Л. А. Вайнштейн

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Изложена теория электромагнитных волн различных диапазонов (от длинных до оптических волн) в системах, представляющих практический интерес для радиотехники и электроники: в линиях передачи (линиях, подчиняющихся телеграфным уравнениям, волноводах, линиях с медленными волнами, открытых волноводах), в резонаторах (объемных и открытых), а также в излучающих системах. Использован сравнительно простой математический аппарат, большое внимание уделено физическому анализу электромагнитных процессов в рассматриваемых системах.

Первые главы книги посвящены уравнениям Максвелла и методам их решения, энергетическим соотношениям, простейшим задачам электродинамики. В последующих главах рассмотрены общие положения теории электромагнитного поля; плоские волны, потенциалы электромагнитного поля, цилиндрические и сферические волны; теория скин-эффекта; электродинамическая теория длинных линий; телеграфные уравнения; волноводы; потери в волноводах; волны в периодических структурах, возбуждение электромагнитных волн заданными источниками; свободные и вынужденные колебания в объемных резонаторах; дифракция электромагнитных волн и ряд других вопросов. По сравнению с первым изданием (1957 г.) книга существенно переработана и дополнена.

Для научных работников; может быть полезна инженерам, студентам и аспирантам радиотехнических и радиофизических специальностей.

Содержание

Предисловие	3
Из предисловия к первому изданию	4
Глава I. Общие положения теории электромагнитного поля	**6**
§ 1. Основные законы электродинамики	6
§ 2. Уравнения электромагнитного поля в комплексной форме	10
§ 3. Сторонние токи	15
§ 4. Граничные условия	17
§ 5. Леммы о смысле квадратов и произведений комплексных амплитуд	18
§ 6. Теорема о комплексной мощности	22
§ 7. Теорема о колеблющейся мощности	26
§ 8. Энергия электромагнитного поля	28
§ 9. Энергетический смысл комплексных проницаемостей	32
§ 10. Теоремы единственности. Условия излучения	35
Задачи к гл. I	38
Глава II. Плоские волны	**41**
§ 11. Плоские волны в однородной изотропной среде	41
§ 12. Распространение электромагнитных волн в различных средах	45
§ 13. Нормальное падение волны на плоскую границу раздела	48
§ 14. Волновые уравнения. Обобщенные плоские волны	50
§ 15. Отражение плоской волны от плоской границы раздела	54
§ 16. Структура электромагнитного поля прошедшей волны	59

Задачи к гл. II 62
Глава III. Потенциалы электромагнитного поля. Цилиндрические и сферические волны **63**
§ 17. Векторные потенциалы 63
§ 18. Векторы Герца 65
§ 19. Криволинейные ортогональные координаты 68
§ 20. Поля и потенциалы в криволинейных ортогональных координатах 70
§ 21. Лемма о пропорциональном изменении проницаемостей ε и μ,во всем пространстве 75
§ 22. Цилиндрические волны 78
§ 23. Сферические волны 81
Задачи к гл. III 83
Глава IV. Теория скин-эффекта **84**
§ 24. Понятие идеального проводника и граничные условия на его поверхности 84
§ 25. Сильный скин-эффект. Граничные условия Леонтовича 87
§ 26. Сопротивление проводников при сильном скин-эффекте 90
§ 27. Скин-эффект в цилиндрическом проводе 95
Задачи к гл. IV 99
Глава V. Электродинамическая теория длинных линий **100**
§ 28. Классификация линий передачи 100
§ 29. Электромагнитные волны в идеально проводящих линиях 103
Задачи к гл. V 108
Глава VI. Телеграфные уравнения **109**
§ 30. Основные свойства телеграфных уравнений 109
§ 31. Электродинамический вывод телеграфных уравнений 111
§ 32. Расчет параметров длинных линий 116
§ 33. Энергетический смысл параметров длинных линий 120
§ 34. Зависимость свойств длинных линий от частоты 122
§ 35. Пределы применимости телеграфных уравнений 125
§ 36. Однопроводная линия. Понятие об электродинамической теории вибраторов 127
§ 37. Полосковые и щелевые линии 130
Задачи к гл. VI 133
Глава VII. Волноводы **135**
§ 38. Основные свойства электромагнитных волн в волноводах 135
§ 39. Электрические волны в волноводах 136
§ 40. Магнитные волны в волноводах 140
§ 41. Система волн в прямоугольном волноводе 142
§ 42. Система волн в круглом волноводе 149
§ 43. О волноводах сложной формы 153
§ 44. Распространяющиеся и затухающие волны в волноводах 155
§ 45. Волноводные свойства коаксиальных и полосковых линий 161
Задачи к гл. VII 165

