданного $\varepsilon > 0$.

Решение $\mathbf{v}(t) = \mathbf{Z}(t)$

$$\mathbf{Z}(t) = e^{i\omega_0 t} \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{g}\left(\omega_0 t, \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (\text{IX.27})$$

линеаризованного уравнения (IX.10) в критической точке ($d\mathbf{Z}/dt = \mathbf{f}_u(t|\mathbf{Z})$) является квазипериодическим, если $\omega_0 T/(2\pi)$ — иррациональное число. Если $\omega_0 T/(2\pi)$ — рациональное число, то ω_0 и $2\pi/T$ рационально зависимы и решение является периодическим с периодом, кратным T . Множество точек ω_0 на интервале (IX.26), для которых ω_0 и $2\pi/T$ рационально зависимы, называются *рациональными точками в критическом случае*. Эти точки образуют плотное

множество на интервале (IX.26). Множество точек, для которых ω_0 и $2\pi/T$ рационально независимы, называются *иррациональными точками в критическом случае*.

Рациональные точки отношения частот в критическом случае обязательно имеют вид

$$0 \leq \frac{\omega_0 T}{2\pi} = \frac{m}{n} < 1, \quad n \neq 0, \quad (\text{IX.28})$$

где m и n — целые числа, а m/n — дробь. Субгармоническое решение представляет собой nT -периодическое решение с $n \geq 1$. Решение (IX.27) будет субгармоническим, если ω_0 — рациональная точка. Всякое nT -периодическое решение (IX.27) удовлетворяет соотношению

$$e^{i\omega_0(t+nT)} \xi(t+nT) = e^{i\omega_0 t} \xi(t).$$

Поэтому $e^{i\omega_0 nT} = 1$ и $\omega_0 nT = 2\pi m$, где ω_0 удовлетворяет неравенству (IX.26). Поскольку

$$\lambda_0^n = (e^{i\omega_0 T})^n = (e^{2\pi i m/n})^n = 1 = \bar{\lambda}_0^n,$$

то λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ суть корни из единицы, если ω_0 — рациональная точка. Имеются две рациональные точки, для которых $\lambda_0 = \bar{\lambda}_0$ — вещественное число: $m/n = 0/1$, $\lambda_0 = 1$ и $m/n = 1/2$, $\lambda_0 = -1$. Если $m/n = 0/1$, то субгармоническое решение (IX.27) является T -периодическим. Если $m/n = 1/2$, то субгармоническое решение (IX.27) будет $2T$ -периодическим.

§ IX.8. Оператор $\mathbb{J}$ и его собственные векторы

Определим оператор

$$\mathbb{J} = -\frac{d}{dt} + \mathbf{f}_a(t|\cdot), \quad (\text{IX.29})$$

область определения которого состоит из дифференцируемых nT -периодических векторов.

Естественно, что множество T -периодических векторов меньше, чем множество nT -периодических векторов, $\text{dom } J_0 \subset \text{dom } \mathbb{J}$. Спектр оператора соответствует спектру матрицы монодромии $\Phi(nT, 0)$, и поскольку $\Phi(nT, 0) = \{\Phi(T, 0)\}^n$, то 1 является единственным собственным значением $\Phi(nT, 0)$, лежащим на единичной окружности. Если $n=1$ ($m/n=0$, где m и n определены в (IX.28)) и если $n=2$ ($m/n=1/2$), то это собственное значение является простым. Если $n \geq 3$, то это — двойное собственное значение. Собственное значение $\Phi(nT, 0)$, равное единице, соответствует нулевому собственному значению оператора $\mathbb{J}$. И nT -периодический вектор

$$\mathbf{Z}(t) = \exp\left(\frac{2\pi i m t}{nT}\right) \xi(t), \quad \xi \in \mathbb{R}_T, \quad (\text{IX.30})$$

и ему сопряженный вектор $\bar{\mathbf{Z}}$ принадлежат нуль-пространству оператора $\mathbb{J}$:

$$\mathbb{J}\mathbf{Z} = \mathbb{J}\bar{\mathbf{Z}} = 0. \quad (\text{IX.31})$$

Если $n=2$ ($m/n=1/2$), то существует только один собственный вектор и его можно выбрать вещественным.

Полезно сформулировать лемму о нулевом собственном значении оператора $\mathbb{J}$. Напомним, что оператор $\mathbb{J}$ определен для критической точки.

Лемма. *Предположим, что условия (I) и (II), относящиеся к собственным значениям оператора J_0 (или, что эквивалентно, к собственным значениям λ_0 матрицы монодромии $\Phi(T, 0)$), выполнены. Тогда если*

$$n=1, \quad (\text{IX.32})$$

то нуль есть простое собственное значение оператора $\mathbb{J}$ с одним вещественным собственным вектором $\mathbf{Z} = \xi = \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\xi}$; если

$$n=2, \quad (\text{IX.33})$$

то нуль — простое собственное значение оператора $\mathbb{J}$ с одним вещественным собственным вектором $\mathbf{Z} = e^{i\pi t/2T} \xi(t) = \mathbf{Z}$; если

$$n>2, \quad (\text{IX.34})$$

то нуль — двойное собственное значение оператора $\mathbb{J}$ и любое решение $\mathbf{v}$ уравнения $\mathbb{J}\mathbf{v}=0$ можно представить в виде линейной комбинации двух независимых векторов $(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$, принадлежащих нуль-пространству оператора $\mathbb{J}$.

§ IX. 9. Сопряженный оператор $\mathbb{J}^*$, биортогональность, строгое пересечение и альтернатива Фредгольма для $\mathbb{J}$

Сопряженный оператор в $\mathbb{P}_{nT}$ можно определить следующим образом. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — любые два гладких вектора, принадлежащих $\mathbb{P}_{nT}$. Тогда $\mathbb{J}^*$ представляет собой единственный линейный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$[\mathbb{J}\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{nT} = [\mathbf{a}, \mathbb{J}^*\mathbf{b}]_{nT},$$

где скалярное произведение $[\cdot, \cdot]_{nT}$ определено формулой (IX.16) и

$$\mathbb{J}^* = \frac{d}{dt} + \mathbf{f}_u^*(t | \cdot). \quad (\text{IX.35})$$

Естественно, что если нуль — собственное значение оператора $\mathbb{J}$, то он также является и собственным значением оператора $\mathbb{J}^*$, таким, что

$$\mathbb{J}^*\mathbf{Z}^* = 0, \quad \mathbf{Z}^*(t) = \exp\left(\frac{2\pi imt}{nT}\right) \xi^*(t). \quad (\text{IX.36})$$

Если $n=1$ или $n=2$, то существует только один сопряженный собственный вектор $\mathbf{Z}^*$; если $n > 2$, то $\mathbf{Z}^*$ и $\bar{\mathbf{Z}}^*$ являются независимыми собственными векторами оператора $\mathbb{J}^*$.

Соотношения биортогональности

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*]_{nT} = 1, \quad [\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}^*]_{nT} = 0 \quad (\text{IX.37})$$

получаются из непосредственного вычисления с использованием (IX.18). Кроме того, соотношение

$$[\mathbf{f}_{i\mu}(t|\xi), \xi^*]_T = [\mathbf{f}_{i\mu}(t|\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^*]_{nT}$$

является тождеством. Поэтому, используя (IX.30), можно записать (IX.25) в виде

$$\sigma_\mu(0) = [\mathbf{f}_{i\mu}(t|\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^*]_{nT}, \quad (\text{IX.38})$$

$$[\mathbf{f}_{i\mu}(t|\bar{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z}^*]_{nT} = [e^{-4\pi i m t/nT} \mathbf{f}_{i\mu}(t|\bar{\xi}), \xi^*]_{nT} = 0,$$

если $n \geq 3$.

Теорема (альтернатива Фредгольма для $\mathbb{J}$). *Предположим, что выполнены условия (I) и (II) § IX.6 о простоте собственного значения $i\omega_0$ оператора J_0 , и рассмотрим уравнение*

$$\mathbb{J}\mathbf{u} = \mathbf{g} \in \mathbb{P}_{nT}. \quad (\text{IX.39})$$

Тогда решение $\mathbf{u} \in \mathbb{P}_{nT}$, единственным образом представимое в виде линейной комбинации собственных векторов $\mathbf{Z}$ и $\bar{\mathbf{Z}}$ оператора $\mathbb{J}$, существует тогда и только тогда, когда

$$[\mathbf{g}, \mathbf{Z}^*]_{nT} = [\mathbf{g}, \bar{\mathbf{Z}}^*]_{nT} = 0. \quad (\text{IX.40})$$

Вообще говоря, соотношений ортогональности (IX.40) существует столько, сколько имеется сопряженных собственных векторов; в настоящем случае, как следствие условий (I) и (II), имеем только два соотношения (IX.40), если $n > 2$, и только одно ($\mathbf{Z}^* = \bar{\mathbf{Z}}^*$), если $n=1$ или $n=2$.

Если $\mathbf{g}$ — вещественный вектор, то для разрешимости достаточно одного условия ортогональности

$$\overline{[\mathbf{g}, \bar{\mathbf{Z}}^*]_{nT}} = [\mathbf{g}, \mathbf{Z}^*]_{nT} = 0. \quad (\text{IX.41})$$

Полезно отметить, что мы получаем *единственное* решение, если требуем, чтобы $\mathbf{u}$ было ортогонально векторам, принадлежащим нуль-пространству оператора $\mathbb{J}^*$; это означает, что $[\mathbf{u}, \mathbf{Z}^*]_{nT} = [\mathbf{u}, \bar{\mathbf{Z}}^*]_{nT} = 0$.

§ IX.10. Амплитуда ε и биортогональное разложение бифуркационных субгармонических решений

Теперь мы будем искать вещественные субгармонические решения (IX.3) с амплитудой ε , которые ответвляются от решения $u=0$ в точках резонанса. Амплитуду ε можно определить различными эквивалентными способами, совместными с требованием, чтобы $u(t, \varepsilon)/\varepsilon$ было ограничено при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кроме того, из таких решений всегда можно извлечь часть решения, лежащую в нуль-пространстве оператора $\mathbb{J}$, и другую часть:

$$u(t, \varepsilon) = a(\varepsilon) Z(t) + a(\varepsilon) \bar{Z}(t) + W(t, \varepsilon), \quad (\text{IX.42})$$

где

$$0 = [W, Z^*]_{nT}, \quad a(\varepsilon) = [u, Z^*]_{nT}. \quad (\text{IX.43})$$

Удобно отдельно рассмотреть два случая: (1) $n=1$ и $n=2$, когда существует только один собственный вектор $Z = \bar{Z}$ оператора $\mathbb{J}$, и (2) $n > 2$, когда Z и $\bar{Z}$ — независимые собственные векторы.

В случае (1) определим

$$\varepsilon = a(\varepsilon) = [u(t, \varepsilon), Z^*]_{nT} \quad (\text{IX.44})$$

и, как увидим,

$$W(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 w(t, \varepsilon), \quad (\text{IX.45})$$

где $w(t, 0)$ ограничен. Поэтому в случае (1) разложение (IX.42) можно записать в форме

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon Z + \varepsilon^2 w(t, \varepsilon). \quad (\text{IX.46})$$

В случае (2) удобно определить ε , потребовав, чтобы

$$a(\varepsilon) = \varepsilon e^{i\varphi(\varepsilon)} = [u, Z^*]_{nT}. \quad (\text{IX.47})$$

Такое определение отвечает тому обстоятельству, что главная часть всякого бифуркационного решения принадлежит собственному пространству линеаризованного оператора, которое соответствует нулевому собственному значению. В случае (2) разложение (IX.42) можно записать в виде

$$u(t, \varepsilon) = \varepsilon (A(\varepsilon) Z + \bar{A}(\varepsilon) \bar{Z}) + \varepsilon^2 w(t, \varepsilon). \quad (\text{IX.48})$$

§ IX.11. Уравнения для определения производных от бифуркационных субгармонических решений по ε при $\varepsilon=0$

Переходим к вычислению производных от $u(t, \varepsilon) \in \mathbb{P}_{nT}$ и $\mu(\varepsilon)$ по ε при $\varepsilon=0$. Если правая часть уравнения является аналитической функцией по u и μ , то эти производные равны коэффициентам раз-

ложения решения в ряды Тейлора:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(t, \varepsilon) \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{p!} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_p(t) \\ \mu_p \end{bmatrix}. \quad (\text{IX.49})$$

Эти коэффициенты удовлетворяют уравнениям, которые получаются в результате дифференцирования (IX.1) и (IX.2) и использования упрощенных обозначений (IX.21) или в результате подстановки (IX.49) в (IX.1) и (IX.2) и приравнивания в левой и правой частях получаемого уравнения членов при одинаковых степенях ε :

$$0 = \mathbb{J}\mathbf{u}_1, \quad (\text{IX.50})$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{J}\mathbf{u}_2 + 2\mu_1 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_1) + \mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1), \\ 0 &= \mathbb{J}\mathbf{u}_3 + 3\mu_1 \mathbf{f}_{uu\mu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + 3\mu_1^2 \mathbf{f}_{u\mu\mu}(t | \mathbf{u}_1) + \\ &\quad + 3\mu_1 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_2) + 3\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) + \\ &\quad + 3\mu_2 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_1) + \mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1), \end{aligned} \quad (\text{IX.51})$$

а для $p > 3$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{J}\mathbf{u}_p + p\mu_{p-1} \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_1) + p\{\mu_1 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_{p-1}) + \mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_{p-1})\} + \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{2} \{\mu_2 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_{p-2}) + \mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_{p-2}) + \\ &\quad + \mu_1^2 \mathbf{f}_{u\mu\mu}(t | \mathbf{u}_{p-2}) + 2\mu_1 \mathbf{f}_{uu\mu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_{p-2}) + \mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_{p-2}) + \\ &\quad + \mu_{p-2} \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_2) + \mu_{p-2} \mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) + \\ &\quad + 2\mu_1 \mu_{p-2} \mathbf{f}_{u\mu\mu}(t | \mathbf{u}_1)\} + g_p, \end{aligned} \quad (\text{IX.52})$$

где g_p зависит от членов более низкого порядка, т. е. $g_p(\mu_m, \mathbf{u}_l)$, $l < p-2$, $m < p-2$. Естественно, что $\mathbf{u}_p(t)$ есть nT -периодическая вектор-функция.

Полезно также отметить, что разложение (IX.48) можно записать в виде

$$\mathbf{u}_p = p[A_{p-1}\mathbf{Z} + \bar{A}_{p-1}\bar{\mathbf{Z}}] + p(p-1)\mathbf{w}_{p-2}, \quad (\text{IX.53})$$

где

$$A(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\varphi(\varepsilon)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{p!} \varepsilon^p,$$

а

$$A_p = \frac{d^p}{d\varepsilon^p} e^{i\varphi(\varepsilon)} \Big|_{\varepsilon=0} = i\varphi_p e^{i\varphi_0} + b_p e^{i\varphi_0},$$

где b_p зависит от производных $\varphi_l = d^l \varphi / d\varepsilon^l \Big|_{\varepsilon=0}$ более низкого порядка $l < p$.

Для локального исследования устойчивости субгармонических решений вблизи $\varepsilon=0$ удобно разложить спектральную задачу (IX.6) по степеням ε . Находим разложение правой части уравнения (IX.4),

зависящей от (IX.49), и заключаем, что

$$\begin{aligned} \gamma y + \frac{dy}{dt} = & f_u(t|y) + \varepsilon \{ \mu_1 f_{u\mu}(t|y) + f_{uu}(t|u_1|y) \} + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \{ f_{uu}(t|u_2|y) + 2\mu_1 f_{u\mu\mu}(t|u_1|y) + \mu_2 f_{u\mu}(t|y) + \\ & + f_{uuu}(t|u_1|u_1|y) + \mu_1^2 f_{u\mu\mu}(t|y) \} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{IX.54})$$

где $y \in \mathbb{P}_{nT}$.

§ IX.12. Бифуркация и устойчивость T -периодических и $2T$ -периодических решений

Для случая (1), указанного в § IX.10, $n=1$ и $n=2$. Условие нормировки (IX.44) требует, чтобы

$$\begin{aligned} [u_1, Z^*]_{nT} &= 1, \\ [u_p, Z^*]_{nT} &= 0, \quad p \geq 2. \end{aligned}$$

Так как $\mathbb{J}u_1 = 0$, а вектор-функция, удовлетворяющая уравнению $\mathbb{J}Z = 0$ и условию $[Z, Z^*] = 1$, определяется единственным образом, то получаем

$$u_1 = Z. \quad (\text{IX.55})$$

Для случая (1) альтернатива Фредгольма для оператора $\mathbb{J}$ утверждает, что уравнение $\mathbb{J}u = g \in \mathbb{P}_{nT}$ ($n=1, 2$) разрешимо тогда и только тогда, когда $[g, Z] = 0$. Поэтому уравнение (IX.50) разрешимо, если

$$2\mu_1 \sigma_\mu(0) + [f_{uu}(t|Z|Z), Z^*]_{nT} = 0, \quad (\text{IX.56})$$

где $\sigma_\mu(0)$ дается формулой (IX.38) и вещественно, так как Z и Z^* — вещественные векторы. Если условие (IX.56) выполняется, то уравнение (IX.50) разрешимо относительно u_2 и имеет единственное решение u_2 , такое, что $[u_2, Z^*]_{nT} = 0$. Аналогично, все задачи вида (IX.52) разрешимы, если μ_{p-1} выбираются так, чтобы

$$p\mu_{p-1} \sigma_\mu(0) + [f_p, Z^*] = 0,$$

где f_p не зависит от u_p и μ_{p-1} .

Если $n=1$, то

$$\mu_1 = - \frac{[f_{uu}(t|\xi|\xi), \xi^*]_T}{2\sigma_\mu(0)}, \quad (\text{IX.57})$$

вообще говоря, отлично от нуля. Из (IX.49) следует, что вблизи $\varepsilon=0$ бифуркация T -периодических решений из T -периодических решений является двухсторонней (транскритической), как показано на рис. IX.1. Бифуркация T -периодических в T -периодические решения имеет очень важное значение в природе. Имеется аналогия

между задачами с периодическими правыми частями и задачами бифуркации нетривиальных стационарных решений в другие стационарные решения. В физических примерах этот тип бифуркации тесно связан с нарушением пространственной симметрии.

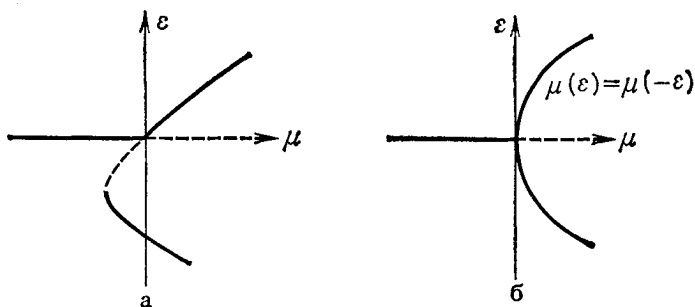


Рис. IX.1. (а) Двусторонняя бифуркация T -периодических решений в T -периодические решения; (б) односторонняя (на рисунке — суперкритическая) бифуркация в $2T$ -периодические решения.

Если $n=2$, то небольшие вычисления с использованием (IX.30) и (IX.36) показывают, что

$$\mu_1 = [e^{\pi i t/T} f_{uu}(t | \xi | \xi), \xi^*]_{2T} / 2\sigma_\mu = 0.$$

Тогда уравнение (IX.50) разрешимо относительно u_2 (с $\mu_1=0$), а уравнение (IX.51) разрешимо относительно u_3 тогда и только тогда, когда

$$3\mu_2\sigma_\mu(0) + 3[f_{uu}(t | Z | u_2), Z^*]_{2T} + [f_{uuu}(t | Z | Z | Z), Z^*]_{2T} = 0.$$

В общем случае $\mu_2 \neq 0$.

Можно показать, используя метод математической индукции, что все производные нечетного порядка от $\mu(\varepsilon)$ равны нулю в случае $n=2$. Поэтому для $2T$ -периодической субгармонической бифуркации имеем

$$\mu(\varepsilon) = \mu(-\varepsilon). \quad (\text{IX.58})$$

Отсюда следует, что в отличие от T -периодической бифуркации с $n=1$ двусторонняя, или транскритическая, бифуркация невозможна, и эта бифуркация является односторонней, суперкритической, если ветвление происходит вправо, и субкритической, если ветвление происходит влево.

Докажем теперь, что если в $2T$ -периодическом решении начало отсчета времени сдвинуть на T , то будем иметь решение, получаемое из исходного решения в результате изменения знака амплитуды ε . Это означает, что направление вектора $u(t, \varepsilon)$ изменяется через промежуток времени T . Если u интерпретировать как радиус-

вектор движущейся точки, то он движется в одну сторону в течение одной половины периода $2T$ и в другую сторону в течение другой половины. Для того чтобы доказать это, запишем

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{p!} u_p(t).$$

Далее, u_p представляет собой полином, членами которого служат комбинации векторов из P_T с экспоненциальными коэффициентами вида

$$\exp \frac{i\pi r_p}{T} = k_p, \quad (\text{IX.59})$$

где r_p — нечетное целое число, если таковым является p , и четное целое число, если p — четное. Поэтому

$$\exp \frac{i\pi(t+T)}{T} r_p = \begin{cases} -k_p, & \text{если } p \text{ нечетное,} \\ k_p, & \text{если } p \text{ четное.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(t+T, \varepsilon) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{p!} u_p(t+T) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\varepsilon)^p}{p!} u_p(t) = u(t, -\varepsilon).$$

Полученные результаты суммируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Если f аналитическая и выполняются условия (I), (II) и (III) § IX.6 с $n=1, 2$, то существует единственное нетривиальное бифуркационное решение уравнения (IX.1). Если $n=1$, то бифуркация является, вообще говоря, двусторонней; если $n=2$, то она — односторонняя. В главном порядке

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) &= \varepsilon \zeta(t) e^{i\theta t} + O(\varepsilon^2), \\ \mu(\varepsilon) &= \begin{cases} \varepsilon \mu_1 + O(\varepsilon^2), & \text{если } n=1, \\ \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^4), & \text{если } n=2, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{IX.60})$$

где $\theta=0$, если $n=1$; $\theta=\pi/T$, если $n=2$. Кроме того, в случае $n=2$ μ — аналитическая¹⁾ функция от ε^2 и $u(t+T, \varepsilon) = u(t, -\varepsilon)$.

Мы завершим этот раздел формулировкой другой теоремы о факторизации.

Теорема. (Устойчивость субгармонических бифуркационных решений при $n=1$ и $n=2$.) Решение уравнения (IX.6) можно представить в виде

$$y(t, \varepsilon) = b(\varepsilon) \left[\frac{\partial u(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{d\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} g(t, \varepsilon) \right], \quad (\text{IX.61})$$

$$g(t, \varepsilon) \in P_{nT}$$

¹⁾ Если f аналитическая по (μ, u) .

и

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{d\mu(\varepsilon)}{d\varepsilon} \hat{\gamma}, \quad (\text{IX.62})$$

где $b(\varepsilon)$ — нормализующий множитель, а $\hat{\gamma}(\varepsilon)$ и $g(t, \varepsilon)$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\gamma} \frac{\partial u(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + f_{\mu}(t, \mu, u(t, \varepsilon)) = - \left(\gamma g + \frac{dg}{dt} \right) + f_u(t, \mu(\varepsilon), u(t, \varepsilon) | g). \quad (\text{IX.63})$$

Если ε мало, то

$$\hat{\gamma}(\varepsilon) = -\sigma_{\mu}(0) \varepsilon + O(\varepsilon^p),$$

где $p=2$, если $n=1$, и $p=3$, если $n=2$.

Оставляем доказательство этой теоремы о факторизации в качестве упражнения для читателя. Это доказательство проводится на основе тех же самых рассуждений, что и в § VII.8. Эта теорема о факторизации показывает, что субкритические решения неустойчивы, а суперкритические решения устойчивы, если ε мало; она указывает на смену устойчивости, если никакое другое собственное значение, кроме $\gamma(\varepsilon)$ (возможно, комплексное), не пересекает мнимую ось при возрастании ε от значения, отвечающего точке бифуркации, до значения, которое соответствует экстремальной точке.

§ IX.13. Бифуркация и устойчивость nT -периодических решений с $n > 2$

nT -периодические решения с $n > 2$ относятся к случаю (2), указанному в § IX.10. Условие нормировки (IX.47) требует, чтобы

$$e^{i\varphi_0} = [u_1, Z^*]_{nT}.$$

Поэтому в качестве u_1 , удовлетворяющей уравнению $\mathbb{J}u_1 = 0$, можно взять

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{i\varphi_0} Z + e^{-i\varphi_0} \bar{Z} = \\ &= \exp i \left(\varphi_0 + \left(\frac{2\pi m t}{nT} \right) \right) \xi(t) + \exp \left(-i \left(\varphi_0 + \left(\frac{2\pi m t}{nT} \right) \right) \right) \bar{\xi}(t). \end{aligned} \quad (\text{IX.64})$$

Использование альтернативы Фредгольма для (IX.50) с учетом (IX.41) показывает, что уравнение (IX.50) разрешимо, если

$$2u_1 [f_{u\mu}(t | u_1), Z^*]_{nT} + [f_{uu}(t | u_1 | u_1), Z^*]_{nT} = 0. \quad (\text{IX.65})$$

Для упрощения вычисления интегралов, подобных тем, которые входят в (IX.65), напомним, что

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}(t), \mathbf{Z}^*]_{nT} &= \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{Z}^*(t) \rangle dt = \\ &= \frac{1}{nT} \int_0^{nT} e^{-2\pi i m t / nT} \langle \mathbf{a}(t), \xi^*(t) \rangle dt = \\ &= [e^{-2\pi i m t / nT} \mathbf{a}(t), \xi^*(t)]_{nT}, \end{aligned}$$

потому что $\langle \overline{\mathbf{a}}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$. Тогда отсюда следует, что

$$[\mathbf{f}_{u\mu}(t | \bar{\mathbf{Z}}), \mathbf{Z}^*]_{nT} = [e^{-4\pi i m t / nT} \mathbf{f}_{u\mu}(t | \xi), \xi^*]_{nT} = 0,$$

если $m/n \neq \frac{0}{1}, \frac{1}{2}$ и $m/n < 1$. Поэтому условие (IX.65) с использованием (IX.64) принимает вид

$$\begin{aligned} 2\mu_1 \sigma_\mu(0) e^{i\varphi_0} + e^{2i\varphi_0} [e^{2\pi i m t / nT} \mathbf{f}_{uu}(t | \xi | \xi), \xi^*]_{nT} + \\ + 2[e^{-2\pi i m t / nT} \mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\xi} | \xi), \xi^*]_{nT} + \\ + e^{-2i\varphi_0} [e^{-6\pi i m t / nT} \mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\xi} | \bar{\xi}), \xi^*]_{nT} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.66})$$

Так как $\xi, \xi^* \in \mathbb{P}_T$, а $0 < m/n < 1$, $n > 2$, то три скалярных произведения, входящие в (IX.66), равны нулю за исключением случая, когда $n=3$. Поэтому, если $n > 3$, то $\mu_1 = 0$.

Если $\mu_1 = 0$, то φ_0 не определяется уравнением (IX.66). В этих случаях можно определить μ_2 и φ_0 из условия разрешимости уравнения (IX.51):

$$3\mu_2 \sigma_\mu(0) e^{i\varphi_0} + 3[\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2), \mathbf{Z}^*]_{nT} + [\mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1), \mathbf{Z}^*]_{nT} = 0, \quad (\text{IX.67})$$

где $\mathbf{u}_2$ определяется из уравнения (IX.50).

§ IX.14. Бифуркация и устойчивость $3T$ -периодических решений

Если $n=3$, то m может быть 1 или 2 (так как $m/3 < 1$) и условие (IX.66) приводится к виду

$$2\mu_1 \sigma_\mu(0) e^{i\varphi_0} + \Lambda_1 e^{-2i\varphi_0} = 0, \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \left| \frac{\Lambda_1}{\sigma_\mu} \right| > 0, \quad (\text{IX.68})$$

где

$$\Lambda_1 = [e^{-2\pi i m t / T} \mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\xi} | \bar{\xi}), \xi^*]_{3T}.$$

Если условие (IX.68) выполняется, то уравнение (IX.50) можно разрешить относительно $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{P}_{3T}$, где с учетом разложения (IX.48)

$$\mathbf{u}_2(t) = 2i\varphi_1 e^{i\varphi_0} \mathbf{Z} - 2i\varphi_1 e^{-i\varphi_0} \bar{\mathbf{Z}} + 2\mathbf{w}_0(t). \quad (\text{IX.69})$$

Альтернатива Фредгольма без учета нормировки служит для определения части решения u_2 , которая ортогональна Z^* , $\bar{Z}^*$, (т. е. $2w_0$, $Ju_2 = 2Jw_0$) и оставляет неопределенным второй член φ_1 в разложении $\varphi(\varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + O(\varepsilon^2)$. Для определения φ_1 применим альтернативу Фредгольма к уравнению (IX.51) и найдем, что

$$\begin{aligned} & 3\mu_1 [f_{u\mu}(t | u_2), Z^*]_{3T} + 3[f_{\mu u}(t, u_1 | u_2), Z^*]_{3T} + 3\mu_2 [f_{u\mu}(t | u_1), Z^*]_{3T} + \\ & \quad + \text{члены, не зависящие от } \mu_2 \text{ и } u_2 = \\ & = 3\mu_1 (2i\varphi_1 e^{i\varphi_0}) \sigma_\mu(0) - 3(2i\varphi_1 e^{-2i\varphi_0}) \Lambda_1 + \\ & \quad + 3\mu_2 e^{i\varphi_0} \sigma_\mu(0) + \text{члены, не зависящие от } \mu_1 \text{ и } \varphi_1 = 0. \end{aligned}$$

Комбинируя последнее соотношение с (IX.68), получаем

$$e^{i\varphi_0} \sigma_\mu(0) \{\mu_2 + 6i\varphi_1\} = h(\mu_1, u_1, w_0), \quad (\text{IX.70})$$

где $h(\mu_1, u_1, w_0)$ известно. Так как $e^{i\varphi_0} \sigma_\mu(0)$ никогда не обращается в нуль, то это комплексное уравнение всегда можно разрешить относительно μ_2 и φ_1 . В точности такой же вид, что и (IX.69), имеют уравнения для членов более высокого порядка, и они служат для последовательного определения значений μ_n и φ_{n-1} .

Если бы мы попытались для решения этой задачи использовать теорему о неявных функциях, то для определения $\mu(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon)$ пришлось бы к уравнению вида (IX.70). Другими словами, мы получаем одну и ту же информацию из условия Фредгольма разрешимости в более высоком порядке и из теоремы о неявных функциях для системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями μ и φ от одной переменной ε (см. дополнение V.1). Поэтому построенное нами решение в виде рядов является единственным. Других ответвляющихся малых решений не существует.

Суммируем теперь полученные нами результаты и укажем некоторые новые формы уравнений.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия (I), (II) и (III) § IX.6 и $\Lambda_1 \neq 0$. Тогда если μ близко к нулю, то существует единственное нетривиальное $3T$ -периодическое бифуркационное решение уравнения (IX.1). Эта бифуркация является двусторонней и в младших членах определяется уравнением*

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) = & \varepsilon \exp i \left(\varphi(\varepsilon) + \left(\frac{2\pi i m t}{3T} \right) \right) \xi(t) + \\ & + \varepsilon \exp \left(-i \left(\varphi(\varepsilon) + \left(\frac{2\pi i m t}{3T} \right) \right) \right) \bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2), \quad m = 1, 2, \quad (\text{IX.71}) \end{aligned}$$

$$\mu(\varepsilon) = \varepsilon \mu_1 + O(\varepsilon^2), \quad \mu_1 = \left| \frac{\Lambda_1}{\sigma_\mu(0)} \right|,$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{3} \arg \left(-\frac{\Lambda_1}{\sigma_\mu(0)} \right) + \frac{2k\pi}{3} + O(\varepsilon), \quad k = 0, 1, 2,$$

где u , φ , μ аналитические¹⁾ по ε в окрестности нуля, $k=0, 1, 2$ соответствуют переносу начала отсчета t на $0, T, 2T$, если $m=1$, и $0, 2T, T$, если $m=2$, а Λ_1 определяется по формуле (IX.68).

Выражение (IX.71)₃ является решением уравнения (IX.68). Наши построение и разложение (IX.48) показывают, что $u(t, \varepsilon)$ зависит от t через две временные переменные $\tau(t)$ и t :

$$u(t, \varepsilon) = \mathcal{U}(\tau(t), t) = \mathcal{U}(\tau(t), t+T).$$

$\mathcal{U}$ — T -периодическая функция по своему второму аргументу. Эта T -периодичность происходит от T -периодичности $\xi(t)$. Первый аргумент $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ представлен в виде

$$\tau(t) = \varphi(\varepsilon) + \left(\frac{2\pi m t}{3T}\right)$$

и

$$\tau(t+T) = \varphi(\varepsilon) + \frac{2\pi m}{3T} + \frac{2\pi m t}{3T}.$$

На основе этого свойства можно доказать²⁾ последнее утверждение теоремы.

Обращаемся теперь к исследованию устойчивости $3T$ -периодических решений и разложим $\gamma(\varepsilon)$ и $y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{P}_{3T}$ в виде

$$\gamma(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon + o(\varepsilon)$$

и

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + o(\varepsilon).$$

Подставляя эти разложения в (IX.54), находим, что

$$\mathbb{J}y_0 = 0, \quad y_0 \in \mathbb{P}_{3T}$$

и

$$\gamma_1 y_0 = \mathbb{J}y_1 + \mu_1 f_{\mu\mu}(t | y_0) + f_{uu}(t | u_1 | y_0), \quad (\text{IX.72})$$

где $y_1 \in \mathbb{P}_{3T}$. Из условий (I) и (II), налагаемых на нулевое собственное значение оператора $\mathbb{J}$, следует, что

$$y_0 = AZ + B\bar{Z},$$

где A и B подлежат определению. Вспоминая, что $u_1 = a_0 Z + \bar{a}_0 \bar{Z}$, где $a_0 = e^{i\varphi_0}$, уравнение (IX.72) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma_1 (AZ + B\bar{Z}) = & \mathbb{J}y_1 + \mu_1 \{A f_{\mu\mu}(t | Z) + B f_{\mu\mu}(t | \bar{Z})\} + \\ & + a_0 A f_{uu}(t | Z | Z) + a_0 B f_{uu}(t | Z | \bar{Z}) + \\ & + \bar{a}_0 A f_{uu}(t | \bar{Z} | Z) + \bar{a}_0 B f_{uu}(t | \bar{Z} | \bar{Z}). \end{aligned} \quad (\text{IX.73})$$

¹⁾ Если f аналитическая по (μ, u) .

²⁾ См. строгое доказательство в статье Ж. Йосса и Д. Джозефа *Arch. Rational Mech. Anal.*, **66**, 135—172 (1977).

Для решения уравнения (IX.73) необходимо выбрать неоднородные члены так, чтобы они были ортогональны Z^* и $\bar{Z}^*$. Здесь необходимы обе проекции, потому что неоднородные члены являются комплексными. Записав (IX.73) в виде $\mathbb{J}y_1 = g$, находим, используя (IX.68), что два уравнения $[g, Z^*]_{3T} = [g, \bar{Z}^*]_{3T} = 0$ можно представить в виде

$$\gamma_1 A = \mu_1 \sigma_\mu(0) A + \bar{a}_0 B \Lambda_1$$

и

$$\gamma_1 B = a_0 A \bar{\Lambda}_1 + \mu_1 \bar{\sigma}_\mu(0) B.$$

Отсюда следует, что $\gamma_1^{(1)}$ и $\gamma_1^{(2)}$ являются собственными значениями матрицы

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mu_1 \sigma_\mu(0) & e^{-i\varphi_0} \Lambda_1 \\ e^{i\varphi_0} \bar{\Lambda}_1 & \mu_1 \bar{\sigma}_\mu(0) \end{bmatrix},$$

где

$$\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} = \text{tr } \mathcal{M} = 2\mu_1 \text{Re } \sigma_\mu(0) = 2\mu_1 \xi_\mu(0) > 0, \quad (\text{IX.74})$$

потому что $\mu_1 > 0$ и $\xi_\mu(0) > 0$, а

$$\gamma_1^{(1)} \gamma_1^{(2)} = \det \mathcal{M} = \mu_1^2 |\sigma_\mu(0)|^2 - |\Lambda_1|^2. \quad (\text{IX.75})$$

Из (IX.67) следует, что $|\Lambda_1|^2 = 4\mu_1^2 |\sigma_\mu|^2$, и поэтому

$$\gamma_1^{(1)} \gamma_1^{(2)} = -3\mu_1^2 |\sigma_\mu(0)|^2 < 0 \quad (\text{IX.76})$$

и одно из двух собственных значений положительное, а другое отрицательное. Так как $\gamma_1^{(1)} \neq \gamma_1^{(2)}$, то оба собственных значения $\gamma^{(1)}(\varepsilon)$

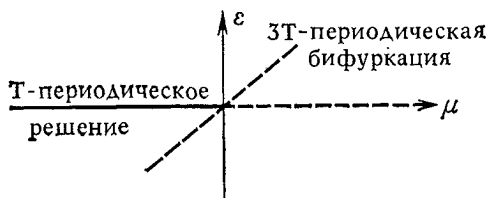


Рис. IX.2. 3T-периодическое бифуркационное решение неустойчиво по обе стороны от критической точки.

и $\gamma^{(2)}(\varepsilon)$ являются регулярными функциями от ε . Отсюда следует, что одно из двух собственных значений

$$\begin{bmatrix} \gamma^{(1)}(\varepsilon) \\ \gamma^{(2)}(\varepsilon) \end{bmatrix} = \varepsilon \begin{bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)} \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2)$$

принимает положительное значение по обе стороны от критической точки, т. е. как для положительных, так и для отрицательных значений ε , как на рис. IX.2.

§ IX.15. Бифуркация 4T-периодических решений

4T-периодические решения относятся к указанному в § IX.10 случаю (2) с $n=4$ и $m=1, 3$. Из условия нормировки (IX.47) следует, что

$$e^{i\varphi_0} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{Z}^*]_{4T}.$$

Поэтому можно взять функцию $\mathbf{u}_1$, удовлетворяющую уравнению $\mathbb{J}\mathbf{u}_1=0$, в форме, даваемой формулой (IX.64). В § IX.13 уже было установлено, что $\mu_1=0$, если $n=4$. При $\mu_1=0$ уравнение (IX.50) можно разрешить не относительно $\mathbf{u}_2$, а относительно функции $\mathbf{w}_0$, которая входит в разложение (IX.69) функции $\mathbf{u}_2$. Члены разложения $\mathbf{u}_2 = 2i\varphi_1 e^{i\varphi_0} \mathbf{Z} - 2i\varphi_1 e^{-i\varphi_0} \bar{\mathbf{Z}} + 2\mathbf{w}_0(t)$, пропорциональные φ_1 , обращаются в нуль после интегрирования и

$$[\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2), \mathbf{Z}^*]_{4T} = 2 [\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{w}_0), \mathbf{Z}^*]_{4T}. \quad (\text{IX.77})$$

(На самом деле (IX.77) имеет место, если $\mathbf{u}_2$ заменить на $\mathbf{u}_n$, а $2\mathbf{w}_0$ — на $n(n-1)\mathbf{w}_{n-2}$ (см. (IX.53)).)

Для нахождения μ_2 и φ_0 необходимо вычислить интегралы в (IX.67) и (IX.77) и получаемые уравнения разрешить относительно μ_2 и φ_0 . Для упрощения уравнений предварительно отметим, что при $\mu_1=0$ (IX.50) можно записать в виде

$$\mathbb{J}2\mathbf{w}_0 = -\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) = -\{e^{2i\varphi_0} \mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{Z} | \mathbf{Z}) + 2\mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\mathbf{Z}} | \mathbf{Z}) + e^{-2i\varphi_0} \mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\mathbf{Z}} | \bar{\mathbf{Z}})\}, \quad (\text{IX.78})$$

где $\mathbf{w}_0$ не содержит членов, пропорциональных собственным векторам оператора $\mathbb{J}$, т. е. $[\mathbf{w}_0, \mathbf{Z}^*]_{4T} = 0$. В самом деле, решения уравнения (IX.78), ортогональные $\mathbf{Z}^*$ (и $\bar{\mathbf{Z}}^*$), определяются единственным образом в виде

$$2\mathbf{w}_0(t) = \mathbf{w}_{02}(t) + \exp i \left(2\varphi_0 + \left(\frac{\pi m t}{T} \right) \right) \mathbf{w}_{01}(t) + \exp \left(-i \left(2\varphi_0 + \left(\frac{\pi m t}{T} \right) \right) \right) \bar{\mathbf{w}}_{01}(t), \quad \mathbf{w}_{0j} \in \mathbb{P}_T. \quad (\text{IX.79})$$

Возвращаясь теперь к уравнению (IX.67) и учитывая (IX.64), (IX.77) и (IX.79), находим, что после интегрирования многие члены обращаются в нуль и окончательно будем иметь

$$\mu_2 \sigma_\mu(0) e^{i\varphi_0} + \Lambda_2 e^{i\varphi_0} + \Lambda_3 e^{-3i\varphi_0} = 0, \quad (\text{IX.80})$$

где

$$\Lambda_2 = [\mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\xi} | \mathbf{w}_{01}), \xi^*]_T + [\mathbf{f}_{uu}(t | \xi | \mathbf{w}_{02}), \xi^*]_T + [\mathbf{f}_{uuu}(t | \xi | \xi | \bar{\xi}), \xi^*]_T,$$

$$\Lambda_3 = [e^{-2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{uu}(t | \bar{\xi} | \mathbf{w}_{01}), \xi^*]_T + \frac{1}{3} [e^{-2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{uuu}(t | \bar{\xi} | \bar{\xi} | \bar{\xi}), \xi^*]_T,$$

а $m=1$ или 3 .

Уравнение (IX.80) можно записать в виде

$$e^{-4i\varphi_0} = -\frac{\mu_2 + (\Lambda_2/\sigma_\mu)}{\Lambda_3/\sigma_\mu}. \quad (\text{IX.81})$$

Так как модуль функции $e^{-4i\varphi_0} = 1$, то имеем

$$\left| \frac{\Lambda_3}{\sigma_\mu} \right| = \left| \mu_2 + \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right|. \quad (\text{IX.82})$$

Вещественные значения μ_2 , удовлетворяющие (IX.82), могут, конечно, существовать при условии, что

$$\left| \frac{\Lambda_3}{\sigma_\mu} \right| \geq \left| \operatorname{Im} \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right|. \quad (\text{IX.83})$$

Предположим, что (IX.83) выполняется; тогда, возводя в квадрат обе части уравнения (IX.82) и решая получаемое квадратное уравнение относительно μ_2 , находим

$$\left[\mu_2^{(1)} \right] = -\operatorname{Re} \left(\frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right) \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right] + \left\{ \left| \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right|^2 - \left[\operatorname{Im} \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right]^2 \right\}^{1/2} \left[\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right]. \quad (\text{IX.84})$$

Для каждого из значений $\mu_2^{(1)}$ и $\mu_2^{(2)}$ из уравнения (IX.80) получаем четыре значения φ_0 :

$$\varphi_0^{(l)} = \frac{1}{4} \arg \left\{ -\frac{\Lambda_3}{(\sigma_\mu \mu_2^{(l)} + \Lambda_2)} \right\} + \left(\frac{\pi k}{2} \right), \quad l=1, 2, \quad k=0, 1, 2, 3. \quad (\text{IX.85})$$

Для определения φ_p и μ_{p+2} необходимо рассмотреть условие разрешимости $[(\text{IX.52}), \mathbf{Z}^*]_{nT}$ для уравнения (IX.52):

$$\begin{aligned} & p\mu_{p-1}\sigma_\mu e^{i\varphi_0} + p(p-1) \left\{ \mu_2 [\mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_{p-2}), \mathbf{Z}^*]_{4T} + \right. \\ & + [\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_{p-2}), \mathbf{Z}^*]_{4T} + \left. \left[\frac{1}{2} \mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_{p-2}), \mathbf{Z}^* \right]_{4T} \right\} + \\ & + p(p-1)(p-2) [\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{w}_{p-3}), \mathbf{Z}^*]_{4T} + [\mathbf{g}_p, \mathbf{Z}^*]_{4T} = 0, \quad (\text{IX.86}) \end{aligned}$$

где φ_{p-3} входит в (IX.86) через функцию $\mathbf{u}_{p-2}$, определенную формулой (IX.53). Используя метод математической индукции, можно установить, что

$$\mu_{2p-1} = \varphi_{2p-1} = 0 \quad \text{для } p \geq 1. \quad (\text{IX.87})$$

Условия разрешимости уравнений для определения членов более высокого порядка эквивалентны решению задач бифуркации на основе применения теоремы о неявных функциях (смотри замечание в заключительной части дополнения V.1). Регулярность решения как функции ε зависит от регулярности функции $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$, и оно будет аналитическим, если таковой является $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$.

Суммируем теперь результаты, полученные для $4T$ -периодических субгармонических бифуркационных решений.

Теорема. Предположим, что выполняются условия (I), (II) и (III) § IX.6 для $n=4$, а коэффициенты $\sigma_\mu(0)$, Λ_2 и Λ_3 определяются по формуле (IX.38) и формулам, которые приведены после (IX.80). Тогда, если $|\operatorname{Im} \Lambda_2/\sigma_\mu| > |\Lambda_3/\sigma_\mu|$, то не существует малых по амплитуде $4T$ -периодических бифуркационных решений уравнения (IX.1) для μ , близких к нулю. Если $|\Lambda_3/\sigma_\mu| > |\operatorname{Im} (\Lambda_2/\sigma_\mu)|$, то существуют два нетривиальные $4T$ -периодические бифуркационные решения уравнения (IX.1) слева и справа от критической точки. Если $|\Lambda_2| < |\Lambda_3|$, то одно решение существует только для $\mu \geq 0$, а другое — только для $\mu \leq 0$. Если $|\Lambda_2| > |\Lambda_3|$, то два бифуркационных решения существуют с одной и той же стороны от $\mu=0$: $\mu \geq 0$, если $\operatorname{Re} (\Lambda_2/\sigma_\mu) < 0$; $\mu \leq 0$, если $\operatorname{Re} (\Lambda_2/\sigma_\mu) > 0$. Главные части бифуркационных решений даются формулами

$$\begin{aligned} u^{(j)}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \exp i \left[\varphi^{(j)}(\varepsilon^2) - \left(\frac{\pi m t}{2T} \right) \right] \xi(t) + \\ &\quad + \varepsilon \exp \left(-i \left[\varphi^{(j)}(\varepsilon^2) - \left(\frac{\pi m t}{2T} \right) \right] \right) \bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2), \\ \mu^{(j)}(\varepsilon^2) &= \varepsilon^2 \mu_2^{(j)} + O(\varepsilon^4), \quad \mu_2^{(1)} = 0, \text{ если } |\Lambda_2| = |\Lambda_3|, \quad (\text{IX.88}) \\ \varphi^{(j)}(\varepsilon^2) &= \frac{1}{4} \operatorname{arg} \left[-\frac{\Lambda_3}{(\sigma_\mu \mu_2^{(j)} + \Lambda_2)} \right] + \left(\frac{\pi k}{2} \right) + O(\varepsilon^2), \quad m=1, 3, \quad j=1, 2. \end{aligned}$$

Значения $k=0, 1, 2, 3$ соответствуют переносу начала отсчета на интервалы, кратные периоду T : $0, T, 2T, 3T$, если $m=1$; $0, 3T, 2T, T$, если $m=3$. Функции $\mu^{(j)}$ являются аналитическими¹⁾ относительно ε^2 , а $u^{(j)}$ аналитические по ε .

Рекурсивное построение нашего решения в виде рядов показывает, что свойства инвариантности $u(t, \varepsilon)$ по отношению к переносам начала отсчета t на отрезки, кратные периоду T , можно вывести из свойств преобразования коэффициентов

$$e^{i(\varphi_0 + (\pi m t/T))} \stackrel{\text{де}}{=} e^{i\varphi(t), t}$$

в выражении для $\varepsilon u_1(t) = \varepsilon e^{i\varphi_0 t} \xi(t) + \varepsilon e^{-i\varphi_0 t} \bar{\xi}(t)$, $\xi(\cdot) \in \mathcal{P}_T$. Это выражение и коэффициенты $u_n(t)$, рекурсивно зависящие от $u_1(t)$, не изменяются для первой группы переносов

$$\varphi_0 \mapsto \varphi_0 + (\pi/2), \quad t \mapsto t - T \quad (m=1) \quad \text{и} \quad t \mapsto t + T \quad (m=3).$$

С другой стороны, группа переносов $\varphi_0 \mapsto \varphi_0 + \pi$, $t \mapsto t - 2T$ ($m=1$ или 3) приводит к преобразованию $\varepsilon u_1(t) \mapsto \varepsilon u_1(t - 2T) = (-\varepsilon) u_1(t)$. Это преобразование эквивалентно преобразованию $u(t, \varepsilon) \mapsto u(t - 2T, \varepsilon) = u(t, -\varepsilon)$, потому что перенос t изменяет знак коэффициентов с нечетными номерами $u_{2n-1}(t)$, что равносильно изменению знака ε в разложении функции $u(t, \varepsilon)$.

¹⁾ Если t аналитическая по (μ, u) .

§ IX.16. Устойчивость 4T-периодических решений

Для исследования устойчивости 4T-периодических решений вблизи $\varepsilon = 0$ рассмотрим спектральную задачу (IX.54) и определим коэффициенты разложений¹⁾

$$\gamma(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon + \frac{1}{2} \gamma_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (\text{IX.89})_1$$

и

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + y_1(t) \varepsilon + \frac{1}{2} y_2(t) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \in \mathbb{P}_{4T} \quad (\text{IX.89})_2$$

для каждого из двух независимых бифуркационных решений. Мы нашли, что $\gamma_1 = 0$, так что устойчивость определяется знаком γ_2 .