Глава VIII. Скорость распространения **168**
§ 46. Фазовая и групповая скорость 168
§ 47. Распространение модулированных волн в волноводе 171
§ 48. Скорость движения энергии 176
§ 49. Влияние затухания на распространение модулированных волн 179
Задачи к гл. VIII 181
Глава IX. Потери в волноводах **182**
§ 50. Волноводы, заполненные веществом 182
§ 51. Волноводы с конечной проводимостью стенок 184
§ 52. Затухание Важнейших волн в зависимости от частоты 190
§ 53. Волны в волноводе и метод возмущений 192
Задачи к гл. IX 196
Глава X. Рупоры 197
§ 54. Электромагнитные волны в рупорах 197
§ 55. «Электрические» и «магнитные» волны в секториальном рупоре 198
§ 56. Сочленение волновода с рупором 204
§ 57. Электрические и магнитные волны в коническом рупоре 207
Задачи к гл. X 210
Глава XI. Замедление электромагнитных волн диэлектриками и проводниками **212**
§ 58. Медленные электромагнитные волны 212
§ 59. Распространение поверхностной волны вдоль провода с конечной проводимостью 215
§ 60. Поверхностная волна Ценнека 219
§ 61. Замедление волн диэлектрической пластиной 220
§ 62. Волны в диэлектрических структурах (общий обзор) 228
§ 63. Распространение волн вдоль диэлектрического стержня и родственные задачи 235
§ 64. Волны в диэлектрических трубках 241
Задачи к гл. XI 244
Глава XII. Волны в периодических структурах **249**
§ 65. Пространственные гармоники 249
§ 66. Поверхностные волны над гребенчатой структурой 253
§ 67. Диафрагмированный волновод. Ребристый стержень 257
Задачи к гл. XII 262
Глава XIII. Спиральный волновод **266**
§ 68. Спираль как замедляющая линия. Приближенные граничные условия 266
§ 69. Симметричная волна в спиральном волноводе 269
§ 70. Несимметричные волны в спиральном волноводе 273
§ 71. Система волн спирального волновода. Пространственный резонанс 278
§ 72. Бифилярная спираль 284
Задачи к гл. XIII 288
Глава XIV. Возбуждение электромагнитных волн заданными источниками **289**

§ 73. Лемма Лоренца и теорема взаимности для электрических диполей 289
§ 74. Магнитные диполи и теоремы взаимности для них 293
§ 75. Ортогональность волн в волноводе 297
§ 76. Возбуждение волноводов 302
§ 77. Возбуждение волноводов: примеры и дополнения 306
§ 78. Возбуждение волн в рупоре и родственные задачи 313
§ 79. Дифракция на клине 316
Задачи к гл. XIV 322
Глава XV. Свободные колебания объемных резонаторов 328
§ 80. Стоячие волны в прямоугольной полости 328
§ 81. Цилиндрические резонаторы 332
§ 82. Сферический резонатор 336
§ 83. Квазистатический расчет резонаторов сложной формы 338
§ 84. Свойства резонатора, заполненного однородным веществом 341
§ 85. Влияние конечной проводимости стенок на свободные колебания резонатора 343
§ 86. Добротность некоторых колебаний 34о
§ 87. Диэлектрические резонаторы 348
Задачи к гл. XV 352
Глава XVI. Вынужденные колебания объемных резонаторов 354
§ 88. Ортогональность собственных колебаний 354
§ 89. Возбуждение колебаний в объемном резонаторе 357
§ 90. Возбуждение резонаторов: применения и дополнения 363
§ 91. Возбуждение отрезка волновода 369
Задачи к гл. XVI 371
Глава XVII. Дифракция электромагнитных волн 372
§ 92. Принцип Гюйгенса для электромагнитного поля 372
§ 93. Дифракция на отверстии произвольной формы 378
§ 94. Принцип двойственности 380
§ 95. Дифракция на прямоугольном отверстии 383
§ 96. Метод зеркальных токов 386
§ 97. Дифракция на круглом отверстии 388
§ 98. Пределы применимости принципа Гюйгенса 390
§ 99. Дифракция Френеля и параболическое уравнение 394
§ 100. Гауссовы волновые пучки 400
§ 101. Квазиоптика: открытые резонаторы и открытые волноводы 405
§ 102. Колебания между плоскопараллельными зеркалами 411
§ 103. Колебания, ограниченные каустиками 415
§ 104. Открытые резонаторы с комплексными гауссовыми пучками 421
§ 105. Возбуждение открытых резонаторов и открытых волноводов 426
Задачи к гл. XVII 431
Приложение. Переход от абсолютной системы единиц к единицам СИ 434
Список литературы 435

Предисловие

Первое издание этой книги вышло более тридцати лет назад. При подготовке второго издания автор стремился к тому, чтобы книга по-прежнему могла служить учебным пособием для студентов и аспирантов и вместе с тем быть полезной для инженеров и научных работников. Как и раньше, в книге используется сравнительно элементарный математический аппарат, главным образом метод разделения переменных в трех простейших координатных системах — декартовой, цилиндрической и сферической. В новом издании применение этого метода несколько расширено: в гл. XIV рассмотрены классические дифракционные задачи для клина и кругового цилиндра, а решение задачи о возбуждении рупоров приведено к той же форме, что и решение задачи о возбуждении волноводов. Использованный в гл. XVII метод параболического уравнения является, в сущности, своеобразным вариантом метода разделения переменных.