Используя обычный прием, подставим (IX.89) в (IX.54) и в обеих частях получаемого уравнения приравняем члены при одинаковых степенях ε ; тогда найдем, что

$$\mathbb{J} y_0 = 0, \quad y_0 \in \mathbb{P}_{4T} \quad (\text{IX.90})$$

$$\gamma_1 y_0 = \mathbb{J} y_1 + f_{uu}(t | u_1 | y_0), \quad y_1 \in \mathbb{P}_{4T} \quad (\text{IX.91})$$

и

$$\begin{aligned} 2\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_0 = & \mathbb{J} y_2 + 2f_{uu}(t | u_1 | y_1) + \\ & + \{\mu_2 f_{uu}(t | y_0) + f_{uu}(t | u_2 | y_0) + \\ & + f_{uuu}(t | u_1 | u_1 | y_0)\}, \quad y_2(\cdot) \in \mathbb{P}_{4T}. \end{aligned} \quad (\text{IX.92})$$

С другой стороны, можно разложить

$$y(t, \varepsilon) = A(\varepsilon) Z + B(\varepsilon) \bar{Z} + \varepsilon \psi(t, \varepsilon), \quad (\text{IX.93})$$

где A , B и ψ имеют комплексные значения и

$$[\psi, Z^*]_{4T} = [\psi, \bar{Z}^*]_{4T} = 0.$$

Из (IX.90) и (IX.93) следует, что

$$y_0 = A_0 Z + B_0 \bar{Z}, \quad |A_0|^2 + |B_0|^2 \neq 0 \quad (\text{IX.94})$$

и

$$y_1 = A_1 Z + B_1 \bar{Z} + \psi_0(t). \quad (\text{IX.95})$$

Далее, имеет место следующее тождество:

$$[f_{uu}(t | u_1 | y_0), Z^*]_{4T} = 0, \quad (\text{IX.96})$$

потому что $[f_{uu}(t | Z_l | Z_j), Z_k^*]_{4T} = 0$, где $l, j, k = 1$ или 2 и $Z_1 = \bar{Z}_1 = Z$, $Z_2 = \bar{Z}_2 = Z^*$. Использование альтернативы Фредгольма для (IX.91) приводит к равенствам:

$$\gamma_1 A_0 = \gamma_1 B_0 = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_1 = 0.$$

¹⁾ Мы установили, что $\gamma(0) = 0$ — полупростое собственное значение, $\gamma_1 = 0$ и $\gamma(\varepsilon)$ имеет порядок ε^2 .

Обращаясь теперь к (IX.91) с $\gamma_1=0$ и (IX.95), находим, что

$$\mathbb{J}\Psi_0 + A_0 e^{i\varphi_0} \mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{Z}|\mathbf{Z}) + B_0 e^{-i\varphi_0} \mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{Z}|\bar{\mathbf{Z}}) + \\ + (B_0 e^{i\varphi_0} + \Lambda_0 e^{i\varphi_0}) \mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{Z}|\bar{\mathbf{Z}}) = 0. \quad (\text{IX.97})$$

Сравнивая (IX.97) и (IX.78), находим, что

$$\Psi_0(t) = A_0 e^{i\varphi_0} e^{i\pi m t/T} \mathbf{w}_{01}(t) + B_0 e^{-i\varphi_0} e^{-i\pi m t/T} \bar{\mathbf{w}}_{01}(t) + \\ + \frac{1}{2} (A_0 e^{-i\varphi_0} + B_0 e^{i\varphi_0}) \mathbf{w}_{02}(t), \quad (\text{IX.98})$$

где $m=1, 3$, а функции $\mathbf{w}_{0i} \in \mathbb{P}_T$ определяется по формуле (IX.79).

Обращаясь теперь к условиям $[\mathbb{Y}_2, \mathbf{Z}^*]_{4T} = 0$ разрешимости уравнения (IX.92), где $l=1, 2$ и $\mathbf{Z}_2^* = \bar{\mathbf{Z}}_1^* = \mathbf{Z}^*$, найдем, используя (IX.95), (IX.96) и (IX.98), что

$$[\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{u}_1|y_1), \mathbf{Z}^*]_{4T} = [\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{u}_1|\Psi_0), \mathbf{Z}^*]_{4T} = \\ = \frac{1}{2} (A_0 + B_0 e^{2i\varphi_0}) [\mathbf{f}_{aa}(t|\xi|\mathbf{w}_{02}), \xi^*]_T + A_0 [\mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\xi}|\mathbf{w}_{01}), \xi^*]_T + \\ + B_0 e^{-2i\varphi_0} [e^{-2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\xi}|\bar{\mathbf{w}}_{01}), \xi^*]_T. \quad (\text{IX.99})$$

Точно такое же выражение, как и (IX.99), имеет место, если $(\mathbf{Z}^*, A_0, B_0)$ заменить на $(\bar{\mathbf{Z}}^*, B_0, A_0)$, а все другие величины заменить их комплексно-сопряженными:

$$[\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{u}_1|y_1), \bar{\mathbf{Z}}^*]_{4T} = \frac{1}{2} (B_0 + A_0 e^{-2i\varphi_0}) [\mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\xi}|\mathbf{w}_{02}), \bar{\xi}^*]_T + \\ + B_0 [\mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\xi}|\bar{\mathbf{w}}_{01}), \bar{\xi}^*]_T + A_0 e^{2i\varphi_0} [e^{2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{aa}(t|\xi|\mathbf{w}_{01}), \bar{\xi}^*]_T.$$

Аналогично, используя (IX.69), (IX.79) и (IX.94), находим, что

$$[\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{u}_2|y_0), \mathbf{Z}^*]_{4T} = [\mathbf{f}_{aa}(t|2\mathbf{w}_0|y_0), \mathbf{Z}^*]_{4T} = \\ = A_0 [\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{w}_{02}|\xi), \xi^*]_T + B_0 e^{2i\varphi_0} [\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{w}_{01}|\bar{\xi}), \xi^*]_T + \\ + B_0 e^{-2i\varphi_0} [e^{-2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\mathbf{w}}_{01}|\bar{\xi}), \xi^*]_T$$

и

$$[\mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{u}_2|y_0), \bar{\mathbf{Z}}^*]_{4T} = B_0 [\mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\mathbf{w}}_{02}|\bar{\xi}), \bar{\xi}^*]_T + \\ + A_0 e^{-2i\varphi_0} [\mathbf{f}_{aa}(t|\bar{\mathbf{w}}_{01}|\xi), \bar{\xi}^*]_T + A_0 e^{2i\varphi_0} [e^{2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{aa}(t|\mathbf{w}_{01}|\xi), \bar{\xi}^*]_T.$$

Точно так же находим, что

$$[\mathbf{f}_{aaa}(t|\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_1|y_0), \mathbf{Z}^*]_{4T} = 2A_0 [\mathbf{f}_{aaa}(t|\xi|\bar{\xi}|\xi), \xi^*]_T + \\ + B_0 e^{2i\varphi_0} [\mathbf{f}_{aaa}(t|\xi|\xi|\bar{\xi}), \xi^*]_T + \\ + B_0 e^{-2i\varphi_0} [e^{-2\pi i m t/T} \mathbf{f}_{aaa}(t|\bar{\xi}|\bar{\xi}|\bar{\xi}), \xi^*]_T$$

и

$$\begin{aligned}
[f_{uuu}(t|u_1|u_1|y_0), \bar{Z}^*]_{4T} = & 2B_0[f_{uuu}(t|\bar{\xi}|\bar{\xi}|\bar{\xi}), \bar{\xi}^*]_T + \\
& + A_0 e^{-2i\varphi_0}[f_{uuu}(t|\bar{\xi}|\bar{\xi}|\bar{\xi}), \bar{\xi}^*]_T + \\
& + A_0 e^{2i\varphi_0}[e^{2\pi i m t/T} f_{uuu}(t|\xi|\xi|\xi), \bar{\xi}^*]_T.
\end{aligned}$$

Наконец, с учетом (IX.38) получаем

$$[f_{u\mu}(t|y_0), Z^*]_{4T} = \sigma_\mu A_0$$

и

$$[f_{u\mu}(t|y_0), \bar{Z}^*]_{4T} = \bar{\sigma}_\mu B_0.$$

Собирая все эти результаты вместе, находим, что два условия разрешимости уравнения (IX.92) имеют вид

$$\gamma_2 A_0 = (\sigma_\mu \mu_2 + 2\Lambda_2) A_0 + B_0 (\Lambda_2 e^{2i\varphi_0} + 3\Lambda_3 e^{-2i\varphi_0})$$

и

$$\gamma_2 B_0 = (\bar{\sigma}_\mu \mu_2 + 2\bar{\Lambda}_2) B_0 + A_0 (\bar{\Lambda}_2 e^{-2i\varphi_0} + 3\bar{\Lambda}_3 e^{2i\varphi_0}).$$

Поэтому γ_2 являются собственными значениями матрицы

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mu_2 \sigma_\mu + 2\Lambda_2 & \Lambda_2 e^{2i\varphi_0} + 3\Lambda_3 e^{-2i\varphi_0} \\ \bar{\Lambda}_2 e^{-2i\varphi_0} + 3\bar{\Lambda}_3 e^{2i\varphi_0} & \mu_2 \bar{\sigma}_\mu + 2\bar{\Lambda}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{IX.100})$$

где $\mu_2 \sigma_\mu + \Lambda_2 + \Lambda_3 e^{-4i\varphi_0} = 0$. Собственные значения $\gamma_2^{(1)}$ и $\gamma_2^{(2)}$ матрицы (IX.100) удовлетворяют соотношениям

$$(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) = \text{tr } S = 2(\mu_2 \xi_\mu + 2\text{Re } \Lambda_2)$$

и

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(2)} &= \det S = |\mu_2 \sigma_\mu + 2\Lambda_2|^2 - |\Lambda_2 + 3\Lambda_3 e^{-4i\varphi_0}|^2 = \\
&= |\sigma_\mu|^2 \left\{ \left| \mu_2 + \frac{2\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right|^2 - \left| 3\mu_2 + \frac{2\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right|^2 \right\} = \\
&= -8\mu_2 |\sigma_\mu|^2 \left\{ \mu_2 + \text{Re } \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} \right\}.
\end{aligned}$$

Если $|\Lambda_2| < |\Lambda_3|$, то на основе теоремы § IX.15 заключаем, что $\mu_2^{(1)} \mu_2^{(2)} < 0$ и для $\mu_2^{(1)} < 0 < \mu_2^{(2)}$ имеем

$$\mu_2^{(1)} + \text{Re } \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} = -\mu_2^{(2)} - \text{Re } \frac{\Lambda_2}{\sigma_\mu} < 0.$$

Поэтому для каждого из двух бифуркационных решений $\gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(2)} < 0$. Это означает, что оба $4T$ -периодических бифуркационных решения неустойчивы. С другой стороны, если $|\Lambda_2| > |\Lambda_3|$ и $|\text{Im}(\Lambda_2/\sigma_\mu)| < < |\Lambda_3/\sigma_\mu|$, то $\mu_2^{(1)} \mu_2^{(2)} > 0$ и $\gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(2)}$ отрицательно для одного из двух бифуркационных решений. Для другого решения $\gamma_2^{(1)} \gamma_2^{(2)} > 0$ и устойчивость определяется знаком выражения $\mu_2 \xi_\mu + 2\text{Re } \Lambda_2$ (имеет место устойчивость, если указанное выражение < 0 , и неустойчивость, если оно > 0) (см. рис. IX.3).

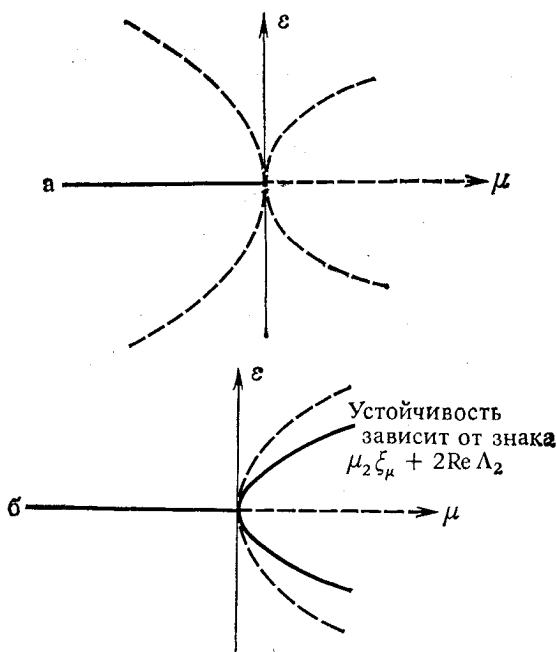


Рис. IX.3. $4T$ -периодические бифуркационные решения малой амплитуды. $4T$ -периодические решения ответвляются, если $|\operatorname{Im}(\Lambda_2/\sigma_\mu)| < |\Lambda_3/\sigma_\mu|$. (а) Случай $|\Lambda_2| < |\Lambda_3|$. Ответвляются два $4T$ -периодических решения, и оба неустойчивы. (б) Случай $|\Lambda_2| > |\Lambda_3|$, $\operatorname{Re}(\Lambda_2/\sigma_\mu) < 0$. Ответвляются два решения: одно неустойчиво, а устойчивость другого зависит от параметров задачи. Если $\operatorname{Re}(\Lambda_2/\sigma_\mu) > 0$, то эти два решения ответвляются в сторону, где $\mu < 0$, и одно из них неустойчиво.

§ IX.17. Несуществование субгармонических решений более высокого порядка и слабый резонанс

Пусть теперь $n \geq 5$. Анализ уравнения (IX.66) показывает, что $\mu_1 = 0$, и поэтому μ_2 и φ_0 следует определять из уравнения (IX.67), в котором u_1 дается формулой (IX.64) с $n \geq 5$, $m < n$, а u_2 определяется выражением (IX.69). Небольшие известные нам вычисления показывают, что

$$\mu_2 \sigma_\mu + \Lambda_2 = 0, \quad (\text{IX.101})$$

где Λ_2 определяется по формуле, приведенной после (IX.80). Вообще говоря, уравнение (IX.101) неразрешимо, потому что μ_2 — вещественная величина, а $\operatorname{Im}(\Lambda_2/\sigma_\mu) \neq 0$.

Субгармонические решения с $n \geq 5$ могут ответвляться в специальном случае, когда $\mu_2 = -\Lambda_2/\sigma_\mu$, а φ_0 можно определить из условий разрешимости более высокого порядка, и действительно существуют два nT -периодических бифуркационных решения с $n \geq 5$.

Если $n=5$, то условие $\text{Im}(\Lambda_2/\sigma_\mu)=0$, вообще говоря, является достаточным для существования этих двух $5T$ -периодических решений. Можно показать, что бифуркация является односторонней; оба решения неустойчивы, если они являются субкритическими; одно решение устойчиво, если бифуркация суперкритическая (см. рис. IX.4).

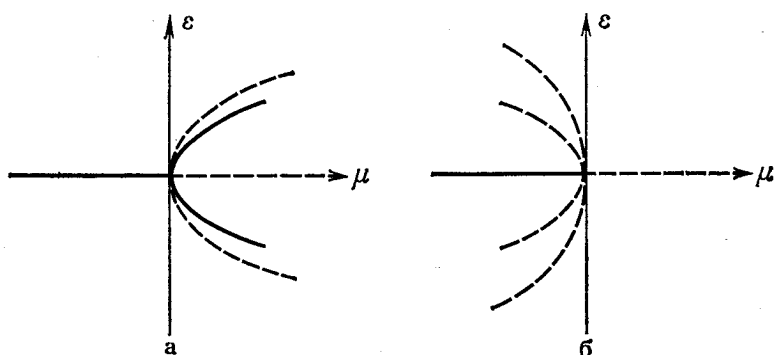


Рис. IX.4. Слабый резонанс: (а) суперкритическая, (б) субкритическая бифуркации.

Для существования субгармонических решений с $n \geq 5$ необходимы специальные условия (обращение в нуль некоторых скалярных произведений) помимо условий, требуемых для строго резонансных случаев $n=1, 2, 3, 4$. Эти исключительные решения называются *слабо резонансными* (по терминологии В. И. Арнольда). Детальный анализ слабого резонанса дан в монографии Ж. Йосса *Bifurcation of Maps and Applications* (Amsterdam: North-Holland, 1979), гл. III.

§ IX.18. Сводка результатов о субгармонической бифуркации

Пусть выполнены условия (I), (II) и (III) § IX.6.

(1) Если $n=1$, то единственное однопараметрическое (параметр ε) семейство T -периодических решений уравнения (IX.1) ответвляется с двух сторон от критической точки. Если $n=2$, то с одной стороны от критической точки ответвляется единственное однопараметрическое (ε) семейство $2T$ -периодических решений уравнения (IX.1). Суперкритические ($\mu(\varepsilon) > 0$) бифуркационные решения устойчивы; субкритические ($\mu(\varepsilon) < 0$) бифуркационные решения неустойчивы.

(2) Если $n=3$, то ответвляется единственное однопараметрическое семейство $3T$ -периодических решений уравнения (IX.1), и оно устойчиво с обеих сторон от критической точки.

(3) Если $n=4$ и $|\Lambda_2/\sigma_\mu| > |\text{Im}(\Lambda_2/\sigma_\mu)|$, где Λ_2 и Λ_3 определяются по формулам, приведенным после (IX.80), то ответвляются два однопараметрических (ε) семейства $4T$ -периодических решений уравнения (IX.1). Если $|\Lambda_2| < |\Lambda_3|$, то одно из двух бифуркационных

решений ответвляется с субкритической стороны ($\mu(\varepsilon^2) < 0$), а другое — с суперкритической стороны ($\mu(\varepsilon^2) > 0$), и оба семейства решений неустойчивы. Если $|\Lambda_2| > |\Lambda_3|$, то с одной и той же стороны от критической точки ответвляются два решения, и по крайней мере одно из них неустойчиво; устойчивость другого решения зависит от значений входящих в задачу параметров.

(4) Если $n \geq 5$ и $\text{Im}(\Lambda_2/\sigma_\mu) \neq 0$, где Λ_2 определяется по формуле, приведенной после (IX.80), то, вообще говоря, вблизи от критической точки не существует малых по амплитуде nT -периодических решений уравнения (IX.1).

§ IX.19. Теория несовершенств с периодическим дефектом

Наложим на стационарные бифуркационные решения T -периодическое возмущение. Для этого исследования математическая постановка задачи такова:

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{F}(\mu, u, \delta, t), \quad (\text{IX.102})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mu, u, 0, t) &\stackrel{\text{def}}{=} f(\mu, u) \text{ не зависит от } t, \\ \mathcal{F}(\mu, u, \delta, t) &= \mathcal{F}(\mu, u, \delta, t+T), \text{ если } \delta \neq 0, \\ \mathcal{F}(\mu, 0, 0, t) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.103})$$

Предположим также, что нуль есть простое собственное значение оператора $f_u(0|\cdot)$; остальные собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Напомним, что $f_u(0|\xi_0) = 0$, $f_u^*(0|\xi_0^*) = 0$, $\langle \xi_0, \xi_0^* \rangle = 1$, и отметим, что предположение о строгой потере устойчивости решения $u \equiv 0$ налагает на $f_{u\mu}$ условие

$$\sigma_\mu(0) = \langle f_{u\mu}(0|\xi_0), \xi_0^* \rangle > 0. \quad (\text{IX.104})$$

Этих предположений достаточно, чтобы гарантировать существование стационарных бифуркационных решений $(\mu(\varepsilon), u(\varepsilon))$, которые можно построить методами гл. VI.

Теперь мы будем рассматривать стационарное бифуркационное решение как T -периодическое решение (для любого T) и будем искать T -периодическое решение уравнения (IX.102), близкое к тривиальному решению. Снова определим

$$\mathbb{J}(\mu) = -\frac{d}{dt} + f_u(\mu|\cdot),$$

где оператор $\mathbb{J}$ определен только на T -периодических векторах $u(t) = u(t+T)$. В силу наших предположений относительно оператора $f_u(0|\cdot)$ все комплексные собственные значения оператора $\mathbb{J}_0$ являются простыми и, за исключением собственных значений (экспонент Флоке) $\sigma(0) = \pm 2\pi ik/T$, $k \in \mathbb{Z}$, все имеют отрицательные веще-

ственные части. Для собственного значения $\sigma(\mu)$ оператора $\mathbb{J}(\mu)$, $\sigma(0)=0$, выполняется условие (IX.104), а ξ_0 и ξ_0^* — стационарные векторы, такие, что

$$\mathbb{J}_0 \xi_0 = \mathbb{J}_0^* \xi_0^* = 0, \quad [\xi_0, \xi_0^*]_T = 1.$$

Для исследования возмущенной задачи можно использовать методы, изложенные в § VI.10, если имеет место аналог

$$[\mathcal{F}_\delta(0, 0, 0, t), \xi_0^*]_T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathcal{F}_\delta(0, 0, 0, t), \xi_0^* \rangle dt \neq 0 \quad (\text{IX.105})$$

условия (VI.71). Тогда можно построить ряды

$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon \sum_{p+q \geq 0} \varepsilon^p \mu^q \Delta_{p+i, q}, \\ u(t) &= \varepsilon \xi_0 + \varepsilon \sum_{p+q \geq 1} u_{p+i, q}(t) \varepsilon^p \mu^q, \end{aligned} \quad (\text{IX.106})$$

где $u_{p, q}(\cdot)$ — T -периодические вектор-функции.

Если $\delta \neq 0$, то при выполнении условия (IX.105) бифуркационная диаграмма для стационарных решений разрушается и заменяется на две непересекающиеся ветви T -периодических решений, близких к стационарным бифуркационным решениям, как на рис. III.5.

Упражнения

IX.1.

$$\frac{du}{dt} = \mu u - u^2 + \delta(a + \cos t), \quad u \in \mathbb{R}^1.$$

Докажите, что бифуркационные кривые для $\delta=0$ расщепляются на непересекающиеся ветви 2π -периодических решений, если $a \neq 0$. Найдите ряды для $\mu(\varepsilon, \delta/\varepsilon)$, где оба параметра ε и δ/ε являются малыми, которые имеют место для $a \neq 0$ и для $a=0$. Повторите упражнение для случая, когда u^2 заменяется на u^3 .

IX.2. Рассмотрите эволюционные задачи вида $\dot{u} = f(t, \mu, \delta, u)$, где $f(t, \mu, \delta, 0) = 0$, зависящие от параметра δ , описывающего возмущение, налагаемое на задачу, исследованную в этой главе. Пусть, далее, имеется множитель Флоке $\lambda = e^{\sigma(\mu, \delta)T}$, где

$$\sigma(\mu, \delta) = i\omega_0 + \mu\sigma_\mu + \delta\sigma_\delta + O(|\mu|^2 + |\delta|^2) \text{ и } \operatorname{Re} \sigma_\mu \neq 0.$$

(1) Вычислите σ_μ и σ_δ , используя скалярные произведения.

(2) Пусть $\lambda(0, 0)$ является простым и вещественным. Покажите, что $\lambda(0, 0) = 1$ или -1 . Затем покажите, что $\lambda(\mu, \delta)$ остается вещественным, если $|\mu| + |\delta|$ мало. Вычислите критические значения $\mu^{(c)}(\delta) = \delta\mu_\delta + O(\delta^2)$, для которых $\lambda[\mu^{(c)}(\delta), \delta] = 1$ или -1 . Покажите, что если μ пересекает $\mu^{(c)}(\delta)$, δ фиксировано, то $\lambda(\mu, \delta)$ пересекает единичную окружность в точках $\lambda=1$ или $\lambda=-1$ соответственно.

(3) Предположим, что $\lambda(0, 0)$ простое, а $\omega_0 = 2\pi m/nT$ и $0 < m/n < 1$ (как в этой главе) и $n \geq 3$. Вычислите критические значения $\mu^{(c)}(\delta) = \delta\mu_\delta + O(\delta^2)$, для которых $|\lambda[\mu^{(c)}(\delta), \delta]| = 1$. Каким точкам единичной окружности соответствует значение $\lambda[\mu^{(c)}(\delta), \delta]$? Покажите, что условие $|\lambda(0, 0)|^n = 1$ не выполняется для $\delta \neq 0$. Ответ:

$$\arg[\lambda(\mu^{(c)}(\delta), \delta)] = \omega_0 + \delta \frac{(\operatorname{Im} \sigma_\delta \operatorname{Re} \sigma_\mu - \operatorname{Im} \sigma_\mu \operatorname{Re} \sigma_\delta)}{\operatorname{Re} \sigma_\mu} + O(\delta^2).$$

БИФУРКАЦИЯ НЕТРИВИАЛЬНЫХ T -ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В АСИМПТОТИЧЕСКИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

В гл. IX были установлены условия, при выполнении которых субгармонические решения, nT -периодические решения с целыми $n \geq 1$, могут ответвляться от нетривиальных T -периодических решений. Другими словами, мы искали условия, при которых неавтономные T -периодические дифференциальные уравнения допускают субгармонические решения, когда в критической точке экспоненты Флоке принадлежат множеству рациональных точек ($\omega_0 = 2\pi m/nT$, $0 < m/n < 1$) или, что эквивалентно, когда в критической точке множители Флоке являются корнями n -й степени из единицы, $\lambda_0^n = (e^{i\omega_0 T})^n = 1$. Мы показали, что если не выполняются некоторые весьма специальные условия (условия слабого резонанса), то такие субгармонические решения могут ответвляться только для $n = 1, 2, 3, 4$. (Случай $n = 4$ является особым в том смысле, что, вообще говоря, он приводит к двум возможностям в зависимости от значений параметров; см. § IX.15.) Поэтому теперь перед нами стоит задача выяснить, что будет иметь место для значений ω_0 , $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi/T$, таких что

$$\frac{\omega_0 T}{2\pi} \neq 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}.$$

Будет показано, что если не выполняются весьма исключительные условия, то ответвляющиеся решения лежат на некотором торе и являются асимптотическими для квазипериодических решений вблизи критической точки. Субгармонические решения, которые ответвляются при выполнении исключительных условий, также лежат на устойчивом (суперкритическом) торе. Эти исключительные субгармонические решения ответвляются парами; одно из этих решений устойчиво, другое неустойчиво.

§ X.1. Биортогональное разложение решения и биортогональное разложение уравнений

Рассмотрим эволюционное уравнение с T -периодическими коэффициентами, приведенное к локальной форме, как в (I.21). Фактически эта задача в точности совпадает с изученной в гл. IX, однако теперь нас интересует, что случится, если не могут ответвляться nT -периодические решения с $n = 1, 2, 3, 4$. Мы проанализируем эту задачу

в духе гл. IX, используя метод степенных рядов и альтернативу Фредгольма вместе с методом, который дважды применялся в дополнении X.1 и более непосредственно в дополнениях X.2 и X.3. Однако мы предпочитаем начать с анализа, опирающегося на совершенно другой метод, который содержит в себе обобщение метода усреднения и позволяет редуцировать уравнения с T -периодическими коэффициентами к автономным уравнениям. Итак, запишем (I.21) в несколько другом виде:

$$\frac{du}{dt} = f_u(t, \mu | u) + N(t, \mu, u), \quad (X.1)$$

где

$$N(t, \mu, u) = f(t, \mu, u) - f_u(t, \mu | u)$$

суть нелинейные члены и, естественно, $u=0$ есть решение. Спектральная задача для анализа устойчивости решения $u=0$ описывается уравнением (IX.8) и, поскольку мы исключили точки сильного резонанса, которым соответствуют $n=1,2,3,4$, все множители Флоке $e^{\sigma(\mu)T}$ и все экспоненты $\sigma(\mu)$, отвечающие критической точке, являются комплексными.

Без ограничения общности можно положить

$$u = Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi} + W, \quad (X.2)$$

где $\xi = \xi(\mu, t) = \xi(\mu, T+t)$ есть собственная функция спектральной задачи (IX.8). Для определения Z мы применим метод проектирования, используя сопряженную собственную функцию ξ^* , удовлетворяющую задаче (IX.14), и свойства ортогональности зависящего от времени скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которые устанавливаются в упр. X.1.

Упражнение

X.1. Предположим, что σ — простое собственное значение оператора

$$-\frac{d}{dt} + f_u(t, \mu | \cdot)$$

в пространстве T -периодических вектор-функций. Пусть $\xi(\cdot)$ есть собственная функция, соответствующая σ , а $\xi^*(\cdot)$ — собственная функция сопряженного оператора, которая соответствует $\bar{\sigma}$. Покажите, что

$$\begin{aligned} \langle \xi(t), \xi^*(t) \rangle &= \text{const} & (\text{не зависит от } t); \\ \langle \xi(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle &= C e^{(\bar{\sigma} - \sigma)t}, & C — \text{постоянная.} \end{aligned}$$

Докажите, что можно выбрать $\xi(t)$ и $\xi^*(t)$ так, что $\langle \xi(t), \xi^*(t) \rangle = 1$ и что если $\bar{\sigma} - \sigma \neq 2k\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\langle \xi(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle = 0$.

Покажите, что это условие выполняется здесь для μ , близких к 0 (проверьте для $\mu=0$ и наложите возмущение).

Имеем

$$Z = Z(\mu, t) = \langle u(t), \xi^*(t) \rangle \quad (X.3)$$

и

$$\langle W(t), \xi^*(t) \rangle = 0. \quad (X.4)$$

Вектор u всегда можно представить в виде (X.2). Если, кроме того, u является решением уравнения (X.1), то назовем (X.2) биортогональным разложением решения. Векторы u и W вещественные.

Для того чтобы получить биортогональное разложение уравнений, подставим (X.2) в (X.1) и найдем, что

$$\begin{aligned} \dot{Z}\xi + Z\dot{\xi} + \dot{\bar{Z}}\bar{\xi} + \bar{Z}\dot{\bar{\xi}} + \dot{W} = \\ = Zf_a(t, \mu | \xi) + \bar{Z}\bar{f}_a(t, \mu | \bar{\xi}) + f_a(t, \mu | W) + N(t, \mu, u). \end{aligned}$$

Используя уравнение (IX.8), которому удовлетворяет ξ , находим, что

$$Z\dot{\xi} + \dot{\bar{Z}}\bar{\xi} + \dot{W} = \sigma Z\xi + \bar{\sigma}\bar{Z}\bar{\xi} + f_a(t, \mu | W) + N(t, \mu, u). \quad (X.5)$$

Образум теперь скалярное произведение (X.5) и ξ^* и используем (X.4); получим

$$\langle \dot{W}, \xi^* \rangle = \frac{d}{dt} \langle W, \xi^* \rangle - \langle W, \dot{\xi}^* \rangle = -\langle W, \xi^* \rangle;$$

используя (IX.14), находим далее

$$\begin{aligned} \langle [-\dot{W} + f_a(t, \mu | W)], \xi^* \rangle &= \langle W, \dot{\xi}^* + f_a^*(t, \mu | \xi^*) \rangle = \\ &= \langle W, \bar{\sigma}\xi^* \rangle = 0. \end{aligned}$$

Так как $\langle \xi, \xi^* \rangle = 1$ и $\langle \xi, \bar{\xi}^* \rangle = 0$, то находим, что

$$\dot{Z} = \sigma(\mu) Z + \langle N(t, \mu, u), \xi^* \rangle. \quad (X.6)$$

Возвращаясь к (X.5) и учитывая (X.6), находим, что

$$\dot{W} = f_a(t, \mu | W) + N(t, \mu, u) - \langle N(t, \mu, u), \xi^* \rangle \xi - \langle N(t, \mu, u), \bar{\xi}^* \rangle \bar{\xi}. \quad (X.7)$$

Уравнения (X.2), (X.6) и (X.7) дают биортогональное разложение уравнений. Для последующего анализа этих уравнений отметим, что если $f(t, \mu, \cdot)$ имеет производные до порядка $k+1$ при $u=0$, то справедливо разложение

$$\begin{aligned} N(t, \mu, u) &= \frac{1}{2} f_{aa}(t, \mu, 0 | u | u) + \frac{1}{3!} f_{aaa}(t, \mu, 0 | u | u | u) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{k!} \underbrace{f_{u \dots u}}_{k \text{ раз}}(t, \mu, 0 | \underbrace{u | u \dots | u}_{k \text{ раз}}) + O(\|u\|^{k+1}). \end{aligned}$$

Так как $u = Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi} + W$, то N имеет вид

$$N(t, \mu, Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi} + W) = n_0(t, \mu, Z, \bar{Z}) + n_1(t, \mu, Z, \bar{Z}, W),$$

где

$$n_0(t, \mu, Z, \bar{Z}) = N(t, \mu, Z\bar{\xi} + \bar{Z}\bar{\xi}) = O(|Z|^2),$$

$$n_1(t, \mu, Z, \bar{Z}, W) = O(|Z| \|W\| + \|W\|^2).$$

Отсюда следует, что (X.6) и (X.7) можно записать в виде

$$\dot{Z} = \sigma Z + b(t, \mu, Z, \bar{Z}, W), \quad (X.8)$$

$$\dot{W} = f_\alpha(t, \mu | W) + B(t, \mu, Z, \bar{Z}, W), \quad (X.9)$$

где

$$b(t, \mu, Z, \bar{Z}, W) = \langle n_0 + n_1, \xi^* \rangle,$$

$$B(t, \mu, Z, \bar{Z}, W) = n_0 + n_1 - \langle n_0 + n_1, \xi^* \rangle \xi - \langle n_0 + n_1, \bar{\xi}^* \rangle \bar{\xi}.$$

T -периодичность b и B следует из T -периодичности $N(t, \cdot, \cdot) = N(t+T, \cdot, \cdot)$, и вектор B ортогонален ξ^* .

Имеем следующие разложения:

$$b = b_0 + b_1, \quad B = B_0 + B_1, \quad (X.10)$$

где

$$b_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle n_0, \xi^* \rangle, \quad b_1 \stackrel{\text{def}}{=} \langle n_1, \xi^* \rangle,$$

$$B_0 = n_0 - b_0 \xi - \bar{b}_0 \bar{\xi}, \quad B_1 = n_1 - b_1 \xi - \bar{b}_1 \bar{\xi}.$$

Кроме того,

$$b_0 = b(t, \mu, Z, \bar{Z}, 0) = \langle n_0, \xi^* \rangle =$$

$$= \frac{1}{2} \{ Z^2 \langle f_{\alpha\alpha}(t, \mu, 0 | \xi | \bar{\xi}), \xi^* \rangle + 2 |Z|^2 \langle f_{\alpha\alpha}(t, \mu, 0 | \xi | \bar{\xi}), \xi^* \rangle + \\ + \bar{Z}^2 \langle f_{\alpha\alpha}(t, \mu, 0 | \bar{\xi} | \xi), \xi^* \rangle \} + O(|Z|^3) = \sum_{p+q \geq 2} Z^p \bar{Z}^q \hat{b}_{pq}(t, \mu), \quad (X.11)$$

где $\hat{b}_{pq}(t, \mu) = \hat{b}_{pq}(t+T, \mu)$. Аналогично,

$$B_0 = B(t, \mu, Z, \bar{Z}, 0) = n_0 - b_0 \xi - \bar{b}_0 \bar{\xi} = \sum_{p+q \geq 2} Z^p \bar{Z}^q \hat{B}_{pq}(t, \mu), \quad (X.12)$$

где $\hat{B}_{pq}(t, \mu) = \hat{B}_{pq}(t+T, \mu)$. Легко установить, что

$$b_1(t, \mu, Z, \bar{Z}, W) = O(|Z| \|W\| + \|W\|^2), \quad (X.13)$$

$$B_1(t, \mu, Z, \bar{Z}, W) = O(|Z| \|W\| + \|W\|^2).$$

§ X.2. Замена переменных

Математики обычно любят делать замену переменных. Это подобно покупке новой одежды; на самом деле вы не обязательно выглядите лучше в новой одежде, однако вам кажется, что это так. Переменные, которые нам кажутся предпочтительнее, суть

$$y = Z + \gamma(t, \mu, Z, \bar{Z}), \quad (X.14)$$

$$Y = W + \Gamma(t, \mu, Z, \bar{Z}), \quad (X.15)$$

где $\langle Y, \xi^* \rangle = \langle \Gamma, \xi^* \rangle = 0$. Комплексная функция γ и вещественная вектор-функция Γ , подлежащие определению, являются T -периодическими и обращаются в нуль при $Z=0$:

γ и Γ имеют порядок $O(|Z|^2)$.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что решения, которые отбрасываются от T -периодических решений при $n \neq 1, 2, 3, 4$, как правило, не являются субгармоническими и в фазовом пространстве лежат на торе, и что траектории на этом торе являются асимптотически квазипериодическими. Определим γ и Γ так, чтобы после применения метода усреднения к (X.8) и (X.9) в этих выражениях остались лишь существенные члены.

Начнем наш анализ с того, что продифференцируем (X.14) и (X.15) по времени и заменим производные от Z , $\bar{Z}$ и W выражениями (X.8) и (X.9). После указанной замены получим

$$\dot{y} = \sigma Z + b + \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial Z} (\sigma Z + b) + \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{Z}} (\bar{\sigma} \bar{Z} + \bar{b}), \quad (X.16)_1$$

$$\dot{Y} = f_\alpha(t, \mu | W) + B + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} (\sigma Z + b) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{Z}} (\bar{\sigma} \bar{Z} + \bar{b}), \quad (X.16)_2$$

где b и B определяются формулами (X.10—13), а Z и W суть функции от y и Y , которые подлежат определению.

Будем строить γ и Γ в виде полиномов степени N относительно Z и $\bar{Z}$ с T -периодическими коэффициентами

$$\begin{bmatrix} \gamma(t, \mu, Z, \bar{Z}) \\ \Gamma(t, \mu, Z, \bar{Z}) \end{bmatrix} = \sum_{p+q \geq 2}^N Z^p \bar{Z}^q \begin{bmatrix} \gamma_{pq}(t, \mu) \\ \Gamma_{pq}(t, \mu) \end{bmatrix}. \quad (X.17)$$

В (X.17) на число N , характеризующее отбрасываемые члены, *ограничений не накладывается* (хотя может существовать «лучшее» N для асимптотического приближения). Так как Γ —вещественная вектор-функция, то $\Gamma_{pq} = \bar{\Gamma}_{qp}$ и

$$\langle \Gamma, \xi^* \rangle = \langle \Gamma, \bar{\xi}^* \rangle = \langle \Gamma_{pq}, \xi^* \rangle = \langle \Gamma_{pq}, \bar{\xi}^* \rangle = 0.$$

Теперь отбросим в рядах (X.11) и (X.12) члены, порядок которых выше N , как в (X.17), и полученные полиномы подставим в (X.16), сохраняя в этих уравнениях только те члены, порядок которых не превосходит N . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{y} = \sigma Z + \sum_{p+q \geq 2}^N Z^p \bar{Z}^q \left[\frac{\partial \gamma_{pq}}{\partial t} + (\sigma p + \bar{\sigma} q) \gamma_{pq} + \hat{b}_{pq} \right] + \\ + b_1 + \left(b \frac{\partial \gamma}{\partial Z} + \bar{b} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{Z}} \right) + O(|Z|^{N+1}), \quad (X.18)_1 \end{aligned}$$

$$\dot{Y} = f_z(t, \mu | W) + \sum_{p+q \geq 2}^N Z^p \bar{Z}^q \left[\frac{\partial \Gamma_{pq}}{\partial t} + (\sigma p + \bar{\sigma} q) \Gamma_{pq} + \hat{B}_{pq} \right] + \\ + B_1 + \left(b \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} + \bar{b} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{Z}} \right) + O(|Z|^{N+1}), \quad (X.18),$$

где b_i и B_i определяются по формулам, приведенным после (X.10); $b = b_0 + b_1$; b_0 , γ и Γ следует заменить полиномиальными представлениями этих функций вплоть до членов порядка N .

В уравнениях (X.18) можно исключить Z и $\bar{W}$ обращением преобразований (X.14) и (X.15):

$$Z = y + \sum_{p+q \geq 2}^N \gamma'_{pq}(t, \mu) y^p \bar{y}^q + O(|y|^{N+1}), \quad (X.19)$$

$$W = Y + \sum_{p+q \geq 2}^N \Gamma'_{pq}(t, \mu) y^p \bar{y}^q + O(|y|^{N+1}). \quad (X.20)$$

Это преобразование всегда возможно, если y и Z малы, а γ'_{pq} и Γ'_{pq} можно определить через γ_{ln} и Γ_{ln} , $l+n \leq p+q$, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $Z^p \bar{Z}^q$. Например,

$$\begin{aligned} \gamma'_{pq} &= -\gamma_{pq} \text{ для } p+q=2, \\ \gamma'_{30} &= -\gamma_{30} + 2\gamma_{20}^2 + \gamma_{11}\bar{\gamma}_{02}, \\ \gamma'_{21} &= -\gamma_{21} + 3\gamma_{11}\gamma_{20} + |\bar{\gamma}_{11}|^2 + 2|\gamma_{02}|^2, \\ \gamma'_{12} &= -\gamma_{12} + 2\gamma_{02}\gamma_{20} + \gamma_{11}\bar{\gamma}_{20} + \gamma_{11}^2 + 2\bar{\gamma}_{11}\gamma_{02}, \\ \gamma'_{03} &= -\gamma_{03} + \gamma_{02}\gamma_{11} + 2\gamma_{02}\bar{\gamma}_{20}. \end{aligned} \quad (X.21)$$

Вообще говоря, имеем

$$\gamma'_{pq} = -\gamma_{pq} + \text{функции от } \gamma_{ln} \text{ с } l+n \leq p+q-1.$$

Используя (X.15), (X.17) и (X.20), находим, что

$$\begin{aligned} \Gamma'_{pq} &= -\Gamma_{pq} \text{ для } p+q=2, \\ \Gamma'_{30} &= -\Gamma_{30} + 2\gamma_{20}\Gamma_{20} + \bar{\gamma}_{02}\Gamma_{11}, \\ \Gamma'_{21} &= -\Gamma_{21} + 2\gamma_{11}\Gamma_{20} + (\gamma_{20} + \bar{\gamma}_{11})\Gamma_{11} + 2\bar{\gamma}_{02}\Gamma_{02}, \\ \Gamma'_{12} &= -\Gamma_{12} + 2\gamma_{02}\Gamma_{20} + (\gamma_{11} + \bar{\gamma}_{20})\Gamma_{11} + 2\bar{\gamma}_{11}\Gamma_{02}, \\ \Gamma'_{03} &= -\Gamma_{03} + \gamma_{20}\Gamma_{11} + 2\bar{\gamma}_{20}\Gamma_{02}. \end{aligned} \quad (X.22)$$

Вообще говоря, имеем

$$\Gamma'_{pq} = -\Gamma_{pq} + \text{функции от } (\Gamma_{ln}, \gamma_{ln}) \text{ с } l+n \leq p+q-1.$$

Наконец, подставим (X.19) и (X.20) в (X.18) и заменим γ'_{pq} и Γ'_{pq} их выражениями через γ_{pq} и Γ_{pq} , определяемыми по приведенным

выше формулам. Тогда получим

$$\dot{y} = \sigma y + \sum_{p+q \geq 2}^N y^p \bar{y}^q \{ \dot{\gamma}_{pq} + [(p-1)\sigma + q\bar{\sigma}] \gamma_{pq} + b_{pq} \} + \bar{b}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y), \quad (X.23)$$

$$\dot{Y} = f_a(t, \mu | Y) + \sum_{p+q \geq 2}^N y^p \bar{y}^q \{ \dot{\Gamma}_{pq} - f_a(t, \mu | \Gamma_{pq}) + (p\sigma + q\bar{\sigma}) \Gamma_{pq} + B_{pq} \} + \bar{B}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y), \quad (X.24)$$

где

$$|\bar{b}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y)| = O(|y|^{N+1} + |y| \|Y\| + \|Y\|^2), \\ |\bar{B}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y)| = O(|y|^{N+1} + |y| \|Y\| + \|Y\|^2),$$

а T -периодические коэффициенты b_{pq} и B_{pq} суть функции от γ_{ln} и Γ_{ln} с $l+n \leq p+q-1$ и обладают тем свойством, что членами в (X.24), ортогональными ζ^* и $\bar{\zeta}^*$, служат множители при $y^p \bar{y}^q$ и $\bar{B}_1$.

§ X.3. Нормальная форма уравнений

Выберем γ_{pq} и Γ_{pq} таким образом, чтобы в (X.23) и (X.24) обратить в нуль возможно большее число коэффициентов при $y^p \bar{y}^q$. В приводимой ниже лемме 1 утверждается, что всегда возможно упростить уравнение для Y , обратив в нуль коэффициенты уравнения (X.24) за счет соответствующего выбора Γ_{pq} . В лемме 2 указаны некоторые условия, при выполнении которых можно упростить уравнение для y , выбирая γ_{pq} таким образом, чтобы обратить в нуль коэффициенты при $y^p \bar{y}^q$. Однако *всегда* выбрать такие хорошие γ_{pq} нельзя. Очень важно, чтобы читатель понял, что следует делать, если *нельзя* выбрать γ_{pq} так, чтобы обратить в нуль выражения в скобках, стоящие множителями перед $y^p \bar{y}^q$.

Предположим, что нам известны $\gamma_{pq}(t, \mu)$, $\Gamma_{pq}(t, \mu)$, $p+q \leq k-1$, удовлетворяющие соотношениям $\langle \Gamma_{pq}, \zeta^* \rangle = \langle \Gamma_{pq}, \bar{\zeta}^* \rangle = 0$. Тогда b_{pq} и B_{pq} , $p+q = k$, известны, и поскольку уравнение (X.18)₂ линейно относительно Γ , B_1 , $\bar{B}_{pq}$, а Γ_{pq} ортогональны ζ^* и $\bar{\zeta}^*$, то $\langle B_{pq}, \zeta^* \rangle = \langle B_{pq}, \bar{\zeta}^* \rangle = 0$. Лемма 1, приводимая ниже, утверждает, что всегда можно выбрать Γ_{pq} , ортогональные ζ^* и $\bar{\zeta}^*$ и такие, что

$$\dot{\Gamma}_{pq} - f_a(t, \mu | \Gamma_{pq}) + (p\sigma + q\bar{\sigma}) \Gamma_{pq} + B_{pq} = 0.$$

В этом случае (X.24) принимает вид

$$\dot{Y} = f_a(t, \mu | Y) + \bar{B}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y). \quad (X.25)$$

Лемма 1. Задача состоит в нахождении T -периодических векторов Γ , удовлетворяющих уравнению

$$\dot{\Gamma} - f_{\alpha}(t, \mu | \Gamma) + (p\sigma + q\bar{\sigma})\Gamma + B = 0, \quad (X.26)_1$$

где $B(t) = B(t+T)$ и $\langle B(t), \xi^*(t) \rangle = \langle B(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle = 0$. Эта задача допускает решения (класса C^{k+1}), если B принадлежит классу C^k , и существует одно и только одно решение, такое что

$$\langle \Gamma(t), \xi^*(t) \rangle = \langle \Gamma(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle = 0. \quad (X.26)_2$$

Доказательство. Для доказательства леммы 1 сначала отметим, что собственные значения оператора

$$-\frac{d}{dt} + f_{\alpha}(t, \mu | \cdot) - (p\sigma + q\bar{\sigma}), \quad (X.26)_3$$

лежащие вблизи чисто мнимой оси, суть

$$\sigma(1-p) - q\bar{\sigma} + \frac{2k\pi i}{T}, \quad -p\sigma + (1-q)\bar{\sigma} + \frac{2k'\pi i}{T},$$

где $k, k' \in \mathbb{Z}$. Остальные собственные значения оператора (X.26)₃ лежат «далеко» от чисто мнимой оси. Нас интересует, когда нуль является собственным значением оператора (X.26)₃ при $\mu = 0$, т. е. интересуют значения параметров, для которых

$$i\omega_0(q+1-p) + \frac{2k\pi i}{T} = 0 \text{ или } i\omega_0(q-1-p) + \frac{2k'\pi i}{T} = 0.$$

Случай 1. $r = \omega_0 T / 2\pi$ иррационально. При этом $r(q+1-p) + k = 0$ тогда и только тогда, когда $p = q+1$ и $k = 0$, а $r(q-1-p) + k' = 0$ тогда и только тогда, когда $q = 1+p$ и $k' = 0$. Отсюда следует, что если $p \neq q+1$ и $q \neq 1+p$, то нуль не является собственным значением оператора (X.26)₃ в критической точке, и оператор (X.26)₃ необратим при $\mu = 0$ и для μ , близких к 0.

Если $p = 1+q$, то собственным вектором, который соответствует собственному значению, близкому к нулю, является вектор $\xi(t) \in \mathbb{R}_T$, удовлетворяющий уравнению $-\dot{\xi} + f_{\alpha}(t, \mu | \xi) = \sigma\xi$, а также уравнению

$$\begin{aligned} \left[-\frac{d}{dt} + f_{\alpha}(t, \mu | \cdot) - p\sigma - q\bar{\sigma} \right] \xi &= [\sigma(1-p) - q\bar{\sigma}] \xi = \\ &= -q(\sigma + \bar{\sigma}) \xi = -2q\xi(\mu) \xi, \end{aligned}$$

где $\xi(0) = 0$. Точно так же находим, что если $q = 1+p$, то

$$\left[-\frac{d}{dt} + f_{\alpha}(t, \mu | \cdot) - p\sigma - q\bar{\sigma} \right] \bar{\xi} = [-p\sigma + (1-q)\bar{\sigma}] \bar{\xi} = -2p\xi(\mu) \bar{\xi}.$$

Отсюда следует, что когда r иррационально, то оператор (X.26), обратим для $\Gamma \in \mathbb{P}_T$, если

$$[\mathbf{B}, \xi^*]_T = [\mathbf{B}, \bar{\xi}^*]_T = 0,$$

где $[\cdot, \cdot]_T$ — скалярное произведение, определенное формулой (IX.16). Требуемая ортогональность автоматически выполняется для векторов $\mathbf{B}(t)$, для которых $\langle \mathbf{B}(t), \xi^*(t) \rangle = \langle \mathbf{B}(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle = 0$ тождественно по t .