За пределами книги остались разнообразные проблемы, требующие применения численных методов и машинных расчетов: к каждой главе можно было бы присоединить длинный список таких проблем (решенных и нерешенных), но автор коснулся только некоторых из них.

За прошедшие десятилетия появились новые электродинамические системы: полосковые и щелевые линии, световоды, квазиоптические устройства и т. д. Они приобрели большое практическое значение, и их необходимо было рассмотреть хотя бы кратко. Это сделано за счет сокращения места, отведенного более старым системам.

В новом издании к каждой главе приложены задачи с решениями, облегчающие проработку основного материала и позволяющие сделать изложение более компактным, поскольку второстепенные вопросы перенесены в задачи.

Как и в первом издании, в данной книге используется абсолютная система единиц, наиболее удобная в теоретической физике, в частности при исследовании электромагнитных полей. В конце книги автор дает приложение, облегчающее переход от этих единиц к единицам СИ.

Замечания и пожелания по книге просьба направлять в издательство «Радио и связь».

Из предисловия к первому изданию

За последние десятилетия электродинамика все в большей степени становится теоретическим инструментом радиоинженера. Действительно, в диапазоне сантиметровых волн (и в примыкающих радиодиапазонах) совершенно недостаточны привычные для радиотехники прошлого теория цепей и теория длинных линий и необходимо использовать законы электромагнитного поля в их полной формулировке. В результате растущего значения радиотехники сантиметровых волн, а также трудности и новизны возникающих в ней теоретических проблем появилось большое (и все увеличивающееся с каждым днем) число работ в данной области, принадлежащих не только радиоинженерам, но также математикам и физикам.

Данная книга является введением в прикладную теорию электромагнитного поля. Она посвящена электромагнитным волнам в радиотехнических устройствах различного типа, относящихся преимущественно к сверхвысоким частотам. При этом, как подчеркивает название книги, статические и квазистатические электромагнитные поля в ней не рассматриваются. Основные положения макроскопической электродинамики — уравнения Максвелла и важнейшие следствия из них — мы считаем известными; в § 1 дается их краткая сводка, и затем мы переходим к изучению многообразных свойств электромагнитных волн. Поэтому данную книгу можно считать продолжением общего курса электродинамики. Для большей систематичности изложения в данной книге допущены лишь небольшие повторения некоторых основных вопросов. Так, например, в теории плоских волн (гл. II) и в теории скин-эффекта (гл. IV) приходится отчасти дублировать общий курс электродинамики. Однако в этих главах соответствующие вопросы рассмотрены более полно, чем это обычно делается в общих курсах.

О содержании книги читатель может судить по приложенному к ней подробному оглавлению. Следует отметить, кто книга возникла на основе лекций, прочитанных автором по курсу «Электродинамика сверхвысоких частот» или «Специальные главы электродинамики» для студентов — радиофизиков и радиотехников, а также для аспирантов соответствующих специальностей.

При подготовке книги к печати материал лекций был переработан и значительно расширен. Наряду с этим добавлены параграфы и главы, посвященные более тонким и трудным вопросам. Такие параграфы выпадающие из общей нити изложения, отмечены звездочкой; при первом чтении их можно опускать.

Основной текст книги на дополнительные параграфы не опирается. Он предназначен для читателя, впервые изучающего электродинамику сверхвысоких частот.

При анализе электромагнитных волн в различных системах большое внимание уделяется физической стороне дела. При этом применяются, как правило, наиболее простые математические методы, позволяющие, однако, вскрыть физическую сущность явлений и вместе с тем обладающие достаточной общностью. Требования, предъявляемые к математической подготовке читателя, в основном те же, что и при изучении общей электродинамики.

Глава I.
ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 1. Основные законы электродинамики

Согласно основным положениям макроскопической электродинамики электромагнитное поле в каждой точке в каждый момент времени определяется четырьмя величинами: векторами **E** и **D**, характеризующими электрическое поле, и векторами **H** и **B**, характеризующими магнитное поле. В уравнениях электромагнитного поля, помимо этих четырех векторов, фигурируют еще две величины: плотность заряда ρ и плотность тока **j**; они характеризуют источники поля — заряды и токи, наличие которых приводит к возбуждению поля в окружающем пространстве. Уточним: в макроскопической электродинамике ρ есть плотность свободного электрического заряда, а **j** — плотность электрического тока (тока проводимости). При отсутствии макроскопических перемещений вещества плотность тока и плотность заряда связаны уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{1.01}$$

выражающим тот факт, что ток проводимости обусловлен движением свободных зарядов, подчиняющихся закону сохранения электричества. Конвекционные токи, вызванные, например, движением электронов в электровакуумных приборах, в дальнейшем не рассматриваются; если они заданы, то их нетрудно учесть (как сторонние токи, см. § 3).