Случай 2. $r = \omega_0 T / 2\pi = m/n$ есть положительная рациональная дробь, меньшая единицы, и $n \geq 3$. Тогда нуль является собственным значением оператора (X.26), в критической точке для k, k' , удовлетворяющих условию

$$\frac{m}{n}(q+1-p) + k = 0 \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}(q-1-p) + k' = 0.$$

Так как m и n не имеют общего делителя, то эти уравнения удовлетворяются только в том случае, если существуют $l, l' \in \mathbb{Z}$, такие что $p = q + 1 + ln$ или $q = p + 1 + l'n$. Если не существует таких значений l, l' , то оператор (X.26), необратим при $\mu = 0$ и для μ , близких к нулю.

Предположим теперь, что существует l , такое что $p = q + 1 + ln$. Тогда $q - p - 1 - l'n = -2 - n(l + l')$ не может обратиться в нуль, потому что $n \geq 3$. Кроме того, в критической точке $(q + 1 + ln)\sigma + q\bar{\sigma} = (1 + ln)\omega_0$, и собственным вектором оператора (X.26), служит $\xi_0 e^{-2\pi i m l t / T}$, где $\omega_0 = 2\pi m / n T$ и

$$\left[-\frac{d}{dt} + f_u(t, 0) - (1 + ln)\omega_0 \right] \xi_0 e^{-2\pi i m l t / T} = 0.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \left[-\frac{d}{dt} + f_u(t, \mu) - (p\sigma + q\bar{\sigma}) \right] \xi e^{-2\pi i m l t / T} &= \\ &= \left[-(p-1)\sigma - q\bar{\sigma} + \frac{2\pi i l m}{T} \right] \xi e^{-2\pi i m l t / T} = \\ &= \left[-q(\sigma + \bar{\sigma}) - ln\sigma + \frac{2\pi i l m}{T} \right] \xi e^{-2\pi i m l t / T} = \\ &= \left[-2\xi(\mu)q + l \left(\frac{2\pi i m}{T} - \sigma n \right) \right] \xi e^{-2\pi i m l t / T} \end{aligned}$$

обращается в нуль при $\mu = 0$, и оператор (X.26) обратим при $\mu = 0$ и вблизи $\mu = 0$, если

$$[\mathbf{B}(t), \xi^*(t) e^{-2\pi i m l t / T}]_T = [\mathbf{B}(t), \bar{\xi}^*(t) e^{2\pi i m l t / T}]_T = 0,$$

где ξ^* — вектор, сопряженный к ξ . Эти условия ортогональности автоматически выполняются для векторов $\mathbf{B}(t)$, удовлетворяющих условию $\langle \mathbf{B}(t), \xi^*(t) \rangle = \langle \mathbf{B}(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle$ тождественно по t .

Отметим теперь, что всякое решение $\Gamma(t) = \Gamma(t+T)$ уравнения (X.26)₁, для которого $\langle \mathbf{V}(t), \xi^*(t) \rangle = \langle \mathbf{V}(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle = 0$, определяется с точностью до функций, принадлежащих нуль-пространству оператора (X.26)₃, и является единственным среди функций Γ , удовлетворяющих также условиям

$$\langle \Gamma(t), \xi^*(t) \rangle = \langle \Gamma(t), \bar{\xi}^*(t) \rangle = 0.$$

В самом деле, если μ близко к нулю, то

$$-\frac{d}{dt} \langle \Gamma, \xi^* \rangle = [(p-1)\sigma + \bar{\sigma}q] \langle \Gamma, \xi^* \rangle,$$

$$-\frac{d}{dt} \langle \Gamma, \bar{\xi}^* \rangle = [p\sigma + (q-1)\bar{\sigma}] \langle \Gamma, \bar{\xi}^* \rangle.$$

Единственными периодическими решениями этих уравнений являются постоянные, и эти постоянные обращаются в нуль, если только не обращаются в нуль коэффициенты в правой части. Читатель может проверить, что $\mathbf{V}_{pq}$ в (X.24) отличаются от $\hat{\mathbf{V}}_{pq}$ в (X.18), членами, линейными относительно Γ_{pq} , которые обращаются в нуль при проектировании.

Лемма 2. *Задача состоит в нахождении T -периодических функций γ , удовлетворяющих уравнению*

$$\dot{\gamma} + [\sigma(p-1) + \bar{\sigma}q]\gamma + b = 0, \quad (\text{X.27})$$

где b —заданная T -периодическая функция класса C^k .

1. Если $(p-q-1)\omega_0 T/2\pi$ не является целым числом (положительным, отрицательным или нулем), то задача имеет единственное решение γ класса C^{k+1} .

2. Если $(p-q-1)\omega_0 T/2\pi = -l_0$ есть целое число (положительное, отрицательное или нуль), то гладкое по μ решение существует только тогда, когда коэффициент Фурье

$$b_{l_0} = \frac{1}{T} \int_0^T b(t) e^{-2\pi i l_0 t/T} dt = 0.$$

Кроме того, если потребовать, чтобы $\gamma_{l_0} = 0$, то гладкое по μ решение класса C^{k+1} является единственным.

Доказательство. Положим

$$[\gamma(t, \mu), b(t, \mu)] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} [\gamma_l(\mu), b_l(\mu)] e^{2i\pi l t/T}$$

и найдем, что

$$\left[\frac{2i\pi l}{T} + (p-1)\sigma + q\bar{\sigma} \right] \gamma_l + b_l = 0, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p+q \geq 2. \quad (\text{X.28})$$

Если $[(p-1)\sigma + q\bar{\sigma}]T/2i\pi$ не является целым числом, то коэффициент при γ_l отличен от нуля, и это уравнение можно разрешить относительно γ . Так как нас интересуют решения для μ , близких к нулю, то уравнение можно решить относительно γ , если коэффициент при γ_l не равен нулю при $\mu=0$. Если $(p-q-1)\omega_0 T/2\pi = -l_0 \neq 0$ и выполняется условие $b_{l_0}=0$, необходимое для разрешимости уравнения (X.28), то для малых μ возьмем $\gamma_{l_0}(\mu)=0$. Мы опускаем проверку регулярности по t T -периодических решений $\gamma(t)$ уравнения (X.27), необходимую для полноты доказательства.

Применим теперь лемму 2 для упрощения (X.23). Сначала разложим, используя (X.27), коэффициент γ_{pq} при $y^p \bar{y}^q$ в ряд Фурье и выберем коэффициенты $\gamma_{pql}(\mu)$ в критической точке ($\mu=0$) так, чтобы¹⁾

$$\gamma_{pql}(0) = \frac{-b_{pql}(0)}{i[(2\pi l/T) + (p-1-q)\omega_0]}. \quad (\text{X.29})$$

Тогда основное следствие из леммы 2 приводит к следующей редукции:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{pq} + [p-1-q]i\omega_0 \gamma_{pq} + b_{pq} &= \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \left[\frac{2\pi l}{T} + (p-1-q)\omega_0 \right] i\gamma_{pql} + b_{pql} \right\} e^{2\pi i l t/T} = \\ &= \sum_{ES} b_{pql} e^{2\pi i l t/T}, \end{aligned} \quad (\text{X.30})$$

где ES означает «исключительное множество», определенное следующим образом:

$$\begin{aligned} ES = \left\{ l \text{ такие, что существуют числа } p, q, \omega_0, \text{ удовлетво-} \right. \\ \left. \text{ряющие условиям } \omega_0 = \frac{2\pi r}{T}, p \geq 0, q \geq 0, \right. \\ \left. p+q \geq 2, 0 < r < 1, r \neq \frac{1}{2}, l+r(p-q-1)=0 \right\} \end{aligned} \quad (\text{X.31})$$

и, естественно,

$$b_{pql} = \frac{1}{T} \int_0^T b_{pq}(s, 0) e^{-2\pi i l s/T} ds.$$

Все возможные типы субгармонической бифуркации, имеющие место, если пара комплексно-сопряженных множителей Флоке пересекает единичную окружность, содержатся в множестве ES. Особые

¹⁾ Если $\omega_0 T/2\pi$ иррационально, то для некоторых (p, q, l) существуют малые знаменатели (см. упр. X.5).

случаи T -периодической ($r=0$) и $2T$ -периодической ($r=1/2$) бифуркации, для которых $\lambda_0=1$ и $\lambda_0=-1$, исключаются (см. IX.12). Если l принадлежит множеству ES, то *нельзя* выбрать $\gamma_{pql}(0)$ как в (X.29). Поэтому мы просто полагаем $\gamma_{pql}(\mu)=0$ и находим, что $\gamma_{pq}(\mu, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\gamma}_{pq} + [(p-1)\sigma + q\bar{\sigma}] \gamma_{pq} + b_{pq} = \sum_{ES} b_{pql}(\mu) e^{2\pi i l t / T},$$

где, конечно,

$$b_{pql}(\mu) = \frac{1}{T} \int_0^T b_{pq}(s, \mu) e^{-2\pi i l s / T} ds.$$

Теперь из лемм 1 и 2 следует, что (X.23) и (X.24) можно привести к виду

$$\dot{y} = \sigma y + \sum_{p+q \geq 2} y^p \bar{y}^q \sum_{ES} b_{pql}(\mu) e^{2\pi i l t / T} + \bar{b}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y), \quad (X.32)_1$$

$$\dot{Y} = f_n(t, \mu | Y) + \bar{B}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y). \quad (X.32)_2$$

Удобно разбить исключительное множество на два подмножества.

I. Основное множество:

$$(p, q, l, r) = (q+1, q, 0, r), \quad r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega_0 T}{2\pi}.$$

II. Резонансное множество ($r=m/n$, $m < n$, $l = -km$, $kn = p - q - 1$):

$$(p, q, l, \frac{m}{n}) = (q+1+nk, q, -km, \frac{m}{n}).$$

Если r — иррациональное число, то могут войти только члены, соответствующие основному множеству, и (X.32) можно привести к виду

$$\dot{y} = \sigma y + \sum_{\substack{2q+1 \leq N \\ q \geq 1}} y^{q+1} \bar{y}^q b_{q+1, q, 0}(\mu) + \bar{b}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y), \quad (X.33)$$

где Y удовлетворяет уравнению (X.32)₂. Если существует $n \geq 1$, такое что $\lambda_0^n = 1$, то в $\dot{y}$ войдут члены, соответствующие обоим множествам,

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \sigma y + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} y^{q+1} \bar{y}^q b_{q+1, q, 0}(\mu) + \\ & + \sum_{k \geq 0} \sum_{q \geq 0}^{2q-1+kn \leq N} \{ y^{q+1+kn} \bar{y}^q b_{q+1+kn, q, -km}(\mu) e^{-2\pi i k m t / T} + \\ & + y^q \bar{y}^{q-1+kn} b_{q, q-1+kn, km}(\mu) e^{2\pi i k m t / T} \} + \bar{b}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y). \end{aligned} \quad (X.34)$$

Для последующего анализа важно подчеркнуть, что если в (X.34) пренебречь членом $\hat{b}_1$, то это уравнение можно преобразовать к автономному уравнению для $x = e^{-i\omega_0 t} y$, где $\omega_0 = 2\pi r/T$, $r = m/n$. Для упрощения записи этого автономного уравнения и других используемых ниже уравнений определим

$$\begin{aligned} a_{q,0}(\mu) &\stackrel{\text{def}}{=} b_{q+1,q,0}(\mu) = a_q(\mu), \\ a_{q,k}(\mu) &\stackrel{\text{def}}{=} b_{q+1+kn,q,-kn}(\mu), \\ a_{q,-k}(\mu) &\stackrel{\text{def}}{=} b_{q,q-1+kn,km}(\mu). \end{aligned}$$

Тогда автономное уравнение для $x = e^{-i\omega_0 t} y$, получаемое из (X.34) при отбрасывании $\hat{b}_1$, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = \mu [\hat{\xi}(\mu) + i\hat{\omega}(\mu)]x + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} x |x|^{2q} a_q + \\ + \sum_{k > 0}^{2q-1+kn \leq N} |x|^{2q} \{x^{1+kn} a_{qk} + \bar{x}^{kn-1} a_{q,-k}\}, \end{aligned} \quad (\text{X.35})$$

где

$$\sigma = i\omega_0 + \mu [\hat{\xi}(\mu) + i\hat{\omega}(\mu)] \quad (\text{X.36})$$

и $\hat{\xi}(0) > 0$, так как мы предположили, что потеря устойчивости нулевого решения является строгой. Многие свойства бифуркации решений уравнения (X.1) можно установить из (X.35) или даже из упрощенного варианта (X.35), имеющего вид

$$\dot{x} = \mu [\hat{\xi}(\mu) + i\hat{\omega}(\mu)]x + |x|^2 x a_1 + |x|^4 x a_2 + \dots + \bar{x}^{n-1} a_{0,-1} + \dots \quad (\text{X.37})$$

§ X.4. Нормальные уравнения в полярных координатах

Теперь нашей основной целью является вывод аналитических выражений для тора, изображенного на рис. X.1, поперечное сечение которого описывается уравнением $\rho = \rho(\theta)$, где (ρ, θ) — полярные координаты, связанные с x и y соотношениями

$$y = e^{i\omega_0 t} x, \quad x = \rho e^{i\theta}. \quad (\text{X.38})$$

Для того чтобы преобразовать к полярным координатам уравнение (X.33), описывающее эволюцию y в случае, когда r иррационально, и уравнение (X.34), описывающее эволюцию y в случае, когда $r = m/n$ рационально, рассмотрим преобразование (X.38) и соотношение

$$\dot{y} = [\dot{\rho} + i\omega_0 \rho + i\dot{\theta} \rho] e^{i(\theta + \omega_0 t)}. \quad (\text{X.39})$$

Тогда в рациональном случае получаем

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \rho \left\{ \mu \hat{\xi}(\mu) + \sum_{\substack{2q+1 \leq N \\ q \geq 1}} \operatorname{Re}[a_{q,0}(\mu) \rho^{2q}] + \right. \\ \left. + \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{2q+1+kn \leq N \\ q \geq 0}} \rho^{2q+kn} \operatorname{Re}[a_{q,k}(\mu) e^{ikn\theta}] + \right. \\ \left. + \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{2q-1+kn \leq N \\ q \geq 0}} \rho^{2q-2+kn} \operatorname{Re}[a_{q,-k}(\mu) e^{-ikn\theta}] \right\} + \\ + R_1(t, \mu, \rho, \theta, Y) \quad (X.40) \end{aligned}$$

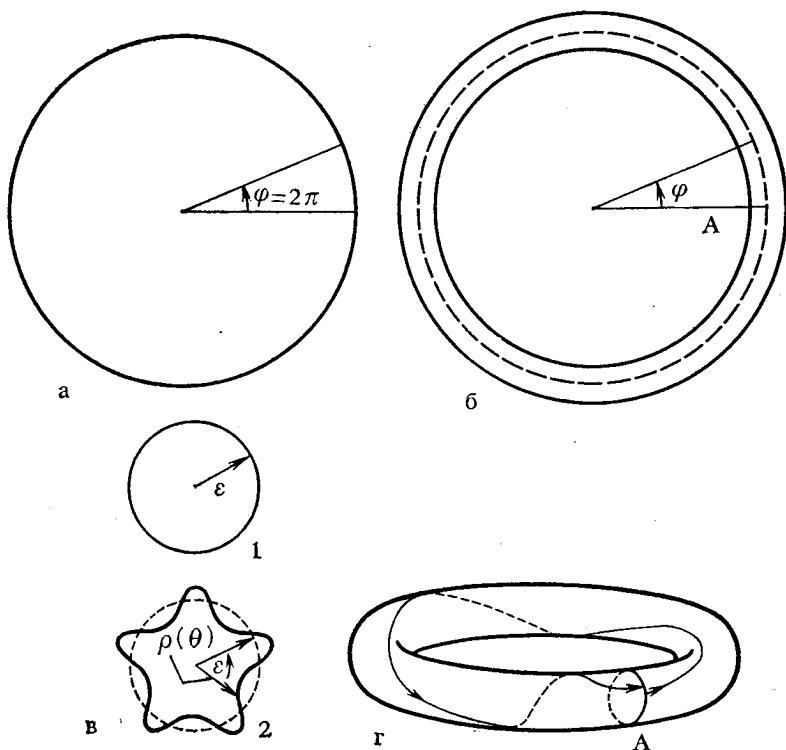


Рис. X.1. Эскиз бифуркационного тора T^2 . (а) Тор T^1 (предельный цикл, который соответствует нетривиальному T -периодическому решению $U(t) = U(t+T)$). (б) Тор T^2 (показан вид его экваториального сечения) можно наглядно представить себе как замкнутую трубку, содержащую предельный цикл. Поперечное сечение тора лежит в $\mathbb{R}^n$. (в) Поперечное сечение тора T^2 со средним радиусом ε для малых ε , если (1) множитель Флоке не является корнем из единицы и (2) множителем Флоке служит корень из единицы с $n=5$. (г) Двумерный тор T^2 и периодический сегмент траектории, которая наматывается на тор.

и

$$\begin{aligned} \rho \dot{\theta} = \rho \left\{ \mu \hat{\omega}(\mu) + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} \operatorname{Im} [a_{q,0}(\mu) \rho^{2q}] + \right. \\ \left. + \sum_{k \geq 0}^{2q+1+kn \leq N} \sum_{q \geq 0} \rho^{2q+kn} \operatorname{Im} [a_{q,k}(\mu) e^{ikn\theta}] + \right. \\ \left. + \sum_{k \geq 0}^{2q-1+kn \leq N} \sum_{q \geq 0} \rho^{2q-2+kn} \operatorname{Im} [a_{q,-k}(\mu) e^{-ikn\theta}] \right\} + \\ + R_2(t, \mu, \rho, \theta, Y), \quad (X.41) \end{aligned}$$

где

$$R_1 + iR_2 = e^{-i(\theta + \omega_0 t)} \bar{b}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y); \quad (X.42)$$

при этом y и $\bar{y}$ даются формулами (X.38), а Y удовлетворяет уравнению (X.25), в котором

$$B_2(t, \mu, \rho, \theta, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{B}_1(t, \mu, y, \bar{y}, Y). \quad (X.43)$$

Если r иррационально, то положим

$$a_{q,k} = a_{q,-k} = 0, \quad (X.44)$$

так что члены двойных сумм в правых частях (X.40) и (X.41) обращаются в нуль. В обоих случаях рационального и иррационального r имеем оценки

$$|R_l(t, \mu, \rho, \theta, Y)| = O(\rho^{N+1} + \rho \|Y\| + \|Y\|^2), \quad l=1, 2, \quad (X.45)$$

$$|B_2(t, \mu, \rho, \theta, Y)| = O(\rho^{N+1} + \rho \|Y\| + \|Y\|^2). \quad (X.46)$$

§ X.5. Тор и траектории на торе в иррациональном случае

Анализ наименее сложен, если r иррационально; поэтому используем рассмотрение этого случая, чтобы ввести понятие тора и асимптотически квазипериодического решения на торе. Отметим, что системы (X.40, 41) автономны с точностью до членов R_j , которыми можно пренебречь в первом приближении. Уравнение (X.25) для Y содержит линейную сжимающую часть $J(\mu) = -(d/dt) + f_\mu(t, \mu | \cdot)$, потому что все экспоненты Флоке $\sigma = \xi + i\eta$ имеют отрицательные вещественные части в Y -подпространстве, т. е. для векторов Y , удовлетворяющих условию $\langle Y, \xi^* \rangle = 0$. Для автономных задач в $\mathbb{R}^2$ решениями неизменного вида являются неподвижные точки или замкнутые кривые, соответствующие предельным циклам. В самом деле, мы получим замкнутую кривую $\rho(\theta)$ для системы, аппроксимирующей систему (X.40, 41, 44, 25), если R_1 , R_2 и B_2 положить равными нулю. Будет показано, что приближенная задача имеет периодическое решение с частотой, зависящей от амплитуды, при этом амплитудой служит средний радиус замкнутой кривой $\rho(\theta)$. Решение

исходной задачи (более точно, приближение ее решения с точностью до членов порядка ρ^N) представляет собой суперпозицию T -периодических функций и вышеупомянутых периодических решений с периодом τ , зависящим от усредненного значения ε функции $\rho(\theta)$.

Чтобы наглядно представить себе двумерный тор, удобно проследить этапы наших вычислений. Сначала напомним, что исходная задача (X.1) была приведена к локальной форме; решение $u=0$ уравнения (X.1) соответствует нетривиальному T -периодическому решению $U(t)=U(t+T)$. Это решение можно представить в виде окружности в $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве, координатами которого являются компоненты вектора u и время t . Эта «окружность» отождествляется с решением $u=0$ в $\mathbb{R}^n$ и множеством чисел $t \in [0, T)$, где $t+T$ отождествляется с точкой $t \in [0, T)$ (потому что $U(t+T)=U(t)$). Интервал $[0, T)$ и правило отождествления для $t+T$ называется *одномерным тором* T^1 . *Отождествление* означает, что мы «соединяем» концы интервала $[0, T)$ и образуем окружность $T^1 \times 0$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. Эта окружность является предельным циклом для нетривиальной периодической задачи, который можно наглядно представить себе как настоящую окружность любого радиуса с углом $\varphi = 2\pi t/T$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$, а $\varphi + 2\pi$ отождествляется с φ , как показано на рис. X.1.

Двумерный тор T^2 со средним радиусом ε ответвляется от T^1 при $\varepsilon=0$. Радиус поперечного сечения тора есть $\rho(\theta)=\rho(\theta+2\pi)$. *Траектория* есть кривая

$$\theta = \theta(t), \quad \rho = \rho(\theta(t)), \quad \varphi = \frac{2\pi t}{T} \quad (X.47)$$

на торе. Траектории наматываются на тор. Они прошивают отдельное поперечное сечение, например, A на рис. X.1, каждый раз, когда t увеличивается на один период (а φ увеличивается на угол 2π). Если после некоторого числа циклов, скажем n , за время которых угол φ увеличивается на $2\pi n$, угол θ также периодически повторяется, т. е.

$$\theta(t+nT) = \theta(t), \quad (X.48)$$

то решение на торе является *периодическим*. Если решение *квазипериодическое*, то оно имеет две рационально независимые частоты $2\pi/T$ и $\omega(\varepsilon)$, при этом $\theta = \omega(\varepsilon)t$. В квазипериодическом случае траектории плотны на торе T^2 и называются *эргодическими*.

Пытливый читатель теперь может спросить, почему мы говорим о приближенной задаче с точностью до членов порядка ρ^N , если N произвольно. Почему не переходим к пределу? Ответ здесь состоит в том, что получаемые решения являются асимптотическими (при $\varepsilon \rightarrow 0$) и, вообще говоря, расходящимися (см. замечания в конце этого параграфа). Для расходящихся приближений часто имеет место ситуация, когда существует некоторое оптимальное $N(\varepsilon)$, зависящее

от ε , такое что приближения для некоторого ε становятся все лучше и лучше, если $N < N(\varepsilon)$ и возрастает, и все хуже и хуже, если $N > N(\varepsilon)$ и возрастает. Поэтому лучше представлять себе приближение фиксированного, но произвольного порядка.

Установим теперь вид функции $\rho(\theta)$ и траекторий $\theta(t)$ и покажем, что приближенное решение

$$u^{(N)}(t) = Z^{(N)}(t, \varepsilon) \xi(\mu^{(N)}, t) + \bar{Z}^{(N)}(t, \varepsilon) \bar{\xi}(\mu^{(N)}, t) + W^{(N)}(t, \varepsilon) \quad (X.49)$$

является квазипериодическим с двумя частотами, если $r = \omega_0 T / 2\pi$, $0 < r < 1$, иррационально. В этом случае находим, что $\rho^{(N)}(\theta) = \varepsilon$ есть постоянная, не зависящая от θ . Чтобы показать это, рассмотрим приближение уравнения (X.40) с $R_1 = 0$ и найдем его стационарные решения, которые удовлетворяют уравнению

$$\mu \hat{\xi}(\mu) + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} \operatorname{Re}(a_q(\mu) \rho^{2q}) = 0. \quad (X.50)$$

Вообще говоря, удобно решать это уравнение относительно μ , представляя решение по степеням ρ^2 . Для стационарных решений положим $\rho = \varepsilon$ и разложим левую часть (X.50) по степеням ε , предполагая, что $a_q(\mu)$ и $\hat{\xi}(\mu)$ можно разложить по степеням μ . После отождествления коэффициентов при независимых степенях ε находим, что $\mu = \mu^{(N)}(\varepsilon)$,

$$\mu^{(N)}(\varepsilon) = - \left(\frac{(\operatorname{Re} a_1(0)) \varepsilon^2}{\hat{\xi}(0)} \right) + O(\varepsilon^4) = \mu^{(N)}(-\varepsilon), \quad \rho^{(N)} = \varepsilon. \quad (X.51)$$

Кроме того, в том же самом приближении, пренебрегая членом R_2 , находим, что решение уравнения (X.41) имеет вид

$$\theta^{(N)} = \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2) t, \quad (X.52)$$

где

$$\varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2) = \mu^{(N)}(\varepsilon) \hat{\omega}[\mu^{(N)}(\varepsilon)] + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} \operatorname{Im}(a_q[\mu^{(N)}(\varepsilon)] \varepsilon^{2q}). \quad (X.53)$$

Проследивая в обратном порядке замены переменных, находим, что приближенное решение до N членов (N произвольное) уравнения (X.1) имеет вид (X.49), где

$$Z^{(N)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \exp[i(\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2)) t] + \sum_{p+q \geq 2}^N \gamma'_{pq}(t, \mu^{(N)}(\varepsilon)) \varepsilon^{p+q} \exp\{i(p-q)[\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2)] t\}, \quad (X.54)_1$$

а

$$W^{(N)}(t, \varepsilon) = \sum_{p+q \geq 2}^N \Gamma'_{pq}(t, \mu^{(N)}(\varepsilon)) \varepsilon^{p+q} \exp\{(p-q)i[\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2)] t\}, \quad (X.54)_2$$

при этом $\mu^{(N)}(\varepsilon)$ и $\hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2)$ определяются формулами (X.51) и (X.53). Мы утверждаем без доказательства, что решения на торе удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned}\mu(\varepsilon) - \mu^{(N)}(\varepsilon) &= O(\varepsilon^{N+2}), \\ W(t, \mu) - \bar{W}^{(N)}(t, \varepsilon) &= O(\varepsilon^{N+1}), \\ Z(t, \mu) - \bar{Z}^{(N)}(t, \varepsilon) &= O(\varepsilon^{N+1}), \\ \xi(\mu, t) - \xi(\mu^{(N)}, t) &= O(\varepsilon^{N+2}),\end{aligned}$$

где $\bar{W}^{(N)}$ и $\bar{Z}^{(N)}$ получаются из выражений (X.54) в результате замены $\varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2) t$ на $\theta(t)$, а

$$\theta(t) - \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2) t = \chi(t, \varepsilon).$$

Эти оценки являются равномерными по t , даже если $\chi(t, \varepsilon)$ содержит вековые члены, которые, подобно членам, линейным по t , неограниченны. Тем не менее $|\chi(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^N)$. Все функции $\xi(\mu^{(N)}, t)$, $\gamma'_{pq}(t, \mu^{(N)})$ и $\Gamma'_{pq}(t, \mu^{(N)})$ суть T -периодические.

Теперь мы утверждаем, что вектор

$$u^{(N)}(t) = \mathcal{U}^{(N)}(\tau_1(t), \tau_2(t)), \quad (X.55)_1$$

даваемый формулой (X.49), представляет собой дважды периодическую вектор-функцию, для которой

$$\tau_1(t) = t, \quad \tau_2(t) = [\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2)] t, \quad (X.55)_2$$

и что

$$\mathcal{U}^{(N)}(\tau_1, \tau_2) = \mathcal{U}^{(N)}(\tau_1 + T, \tau_2) = \mathcal{U}^{(N)}(\tau_1, \tau_2 + 2\pi).$$

Поэтому говорят, что поток является *асимптотически квазипериодическим* с двумя основными частотами

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2).$$

Вторая частота является полиномом относительно ε^2 , однако ряд для нее, формально получаемый при $N \rightarrow \infty$, вообще говоря, расходится. Пока не существует прямого доказательства расходимости, но сходимость противоречила бы некоторым немного экзотическим математическим теоремам, которые выходят за рамки элементарной книги (см. G. Iooss, *Bifurcation of Maps and Applications* (Amsterdam: North-Holland, 1979)). Отметим, что $\mathcal{U}^{(N)}$ является квазипериодической вектор-функцией для таких значений ε , для которых $T/2\pi(\omega_0 + \varepsilon^2 \hat{\theta}^{(N)}(\varepsilon^2))$ есть иррациональное число. В рациональном случае она периодическая; однако строго доказано, что линейная зависимость $(X.55)_2$ τ_1 и τ_2 от t , вообще говоря, не имеет места для точного решения $u(t)$ при всех значениях ε .

§ X.6. Тор и траектории на торе, если $\omega_0 T/2\pi$ — рациональная точка более высокого порядка ($n \geq 5$)

Интересное явление состоит в том, что если существует $n \geq 5$, такое что $\lambda_0^n = 1$, то мы получаем некоторый тор, и решения на нем являются асимптотически квазипериодическими. Поэтому основные физические результаты, следующие из анализа бифуркации периодических решений, качественно не зависят от того, является ли r рациональным или иррациональным числом. Однако анализ для рационального случая является более тонким, и формулы для тора и траекторией на нем получаются иными.

Предположим теперь, что $r = m/n$ есть несократимая дробь и $n \geq 5$. Наша цель состоит в определении приближения $\rho_N(\theta)$ для поперечного сечения тора. Уравнение, описывающее это приближение, можно получить, опустив R_1 и R_2 в (X.40) и (X.41):

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \left[\mu \hat{\xi} + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} \alpha_q \rho^{2q} + \sum_{k > 0}^{2q-1+kn \leq N} \sum_{q > 0} (\alpha_{qk} e^{ikn\theta} + \bar{\alpha}_{qk} e^{-ikn\theta}) \rho^{2q-2+kn} \right], \quad (X.56)_1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu \hat{\omega} + \sum_{q \geq 1}^{2q+1 \leq N} \beta_q \rho^{2q} + \sum_{k > 0}^{2q-1+kn \leq N} \sum_{q > 0} (\beta_{qk} e^{ikn\theta} + \bar{\beta}_{qk} e^{-ikn\theta}) \rho^{2q-2+kn}, \quad (X.56)_2$$

где все коэффициенты $\hat{\xi}$, $\hat{\omega}$, α_q , β_q , α_{qk} , β_{qk} являются функциями μ и обладают желаемой степенью гладкости,

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(\mu) &= \hat{\xi}_0 + \mu \hat{\xi}_1 + \mu^2 \hat{\xi}_2 + \dots, \quad \hat{\xi}_0 > 0, \\ \hat{\omega}(\mu) &= \hat{\omega}_0 + \mu \hat{\omega}_1 + \mu^2 \hat{\omega}_2 + \dots, \\ \alpha_q(\mu) &= \alpha_{q0} + \mu \alpha_{q1} + \mu^2 \alpha_{q2} + \dots, \\ \alpha_{qk}(\mu) &= \alpha_{qk0} + \mu \alpha_{qk1} + \mu^2 \alpha_{qk2} + \dots, \\ \beta_q(\mu) &= \beta_{q0} + \mu \beta_{q1} + \mu^2 \beta_{q2} + \dots, \\ \beta_{qk}(\mu) &= \beta_{qk0} + \mu \beta_{qk1} + \mu^2 \beta_{qk2} + \dots \end{aligned}$$

и где по построению

$$\begin{aligned} \alpha_q + i\beta_k &= a_{q,0}, \\ \alpha_{qk} &= \frac{1}{2} (a_{q-1,k} + \bar{a}_{q,-k}), \quad a_{q-1,k} \stackrel{\text{def}}{=} 0, \text{ если } q=0, \\ \beta_{qk} &= \frac{1}{2i} (a_{q-1,k} - \bar{a}_{q,-k}). \end{aligned} \quad (X.57)$$

Для решения уравнений (X.56) введем амплитуду ε , определяемую как средний радиус поперечного сечения тора, как на рис. X.1:

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \mu) d\theta \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\rho}. \quad (\text{X.58})$$

Уравнение для $\rho(\theta, \mu)$ можно вывести из соотношения

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}, \quad (\text{X.59})$$

где d/dt и $d\theta/dt$ даются формулами (X.56). Для того чтобы решить (X.59), разложим μ и ρ по степеням ε :

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{p=1}^N \mu_p \varepsilon^p + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \rho &= \sum_{p=1}^N \rho_p(\theta) \varepsilon^p + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \bar{\rho}_1 &= 1, \quad \bar{\rho}_p = 0 \text{ для } p \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{X.60})$$

Определение коэффициента при ε^3 в (X.59) дает

$$\hat{\xi}_0 \mu_1 \bar{\rho}_1'(\theta) = \mu_1 \hat{\omega}_0 \rho_1'(\theta). \quad (\text{X.61})$$

Вычисляя среднее значение на $(0, 2\pi)$, находим, что $\hat{\xi}_0 \mu_1 = 0$; следовательно, $\mu_1 = 0$. Определение коэффициента при ε^3 в (X.59) дает

$$\rho_1(\theta) [\hat{\xi}_0 \mu_2 + \alpha_{10} \rho_1^2(\theta)] = \rho_1'(\theta) [\mu_2 \hat{\omega}_0 + \beta_{10} \rho_1^2(\theta)]. \quad (\text{X.62})$$

Вычисляя среднее значение от (X.62) на $(0, 2\pi)$, находим, что

$$\hat{\xi}_0 \mu_2 + \alpha_{10} \bar{\rho}^3 = 0. \quad (\text{X.63})$$

Теперь нетрудно показать из (X.62) и (X.63), что любое периодическое решение со средним значением 1 должно удовлетворять соотношению $\bar{\rho}_1^{2+\nu} = \bar{\rho}_1^2 \bar{\rho}_1^\nu$ для всех целых $\nu \geq 0$. Поэтому для любого целого $p \geq 1$

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\rho_1|^{2p} d\theta \right]^{1/p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\rho_1|^2 d\theta = \bar{\rho}_1^2,$$

и поскольку ρ_1 — непрерывная функция, то

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\rho_1|^{2p} d\theta \right]^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\rho_1(\theta)|^2.$$

Поэтому $\bar{\rho}_1^2 = \sup |\rho_1(\theta)|$, т. е. $|\rho_1(\theta)| = 1$ и

$$\rho_1(\theta) \equiv 1, \quad (\text{X.64})$$

$$\mu_2 = -\frac{\alpha_{10}}{\xi_0}. \quad (\text{X.65})$$

На этом мы оставляем общий анализ. Дальнейшие результаты зависят от значения $n \geq 5$, для которого $\lambda_0^2 = 1$.

§ X.7. Форма тора в случае $n = 5$

Предположим теперь, что $\lambda_0^2 = 1$. Определяя коэффициент при ε^4 в (X.59), находим, что

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_0(\mu_2 + \mu_2 \rho_2(\theta)) + 3\alpha_{10}\rho_2(\theta) + \alpha_{010}e^{i\theta} + \bar{\alpha}_{010}e^{-i\theta} = \\ = \rho_2'(\theta)[\mu_2\hat{\omega}_0 + \beta_{10}]. \end{aligned} \quad (\text{X.66})$$

После вычисления среднего значения от (X.66) находим, что $\hat{\xi}_0\mu_2 = 0$; следовательно,

$$\mu_2 = 0, \quad (\text{X.67})_1$$

$$\rho_2(\theta) = g_1 e^{i\theta} + \bar{g}_1 e^{-i\theta}, \quad (\text{X.67})_2$$

где g_1 — комплексная постоянная, удовлетворяющая уравнению

$$g_1[2\alpha_{10} - 5i(\mu_2\hat{\omega}_0 + \beta_{10})] + \alpha_{010} = 0. \quad (\text{X.68})$$

Из (X.68) можно определить g_1 , если коэффициент при g_1 отличен от нуля. Поскольку из (X.65) следует, что $\mu_2 = 0$, если $\alpha_{10} = 0$, то заключаем, что (X.68) можно разрешить относительно g_1 , если не имеет места исключительный случай, когда $\alpha_{10} = \beta_{10} = 0$. В этом исключительном случае не должна происходить бифуркация в инвариантный тор. Мы не будем рассматривать такие исключительные случаи.

Поступая как и выше, определим коэффициент при ε^5 в (X.59) и найдем, что

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_0[\mu_4 + \mu_2\rho_2] + \hat{\xi}_1\mu_2^2 + 3\alpha_{10}\rho_2^2 + 3\alpha_{10}\rho_2 + \alpha_{11}\mu_2 + \\ + \alpha_{20} + 4\rho_2(\alpha_{010}e^{i\theta} + \bar{\alpha}_{010}e^{-i\theta}) = \\ = \rho_2'(\mu_2\hat{\omega}_0 + \beta_{10}) + \rho_2'(2\beta_{10}\rho_2 + \beta_{010}e^{i\theta} + \bar{\beta}_{010}e^{-i\theta}). \end{aligned} \quad (\text{X.69})$$

Среднее значение от (X.69) есть

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_0\mu_4 = (5i\bar{g}_1\beta_{010} - 5ig_1\beta_{010}) - 4(\alpha_{010}\bar{g}_1 + \bar{\alpha}_{010}g_1) - \\ - \mu_2^2\hat{\xi}_1 - 6\alpha_{10}|g_1|^2 - \alpha_{11}\mu_2 - \alpha_{20}, \end{aligned} \quad (\text{X.70})$$

и из (X.69) и (X.70) находим

$$\rho_2(\theta) = g_2 e^{10i\theta} + \bar{g}_2 e^{-10i\theta},$$

где g_2 вычисляется как g_1 , если α_{10} и β_{10} не равны нулю одновременно.

Переходя затем к коэффициенту при e^s , находим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mu_5 + 2\alpha_{10} \rho_4 + F_3 e^{15i\theta} + \bar{F}_3 e^{-15i\theta} + F_1 e^{5i\theta} + \bar{F}_1 e^{-5i\theta} = \\ = \rho_4 (\mu_2 \hat{\omega}_0 + \beta_{10}). \end{aligned} \quad (X.71)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu_5 = 0, \\ \rho_4(\theta) = g_{30} e^{15i\theta} + \bar{g}_{30} e^{-15i\theta} + g_{31} e^{5i\theta} + \bar{g}_{31} e^{-5i\theta}, \end{aligned} \quad (X.72)$$

где g_{30} и g_{31} определяются из требования тождественного по θ выполнения (X.71) после подстановки ρ_4 и (X.72), а F_3, F_1 легко можно выразить через известные коэффициенты.

В общем случае можно показать, используя метод математической индукции, что

$$\begin{aligned} \mu_{2p+1} = 0, \\ \rho_{p+1}(\theta) = \sum_{q \geq 0}^{Q_p} g_{pq} e^{5(p-2q)i\theta} + \bar{g}_{pq} e^{5(2q-p)i\theta}, \end{aligned} \quad (X.73)$$

где $Q_p = (p-1)/2$, если p нечетно, и $Q_p = (p/2) - 1$, если p четно. Все числа g_{pq} , подобно g_1 и g_2 , можно определить в результате отождествления.

§ X.8. Траектории на торе при $n=5$

Теперь перейдем к задаче нахождения траекторий на торе. В частности, найдем $\theta = \theta(t, \varepsilon)$ как решение уравнения (X.56)₂. Для решения этой задачи определим

$$\tilde{\theta} = \theta + \sum_{l=1}^{N-1} \varepsilon^l h_l(\theta) \quad (X.74)$$

и построим периодические функции $h_l(\theta) = h_l(\theta + 2\pi)$, средние значения которых равны нулю, $\bar{h}_l = 0$, так, чтобы $\tilde{\theta}$ была равна константе с точностью до членов порядка ε^N . Оказывается, что эти функции $h_l(\theta)$ являются $(2\pi/5)$ -периодическими, т. е.

$$h_l(\theta) = h_l\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right), \quad \bar{h}_l = 0. \quad (X.75)$$

Дифференциальное уравнение для $\tilde{\theta}$ имеет вид

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{N-1} \varepsilon^l h'_l(\theta) \right\} \frac{d\theta}{dt}, \quad (X.76)$$

где $d\theta/dt$ дается формулой (X.56)₂ при $n=5$. После разложения правой части (X.56)₂ по степеням ε

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_2 \varepsilon^2 + \mu_4 \varepsilon^4 + \mu_6 \varepsilon^6 + \dots, \\ \rho(\theta) &= \varepsilon + \varepsilon^2 \rho_2(\theta) + \varepsilon^3 \rho_3(\theta) + \varepsilon^4 \rho_4(\theta) + \dots\end{aligned}\quad (\text{X.77})$$

находим, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega_0 \varepsilon^2 + \Theta_1(\theta) \varepsilon^3 + \Theta_2(\theta) \varepsilon^4 + \Theta_3(\theta) \varepsilon^5 + \dots, \quad (\text{X.78})$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \mu_2 \hat{\omega}_0 + \beta_{10}, \\ \Theta_1(\theta) &= 2\beta_{10}\rho_2(\theta) + \beta_{010}e^{5i\theta} + \bar{\beta}_{010}e^{-5i\theta}, \\ \Theta_2(\theta) &= \mu_4 \hat{\omega}_0 + \mu_2 \hat{\omega}_1 + \mu_2 \beta_{11} + 2\beta_{10}\rho_3(\theta) + \beta_{10}\rho_2^2(\theta) + \beta_{20} + \\ &\quad + 3\rho_2(\theta)(\beta_{010}e^{5i\theta} + \bar{\beta}_{010}e^{-5i\theta}), \\ \Theta_3(\theta) &= 2\beta_{10}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta) + 2\mu_2\beta_{11}\rho_2(\theta) + 4\beta_{30}\rho_2(\theta) + \\ &\quad + 3[\rho_2^2(\theta) + \rho_3(\theta)][\beta_{010}e^{5i\theta} + \bar{\beta}_{010}e^{-5i\theta}] + \\ &\quad + 2\beta_{11}\rho_4(\theta) + [\beta_{110}e^{5i\theta} + \bar{\beta}_{110}e^{-5i\theta}] + \\ &\quad + \mu_2[\beta_{011}e^{5i\theta} + \bar{\beta}_{011}e^{-5i\theta}]\end{aligned}$$

и т. д. Здесь и вообще

$$\bar{\Theta}_{2l} \neq 0 \text{ и } \bar{\Theta}_{2l+1} = 0, \quad l \geq 1, \quad (\text{X.79})$$

$$\Theta_l(\theta) = \Theta_l\left(\theta + \left(\frac{2\pi}{5}\right)\right). \quad (\text{X.80})$$

Из уравнений (X.77) и (X.78) следует, что

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\theta}}{dt} &= [1 + \varepsilon h'_1(\theta) + \varepsilon^2 h'_2(\theta) + \varepsilon^3 h'_3(\theta) + \dots] \times \\ &\quad \times [\Omega_0 \varepsilon^2 + \Theta_1(\theta) \varepsilon^3 + \Theta_2(\theta) \varepsilon^4 + \Theta_3(\theta) \varepsilon^5 + \dots] + O(\varepsilon^N). \quad (\text{X.81})\end{aligned}$$

Теперь для упрощения (X.81) будем строить периодические функции $h_l(\theta)$

$$h_l(\theta) = h_l\left(\theta + \left(\frac{2\pi}{5}\right)\right), \quad (\text{X.82})$$

для которых

$$\bar{h}_l = 0 \quad (\text{X.83})$$

для всех $l \geq 1$ и такие, что

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^N), \quad (\text{X.84})$$

где $\Omega(\varepsilon^2)$ — полином, не зависящий от t и θ . Наш метод выбора состоит в следующем. Сначала сгруппируем члены правой части (X.81)

по степеням ε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = & \Omega_0 + (\Omega_0 h'_1 + \Theta_1) \varepsilon + (\Omega_0 h'_2 + \Theta_2 + \Theta_1 h'_1) \varepsilon^2 + \\ & + (\Omega_0 h'_3 + \Theta_3 + \Theta_2 h'_1 + \Theta_1 h'_2) \varepsilon^3 + \dots + \\ & + (\Omega_0 h'_l + \Theta_l + \Theta_{l-1} h'_1 + \dots + \Theta_1 h'_{l-1}) \varepsilon^l + \dots + O(\varepsilon^{N-2}). \end{aligned} \quad (X.85)$$

Мы предполагаем, что $\Omega_0 \neq 0$. Затем последовательно выбираем $h_n(\theta)$ таким образом, чтобы каждый коэффициент был заменен его средним значением. Для первого коэффициента полагаем

$$\Omega_0 h'_1 + \Theta_1 = \bar{\bar{\Theta}}_1,$$

где

$$\Theta_1 = \Theta_{10} e^{5i\theta} + \bar{\Theta}_{10} e^{-5i\theta}, \quad \bar{\bar{\Theta}}_1 = 0.$$

Поэтому

$$h_1 = -\frac{\Theta_{10}}{5i\Omega_0} e^{5i\theta} + \frac{\bar{\Theta}_{10}}{5i\Omega_0} e^{-5i\theta}.$$

Для второго коэффициента находим, что

$$\Omega_0 h'_2 + \Theta_2 + \Theta_1 h'_1 = \bar{\bar{\Theta}}_2 + \overline{\bar{\Theta}_1 h'_1} \neq 0. \quad (X.86)$$

Нетрудно найти функцию $h_2(\theta)$, удовлетворяющую (X.86), (X.82) и (X.83). Для третьего коэффициента имеем

$$\Omega_0 h'_3 + \Theta_3 + \Theta_2 h'_1 + \Theta_1 h'_2 = \bar{\bar{\Theta}}_3 + \overline{\bar{\Theta}_2 h'_1} + \overline{\bar{\Theta}_1 h'_2} = 0$$

и т. д. Средние значения коэффициентов с нечетными номерами обращаются в нуль, и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = & \Omega_0 + [\bar{\bar{\Theta}}_2 + \overline{\bar{\Theta}_1 h'_1}] \varepsilon^2 + [\bar{\bar{\Theta}}_4 + \overline{\bar{\Theta}_3 h'_1} + \overline{\bar{\Theta}_2 h'_2} + \overline{\bar{\Theta}_1 h'_3}] \varepsilon^4 + \\ & + \dots + O(\varepsilon^{N-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^N). \end{aligned} \quad (X.87)$$

Если $\lambda_0^5 = 1$, то траектории на торе определяются, вообще говоря, асимптотическим выражением вида

$$\varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) t = \theta + \varepsilon h_1(\theta) + \varepsilon^2 h_2(\theta) + \dots + \varepsilon^{N-1} h_{N-1}(\theta) + \chi(t, \varepsilon), \quad (X.88)$$

где $h_l(\theta)$ суть $(2\pi/5)$ -периодические функции, средние значения которых равны нулю, N — неограниченное число, а $\chi(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^N)$.

§ X.9. Форма тора при $n > 5$

Перейдем теперь к рациональному случаю с $n > 5$ и рассмотрим уравнение (X.59), в котором

$$\rho = \varepsilon R(\theta, \varepsilon), \quad \mu = \varepsilon^2 \tilde{\mu}(\varepsilon), \quad (X.89)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R(\theta, e) \\ \tilde{\mu}(e) \end{bmatrix} &= \sum_{l=0} \begin{bmatrix} R_l(\theta) \\ \tilde{\mu}_l \end{bmatrix} e^l, \quad \tilde{\mu}_l = \mu_{l+1}, \quad R_l = \rho_{l+1}, \\ R_0 &= 1, \quad \tilde{\mu}_0 = -\frac{\alpha_{10}}{\xi_0}. \end{aligned} \quad (\text{X.90})$$

Находим, что приближенное решение (X.54) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} L(\mu) R + \sum_{q \geq 0}^{2q+3 \leq N} e^{2q} L^{<2q+3>}(\mu) R^{2q+3} + \\ + \sum_{k \geq 0}^{2q-1+kn \leq N} e^{2q-4+kn} L^{<2q, k>}(\mu, \theta) R^{2q-1+kn} = 0, \end{aligned} \quad (\text{X.91})$$

где

$$L(\mu) = \hat{\xi}(\mu) - \hat{\omega}(\mu) \frac{d}{d\theta}, \quad L^{<2q+3>}(\mu) = \alpha_{q+1}(\mu) - \frac{\beta_{q+1}(\mu)}{2q+3} \frac{d}{d\theta}$$

и

$$\begin{aligned} L^{<2q, k>}(\mu, \theta) &= \alpha_{qk}(\mu) e^{ikn\theta} + \bar{\alpha}_{qk}(\mu) e^{-ikn\theta} - \\ &- \frac{1}{2q-1+kn} [\beta_{qk}(\mu) e^{ikn\theta} + \bar{\beta}_{qk}(\mu) e^{-ikn\theta}] \frac{d}{d\theta}. \end{aligned}$$

Первый отличный от нуля член в последней сумме в (X.91) есть член, для которого $q=0$, $k=1$ и

$$e^{2q-4+kn} = e^{n-4}.$$

Поэтому можно отождествлять коэффициенты при последовательных степенях e^l , $l < n-4$ без рассмотрения последней суммы в (X.91). Для вычисления этих коэффициентов положим

$$\begin{aligned} R^m(\theta, e) &= \sum_{p=0} [R^m(\theta)]_p e^p, \\ \tilde{\mu}(e) L(e^2 \tilde{\mu}(e)) &= \sum_{p=0} [\tilde{\mu} L(\mu)]_p e^p, \\ e^{2q} L^{<2q+3>}(e^2 \tilde{\mu}) &= \sum_{p=0} e^{2q+p} [L^{<2q+3>}(\mu)]_p. \end{aligned} \quad (\text{X.92})$$

После отождествления находим, что

$$\sum_{v=l+p} [\tilde{\mu} L(\mu)]_v R_p + \sum_{v=2q+p+1} [L^{<2q+3>}(\mu)] [R^{2q+3}(\theta)]_p = 0 \quad (\text{X.93})$$

для $v=0, 1, \dots, n-5$, $q \geq 0$, $p \geq 0$, $l \geq 0$. Эта задача в действительности совпадает с задачей (X.50) до членов порядка $O(e^{n-5})$. Следовательно, $R_0 = 1$,

$$R_l(\theta) = 0, \quad 0 < l < n-4, \quad (\text{X.94})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{2l-1} &= 0, \quad 2l-1 \leq n-5, \\ \mu_{2l-1} &= 0, \quad 2l-1 \leq n-3. \end{aligned} \quad (\text{X.95})$$

Докажем теперь, что

$$R_{n-4}(\theta) = \rho_{n-3}(\theta) = g_{10}e^{in\theta} + \bar{g}_{10}e^{-in\theta}, \quad (X.96)$$

где g_{10} — постоянная, зависящая от резонансного числа n . Для доказательства равенств (X.96) определим в (X.91) коэффициент при e^v для $v \geq n-4$ и найдем, что

$$\sum_{v=l+p} [\tilde{\mu}L(\mu)]_l R_p + \sum_{v=2q+p+l} [L^{<2q+3>}(\mu)]_l [R^{2q+3}(\theta)]_p + \\ + \sum_{2q+kn-4+l+p=v} [L^{<2q, k>}(\mu, \theta)]_l [R^{2q+kn-1}]_p = 0. \quad (X.97)$$

Необходимо рассмотреть два случая.