Векторы электромагнитного поля, а также величины **j** и ρ зависят от трех пространственных координат (например, от декартовых координат x, y, z) и времени t. Они связаны между собой системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \tag{1.02}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{1.03}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.04}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{1.05}$$

При этом здесь и далее используется абсолютная система единиц СГС; c — скорость света в пустоте, равная $2{,}998 \cdot 10^{10}$ см/с $\approx$ $\approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Уравнение (1.02) называется обычно первым, а уравнение (1.04) — вторым уравнением Максвелла. Эти уравнения, равно как и уравнения (1.03) и (1.04), являются обобщением опытных данных. Так, уравнение (1.04) есть дифференциальная формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея, уравнение (1.02) — дифференциальная формулировка закона полного тока (закона, связывающего циркуляцию магнитного поля по контуру и ток, охватываемый этим контуром) и гипотезы Максвелла о токе смещения.

Уравнения (1.02) и (1.03) записаны так, чтобы в их правых частях фигурировали величины $\mathbf{j}$ и ρ, характеризующие источники поля — токи и заряды, а в левых частях — векторы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$, характеризующие электромагнитное поле. Тогда физический смысл уравнений (1.02) и (1.03) выступает более четко: эти уравнения показывают, как электромагнитное поле возбуждается своими источниками.

В уравнениях (1.04) и (1.05) фигурируют только векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а источники поля отсутствуют.

Приведенная система уравнений справедлива для электромагнитных полей в любых средах. Однако этих уравнений недостаточно для решения конкретных задач, ибо их число меньше числа неизвестных. В самом деле, если, например, считать источники $\mathbf{j}$ и ρ заданными, то для определения четырех векторных величин $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ необходимо иметь четыре векторных уравнения, в то время как уравнения (1.03) и (1.05) суть скалярные.

Недостаточность этой системы уравнений объясняется именно ее универсальностью — она применима к электромагнитным процессам в любых средах, между тем как параметры, характеризующие среду, в ней отсутствуют. Поэтому при решении конкретных задач эти уравнения необходимо дополнять системой материальных уравнений, в которых учитывается влияние среды на протекающие в ней электромагнитные явления.

В электродинамике рассматриваются в первую очередь простейшие материальные уравнения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{1.06}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{1.07}$$

Они охватывают электромагнитные свойства достаточно большого числа сред. Однако многие свойства реальных веществ этими уравнениями, как известно, не учитываются (см. § 2 и 12).

Хотя с введением материальных уравнений получается система уравнений, математически полная и позволяющая решать до конца конкретные задачи, в физическом отношении эта система уравнений нуждается в некотором дополнении, а именно необходимо указать, как измерять на опыте величины, характеризующие электромагнитное поле: только после этого данные величины приобретают физический смысл и выводы теории приобретают практическое значение.

Так как измерение любого поля сводится, в сущности, к извлечению некоторой энергии из поля, то достаточно указать, как связана энергия поля с величинами, характеризующими поле. Поэтому к числу основных положений макроскопической теории поля относится следующее утверждение. Электромагнитная энергия распределена в пространстве, занятом полем, с некоторой объемной плотностью таким образом, что электромагнитная энергия, содержащаяся в объеме V, выражается в виде объемного интеграла

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dV. \tag{1.08}$$

Эта энергия может изменяться во времени за счет двух процессов: во-первых, она может внутри данного объема превращаться в другие, неэлектромагнитные формы энергии (внутренняя энергия тел, называемая часто тепловой энергией, химическая энергия, кинетическая энергия ускоренных частиц и т. д.), или же возникать из неэлектромагнитных форм; во-вторых, эта энергия, оставаясь электромагнитной, может вытекать из данного объема (или втекать в него) через поверхность S, ограничивающую данный объем. Электромагнитная энергия, превращающаяся в единицу времени в другие виды энергии, кратко называется мощностью, отдаваемой полем, и будет обозначаться через P. Энергию, вытекающую в единицу времени из объема через его поверхность, называют кратко потоком энергии или же мощностью излучения; ее будем обозначать через Σ. К числу основных положений электродинамики принадлежат следующие выражения для отдаваемой мощности P и мощности излучения Σ:

$$P = \int_V \mathbf{jE}\, dV, \tag{1.09}$$

$$\Sigma = \frac{c}{4\pi} \oint_S [\mathbf{EH}]\, \mathbf{n}\, dS, \tag{1.10}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали (рис. 1).

Величины P и Σ могут быть как положительными, так и отрицательными. Отрицательность P означает, что в данном объеме по преимуществу идет превращение других видов энергии в электромагнитную, отрицательность Σ показывает, что в данный объем поступает энергия из внешнего пространства.