(1) n четное и $v=n-4$. Тогда, используя (X.94), можно записать (X.97) в виде

$$[\tilde{\mu}L(\mu)]_{n-4} R_0 + [\tilde{\mu}L(\mu)]_l R_{n-4} + [L^{<3>}(\mu)]_0 [R^3]_{n-4} + \\ + \sum_{n-4=2q+l} [L^{<2q+3>}(\mu)]_l [R^{2q+3}]_0 + [L^{<0, 1>}(\mu, \theta)]_0 [R^{n-1}]_0 = 0, \quad (X.98)$$

где

$$[\tilde{\mu}L(\mu)]_{n-4} = \tilde{\mu}_{n-4} L_0 + \text{ч.н.п.}, \\ R_0 = [R^{n-1}]_0 = 1, [\tilde{\mu}L(\mu)]_0 = \tilde{\mu}_0 \left(\hat{\xi}_0 - \hat{\omega}_0 \frac{d}{d\theta} \right), \\ [L^{<3>}(\mu)]_0 [R^3]_{n-4} = 3\alpha_{10} R_{n-4} - \beta_{10} R'_{n-4}, \\ [L^{<0, 1>}(\mu, \theta)] [R^{n-1}]_0 = L^{<0, 1>}(0, \theta) = \alpha_{010} e^{in\theta} + \bar{\alpha}_{010} e^{-in\theta}, \\ \tilde{\mu}_l = \mu_{l+2}.$$

Следовательно,

$$\mu_{n-2} \hat{\xi}_0 + \text{ч.н.п.} + (\mu_2 \hat{\xi}_0 + 3\alpha_{10}) R_{n-4} - (\beta_{10} + \mu_2 \hat{\omega}_0) R'_{n-4} + \\ + \sum_{n=2q+l+4} [L^{<2q+3>}(\mu)]_l + \alpha_{010} e^{in\theta} + \bar{\alpha}_{010} e^{-in\theta} = 0, \quad (X.99)$$

где оператор $[L^{<2q+3>}(\mu)]_l$ действует на постоянную единичную функцию. Среднее значение от (X.99) есть

$$\mu_{n-2} \hat{\xi}_0 + \text{ч.н.п.} + \sum_{n=2q+l+4} [L^{<2q+3>}(\mu)]_l = 0. \quad (X.100)$$

Это уравнение определяет μ_{n-2} через члены более низкого порядка. Тогда из уравнения (X.99) следует, что $R_{n-4}(\theta)$ имеет вид, указываемый формулой (X.96).

(2) n нечетное и $v=n-4$. Здесь вторые два члена в (X.100) обращаются в нуль, потому что $\mu_{2l-1} = 0$ для $2l-1 < n-2$, и, следовательно, μ_{n-2} также равно нулю.

Теперь покажем, что если n четное ($n \geq 6$), то

$$R_{2m+1}(\theta) = \rho_{2m}(\theta) = 0 \quad (\text{X.101})$$

для всех m таких, что $2m < N$ (напомним, что N неограничено и поэтому все производные по ε от $\rho(\theta, \varepsilon)$ равны нулю в каждом приближении). Это следует из того обстоятельства, что при четном n уравнение (X.91) содержит только четные степени ε . Аналогично доказывается, что

$$\mu_{2m-1} = 0, \quad (\text{X.102})$$

если n четное.

Уравнение (X.102) справедливо также и для n нечетного ($n \geq 5$). Предположим, что $\mu_l = 0$, если $l < v$ и l нечетное. Тогда все производные нечетного порядка по ε от функций, зависящих от μ , должны обращаться в нуль, и среднее от (X.97) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu_v \bar{\xi}_0 + \sum_{v=2q+2l+2p+1} [L^{<2q+3>}(\mu)]_{2l} [\overline{R^{2q+3}}]_{2p+1} + \\ + \sum_{2q+kn-4+2l+p=v} [L^{<2q, k>}(\mu, \theta)]_{2l} [\overline{R^{2q+kn-1}}]_p = 0. \end{aligned} \quad (\text{X.103})$$

Теперь $R_l(\theta)$, $l > 0$, представляет собой четный (нечетный) полином относительно гармоник $e^{in\theta}$, если l четное (нечетное), и $\bar{R}_l = 0$. Тогда $[R^m(\theta)]_l$ ($m \geq 1$) также является полиномом относительно $e^{in\theta}$, и $\bar{R}^m = 0$, если l нечетное. Аналогично, $[L^{<2q, k>}(\mu, \theta)]_{2l} [\overline{R^{2q+kn-1}}]_p$ есть полином относительно гармоник $e^{in\theta}$ со средним значением, равным нулю, если $k+p$ нечетное. Так как v и n — нечетные числа, то $kn+p$ нечетное, если таковым является $k+p$. Отсюда следует, что усредненные члены в (X.103) равны нулю и $\tilde{\mu}_v = 0$, если v нечетное.

Вообще говоря, имеем

$$\mu = \sum_{p=1}^{2p \leq N} \mu_{2p} \varepsilon^{2p} + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (\text{X.104})$$

и, если $\lambda_0^n = 1$, $n \geq 5$, а n нечетное,

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^{n-3} (\bar{g}_{10} e^{in\theta} + \bar{g}_{10} e^{-in\theta}) + \varepsilon^{n-2} (\bar{g}_{20} e^{2in\theta} + \bar{g}_{20} e^{-2in\theta}) + \\ + \varepsilon^{n-1} (\bar{g}_{30} e^{3in\theta} + \bar{g}_{30} e^{-3in\theta} + \bar{g}_{31} e^{in\theta} + \bar{g}_{31} e^{-in\theta}) + O(\varepsilon^n) = \\ = \varepsilon + \sum_{k=1}^{k \leq N+4-n} \varepsilon^{n-4+k} \sum_{q=0}^{k-2q > 0} [g_{kq} \exp(n(k-2q)i\theta) + \\ + \bar{g}_{kq} \exp(-n(k-2q)i\theta)] + O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (\text{X.105})$$

Если $n = 2v$ четное, то имеем

$$\begin{aligned} \rho(\theta, \varepsilon) &= \varepsilon + \varepsilon^{2v-3} (g_{00} e^{2vi\theta} + \bar{g}_{00} e^{-2vi\theta}) + \\ &+ \varepsilon^{2v-1} (g_{11} e^{2vi\theta} + \bar{g}_{11} e^{-2vi\theta} + g_{10} e^{4vi\theta} + \bar{g}_{10} e^{-4vi\theta}) + \\ &+ \varepsilon^{2v+1} (g_{22} e^{2vi\theta} + \bar{g}_{22} e^{-2vi\theta} + g_{21} e^{4vi\theta} + \bar{g}_{21} e^{-4vi\theta} + \\ &+ g_{20} e^{6vi\theta} + \bar{g}_{20} e^{-6vi\theta}) + O(\varepsilon^{2v+3}) = \\ &= \varepsilon + \sum_{k=0}^{2(k+v) \leq N+3} \varepsilon^{2v-3+2k} \sum_{q=0}^k (g_{kq} \exp(2v(k+1-q)i\theta) + \\ &+ \bar{g}_{kq} \exp(-2v(k+1-q)i\theta)) + O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \quad (X.106)$$

Проверку формул (X.105) и (X.106) предоставляем читателю в качестве упражнения.

§ X.10. Траектории на торе при $n \geq 5$

Изложенная здесь процедура нахождения траекторий на торе в точности совпадает с той, которая была использована в § X. 8 при исследовании случая $n = 5$.

Сначала мы должны найти $\rho(\theta, \varepsilon)$ из (X.56) с учетом асимптотических выражений (X.105) и (X.106). Для n нечетного находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\theta}{dt} &= \Omega_0 + \bar{\psi}_2 \varepsilon^2 + \bar{\psi}_4 \varepsilon^4 + \dots + \bar{\psi}_{2v} \varepsilon^{2v} + \dots + \varepsilon^{n-4} \bar{\psi}_{n-4}^*(\theta) + \\ &+ \varepsilon^{n-3} (\bar{\bar{\psi}}_{n-3} + \bar{\psi}_{n-3}^*(\theta)) + \dots + O(\varepsilon^{N-2}), \end{aligned} \quad (X.107)$$

где предполагается, что $\Omega_0 = \mu_2 \hat{\omega}_0 + \beta_{10}$ отлично от нуля,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_l &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{\psi}_l + \bar{\psi}_l^*(\theta), \quad \bar{\bar{\psi}}^* \stackrel{\text{def}}{=} 0, \\ \bar{\bar{\psi}}_{2l+1} &= 0, \quad \bar{\psi}_l^*(\theta) = 0 \quad \text{для } l < n-4, \\ \bar{\psi}_{n-5+l}^*(\theta) &= \sum_{q=0}^{l-2q > 0} [\theta_{lq} e^{n(l-2q)i\theta} + \bar{\theta}_{lq} e^{-n(l-2q)i\theta}], \end{aligned}$$

а все θ_{lq} постоянные. (Например, $\bar{\psi}_{n-4}^*(\theta) = \theta_{10} e^{i n \theta} + \bar{\theta}_{10} e^{-i n \theta}$, где $\theta_{10} = 2\beta_{10} g_{10} + \beta_{010}$.)

Для $n = 2v$ четного имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\theta}{dt} &= \Omega_0 + \bar{\psi}_2 \varepsilon^2 + \bar{\psi}_4 \varepsilon^4 + \dots + \\ &+ \varepsilon^{2v-4} (\bar{\bar{\psi}}_{2v-4} + \bar{\psi}_{2v-4}^*(\theta)) + \dots + O(\varepsilon^{N-2}), \end{aligned} \quad (X.108)$$

где, как и прежде, $\bar{\psi}_l = \bar{\psi}_l + \bar{\psi}_l^*(\theta)$,

$$\bar{\bar{\psi}}_{2l+1}(\theta) = 0 \quad \text{для всех } l > 0,$$

$$\bar{\psi}_{2l}(\theta) = 0 \quad \text{для } 2l < 2v-4,$$

$$\bar{\psi}_{2v-4+2l}^*(\theta) = \sum_{q=0}^l [\theta_{lq} \exp(2v(l+1-q)i\theta) + \bar{\theta}_{lq} \exp(-2v(l+1-q)i\theta)].$$

Чтобы решить уравнения (X.107) и (X.108), поступим как в § X.8 и сделаем замену

$$\bar{\theta} = \theta + \varepsilon^{n-4} h_{n-4}(\theta) + \varepsilon^{n-3} h_{n-3}(\theta) + \dots + \varepsilon^{N-1} h_{N-1}(\theta), \quad (\text{X.109})$$

где подлежащие определению функции $h_l(\theta)$ удовлетворяют условиям

$$h_l(\theta) = h_l\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right), \quad \bar{h}_l(\theta) = 0. \quad (\text{X.110})$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \{1 + \varepsilon^{n-4} h'_{n-4}(\theta) + \varepsilon^{n-3} h'_{n-3}(\theta) + \dots + O(\varepsilon^N)\} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\theta}{dt}, \quad (\text{X.111})$$

где $d\theta/dt$ дается формулой (X.107) для n нечетного и формулой (X.108) для $n=2v$ четного. Обозначим через $C(\varepsilon^2)$ совокупность всех усредненных членов в (X.107) и (X.108). Тогда для каждого из двух случаев будем иметь уравнение

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\bar{\theta}}{dt} = C(\varepsilon^2) + \varepsilon^{n-4} \Phi^*(\theta, \varepsilon) + O(\varepsilon^N), \quad (\text{X.112})$$

где $\bar{\Phi}^*(\theta, \varepsilon) = 0$, а $C(0) = \Omega_0$. Комбинируя (X.111) и (X.112), можно получить упорядоченную последовательность уравнений для определения функций $h_l(\theta)$, удовлетворяющих условиям (X.110), отождествляя коэффициенты при независимых степенях ε в соотношении

$$\begin{aligned} C(\varepsilon^2) \{h'_{n-4}(\theta) + \varepsilon h'_{n-3}(\theta) + \dots\} + \Phi^*(\theta, \varepsilon) + \\ + \varepsilon^{n-4} \Phi^*(\theta, \varepsilon) \{h'_{n-4}(\theta) + \varepsilon h'_{n-3}(\theta) + \dots\} = \\ = \overline{\varepsilon^{n-4} \Phi^*(\theta, \varepsilon) \{h'_{n-4}(\theta) + \varepsilon h'_{n-3}(\theta) + \dots\}} = \\ = \overline{\varepsilon^{n-4} \{\psi_{n-4}(\theta) h'_{n-4}(\theta) + \dots\}}. \end{aligned} \quad (\text{X.113})$$

Для функций $h_l(\theta)$ получаем выражения

$$h_l(\theta) = 0 \quad \text{для } l \leq n-5, \quad (\text{X.114})_1$$

$$h_{n-5+p}(\theta) = \sum_{l=0}^{p-2l > 0} [\nu_{pl} e^{in\theta(p-2l)} + \bar{\nu}_{pl} e^{-in\theta(p-2l)}], \quad p \geq 1,$$

если n нечетное, и

$$h_l(\theta) = 0 \quad \text{для } l \leq 2v-5, \quad h_{2l+1}(\theta) = 0, \quad (\text{X.114})_2$$

$$h_{2v-4+2p} = \sum_{l=0}^p [\nu_{pl} \exp i2v(p+1-l)\theta + \bar{\nu}_{pl} \exp (-i2v(p+1-l)\theta)],$$

$$p \geq 0,$$

если $n=2v$ четное.

Используя (X.113), можно привести (X.111) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= C(\varepsilon^2) + \varepsilon^{2n-8} \overline{\psi_{n-4}^* h'_{n-4}} + \dots + O(\varepsilon^{N-2}) = \\ &= \Omega(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^{N-2}) \end{aligned} \quad (\text{X.115})$$

и, как следствие (X.115), уравнение (X.109) можно представить в виде

$$\varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) t = \theta + \varepsilon^{n-4} h_{n-4}(\theta) + \varepsilon^{n-3} h_{n-3}(\theta) + \dots + \chi(t, \varepsilon),$$

где $|\dot{\chi}(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^N)$, а функции $h_i(\theta)$, даваемые формулами (X.114), таковы, что

$$h_i(\theta) = h_i\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right), \quad \bar{h}_i(\theta) = 0.$$

§ X.11. Асимптотически квазипериодические решения

Соберем теперь результаты, полученные в этой главе. Решение было разложено в виде биортогональной суммы

$$u(t) = Z(t) \xi(\mu, t) + \bar{Z}(t) \bar{\xi}(\mu, t) + W(t), \quad (X.116)$$

где $\xi(\mu, t)$ — собственная функция оператора $-d/dt + f_\mu(t, \mu | \cdot)$, соответствующая собственному значению $\sigma(\mu)$ с наибольшей вещественной частью,

$$Z(t) = \langle u(t), \xi^*(t) \rangle = \rho(t) \exp \{i[\omega_0 t + \theta(t)]\} + \sum_{p+q=2}^N \gamma'_{pq}(t, \mu) [\rho(t)]^{p+q} \exp \{i(p-q)[\omega_0 t + \theta(t)]\} + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (X.117)$$

а

$$W(t) = \sum_{p+q=2}^N \Gamma_{pq}(t, \mu) [\rho(t)]^{p+q} \exp \{i(p-q)[\omega_0 t + \theta(t)]\} + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (X.118)$$

где $\langle W(t), \xi^* \rangle = 0$, число усечения N неограничено, а $\rho(t)$, $\theta(t)$ и μ зависят от параметра

$$\varepsilon = \bar{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta) d\theta, \quad (X.119)$$

который представляет собой средний радиус профиля поперечного сечения тора. Во всех случаях $\mu_{2l+1} = 0$,

$$\mu = \mu_2 \varepsilon^2 + \mu_4 \varepsilon^4 + \mu_6 \varepsilon^6 + \dots + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (X.120)$$

$$\rho(t) = \varepsilon + \varepsilon^{n-3} \rho_{n-3}(\theta) + \varepsilon^{n-2} \rho_{n-2}(\theta) + \dots + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (X.121)$$

где n — целое число, для которого $\lambda_0^n = 1$, функции $\rho_i(\theta)$ определяются выражением (X.105) для n нечетного и выражением (X.106) для $n = 2v$ четного, а $\bar{\rho}_k = 0$, если $k \geq 1$. Для $\theta(t)$ имеем соотношение

$$\begin{aligned} \theta(t) + \varepsilon^{n-4} h_{n-4}(\theta(t)) + \varepsilon^{n-3} h_{n-3}(\theta(t)) + \dots = \\ = \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) t + \chi(t, \varepsilon), \quad |\dot{\chi}| = O(\varepsilon^N), \end{aligned} \quad (X.122)$$

где функции $h_l(\theta)$ даются формулами (X.114) и удовлетворяют условиям $h_l(\theta + (2\pi/n)) = h_l(\theta)$ и $\bar{h}_l = 0$.

Формулы предыдущего абзаца справедливы, если отношение $\omega_0/(2\pi/T)$ частот в критической точке является иррациональным числом. Результаты для иррационального случая можно получить, считая, что $n \rightarrow \infty$, или более просто, положив все члены, содержащие n , равными нулю.

Поскольку приближенное решение с точностью до членов порядка ε^N (N неограничено) представляет собой суперпозицию T -периодических функций ($\xi(\mu, t)$, $\gamma'_{pq}(t, \mu)$, $\Gamma'_{pq}(t, \mu)$) и полиномов от гармоник $e^{i\tau(t)}$, $\tau(t) = \omega_0 t + \theta(t)$, то это решение имеет вид

$$u(t) \approx \mathcal{U}(t, \tau(t)),$$

где $\tau(t) = \omega_0 t + \theta(t)$. Функция $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ является T -периодической по первому своему аргументу и 2π -периодической по второму аргументу. В самом деле, нетрудно показать, что $\tau(t) \approx F(t, \omega_0 t + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) t)$, $F(t+T, t') = F(t, t')$, $F(t, t' + 2\pi) = 2\pi + F(t, t')$, где F — функция, являющаяся решением следующего функционального уравнения относительно $\omega_0 t + \theta$:

$$\begin{aligned} \omega_0 t + \theta + \varepsilon^{n-4} H_{n-4}(t, \omega_0 t + \theta) + \varepsilon^{n-3} H_{n-3}(t, \omega_0 t + \theta) + \dots = \\ = (\omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2)) t, \end{aligned}$$

а $H_{n-4}(t, \omega_0 t + \theta) = H_{n-4}(t+T, \omega_0 t + \theta) = h_{n-4}(\theta)$, где $h_{n-4}(\theta)$ — полином относительно экспонент и

$$\begin{aligned} \exp(ikn\theta) &= \exp\{ik[n(\omega_0 t + \theta) - n\omega_0 t]\} = \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi i m k t}{T}\right) \exp\{ik[n(\omega_0 t + \theta)]\}, \end{aligned}$$

так как $\omega_0 = 2\pi m/nT$. Поэтому

$$u(t) \approx \mathcal{U}(t, \tau(t)) \approx V(t, [\omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2)] t),$$

где функция V , подобно $\mathcal{U}$, является T -периодической по своему первому аргументу и 2π -периодической по второму аргументу. Итак, мы показали, что каждое приближение (N любое) решения представляет собой дважды периодическую функцию, являющуюся квазипериодической, если $[\omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2)] T/(2\pi)$ есть иррациональное число.

§ X.12. Устойчивость бифуркационного тора

Необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что в настоящем случае бифуркационным объектом является не отдельная траектория, а однопараметрическое семейство траекторий, лежащих на некотором торе в фазовом пространстве. Здесь под устойчивостью (неустойчивостью) понимается свойство притяжения (отталкивания)

самого тора, а не устойчивость (или неустойчивость) отдельной траектории на нем.

Разложение (X.2) показывает, что траектории сжимаются в W -направлениях фазового пространства, потому что экспоненты Флоке, соответствующие этим направлениям, остаются в левой части комплексной плоскости. Это говорит о том, что двумерная проекция $Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi}$ или, что эквивалентно, образ этой проекции в $\mathbb{R}^2$ с координатами (ρ, θ) , определяемыми соотношениями (X.38), управляет устойчивостью всего решения. Это предположение является установленным фактом, который можно вывести как следствие основной теоремы о многообразиях (см. O. Lanford III, *Bifurcation of periodic solutions into invariant tori: the work of Ruelle and Takens*, *Non-linear Problems in the Physical Sciences and Biology*, Lecture Notes in Mathematics, No. 322, (New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag, 1973) pp. 159—192 или G. Iooss, *Bifurcation of Maps and Applications*, цитировано выше.)

Поэтому наше дифференциальное уравнение можно свести к двум уравнениям (X.56). Эти два уравнения выполняются асимптотически до членов $O(\varepsilon^N)$, N неограничено, и им удовлетворяют потоки на бифуркационном торе

$$\rho(t) = \varepsilon R(\theta(t), \varepsilon),$$

где R можно построить до членов $O(\varepsilon^N)$, как в §§ X.5—10:

$$R(\theta, \varepsilon) = 1 + \varepsilon R_1(\theta) + \dots$$

Чтобы исследовать устойчивость, возмутим тор, положив

$$\rho = \varepsilon R(\theta(t), \varepsilon) + \rho', \quad (\text{X.123})$$

где $\theta(t) \in [0, 2\pi)$ — любое из решений уравнений (X.56) на торе. Комбинируя (X.123) с уравнением (X.56) для ρ , находим, что ρ' удовлетворяет уравнению

$$\dot{\rho}' = \varepsilon^2 (\mu_2 \hat{\xi}_0 + 3\alpha_{10}) \rho' + O(\varepsilon^3) \rho' + O(|\rho'|^2). \quad (\text{X.124})$$

Напомним, что $\mu_2 \hat{\xi}_0 + 3\alpha_{10} = -2\mu_2 \hat{\xi}_0$, а $\hat{\xi}_0 > 0$ в силу предположения о строгой потере устойчивости решения $u=0$. Отсюда следует, что $|\rho'(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $\mu_2 > 0$, а $|\rho'(0)|$ достаточно мало, т. е. получаем устойчивость, если бифуркация тора является суперкритической. Если же $\mu_2 < 0$, то тор неустойчив. Малые возмущения тора притягиваются к суперкритическому тору и отталкиваются субкритическим тором.

§ X.13. Субгармонические решения на торе

Чтобы понять, как ведут себя траектории на торе и вблизи него, необходимо рассмотреть свойства субгармонических решений на торе, порождаемые захватом частоты. Краткое обсуждение этого вопроса

дано в § X.15. Здесь достаточно выявить свойства субгармонических решений *на торе*, который отвечает в критической точке, если экспонентой Флоке является рациональная точка.

Пусть $\omega_0 = 2\pi m/nT$, $n \geq 3$. Если x — стационарное решение уравнения (X.35), то $y(t) = e^{i\omega_0 t} x$ есть nT -периодическая функция, а $Z(t) = y(t) - \gamma(t, \mu, Z(t), \bar{Z}(t))$ и $u(t) = Z(t)\xi(t) + \bar{Z}(t)\bar{\xi}(t) - \Gamma(t, \mu, Z(t), \bar{Z}(t))$ представляют собой суперпозиции T -периодических и nT -периодических функций. Поэтому из стационарных решений уравнения (X.35) мы получаем некоторое приближение субгармонических решений с точностью до членов $O(|x|^{N+1})$.

Рассмотрим случаи $n=3$ и $n=4$ сильного резонанса:

$$n=3: \quad \dot{x} = \mu \hat{\sigma} x + x |x|^2 a_1 + \bar{x}^2 a_0, \quad -1 + O(|x|^4),$$

$$n=4: \quad \dot{x} = \mu \hat{\sigma} x + x |x|^2 a_1 + \bar{x}^3 a_0, \quad -1 + O(|x|^5).$$

Стационарные решения x находим в форме (IX.68) и (IX.80). Следуя методу, использованному в гл. IX, определим некоторую амплитуду δ (прежде был введен параметр ε , который был определен как средний радиус профиля поперечного сечения тора, описываемый уравнением $\rho = \rho(\theta)$) и положим $x = \delta e^{i\varphi(\delta)}$ и $\mu = \mu^{(1)}\delta + \mu^{(2)}\delta^2 + \mu^{(3)}\delta^3 + \dots$. Если $n=3$, то из баланса главных членов получаем уравнение

$$\mu^{(1)} \hat{\sigma}_0 e^{i\varphi_0} + e^{-2i\varphi_0} a_0, \quad -1 = 0, \quad (\text{X.125})$$

которое соответствует уравнению (IX.68). В критической точке по обе стороны от нее при малых δ отвечается одно $3T$ -периодическое решение u уравнения (X.1) (см. § IX.14).

Если же $n=4$, то получаем $\mu^{(1)}=0$ и приходим к уравнению

$$(\mu^{(2)} \hat{\sigma}_0 + a_1) e^{i\varphi_0} + e^{-3i\varphi_0} a_0, \quad -1 = 0, \quad (\text{X.126})$$

которое соответствует уравнению (IX.80). Находим, что отвечают два $4T$ -периодических решения u уравнения (X.1), если выполняется одно вполне определенное неравенство, вытекающее из (X.26) (см. (IX.83)).

Если $n \geq 5$, то приходим к случаю *слабого резонанса* и находим, что субгармонические решения возможны, если только выполняются исключительные условия. В первом приближении по δ находим, что $\mu^{(1)}=0$, а во втором приближении получаем уравнение

$$\mu^{(2)} \hat{\sigma}_0 + a_1 = 0. \quad (\text{X.127})$$

Уравнение (X.127) не может иметь вещественного решения $\mu^{(2)}$, если $a_1/\hat{\sigma}_0$ не является вещественным числом. Отсюда получаем первое исключительное условие; оно совпадает с условием (IX.101) и имеет место для всех $n \geq 5$. Для $n=5$ имеем

$$\dot{x} = \mu \hat{\sigma} x + x |x|^2 a_1 + \bar{x}^4 a_0, \quad -1 + O(|x|^6). \quad (\text{X.128})$$

В третьем приближении получаем

$$\mu^{(3)}\hat{\sigma}_0 + e^{-5i\varphi_0}a_{0,-1} = 0. \quad (X.129)$$

Если же $n=6$, то имеем

$$\dot{x} = \mu\hat{\sigma}x + x|x|^2a_1 + x|x|^4a_2 + \bar{x}^5a_{0,-1} + O(|x|^7), \quad (X.130)$$

$$\mu^{(1)} = \mu^{(3)} = \mu^{(2n+1)} = 0, \quad \mu^{(2)}\hat{\sigma}_0 + a_1 = 0 \text{ и}$$

$$\mu^{(4)}\hat{\sigma}_0 + a_2 + e^{-6i\varphi_0}a_{0,-1} = 0. \quad (X.131)$$

Если $n > 6$, то получаем $\mu^{(1)} = \mu^{(3)} = 0$ и, помимо (X.127), имеем второе исключительное условие, вытекающее из уравнения

$$\mu^{(4)}\hat{\sigma}_0 + a_2 = 0. \quad (X.132)$$

Предположим теперь, что выполняются оба исключительных условия; тогда получаем

$$\mu^{(5)}\hat{\sigma}_0 + e^{-7i\varphi_0}a_{0,-1} = 0,$$

если $n=7$. Если же $n=8$, то $\mu^{(5)} = 0$ и

$$\mu^{(6)}\hat{\sigma}_0 + a_2 + e^{8i\varphi_0}a_{0,-1} = 0.$$

При выводе уравнений для $n \geq 6$ предполагалось для простоты, что $\hat{\sigma}$, a_1 , $a_{0,-1}$ не зависят от μ . Анализ показывает, что для реализации субгармонической бифуркации требуется выполнение исключительных условий; одно новое условие добавляется для каждого нечетного значения n , начиная с $n=5$. Для нечетного $n \geq 5$ вычисление бифуркации подобно тому, которое было дано для $n=3$, и имеет следующие отличия. Так как $\mu^{(1)} = 0$, $\mu^{(2)} \neq 0$ и $\mu^{(n-2)} \neq 0$, если $n \geq 5$ нечетное, то бифуркация является односторонней, однако функция $\mu(\delta)$ не является четной и поэтому существуют два решения с одним и тем же значением μ , но с разными амплитудами δ . (Здесь, может быть, необходимо предостеречь читателя от смешивания амплитуды δ с амплитудой ϵ , ранее использовавшейся.)

Если $n \geq 6$ четное, то вычисление бифуркации подобно тому, которое дано для $n=4$, и отвечается два nT -периодических решения, если выполняется вполне определенное дополнительное неравенство, гарантирующее устойчивость.

Покажем теперь, что субгармонические решения, которые отвечаются при $n \geq 5$, лежат на торе. Сначала отметим, что всегда можно определить поперечное сечение $\rho(\theta)$ тора, если не выполняются некоторые условия, которые являются даже более исключительными, чем условия, требуемые для субгармонической бифуркации с $n \geq 5$. В самом деле, условие $\mu^{(2)} \neq 0$ достаточно для существования функции $\rho(\theta)$. Для субгармонической бифуркации мы должны иметь $\dot{\rho} = \dot{\theta} = 0$. При выполнении этих условий уравнение $\dot{\rho} = \rho'(\theta)\dot{\theta}$ удовлетворяется

тождественно, и субгармонические решения лежат на торе

$$\rho(\theta, \varepsilon) = \sum_{p=1}^N \rho_p(\theta) \varepsilon^p + O(\varepsilon^{N+1}),$$

где функции ρ_p удовлетворяют уравнению (X.105) или (X.106). Точки пересечения периодического решения с замкнутой кривой $\rho(\theta, \varepsilon)$ определяются корнями, для которых $\dot{\theta} = 0$, т. е. для корней значения θ таковы, что правая часть уравнения (X.107) или (X.108) обращается в нуль. Так как левая часть уравнения не содержит свободных параметров, то уравнение $\dot{\theta} = 0$ определяет $2n$ точек пересечения $\theta(\varepsilon)$ на замкнутой кривой $\rho(\theta, \varepsilon)$.

Полезно показать, как выполняется это вычисление в самом низком существенном порядке при $n=5$. Сначала отметим, что

$$\rho(\theta) = \varepsilon + \varepsilon^2 \rho_2(\theta), \quad \bar{\rho}_2 = 0, \quad \mu_2 \hat{\xi}_0 + \alpha_{10} = 0, \quad (\text{X.133})$$

где $\rho_2(\theta)$ дается формулами (X.67)₂ и (X.68). Теперь условие $\dot{\theta} = 0$ приводит к соотношению

$$\Omega_0 = \mu_2 \hat{\omega}_0 + \beta_{10} = 0. \quad (\text{X.134})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_2(\theta) &= -\frac{\alpha_{010}}{2\alpha_{10}} e^{5i\theta} - \frac{\bar{\alpha}_{010}}{2\alpha_{10}} e^{-5i\theta} = \\ &= \frac{|\alpha_{010}|}{\mu_2 \hat{\xi}_0} \cos(5\theta + \arg \alpha_{010}). \end{aligned} \quad (\text{X.135})$$

Первое приближение $\theta(0) = \theta_0$ для функции $\theta(\varepsilon)$ получается из условия $\dot{\theta} = 0$, требование выполнения которого до членов $O(\varepsilon^3)$ приводит к соотношению

$$\Theta_1(\theta_0) = 2\beta_{10}\rho_2(\theta_0) + \beta_{010}e^{5i\theta_0} + \bar{\beta}_{010}e^{-5i\theta_0} = 0. \quad (\text{X.136})$$

Покажем теперь, что (X.136) определяет первое приближение для десяти точек пересечения $\theta(\varepsilon)$ на замкнутой кривой $\rho(\theta, \varepsilon)$. Сначала отметим, что из (X.57) следует, что $\alpha_{ek} + i\beta_{ek} = 0$, поэтому $\beta_{010} = i\alpha_{010}$ и

$$\begin{aligned} \Theta_1(\theta) &= \frac{1}{\hat{\xi}_0} (i\hat{\sigma}_0 \alpha_{010} e^{5i\theta} - i\hat{\sigma}_0 \bar{\alpha}_{010} e^{-5i\theta}) = \\ &= -\frac{2}{\hat{\xi}_0} |\hat{\sigma}_0 \alpha_{010}| \sin(5\theta + \arg \alpha_{010} + \arg \hat{\sigma}_0). \end{aligned} \quad (\text{X.137})$$

Поэтому

$$5\theta_0 + \arg \alpha_{010} + \arg \hat{\sigma}_0 = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 9, \quad (\text{X.138})$$

и существует десять значений θ_0 . Возвращаясь теперь к (X.135) и принимая во внимание (X.138), находим, что существует два зна-

чения $\rho_2(\theta_0)$:

$$\begin{aligned}\rho_2(\theta_0) &= \frac{|\alpha_{010}|}{\mu_2 \hat{\xi}_0} \cos(k\pi - \arg \hat{\sigma}_0) = \\ &= \frac{|\alpha_{010}|}{\mu_2 \hat{\xi}_0} \times \begin{cases} \cos(\arg \hat{\sigma}_0), & \text{если } k=0, 2, 4, 6, 8, \\ -\cos(\arg \hat{\sigma}_0), & \text{если } k=1, 3, 5, 7, 9. \end{cases} \quad (\text{X.139})\end{aligned}$$

Поскольку для $\mu=0$ имеем $\hat{\xi}_0 = \xi_\mu > 0$, $\hat{\omega}_0 = \omega_\mu$, $\hat{\sigma}_0 = \sigma_\mu$, то $-\pi/2 < \arg \hat{\sigma}_0 < \pi/2$, а так как $\mu_2 > 0$ (нас интересует устойчивость, т. е. суперкритический тор), то $\rho_2(\theta_0) > 0$, если k четное, и $\rho_2(\theta_0) < 0$, если k нечетное. Наибольшее и наименьшее значения $\rho_2(\theta)$ достигаются, если $\hat{\omega}_0 = \arg \hat{\sigma}_0 = 0$. Поэтому положения точек пересечения на замкнутой кривой $\rho(\theta) \approx \varepsilon + \varepsilon^2 \rho_2(\theta)$, $\varepsilon > 0$, сдвинуты на угол $\arg \hat{\sigma}_0$ от впадин и гребней этой кривой.

Наконец, отметим, что десять точек пересечения на замкнутой кривой в поперечном сечении тора в точности совпадают с точками, определяемыми из уравнения (X.129). Связь между амплитудой $\delta > 0$, которая использована в (X.129), и параметром ε можно установить в наименьшем порядке из соотношения

$$x = \delta e^{i\varphi_0} = [\varepsilon + \varepsilon^2 \rho_2(\theta_0)] e^{i\theta_0}.$$

Отсюда следует, что существуют два значения δ_1 и δ_2 амплитуды δ

$$\delta = \varepsilon + \varepsilon^2 \rho_2(\theta_0), \quad \varphi_0 = \theta_0,$$

которые соответствуют двум значениям $\rho_2(\theta_0)$, а

$$\begin{aligned}\mu(\delta(\varepsilon)) &= \mu^{(2)}\delta^2 + \mu^{(3)}\delta^3 + \dots = \\ &= \mu^{(2)}\varepsilon^2 + [2\mu^{(2)}\rho_2(\theta_0) + \mu^{(3)}]\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).\end{aligned}$$

В разложении $\mu(\delta(\varepsilon)) = \mu(\varepsilon) = \mu_2\varepsilon^2 + \mu_4\varepsilon^4 + \dots$ нечетные степени ε равны нулю. Например, в результате отождествления коэффициентов находим, что $\mu^{(2)} = \mu_2$, и из (X.129) находим, что $\mu^{(3)} = -2\mu^{(2)}\rho_2(\theta_0)$.

§ X.14. Устойчивость субгармонических решений на торе

Суперкритический тор ($\mu_2 > 0$) устойчив, если ε мало. Однако одно из двух субгармонических решений неустойчиво. Чтобы исследовать устойчивость этих решений, положим $\rho = \rho(\theta, \varepsilon) = \varepsilon + \varepsilon^2 \rho_2(\theta) + O(\varepsilon^3)$, $\mu = \mu_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$ в (X.78) и найдем, что

$$\dot{\theta} = \varepsilon^3 \Theta_1(\theta) + O(\varepsilon^4),$$

где $\Theta_1(\theta)$ дается формулой (X.137). Теперь наложим на θ_0 возмущение $\theta = \theta_0 + \theta'$ и линеаризуем последнее уравнение с учетом

(X.136); в результате получим уравнение

$$\dot{\theta}' = [e^* \Theta_1'(\theta_0) + O(\epsilon^4)] \theta' + O(|\theta'|^2), \quad (\text{X.140})$$

где θ_0 дается формулой (X.138), $\beta_{10}/\alpha_{10} = \hat{\omega}_0/\hat{\xi}_0$, $\beta_{010} = i\alpha_{010}$ и

$$2\beta_{10}\rho_2'(\theta_0) = 5i \frac{\beta_{10}}{\alpha_{10}} [-\alpha_{010}e^{5i\theta_0} + \bar{\alpha}_{010}e^{-5i\theta_0}].$$

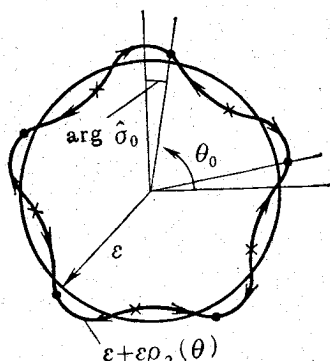


Рис. X.2. Бифуркация и устойчивость $5T$ -периодических решений на торе. Существуют два $5T$ -периодических решения, имеющие по 5 точек пересечения с поперечным сечением тора. Решение с положительными значениями $\rho_2(\theta_0)$ неустойчиво, а решение с отрицательными значениями устойчиво. Если $\arg \hat{\sigma}_0 = 0$, то $\hat{\omega}_0 = \omega_\mu(0) = 0$, и множитель Флоке $\lambda = e^{\sigma T} = e^{i\omega_0 T} e^{\mu \hat{\xi}_0 T}$ пересекает единичную окружность в направлении луча, исходящего из начала. В этом случае устойчивым решениям соответствуют 5 точек на гребнях, где $\rho'(\theta_0) = 0$, а неустойчивым решениям 5 точек во впадинах, для которых $\rho'(\theta_0) = 0$.

После некоторых простых выкладок с использованием только что указанных соотношений уравнение (X.140) приводится к виду

$$\dot{\theta}' = - \left[\frac{5\epsilon^3}{\hat{\xi}_0} |\hat{\sigma}_0| |\alpha_{010}| \cos k\pi \right] + [O(\epsilon^4)] \theta' + O(|\theta'|)^2.$$

Поэтому $5T$ -периодическое решение с 5 точками пересечения ($k=0, 2, 4, 6, 8$), близкими к гребням, устойчиво, а другое $5T$ -периодическое решение с точками пересечения, близкими к впадинам ($k=1, 3, 5, 7, 9$), неустойчиво (см. рис. X.2).

Результаты, касающиеся устойчивости субгармонических решений при $n > 5$, подобны только что приведенным. Существуют два различных периодических решения на торе, каждое из которых пересекает замкнутую кривую в n точках; половина этих точек принадлежит устойчивому решению, а половина неустойчивому, причем устойчивые и неустойчивые точки пересечения чередуются. (Подробности этих расчетов устойчивости можно найти в книге Йосса *Bifurcation of Maps and Applications*, цитированной выше.)

§ X.15. Захват частоты

Можно сказать, что захват частоты происходит в динамической системе, когда колебания с двумя независимыми частотами влияют одно на другое таким образом, что происходит синхронизация двух колебаний в одно периодическое колебание с общим большим периодом (субгармоническое колебание). Это явление носит общий характер и очень сложно.

Явление захвата фазы на торе T^2 происходит, когда все траектории на торе захватываются некоторой периодической траекторией при возрастании μ . Чтобы понять явление захвата, полезно ввести в рассмотрение отображение Пуанкаре (первое возвращающее отображение); оно определяется как монотонная функция $f(\cdot)$:

$$\theta \mapsto f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

где θ и $f(\theta)$ суть вещественные числа, f такая, что

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta) + 2\pi,$$

и f отображает начальную точку траектории, принадлежащую кривой $\rho = \varepsilon R(\theta)$ на торе, в точку пересечения траектории с этой кривой после истечения промежутка времени T , при этом кривая параметризована значениями θ . Поэтому можно предположить, что траектория начинается в точке замкнутой кривой $\rho = \varepsilon R(\theta, \varepsilon)$ при $\theta = \theta_0$. После первого оборота траектория пересекает замкнутую кривую при $\theta = \theta_1$, т. е. $\theta_1 = f(\theta_0)$. Траектория снова наматывается на тор и по истечении промежутка времени T пересекает замкнутую кривую при $\theta = \theta_2 = f(\theta_1) = f^2(\theta_0)$ и так далее. Изменение угла между последовательными точками пересечения дается функцией $f(\theta)$. Поэтому получаем последовательность $\theta_0, f(\theta_0) = \theta_1, f^2(\theta_0) = f(\theta_1) = \theta_2, \dots, f^n(\theta_0) = f^{n-1}(\theta_1) = \dots = f(\theta_{n-1}) = \theta_n$. Пусть $\theta = \theta_0 + \omega t$. Тогда $f(\theta_0) = \theta_0 + \omega T = \theta_1, f^2(\theta_0) = \theta_0 + 2\omega T, \dots, f^n(\theta_0) = \theta_0 + n\omega T$. Отметим, что если $\omega = 2\pi m/(nT)$, то траектория на торе будет nT -периодической.

Введем теперь число вращения $\hat{\rho}(f)$ отображения f :

$$\hat{\rho}(f) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi v} [f^v(\theta) - \theta]. \quad (\text{X.141})$$

Пуанкаре, который впервые ввел в рассмотрение это число, доказал, что этот предел существует и не зависит от θ . Если число вращения $\hat{\rho}(f)$ представляет собой иррациональное число r , то можно показать, что решения на торе являются квазипериодическими и что замена переменной θ приводит к отображению $f(\theta) = \theta + \omega T, \omega = 2\pi r/T, 0 < r < 1$, представляющему собой именно вращение на замкнутой кривой (Данжуа, Боль). Так как $f^v(\theta) - \theta = 2\pi v r$, то получаем $\hat{\rho}(f) = r$. В иррациональном случае каждая итерация отображения дает новую точку на кривой $\rho = \varepsilon R(\theta, \varepsilon)$ и ни одна из этих точек не повторяется, так что точки пересечения любой траектории образуют плотное множество на кривой $\rho = \varepsilon R(\theta, \varepsilon)$ в поперечном сечении тора. Поэтому любая траектория на торе со временем полностью заполняет тор.

Для квазипериодических решений на торе число вращения $\hat{\rho} = r = \omega/(2\pi/T)$ представляет собой отношение частот. Если вращение

$\hat{\rho}(f)$ есть рациональное число, $r = m/n$, то существует θ_0 , такое, что $f^n(\theta_0) = \theta_0 \pmod{2\pi}$ и соответствующая траектория является nT -периодической. В этом случае, вообще говоря, существуют две nT -периодические траектории: одна притягивающая (устойчивая), а другая отталкивающая (неустойчивая), как, например, на рис. X.2. Траектории, близкие к притягивающему тору, со временем будут улавливаться устойчивой траекторией на торе.

Приближенные дважды периодические решения, которые являются асимптотическими к истинным решениям с точностью до членов порядка ε^N , N произвольно, имеют вид

$$u(t) = V(t, [\omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2)] t), \quad (X.142)$$

где $V(t+T, t') = V(t, t'+2\pi) = V(t, t')$ (см. замечания в конце дополнения X.3). Этому типу поведения решения соответствует число вращения

$$\hat{\rho}(\varepsilon) = \frac{[\omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2)] T}{2\pi}, \quad (X.143)$$

которое является полиномом относительно ε . Для этого числа вращения большей части значений ε соответствуют иррациональные значения $\hat{\rho}(\varepsilon)$, если $\Omega(\varepsilon^2) \neq 0$.

Необходимо различать число вращения $\hat{\rho}(\varepsilon)$ (X.143) асимптотического представления потока на торе и истинное число вращения $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$, где

$$f_\varepsilon(\theta) = \theta + \omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) + \varepsilon^N h(\theta, \varepsilon),$$

при этом N произвольно, а $h(\theta, \varepsilon)$ — неизвестная функция. Для истинного отображения q -я итерация есть

$$f_\varepsilon^q(\theta) = \theta + q(\omega_0 + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2)) + \varepsilon^N h_q(\theta, \varepsilon). \quad (X.144)$$

Функция $\hat{\rho}(\varepsilon)$ аналитическая. В отличие от истинного числа вращения, которое обсуждается ниже, она не может иметь ступенек, обязательных при захвате частот решением (см. рис. X.3).

Истинное отображение может не являться аналитическим по ε ; даже если отображение и является аналитическим, число вращения $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$ может и не быть гладким по ε , хотя Пуанкаре показал, что функция $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$, по крайней мере, непрерывна на ε . В самом деле, следующее соображение можно интерпретировать как подтверждение того, что функция $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$ не является гладкой, но, вместо этого, принимает постоянные значения на интервале ε в рациональных точках $\hat{\rho}(f_\varepsilon) = p/q$. Это приводит к непрерывной кривой, имеющей ступеньки, как на рис. X.3. Предположим, что $\hat{\rho} = p/q$, если $\varepsilon = \varepsilon_0$, а θ_0 — неподвижная точка порядка q отображения $\theta \mapsto f_\varepsilon(\theta)$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$, т. е.

$$f_{\varepsilon_0}^q(\theta_0) - \theta_0 = 0. \quad (X.145)$$

Эта неподвижная точка соответствует периодическому решению с периодом qT нашей исходной задачи, а отношение $0 < p/q < 1$ играет роль m/n гл. IX. Чтобы доказать, что число вращения $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$ остается постоянным на интервале, содержащем ε_0 , достаточно показать, что равенство

$$g_\varepsilon(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} f_\varepsilon^q(\theta) - \theta = 0 \quad (\text{X.146})$$

выполняется для (ε, θ) , близких к $(\varepsilon_0, \theta_0)$. Здесь q — целое кратное, соответствующее qT -периодическому решению, а p/q определяется непрерывностью $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$. Теорема о неявной функции гарантирует, что

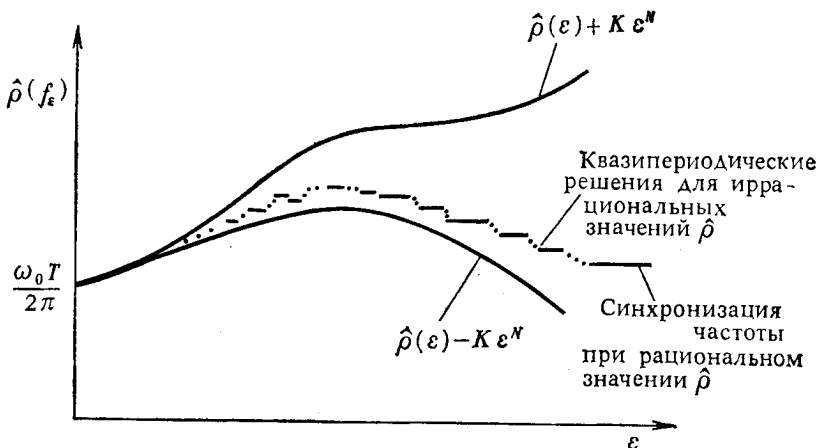


Рис. X.3. Число вращения отображения Пуанкаре. Это число вращения кажется гладкой функцией при $\varepsilon \rightarrow 0$.