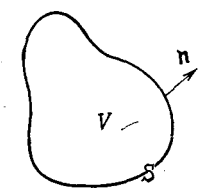


Рис. 1. Объем V, поверхность S и нормаль $\mathbf{n}$

Заметим, что применимость выражений (1.08) и (1.09) для энергии поля и отдаваемой мощности тесно связана с применимостью материальных уравнений (1.06). Если среды, заполняющие данный объем, обладают более сложными электромагнитными свойствами, то выражения (1.08) и (1.09) становятся, вообще говоря, непригодными. Од-

нако выражение (1.10) для потока энергии справедливо во всех случаях.

Как известно, три энергетические величины W, P и Σ связаны между собой соотношением Умова — Пойнтинга

$$\frac{dW}{dt} + P + \Sigma = 0, \tag{1.11}$$

которое дает формулировку закона сохранения энергии для электромагнитного поля.

Энергетические формулы (1.08)—(1.11) можно переписать в несколько ином виде. Формула (1.08) показывает, что электромагнитная энергия распределена в пространстве с объемной плотностью

$$w = w_\varepsilon + w_\mu, \tag{1.12}$$

причем эта плотность является суммой плотности электрической энергии w_ε и плотности магнитной энергии w_μ:

$$w_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2, \quad w_\mu = \frac{\mu}{8\pi} H^2. \tag{1.13}$$

Объемная плотность отдаваемой мощности (т. е. мощность, отдаваемую полем на единицу объема)

$$p = \mathbf{j}\mathbf{E}. \tag{1.14}$$

Интегральные величины W и P связаны с дифференциальными величинами w и p:

$$W = \int_V w dV, \quad P = \int_V p dV. \tag{1.15}$$

Наконец, входящий в выражение (1.10) вектор

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \tag{1.16}$$

называется вектором Умова — Пойнтинга. Этот вектор связан с потоком энергии из данного объема формулой

$$\Sigma = \oint_S \mathfrak{S}_n \, dS. \tag{1.17}$$

Согласно формуле (1.17) величину $\mathfrak{S}_n dS$ можно интерпретировать как электромагнитную энергию, проходящую в единицу времени через площадку dS, так что вектор $\mathfrak{S}$ является плотностью потока энергии. Обычно этот вектор обозначается через $\mathbf{S}$ — так же, как поверхность или площадь (последняя может быть вектором, см. § 74), что нежелательно; а другие подходящие буквы ($\mathbf{P}$, $\mathbf{\Pi}$ и пр.) используются в электродинамике для других целей. Применение вместо $\mathbf{S}$ той же готической буквы $\mathfrak{S}$ представляется разумным выходом из трудного положения.

В прошлом неоднократно дискутировался вопрос, имеет ли вектор $\mathfrak{S}$ и его поток $\mathfrak{S}_n dS$ через элементарную площадку непосредственный физический смысл или же такой смысл имеет лишь

интеграл (1.17) для замкнутой поверхности. Если, например, для расходящейся сферической волны $\mathfrak{S}_n dS$ есть действительно поток энергии, то при наложении электростатического и магнитостатического полей, когда $\mathfrak{S} \neq 0$, реальность энергетических потоков вызывала сомнения. Они устраняются, если учесть, что, например, в цепи постоянного тока происходит непрерывное перемещение энергии: из источника тока — в окружающее пространство, а оттуда — в нагрузку и другие элементы цепи (см. задачу 2). При наложении электростатического и магнитостатического полей энергия циркулирует «по замкнутому кругу», ибо тогда $\operatorname{div} \mathfrak{S} = 0$. Эта циркуляция приводит к явлениям, доступным наблюдению, поскольку согласно соотношению Эйнштейна между массой и энергией $w = \rho_m c^2$ (ρ_m — плотность массы) и $\mathfrak{S} = \mathbf{g} c^2$ ($\mathbf{g}$ — плотность количества движения), т. е. такое поле тоже обладает массой и количеством движения.

Пользуясь дифференциальными величинами w, p и $\mathfrak{S}$, можно переписать закон сохранения энергии (1.11) следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + p + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0. \tag{1.18}$$

При написании материальных уравнений (1.06) и (1.07) предполагается, что каждое однородное вещество характеризуется тремя материальными параметрами ε, μ и σ (для неоднородных веществ они зависят от координат). Чтобы отличить ε и μ, фигурирующие в уравнениях (1.08), от комплексных проницаемостей, которые будут введены дальше, будем обозначать ε и μ в уравнениях (1.06) через ε_0 и μ_0 соответственно. Тогда сводка основных формул макроскопической теории электромагнитного поля примет вид:

(II) $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\qquad$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ (I)

(IIa) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\qquad$ $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ (Ia)

(IVa) $w = \frac{\varepsilon_0}{8\pi} E^2 + \frac{\mu_0}{8\pi} H^2$ $\qquad$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (IIIa)

(IVb) $p = \mathbf{j}\mathbf{E}$ $\qquad$ $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (IIIb)

(IVc) $\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ $\qquad$ $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ (IIIc)

§ 2. Уравнения электромагнитного поля в комплексной форме

При исследовании электромагнитных колебаний и волн большое значение имеют электромагнитные поля, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону, т. е. колеблющиеся с вполне определенной частотой. Такие поля называют монохроматическими или гармоническими. При математическом исследовании монохроматических процессов, подчиняющихся линейным уравнениям,

целесообразно ввести комплексные обозначения. Эти обозначения, как известно, используются и в других областях, например в теории переменных токов. Применимость комплексных обозначений тесно связана с линейностью всех уравнений, которым подчиняются физические величины: например, известно, что если цепь переменного тока содержит нелинейный элемент, то использование комплексных обозначений вызывает ряд осложнений.

Сами уравнения Максвелла (I), (II), (Ia), и (IIa) (см. конец § 1) линейны. Поэтому при линейном характере материальных уравнений, в частности при справедливости материальных уравнений (III), переход к комплексным обозначениям производится следующим образом. Векторам $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ — векторам напряженности электрического и магнитного полей в данной точке — приводятся в соответствие комплексные векторные амплитуды, которые будем обозначать через $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$. Связь между физическими величинами и их комплексными амплитудами дается соотношениями:

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}(\omega)\, e^{-i\omega t}\}, \quad \mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{H}(\omega)\, e^{-i\omega t}\}, \tag{2.01}$$

где Re — вещественная часть комплексного вектора, стоящего в фигурной скобке; ω — круговая частота исследуемого монохроматического процесса, связанная с обычной частотой f и периодом колебания T формулой

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T. \tag{2.02}$$

Аналогичным образом вводятся комплексные амплитуды для всех физических величин, входящих в уравнения электродинамики и колеблющихся с частотой ω.

Подставляя выражения (2.01) в уравнения Максвелла (I) и (II) и пользуясь формулами дифференцирования:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\{\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\omega)\, e^{-i\omega t}\}, \tag{2.03}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(t) = \mathrm{Re}\{-i\omega\,\mathbf{B}(\omega)\, e^{-i\omega t}\},$$

получаем уравнения для комплексных амплитуд:

$$\mathrm{Re}\{[\mathrm{rot}\,\mathbf{H}(\omega) + i k \mathbf{D}(\omega)]\, e^{-i\omega t}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}(\omega)\, e^{-i\omega t}\right\}, \tag{2.04}$$

$$\mathrm{Re}\{[\mathrm{rot}\,\mathbf{E}(\omega) - i k \mathbf{B}(\omega)]\, e^{-i\omega t}\} = 0,$$

где для сокращения через k обозначена величина

$$k = \omega/c, \tag{2.05}$$

физический смысл которой рассмотрим позже. Уравнения (2.04) могут удовлетворяться при всех значениях t, если комплексные амплитуды удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - i k \mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} + i k \mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}. \tag{2.06}$$

Формальная связь комплексных уравнений (2.06) с исходными уравнениями (I) и (II) проста: для получения комплексных уравнений нужно заменить оператор дифференцирования $\partial/\partial t$ оператором умножения $-i\omega$, или символически

$$\partial/\partial t = -i\omega. \tag{2.07}$$

Пользуясь материальными уравнениями (III), преобразуем уравнения (2.06) к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu_0\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \tag{2.08}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — комплексные амплитуды, а ε — так называемая комплексная диэлектрическая проницаемость:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + i4\pi\sigma/\omega, \tag{2.09}$$

которая имеет вещественную часть — обычную диэлектрическую постоянную ε_0 данного вещества, входящую в материальное уравнение (IIIа), и мнимую часть, пропорциональную проводимости данного вещества σ и обратно пропорциональную частоте.

Мы пришли к комплексным уравнениям для монохроматических электромагнитных полей, в которых фигурирует комплексная диэлектрическая проницаемость ε. К уравнениям вида (2.08) можно прийти, исходя из более общих предположений об электрических свойствах среды. В частности, пусть диэлектрическая проницаемость, являющаяся коэффициентом пропорциональности в уравнении

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_1(\omega)\mathbf{E}(\omega), \tag{2.10}$$

связывающем комплексные амплитуды $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, зависит от частоты, а токи проводимости в данной среде отсутствуют ($\sigma = 0$, $\mathbf{j} = 0$). В этом случае приходим к тем же уравнениям (2.08), но комплексная диэлектрическая проницаемость имеет другое физическое происхождение. Если величина $\varepsilon_1(\omega)$ при данной частоте ω комплексна:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\,\varepsilon_1'' = |\varepsilon_1|\, e^{i\delta_1}, \tag{2.11}$$

то угол δ_1 определяется не проводимостью вещества, как в случае формулы (2.09), а запаздыванием по фазе вектора $\mathbf{D}(t)$ относительно вектора $\mathbf{E}(t)$. Это запаздывание часто наблюдается в диэлектриках при достаточно высоких частотах.