будет иметь место уравнение (X.146), если выполняется равенство (X.145) и

$$\frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \theta} = \varepsilon_0^N \frac{\partial h_q}{\partial \theta} \neq 0 \quad (\text{X.147})$$

для $(\varepsilon, \theta) = (\varepsilon_0, \theta_0)$. Тогда найдется интервал изменения ε , содержащий ε_0 , для которого существует решение $\theta(\varepsilon)$ уравнения (X.146) с числом вращения $\hat{\rho}(f_\varepsilon) = p/q$. Это приводит к плоским сегментам, ступенькам, показанным на рис. X.3. Доказательство, опирающееся на теорему о неявной функции, показывает, что нижняя граница размеров ступенек имеет порядок ε_0^N .

Мы показали, что для каждого N поток на торе является, по крайней мере приближенно, квазипериодическим. Для всех потоков $h_q \equiv 0$, и теорема о неявной функции не приводит к захвату частот. Функция $\hat{\rho}(\varepsilon)$ аналитическая для всех таких приближений.

Смысл того обстоятельства, что число усечения N произвольно, состоит в следующем. Норма разности усеченного приближения $\bar{u}^{(N)}(\varepsilon)$ и точного решения $\bar{u}(\varepsilon)$ имеет вид

$$\|\bar{u}(\varepsilon) - \bar{u}^{(N)}(\varepsilon)\| = \varepsilon^N \delta_N(\varepsilon),$$

где, вообще говоря, конечное $N = N(\varepsilon)$ может дать меньшую ошибку $\varepsilon^N \delta_N(\varepsilon)$, чем большее N , а самое лучшее $N = N(\varepsilon)$ таково, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \rightarrow \infty.$$

Поэтому по крайней мере можно утверждать, что *длины интервалов, на которых $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$ постоянно, должны стремиться к нулю быстрее, чем любая степень ε .*

М. Херман показал (M. Herman, *Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, Geometry and Topology, Lecture Notes in Mathematics*, No. 597 (New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag, 1977, pp. 271—293), что если $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$ не является тождественно постоянной, то множество точек ε , для которых $\hat{\rho}(f_\varepsilon)$ иррационально, имеет положительную меру. Множество таких точек, которые соответствуют решениям, обладающим свойством захвата частот, имеет положительную меру, если существуют точки $(\varepsilon_0, \theta_0)$, для которых выполняется неравенство (X.147); однако интервалы изменения ε , окружающие ε_0 , являются малыми, если ε малó, так что трудно наблюдать захват частот субгармоническими решениями, если ε малó. Но для бóльших значений ε асимптотически квазипериодические решения и синхронизация по частоте субгармонических периодических решений возможны и наблюдаются в приложениях.

Недавние эксперименты свидетельствуют о том, что бифуркация периодических решений в инвариантные торы часто встречается в гидродинамике. Квазипериодические решения обнаруживаются экспериментально при изучении фурье-спектра некоторых зависящих от времени характеристик течения, например, составляющей скорости. В спектре квазипериодического движения наблюдаются большое число пиков, соответствующих периодическим компонентам колебаний, и низкоамплитудный шум. Если движение квазипериодично с двумя частотами, можно все резко выраженные характеристики спектра отождествить с суммами и разностями гармоник этих частот. Отношение частот дает упомянутое выше число вращения. В экспериментах это число оказывается гладкой функцией μ вблизи точки бифуркации. Для бóльших значений μ решения могут захватываться субгармоническим решением, в котором отношение двух частот постоянно и рационально на интервалах (см. рис. X.3).

Дополнение X.1. Построение асимптотически квазипериодических решений, ответвляющихся в рациональных точках более высокого порядка ($n \geq 5$), методом степенных рядов с использованием альтернативы Фредгольма

Анализ асимптотических решений на бифуркационном торе можно провести, исследуя автономные уравнения (X.35) методом степенных рядов, который был использован в гл. VIII. По своей структуре искомые решения представляют собой суперпозицию T -периодических функций и преобразования $y = e^{i\omega_0 t} x(s)$, где, как и выше, s есть приведенное время, связанное с t отображением, зависящим от амплитуды,

$$\varepsilon^2 \Omega(\varepsilon) t = s, \quad (\text{X.148})$$

которое отображает $2\pi/(\varepsilon^2 \Omega(\varepsilon))$ -интервалы по t в 2π -интервалы по s .

Здесь будем предполагать, что редукция к автономному уравнению (X.35) фактически ограничивается на некотором N или что $N = \infty$, но правая часть уравнения (X.35) является аналитической по x и $\bar{x}$, если μ мало. Принимая какое-нибудь одно из эквивалентных определений амплитуды ε переменной x , можно выполнить приводимое ниже формальное построение, т. е., предполагая аналитичность правой части (X.35) по x и $\bar{x}$, можно использовать теорему о неявной функции для доказательства того, что ряды (X.154) по степеням ε сходятся к единственному решению уравнения (X.35), если ε мало.

Пусть $a(\cdot) \in P_{2\pi}$, $b(\cdot) \in P_{2\pi}$. Тогда

$$[a, b]_{2\pi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(s) \bar{b}(s) ds.$$

Амплитуду бифуркационного решения можно определить следующим образом:

$$\varepsilon = [x, e^{is}]_{2\pi}. \quad (\text{X.149})$$

Функции $\mu(\varepsilon)$, $\Omega(\varepsilon)$ и $x(s, \varepsilon) \in P_{2\pi}$, удовлетворяющие уравнению (X.35), ищем в виде

$$\mu = \varepsilon^2 \bar{\mu}(\varepsilon), \quad \Omega = \Omega(\varepsilon), \quad x = \varepsilon \bar{\chi}(s, \varepsilon), \quad (\text{X.150})$$

где

$$\begin{aligned} \Omega \frac{d\bar{\chi}}{ds} &= \bar{\mu} \bar{\sigma} \bar{\chi} + \sum_{q \geq 1} \bar{\chi} |\bar{\chi}|^{2q} a_q \varepsilon^{2q-2} + \\ &+ \sum_{k > 0} \sum_{q \geq 0} |\bar{\chi}|^{2q} \{ a_{q, k} \bar{\chi}^{1+kn} \varepsilon^{2q+kn-2} + a_{q, -k} \bar{\chi}^{kn-1} \varepsilon^{2q+kn-4} \}. \end{aligned} \quad (\text{X.151})$$

Функция $\tilde{\chi}(s, \varepsilon)$, удовлетворяющая уравнению (X.151), инвариантна по отношению к переносу начала отсчета координаты s и по отношению к поворотам функции $\tilde{\chi}(s, \varepsilon)$ на углы, кратные $2\pi/n$, т. е. если $\tilde{\chi}(s, \varepsilon)$ является решением (X.151), то решением также будет $\tilde{\chi}(s + \varphi, \varepsilon)$ для любого φ , а также $\tilde{\chi}(s, \varepsilon) e^{2\pi i/n}$.

Предыдущий анализ уравнения (X.35) показывает, что

$$x = \rho e^{i\theta} = \varepsilon e^{is} \{1 + \varepsilon \chi_1(s) + \dots\},$$

где $\chi_1(\cdot) \in \mathbb{P}_{2\pi}$. Поэтому положим

$$\tilde{\chi}(s, \varepsilon) = e^{is} \chi(s, \varepsilon),$$

где, с учетом (X.149),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi(s, \varepsilon) ds = 1. \quad (\text{X.152})$$

Фактически мы уже знаем и сейчас снова докажем, что функция $\chi(s, \varepsilon)$ является не только 2π -периодической, но и $2\pi/n$ -периодической. Здесь отметим, что решение $\chi(\cdot) \in \mathbb{P}_{2\pi}$, $\mu(\varepsilon)$ и $\Omega(\varepsilon)$ уравнения

$$\begin{aligned} (i\Omega - \tilde{\mu}\hat{\sigma})\chi + \Omega \frac{d\chi}{ds} &= \sum_{q \geq 1} \chi |\chi|^{2q} a_q \varepsilon^{2q-2} + \\ &+ \sum_{k \geq 0} \sum_{q \geq 0} |\chi|^{2q} \{a_{q,k} e^{ikns} \chi^{1+kn} \varepsilon^{2q+k-2} + \\ &+ a_{q,-k} e^{ikns} \bar{\chi}^{kn-1} \varepsilon^{2q+kn-4}\} \end{aligned} \quad (\text{X.153})$$

является аналитическим по ε , если ε мало; оно единственно и его можно построить в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned} \chi(s, \varepsilon) &= \chi_0(s) + \varepsilon \chi_1(s) + \varepsilon^2 \chi_2(s) + \dots, \\ \hat{\mu}(\varepsilon) &= \tilde{\mu}_0 + \varepsilon \tilde{\mu}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\mu}_2 + \dots, \\ \Omega(\varepsilon) &= \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{X.154})$$

где коэффициенты рядов определяются из уравнений, которые получаются в результате подстановки (X.154) в (X.152) и (X.153) и приравнивая в левых и правых частях получаемых уравнений коэффициентов при одинаковых степенях ε . Для упрощения записи будем предполагать, что $\hat{\sigma}$, a_l и a_{lk} не зависят от μ . Находим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_0(s) ds = 1, \quad (\text{X.155})$$

$$(i\Omega_0 - \tilde{\mu}_0 \hat{\sigma}) \chi_0 + \Omega_0 \frac{d\chi_0}{ds} = |\chi_0|^2 \chi_0 a_1. \quad (\text{X.156})$$

Поэтому $\chi_0 = 1$ и

$$i\Omega_0 = \tilde{\mu}_0 \hat{\sigma} + a_1, \quad (\text{X.157})$$

где, по предположению, потеря устойчивости решения $u=0$ является строгой ($\text{Re } \hat{\sigma} \neq 0$) и слабо резонансная субгармоническая бифуркация не имеет места ($\Omega_0 \neq 0$). При этих предположениях уравнение (X.157) можно разрешить относительно $\tilde{\mu}_0$ и Ω_0 .

Коэффициенты при ε в (X.152) и (X.153) равны нулю, если

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_1(s) ds = 0, \quad (\text{X.158})$$

$$(i\Omega_1 - \tilde{\mu}_1 \hat{\sigma}) + (i\Omega_0 - \tilde{\mu}_0 \hat{\sigma}) \chi_1 + \Omega_0 \frac{d\chi_1}{ds} = (\bar{\chi}_1 + 2\chi_1) a_1 + g_1, \quad (\text{X.159})$$

или, используя (X.157),

$$\Omega_0 \frac{d\chi_1}{ds} = (\chi_1 + \bar{\chi}_1) a_1 + g_1 - (i\Omega_1 - \tilde{\mu}_1 \hat{\sigma}),$$

где

$$g_1 = a_0, \quad -1e^{-5is} \quad \text{при } n=5, \quad (\text{X.160})_1$$

$$g_1 = 0 \quad \text{при } n > 5. \quad (\text{X.160})_2$$

Следующие замечания поясняют процедуру, которая используется для решения уравнений (X.160) и (X.161). Линейная задача

$$\Omega_0 \frac{dy}{ds} - (y + \bar{y}) a_1 = \hat{g} \in \mathbb{P}_{2\pi}, \quad (\text{X.162})$$

где $\hat{g}(s)$ имеет среднее значение, равное нулю,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{g}(s) ds = 0, \quad (\text{X.163})$$

имеет единственное 2π -периодическое решение $y(s)$ с равным нулю средним значением. Если $\hat{g}(s) \in \mathbb{P}_{2\pi/n}$, то $y(s) \in \mathbb{P}_{2\pi/n}$. Чтобы это доказать, отметим, что

$$\Omega_0 \frac{d(y + \bar{y})}{ds} - 2\text{Re}(a_1)(y + \bar{y}) = 2\text{Re } \hat{g}(s). \quad (\text{X.164})$$

Так как уравнение (X.164) не имеет 2π -периодических решений $(y + \bar{y})(s)$, если $\hat{g}(s) = 0$, и среднее значение $\text{Re } \hat{g}(s)$ равно нулю, то его единственное решение $y(s) + \bar{y}(s)$ также имеет равное нулю среднее значение. Тогда решение y уравнения (X.162) определяется единственным образом и имеет среднее значение, равное нулю.

Возвращаясь теперь к уравнению (X.160), мы можем построить функцию $\hat{g} = g_1 - (i\Omega_1 - \tilde{\mu}_1 \hat{\sigma})$ с нулевым средним значением тогда и только тогда, когда $\tilde{\mu}_1 = \Omega_1 = 0$. Тогда если $n = 5$, то

$$\chi_1(s) = Ae^{5is} + Be^{-5is},$$

где

$$A = \frac{a_1 \bar{a}_0, -1}{5i\Omega_0 (5i\Omega_0 - a_1 - \bar{a}_1)},$$

$$B = \frac{-a_0, -1 (5i\Omega_0 + \bar{a}_1)}{5i\Omega_0 (5i\Omega_0 + a_1 + \bar{a}_1)}.$$

Решения более высокого порядка представляются в виде полиномов от $e^{\pm 5is}$.

Уравнения для определения функций $\chi_l(s)$ для $l > 1$ имеют вид уравнения (X.160). Значения $\tilde{\mu}_n$ и Ω_n получаем в результате такого их выбора, для которого среднее значение функции $\chi_l(s)$ равно нулю. Если $n > 5$, то для $0 \leq l \leq n-5$ не существует неоднородных членов с нулевыми средними значениями. Для этих значений l имеем $\chi_l(s) = 0$, а первой отличной от нуля функцией $\chi_l(s)$, $l > 0$, будет та, для которой $l = n-4$.

Построение в этом дополнении функции $\chi(s, \varepsilon)$ уже показывает, что $\chi(s, \varepsilon)$ является $2\pi/n$ -периодической по s . Это уменьшение (от 2π) периода происходит вследствие инвариантности решения $\tilde{\chi}(s, \varepsilon)$ уравнения (X.151) относительно переноса и поворота. Так как решение $\tilde{\chi}(\cdot, \varepsilon)$ является единственным с точностью до сдвига по s и поворота функции $\tilde{\chi}$ на угол $2\pi/n$, то существует φ , такое что

$$\tilde{\chi}(s + \varphi, \varepsilon) = e^{i(s+\varphi)} \chi(s + \varphi, \varepsilon) = e^{is} e^{2\pi i/n} \chi(s, \varepsilon),$$

где

$$\chi(\cdot, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \chi_1(\cdot) + \varepsilon^2 \chi_2(\cdot) + \dots$$

Поэтому

$$e^{i(s+\varphi)} \{1 + \varepsilon \chi_1(s + \varphi) + \dots\} = e^{i(s+(2\pi/n))} \{1 + \varepsilon \chi_1(s) + \dots\}.$$

Следовательно, $\varphi = 2\pi/n$ и

$$\chi_l\left(s + \left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \chi_l(s) \text{ для } l \geq 1.$$

Дополнение (X.2). Прямое построение асимптотически квазипериодических решений, отвечающих в иррациональных точках, методом, включающим две переменные, степенные ряды и альтернативу Фредгольма

Теперь мы будем решать уравнение (X.1), когда отношение частот в критической точке $\omega_0 T/2\pi$ выражается иррациональным числом. Будем искать дважды периодическое решение $u(t, s, \varepsilon)$

$$u(\cdot, \cdot, \varepsilon) \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}, \quad (X.165)$$

являющееся T -периодическим по t и 2π -периодическим по s и таким, что

$$s = \omega(\varepsilon) t, \quad \omega(0) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0, \quad u(t, s, 0) = 0.$$

Амплитуду ε решения u определим проекцией (X.180). Сначала разложим решение

$$\begin{bmatrix} u(t, s, \varepsilon) \\ \omega(\varepsilon) - \omega_0 \\ \mu(\varepsilon) \end{bmatrix} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{p!} \begin{bmatrix} u_p(t, s) \\ \omega_p \\ \mu_p \end{bmatrix} \quad (X.166)$$

и отождествим коэффициенты при независимых степенях ε . Чтобы упростить запись уравнений, возникающих в результате определения коэффициентов рядов (X.166), отметим, что

$\mu(\varepsilon)$ и $\omega(\varepsilon)$ суть четные функции.

Это утверждение можно вновь доказать на основе используемого здесь метода ценою более длинного, но не более трудного анализа (см. D. D. Joseph, Remarks about bifurcation and stability of quasi-periodic solutions, *Nonlinear Problems in the Physical Sciences and Biology*, Lecture Notes in Mathematics, No. 322 (New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag, 1973)). При выводе уравнений для определения коэффициентов рядов (X.166) примем во внимание то обстоятельство, что наличие двух временных переменных приводит к следующему правилу дифференцирования по t :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \omega \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Эти уравнения почти совпадают с уравнениями вида (IX.50), (IX.51) и (IX.52) за исключением того, что производные нечетного порядка от μ и ω равны нулю, должен быть принят во внимание член с произведением, а оператор $\mathbb{J}$ следует заменить на оператор

$$\mathcal{L}_0 = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t} + f_u(t|\cdot) = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial s} + J_0, \quad (X.167)$$

область определения которого состоит из дважды периодических функций от t и s ($\text{dom } \mathcal{L}_0 = \mathbb{P}_{T, 2\pi}$). Оператор J_0 в точности совпадает с оператором, определенным в § IX.4, за исключением того, что здесь мы пишем $\partial/\partial t$ в связи с тем обстоятельством, что если J_0 действует на функции из $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$, то вторую переменную s следует рассматривать как постоянную. В частности,

$$J_0 \xi = i\omega_0 \xi,$$

где $i\omega_0$ — простое собственное значение, и поэтому

$$z = e^{is} \bar{z} \quad \text{и} \quad \bar{z} = e^{-is} z \quad (\text{X.168})$$

являются единственными собственными функциями на нуль-пространстве оператора $\mathcal{L}_0$, т. е. $\mathcal{L}_0 z = \mathcal{L}_0 \bar{z} = 0$. Чтобы доказать это, представим нуль-векторы оператора $\mathcal{L}_0$ в виде рядов Фурье и отождествим коэффициенты при e^{iks} . Тогда, принимая во внимание то обстоятельство, что $\omega_0 T/2\pi$ есть иррациональное число, получаем

$$\pm i\omega_0 + \frac{2\pi ik}{T} \neq i\omega_0 k' \quad \text{для любых } k \neq 0 \text{ и } k'.$$

Оператор, сопряженный по отношению к $\mathcal{L}_0$ в $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$, определяется с использованием скалярного произведения

$$[\cdot, \cdot] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cdot, \cdot]_T ds, \quad (\text{X.169})$$

где $[\cdot, \cdot]_T$ определяется как в гл. IX с использованием операции интегрирования по t . Имеем

$$[\mathcal{L}_0 a, b] = [a, \mathcal{L}_0^* b]$$

для всех a, b из $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$ и

$$\mathcal{L}_0^* = \omega_0 \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} + f_a^*(t) = \omega_0 \frac{\partial}{\partial s} + J_0^*, \quad (\text{X.170})$$

где оператор J_0^* определяется как и в §§ IX. 2—4.

Теперь определим $z^*(t, s) = e^{is} \bar{z}^*(t)$ и предположим, что

$$\mathcal{L}_0 y(t, s) = h(t, s), \quad h(\cdot, \cdot) \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}. \quad (\text{X.171})_1$$

Тогда решение $y(t, s)$, $y(\cdot, \cdot) \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}$ существует, если только

$$[h, z^*] = [h, \bar{z}^*] = 0. \quad (\text{X.171})_2$$

Условия (X.171)₂ являются также достаточными для разрешимости в случае, когда $h(t, s)$ представима в виде конечного ряда Фурье по s . В общем случае в (X.171)₁ возникает «проблема малых знаменателей», и разрешимость может быть гарантирована, если на

$h(\cdot, \cdot)$ и ω_0 наложить более сильные условия и потребовать выполнения одного диофантова условия. Условия (X.171) выражают альтернативу Фредгольма для разрешимости приводимых ниже условий для определения коэффициентов рядов (X.166). Если $h(t, s)$ — вещественная функция, то одно из условий (X.171)₂ следует из другого.

Подставляя ряды (X.166) в (X.1) и приравнявая в левой и правой частях получаемого уравнения коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем уравнения

$$0 = \mathcal{L}_0 u_1, \quad (\text{X.172})$$

$$0 = \mathcal{L}_0 u_2 + f_{uu}(t | u_1 | u_1), \quad (\text{X.173})$$

$$3\omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial s} = \mathcal{L}_0 u_3 + 3\mu_2 f_{u\mu}(t | u_1) + 3f_{uu}(t | u_1 | u_2) + f_{uuu}(t | u_1 | u_1 | u_1) = 0, \quad (\text{X.174})$$

а для $p > 3$

$$p\omega_{p-1} \frac{\partial u_1}{\partial s} = \mathcal{L}_0 u_p + p\mu_{p-1} f_{u\mu}(t | u_1) + pf_{uu}(t | u_1 | u_{p-1}) + g_p, \quad (\text{X.175})$$

где g_p зависит от членов более низкого порядка, чем $p-1$. Каждое из этих уравнений решаем относительно $u_p(t, s)$, $u_p(\cdot, \cdot) \in \mathcal{P}_T, 2\pi$, ω_{p-1} и μ_{p-1} .

Из альтернативы Фредгольма (X.171)₂ для $\mathcal{L}_0$ следует, что уравнение (X.173) разрешимо, если

$$[f_{uu}(t | u_1 | u_1), z^*] = 0. \quad (\text{X.176})$$

Напомним, что $[\cdot, \cdot]$ определяется формулой (X.169) как интеграл по t и s . Уравнение (X.174) разрешимо, если

$$3\omega_2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial s}, z^* \right] = 3\mu_2 [f_{u\mu}(t | u_1), z^*] + [\{ 3f_{uu}(t | u_1 | u_2) + f_{uuu}(t | u_1 | u_1 | u_1) \}, z^*], \quad (\text{X.177})$$

а условие разрешимости уравнения (X.175) имеет вид

$$p\omega_{p-1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial s}, z^* \right] = p\mu_{p-1} [f_{u\mu}(t | u_1), z^*] + [\{ pf_{uu}(t | u_1 | u_{p-1}) + g_p \}, z^*]. \quad (\text{X.178})$$

Покажем теперь, что

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial s}, z^* \right] = i, \quad [f_{u\mu}(t | u_1), z^*] = \sigma_\mu(0), \quad \operatorname{Re} \sigma_\mu(0) \neq 0 \quad (\text{X.179})$$

и что $u_1, u_2, u_3, \dots, \mu_2, \omega_2, \dots, \mu_9, \omega_9, \dots$ можно вычислять последовательно. В самом деле, равенства (X.179) показывают, что уравнения (X.177) и (X.178) можно разрешить относительно μ_{2l} и ω_{2l} , если найдены функции u_n .

Представим снова $u(t, s, \varepsilon)$ в виде разложения

$$u(t, s, \varepsilon) = \varepsilon [z(t, s) + \bar{z}(t, s)] + w(t, s, \varepsilon), \quad (X.180)_1$$

где

$$\varepsilon = [u, z^*], \quad [w, z^*] = [w, \bar{z}^*] = 0, \quad (X.180)_2$$

а $w = (\varepsilon^2/2) w_2 + (\varepsilon^3/3!) w_3 + \dots$. Можно считать ε вещественным, потому что если бы коэффициент при z в (X.180) был комплексным, то мы могли бы взять другое определение переменной z , представленной формулой (X.168), делая такой перенос начала отсчета координаты s , чтобы коэффициент при новой переменной z в (X.180) был вещественным. Разложение (X.180) сводит (X.179) и (X.172) к тождествам, а уравнение (X.173) принимает вид

$$\mathcal{L}_0 w_2 + f_{uu}(t | u_1 | u_1) = 0. \quad (X.181)$$

Легко проверить, что если $u_1 = z + \bar{z}$, то условие разрешимости (X.176) выполняется и мы можем найти w_2 . В самом деле, функцию $w_2(\cdot, \cdot) \in P_{T, 2\pi}$ можно разложить в ряд Фурье

$$w_2(t, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_{2k}(t) e^{iks},$$

который вместе с (X.181) и $u_1 = e^{is}\xi + e^{-is}\bar{\xi}$ дает

$$\begin{aligned} (J_0 - 2i\omega_0) w_{2, 2} + f_{uu}(t | \xi | \xi) &= 0, \\ (J_0 + 2i\omega_0) w_{2, -2} + f_{uu}(t | \bar{\xi} | \bar{\xi}) &= 0, \\ J_0 w_{20} + 2f_{uu}(t | \xi | \bar{\xi}) &= 0, \end{aligned} \quad (X.182)$$

а $w_{2k}(t) = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0, \pm 2$.

Возвращаясь теперь к уравнению (X.177) и используя (X.179) и (X.180), находим, что

$$3\mu_2 \sigma_\mu(0) - 3i\omega_2 + [3f_{uu}(t | u_1 | w_2) + f_{uuu}(t | u_1 | u_1 | u_1), z^*] = 0. \quad (X.183)$$

Поэтому

$$\mu_2 \sigma_\mu(0) - i\omega_2 + [f_{uu}(t | \xi | w_{2, 0}) + f_{uu}(t | \bar{\xi} | w_{2, 2}) + f_{uuu}(t | \xi | \xi | \xi), \xi^*]_T = 0, \quad (X.184)$$

а так как $\operatorname{Re} \sigma_\mu(0) \neq 0$, то комплексное уравнение (X.184) можно разрешить относительно μ_2 и ω_2 .

Если μ_2 и ω_2 заданы, то уравнение (X.174) можно решить относительно w_3 и найти, что

$$w_3(t, s) = w_{3, 3}(t) e^{3is} + w_{3, 1}(t) e^{is} + \bar{w}_{3, 1}(t) e^{-is} + \bar{w}_{3, 3}(t) e^{-3is}, \quad (X.185)$$

где

$$[w_{s, i}, \xi^*]_T = 0.$$

Оставляем читателю в качестве упражнения определение функций $w_{s, k}$ и членов более высокого порядка.

Дополнение X.3. Прямое построение асимптотически квазипериодических решений, отвечающих в рациональных точках более высокого порядка, методом двух временных переменных

Теперь мы будем решать уравнение (X.1), когда отношение частот в критической точке $\omega_0 T / (2\pi) = m/n$ представляет собой рациональное число и $n \geq 5$. В § X.11 было показано, что решения на бифуркационном торе имеют вид

$$u(t) = \sum_{p+q \geq 1} R(e, t, [\omega_0 + e^2 \Theta(e^2)]t)^{p+q} \exp(i(p-q)([\omega_0 + e^2 \Theta(e^2)]t + H(e, t, [\omega_0 + e^2 \Theta(e^2)]t))) u_{pq}(t, \mu(e^2)) \quad (X.186)$$

с точностью до членов более высокого порядка. Здесь $R(e, t, s)$ и $H(e, t, s)$ представляют собой функции, T -периодические по t и $2\pi/n$ -периодические по s , тогда как u_{pq} T -периодична по t , а $\exp(i(p-q)s)$ 2π -периодична по s . Это решение указывает, что можно искать решения вида $u(t, s)$, где u — дважды периодическая функция, T -периодическая по t и 2π -периодическая по s , при этом $s = (\omega_0 + e^2 \Theta(e^2))t$. В обозначениях (X.186) имеем

$$\begin{aligned} R(e, t, s) &= e + e^{n-3} R_{n-3}(t, s) + \dots, \\ H(e, t, s) &= e^{n-4} H_{n-4}(t, s) + \dots, \\ \Theta(e^2) &= \Omega_0 + O(e^2), \\ \mu(e^2) &= \frac{\mu_2}{2} e^2 + O(e^4), \\ u_{10}[t, \mu(e^2)] &= \zeta(t) + O(e^2), \\ u_{01} &= \bar{u}_{10}. \end{aligned} \quad (X.187)$$

Заметим, что каждую дважды периодическую функцию u из $\mathbb{R}_{T, 2\pi}$ можно записать в виде

$$u(t, s) = \tilde{u}(t', s') = u(t', s' + \omega_0 t'). \quad (X.188)$$

Поэтому $\tilde{u}$ принадлежит $\mathbb{R}_{nT, 2\pi}$. Однако, напротив, функции из $\mathbb{R}_{nT, 2\pi}$ не обязательно принадлежат $\mathbb{R}_{T, 2\pi}$, даже после замены переменных. Это маленькое замечание тем не менее полезно для построения в $\mathbb{R}_{T, 2\pi}$ альтернативы Фредгольма.

Следуя обозначениям дополнения X.2, определим оператор

$$\mathcal{L}_0 = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial s} + J_0 \quad (\text{X.189})$$

в пространстве $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$. В настоящем случае ядро оператора $\mathcal{L}_0$ бесконечномерно. Чтобы это показать, разложим $u(t, s)$ в ряд Фурье по s ,

$$u(t, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) e^{iks}.$$

Тогда из уравнения $\mathcal{L}_0 u = 0$ следует, что

$$(J_0 - ik\omega_0) u_k = 0,$$

и u_k может быть отлична от нуля, только если $k = \pm 1 + ln$, $l \in \mathbb{Z}$. Поэтому u имеет вид

$$u(t, s) = \sum_l u_{1+ln} \exp((1+ln)is - iln\omega_0 t) \xi(t) + \\ + \sum_l u_{-1+ln} \exp((-1+ln)is - iln\omega_0 t) \bar{\xi}(t).$$

Поэтому общий вид ядра (или нуль-пространства) оператора $\mathcal{L}_0$ имеет вид

$$u(t, s) = e^{is} \alpha(s - \omega_0 t) \xi(t) + e^{-is} \beta(s - \omega_0 t) \bar{\xi}(t), \quad (\text{X.190})$$

где α и β суть произвольные $2\pi/n$ -периодические функции от s .

Чтобы подготовить альтернативу Фредгольма для $\mathcal{L}_0$ в $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$, введем новые переменные

$$t' = t, \quad s' = s - \omega_0 t$$

и запишем $u(t, s) = \tilde{u}(t', s')$, где теперь $\tilde{u}$ принадлежит $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$. Нам нужно решить уравнение

$$\mathcal{L}_0 u = h \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}, \quad (\text{X.191})$$

которое теперь можно представить в форме

$$\mathbb{J} \tilde{u} = \tilde{h} \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}, \quad (\text{X.192})$$

потому что

$$-\frac{\partial}{\partial t'} = -\omega_0 \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Линейный оператор $\mathbb{J}$ совпадает с оператором, использованным в гл. IX, за исключением того, что в (X.192) s' рассматривается как параметр. Поэтому условия совместности имеют вид

$$[\tilde{h}(\cdot, s'), Z^*]_{nT} = [\tilde{h}(\cdot, s'), \bar{Z}^*]_{nT} = 0, \quad (\text{X.193})$$

где напоминаем, что

$$Z(t) = e^{i\omega_0 t} \xi(t), \quad Z^*(t) = e^{i\omega_0 t} \xi^*(t)$$

являются нуль-векторами операторов $\mathbb{J}$, $\mathbb{J}^*$ в $\mathbb{P}_{nT}$. Нам известно, что (X.192) имеет решения $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{P}_{nT, 2\pi}$, которые можно сделать единственными за счет наложения дополнительных условий вида

$$[\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, s'), \mathbf{Z}^*]_{nT} = [\tilde{\mathbf{u}}(\cdot, s'), \bar{\mathbf{Z}}^*]_{nT} = 0. \quad (\text{X.194})$$

Из условий (X.193) следует, что коэффициенты ряда Фурье

$$\mathbf{h}(t, s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{h}_k(t) e^{iks}$$

удовлетворяют условиям ортогональности вида

$$\begin{aligned} [\mathbf{h}_k, \xi^*]_T &= 0 \text{ для } k = 1 + ln, l \in \mathbb{Z}, \\ [\mathbf{h}_k, \bar{\xi}^*]_T &= 0 \text{ для } k = -1 + ln, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Теперь мы должны проверить, что решение $\tilde{\mathbf{u}}$ уравнения (X.192) таково, что $\tilde{\mathbf{u}}(t', s') = \tilde{\mathbf{u}}(t, s - \omega_0 t)$ является T -периодической функцией t . В этом случае уравнение (X.191) будет разрешимо.

В самом деле, легко видеть, что $\tilde{\mathbf{u}}(t' + T, s' - \omega_0 T)$ является решением уравнения (X.192) с той же самой функцией $\tilde{\mathbf{h}}$, потому что

$$\mathbf{h}(t, s) = \mathbf{h}(t + T, s) = \tilde{\mathbf{h}}(t' + T, s' - \omega_0 T) = \tilde{\mathbf{h}}(t', s'),$$

а оператор $\mathbb{J}$ имеет T -периодические коэффициенты. Кроме того, так как $\tilde{\mathbf{u}}(t' + T, s' - \omega_0 T)$ является единственным решением уравнения (X.194), то

$$\tilde{\mathbf{u}}(t' + T, s' - \omega_0 T) = \tilde{\mathbf{u}}(t', s')$$

и $\mathbf{u}(t, s - \omega_0 t)$ принадлежит $\mathbb{P}_{T, 2\pi}$.

Теперь ищем решение в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t, s, \varepsilon) &= \varepsilon \mathbf{u}_1(t, s) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \mathbf{u}_2(t, s) + \frac{\varepsilon^3}{3!} \mathbf{u}_3(t, s) + \dots, \\ \mu(\varepsilon) &= \frac{\mu_2}{2!} \varepsilon^2 + \frac{\mu_4}{4!} \varepsilon^4 + \dots, \\ \tilde{\omega}(\varepsilon) &= \omega_0 + \frac{\varepsilon^2}{2!} \tilde{\omega}_2 + \frac{\varepsilon^4}{4!} \tilde{\omega}_4 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{X.195})$$

где $\mathbf{u}_k \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}$, μ и $\tilde{\omega}$ суть четные функции ε , а $\tilde{\omega}_2/2 = \Omega_0$ предполагается отличным от нуля для того, чтобы устранить субгармоническую бифуркацию, как в § X.13. Для упрощения записи мы предположили, что в разложениях $\mu(\varepsilon)$ и $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ коэффициенты при нечетных степенях ε равны нулю. Это утверждение доказывается легко. Чтобы решить уравнение (X.1), положим $s = \tilde{\omega}(\varepsilon) t$ в $\mathbf{u}(t, s, \varepsilon)$ и получим функцию

$$t \mapsto \mathbf{u}(t, \tilde{\omega}(\varepsilon) t, \varepsilon),$$

представляющую собой решение уравнения (X.1) вида (X.186). Тогда приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε в уравнении

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \tilde{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} = \mathbf{f}(t, \mu, \mathbf{u}) \quad (\text{X.196})$$

приводит к уравнениям

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{u}_1 = 0, \quad (\text{X.197})$$

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{u}_2 + \mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) = 0, \quad (\text{X.198})$$

$$\mathcal{L}_0 \mathbf{u}_3 - 3\tilde{\omega}_2 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial s} + 3\mu_2 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_1) + 3\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) + \mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) = 0, \quad (\text{X.199})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \mathbf{u}_4 - 6\tilde{\omega}_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial s} + 6\mu_2 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_2) + 4\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_3) + 3\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2) + \\ + 6\mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) + 6\mu_2 \mathbf{f}_{uu\mu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1) = 0, \end{aligned} \quad (\text{X.200})$$

а для $p > 4$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \mathbf{u}_p - p\tilde{\omega}_{p-1} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial s} - \frac{p(p-1)}{2} \left[\tilde{\omega}_2 \frac{\partial \mathbf{u}_{p-2}}{\partial s} + \tilde{\omega}_{p-2} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial s} \right] + \\ + p\mu_{p-1} \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_1) + p\mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_{p-1}) + \\ + \frac{p(p-1)}{2} [\mu_2 \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_{p-2}) + \mathbf{f}_{uuu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_{p-2}) + \\ + \mathbf{f}_{uu}(t | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_{p-2}) + \mu_{p-2} \mathbf{f}_{u\mu}(t | \mathbf{u}_2) + \\ + \mu_{p-2} \mathbf{f}_{uu\mu}(t | \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1)] + \mathbf{g}_p = 0, \end{aligned} \quad (\text{X.201})$$

где $\mathbf{g}_p$ зависит от членов более низкого порядка, чем $p-2$. Мы будем последовательно решать эту систему уравнений относительно $\tilde{\omega}_p$, μ_p , $\mathbf{u}_p \in \mathcal{P}_{T, 2\pi}$. Чтобы показать, как это делается, начнем с решения нескольких первых уравнений.

Условия совместности (X.193) уравнений (X.198—200) приводят к соотношениям

$$[\mathbf{f}_{uu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1), \mathbf{Z}^*(t')]_{nT} = 0 \text{ (интегрирование по } t'), \quad (\text{X.202})$$

$$\begin{aligned} 3\tilde{\omega}_2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial s}, \mathbf{Z}^*(t') \right]_{nT} = 3\mu_2 [\mathbf{f}_{u\mu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1), \mathbf{Z}^*(t')]_{nT} + \\ + [3\mathbf{f}_{uu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_2) + \mathbf{f}_{uuu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1), \mathbf{Z}^*(t')]_{nT}, \end{aligned} \quad (\text{X.203})$$

$$\begin{aligned} 6\tilde{\omega}_2 \left[\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial s}, \mathbf{Z}^*(t') \right]_{nT} = 6\mu_2 [\mathbf{f}_{u\mu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_2), \mathbf{Z}^*(t')]_{nT} + \\ + [4\mathbf{f}_{uu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_3) + 3\mathbf{f}_{uu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_2 | \tilde{\mathbf{u}}_2) + 6\mathbf{f}_{uuu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_2), \mathbf{Z}^*(t')]_{nT} + \\ + 6\mu_2 [\mathbf{f}_{uu\mu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1), \mathbf{Z}^*(t')]_{nT}. \end{aligned} \quad (\text{X.204})$$

В этих уравнениях использовано обозначение

$$u(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{u}(t', s'),$$

где $t = t'$, $s = s' + \omega_0 t'$ для любой функции u из $P_{T, 2\pi}$.

Представим $u_p \in P_{T, 2\pi}$ в форме следующего разложения:

$$u(t, s, \varepsilon) = \varepsilon [e^{is}\alpha(s - \omega_0 t, \varepsilon) \xi(t) + e^{-is}\bar{\alpha}(s - \omega_0 t, \varepsilon) \bar{\xi}(t)] + \varepsilon^2 w(t, s, \varepsilon), \quad (X.205)$$

где α — это $2\pi/n$ -периодическая функция по своему аргументу и где

$$[\bar{w}(t', s', \varepsilon), Z^*(t')]_{nT} = 0 \text{ (интегрирование по } t'). \quad (X.206)$$

Отметим, что

$$\tilde{u}(t', s', \varepsilon) = \varepsilon (e^{is'}\alpha(s', \varepsilon) Z(t') + e^{-is'}\bar{\alpha}(s', \varepsilon) \bar{Z}(t')) + \varepsilon^2 \tilde{w}(t', s', \varepsilon), \quad (X.207)$$

$$\tilde{u}_p(t', s') = p [e^{is'}\alpha_{p-1}(s') Z(t') + e^{-is'}\bar{\alpha}_{p-1}(s') \bar{Z}(t')] + p(p-1) \tilde{w}_{p-2}(t', s'), \quad (X.208)$$

где все α_p суть $2\pi/n$ -периодические функции по s' .

Разложение будет единственным, если потребовать, чтобы

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\tilde{u}(t', s', \varepsilon), Z^*(t')]_{nT} e^{-is'} ds'. \quad (X.209)$$

Это следует из вида ядра оператора $\mathcal{L}_0^*$. Отсюда получаем условие

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(s', \varepsilon) ds' = 1.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_0(s') ds' = 1, \quad \int_0^{2\pi} \alpha_p(s') ds' = 0, \quad p \geq 1. \quad (X.210)$$

Возвращаясь к системам (X.197—201) и (X.202—204), находим решение уравнения (X.197) в форме

$$\tilde{u}_1(t', s') = \alpha_0(s') e^{is'} Z(t') + \bar{\alpha}_0(s') e^{-is'} \bar{Z}(t'), \quad (X.211)$$

где среднее значение функции α_0 равно 1 и она является $2\pi/n$ -периодической, а условие (X.202) автоматически выполняется, так как $n \neq 1, 3$ (см. гл. IX). Поэтому альтернатива Фредгольма гарантирует существование решения $u_2 \in P_{T, 2\pi}$ уравнения (X.198) вплоть до членов, входящих в ядро оператора $\mathcal{L}_0$, т. е. функция w_0 опреде-

ляется. Мы нашли, что в $\mathbb{P}_{nT, 2\pi}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{J} 2\tilde{w}_0 + \alpha_0^2(s') \exp(2i(s' + \omega_0 t')) f_{uu}(t' | \xi(t') | \xi(t')) + \\ & + \bar{\alpha}_0^2(s') \exp(-2i(s' + \omega_0 t')) f_{uu}(t' | \xi(t') | \bar{\xi}(t')) + \\ & + 2|\alpha_0(s')|^2 f_{uu}(t' | \xi(t') | \bar{\xi}(t')) = 0, \end{aligned} \quad (X.212)$$

поэтому

$$\begin{aligned} 2\tilde{w}_0 = & \alpha_0^2(s') \exp(2i(s' + \omega_0 t')) w_{01} + \\ & + \bar{\alpha}_0^2(s') \exp(-2i(s' + \omega_0 t')) \bar{w}_{01} + |\alpha_0(s')|^2 w_{02}, \end{aligned} \quad (X.213)$$

где $w_{01}(t')$, $w_{02}(t')$ суть T -периодические функции,

$$\begin{aligned} & \mathbb{J}(w_{01} e^{2i\omega_0 t'}) + f_{uu}(t' | \xi | \xi) e^{2i\omega_0 t'} = 0, \\ & \mathbb{J}(w_{02}) + 2f_{uu}(t' | \xi | \bar{\xi}) = 0, \end{aligned}$$

при этом w_{01} и w_{02} в точности совпадают с T -периодическими функциями, которые фигурируют в (IX.79). Отметим, что $w_0 \in \mathbb{P}_{T, 2\pi}$.

Теперь обратимся к условию (X.203). Для вычислений нам понадобятся следующие тождества:

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}_p}{\partial s'}, Z^* \right]_{nT} = p \frac{d}{ds'} (\alpha_{p-1}(s') e^{is'}) = p e^{is'} \left[\frac{d\alpha_{p-1}(s')}{ds'} + i\alpha_{p-1}(s') \right], \quad (X.214)$$

$$[f_{uu}(t' | \tilde{u}_p), Z^*]_{nT} = p \sigma_\mu(0) \alpha_{p-1}(s') e^{is'} + p(p-1) [f_{uu}(t' | \tilde{w}_{p-2}), Z^*]_{nT}, \quad (X.215)$$

$$[f_{uu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_p), Z^*]_{nT} = p(p-1) [f_{uu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{w}_{p-2}), Z^*]_{nT}. \quad (X.216)$$

Теперь (X.203) можно записать в виде

$$\begin{aligned} 3\tilde{\omega}_2 \left(\frac{d\alpha_0}{ds'} + i\alpha_0 \right) = & 3\mu_2 \sigma_\mu(0) \alpha_0 + e^{-is'} [3f_{uu}(t' | \tilde{u}_1 | 2\tilde{w}_0) + \\ & + f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1), Z^*(t')]_{nT}. \end{aligned} \quad (X.217)$$

Имеют место также тождества:

$$\begin{aligned} [f_{uu}(t' | \beta Z + \bar{\beta} \bar{Z} | 2\tilde{w}_0), Z^*]_{nT} = & \beta |\alpha_0|^2 [f_{uu}(t' | \xi | \tilde{w}_{02}), \xi^*(t')]_T = \\ = & \bar{\beta} \alpha_0^2 e^{2is'} [f_{uu}(t' | \bar{\xi} | w_{01}), \xi^*(t')]_T, \end{aligned} \quad (X.218)$$

$$\begin{aligned} [f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1 | \beta Z + \bar{\beta} \bar{Z}), Z^*]_T = \\ = & (2\beta |\alpha_0|^2 + \bar{\beta} \alpha_0^2 e^{2is'}) [f_{uuu}(t' | \xi | \xi | \bar{\xi}), \xi^*]_T, \end{aligned} \quad (X.219)$$

и (X.217) приводит к соотношению

$$\tilde{\omega}_2 \left(\frac{d\alpha_0}{ds'} + i\alpha_0 \right) = \mu_2 \sigma_\mu(0) \alpha_0 + \Lambda_2 \alpha_0 |\alpha_0|^2, \quad (X.220)$$

где Λ_2 — величина, содержащая скалярные произведения в $\mathbb{P}_T$ и определенная формулой (IX.80). Единственным возможным периодическим решением уравнения (X.220) со средним значением 1 является

$$\alpha_0 = 1 \quad (X.221)$$

и оно приводит к соотношению

$$i\tilde{\omega}_2 = \mu_2 \sigma_\mu(0) + \Lambda_2, \quad (\text{X.222})$$

которое в точности совпадает с условием (X.157) и определяет μ_2 и $\tilde{\omega}_2$.

Упражнение

Х.3. Умножая (X.220) на $\bar{\alpha}_0$ и складывая его с комплексно-сопряженным уравнением, докажете, что $|\alpha_0|^2 = \text{const}$. Затем проинтегрируйте (X.220) в пределах периода, чтобы найти соотношение между коэффициентами, необходимое для получения отличного от нуля периодического решения. После этого придите к заключению, что $\alpha_0 = 1$ есть единственное решение со средним значением, равным единице.

Отметим, что если положить $\tilde{\omega}_2 = 0$, то уравнение (X.222), вообще говоря, неразрешимо. В (IX.101) это обстоятельство было использовано для того, чтобы показать, что бифуркация в субгармонические решения в рациональных точках ($n \geq 5$) возможна лишь при исключительных обстоятельствах.

При выполнении условия (X.203) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_1(t', s') &= e^{is't'} \mathbf{Z}(t') + e^{-is't'} \bar{\mathbf{Z}}(t'), \\ \tilde{\mathbf{u}}_2(t', s') &= 2[e^{is't'} \alpha_1(s') \mathbf{Z}(t') + e^{-is't'} \bar{\alpha}_1(s') \bar{\mathbf{Z}}(t')] + 2\tilde{\mathbf{w}}_0(t', s'), \\ 2\tilde{\mathbf{w}}_0 &= \exp(2i(s' + \omega_0 t')) \mathbf{w}_{01}(t') + \\ &\quad + \exp(-2i(s' + \omega_0 t')) \bar{\mathbf{w}}_{01}(t') + \mathbf{w}_{02}(t'), \end{aligned} \quad (\text{X.223})$$

где μ_2 , $\tilde{\omega}_2$ — известные постоянные, а $\mathbf{w}_{0j}$ — известные T -периодические функции; α_1 есть подлежащая определению $2\pi/n$ -периодическая функция, среднее значение которой равно нулю. Обращаясь к уравнению (X.199), получаем

$$\mathbb{J}6\tilde{\mathbf{w}}_1 + 6\mathbf{f}_{uu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | e^{is't'} \alpha_1(s') \mathbf{Z}(t') + e^{-is't'} \bar{\alpha}_1(s') \bar{\mathbf{Z}}(t')) + \mathbf{R} = 0, \quad (\text{X.224})$$

где

$$\mathbf{R} = 3\mu_2 \mathbf{f}_{u\mu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1) + 3\tilde{\omega}_2 \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_1}{\partial s'} + 3\mathbf{f}_{uu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | 2\tilde{\mathbf{w}}_0) + \mathbf{f}_{uuu}(t' | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1 | \tilde{\mathbf{u}}_1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 6\tilde{\mathbf{w}}_1 &= 6\alpha_1(s') \exp(2i(s' + \omega_0 t')) \mathbf{w}_{01}(t') + \\ &\quad + 6\bar{\alpha}_1(s') \exp(-2i(s' + \omega_0 t')) \bar{\mathbf{w}}_{01}(t') + \\ &\quad + 3[\alpha_1(s') + \bar{\alpha}_1(s')] \mathbf{w}_{02}(t') - \mathbb{J}^{-1} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (\text{X.225})$$

Теперь условие совместности (X.204) позволяет нам определить $\alpha_1(s')$. Для нахождения α_1 используем тождества

$$[f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1), Z^*(t')]_{nT} = 0, \quad (X.226)$$

$$\begin{aligned} & [4f_{uu}(t' | \tilde{u}_1 | 6\tilde{w}_1) + 3f_{uu}(t' | \tilde{u}_2 | \tilde{u}_2) + 6f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_2), Z^*(t')]_{nT} = \\ & = 12\Lambda_2 e^{is'} [2\alpha_1(s') + \bar{\alpha}_1(s')] - 4[f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \mathbb{J}^{-1}\mathbf{R}), Z^*(t')]_{nT} + \\ & + 12[f_{uu}(t' | \tilde{w}_0 | \tilde{w}_0) + f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1 | \tilde{w}_0), Z^*(t')]_{nT}. \end{aligned} \quad (X.227)$$

Тогда условие (X.204) приводит к соотношению

$$\tilde{\omega}_2 \left(\frac{d\alpha_1}{ds'} + i\alpha_1 \right) = \mu_2 \sigma_\mu(0) \alpha_1 + \Lambda_2 (2\alpha_1 + \bar{\alpha}_1) + P(s'), \quad (X.228)$$

где

$$\begin{aligned} P(s') = & e^{-is'} [f_{uu}(t' | \tilde{w}_0 | \tilde{w}_0) + f_{uuu}(t' | \tilde{u}_1 | \tilde{u}_1 | \tilde{w}_0), Z^*(t')]_{nT} - \\ & - \frac{1}{3} e^{-is'} [f_{uu}(t' | \tilde{u}_1 | \mathbb{J}^{-1}\mathbf{R}), Z^*(t')]_{nT}. \end{aligned}$$

Тщательное исследование функции $P(s')$ с использованием (X.223 — 225) показывает, что

$$P(s') \begin{cases} = P_5 e^{-5is'}, & \text{если } n=5, \\ \equiv 0, & \text{если } n > 5, \end{cases} \quad (X.229)$$

т. е. функция P является $2\pi/n$ -периодической с нулевым средним значением. Теперь соотношение (X.222) позволяет упростить уравнение (X.228) и представить его в форме

$$\tilde{\omega}_2 \frac{d\alpha_1}{ds'} = \Lambda_2 (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1) + P(s'). \quad (X.230)$$

Упражнения

Х.4. Покажите, что уравнение (X.230) имеет единственное $(2\pi/n)$ -периодическое по s' решение с нулевым средним значением. (Указание: см. дополнение Х.1. Выведите, что u_2 и w_1 поэтому полностью и единственным образом определяются и принадлежат $\mathcal{P}_{T, 2\pi}$. (Указание: см. (X.225).) Докажите, что на каждом шаге последовательного вычисления $u_p, \mu_p, \tilde{w}_p$ необходимо решать некоторое дифференциальное уравнение вида (X.230) относительно $\alpha_p, p \geq 1$, правая часть которого является $2\pi/n$ -периодической и имеет среднее значение, равное нулю.