Если диэлектрик обладает также проводимостью, которая может зависеть от частоты, то его комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i4\pi\sigma/\omega. \tag{2.12}$$

В общем случае представим комплексную диэлектрическую проницаемость вещества в виде

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = |\varepsilon|\, e^{i\delta}. \tag{2.13}$$

Она позволяет учесть зависимость электрических свойств вещества от частоты, т. е. его дисперсию. Одновременно учитывается яв-

ление запаздывания вектора **D** относительно вектора **E** в высокочастотных электрических полях (так называемый диэлектрический гистерезис), а также зависимость проводимости вещества от частоты.

Таким образом, комплексная диэлектрическая проницаемость, входящая в комплексные уравнения поля и записываемая в виде (2.13), характеризует электрические свойства вещества при данной частоте. Ее мнимая часть может быть обусловлена как проводимостью, так и высокочастотным диэлектрическим гистерезисом. С чисто макроскопической точки зрения эти два фактора не отличимы друг от друга; в частности, они оба приводят к выделению тепла в веществе (см. § 6).

По аналогии с комплексной диэлектрической проницаемостью вводится комплексная магнитная проницаемость, зависящая в общем случае от частоты и связывающая между собой комплексные амплитуды векторов магнитного поля:

$$\mathbf{B}(\omega)=\mu(\omega)\mathbf{H}(\omega). \tag{2.14}$$

Эта величина в общем случае является комплексной

$$\mu=\mu'+i\mu''=|\mu|e^{i\Delta}, \tag{2.15}$$

причем угол Δ характеризует отставание по фазе вектора **B** от вектора **H**. Материальное уравнение (2.14) соответствует более широкому кругу веществ и электромагнитных процессов, чем материальное уравнение (IIIb). В частности, уравнение (2.14) учитывает наличие магнитных потерь в различных магнетиках и зависимость магнитных свойств от частоты (см. § 9).

Применяя вместо материальных уравнений (III) более общие соотношения этого параграфа, получаем уравнения в окончательном виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mu\mathbf{H},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\varepsilon\mathbf{E}. \tag{2.16}$$

Чтобы использовать эти уравнения для расчета электромагнитных процессов в данном веществе, необходимо знать его комплексную диэлектрическую проницаемость ε и его комплексную магнитную проницаемость μ на данной частоте. Отметим еще раз, что эти уравнения применимы лишь при отсутствии нелинейных эффектов. Обычно это означает, что исследуемые электромагнитные поля не должны быть слишком интенсивными.

Уравнения (2.16) являются основным математическим аппаратом для исследования монохроматических электромагнитных процессов. Заметим, что, преобразовывая уравнения (Ia) и (IIa) к комплексной форме, не получаем для монохроматических процессов каких-либо новых уравнений, а получаем (см. задачу 1) лишь соотношения, являющиеся тривиальным следствием уравнений (2.16).

В теорию электромагнитного поля две комплексные проницаемости ε и μ были введены в 1913 г. В. К. Аркадьевым. Уравнения (2.16) приходится применять в полном объеме, т. е. с двумя

комплексными параметрами ε и μ, только для веществ с сильно выраженными магнитными свойствами: для ферромагнитных металлов и сплавов, ферритов, искусственных магнитодиэлектриков и т. д. У парамагнитных и диамагнитных веществ магнитные свойства обычно выражены весьма слабо: для них можно считать $\mu=1$, как для пустоты. Поскольку введение комплексной магнитной проницаемости μ не усложняет уравнений поля и придает им симметрию, в дальнейшем будем рассматривать электромагнитные процессы в средах с двумя комплексными параметрами ε и μ, полагая, если нужно, при анализе конкретных сред $\mu=1$.

Заметим, что комплексные амплитуды физических величин часто вводятся не по формулам (2.01), а по несколько иным формулам

$$\mathbf{E}(t)=\operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\omega)\,e^{i\omega t}\},\quad \mathbf{H}(t)=\operatorname{Re}\{\mathbf{H}(\omega)\,e^{i\omega t}\}. \tag{2.17}$$

Тогда для комплексных амплитуд получаются уравнения, отличающиеся от уравнений (2.16) тем, что в них всюду (в том числе в выражениях для комплексных проницаемостей ε и μ) мнимая единица i заменена на $-$i. Временно́й множитель $e^{i\omega t}$ (вместо множителя $e^{-i\omega t}$, введенного нами ранее) применяется обычно в теории переменных токов. Однако для анализа электромагнитных волн вводить комплексные амплитуды по формулам (2.01) удобнее, поэтому будем пользоваться в дальнейшем множителем $e^{-i\omega t}$.