Х.5. Пусть $r = \omega_0 T / (2\pi) = m/n$ — рациональное число. Покажите, что

$$|\gamma_{pql}(0)| \leq \frac{nT |b_{pql}(0)|}{2\pi}.$$

Предположим теперь, что r — иррациональное число. Покажите, что не существует числа C , не зависящего от p, q и $l, p \neq q+1$, такого, что

$$|\gamma_{pql}(0)| \leq C |b_{pql}(0)|.$$

Отсюда выведите заключение о том, что в иррациональном случае существуют большие коэффициенты $|\gamma_{pql}(0)|$ (малые знаменатели).

Замечания

Установленные в настоящей главе результаты описывают динамику задач в $\mathbb{R}^n$, и многие наблюдаемые особенности поведения континуума решений в бесконечномерных пространствах (пространствах Банаха), которые таковы, что на самом деле динамика происходит в двумерных пространствах, получаемых в результате проектирования. (Здесь, в сущности, мы имеем дело с трехмерным пространством, третьим измерением которого служит время t .) Такие задачи возникают, например, в динамике жидкости для малых систем, где понятие «малые» используется для разделения собственных значений спектра линейного оператора задачи. Обзор некоторых таких задач приведен в книге под редакцией Суинни и Голлуба (H. Swinney, J. Gollub, *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence, Topics in Current Physics*, New York—Heidelberg—Berlin: Springer-Verlag, 1980), посвященной механике жидкости. Вообще говоря, мы получаем последовательности бифуркаций в стационарные симметрично-распадающиеся решения, в периодические по времени решения и в субгармонические и асимптотические квазипериодические решения на торе. Синхронизация (захват) частоты также наблюдается в некоторых экспериментах, связанных с движениями жидкости, и в классических экспериментах с камертонами и электрическими контурами.

Мы признательны А. Ченсилеру за ценные обсуждения природы потока на T^2 .

Историческое значение. По-видимому, Ю. Неймарк впервые сформулировал теорему об инвариантных торах, которые ответвляются от периодического решения (или инвариантных циклах, которые ответвляются от неподвижных точек отображений, таких как отображение Пуанкаре). Он не привел доказательства своего результата и не указал ни одного результата о периодических решениях в точках сильного резонанса. Он исключил точки $n=1, 2, 3, 4$ сильного резонанса ($\lambda_0^n=1$), введя предположение о слабом притяжении нулевого решения в критической точке. Р. Дж. Сейкер дал первое доказательство существования инвариантных торов при условиях, исключающих точки сильного резонанса. Он также сделал некоторые частные замечания о том, что в таких резонансных точках могут появляться субгармонические решения. Результаты Сейкера вновь были получены Д. Рюэлем и Ф. Такенсом, которые ошибочно включили $n=5$ в исключительное множество точек сильного резонанса. В статье Рюэля и Такенса наиболее четко высказана основная идея о том, что «турбулентность» представляет собой свойство притягивающих множеств, которым могут обладать даже типичные уравнения в $\mathbb{R}^m$ с небольшим m ; в их работе $m=4$. Эта идея очень важна, потому что она означает, что даже после нескольких бифуркаций может иметь место хаотическое движение. Основные результаты о бифуркационных субгармонических решениях в точках сильного резонанса в формулировке гл. IX были доказаны Йоссом и Джозефом (1977), см. цитированную выше работу. Пуанкаре исследовал случай субгармонической бифуркации с $n=1$. Уэйн (Y. N. Wan) доказал, что тор ответвляется, когда $\lambda_0^1=1$ и отсутствует $4T$ -периодическая бифуркация. Оригинальный метод исследования всех резонансных случаев предложен В. И. Арнольдом. Арнольд вводит два параметра и развивает некоторые предположения, основанные на двухпараметрическом анализе, чтобы объяснить синхронизацию (захват) частоты.

ВТОРИЧНАЯ СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ (ТИПА ХОПФА) В АВТОНОМНОМ СЛУЧАЕ

В гл. IX и X были рассмотрены задачи устойчивости и бифуркации решения $u=0$ эволюционной задачи, приведенной к локальной форме, $\dot{u}=f(t, \mu, u)=f(t+T, \mu, u)$. В § 1.3 мы показали, как приведенная задача возникает при исследовании нетривиальных T -периодических решений $U(t)=U(t+T)$ эволюционных задач вида

$$\dot{U}=F(t, \mu, U)=F(t+T, \mu, U), \quad (XI.1)_1$$

где $U=0$ не является решением, потому что

$$F(t, \mu, 0)=F(t+T, \mu, 0) \neq 0. \quad (XI.1)_2$$

Для такого типа задач внешняя среда влияет на динамическую систему, описываемую уравнением $(XI.1)_1$, через наложенное условие $(XI.1)_2$. Такая динамическая система воспринимает внешнюю среду как в точности T -периодическую и вынуждена приспособлять свою собственную эволюцию в соответствии с этим фактом.

Теперь мы хотим рассмотреть бифуркацию T -периодических решений в другом аспекте. Пусть имеется некоторое $T(\varepsilon)$ -периодическое ($T(\varepsilon)=2\pi/\omega(\varepsilon)$) бифуркационное решение $U(\omega(\varepsilon)t, \varepsilon)=\tilde{U}(\mu(\varepsilon))+u(\omega(\varepsilon)t, \varepsilon)=U(\omega(\varepsilon)t+2\pi, \varepsilon)$ автономной задачи

$$\frac{du}{dt}=F(\mu, \tilde{U}+u)=f(\mu, u),$$

$$F(\mu, \tilde{U})=0,$$

для которой

$$F(\mu, 0) \neq 0.$$

На самом деле функции $u(\omega(\varepsilon)t, \varepsilon)$, $\omega(\varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$, определяющие периодическое бифуркационное решение (решение Хопфа), в точности совпадают с функциями, которые были изучены в гл. VII и VIII. Нас интересует потеря устойчивости и вторичная бифуркация решения $U(\omega(\varepsilon)t, \varepsilon)$. В сущности, нет необходимости предполагать, что U появляется в результате бифуркации. Достаточно, чтобы U представляло собой T -периодическое решение автономного уравнения, зависящего от некоторого параметра.

Задача, которая теперь составляет предмет нашего исследования— бифуркация периодических решений автономных задач,— очень близка

к задаче бифуркации нетривиальных T -периодических решений, которая была изучена в гл. IX и X. Будет показано, что качественные свойства вторичной бифуркации периодических решений автономных задач и свойства первичной бифуркации нетривиальных T -периодических решений почти одни и те же. В обеих задачах мы находим субгармоническую бифуркацию в nT -периодические решения в рациональных точках при¹⁾ $n = 1, 2, 3, 4$, а в других точках получаем бифуркацию в асимптотически квазипериодические решения или, если выполняются весьма специфические условия слабого резонанса, в субгармонические решения с периодами, соответствующими целым числам $n \geq 5$, а распределение устойчивости на ветвях решений является одним и тем же для обеих задач.

Однако эти две задачи тождественно не совпадают. В автономной задаче внешняя среда сообщает «максимально симметричную» информацию, т. е. стационарную информацию, и поэтому решения нечувствительны к выбору начала отсчета времени. В нетривиальной T -периодической задаче определенная структура временной симметрии, T -периодичность, навязывается извне, и решения нечувствительны только к сдвигу начала отсчета времени на период T . Одно следствие этого различия состоит в том, что субгармонические решения, которые появляются в результате вторичной бифуркации из решения Хопфа (автономный случай), имеют определенные периоды, которые (1) зависят от амплитуды и (2) близки к периодам $nT(\varepsilon)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) решения Хопфа (но не в точности с ними совпадают), если $|\varepsilon| \neq 0$ мало. В нетривиальной T -периодической задаче субгармонические решения являются в точности $\tau = nT$ -периодическими ($n = 1, 2, 3, 4$), где τ не зависит от амплитуды ε .

Второе следствие этого различия техническое и связано с тем обстоятельством, что $\dot{u}(s, \varepsilon)$ всегда является решением спектральной задачи (VIII.36), (VIII.38), связанной с анализом устойчивости решения Хопфа, и этому решению отвечает нулевое собственное значение. Это свойство имеет следующее значение. Бифуркационные решения $\{u(s + \delta, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \omega(\varepsilon)\}$ и $\{u(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), \omega(\varepsilon)\}$ эквивалентны при переносе на δ начала отсчета времени. Назовем δ *фазой* бифуркационного решения. Разность двух бифуркационных решений

$$\Theta(s, \varepsilon, \delta) = u(s + \delta, \varepsilon) - u(s, \varepsilon)$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon) \dot{\Theta} &= f(\mu(\varepsilon), u(s + \delta, \varepsilon)) - f(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon)) = \\ &= f_{\mu}(\mu(\varepsilon), u(s, \varepsilon)) \Theta + O(\|\Theta\|^2) \end{aligned}$$

и при $\delta \rightarrow 0$

$$\Theta(s, \varepsilon, \delta) \sim \dot{u}(s, \varepsilon) \delta.$$

¹⁾ Здесь n то же самое, что и в гл. IX.

Поэтому всегда можно избрать другой путь и, отправляясь от $u(s, \varepsilon)$, построить «бифуркационное» решение $u(s + \delta, \varepsilon)$, считая, что $\gamma(\varepsilon) = 0$ является алгебраически простым собственным значением оператора $\mathbb{J}(\varepsilon)$ с собственным вектором $\dot{u}(s, \varepsilon)$. При исследовании чисто бифуркационных задач необходимо избегать вычислений этих фазовых сдвигов, и в математическом отношении это мы делаем, требуя, чтобы чисто субгармонические бифуркационные решения отличались от фазовых сдвигов решения $u(s, \varepsilon)$. Математически это выражается условием (XI.48), смысл которого становится понятным после построения бифуркации на основе нашего метода.

Обозначения

В этой главе обозначения имеют много общего с обозначениями гл. IX. Некоторые незначительные отличия связаны с определениями

$$\hat{\omega}(\mu) t = s \quad (\text{см. § XI.1}),$$

$$\hat{\Omega}(\mu) t = s \quad (\text{см. § XI.8}),$$

которые требуются для вычисления частот $\hat{\omega}$ и $\hat{\Omega}$. Некоторые символы, которые были также использованы в гл. IX, а здесь имеют несколько другой смысл, суть

$$J_0 \text{ и } J_0^* \text{ в § XI.2,}$$

$$\mathbb{J} \text{ и } \mathbb{J}^* \text{ в § XI.4.}$$

Амплитуда α бифуркационного решения определяется по формуле (XI.45).

$$(\cdot)_n = \frac{\partial^n (\cdot)}{\partial \mu^n} \quad \text{при } \mu = \mu_0,$$

$$(\cdot)^n = \frac{\partial^n (\cdot)}{\partial \alpha^n} \quad \text{при } \alpha = 0,$$

(и.ч.б.н.п.) = известные члены более низкого порядка.

§ XI.1. Спектральные задачи

В нашем анализе вторичной бифуркации периодических решений автономных задач мы, по возможности, избегаем представления о том, что в некоторой точке бифуркации одно решение является основным, а другое второстепенным. По этой причине в основу нашего исследования мы не кладем эволюционное уравнение в локальной форме; вместо этого попытаемся охарактеризовать решение автономной задачи

$$\frac{dV}{dt} = F(\mu, V), \quad (\text{XI.2})$$

где предполагается, что $F(\cdot, \cdot)$ обладает требуемой степенью гладкости и $F(\mu, 0)$ не обязательно равно нулю. Мы будем изучать бифуркацию периодических решений уравнения (XI.1). Эти решения имеют вид

$$V = \hat{U}(\hat{\omega}(\mu)t, \mu) = \hat{U}(s, \mu) = \hat{U}(s + 2\pi, \mu), \quad (XI.3)$$

где $\hat{\omega}(\mu)$ — частота. Например,

$$\hat{U}(s, \mu) = \hat{U}(\mu) + \hat{u}(s, \mu)$$

может быть решением Хопфа гл. VIII: $\hat{u}(s, \mu) = u(s, \varepsilon)$, $\hat{\omega}(\mu) = \omega(\varepsilon)$, если $\mu = \mu(\varepsilon)$. Это решение удовлетворяет уравнению

$$\hat{\omega}(\mu) \frac{d\hat{U}}{ds} = F(\mu, \hat{U}). \quad (XI.4)$$

Отметим, что решение (XI.3) параметризовано посредством μ , а не ε .

Теперь наша цель — найти условия, при выполнении которых от решения (XI.3) ответвляются субгармонические решения. Чтобы изучить бифуркацию, нам нужно исследовать спектральную задачу, связанную с линейной теорией устойчивости решения (XI.3). Эта задача, приведенная к локальной форме, была рассмотрена в § VIII.4. Однако теперь нам нужно более глубоко изучить эту спектральную задачу и, в частности, нужно вывести такие формулы для строгой потери устойчивости решения Хопфа (XI.3), которые гарантировали бы существование бифуркации (см. § II.9).

Чтобы получить спектральную задачу, линеаризуем уравнение (XI.2) вблизи решения (XI.3):

$$V = \hat{U}(s, \mu) + v(t), \quad s = \hat{\omega}(\mu)t,$$

где

$$\frac{dv}{dt} = F_v(\mu, \hat{U}(s, \mu) | v).$$

Тогда из теории Флоке следует, что заключение об устойчивости решения $\hat{U}(s, \mu)$ можно сделать из анализа экспонент $\gamma(\mu) = \xi(\mu) + + i\eta(\mu)$ в представлении

$$v(t) = e^{\gamma t} \Gamma(s), \quad \Gamma(s) = \Gamma(s + 2\pi).$$

Эти экспоненты являются собственными значениями спектральной задачи

$$\gamma \Gamma = -\hat{\omega}(\mu) \frac{d\Gamma}{ds} + F_v(\mu, \hat{U}(s, \mu) | \Gamma). \quad (XI.5)$$

Мы имеем также сопряженную задачу на собственные значения

$$\bar{\gamma} \Gamma^* = \hat{\omega}(\mu) \frac{d\Gamma^*}{ds} + F_v^*(\mu, \hat{U}(s, \mu) | \Gamma^*), \quad (XI.6)$$

отвечающую скалярному произведению

$$[\cdot, \cdot]_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \cdot, \cdot \rangle ds,$$

где $F_v^*(\mu, \hat{U}(s, \mu) | \cdot)$ представляет собой единственный линейный оператор, удовлетворяющий соотношению

$$\langle F_v(\mu, \hat{U}(s, \mu) | a), b \rangle = \langle a, F_v^*(\mu, \hat{U}(s, \mu) | b) \rangle$$

для любых векторов a и b . Напомним, что для векторов из C^7 $\langle a, b \rangle = a \cdot \bar{b}$.

§ XI.2. Критическая точка и рациональные точки

В критической точке $\mu = \mu_0$

$$\xi(\mu_0) = 0, \quad \eta(\mu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0, \quad \hat{\omega}(\mu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0, \quad (X1.7)$$

$$\hat{U}(s, \mu_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_0(s),$$

$$J_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\omega_0 \frac{d}{ds} + F_v(\mu_0, U_0(s) | \cdot),$$

$$J^* \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \frac{d}{ds} + F_v^*(\mu_0, U_0(s) | \cdot),$$

где операторы J_0 и J_0^* действуют на 2π -периодические функции от s . Спектральные задачи в критической точке суть

$$i\eta_0 \Gamma_0 = J_0 \Gamma_0, \quad (X1.8)_1$$

$$-i\eta_0 \Gamma_0^* = J_0^* \Gamma_0^*. \quad (X1.8)_2$$

Если экспонента Флоке $i\eta_0$ представляет собой собственное значение оператора J_0 в критической точке, то $i(\eta_0 + l\omega_0)$, $l \in \mathbb{Z}$, также является собственным значением с собственным вектором $\hat{\Gamma}(s) = e^{-ils} \Gamma_0(s) = \hat{\Gamma}(s + 2\pi)$. Множитель Флоке в критической точке

$$\lambda_0 = \exp[\gamma(\mu_0) T(\mu_0)] = \exp \frac{i(\eta_0 + n\omega_0) 2\pi}{\omega_0} = \exp \left(\frac{2\pi i \eta_0}{\omega_0} \right) \quad (X1.9)$$

отображает повторяющиеся точки на мнимой оси комплексной γ -плоскости в единственные точки комплексной λ -плоскости. Можно получить единичную окружность на λ -плоскости, ограничив наше рассмотрение главной ветвью

$$0 \leq \frac{\eta_0}{\omega_0} < 1 \quad (X1.10)$$

комплексной γ -плоскости.

Будем говорить, что отношение

$$\frac{\eta_0}{\omega_0} = \frac{m}{n}, \quad (\text{XI.11})$$

удовлетворяющее неравенству (XI.10), принадлежит множеству рациональных точек, если m и n суть целые числа и $m=0$, если $n=1$; в противном случае $m \neq 0$. Множитель Флоке в критической точке является корнем n -й степени из единицы, если $\eta_0/\omega_0 = m/n$ — рациональная точка:

$$\lambda_0^n = (e^{2\pi i m/n})^n = 1. \quad (\text{XI.12})$$

§ XI.3. Предположения о спектре оператора J_0

Самые простые и наиболее типичные ситуации, приводящие к субгармонической бифуркации в самовозбуждаемые решения автономных задач, аналогичны ситуациям, приводящим к субгармоническим бифуркациям нетривиальных T -периодических задач, которые были описаны в гл. IX. Однако в автономном случае необходимо учитывать то обстоятельство, что $\Gamma = \dot{U}(s, \mu)$ удовлетворяет задаче (XI.5) для всех μ всякий раз, когда $\gamma(\mu) = 0$. В последней теореме, доказанной в § VIII.4, было показано, что $\gamma(\mu) = 0$ не может быть алгебраическим простым собственным значением.

Поэтому наиболее простые предположения о собственных значениях $\gamma(\mu_0) = i\eta_0$ оператора J_0 можно сформулировать следующим образом:

- I. $i\eta_0 = 0$ есть изолированное двойное собственное значение оператора J_0 ;
- II. $i\eta_0 = 0$ есть изолированное простое собственное значение оператора J_0 .

Если предположить, что $\eta_0/\omega_0 = m/n$, $m \neq 0$, то задачи (XI.8) принимают вид

$$\frac{i\omega_0 m}{n} \Gamma_0 \equiv J_0 \Gamma_0, \quad (\text{XI.13})_1$$

$$\frac{-i\omega_0 m}{n} \Gamma_0^* \equiv J_0^* \Gamma_0^*. \quad (\text{XI.13})_2$$

Тогда решение $v(t)$ линеаризованной задачи (XI.5) в критической точке дается формулой

$$v(t) = e^{\gamma(\mu_0) t} \Gamma_0(s) = e^{i(m/n)\omega_0 t} \Gamma_0(s) = e^{i(m/n)s} \Gamma_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} Z(s) = Z(s + 2\pi). \quad (\text{XI.14})$$

§ XI.4. Предположения о спектре оператора $\mathbb{J}$ в критической точке

Вектор $\mathbf{Z}(s)$ удовлетворяет уравнению $\mathbb{J}\mathbf{Z} = 0$, где

$$\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} -\omega_0 \frac{d}{ds} + \mathbf{F}_v(\mu_0, U_0(s) | \cdot)$$

— линейный оператор, действующий на $2\pi n$ -периодические функции от s , $n \in \mathbb{N}$, а $U_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} U(s, \mu_0)$. Линейный оператор

$$\mathbb{J}^* = \omega_0 \frac{d}{ds} + \mathbf{F}_v^*(\mu_0, U_0(s | \cdot))$$

является сопряженным по отношению к оператору $\mathbb{J}$ относительно скалярного произведения $[\cdot, \cdot]_{2\pi n}$, т. е. $[\mathbb{J}\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbb{J}^*\mathbf{b}]_{2\pi n}$ для произвольных $2\pi n$ -периодических векторов $\mathbf{a}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$.

При выполнении условия (I) или (II) относительно J_0 существует, по крайней мере, $2\pi n$ -периодическая вещественная собственная функция

$$\mathbf{Z}_0(s) = \dot{U}_0(s) = \mathbf{Z}_0(s + 2\pi). \quad (\text{XI.15})_1$$

Если $\eta_0 \neq 0$, или если $\gamma(\mu_0) = 0$ представляет собой геометрически двойное собственное значение, то собственный вектор

$$\mathbf{Z}_1(s) = e^{i(m/n)s} \Gamma_0(s) = \mathbf{Z}_1(s + 2\pi n) \quad (\text{XI.15})_2$$

соответствует нулевому собственному значению оператора $\mathbb{J}$, т. е. $\mathbb{J}\mathbf{Z}_0 = \mathbb{J}\mathbf{Z}_1 = 0$. Если $\mathbf{Z}_1(s)$ — комплексный вектор, то

$$\mathbf{Z}_2(s) = \overline{\mathbf{Z}_1}(s) \quad (\text{XI.15})_3$$

также является собственной функцией оператора $\mathbb{J}$, соответствующей нулевому собственному значению. Соображения, приведенные в § IX.7 и § IX.8, приложимы и здесь. Вектор $\mathbf{Z}_1(s)$ можно считать вещественным, если таковым является множитель λ_0 , т. е. когда

$$\lambda_0 = 1, \quad \frac{m}{n} = \frac{0}{1}$$

или

$$\lambda_0 = -1, \quad \frac{m}{n} = \frac{1}{2}.$$

Во всех других случаях λ_0 есть комплексное число.

В § IX.8 была приведена лемма, относящаяся к оператору $\mathbb{J}$ для нетривиальной T -периодической задачи. Теперь мы хотим сформулировать соответствующую лемму для автономной задачи. Эта лемма дает объяснение тому факту, что в автономной задаче вектор $\dot{U}_0 = \mathbf{Z}_0$ всегда принадлежит нуль-пространству оператора $\mathbb{J}$, $\mathbb{J}\mathbf{Z}_0 = 0$.

Пусть выполняется условие (I) или (II) относительно собственного значения оператора J_0 . Тогда имеют место следующие случаи.

(а) $n = 1$ и нуль есть двойное (полупростое) с индексом один собственное значение оператора $\mathbb{J} = J_0$. В этом случае можно найти 2π -периодические векторы, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} Z_0(s) &= \dot{U}_0(s) = \Gamma_{00}(s), & Z_0^* &= \Gamma_{00}^*(s), \\ Z_1(s) &= \Gamma_{01}(s), & Z_1^* &= \Gamma_{01}^*(s), \end{aligned} \quad (XI.15)_4$$

так что $\mathbb{J}Z_l = \mathbb{J}^*Z_l^* = 0$,

$$[Z_l, Z_m^*]_{2\pi} = \delta_{lm}, \quad l, m = 1, 2. \quad (XI.16)_1$$

При выполнении условий случая (а) потеря устойчивости решения $\dot{U}(\cdot, \mu)$ носит до некоторой степени особый характер. Например, в случае бифуркации Хопфа, изученной в § VIII.4, случай (а) не может иметь места, если не выполняется равенство $\omega_\mu(\mu_0) = 0$ и если не реализуются некоторые дополнительные условия (указанные после формулы (XI.27)).

(б) $n = 1$, нуль есть (не полупростое) с индексом два собственное значение оператора $\mathbb{J} = J_0$ с одним правильным собственным вектором $Z_0 = \Gamma_{00}$, одним обобщенным собственным вектором $Z_1 = \Gamma_{01}$, соответствующим правильному сопряженному собственному вектору $Z_1^* = \Gamma_{01}^*$, и с обобщенным сопряженным собственным вектором $Z_0^* = \Gamma_{00}^*$, удовлетворяющим задаче (XI.29) и (XI.30).

В § VIII.4 были даны некоторые достаточные условия реализуемости случая (б), если $\omega_\mu(\mu_0) \neq 0$.

(в) $n = 2$, нуль есть полупростое двойное собственное значение оператора $\mathbb{J}$ с двумя вещественными 4π -периодическими собственными векторами

$$Z_0(s) = \dot{U}_0(s) = Z_0(s + 2\pi), \quad (XI.16)_2$$

$$Z_1(s) = e^{i(s/2)} \Gamma_0(s) = \bar{Z}_1(s) = Z_1(s + 4\pi), \quad (XI.16)_3$$

удовлетворяющими условиям (XI.16)₁.

(г) $n > 2$, нуль есть полупростое тройное собственное значение оператора $\mathbb{J}$ с одним вещественным 2π -периодическим собственным вектором $Z_0(s) = \dot{U}(s)$ и двумя комплексными 2π -периодическими собственными векторами

$$Z_1(s) = e^{i(m/n)s} \Gamma_0(s), \quad \Gamma_0(s) = \Gamma_0(s + 2\pi), \quad (XI.16)_4$$

и $\bar{Z}_1 = Z_2$. В этом случае собственные векторы удовлетворяют условиям биортогональности

$$[Z_l, Z_m^*]_{2\pi} = \delta_{lm}, \quad l, m = 0, 1, 2.$$

§ XI.5. Строгая потеря устойчивости в простом собственном значении оператора J_0

Во всех изученных нами задачах бифуркации из условия строгой потери устойчивости следовало существование двойной точки бифуркации. Условия того же самого типа или условия строгого пересечения будет достаточно, чтобы гарантировать существование субгармонической бифуркации $(2\pi/\hat{\omega}(\mu))$ -периодических решений.

В настоящем выводе формул, выражающих строгое пересечение, предполагаем, что $\gamma_0 = i\eta_0 = i(m/n)\omega_0$ является простым собственным значением оператора J_0 . Это предположение типично, если $n \neq 1$; если $n = 1$, то $m = 0$ и $\gamma_0 = 0$ — двойное собственное значение оператора J_0 . Строгое пересечение означает, что собственное значение $\gamma(\mu) = \xi(\mu) + i\eta(\mu)$, вещественная часть которого изменяет знак при $\mu = \mu_0$, удовлетворяет неравенству

$$\xi_\mu(\mu_0) = \operatorname{Re} \gamma_\mu(\mu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Re} \gamma_1 = \xi_1 > 0.$$

Уравнение для γ_1 можно получить в результате дифференцирования (XI.5) по μ при $\mu = \mu_0$:

$$\gamma_1 \Gamma_0 + \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_0 + \gamma_0 \Gamma_1 = J_0 \Gamma_1 + \mathcal{Y} \Gamma_0, \quad \Gamma_1(s) = \Gamma_1(s + 2\pi), \quad (\text{XI.17})_1$$

где

$$\mathcal{Y}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \hat{U}_1 | \cdot) + F_{v\mu}(\mu_0, U_0 | \cdot). \quad (\text{XI.17})_2$$

Уравнение (XI.17) разрешимо относительно $\Gamma_1(s)$, если члены, содержащие Γ_0 , ортогональны собственным векторам Γ_0^* задачи

$$(J_0^* - \gamma_0) \bar{\Gamma}_0^* = 0, \quad \bar{\Gamma}_0^*(s) = \bar{\Gamma}_0^*(s + 2\pi),$$

где

$$J_0^* = \omega_0 \frac{d}{ds} + F_v^*(\mu_0, U_0 | \cdot).$$

Поскольку γ_0 есть простое собственное значение оператора J_0 , то существует один собственный вектор Γ_0 , соответствующий γ_0 , и один собственный вектор $\bar{\Gamma}_0^*$, соответствующий $\bar{\gamma}_0$. Аналогично, Γ_0^* соответствует собственному значению $\bar{\gamma}_0$, а $\bar{\Gamma}_0^*$ — собственному значению γ_0 , и

$$[\Gamma_0, \Gamma_0^*]_{2\pi} - 1 = [\Gamma_0, \bar{\Gamma}_0^*] = 0. \quad (\text{XI.18})$$

Уравнение (XI.17) разрешимо, если неоднородные члены ортогональны вектору Γ_0^* :

$$\gamma_1 + \hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_0, \Gamma_0^*]_{2\pi} = [\mathcal{Y} \Gamma_0, \Gamma_0^*]_{2\pi}.$$

Вспоминая, что $Z_1 = e^{i(m/n)s} \Gamma_0$, $Z_1^* = e^{i(m/n)s} \Gamma_0^*$, вычисляем

$$\begin{aligned} [\dot{\Gamma}_0, \Gamma_0^*]_{2\pi n} &= [\dot{\Gamma}_0 e^{i(m/n)s}, Z_1^*]_{2\pi n} = \left[\left(\dot{Z}_1 - \frac{im}{n} Z_1 \right), Z_1^* \right]_{2\pi n} = \\ &= [\dot{Z}_1, Z_1^*]_{2\pi n} - \frac{im}{n} \end{aligned}$$

и находим, что

$$\left(\gamma_1 - \frac{im}{n} \hat{\omega}_1 \right) + \omega_1 [\dot{Z}_1, Z_1^*]_{2\pi n} = [\mathcal{Y} Z_1, Z_1^*]_{2\pi n}. \quad (XI.19)$$

Уравнение (XI.19) применимо, если $n \neq 1$. Если $n = 2$, то $m/n = 1/2$, векторы Z_1 и Z_1^* вещественные, а

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \text{Im } \gamma_1 = \frac{m}{n} \hat{\omega}_1 = \frac{\hat{\omega}_1}{2} \\ \xi_1 + \hat{\omega}_1 [\dot{Z}_1, Z_1^*]_{1\pi} &= [\mathcal{Y} Z_1, Z_1^*]_{4\pi}. \end{aligned} \quad (XI.20)$$

Можно показать, что $\eta_i = \hat{\omega}_i/2$.

§ XI.6. Строгая потеря устойчивости в двойном полупростом собственном значении оператора J_0

Пусть теперь $\gamma_0 = 0$ — алгебраически двойное, полупростое, двойное собственное значение оператора J_0 . Тогда существуют две независимые собственные функции $\Gamma_{00} = \dot{U}_0(s)$ и Γ_{01} , удовлетворяющая уравнению $J_0 \Gamma_{01} = 0$, и две независимые сопряженные собственные функции Γ_{00}^* и Γ_{01}^* , такие что

$$[\Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [\Gamma_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 1, \quad (XI.21)$$

$$[\Gamma_{00}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = [\Gamma_{01}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = 0. \quad (XI.22)$$

Каждый собственный вектор, принадлежащий нуль-пространству оператора J_0 , можно представить в виде линейной комбинации независимых векторов

$$\Gamma_0 = A \Gamma_{00} + B \Gamma_{01}. \quad (XI.23)$$

Чтобы вычислить γ_1 в (XI.17), необходимо определить A и B . Значения A и B можно найти из условий биортогональности, требуемых для разрешимости задачи (XI.17).

Используя (XI.23), уравнение (XI.17) можно записать в виде

$$\gamma_1 (A \Gamma_{00} + B \Gamma_{01}) + \hat{\omega}_1 (A \dot{\Gamma}_{00} + B \dot{\Gamma}_{01}) = J_0 \Gamma_1 + \mathcal{Y} (A \Gamma_{00} + B \Gamma_{01}). \quad (XI.24)$$

Существует особое решение уравнения (XI.24), которое можно получить в результате дифференцирования уравнения (XI.5) по μ при $\mu = \mu_0$. Это приводит к уравнению (XI.24) с $\gamma_1 = B = 0$ и $A = 1$. Тогда получаемое уравнение

$$\hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{00} = J_0 \Gamma_1 + \mathcal{Y} \Gamma_{00}$$

разрешимо, если

$$\hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{00}, \Gamma_{0j}^*]_{2\pi} = [\mathcal{J}\Gamma_{00}, \Gamma_{0j}^*]_{2\pi}, \quad j=0, 1, \quad (\text{XI.25})$$

и, используя (XI.25), находим, что уравнение (XI.24) разрешимо, если γ_1 является собственным значением матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & [\mathcal{J}\Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} \\ 0 & [\mathcal{J}\Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} \end{bmatrix}. \quad (\text{XI.26})$$

Собственными значениями этой матрицы являются $\gamma_1^{(1)} = 0$ и

$$\gamma_1^{(2)} = [\mathcal{J}\Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi}. \quad (\text{XI.27})$$

В настоящем случае из предположения о том, что потеря устойчивости является строгой, следует, что $\gamma_1^{(2)} > 0$. Заметим, что в рассматриваемом здесь случае двойного полупростого собственного значения потере устойчивости решения Хопфа, изученного в § VIII.4, отвечают следующие частные значения:

$$\hat{\omega}_1 = [\mathcal{J}\Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [\mathcal{J}\Gamma_{00}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0.$$

XI.7. Строгая потеря устойчивости в двойном собственном значении с индексом два ¹⁾

В двойном собственном значении с индексом два имеются две ветви собственных значений: $\gamma(\mu)$ с собственной функцией $\Gamma(\mu)$ и $\tilde{\gamma}(\mu)$ с собственной функцией $\tilde{\Gamma}(\mu)$, которые сходятся при $\mu = \mu_0$ так, что $\gamma(\mu_0) = \tilde{\gamma}(\mu_0) = 0$ и $\Gamma_0 = \tilde{\Gamma}_0 = \dot{U}_*(s)$. Другими словами, $\gamma = 0$ является двойным собственным значением оператора J_0 , однако существует только один собственный вектор $\dot{U}_0$, принадлежащий нуль-пространству оператора J_0 . Отправляясь от точки вырождения, будем искать разделяющиеся собственные значения при возмущении параметра μ . В действительности нам известно, что одно из собственных значений $\gamma(\mu) \equiv 0$ для μ , близких к μ_0 , а от другого собственного значения, которое является гладким по μ , зависит характер устойчивости.

В критической точке $\gamma(\mu_0) = \gamma_0 = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{00} &= \dot{U}_0, \\ J_0 \Gamma_{00} &= 0 \\ J_0 \Gamma_{01} &= \Gamma_{00} \end{aligned} \right\}, \quad (\text{XI.28})$$

$$\left. \begin{aligned} J_0^* \Gamma_{01}^* &= 0 \\ J_0^* \Gamma_{00}^* &= \Gamma_{01}^* \end{aligned} \right\}, \quad (\text{XI.29})$$

$$[\Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [\Gamma_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 1 \quad (\text{XI.30})_1$$

¹⁾ См. § IV.4.4.2.

и

$$[\Gamma_{01}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [\Gamma_{00}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0. \quad (XI.30)_2$$

Можно показать, что ветвь

$$\Gamma(s, \mu) = \hat{U}(s, \mu), \quad \gamma(\mu) = 0$$

является нейтральной в смысле устойчивости. Тогда устойчивость решения Хопфа определяется знаком второго собственного значения $\gamma(\mu)$, которому соответствует собственный вектор $\tilde{\Gamma}(\cdot, \mu)$. Конечно, $\gamma(\mu_0) = \tilde{\gamma}(\mu_0) = 0$ и $\tilde{\Gamma}(s, \mu_0) = \tilde{\Gamma}(s, \mu_0) = \Gamma_{00}$. Производные от $\gamma(\mu)$ и $\tilde{\Gamma}(\cdot, \mu)$ в критической точке удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{\gamma}_1 \Gamma_{00} + \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{00} = J_0 \tilde{\Gamma}_1 + \mathcal{Y} \Gamma_{00}, \quad (XI.31)_1$$

$$\tilde{\gamma}_2 \Gamma_{00} + 2\tilde{\gamma}_1 \tilde{\Gamma}_1 + \hat{\omega}_2 \dot{\Gamma}_{00} + 2\hat{\omega}_1 \dot{\tilde{\Gamma}}_1 = J_0 \tilde{\Gamma}_2 + 2\mathcal{Y}(\tilde{\Gamma}_1) + m(\Gamma_{00}), \quad (XI.31)_2$$

где

$$m(\Gamma_{00}) \stackrel{\text{def}}{=} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \hat{U}_2 | \Gamma_{00}) + F_{\mu\mu v}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{00}) + \\ + 2F_{\mu v v}(\mu_0, U_0 | \hat{U}_1 | \Gamma_{00}) + F_{vvv}(\mu_0, U_0 | \hat{U}_1 | \hat{U}_1 | \Gamma_{00})$$

и все функции от s являются 2π -периодическими. Производные нейтрального в смысле устойчивости решения удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{00} = J_0 \Gamma_1 + \mathcal{Y} \Gamma_{00}, \quad (XI.32)_1$$

$$\hat{\omega}_2 \dot{\Gamma}_{00} + 2\hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_1 = J_0 \Gamma_2 + 2\mathcal{Y} \Gamma_1 + m(\Gamma_{00}). \quad (XI.32)_2$$

Условие ортогональности (XI.30) для (XI.31) и (XI.32) с учетом (XI.28) и (XI.29) приводит в первом порядке к уравнениям

$$\tilde{\gamma}_1 + \hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} + [\mathcal{Y} \Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi}, \quad (XI.33)$$

$$\hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{00}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = [\mathcal{Y} \Gamma_{00}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi}, \quad (XI.34)$$

$$\hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [\Gamma_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} + [\mathcal{Y} \Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi}. \quad (XI.35)$$

Первые производные от $\Gamma(s, \mu)$ и $\tilde{\Gamma}(s, \mu)$ можно представить единственным образом в виде следующих разложений:

$$\Gamma_1(s) = A_1 \Gamma_{00}(s) + B_1 \Gamma_{01}(s) + \chi(s), \quad (XI.36)_1$$

$$\tilde{\Gamma}_1(s) = \tilde{A}_1 \Gamma_{00}(s) + \tilde{B}_1 \Gamma_{01}(s) + \tilde{\chi}(s), \quad (XI.36)_2$$

где $[\chi, \Gamma_{0l}^*]_{2\pi} = [\tilde{\chi}, \Gamma_{0l}^*]_{2\pi} = 0$ для $l=0,1$. Из (XI.30, 33, 35, 36) следует соотношение

$$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{B}_1 - B_1 = [\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} - [\Gamma_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi}. \quad (XI.37)$$

Чтобы завершить вывод условия строгого пересечения, нужно вычислить постоянные в правой части соотношения (XI.37), исполь-

зуя условия разрешимости уравнений $(XI.31)_2$ и $(XI.32)_2$. В качестве предварительного шага этого вычисления выведем соотношение

$$J_0(\chi - \tilde{\chi}) = 0. \quad (XI.38)_1$$

Чтобы вывести $(XI.38)_1$, вычтем $(XI.32)_1$ из $(XI.31)_1$ и найдем, что $J_0(\tilde{\Gamma}_1 - \Gamma_1) = \tilde{\gamma}_1 \Gamma_{00}$. Затем, используя разложения $(XI.36)_1$ и $(XI.36)_2$ и проводя упрощения с использованием $(XI.28)$ и $(XI.37)$, получаем $(XI.38)_1$. Из уравнения $(XI.38)_1$ и единственности разложения следует, что

$$\chi = \tilde{\chi}. \quad (X.38)_2$$

Теперь умножим скалярно обе части уравнений $(XI.31)_2$ и $(XI.32)_2$ на Γ_{01}^* и в получаемых двух уравнениях исключим общие члены. Записывая условия биортогональности, получаем уравнение

$$2\tilde{\gamma}_1 \tilde{B}_1 + 2\hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_1 - \dot{\Gamma}_1], \Gamma_{01}^*]_{2\pi} - 2[\mathcal{Y}(\tilde{\Gamma}_1 - \Gamma_1), \Gamma_{01}^*]_{2\pi}. \quad (XI.39)$$

С учетом $(XI.36, 38, 32)$ это уравнение приводится к виду

$$\tilde{\gamma}_1 \tilde{B}_1 + (\tilde{B}_1 - B_1) \{\hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} - [\mathcal{Y}(\Gamma_{01}), \Gamma_{01}^*]_{2\pi}\} = 0. \quad (XI.40)$$

Теперь из $(XI.37)$ следует, что

$$\tilde{B}_1 + \hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} - [\mathcal{Y}(\Gamma_{01}), \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0, \quad (XI.41)$$

если $B_1 \neq \tilde{B}_1$. Случай $B_1 = \tilde{B}_1$ можно исключить, поскольку при этом решение $\gamma_1 = 0$ соответствует нейтральной ветви. Комбинируя $(XI.37)$ и $(XI.41)$, находим, что

$$\tilde{\gamma}_1 = -\hat{\omega}_1 [\dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} + [\mathcal{Y}(\Gamma_{01}), \Gamma_{01}^*]_{2\pi} - B_1,$$

где

$$B_1 = [\Gamma_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi}$$

можно представить в форме

$$B_1 = [\dot{\hat{U}}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi},$$

потому что $\Gamma(\cdot, \mu) = \dot{\hat{U}}(\cdot, \mu)$. Под строгой потерей устойчивости здесь понимается следующее условие:

$$0 < \tilde{\gamma}_1 = [\mathcal{Y}\Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} - [\dot{\hat{U}}_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi}, \quad (XI.42)$$

где с учетом $(XI.35)$

$$[\dot{\hat{U}}_1, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = [\mathcal{Y}\Gamma_{00} - \hat{\omega}_1 \Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi}.$$

Условие $(XI.42)$ имеет место не только для рассматриваемого сейчас случая собственного значения с индексом два, но также для

случая полупростого собственного значения, изученного в § XI.6. В случае полупростого собственного значения второй член в (XI.42) обращается в нуль вследствие (XI.25).

§ XI.8. Постановка задачи о субгармонической бифуркации периодических решений автономных задач

В постановке задачи о субгармонической бифуркации решения Хопфа (XI.3) удобно отобразить периоды решения Хопфа и субгармонического бифуркационного решения на одну и ту же фиксированную область. Чтобы объяснить важность этой процедуры, отметим, что решение Хопфа (XI.3) имеет вид

$$V = \hat{U}(s, \mu) = \hat{U}(s + 2\pi, \mu), \quad s = \hat{\omega}(\mu) t,$$

и мы ищем субгармоническое решение уравнения (XI.2) вида

$$V = \hat{\psi}(s, \mu) = \hat{\psi}(s + 2\pi n, \mu), \quad s = \hat{\Omega}(\mu) t,$$

которое является строго $2\pi n$ -периодическим ($n \in \mathbb{N}$) относительно приведенной переменной s и таким, что

$$U_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}(s, \mu_0) = \hat{\psi}(s, \mu_0),$$

где

$$\hat{\omega}(\mu_0) = \omega_0 = \hat{\Omega}(\mu_0) = \Omega_0.$$

Будет показано, что вообще говоря, $\hat{\omega}(\mu) \neq \Omega(\mu)$, так что функция $\hat{\psi}(s, \mu) = \hat{\psi}(\hat{\Omega}(\mu) t, \mu)$ обычно не является $(2\pi n / \hat{\omega}(\mu))$ -периодической по t . Функция $\hat{U}(s, \mu) = \hat{U}(s + 2\pi, \mu)$ и $\hat{\omega}(\mu)$ имеют вид (XI.3), а функции $\hat{\psi}(s, \mu) = \hat{\psi}(s + 2\pi n, \mu)$ и $\hat{\Omega}(\mu)$ удовлетворяют уравнению

$$\hat{\Omega}(\mu) \frac{d\hat{\psi}}{ds} = F(\mu, \hat{\psi}(s, \mu)). \quad (\text{XI.43})$$

Разность

$$\hat{Y}(s, \mu) = \hat{U}(s, \mu) - \hat{\psi}(s, \mu) = \hat{Y}(s + 2\pi n, \mu) \quad (\text{XI.44})$$

представляет собой функцию, $2\pi n$ -периодическую по s , несмотря на то, что функции, определяющие эту разность,

$$\hat{U}(\hat{\omega}(\mu) t, \mu) \quad \text{и} \quad \hat{\psi}(\hat{\Omega}(\mu) t, \mu),$$

имеют разные периоды по t .

В автономных задачах отношение периода $T(\hat{\Omega})$ бифуркационного субгармонического решения к периоду $T(\hat{\omega})$ рассматриваемого периодического решения есть

$$\frac{T(\hat{\Omega})}{T(\hat{\omega})} = \frac{n\hat{\omega}(\mu)}{\hat{\Omega}(\mu)}, \quad \hat{\omega}(\mu_0) = \hat{\Omega}(\mu_0).$$

Поэтому в общем случае $T(\hat{\Omega})$ не равно $nT(\hat{\omega})$.

§ XI.9. Амплитуда бифуркационного решения

Амплитуду бифуркационного решения можно определить при помощи любого хорошего линейного функционала от разности $\hat{Y}(s, \mu)$. Наш выбор такого функционала в точности совпадает с тем, который был использован при изучении бифуркации нетривиальных T -периодических решений в § IX.10, т. е.

$$a(\alpha) = [\hat{Y}(s, \mu), Z_1^*(s)]_{2\pi n}, \quad (XI.45)_1$$

где $Z_1^*(s) = Z_1^*(s + 2\pi n)$ дается формулами (XI.15) и (XI.16). При этом $\mathbb{J}Z_1^* = 0$ и

$$a(\alpha) = \alpha \quad \text{для} \quad \frac{m}{n} = \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \quad (XI.45)_2$$

$$a(\alpha) = \alpha e^{i\varphi(\alpha)} \quad \text{для} \quad \frac{m}{n} \neq \frac{0}{1}, \frac{1}{2}. \quad (XI.45)_3$$

Для параметризации бифуркационного решения лучше использовать параметр α , а не μ . Вектор-функция $\hat{Y}(s, \mu)$ разложима по степеням $V|\mu - \mu_0|$ всегда, когда $d\mu(0)/d\alpha = 0$ и $d^2\mu(0)/d\alpha^2 \neq 0$. В этом случае, как и в случае $d\mu(0)/d\alpha \neq 0$, разложения в ряды функций

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu(\alpha), \quad U(s, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U}(s, \mu(\alpha)), \quad \omega(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\omega}(\mu(\alpha)),$$

$$\psi(s, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\psi}(t, \mu(\alpha)), \quad \Omega(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\Omega}(\mu(\alpha)), \quad Y(s, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{Y}(s, \mu(\alpha))$$

содержат целые степени α . Примем для производных обозначения

$$(\cdot)_n = \frac{\partial^n (\cdot)}{\partial \mu^n} \quad \text{при} \quad \mu = \mu_0,$$

$$(\cdot)^n = \frac{\partial^n (\cdot)}{\partial \alpha^n} \quad \text{при} \quad \alpha = 0$$

и будем искать решение, определяемое функциями $\psi(s, \alpha) = \psi(s + 2\pi n, \alpha)$, $\Omega(\alpha)$ и $Y(s, \alpha) = Y(s + 2\pi n, \alpha)$ в виде рядов. С другой стороны, функции $\hat{U}(s, \mu)$ и $\hat{\omega}(\mu)$ рассматриваются как заданные; предполагается, что они известны из проведенного предварительного вычисления бифуркации Хопфа. Отсюда следует, например, что

$$\omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}_1 \quad (XI.47)$$

и так далее, и поэтому $(\cdot)^n$ можно вычислить, если известны $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(n)}$.

Чтобы $\psi(s, \alpha)$ заведомо не совпадала с фазой производной от функции $U(s, \alpha)$, потребуем, чтобы $Y(s, \alpha)$ не содержала части, пропорциональной $\hat{U}(s) = Z_0(s)$, т. е. чтобы

$$[Y(s, \alpha), Z_0^*]_{2\pi n} = 0. \quad (XI.48)$$

(Обсуждение смысла условия (XI.48) дано во введении к настоящей главе).

§ XI.10. Решения бифуркационной задачи в форме степенных рядов

Обратимся теперь к построению функций $\psi(s, \alpha)$, $\mu(\alpha)$ и $\Omega(\alpha)$ в виде степенных рядов по α :

$$\begin{bmatrix} U(s, \alpha) - U_0(s) \\ \psi(s, \alpha) - U_0(s) \\ Y(s, \alpha) \\ \omega(\alpha) - \omega_0 \\ \Omega(\alpha) - \omega_0 \\ \mu(\alpha) - \mu_0 \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \begin{bmatrix} U^{(n)}(s) \\ \psi^{(n)}(s) \\ Y^{(n)}(s) \\ \omega^{(n)} \\ \Omega^{(n)} \\ \mu^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (XI.49)$$

где

$$\begin{aligned} U(s, \alpha) &= U(s + 2\pi, \alpha), \\ \psi(s, \alpha) &= \psi(s + 2\pi, \alpha), \\ Y(s, \alpha) &= Y(s + 2\pi, \alpha), \end{aligned} \quad (XI.50)$$

а

$$\begin{aligned} a^{(l)} &= [Y^{(l)}, Z_1^*]_{2\pi n}, \\ 0 &= [Y^{(l)}, Z_0^*]_{2\pi n}, \quad l > 0, \end{aligned} \quad (XI.51)$$

Коэффициенты рядов (XI.49) можно найти из решения уравнений, получаемых в результате дифференцирования уравнений (XI.4) и (XI.43). Производные от решения Хопфа удовлетворяют уравнениям

$$\omega^{(1)} \dot{U}_0 = \mathbb{J}U^{(1)} + \mu^{(1)} F_{\mu}(\mu_0, U_0), \quad (XI.52)_1$$

$$\begin{aligned} \omega^{(2)} \dot{U}_0 + 2\omega^{(1)} \dot{U}^{(1)} &= \mathbb{J}U^{(2)} + 2\mu^{(1)} F_{\mu\nu}(\mu_0, U_0 | U^{(1)}) + \\ &+ F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | U^{(1)} | U^{(1)}) + (\mu^{(1)})^2 F_{\mu\mu}(\mu_0, U_0) + \\ &+ \mu^{(2)} F_{\mu}(\mu_0, U_0), \end{aligned} \quad (XI.52)_2$$

$$\begin{aligned} \omega^{(3)} \dot{U}_0 + 3\omega^{(2)} \dot{U}^{(1)} + 3\omega^{(1)} \dot{U}^{(2)} &= \mathbb{J}U^{(3)} + 3\mu^{(2)} F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0 | U^{(1)}) + \\ &+ 3F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | U^{(1)} | U^{(2)}) + F_{\nu\nu\nu}(\mu_0, U_0 | U^{(1)} | U^{(1)} | U^{(1)}) + \\ &+ \mu^{(3)} F_{\mu}(\mu_0, U_0) + \mu^{(1)} \{3F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0 | U^{(2)}) + \text{и.ч.б.н.п.}\}, \end{aligned} \quad (XI.52)_3$$

где и.ч.б.н.п. — известные члены более низкого порядка малости,

$$\omega^{(l)} \dot{U}_0 = \mathbb{J}U^{(l)} + \mu^{(l)} F_{\mu}(\mu_0, U_0) + l\mu^{(l-1)} F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0 | U^{(1)}) + (\text{и.ч.б.н.п.}), \quad (XI.52)_4$$

где $U^{(l)}(s) = U^{(l)}(s + 2\pi)$, а $\mathbb{J}(\cdot) = -\omega_0 d/ds + F_{\nu}(\mu_0, U_0 | \cdot)$. Производные от субгармонического бифуркационного решения удовлетво-

ряют уравнениям

$$\Omega^{(1)}\dot{U}_0 = \mathbb{J}\psi^{(1)} + \mu^{(1)}F_\mu(\mu_0, U_0), \quad (XI.53)_1$$

$$\Omega^{(2)}\dot{U}_0 + 2\Omega^{(1)}\dot{\psi}^{(1)} = \mathbb{J}\psi^{(2)} + 2\mu^{(1)}F_{\mu\nu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}) + \\ + F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}|\psi^{(1)}) + (\mu^{(1)})^2 F_{\mu\mu}(\mu_0, U_0) + \mu^{(2)}F_\mu(\mu_0, U_0), \quad (XI.53)_2$$

$$\Omega^{(3)}\dot{U}_0 + 3\Omega^{(2)}\dot{\psi}^{(1)} + 3\Omega^{(1)}\dot{\psi}^{(2)} = \mathbb{J}\psi^{(3)} + 3\mu^{(2)}F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}) + \\ + 3F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}|\psi^{(2)}) + F_{\nu\nu\nu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}|\psi^{(1)}|\psi^{(1)}) + \\ + \mu^{(3)}F_\mu(\mu_0, U_0) + \mu_1\{3F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0|\psi^{(2)}) + \text{и. ч. б. н. п.}\}, \quad (XI.53)_3$$

$$\Omega^{(l)}\dot{U}_0 = \mathbb{J}\psi^{(l)} + l\psi^{(l-1)}F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}) + \mu^{(l)}F_\mu(\mu_0, U_0) + (\text{и. ч. б. н. п.}), \quad (XI.53)_4$$

где $\psi^{(l)}(s) = \psi^{(l)}(s + 2\pi n)$.

Уравнения для $Y^{(n)} = U^{(n)} - \psi^{(n)}$ можно получить вычитанием. Вспомня, что $\dot{U}_0 = Z_0$, находим, используя (XI.52)₁ и (XI.53)₁, что

$$(\omega^{(1)} - \Omega^{(1)})Z_0 = \mathbb{J}Y^{(1)}. \quad (XI.54)$$

Так как $[\mathbb{J}Y^{(1)}, Z_0]_{2\pi n} = [Y^{(1)}, \mathbb{J}^*Z_0^*]_{2\pi n}$, то получаем

$$(\omega^{(1)} - \Omega^{(1)})[Z_0, Z_0^*]_{2\pi n} = \omega^{(1)} - \Omega^{(1)} = 0 \quad (XI.55)$$

всякий раз, когда $\mathbb{J}^*Z_0^* = 0$. Так как последнее уравнение выполняется, если нуль не является двойным собственным значением оператора J_0 с индексом два, то почти во всех случаях имеем $\omega^{(1)} = \Omega^{(1)}$. В исключительном случае, когда $n=1$, а нуль есть собственное значение с индексом два оператора J_0 , получаем, используя (XI.51)₁, при $a^{(1)}=1$, $Z_0 = \Gamma_{00}$, $Z_0^* = \Gamma_{00}^*$, $Z_1^* = \Gamma_{01}^*$, что

$$(\omega^{(1)} - \Omega^{(1)}) = [Y^{(1)}, \mathbb{J}^*\Gamma_{00}^*] = [Y^{(1)}, \Gamma_{01}^*] = 1 \quad (XI.56)$$

не равно нулю.

Отсюда следует, что в общих случаях бифуркационные решения являются строго гармоническими до членов порядка α , а $Y^{(1)}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{J}Y^{(1)} = 0. \quad (XI.57)$$

Заменяя в (XI.53)₂ $\psi^{(1)}$ на $U^{(1)} - Y^{(1)}$, получаем

$$F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|\psi^{(1)}|\psi^{(1)}) = F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|U^{(1)}|U^{(1)}) - \\ - 2F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|U^{(1)}|Y^{(1)}) + F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|Y^{(1)}|Y^{(1)}). \quad (XI.58)$$

Затем, вычитая (XI.53)₂ из (XI.52)₂ и используя (XI.55), получаем

$$(\omega^{(2)} - \Omega^{(2)})Z_0 + 2\omega^{(1)}\dot{Y}^{(1)} = \mathbb{J}Y^{(2)} + 2\mu^{(1)}F_{\nu\mu}(\mu_0, U_0|Y^{(1)}) + \\ + 2F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|U^{(1)}|Y^{(1)}) - F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0|Y^{(1)}|Y^{(1)}). \quad (XI.59)$$

Уравнения (XI.57) и (XI.59) не имеют места в исключительном случае ($n=1$) двойного нулевого собственного значения с индексом два; корректные уравнения для этого случая приводятся в § XI.13.

§ XI.11. Субгармоническая бифуркация для $n=2$

Приведем эту задачу к задаче бифуркации $2T$ -периодических решений в случае T -периодической правой части эволюционного уравнения. Эта задача была изучена в § IX.12. Задача для $n=1$, также исследованная в § IX.12, имеет некоторые новые особенности, которые будут рассмотрены в § XI.13 и § XI.14. Субгармонические решения автономной задачи являются строго субгармоническими относительно приведенной переменной s (см. § XI.8). Вычисление периода этого субгармонического решения

$$\psi(s, \alpha) = \psi(s + 2\pi n, \alpha), \quad s = \Omega(\alpha) t$$

относительно реального времени t связано с дополнительным вычислением новой частоты $\Omega(\alpha)$.

Если $n=2$, то $m=1$, а $\mathbb{J}Z_0 = \mathbb{J}Z_1 = 0$ (см. § XI.15). Отсюда следует, что $Y(s, \alpha)$ можно найти в форме разложения

$$Y(s, \alpha) = \alpha Z_1(s) + \chi(s, \alpha), \quad (\text{XI.60})$$

при этом выполняется условие (XI.48)

$$[\chi(\cdot, \alpha), Z_1^*]_{4\pi} = 0,$$

$$[Y(\cdot, \alpha), Z_1^*]_{4\pi} = \alpha.$$

Тогда из (XI.51)₁ и (XI.45)₂ следует, что

$$[Y^{(1)}, Z_1^*]_{4\pi} = 1,$$

а из (XI.57), что

$$Y^{(1)} = Z_1. \quad (\text{XI.61})$$

Для разрешимости уравнения (XI.59) необходимо, чтобы

$$[\mathbb{J}Y^{(2)}, Z_1^*]_{4\pi} = 0, \quad (\text{XI.62})_1$$

$$[\mathbb{J}Y^{(2)}, Z_0^*]_{4\pi} = 0. \quad (\text{XI.62})_2$$

Применяя (XI.62) к (XI.59) и полагая

$$U^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{U}_1 \quad \text{и} \quad \omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}_1, \quad (\text{XI.63})$$

находим с учетом (XI.16), что

$$2\mu^{(1)} [(\mathbb{J}Z_1 - \hat{\omega}_1 Z_1), Z_1^*]_{4\pi} - [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_1^*]_{4\pi} = 0, \quad (\text{XI.64})_1$$

где оператор $\mathbb{J}$ определен формулой (XI.17)₂. Используя (XI.20), находим, что

$$2\mu^{(1)} \xi_1 - [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_1^*]_{4\pi} = 0. \quad (\text{XI.64})_2$$

Так как $\xi_1 > 0$, то из $(XI.64)_2$ определяется значение $\mu^{(1)}$. В самом деле, второй член в уравнении $(XI.64)_2$ имеет вид

$$[e^{is/2} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \Gamma_0), \Gamma_0^*]_{4\pi} = 0,$$

так что

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} &= 0, \quad U^{(1)}(s) = \mu^{(1)} \hat{U}_1(s) = 0, \\ \Omega^{(1)} &= \omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}_1 = 0, \quad \omega^{(2)} = \mu^{(2)} \hat{\omega}_1, \end{aligned} \quad (XI.65)$$

$$\psi^{(1)} = -Y^{(1)} = -Z_1. \quad (XI.66)$$

Для последующего удобно выразить уравнения для рассматриваемого здесь случая $n=2$ через $Y^{(1)}$, а не через Z_1 . Те же самые уравнения имеют место и для $n > 2$, однако тогда $Y^{(1)}$ является линейной комбинацией Z_1 и $\bar{Z}_1$.

Уравнение $(XI.59)$ можно упростить с учетом $(XI.65)$ и $(XI.66)$:

$$(\mu^{(2)} \hat{\omega}_1 - \Omega^{(2)}) Z_0 = \mathbb{J} Y^{(2)} - F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)}). \quad (XI.67)_I$$

Уравнение $(XI.67)_I$ разрешимо при выполнении условия $(XI.62)_2$

$$\Omega^{(2)} = \mu^{(2)} \hat{\omega}_1 + [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)}), Z_0^*]_{4\pi}. \quad (XI.67)_2$$

Для вычисления $\mu^{(2)}$ и $\Omega^{(2)}$ отметим, что с учетом упрощений, связанных с $(XI.65)$ и $(XI.66)$, уравнение $(XI.52)_3$ можно записать в виде

$$\omega^{(3)} Z_0 = \mathbb{J} U^{(3)} + \mu^{(3)} F_\mu(\mu_0, U_0), \quad (XI.68)$$

а уравнение $(XI.53)_3$ — в виде

$$\begin{aligned} \Omega^{(3)} Z_0 - 3\Omega^{(2)} Y_1 &= \mathbb{J} \psi^{(3)} - 3\mu^{(2)} F_{v\mu}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)}) - \\ &- 3F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | U^{(2)} - Y^{(2)}) - F_{vvv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)} | Y^{(1)}) + \\ &+ \mu^{(3)} F_\mu(\mu_0, U_0). \end{aligned} \quad (XI.69)$$

Далее отметим, что

$$U^{(2)} = \mu^{(2)} \hat{U}_1(s) \quad (XI.70)$$

и разность между $(XI.68)$ и $(XI.69)$ принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega^{(3)} - \Omega^{(3)}) Z_0 + 3[F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)}), Z_0^*]_{4\pi} \dot{Y}^{(1)} &= \\ &= \mathbb{J} Y^{(3)} + 3\mu^{(2)} \{ \mathcal{Y} Y^{(1)} - \hat{\omega}_1 \dot{Y}^{(1)} \} - \\ &- 3F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(2)}) + F_{vvv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)} | Y^{(1)}). \end{aligned} \quad (XI.71)$$

Применяя условие $(XI.62)$, находим, полагая, $Z_1 = Y^{(1)}$, что

$$\begin{aligned} \mu^{(2)} \xi_1 &= [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Y^{(2)}), Z_1^*]_{4\pi} + \\ &+ [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_0^*] [\dot{Z}_1, Z_1^*]_{4\pi} - \\ &- \frac{1}{3} [F_{vvv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1 | Z_1), Z_1^*]_{4\pi}. \end{aligned} \quad (XI.72)$$

Вообще говоря, $\mu^{(2)} \neq 0$. Наконец, отметим, что функция $Y^{(2)}(s)$, определяемая уравнением (XI.67), является не только 4π -периодической, но и 2π -периодической; это следует из того обстоятельства, что $Z_0(s) = Z_0(s + 2\pi)$ и $f(s) \stackrel{\text{def}}{=} F_{vv}(\mu_0, U_0(s) | Z_1(s) | Z_1(s)) = e^{is} F_{vv}(\mu_0, U_0(s) | \Gamma_0(s) | \Gamma_0(s)) = f(s + 2\pi)$. Поэтому при выполнении равенства (XI.72) уравнение (XI.71) разрешимо, если удовлетворяется условие (XI.62)₂. В (XI.71) все неоднородные члены имеют вид

$$e^{is/2} \xi(s) = e^{-is/2} \bar{\xi}(s), \quad \xi(s) = \xi(s + 2\pi),$$

и 4π -скалярные произведения этих членов обращаются в нуль. Таким образом,

$$[\mathbb{J}Y^{(2)}, Z_0^*]_{4\pi} = \omega^{(3)} - \Omega^{(3)} = 0. \quad (\text{XI.73})$$

Вычисление членов высокого порядка проводится таким же способом. На каждом шаге используется условие строгого пересечения $\xi_i \neq 0$, и поэтому получаемое уравнение разрешимо относительно $\mu^{(k)}$.

§ XI.12. Субгармоническая бифуркация для $n > 2$

Если $n \neq 1, 2$, то имеем (см. (XI.15)) $\mathbb{J}Z_0 = \mathbb{J}Z_1 = \mathbb{J}\bar{Z}_1 = 0$. Отсюда следует, что $Y(s, \alpha)$ можно найти в форме разложения

$$Y(s, \alpha) = \alpha [e^{i\varphi(\alpha)} Z_1(s) + e^{-i\varphi(\alpha)} \bar{Z}_1(s)] + \chi(s, \alpha), \quad (\text{XI.74})$$

при этом выполняется условие (XI.48),

$$[\chi(\cdot, \alpha), Z_1^*]_{2\pi n} = 0, \quad [Y(\cdot, \alpha), Z_1^*]_{2\pi n} = \alpha e^{i\varphi(\alpha)}.$$

Тогда из (XI.51)₁ и (XI.45)₃ следует, что

$$[Y^{(1)}, Z_1^*]_{2\pi n} = e^{i\varphi_0},$$

а из (XI.57), что

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= e^{i\varphi_0} Z_1 + e^{-i\varphi_0} \bar{Z}_1 = \exp\left(i\left(\varphi_0 + \frac{m}{n}s\right)\right) \Gamma_0 + \\ &+ \exp\left(-i\left(\varphi_0 + \frac{m}{n}s\right)\right) \bar{\Gamma}_0. \end{aligned} \quad (\text{XI.75})$$

Для разрешимости уравнения (XI.59) необходимо и достаточно, чтобы

$$[\mathbb{J}Y^{(2)}, Z_l^*]_{2\pi n} = [Y^{(2)}, \mathbb{J}^* Z_l^*]_{2\pi n} = 0, \quad l = 0, 1, 2. \quad (\text{XI.76})$$

Сначала запишем условия (XI.76) для уравнения (XI.59) для $l = 1$. Так как $Y^{(2)}$ — вещественная вектор-функция, то (XI.76) автоматически выполняются для $l = 2$. Тогда, используя (XI.63), находим

$$2\mu^{(1)} [(\mathcal{Y}Y_1 - \hat{\omega}_1 \dot{Y}_1), Z_1^*]_{2\pi n} - [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y_1 | Y_1), Z_1^*]_{2\pi n} = 0. \quad (\text{XI.77})$$

Уравнение (XI.77) можно упростить, замечая, что если $\mathcal{L}$ есть какой-нибудь линейный 2π -периодический оператор, а $Z_1 = e^{i(m/n)s} \Gamma_0(s)$,

$Z_1^* = e^{i(m/n)s} \Gamma_0^*(s)$, то

$$[\mathcal{L}\bar{Z}_1, Z_1^*]_{2\pi n} = [e^{-2i(m/n)s} \mathcal{L}\bar{\Gamma}_0, \Gamma_0^*]_{2\pi n} = 0. \quad (\text{XI.78})$$

Теперь заменим $Y^{(1)}$ в (XI.77) ее разложением (XI.75) и используем уравнение (XI.19) для приведения уравнения (XI.77) к виду

$$2\mu^{(1)} \left(\gamma_1 - \frac{im}{n} \hat{\omega}_1 \right) e^{i\varphi_0} - e^{2i\varphi_0} [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_1^*]_{2\pi n} - \\ - 2[F_{vv}(\mu_0, U_0 | Z_1 | \bar{Z}_1), Z_1^*]_{2\pi n} - e^{-2i\varphi_0} [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{Z}_1 | \bar{Z}_1), Z_1^*]_{2\pi n} = 0. \quad (\text{XI.79})_1$$

Вторые два члена в (XI.79)₁ равны нулю,

$$[e^{i(m/n)s} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \Gamma_0), \Gamma_0^*]_{2\pi n} = 0, \\ [e^{-i(m/n)s} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0), \Gamma_0^*]_{2\pi n} = 0,$$

а последний член обращается в нуль, если $n \neq 3$:

$$[e^{-3i(m/n)s} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\Gamma}_0), \Gamma_0^*]_{2\pi n} = \lambda_1 \delta_{n3}.$$

Поэтому получаем уравнение

$$2\mu^{(1)} \left(\gamma_1 - i \frac{m}{n} \hat{\omega}_1 \right) - e^{-3i\varphi_0} \lambda_1 \delta_{n3} = 0, \quad (\text{XI.79})_2$$

которое, в сущности, совпадает с уравнением (IX.66). Отсюда находим, что $\mu^{(1)} = 0$, за исключением случая, когда $n = 3$. 6л-периодические решения $\psi(s, \alpha) = \psi(s + 6\pi n, \alpha)$, ответвляющиеся от решения $\hat{U}(s, \mu(\alpha)) = \hat{U}(s + 2\pi, \mu(\alpha))$ при $\alpha = 0$, имеют в точности те же самые периоды, что и 3T-периодические решения, найденные в § IX.14.

Чтобы установить зависимость бифуркационных решений от реального времени, необходимо найти частоту $\Omega(\alpha)$. Вторую производную Ω_2 от этой частоты можно найти из уравнения (XI.59), используя условие $[JY^{(2)}, Z_0^*]_{2\pi n} = 0$. Скалярные произведения членов, линейных по Y_1 , имеют вид $[e^{\pm i(m/n)s} a(s)]_{2\pi n} = 0$, где $a(s)$ есть 2л-периодическая функция, а

$$[F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)}), Z_0^*]_{2\pi n} = 2[F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_1), Z_0^*]_{2\pi n} = \\ = 2[F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0), Z_0^*]_{2\pi n}. \quad (\text{XI.80})$$

Отсюда следует, что для $n \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2$ имеем

$$\omega^{(2)} - \Omega^{(2)} = -[F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0), Z_0^*]_{2\pi n}. \quad (\text{XI.81})$$

Теперь мы утверждаем, что за исключением вычисления частоты $\Omega(\alpha)$, 6л-периодическое ($n = 3$) относительно приведенного времени s субгармоническое решение обладает всеми свойствами 3T-периодических решений, найденных в § IX.14., включая свойства устойчивости (неустойчивости для μ , близких к μ_0).

Поэтому обратим наше внимание на случаи субгармонической бифуркации, для которых $n \neq 1, 2, 3$. Для всех таких случаев имеем $\mu^{(1)} = U^{(1)} = \Omega^{(1)} = \omega^{(1)} = 0$. Уравнение (XI.71) здесь также имеет место, но с $Y^{(1)} = e^{i\varphi_0} Z_1 + e^{-i\varphi_0} \bar{Z}_1$. Это уравнение разрешимо, если выполняются условия (XI.76) для $Y^{(3)}$ с $l=0$ и $l=1$. Эти условия биортогональности при $l=0$ приводят к равенству

$$\omega^{(3)} - \Omega^{(3)} = 0. \quad (\text{XI.82})$$

Вывод уравнения (XI.82) аналогичен выводу (XI.73).

Второе и третье условия $[Y^{(3)}, Z_1^*]_{2\pi n} = [Y^{(3)}, \bar{Z}_1^*]_{2\pi n} = 0$ разрешимости уравнения (XI.71) приводят к уравнению

$$\begin{aligned} & \mu^{(2)} [\{Y^{(1)} - \hat{\omega}_1 \dot{Y}^{(1)}\}, Z_1^*]_{2\pi n} = \\ & = [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0), Z_0^*]_{2\pi n} [\dot{Y}^{(1)}, Z_1^*]_{2\pi n} + \\ & + [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(2)}), Z_1^*]_{2\pi n} - \\ & - \frac{1}{3} [F_{vvv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)} | Y^{(1)}), Z_1^*]_{2\pi n}. \end{aligned} \quad (\text{XI.83})$$

Подставляя теперь (XI.75) в (XI.67) и используя (XI.82) получаем уравнение

$$\begin{aligned} & [Y^{(2)}, F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0), Z_0^*]_{2\pi} Z_0 - \\ & - \exp[2i(\varphi_0 + m/n)s] F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0) - \\ & - 2F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \bar{\Gamma}_0) - \exp[(-2i(\varphi_0 + m/n)s)] F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\Gamma}_0) = 0. \end{aligned}$$

Тогда разложение (XI.74) приводит к выражению

$$Y^{(2)} = 2i\varphi^{(1)}(e^{i\varphi_0} Z_1 - e^{-i\varphi_0} \bar{Z}_1) + \chi^{(2)}.$$

Решение этого уравнения, ортогональное Z_0^* , Z_1^* и $\bar{Z}_1^*$, имеет вид

$$\chi^{(2)} = \zeta_0(s) + \exp[2i(\varphi_0 + m/n)s] \zeta_1(s) + \exp[(-2i(\varphi_0 + m/n)s)] \bar{\zeta}_1(s), \quad (\text{XI.84})$$

где $\zeta_l(s) = \zeta_l(s + 2\pi)$, $l=0,1$ суть подлежащие определению периодические функции. В (XI.83) ряд членов после интегрирования обращаются в нуль. Пусть

$$g = e^{i(k/n)s} \hat{g}(s), \quad \text{где } k = \pm m, \pm 3m.$$

Тогда

$$[g, Z_1^*]_{2\pi n} = [\exp\left(-i\left(\frac{m}{n} - \frac{k}{n}\right)s\right) \hat{g}, \Gamma_0^*]_{2\pi n} = 0, \quad (\text{XI.85})$$

если $k - m \neq rn$, где $r \in \mathbb{Z}$, а $0 < m/n < 1$, $n \geq 4$. Единственными значениями $k = \pm m, \pm 3m$, для которых $r \in \mathbb{Z}$, являются

$$k = m, \quad n \text{ неограничено}$$

и

$$k = -3m, \quad n = 4, \quad m = 1, 3.$$

Поэтому можно вычислить

$$\begin{aligned} [\dot{Y}^{(1)}, Z_1^*]_{2\pi} &= e^{i\varphi_0} \left\{ i \frac{m}{n} + [\dot{\Gamma}_0, \Gamma_0^*]_{2\pi} \right\}, \\ [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(2)}), Z_1^*]_{2\pi n} &= [F_{vv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | \chi^{(2)}), Z_1^*]_{2\pi n} = \\ &= e^{-2i\varphi_0} [e^{-4i(m/n)s} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\xi}_1), \Gamma_0^*]_{2\pi} + \\ &+ [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \xi_1), \Gamma_0^*]_{2\pi} + [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \xi_0), \Gamma_0^*]_{2\pi} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [F_{vvv}(\mu_0, U_0 | Y^{(1)} | Y^{(1)} | Y^{(1)}), Z_1^*]_{2\pi n} &= \\ &= e^{-3i\varphi_0} [e^{-4i(m/n)s} F_{vvv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\Gamma}_0), \Gamma_0^*]_{2\pi n} + \\ &+ 3[F_{vvv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \Gamma_0 | \Gamma_0), \Gamma_0^*]_{2\pi n}. \end{aligned}$$

Используя эти выражения для членов в правой части уравнения (XI.83) и проводя упрощение его левой части с учетом (XI.19), находим, что

$$\mu^{(1)} \left(\gamma_1 - i \frac{m}{n} \hat{\omega}_1 \right) e^{i\varphi_0} = \lambda_2 e^{i\varphi_0} = 0, \quad n \geq 5, \quad (\text{XI.86})$$

$$\mu^{(2)} \left(\gamma_1 - i \frac{m}{n} \hat{\omega}_1 \right) e^{i\varphi_0} = \lambda_2 e^{i\varphi_0} + \lambda_3 e^{-2i\varphi_0}, \quad n = 4, \quad (\text{XI.87})$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \Gamma_0), Z_0^*]_{2\pi} \left\{ i \frac{m}{n} + [\dot{\Gamma}_0, \dot{\Gamma}_0]_{2\pi} \right\} + \\ &+ [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \xi_1), \Gamma_0^*]_{2\pi} + [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_0 | \xi_0), \Gamma_0^*]_{2\pi} - \\ &- [F_{vvv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \Gamma_0 | \Gamma_0), \Gamma_0^*]_{2\pi}, \\ \lambda_3 &= [e^{-ims} F_{vv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \xi_1), \Gamma_0^*]_{2\pi} - \\ &- \frac{1}{3} [e^{-ims} F_{vvv}(\mu_0, U_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\Gamma}_0 | \bar{\Gamma}_0), \Gamma_0^*]_{2\pi}, \quad m = 1, 3. \end{aligned}$$

Уравнение (XI.87) имеет вид уравнения (IX.80), а (XI.86) — вид уравнения (IX.101).

§ XI.13. Субгармоническая бифуркация для $n=1$ в полупростом случае

Рассмотрим теперь случай (а) из § XI.4. Нуль является двойным (полупростым) собственным значением с индексом, равным единице, оператора $\mathbb{J} = J_0$ с двумя независимыми собственными векторами Γ_{00} и Γ_{01} и двумя независимыми сопряженными собственными векторами Γ_{00}^* и Γ_{01}^* , удовлетворяющими условиям биортогональности (XI.21). Будем искать субгармоническое решение $\psi(s, \alpha) = \psi(s + 2\pi, \alpha)$ и частоту $\Omega(\alpha)$ в виде рядов (XI.49), где $\alpha = [Y(s, \alpha), \Gamma_{01}^*]_{2\pi}$ есть амплитуда. После вычислений, аналогичных приведенным в § XI.10,

уравнение (XI.54) принимает вид

$$(\omega^{(1)} - \Omega^{(1)}) \Gamma_{00} = J_0 Y^{(1)}. \quad (\text{XI.88})$$

Так как $[J_0 Y^{(1)}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = 0$, а $[\Gamma_{00}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = 1$, то находим, что

$$\Omega^{(1)} = \omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}_1. \quad (\text{XI.89})$$

Кроме того, так как $J_0 Y^{(1)} = 0$, а Γ_{00} и Γ_{01} — независимые собственные векторы оператора J_0 , то $Y^{(1)}$ можно представить в виде линейной комбинации $C_1 \Gamma_{00} + C_2 \Gamma_{01}$. Однако из условия (XI.51)₂ (с $Z_0^* = \Gamma_{00}^*$) следует, что $C_1 = 0$; из условия (XI.51)₁ и (XI.45)₂ (с $Z_1^* = \Gamma_{01}^*$) получаем, что $C_2 = 1$. Поэтому

$$Y^{(1)} = \Gamma_{01}. \quad (\text{XI.90})$$

Снова проводя вычисления, аналогичные приведенным в § XI.10, находим, что уравнение (XI.59) с учетом (XI.63), (XI.89) и (XI.90) принимает вид

$$(\omega^{(2)} - \Omega^{(2)}) \Gamma_{00} = J_0 Y^{(2)} + 2\mu^{(1)} (\mathcal{Y} \Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}) - F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | \Gamma_{01}). \quad (\text{XI.91})_1$$

Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (XI.91) имеют вид

$$[J_0 Y^{(2)}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [J_0 Y^{(2)}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0. \quad (\text{XI.91})_2$$

Второе из этих условий приводит к уравнению

$$2\mu^{(1)} \gamma_1^{(2)} - [F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | \Gamma_{01}), \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0, \quad (\text{XI.92})$$

где в соответствии с (XI.27)

$$\gamma_1^{(2)} = [\mathcal{Y} \Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} > 0. \quad (\text{XI.93})$$

Поэтому уравнение (XI.92) дает $\mu^{(1)}$. С другой стороны, первое условие разрешимости приводит к уравнению

$$\omega^{(2)} - \Omega^{(2)} = -[F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | \Gamma_{01}), \Gamma_{00}^*]_{2\pi} + 2\mu^{(1)} [\mathcal{Y} \Gamma_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\Gamma}_{01}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi}.$$

Чтобы вычислить $\Omega^{(2)}$, нам потребуется значение

$$\omega^{(2)} = \mu^{(2)} \hat{\omega}_1 + (\mu^{(1)})^2 \hat{\omega}_2.$$

Оставляем читателю в качестве упражнения детализацию алгоритма вычисления $\mu^{(2)}$ из уравнения для $Y^{(3)}$.

§ XI.14. «Субгармоническая» бифуркация для $n=1$ в случае, когда нуль является двойным собственным значением оператора J_0 с индексом два

Обратимся теперь к случаю (б) из § XI.4. Нуль является двойным с индексом два собственным значением оператора J_0 с правильными и обобщенными собственными векторами и сопряженными собственными векторами, удовлетворяющими уравнениям и условиям (XI.28—30). Снова будем искать 2π -периодическое бифуркационное решение $\psi(s, \alpha)$ и $\Omega(\alpha)$ в виде рядов (XI.49). Амплитуда α определяется скалярным произведением

$$\alpha = [\mathbf{Y}(s, \alpha), \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi}. \quad (\text{XI.95})$$

Уравнение (XI.88) для определения членов первого порядка имеет место и для рассматриваемого здесь случая, однако теперь

$$\begin{aligned} (\omega^{(1)} - \Omega^{(1)}) &= [J_0 \mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} = [\mathbf{Y}^{(1)}, J_0^* \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} = \\ &= [\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi} = 1. \end{aligned} \quad (\text{XI.96})_1$$

Поскольку из (XI.51)₂ следует, что $[\mathbf{Y}^{(1)}, \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} = 0$, то получаем

$$\Omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}_1 - 1 \quad (\text{XI.96})_2$$

$$\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}_{01} = \mathbf{U}^{(1)} - \psi^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\mathbf{U}}_1 - \psi^{(1)}. \quad (\text{XI.97})$$

Здесь построим уравнение для определения $\mathbf{Y}^{(2)}$, вычитая (XI.53)₂ из (XI.52)₂ и используя (XI.96, 97) и (XI.63):

$$\begin{aligned} (\omega^{(2)} - \Omega^{(2)}) \mathbf{\Gamma}_{00} + 2\dot{\psi}_1 &= J_0 \mathbf{Y}^{(2)} + 2\mu^{(1)} \{ \mathcal{Y} \mathbf{\Gamma}_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\mathbf{\Gamma}}_{01} \} - \\ &- \mathbf{F}_{vv}(\mu_0, \mathbf{U}_0 | \mathbf{\Gamma}_{01} | \mathbf{\Gamma}_{01}). \end{aligned} \quad (\text{XI.98})$$

Это уравнение разрешимо, если выполняется условие $[J_0 \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi} = 0$. Используя (XI.97) и (XI.42), находим, что

$$\begin{aligned} 2\mu^{(1)} [\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi} - 2[\dot{\mathbf{\Gamma}}_{01}, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi} &= 2\mu^{(1)} (\tilde{\gamma}_1 + [\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi}) - \\ &- [\mathbf{F}_{vv}(\mu_0, \mathbf{U}_0 | \mathbf{\Gamma}_{01} | \mathbf{\Gamma}_{01}), \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$2\mu^{(1)} \tilde{\gamma}_1 = [\mathbf{F}_{vv}(\mu_0, \mathbf{U}_0 | \mathbf{\Gamma}_{01} | \mathbf{\Gamma}_{01}), \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi} - 2[\dot{\mathbf{\Gamma}}_{01}, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi}. \quad (\text{XI.99})$$

Так как по предположению $\tilde{\gamma}_1 > 0$, то уравнение (XI.99) разрешимо относительно $\mu^{(1)}$.

Чтобы вычислить значение $\omega^{(2)} - \Omega^{(2)}$, спроектируем уравнение (XI.98) на $\mathbf{\Gamma}_{00}^*$. Используя (XI.95), находим, что

$$\begin{aligned} [J_0 \mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} &= [\mathbf{Y}^{(2)}, J_0^* \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} = [\mathbf{Y}^{(2)}, \mathbf{\Gamma}_{01}^*]_{2\pi} = 0, \\ \omega^{(2)} - \Omega^{(2)} + 2\mu^{(1)} [\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} - 2[\dot{\mathbf{\Gamma}}_{01}, \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi} &= \\ &= 2\mu^{(1)} \{ [\mathcal{Y} \mathbf{\Gamma}_{01} - \hat{\omega}_1 \dot{\mathbf{\Gamma}}_{01}], \mathbf{\Gamma}_{00}^* \}_{2\pi} - \\ &- [\mathbf{F}_{vv}(\mu_0, \mathbf{U}_0 | \mathbf{\Gamma}_{01} | \mathbf{\Gamma}_{01}), \mathbf{\Gamma}_{00}^*]_{2\pi}. \end{aligned} \quad (\text{XI.100})$$

Из уравнения (XI.100) нельзя определить $\Omega^{(2)}$, если не известно значение $\omega^{(2)} = \mu^{(2)}\hat{\omega}_1 + (\mu^{(1)})^2\hat{\omega}_2$. Поэтому нам необходимо найти $\mu^{(2)}$.

Чтобы найти $\mu^{(2)}$, сначала построим уравнение для определения $Y^{(3)}$, вычитая (XI.53)₃ из (XI.52)₃ и используя (XI.97):

$$\begin{aligned} & (\omega^{(3)} - \Omega^{(3)})\Gamma_{00} + 3(\omega^{(2)} - \Omega^{(2)})\dot{U}^{(1)} + 3\Omega^{(2)}\dot{\Gamma}_{01} + 3(\omega^{(1)} - \Omega^{(1)})\dot{U}^{(2)} + \\ & + 3\Omega^{(1)}\dot{Y}^{(2)} = J_0 Y^{(3)} + 3\mu^{(2)}F_{v\mu}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01}) + 3F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | U^{(2)}) + \\ & + 3F_{vv}(\mu_0, U_0 | U^{(1)} | Y^{(2)}) - 3F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | Y^{(2)}) + \\ & + 3F_{vvv}(\mu_0, U_0 | U^{(1)} | \Gamma_{01}) - 3F_{vvv}(\mu_0, U_0 | U^{(1)} | \Gamma_{01} | \Gamma_{01}) + \\ & + F_{vvv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | \Gamma_{01} | \Gamma_{01}) + 3\mu^{(1)}F_{v\mu}(\mu_0, U_0 | Y^{(2)}) + \\ & + 3(\mu^{(1)})^2 F_{v\mu\mu}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01}) + 6\mu^{(1)}F_{vv\mu}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | U^{(1)}) - \\ & - 3\mu^{(1)}F_{vv\mu}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | \Gamma_{01}). \end{aligned} \quad (XI.101)$$

Неизвестными в этом уравнении являются $\Omega^{(3)}$, $Y^{(3)}$ и $\mu^{(2)}$. Чтобы определить коэффициент при $\mu^{(2)}$, отметим, что

$$\begin{aligned} & \omega^{(1)} - \Omega^{(1)} = 1, \quad U^{(2)} = \mu^{(2)}\hat{U}_1 + (\mu^{(1)})^2\hat{U}_2, \\ & \Omega^{(2)} = \mu^{(2)}\hat{\omega}_1 + (\text{и. ч. б. н. п.}) - \\ & - 3(\omega^{(1)} - \Omega^{(1)})\dot{U}^{(2)} - 3\Omega^{(2)}\dot{\Gamma}_{01} + 3\mu^{(2)}F_{v\mu}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01}) + \\ & + 3F_{vv}(\mu_0, U_0 | \Gamma_{01} | U^{(2)}) = 3\mu^{(2)}\{\mathcal{Y}\Gamma_{01} - \hat{U}_1 - \hat{\omega}_1\dot{\Gamma}_{01}\} + (\text{и. ч. б. н. п.}). \end{aligned} \quad (XI.102)$$

Поэтому уравнение (XI.101) можно записать в виде

$$(\omega^{(3)} - \Omega^{(3)})\Gamma_{00} = J_0 Y^{(3)} + 3\mu^{(2)}\{\mathcal{Y}\Gamma_{01} - \hat{U}_1 - \hat{\omega}_1\dot{\Gamma}_{01}\} + (\text{и. ч. б. н. п.}). \quad (XI.103)$$

Уравнение (XI.103) разрешимо, если $[J_0 Y^{(3)}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0$. Поэтому, используя (XI.42), находим, что

$$3\mu^{(2)}\bar{\gamma}_1 + [(\text{и. ч. б. н. п. м.}), \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0.$$

С другой стороны, из (XI.95) следует, что

$$[J_0 Y^{(3)}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} = [Y^{(3)}, \Gamma_{01}^*]_{2\pi} = 0,$$

так что

$$\omega^{(3)} - \Omega^{(3)} = 3\mu^{(2)}[\{\mathcal{Y}\Gamma_{01} - \hat{U}_1 - \hat{\omega}_1\dot{\Gamma}_{01}\}, \Gamma_{00}^*]_{2\pi} + [(\text{и. ч. б. н. п.}), \Gamma_{00}^*]_{2\pi}.$$

Вычисление членов более высокого порядка малости проводится аналогичным способом.

§ XI.15. Устойчивость субгармонических решений

Свойства устойчивости субгармонических решений в рассматриваемом здесь автономном случае те же самые, что и в случае нетривиальных T -периодических задач. Когда $n=1$ и $n=2$, субгармонические бифуркационные решения неустойчивы, а суперкритические решения устойчивы, если $|\alpha|$ мало. 6π -периодическое ($n=3$) решение локально неустойчиво по обе стороны от критической точки, а различные возможные исходы, которые обсуждались в § IX.16, имеют место также и здесь. Доказательства этих результатов несколько более сложны, чем соответствующие доказательства, приведенные в гл. IX. Однако все эти результаты доказаны Ж. Йоссом при более общих предположениях относительно отображений (G. Jooss, *Bifurcation of Maps and Applications*, Amsterdam: North-Holland, 1979). Здесь мы укажем, как эти результаты можно получить на основе непосредственного анализа устойчивости, аналогично анализу, приведенному в гл. IX.

Пусть $\varphi(t)$ — произвольное малое возмущение решения $\bar{\psi}(s, \alpha)$. Тогда $V = \psi(s, \alpha) + \varphi(t)$, $s = \Omega(\alpha)t$ удовлетворяет уравнению (XI.2), а линеаризованное уравнение для возмущения $\varphi(t)$ имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = F_v(\mu, \psi | \varphi), \quad \mu = \mu(\alpha).$$

Так как $\psi(s, \alpha) \in \mathbb{P}_{2\pi n}$, то для исследования устойчивости можно использовать теорию Флоке для построения спектральной задачи. Полагая

$$\varphi = e^{v t} \tilde{\xi}(s), \quad \tilde{\xi}(\cdot) \in \mathbb{P}_{2\pi n},$$

находим, что

$$v \tilde{\xi} = -\Omega \frac{d\tilde{\xi}}{ds} + F_v(\mu, \psi | \tilde{\xi}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{J} \tilde{\xi}, \quad (\text{XI.104})$$

где

$$\mathbb{J}(\alpha) = -\Omega(\alpha) \frac{d}{ds} + F_v(\mu(\alpha), \psi(s, \alpha | \cdot)),$$

$$\text{dom } \mathbb{J}(\alpha) = \mathbb{P}_{2\pi n},$$

и, так как $(\Omega(\alpha), \psi(s, \alpha), \mu(\alpha)) = (\omega_0, U_0(s), \mu_0)$ при $\alpha=0$, то

$$\mathbb{J}(0) = \mathbb{J}.$$

Нас интересуют возмущенные собственные значения, такие, что

$$v(0) = 0.$$

Заметим, что $\dot{\psi}(s, \alpha)$ является нуль-вектором (собственный вектор с нулевым собственным значением) оператора $\mathbb{J}$ для всех α :

$$\mathbb{J}(\alpha) \dot{\psi} = 0. \quad (\text{XI.105})$$

Для решения задачи (XI.104) (нахождения $\tilde{\xi}$ и ν) используем теорию возмущений. Собственную функцию $\tilde{\xi}(s, \alpha)$ можно разложить на часть $\psi(s, \alpha)$, принадлежащую нуль-пространству оператора $\mathbb{J}(\alpha)$ и нейтральную в смысле устойчивости, и другую часть $\xi(s, \alpha)$, которая определяет собственное значение $\nu(\alpha)$, зависящее от α и определяющее характер устойчивости:

$$\tilde{\xi}(s, \alpha) = C(\alpha) \left\{ \xi(s, \alpha) + \frac{\tau(\alpha)}{\nu(\alpha)} \psi(s, \alpha) \right\}. \quad (\text{XI.106})$$

Разложение (XI.106) не является единственным, так как, во-первых, пока не требуется, чтобы $\xi(s, \alpha)$ не содержала части, пропорциональной $\psi(s, \alpha)$, и, во-вторых, $C(\alpha)$ и $\tau(\alpha)$ — произвольные функции. Чтобы более точно конкретизировать это разложение, потребуем, чтобы вектор

$$\xi(s, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_0(s)$$

не содержал части, пропорциональной

$$\psi(s, 0) = U_0(s) = Z_0.$$

Это требование можно выразить в виде условия

$$[\xi, Z_0^*]_{2\pi\pi} = 0. \quad (\text{XI.107})$$

Разложение (XI.106) можно полностью конкретизировать, если, в дополнение к (XI.107), ввести другое условие, определяющее амплитуду вектор-функции $\xi(s, \alpha)$. Тогда $\nu(\alpha)$ и $\tau(\alpha)$ можно найти методом возмущений. Так как $\tilde{\xi}(s, \alpha)$ удовлетворяет линейному уравнению, то нормирующая функция $C(\alpha)$ остается неопределенной и может быть выбрана произвольно.

Уравнение для определения ξ найдем в результате подстановки (XI.106) в (XI.104):

$$\tau\dot{\psi} + \nu\xi = \mathbb{J}\tilde{\xi}, \quad \xi(\cdot, \alpha) \in \mathbb{P}_{2\pi\pi}. \quad (\text{XI.108})$$

Если $\alpha = 0$, то (XI.104) приводится к виду

$$\mathbb{J}\tilde{\xi}_0 = 0.$$

Тогда (XI.108) принимает вид

$$\tau_0 \dot{U}_0 = \mathbb{J}\xi_0. \quad (\text{XI.109})_1$$

Результаты первых двух дифференцирований уравнения (XI.108) по α при $\alpha = 0$ приводят к уравнениям

$$\tau^{(1)} \dot{U}_0 + \tau_0 \dot{\psi}^{(1)} + \nu^{(1)} \xi_0 = \mathbb{J}\xi^{(1)} + \mathbb{J}^{(1)} \xi_0, \quad (\text{XI.109})_2$$

$$\begin{aligned} \tau^{(2)} \dot{U}_0 + 2\tau^{(1)} \dot{\psi}^{(1)} + \tau_0 \dot{\psi}^{(2)} + \nu^{(2)} \xi_0 + 2\nu^{(1)} \xi^{(1)} = \\ = \mathbb{J}\xi^{(2)} + 2\mathbb{J}^{(1)} \xi^{(1)} + \mathbb{J}^{(2)} \xi_0, \end{aligned} \quad (\text{XI.109})_3$$

где $\xi^{(1)}(\cdot), \xi^{(2)}(\cdot) \in \mathbb{P}_{2\pi n}$,

$$\mathbb{J}^{(1)}(\cdot) = -\Omega^{(1)} \frac{d(\cdot)}{ds} + \mu^{(1)} F_{\mu\nu}(\mu_0, U_0 | \cdot) + F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | \psi^{(1)} | \cdot),$$

а

$$\begin{aligned} \mathbb{J}^{(2)}(\cdot) = & \Omega^{(2)} \frac{d(\cdot)}{ds} + \mu^{(2)} F_{\mu\nu}(\mu_0, U_0 | \cdot) + (\mu^{(1)})^2 F_{\mu\mu\nu}(\mu_0, U_0 | \cdot) + \\ & + 2\mu^{(1)} F_{\mu\nu\nu}(\mu_0, U_0 | \psi^{(1)} | \cdot) + F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | \psi^{(2)} | \cdot) + \\ & + F_{\nu\nu\nu}(\mu_0, U_0 | \psi^{(1)} | \psi^{(1)} | \cdot). \end{aligned}$$

Напомним, что $\dot{U}_0(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} Z_0$, а $[Z_0, Z_1^*]_{2\pi n} = 0$.

Рассмотрим задачу об устойчивости, когда $n=2$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu^{(1)} = 0, \quad \Omega^{(1)} = \omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}_1 = 0, \quad U^{(1)}(s) = \mu^{(1)} \hat{U}_1(s) = 0, \\ \Psi_1(s) = -Y^{(1)}(s) = -Z_1(s), \quad \Omega^{(2)} = \mu^{(2)} \hat{\omega}_1 + [F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_0^*]_{4\pi}, \\ U^{(2)}(s) = \mu^{(2)} \hat{U}_1(s), \quad \tau_0 = 0. \end{aligned}$$

Условие (XI.107) вместе с условием нормировки $[\xi_0, Z_1^*] = 1$ дают $\xi_0(s) = Z_1(s)$ и $\mathbb{J}^{(1)}\xi_0 = -F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1)$.

Уравнение (XI.109)₂ разрешимо, если $[\mathbb{J}\xi^{(1)}, Z_1^*]_{4\pi} = [\mathbb{J}\xi^{(1)}, Z_0^*]_{4\pi} = 0$. Первое из этих условий дает (см. уравнение, приведенное после (XI.64)₂).

$$\nu^{(1)} = -[F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_0^*]_{4\pi} = 0,$$

а второе приводит к уравнению

$$\tau^{(1)} = -[F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_0^*]_{4\pi} = \omega^{(2)} - \Omega^{(2)}.$$

Тогда уравнение (XI.109)₂ можно преобразовать к виду

$$\mathbb{J}\xi^{(1)} = F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1) - [F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_0^*]_{4\pi} Z_0. \quad (\text{XI.110})$$

Сравнивая (XI.110) с (XI.67)₂, заключаем, что

$$\xi^{(1)} = Y^{(2)}. \quad (\text{XI.111})$$

Теперь можно переписать уравнение (XI.109)₃, используя соотношения, которые были указаны в предыдущем абзаце:

$$\begin{aligned} \tau^{(2)} Z_0 + 3[F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1), Z_0^*]_{4\pi} \dot{Z}_1 + \nu^{(2)} Z_1 = \\ = \mathbb{J}\xi^{(2)} - 3F_{\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Y^{(2)}) + \mu^{(2)} \{ \mathcal{Y} Z_1 - \hat{\omega}_1 \dot{Z}_1 \} + \\ + F_{\nu\nu\nu}(\mu_0, U_0 | Z_1 | Z_1 | Z_1). \quad (\text{XI.112}) \end{aligned}$$

Проектируя (XI.112) на Z_1^* и сравнивая получаемый результат с (XI.72), находим, что

$$\nu^{(2)} = -2\mu^{(2)} \xi_1, \quad \nu(\alpha) = -\mu^{(2)} \xi_1 \alpha^2 + O(\alpha^4). \quad (\text{XI.113})$$

Уравнение (XI.113) показывает, что субкритические решения неустойчивы, а суперкритические решения устойчивы, если α мало. Проектируя уравнение (XI.112) на Z_0^* , после небольших вычислений, подобных тем, которые привели к уравнению (XI.73), находим, что $\tau^{(2)} = 0$.

Переходя теперь к субгармонической бифуркации с $n = 3$, отметим, что

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \omega^{(1)} = \mu^{(1)} \hat{\omega}, & U^{(1)}(s) &= \mu^{(1)} \hat{U}_1(s), \\ \psi^{(1)}(s) &= \mu^{(1)} \hat{U}_1(s) - Y^{(1)}, & Y^{(1)} &= e^{i\varphi_0} Z_1 + e^{-i\varphi_0} \bar{Z}_1, \\ Z_1 &= e^{i(m/3)} \Gamma_0(s), & \Gamma_0(s) &\in \mathbb{P}_{2\pi}, \quad m = 1 \text{ или } 2, \text{ а } \tau_0 = 0.\end{aligned}$$

Вектор ξ_0 является линейной комбинацией независимых нуль-векторов оператора $\mathbb{J}$, а из условия (XI.107) следует, что существуют комплексные постоянные C_0 и C_1 , такие, что

$$\xi_0 = C_0 Z_1 + C_1 \bar{Z}_1. \quad (\text{XI.114})$$

Уравнение (XI.109)₂ можно упростить, используя приведенные выше соотношения:

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} Z_0 + \nu^{(1)} C_0 Z_1 + \nu^{(1)} C_1 \bar{Z}_1 &= \\ &= \mathbb{J} \xi^{(1)} + C_0 \mu^{(1)} \{ \mathcal{Y} Z_1 - \hat{\omega}_1 \dot{Z}_1 \} + C_1 \{ \mathcal{Y} \bar{Z}_1 - \hat{\omega}_1 \dot{\bar{Z}}_1 \} - \\ &\quad - C_0 F_{vv}(\mu_0, U_0 | e^{i\varphi_0} Z_1 + e^{-i\varphi_0} \bar{Z}_1 | Z_1) - \\ &\quad - C_1 F_{vv}(\mu_0, U_0 | e^{i\varphi_0} Z_1 + e^{-i\varphi_0} \bar{Z}_1 | \bar{Z}_1).\end{aligned}$$

Проектируя это уравнение сначала на Z_1^* , а затем на $\bar{Z}_1^*$, находим, используя (XI.19) и (XI.79), что

$$\begin{aligned}\nu^{(1)} C_0 &= C_0 \mu^{(1)} \left(\gamma_1 - \frac{im}{3} \hat{\omega}_1 \right) - C_1 \lambda_1 e^{-i\varphi_0}, \\ \nu^{(1)} C_1 &= C_1 \mu^{(1)} \left(\bar{\gamma}_1 + \frac{im}{3} \hat{\omega}_1 \right) - C_0 \bar{\gamma}_1 e^{i\varphi_0}.\end{aligned}$$

Поэтому $\nu_1^{(1)}$ и $\nu_2^{(1)}$ являются собственными значениями матрицы

$$\bar{m} = \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \left(\gamma_1 - \frac{im}{3} \hat{\omega}_1 \right) & -\lambda_1 e^{-i\varphi_0} \\ -\bar{\lambda}_1 e^{i\varphi_0} & \mu^{(1)} \left(\bar{\gamma}_1 + \frac{im}{3} \hat{\omega}_1 \right) \end{bmatrix},$$

где $\mu^{(1)}$ определяется из уравнения (XI.79)₂,

$$2\mu^{(1)} \left(\gamma_1 - \frac{im}{3} \hat{\omega}_1 \right) = \lambda_1 e^{-3i\varphi_0},$$

с тем же (заданным там) значением λ_1 . Анализ устойчивости в точности совпадает с анализом в нетривиальном случае, изученном

в § IX.14 (см. (IX.74)):

$$v_1^{(1)} + v_2^{(1)} = \text{tr } \tilde{m} = 2\mu^{(1)}\xi_1 > 0,$$

так как

$$\mu^{(1)} = \frac{(1/2)|\lambda_1|}{\gamma_1 - (im/3)\hat{\omega}_1}, \quad \xi_1 > 0,$$

$$v_1^{(1)}v_2^{(1)} = (\mu^{(1)})^2 \left| \gamma_1 - \frac{im}{3}\hat{\omega}_1 \right|^2 - |\lambda_1|^2 = -3(\mu^{(1)})^2 \left| \gamma_1 - \frac{im}{3}\hat{\omega}_1 \right|^2 < 0$$

и одно из собственных значений матрицы $\tilde{m}$ положительно, а другое отрицательно. Отсюда следует, что одно из двух собственных значений

$$\begin{bmatrix} v_1(e) \\ v_2(e) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{bmatrix} + O(\alpha^2)$$

положительно с каждой стороны от критической точки. Поэтому бл-периодическое (по s) бифуркационное решение неустойчиво одно- временно для положительных и отрицательных значений α , если $|\alpha|$ мало.

Оставляем доказательство других результатов, относящихся к анализу устойчивости и сформулированных в § XI.14, в качестве необходимого упражнения, которое будет служить проверкой правильности понимания излагаемой теории прилежными студентами.

§ XI.16. Обзор результатов о субгармонической бифуркации в автономном случае

Пусть выполняется одно из предположений о спектре ((I) или (II)) § XI.3 с $\eta_0/\omega_0 = m/n$ вместе с условиями строгого пересечения §§ XI.5—7.

1. Если $n=1$, то по обе стороны от критической точки ответвляется единственное однопараметрическое (e) семейство $(2\pi/\Omega(e))$ -периодических решений уравнения (XI.2). Если $n=2$, то с одной стороны от критической точки ответвляется единственное однопараметрическое (e) семейство $(4\pi/\Omega(e))$ -периодических решений уравнения (XI.2). Суперкритические $(\mu(e) > 0)$ бифуркационные решения устойчивы; субкритические бифуркационные решения неустойчивы.

2. Если $n=3$, то ответвляется единственное однопараметрическое семейство $(6\pi/\Omega(e))$ -периодических решений уравнения (XI.2) и они неустойчивы по обе стороны от критической точки.

3. Если $n=4$, $|\lambda_3| > |\gamma_1 - (1/4)im\hat{\omega}_1| |\text{Im}(\lambda_2/(\gamma_1 - (1/4)im\hat{\omega}_1))|$, λ_2 и λ_3 определяются по формулам, указанным после (XI.87), $m=1$ или 3, $\gamma_1 - (1/4)im\hat{\omega}_1$ удовлетворяют уравнению (XI.19), то ответвляются два семейства однопараметрических (e) $(8\pi/\Omega(e))$ -периодических решений уравнения (XI.2). Если $|\lambda_2| < |\lambda_3|$, то одно из двух

бифуркационных решений ответвляется с субкритической стороны ($\mu < 0$), а другое — с суперкритической стороны ($\mu > 0$), и оба решения неустойчивы. Если $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, то два решения ответвляются с одной и той же стороны от критической точки и по крайней мере одно из них неустойчиво. Устойчивость решения зависит от конкретных условий рассматриваемой задачи.

4. Если $n \geq 5$, $\text{Im}(\lambda_2/(\gamma_1 - (im/n)\hat{\omega}_1)) \neq 0$, λ_2 определяется по формуле, приведенной после (XI.87), или, если $n = 4$ и неравенства пункта 3 не выполняются, то, вообще говоря, вблизи критической точки не существует малых по амплитуде $(2\pi n/\Omega(\epsilon))$ -периодических решений уравнения (XI.2). Во всех случаях функция $\Omega(\epsilon)$ такова, что $\Omega(0) = \omega_0$, и поэтому бифуркационные решения имеют периоды, близкие к кратным значениям величины $2\pi/\hat{\omega}(\mu)$.

§ XI.17. Бифуркация тора в автономных нерезонансных случаях

Рассмотрим автономное уравнение (XI.2) и далее предположим, что $V = \hat{U}(\hat{\omega}(\mu)t, \mu)$ есть $(2\pi/\hat{\omega}(\mu))$ -периодическое решение уравнения (XI.2). В первых параграфах этой главы были найдены субгармонические решения уравнения (XI.2), ответвляющиеся от решения $\hat{U}$. Теперь нас интересуют решения, которые ответвятся, когда условие сильного резонанса $\eta_0/\omega_0 = m/n$, $n = 1, 2, 3, 4$, не выполняется, в то время как другие предположения о спектре оператора $J(\mu)$ остаются теми же, что и в § IX.3. В этом случае, как и в нетривиальном периодическом случае, изученном в гл. X, мы получаем некоторый тор асимптотически квазипериодических решений.

Спектральная задача, связанная с анализом устойчивости решения $\hat{U}(\tau, \mu)$, описывается уравнением (XI.5), а сопряженная спектральная задача — уравнением (XI.6). При $\mu = \mu_0$ мы имеем на мнимой оси простые собственные значения $\pm i\eta_0 + ki\omega_0$ и $0 + k'i\omega_0$ с любыми k, k' из $\mathbb{Z}$. Тогда для значений μ , близких к μ_0 , имеем пару простых собственных значений $\gamma(\mu)$, $\bar{\gamma}(\mu)$ оператора $J(\mu)$. Кроме того, нуль по-прежнему является простым собственным значением оператора $J(\mu)$, которое соответствует собственной функции $\hat{U}(\tau, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_0(\tau, \mu)$. Пусть $\Gamma(\tau, \mu)$ — это собственная функция задачи (XI.5), соответствующая собственному значению $\gamma(\mu)$. Сопряженными собственными функциями задачи (XI.6) являются $\Gamma^*(\tau, \mu)$, $\bar{\Gamma}^*(\tau, \mu)$ и $\Gamma_0^*(\tau, \mu)$. На основе вычислений, подобных указанным в упражнении X.1, находим следующие условия биортогональности для всех τ :

$$\langle \Gamma(\tau, \mu), \Gamma^*(\tau, \mu) \rangle = \langle \Gamma_0(\tau, \mu), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle = 1, \quad (\text{XI.115})$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(\tau, \mu), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle &= \langle \bar{\Gamma}(\tau, \mu), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle = \\ &= \langle \Gamma(\tau, \mu), \bar{\Gamma}^*(\tau, \mu) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.116})$$

Теперь подставим V в виде разложения

$$V = \hat{U}(\tau, \mu) + Z, \quad (XI.117)$$

где

$$\langle Z, \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle = 0; \quad (XI.118)$$

при этом Z и τ представляют собой подлежащие определению функции от (t, μ) . В случае сильного резонанса, изученном в предыдущих параграфах, $\tau = s$, $V = \hat{\Psi}$, а $Z = -Y$.

Мы хотим привести эту задачу к виду (X.8), (X.9), позволяющему исследовать ее методом усреднения, который применялся в § X.2.

Уравнение (XI.2) принимает вид ¹⁾

$$\dot{\tau} \left[\frac{d\hat{U}}{d\tau} + \frac{dZ}{d\tau} \right] = F(\mu, \hat{U}(\tau, \mu) + Z) = F[\mu, \hat{U}(\tau, \mu)] + F_v(\mu, \hat{U}(\tau, \mu) | Z) + N(\mu, \tau, Z), \quad (XI.119)$$

где $\|N(\mu, \tau, Z)\| = O(\|Z\|^2)$, и так как $F[\mu, \hat{U}(\tau, \mu)] = \hat{\omega}(\mu) dU(\tau, \mu)/d\tau$, то получаем

$$(\dot{\tau} - \hat{\omega}) \frac{d\hat{U}}{d\tau} + \dot{\tau} \frac{dZ}{d\tau} = F_v(\mu, \hat{U} | Z) + N(\mu, \tau, Z), \quad (XI.120)$$

поэтому

$$(\dot{\tau} - \hat{\omega}) \left(\frac{d\hat{U}}{d\tau} + \frac{dZ}{d\tau} \right) = J(\mu) Z + N(\mu, \tau, Z). \quad (XI.121)$$

Теперь, дифференцируя (XI.118) по τ , находим, что

$$\left\langle \frac{dZ}{d\tau}, \Gamma_0^*(\tau, \mu) \right\rangle = -\langle Z, \dot{\Gamma}_0^*(\tau, \mu) \rangle. \quad (XI.122)$$

Проектируя (XI.121) на $\Gamma_0^*(\tau, \mu)$ и используя (XI.122), находим, что

$$(\dot{\tau} - \hat{\omega}) [1 - \langle Z, \dot{\Gamma}_0^*(\tau, \mu) \rangle] = \langle N(\mu, \tau, Z), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle. \quad (XI.123)$$

Поэтому

$$\dot{\tau} = \hat{\omega}(\mu) + \frac{\langle N(\mu, \tau, Z), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle}{1 - \langle Z, \dot{\Gamma}_0^*(\tau, \mu) \rangle}. \quad (XI.124)$$

Теперь, разрешая уравнение (XI.121) относительно $dZ/d\tau$ и используя (XI.124), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau} = & \left(\hat{\omega}(\mu) + \frac{\langle N(\mu, \tau, Z), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle}{1 - \langle Z, \dot{\Gamma}_0^*(\tau, \mu) \rangle} \right)^{-1} \left(F_v(\mu, \hat{U}(\tau, \mu) | Z) + \right. \\ & \left. + N(\mu, \tau, Z) - \frac{\langle N(\mu, \tau, Z), \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle}{1 - \langle Z, \dot{\Gamma}_0^*(\tau, \mu) \rangle} \frac{d\hat{U}(\tau, \mu)}{d\tau} \right), \quad (XI.125) \end{aligned}$$

которое имеет вид уравнения (X.1) и которое нужно рассматривать вместе с вспомогательным уравнением (XI.118). Здесь линеаризован-

¹⁾ Далее $\dot{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} d\tau/dt$, тогда как $\dot{\hat{U}} = d\hat{U}/d\tau$, $\dot{Z} = dZ/d\tau$.

ный оператор есть

$$-\frac{d}{d\tau} + (\hat{\omega}(\mu))^{-1} F_v(\mu, \hat{U}(\tau, \mu)|\cdot) = \frac{1}{\hat{\omega}(\mu)} J(\mu). \quad (XI.126)$$

Роль вспомогательного условия (XI.118) состоит в том, чтобы устранить нулевое собственное значение (и соответствующие собственные значения, лежащие на мнимой оси) оператора $J(\mu)$.

Теперь, как и в гл. X, представим Z в виде разложения

$$Z = z\Gamma(\tau, \mu) + z\bar{\Gamma}(\tau, \mu) + W, \quad (XI.127)$$

где

$$\langle W, \Gamma^*(\tau, \mu) \rangle = \langle W, \Gamma_0^*(\tau, \mu) \rangle = 0, \quad (XI.128)$$

$$z = \langle Z, \Gamma^*(\tau, \mu) \rangle. \quad (XI.129)$$

Уравнение (XI.125) приводит к системе

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\gamma(\mu)}{\hat{\omega}(\mu)} z + b(\tau, \mu, z, \bar{z}, W), \quad (XI.130)$$

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{\hat{\omega}(\mu)} F_v(\mu, \hat{U}(\tau, \mu)|W) + B(\tau, \mu, z, \bar{z}, W), \quad (XI.131)$$

где

$$|b(\tau, \mu, z, \bar{z}, W)| + \|B(\tau, \mu, z, \bar{z}, W)\| = O[(|z| + \|W\|)^2]. \quad (XI.132)$$

В силу предположения, числа $\gamma(\mu)/\hat{\omega}(\mu)|_{\mu=0} = i\eta_0/\omega_0$ не удовлетворяют условиям сильного резонанса, и все экспоненты Флоке для W -части решения лежат в левой части комплексной плоскости. Поэтому, используя результаты гл. X, имеем решения уравнений (XI.130, 131), лежащие на бифуркационном инвариантном торе, в следующей форме:

$$z(\tau) = \rho(\tau) \exp \left\{ i \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) \right] \right\} + \\ + \sum_{p+q=2}^N \gamma'_{pq}(\tau, \mu) [\rho(\tau)]^{p+q} \exp \left\{ (p-q) i \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) \right] \right\} + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (XI.133)$$

$$W(\tau) = \sum_{p+q=2}^N \Gamma'_{pq}(\tau, \mu) [\rho(\tau)]^{p+q} \exp \left\{ (p-q) i \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) \right] \right\} + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (XI.134)$$

где, как и в гл. X, число усечения N неограничено, а функции $\rho(\tau)$, $\theta(\tau)$, μ отнесены к параметру ε :

$$\mu = \mu_2 \varepsilon^2 + \mu_4 \varepsilon^4 + \dots + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (XI.135)$$

$$\rho(\tau) = \varepsilon + \varepsilon^{n-3} \rho_{n-3}(\theta) + \varepsilon^{n-2} \rho_{n-2}(\theta) + \dots + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$\theta(\tau) + \varepsilon^{n-4} h_{n-4}[\theta(\tau)] + \varepsilon^{n-3} h_{n-3}[\theta(\tau)] + \dots = \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) \tau + \chi(\tau, \varepsilon).$$

В (XI.135) число n определяется уравнением $\exp(2\pi i n \eta_0 / \omega_0) = 1$, а ρ_i и h_i суть $2\pi/n$ -периодические функции с равными нулю средними значениями, которые, как и в § X.9,10, можно определить в форме полиномов от $e^{\pm i n \theta}$. Функция χ содержит вековые члены по τ , а

$$\left| \frac{\partial \chi}{\partial \tau} \right| = O(e^N)$$

равномерно по τ .

Уравнениями (XI.117), (XI.127), (XI.133—135) определяются траектории, отнесенные к переменной τ , с начальным условием для θ , даваемым значением $\chi(0, \varepsilon)$. Однако для того, чтобы получить закон движения по этим траекториям, необходимо знать зависимость $\tau(t)$.

§ XI.18. Асимптотически квазипериодические решения на инвариантном торе

Теперь, подставляя в (XI.124) выражение (XI.127) для $Z(\tau)$, получим уравнение для определения $\tau(t)$, которое описывает поведение решения на траекториях, лежащих на инвариантном торе. Выполняя выкладки, аналогичные приведенным в § X.11, можно записать уравнение (X.135)_s в форме

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) + e^{n-4} H_{n-4} \left(\tau, \frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) \right) + \dots = \\ = \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) \right] \tau + \chi(\tau, \varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{XI.136})$$

где функции H_i удовлетворяют условиям $H_i(\cdot + 2\pi, \cdot) = H_i(\cdot, \cdot + 2\pi) = H_i(\cdot, \cdot)$. Поэтому, обращая уравнение (XI.136), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) = \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) \right] \tau + \\ + e^{n-4} G_{n-4} \left(\tau, \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) \right] \tau + \chi_{10} \right) + \dots + \chi_1(\tau, \varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{XI.137})$$

где G_i суть 2π -периодические по обоим аргументам функции, а $\chi_{10} = \chi_1(0, \varepsilon)$, $|\partial \chi_1(\tau, \varepsilon) / \partial \tau| = O(e^N)$. Нам необходимо рассмотреть лишь случай, когда функции G_i представляются в виде конечных рядов Фурье по второму аргументу. Более высокие гармоники появляются от членов более высокого порядка по ε , а усечение рядов производится на членах, имеющих порядок ε^{N-1} .

Аналогично, используя методы § X.9, находим, что

$$\rho(\tau) = \varepsilon + e^{n-3} R_{n-3} \left(\tau, \frac{\eta_0}{\omega_0} \tau + \theta(\tau) \right) + \dots + O(e^{N+1}), \quad (\text{XI.138})$$

где функции R_i являются 2π -периодическими по обоим аргументам. Теперь заменим в (XI.133), (XI.134) $\rho(\tau)$ и $(\eta_0/\omega_0)\tau + \theta(\tau)$ их выра-

жениями (XI.138), (XI.137). Тогда уравнение (XI.124) можно представить в форме

$$\frac{d\tau}{dt} = \hat{\omega}[\mu(\varepsilon)] + \sum_{k \geq 1}^N \varepsilon^k T_k \left(\tau, \left[\frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) \right] \tau + \chi_{10} \right) + O(\varepsilon^{N+1}) + \chi_2(\tau, \varepsilon), \quad (\text{XI.139})$$

где T_k суть 2π -периодические по обоим аргументам функции, а $|\partial \chi_2(\tau, \varepsilon)/\partial \tau| = O(\varepsilon^{N+1})$. Вообще говоря, функция χ_2 содержит вековые члены, однако функции T_k представляются конечными рядами Фурье¹⁾ (доказательство то же самое, что и для G_l), и все более высокие гармоники содержатся в членах $O(\varepsilon^{N+1})$.

Нетрудно также показать, что

$$\left[\hat{\omega}[\mu(\varepsilon)] + \sum_{k \geq 1}^N \varepsilon^k T_k(\tau, \tilde{\Omega}(\varepsilon^2) \tau) \right]^{-1} = \omega_0^{-1} + \sum_{k \geq 1}^N \varepsilon^k S_k(\tau, \tilde{\Omega}(\varepsilon^2) \tau) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (\text{XI.140})$$

где функции S_k 2π -периодичны по обоим переменным, а

$$\tilde{\Omega}(\varepsilon^2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2).$$

Когда $\tau = O(1)$, то вековые члены в χ_2 ограничены, $|\chi_2| = O(\varepsilon^{N+1})$ и тогда интегрирование уравнения (XI.139) дает

$$\omega_0^{-1} \tau + \sum_{k \geq 1}^N \varepsilon^k \int_0^\tau S_k(s, \tilde{\Omega}(\varepsilon^2) s) ds + \chi_3(\tau, \varepsilon) = t - t_0, \quad (\text{XI.141})$$

где $|\chi_3| = O(\varepsilon^{N+1}(1 + \tau + \tau^2))$. Чтобы вычислить интегралы, представим подынтегральные выражения в виде разложений

$$S_k(s, \tilde{\Omega}(\varepsilon^2) s) = \sum_{l_1, l_2} S_{kl_1 l_2} \exp(i(l_1 + \tilde{\Omega} l_2) s),$$

и если $l_1 + \tilde{\Omega} l_2 \neq 0$ для всех l_1, l_2 в приведенных суммах, то

$$\int_0^\tau S_k(s, \tilde{\Omega} s) ds = \sum_{l_1, l_2} \frac{S_{kl_1 l_2}}{i(l_1 + \tilde{\Omega} l_2)} [\exp(i(l_1 + \tilde{\Omega} l_2) \tau) - 1]. \quad (\text{XI.142})$$

Если для некоторых l_1 и l_2 : $l_1 + \tilde{\Omega} l_2 = 0$, то формула (XI.142) неверна, и для вычисления интегралов в (XI.141) нужно использовать другой путь. Так как суммирование по l_2 в (XI.142) конечное, то можно вычислять интегралы как в (XI.142), если только $\tilde{l}_1 + \Omega l_2 \neq 0$. При неограниченном суммировании можно было бы ожидать появление малых знаменателей и расходимости рядов, даже если $\Omega(\varepsilon^2)$ является иррациональным числом.

Уравнения (XI.141) и (XI.142) показывают, что усеченные решения, подавляющие члены более высокого порядка (которые могут быть вековыми) имеют вид

$$V \approx V(\omega t, \omega \tilde{\Omega} t), \quad (\text{XI.143})$$

где функция V является 2π -периодической по обоим аргументам. Чтобы определить ω , сделаем замену переменных для преобразования правой части уравнения (XI.139) в функцию, которая является постоянной с точностью до членов порядка ε^{N+1} . Конечно, $\omega = \omega_0 + O(\varepsilon)$, а

$$\tilde{\Omega} = \frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2).$$

Число вращения отображения Пуанкаре (см. § X.15) здесь дается формулой

$$\hat{\rho}(f) = \frac{\eta_0}{\omega_0} + \varepsilon^2 \Omega(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^N).$$

Для приближенных решений (XI.143) число $\hat{\rho}$ определяется отношением частот. Заключение § X.15 здесь неприменимы, потому что предположения об иррациональности числа $\hat{\rho}$ не достаточно для того, чтобы гарантировать квазипериодичность решений на торе. Мы получим квазипериодические решения, если $\hat{\rho}$ не очень хорошо аппроксимируется рациональными числами. К счастью, «большая часть» чисел («большая часть» определяется в смысле меры Лебега) обладает требуемым свойством, и для них справедливы заключения гл. X.

§ XI.19. Строго квазипериодические решения на бифуркационном торе ¹⁾

Проблема бифуркации упрощается для большого числа физических задач, описываемых уравнениями вида (VIII.1) и обладающих свойством инвариантности по отношению к некоторым группам преобразований. Такие упрощения возможны в задачах описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, в которых инвариантность по отношению к группе преобразований, включающих пространство и время, приводит к бифуркации Хопфа в волноподобные решения. Чтобы изучить ответвление волноподобного решения, удобно и возможно свести задачу строго, а не только асимптотически, к автономной задаче. Тогда стационарным решениям автономной задачи соответствуют периодические решения исходной задачи. Однако если в автономной задаче, описывающей ответвление волноподобного

¹⁾ Поводом для написания этого параграфа послужили недавние результаты по бифуркации вращающихся волн (см. Rand, David. Dynamics and symmetry: predictions for modulated waves in rotating fluids, Arch. Rational Mech. Anal., Michael Renardy, Bifurcation of Rotating Waves, Arch. Rational Mech. Anal.

решения, снова имеет место бифуркация Хопфа, то бифуркационные решения будут строго дважды периодическими, причем обе частоты и число вращения будут выражаться аналитическими функциями относительно ε . Пусть, например, имеется дифференциальное уравнение с частными производными для бифуркационного скалярного поля $v(r, \theta, z, t)$, которое в цилиндрических координатах (r, θ, z) инвариантно по отношению к вращениям вокруг оси z . Предположим далее, что решение $v=0$ обладает бифуркацией Хопфа во вращающуюся волну $v=\tilde{v}(r, \theta-\omega t, z)$. Задача, описывающая бифуркацию решения $\tilde{v}(r, \varphi, z)$, $\varphi=\theta-\omega t$, является автономной, и если для нее имеет место другая бифуркация Хопфа, то новое решение описывается функцией вида $u(r, \varphi, z, t)$, являющейся T -периодической по t . Бифуркационное решение $u(r, \varphi, z, t)=\tilde{u}(r, \theta-\omega t, z, t)$ будет находиться на двумерном торе дважды периодических потоков, две частоты $(2\pi/T, \omega)$ и число вращения которых аналитичны по ε .

Инвариантность систем дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ по отношению к группам вращений фазового пространства также приводит к большим упрощениям.

Пример. Рассмотрим эволюцию трехмерного вектора $x=(x, y, z)$, $x \in \mathbb{R}^3$, где

$$\frac{dx}{dt} = f(\mu, x), \quad (\text{XI.144})$$

а функция $f(\mu, R_\theta x) = R_\theta f(\mu, x)$ инвариантна по отношению к поворотам пространства на угол θ вокруг оси z ,

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы упростить исследование бифуркации, введем генератор S_ω группы $R_{\omega t}$ ($t \in \mathbb{R}$), определяемый линейной эволюционной задачей

$$\frac{dZ}{dt} = \omega k \wedge Z \stackrel{\text{def}}{=} S_\omega Z, \quad Z \in \mathbb{R}^3, \quad (\text{XI.145})$$

где ω — вещественная постоянная, а k — единичный вектор оси z . Общее решение уравнения (XI.145) есть

$$Z(t) = e^{S_\omega t} Z(0) = R_{\omega t} Z(0) \in \mathbb{P}_{2\pi/\omega}.$$

Возвращаясь теперь к уравнению (XI.144), положим

$$x(t) = e^{S_\omega t} y(t) = R_{\omega t} y(t),$$

где

$$\frac{dy}{dt} = f(\mu, y) - S_\omega y. \quad (\text{XI.146})$$

Стационарные решения уравнения (XI.146) соответствуют периодическим решениям $x(t) = R_{\omega t} y \in \mathbb{P}_{2\pi/\omega}$ уравнения (XI.144). Периодические решения уравнения (XI.146) соответствуют дважды периодическим решениям уравнения (XI.144), которые на самом деле квазипериодические для большей части значений ω .

Упражнение

XI.1. Рассмотрите пример VII.1 на стр. 141 и покажите, что уравнение (VII.47) инвариантно по отношению к вращениям R_θ (x, y) -плоскости. Вычислите бифуркацию Хопфа, следуя методу, который был использован для этого примера.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Итак, советский читатель получил умную и полезную книгу. Имена ее авторов хорошо известны специалистам, занимающимся теорией гидродинамической устойчивости. Работы Ж. Йосса и Д. Джозефа регулярно публикуются, начиная с середины шестидесятых годов. Особую популярность у советских читателей приобрела монография Д. Джозефа «Устойчивость движений жидкости», изданная в 1981 году на русском языке издательством «Мир».

Исследования Джозефа и Йосса привлекательны тем, что в них сочетаются тонкие общетеоретические построения, имеющие самостоятельный математический интерес, с вопросами прикладного характера. Функциональный анализ, топологию и другие области математики они используют ровно настолько, насколько это необходимо для того, чтобы выяснить особенности физических процессов, которые их интересуют.

Новая книга Ж. Йосса и Д. Джозефа, которую они называли элементарной, посвящена математической теории бифуркаций и предназначена прежде всего для учебных целей. Она является действительно прекрасным введением в изучение того инструментария, который сейчас бурно развивается в связи с особым прикладным значением, приобретаемым теорией особенностей дифференцируемых отображений.

Рождение теории бифуркаций следует отнести ко второй половине XVIII века, когда Эйлером была решена его знаменитая задача об устойчивости колонны, подверженной действию вертикальной нагрузки, которая приложена к ее верхнему торцу. В XIX веке было понято, что изучение ветвлений возможных форм стационарных (или периодических) решений при изменении параметров, характеризующих внешние воздействия, является ключом к пониманию ряда важнейших физических явлений. Возникновение волн на поверхности воды, ячеистой структуры конвекции, крупномасштабных вихрей в атмосфере и многих других природных явлений имеет одну и ту же причину, а именно смену характера устойчивости установившихся режимов при переходе некоторых параметров через их критические (бифуркационные) значения.

Пониманию подобных фактов и их роли в естествознании мы обязаны прежде всего А. Пуанкаре. Его исследования по теории ветвлений привели к оформлению теории особенностей в самостоятельную дисциплину. Работы Ляпунова и Шмидта, с именами которых связан известный метод Ляпунова — Шмидта, существенно раскрыли

возможности эффективного анализа широкого класса операторных уравнений. В последние два десятилетия исследования особенностей и характера ветвлений решений операторных уравнений резко интенсифицировались. Тому было много причин.

Во-первых, определенные импульсы появились в самой математике — их породил английский геометр Х. Уитни. Изучая некоторые относительно простые классы отображений, он установил, что число возможных типов особенностей невелико. Этот факт привлек внимание математиков. Несмотря на то, что многие надежды, которые были связаны с идеями Уитни, оказались иллюзорными, возникла и продолжает бурно развиваться обширная математическая дисциплина. В ней появились не только своеобразные методы, но и язык, доступный сегодня лишь относительно узкому кругу математиков.

Справедливости ради следует сказать, что эти исследования пока еще существенно не повлияли на тот инструментарий, который используют специалисты, занятые изучением содержательных свойств тех или иных моделей. Это происходит не от консерватизма физиков или математиков. Точно также мне не хотелось бы винить развивающуюся теорию и ее пока малодоступный язык. Причины здесь состоят в том, что «интенсивность эффектов» часто оказывается сравнимой с «степенью адекватности» модели. Поясним это утверждение одним примером.

Предположим, что мы изучаем резонансные явления в гамма-тонových системах. Пользуясь теорией этих систем, мы обычно довольно легко находим главный резонанс, его первые гармоники. И наблюдаемое в природе соответствует тому, что мы получили на основании теоретического анализа. Но более тонкие эффекты, связанные с резонансами высших порядков, с помощью эксперимента мы часто не можем обнаружить. Явление оказывается смазанным присутствующей диссипацией или действием случайных возмущений, которые нельзя исключить в принципе. С подобным же явлением мы сталкиваемся тогда, когда начинаем использовать численные методы. Тот «шум», который вносит электронная машина, нельзя компенсировать совершенствованием резонансных аппроксимаций. Здесь потребуются другие подходы.

Вот почему в прикладных исследованиях мы пока используем главным образом методы типа Ляпунова—Шмидта, и их дальнейшее развитие остается очень важным. И как показывает предлагаемая книга, возможности этого развития далеко не исчерпаны.

Вторая причина всплеска интереса к теории бифуркаций связана с резким расширением фронта исследований различных стационарных (но не равновесных в термодинамическом смысле) структур. Появление работ И. Пригожина по теории диссипативных структур в химической кинетике и неравновесной термодинамике, работ М. Эйгена, изучавшего эволюцию биологических макромолекул, и целого ряда других исследований в этих областях показало глубокую связь между появлением диссипативных структур и теорией ветвления решений соответствующих операторных уравнений.

Сегодня стала понятной та роль, которую играют механизмы ветвления в эволюционном процессе. Механизмы эволюции, основанные на внутривидовом отборе, хорошо изучены не только биологическими методами, но также и с помощью анализа соответствующих математических моделей. Но наряду с этими механизмами можно говорить и о механизмах «бифуркационной» природы.

Предположим, что мы наблюдаем развитие некоторого процесса вследствие медленного изменения параметра λ , и пусть $x(\lambda)$ характеризует его стационарное состояние. В плоскости (x, λ) это некоторая кривая. Однако наблюдения нам позволяют зарегистрировать не кривую $x=x(\lambda)$, а некоторую узкую полосу вокруг нее. Вследствие неизбежной стохастичности природы система всегда будет находиться в окрестности стационарного состояния. Это состояние мы обязаны считать устойчивым, так как наблюдать мы можем только его. Механизмы, являющиеся следствием законов физики и химии, а также дарвиновского естественного отбора ¹⁾, все время стремятся вернуть систему в исходное стационарное состояние, которое само изменяется вследствие изменения параметра λ . В этом состоит естественный процесс адаптации и развития, который на языке стационарных состояний описывает обычный эволюционный процесс.

Предположим теперь, что при некотором значении параметра $\lambda=\lambda^*$ имеет место потеря единственности продолжения по параметру, т. е. бифуркация, и процесс $x(\lambda)$ разветвляется на процессы $x_i(\lambda)$ ($i=1, 2, \dots$). Заметим, что это ветвление является свойством тех уравнений, которые описывают процесс, т. е. физических законов сохранения, минимума диссипации и т. д., на основе которых эти уравнения составлены.

Какова дальнейшая судьба изучаемого эволюционного процесса? Этого мы сказать не можем, не можем в принципе! В самом деле, вследствие стохастичности мы не можем ничего сказать о том, в окрестности какого из стационарных состояний $x_i(\lambda)$ окажется наша система. Множество возможных путей развития предопределено законами физики, но какой конкретный путь окажется реализованным, мы заранее предвидеть не можем. Отсюда следует принципиальная непредсказуемость и необратимость эволюционного процесса. Заметим, что все дискуссии о конвергенции и дивергенции в эволюционном процессе, которые ведутся уже целое столетие, будут сняты, если мы примем во внимание существование бифуркаций и стохастичности. Непрерывная дивергенция, непрерывный рост разнообразия — это, по-видимому, общий закон любого эволюционного процесса.

Значение теории ветвлений для изучения эволюционного процесса демонстрирует возможность новых интерпретаций его малопонятных и важных особенностей. Законы физики определяют ограничения —

¹⁾ Быть может, будущие исследования покажут, что механизм естественного отбора является следствием физико-химических законов. Кто знает?

это берега каналов возможного развития. Вдоль них происходит медленная эволюция дарвиновского типа. Пересечения каналов — это точки бифуркации. В их окрестности происходят непредсказуемые быстрые изменения.

Не поможет ли подобная интерпретация объяснить практическое отсутствие переходных форм в палеонтологическом материале? У биологов бытует фраза «первая птица вылетела из яйца ящера». А может быть, во всем виноват не ящер, а очередная бифуркация, т. е. законы физики?

Очень близка по смыслу к проблемам эволюции проблема турбулентности. Я обращал на это внимание еще около двадцати лет тому назад. Предположим, что речь идет об исследовании устойчивости ламинарного течения. Его традиционная схема такова. Уравнения гидродинамики линеаризуются в окрестности изучаемого течения, и решения полученной системы линейных уравнений разыскиваются в виде

$$v = v^* e^{\mu t}.$$

Для функции v^* возникает некоторая задача на собственные значения, а основной параметр, от которого зависит решение — это число Рейнольдса λ . Задача состоит в нахождении такого $\lambda = \lambda^*$, при котором действительная часть собственного числа $\mu(\lambda)$ обратится в нуль. Решение этой задачи на собственные значения проводится обычно численно с использованием той или другой конечномерной аппроксимации.

Но можно подойти к задаче и по другому. Можно сразу заменить исходные уравнения некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (используя метод прямых, метод Галеркина и т. д.). В результате получится система уравнений вида

$$\dot{x} = X(x, \lambda),$$

где x — некоторый многомерный вектор. Исследуемое ламинарное течение в этом случае будет аппроксимировано решением уравнения $X(x, \lambda) = 0$. Бифуркация может быть найдена из условий

$$\left| \frac{\partial X}{\partial x} \right| = 0, \quad X(x, \lambda) = 0.$$

Дальнейшая схема вычислений также опирается на теорию возмущений.

Так вот, можно показать, что при надлежащем выборе аппроксимирующих схем оба способа отыскания критических значений числа Рейнольдса эквивалентны. Другими словами, переход из ламинарного состояния в турбулентное — это переход системы через точку бифуркации. Поэтому турбулентное течение мы можем рассматривать как постбифуркационное состояние системы. Остановимся на этом несколько подробнее.

Рассмотрим снова некоторое устойчивое стационарное состояние $x(\lambda)$ и поставим эксперимент при некотором фиксированном значении

параметра $\lambda = \lambda^*$. Благодаря стохастичности реального процесса, каждому опыту будет отвечать своя точка $x(\lambda^*)$. Значит, в гиперплоскости $\lambda = \lambda^*$ в пространстве (x, λ) результаты измерений нам дадут некоторое множество. Меняя параметр λ и отмечая каждый раз результаты измерений, мы получим некоторую узкую размытую трубку.

Предположим теперь, что в точке $x = x^*$ происходит ветвление, причем возникает много близких решений, не разделенных между собой большими потенциальными барьерами. Тогда под действием случайных возмущений состояние системы все время будет переходить из одной области притяжения в другую. В результате наблюдается целая область, занятая траекторией системы. Этот качественно новый тип движения естественно назвать турбулентным. Те численные эксперименты, которые я проводил в начале шестидесятых годов (см. Н. Н. Моисеев. Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1978 г.) показывают, что в гидродинамике ситуация очень походит на только что описанную.

Сказанного, наверное, достаточно, чтобы объяснить тот огромный интерес к изучению особенностей отображений, который сейчас возник во всем мире не только у математиков, но и у широкого круга специалистов, занимающихся содержательным анализом конкретных явлений — механиков, физиков, биологов.

Приведенные примеры имеют своей целью показать читателю значение анализа не только точек бифуркации, но и необходимость создания эффективных методов постбифуркационного анализа. Важнейшим инструментом исследования зависимости структурных решений от параметра являются методы продолжения по параметру, которые опираются на численные методы решения задачи Коши. Однако эти методы перестают действовать в окрестностях точки бифуркации, поскольку в этой точке происходит нарушение единственности. Значит, постбифуркационный анализ нужно начинать с создания численного метода, позволяющего найти все действительные решения, выходящие из точки бифуркации. Но именно здесь нас подстерегает главная трудность.

Более трехсот лет тому назад Ньютон разработал метод, получивший впоследствии название «диаграммы Ньютона», который позволяет найти все решения уравнения

$$X(x, \lambda) = 0$$

при условии, что $X(0, 0) = 0$, а сама функция — аналитическая функция своих переменных. Метод диаграммы Ньютона и в настоящее время является единственным способом, позволяющим построить эффективные численные методы определения всех решений этой задачи. Численные реализации метода Ньютона хорошо отработаны лишь для скалярного случая, когда переменные x и λ — скаляры. Случай, когда размерность переменных велика, приводит уже к огромным вычислительным трудностям. Если же и размерность переменной λ больше 1,

то способы численной реализации идей Ньютона не известны. Таким образом, разработка численных методов постбифуркационного анализа — это сейчас одна из важнейших задач вычислительной математики, от решения которой будет зависеть судьба многочисленных прикладных исследований.

Предлагая советскому читателю книгу Ж. Йосса и Д. Джозефа, я хотел бы еще раз повторить мысль, высказанную вначале: эта книга служит превосходным введением в теорию, являющуюся ключом к пониманию сложнейших явлений современного естествознания.

Н. Н. Моисеев

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Список обозначений	8
Глава I. Равновесные решения эволюционных задач	9
§ I.1. Одномерная, двумерная, n -мерная и бесконечномерная интерпретации уравнения (I.1)	9
§ I.2. Нетривиальные решения; стационарные и T -периодические решения; автономные и неавтономные задачи	11
§ I.3. Редукция к локальной форме	12
§ I.4. Равновесные решения	13
§ I.5. Равновесные решения и бифуркационные решения	13
§ I.6. Бифуркационные решения и линейная теория устойчивости	14
§ I.7. Обозначение для функционального разложения $F(t, \mu, U)$	15
Глава II. Бифуркация и устойчивость стационарных решений одномерных эволюционных уравнений	18
§ II.1. Теорема о неявной функции	18
§ II.2. Классификация точек кривых, изображающих решения	19
§ II.3. Характеристическая квадратичная форма. Двойные точки, точки возврата и сопряженные точки	20
§ II.4. Двойная точка бифуркации и теорема о неявной функции	21
§ II.5. Бифуркация в точке возврата и характеристические квадратные уравнения	22
§ II.6. Тройная точка бифуркации	23
§ II.7. Теорема о достаточных условиях устойчивости	24
§ II.8. Теорема о факторизации в одномерном случае	26
§ II.9. Эквивалентность строгой потери устойчивости и двойной точки бифуркации	27
§ II.10. Смена устойчивости в двойной точке	28
§ II.11. Смена устойчивости в двойной точке для задач, приведенных к локальной форме	30
§ II.12. Смена устойчивости в точке возврата	33
§ II.13. Смена устойчивости в тройной точке	33
§ II.14. Глобальные свойства устойчивости изолированных решений	35
Глава III. Теория несовершенств и изолированные решения, разрушающие бифуркацию	37
§ III.1. Структура задач, в которых происходит разрушение двойной точки бифуркации	38
§ III.2. Теорема о неявной функции и седлообразная поверхность разрушения бифуркации	39
§ III.3. Примеры изолированных решений, разрушающих бифуркацию	40
§ III.4. Итеративные процедуры построения решений	42

§ III.5. Устойчивость решений, разрушающих бифуркацию	44
§ III.6. Изоляты	46
Глава IV. Устойчивость стационарных решений эволюционных уравнений в двумерном и n-мерном случаях	49
§ IV.1. Собственные значения и собственные векторы $(n \times n)$ -матрицы	50
§ IV.2. Алгебраическая и геометрическая кратности, индекс Риса . . .	50
§ IV.3. Присоединенная задача на собственные значения	51
§ IV.4. Собственные значения и собственные векторы (2×2) -матрицы	52
§ IV.5. Спектральная задача и устойчивость решения $u=0$ в R^n . . .	55
§ IV.6. Узлы, седла и фокусы	55
§ IV.7. Критическое значение и строгая потеря устойчивости	57
Дополнение IV.1. Биортогональность обобщенных собственных векторов	59
Дополнение IV.2. Проекция	62
Глава V. Бифуркация стационарных решений и устойчивость бифуркационных решений в двумерном случае	66
§ V.1. Вид стационарных бифуркационных решений и их устойчивость	66
§ V.2. Классификация трех типов бифуркации стационарных решений	68
§ V.3. Бифуркация в простом собственном значении	69
§ V.4. Устойчивость стационарного решения, ответвляющегося в простом собственном значении	70
§ V.5. Бифуркация в двойном собственном значении с индексом, равным двум	71
§ V.6. Устойчивость стационарного решения, ответвляющегося в двойном собственном значении с индексом, равным двум	72
§ V.7. Бифуркация и устойчивость стационарных решений в форме (V.2) в двойном собственном значении (полупростом) с индексом, равным единице	74
§ V.8. Бифуркация и устойчивость стационарных решений (V.3) в полупростом двойном собственном значении	76
§ V.9. Примеры анализа устойчивости в двойном полупростом (с индексом, равным единице) собственном значении	79
Дополнение V.1. Теорема о неявной функции для системы двух уравнений с двумя неизвестными функциями от одной переменной	84
Глава VI. Методы проекции для общих задач бифуркации в стационарные решения	90
§ VI.1. Эволюционное уравнение и спектральная задача	90
§ VI.2. Построение стационарных бифуркационных решений в виде степенных рядов от амплитуды	91
§ VI.3. R^1 и R^1 как проекция	93
§ VI.4. Устойчивость бифуркационного решения	94
§ VI.5. Добавочная малая часть для R^1 как проекции	95
§ VI.6. Проекция задач высокой размерности	97
§ VI.7. Спектральная задача для анализа устойчивости решения $u=0$	100
§ VI.8. Спектральная задача и преобразование Лапласа	102
§ VI.9. Проекция в R^1	105
§ VI.10. Метод проекции для изолированных решений, разрушающих бифуркацию в простом собственном значении (теория несовершенств)	106
§ VI.11. Метод проекции в двойном собственном значении с индексом, равным двум	108
§ VI.12. Метод проекции в двойном полупростом собственном значении.	111
Дополнение VI.1. Примеры применения метода проекции	115

Глава VII. Бифуркация периодических решений из стационарных решений (бифуркация Хопфа) на плоскости	128
§ VII.1. Структура двумерной задачи, описывающей бифуркацию Хопфа	128
§ VII.2. Амплитудное уравнение для бифуркации Хопфа	129
§ VII.3. Решение в виде рядов	130
§ VII.4. Уравнения для коэффициентов рядов Тейлора	130
§ VII.5. Условия разрешимости (альтернатива Фредгольма)	130
§ VII.6. Теория Флоке	131
§ VII.7. Уравнения, определяющие устойчивость периодических решений	138
§ VII.8. Теорема о факторизации	138
§ VII.9. Интерпретация условия устойчивости	140
Глава VIII. Бифуркация периодических решений в общем случае	145
§ VIII.1. Собственные проекции спектральной задачи	145
§ VIII.2. Уравнения для проекции и дополнительная проекция	146
§ VIII.3. Решение в виде рядов с использованием альтернативы Фредгольма	148
§ VIII.4. Устойчивость бифуркации Хопфа в общем случае	153
Глава IX. Субгармоническая бифуркация нетривиальных T-периодических решений	163
§ IX.1. Постановка задачи о субгармонической бифуркации	164
§ IX.2. Спектральные задачи и собственные значения $\sigma(\mu)$	166
§ IX.3. Биортогональность	167
§ IX.4. Критическая точка	168
§ IX.5. Альтернатива Фредгольма для $J(\mu) - \sigma(\mu)$ и формула, выражающая строгое пересечение (IX.20)	168
§ IX.6. Предположения о спектре	169
§ IX.7. Рациональные и иррациональные значения отношения частот в критической точке	170
§ IX.8. Оператор J и его собственные векторы	171
§ IX.9. Сопряженный оператор J^* , биортогональность, строгое пересечение и альтернатива Фредгольма для J	172
§ IX.10. Амплитуда ε и биортогональное разложение бифуркационных субгармонических решений	174
§ IX.11. Уравнения для определения производных от бифуркационных субгармонических решений по ε при $\varepsilon=0$	174
§ IX.12. Бифуркация и устойчивость T -периодических и $2T$ -периодических решений	176
§ IX.13. Бифуркация и устойчивость nT -периодических решений с $n > 2$	179
§ IX.14. Бифуркация и устойчивость $3T$ -периодических решений	180
§ IX.15. Бифуркация $4T$ -периодических решений	184
§ IX.16. Устойчивость $4T$ -периодических решений	187
§ IX.17. Несуществование субгармонических решений более высокого порядка и слабый резонанс	190
§ IX.18. Сводка результатов о субгармонической бифуркации	191
§ IX.19. Теория несовершенств с периодическим дефектом	192
Глава X. Бифуркация нетривиальных T-периодических решений в асимптотически квазипериодических решения	194
§ X.1. Биортогональное разложение решения и биортогональное разложение уравнений	194
§ X.2. Замена переменных	197
§ X.3. Нормальная форма уравнений	200

§ X.4. Нормальные уравнения в полярных координатах	206
§ X.5. Тор и траектории на торе в иррациональном случае	208
§ X.6. Тор и траектории на торе, если $\omega_0 T/2\pi$ — рациональная точка более высокого порядка ($n \geq 5$)	212
§ X.7. Форма тора в случае $n=5$	214
§ X.8. Траектории на торе при $n=5$	215
§ X.9. Форма тора при $n > 5$	217
§ X.10. Траектории на торе при $n \geq 5$	221
§ X.11. Асимптотически квазипериодические решения	223
§ X.12. Устойчивость бифуркационного тора	224
§ X.13. Субгармонические решения на торе	225
§ X.14. Устойчивость субгармонических решений на торе	229
§ X.15. Захват частоты	230
Дополнение X.1. Построение асимптотически квазипериодических ре- шений, ответвляющихся в рациональных точках более высокого порядка ($n \geq 5$) методом степенных рядов с использованием альтернативы Фредгольма	235
Дополнение X.2. Прямое построение асимптотически квазипериодиче- ских решений, ответвляющихся в иррациональных точках, ме- тодом, включающим две временные переменные, степенные ряды и альтернативу Фредгольма	239
Дополнение X.3. Прямое построение асимптотически квазипериодиче- ских решений, ответвляющихся в рациональных точках более высокого порядка, методом двух временных переменных	243
Глава XI. Вторичная субгармоническая и асимптотически квазипериодиче- ская бифуркация периодических решений (типа Хопфа) в авто- номном случае	252
§ XI.1. Спектральные задачи	254
§ XI.2. Критическая точка и рациональные точки	256
§ XI.3. Предположения о спектре оператора J_0	257
§ XI.4. Предположения о спектре оператора J в критической точке	258
§ XI.5. Строгая потеря устойчивости в простом собственном значении оператора J_0	260
§ XI.6. Строгая потеря устойчивости в двойном полупростом собствен- ном значении оператора J_0	261
§ XI.7. Строгая потеря устойчивости в двойном собственном значении с индексом два	262
§ XI.8. Постановка задачи о субгармонической бифуркации периодиче- ских решений автономных задач	265
§ XI.9. Амплитуда бифуркационного решения	266
§ XI.10. Решения бифуркационной задачи в форме степенных рядов	267
§ XI.11. Субгармоническая бифуркация для $n=2$	269
§ XI.12. Субгармоническая бифуркация для $n > 2$	271
§ XI.13. Субгармоническая бифуркация для $n=1$ в полупростом случае	274
§ XI.14. «Субгармоническая» бифуркация для $n=1$ в случае, когда ноль является двойным собственным значением оператора J_0 с индексом два	276
§ XI.15. Устойчивость субгармонических решений	278
§ XI.16. Обзор результатов о субгармонической бифуркации в автоном- ном случае	282
§ XI.17. Бифуркация тора в автономных нерезонансных случаях	283
§ XI.18. Асимптотически квазипериодические решения на инвариантном торе	286
§ XI.19. Строго квазипериодические решения на бифуркационном торе	288
Послесловие	291