В заключение остановимся на немонохроматических процессах. Для их теоретической трактовки можно, разумеется, пользоваться общими уравнениями электродинамики, записанными в § 1. Однако в этом случае вынуждены ограничиваться материальными уравнениями (III), менее общими, чем материальные уравнения этого параграфа. Поэтому в случае, когда комплексные уравнения (2.16) применимы в достаточно широком диапазоне частот, для исследования электромагнитных процессов с произвольной зависимостью от времени можно использовать спектральное разложение, например разложение поля в интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(t)=\operatorname{Re}\int_0^\infty \mathbf{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega,\quad \mathbf{H}(t)=\operatorname{Re}\int_0^\infty \mathbf{H}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega. \tag{2.18}$$

В этом случае, как легко показать, для комплексных амплитуд $\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}(\omega)$ получаются те же комплексные уравнения (2.16), что и раньше, только связь этих комплексных амплитуд с физическими полями усложняется: вместо формул (2.01) нужно применять формулы (2.18), представляя произвольный электромагнитный процесс в виде суперпозиции монохроматических процессов.

Дадим сводку основных уравнений электромагнитного поля в комплексной форме:

$$\text{(II)}\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=i k\mu\mathbf{H},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-i k\varepsilon\mathbf{E},\qquad \text{(I)}$$

$$\mu=\mu'+i\mu''=|\mu|e^{i\Delta},\qquad \varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''=|\varepsilon|e^{i\delta}.$$

§ 3. Сторонние токи

В § 1 говорилось о том, что токи и заряды являются источниками электромагнитного поля. Это утверждение нуждается, однако, в некотором уточнении, поскольку электрические токи не только возбуждают поля, но и согласно материальному уравнению (IIIc) сами возникают под действием поля.

Рассмотрим случай, когда передающая антенна излучает электромагнитные волны в пространство, частично или полностью занятое каким-либо проводящим веществом; например, элементарный диполь (вибратор Герца) находится над землей, являющейся, вообще говоря, хорошим проводником. В такой системе имеются токи двух родов: ток в вибраторе, являющийся первичным источником электромагнитного поля, и токи в земле (или ином проводящем веществе). Эти последние возбуждают свое электромагнитное поле, что находит выражение в том, что результирующее электромагнитное поле зависит от проводимости вещества. Однако эти токи являются лишь вторичными источниками поля, возбуждаемыми самим полем согласно дифференциальному закону Ома (IIIc).

Таким образом, в § 1 и 2 принимались во внимание только вторичные токи с плотностью $\sigma\mathbf{E}$, поэтому уравнения поля, полученные в этих параграфах, не охватывают первичного возбуждения электромагнитного поля и позволяют лишь исследовать поведение поля за границами области, где находятся его источники.

Для того чтобы учесть первичные источники, проще всего обобщить материальное уравнение (IIIc) следующим образом:

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}^{e}, \tag{3.01}$$

вводя помимо вторичных токов, имеющих плотность $\sigma\mathbf{E}$, первичные или сторонние электрические токи с плотностью $\mathbf{j}^{e}$, которые считаются заданными. Последние токи возбуждают поля, но сами не порождаются рассматриваемыми электромагнитными полями, в этом смысле они являются сторонними этому полю. Полная плотность тока является векторной суммой этих двух плотностей.

Часто дифференциальный закон Ома обобщается несколько иным образом, а именно вместо (3.01) пишут

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{e}), \tag{3.02}$$

обозначая через $\mathbf{E}^{e}$ напряженность стороннего электрического поля. При этом возможны два случая: $\mathbf{E}^{e}$ есть напряженность поля сторонних электродвижущих сил (сил неэлектромагнитного происхождения — химических, диффузионных и т. д.), но при исследовании динамических процессов чаще всего встречается случай, когда $\mathbf{E}^{e}$ есть просто напряженность поля от части системы, не рассматриваемой детально.

Соотношения (3.01) и (3.02) становятся эквивалентными, если считать

$$\mathbf{j}^{e}=\sigma\mathbf{E}^{e}. \tag{3.03}$$

В одних случаях удобнее вводить в качестве первичных источников сторонние токи, в других — сторонние электродвижущие силы. Далее будем в основном пользоваться сторонними токами, переходя, если нужно, к сторонним электродвижущим силам с помощью формулы (3.03).

Пользуясь соотношением (3.01) и проводя те же рассуждения, что и в § 2, приходим к комплексным уравнениям поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathrm{i}k\mu\mathbf{H},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-\mathrm{i}k\varepsilon\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{\mathrm{e}}, \tag{3.04}$$

в которых уже фигурирует плотность стороннего тока $\mathbf{j}^{\mathrm{e}}$. Заметим, что для одной и той же физической системы величины $\mathbf{j}^{\mathrm{e}}$ и $\mathbf{E}^{\mathrm{e}}$ вводятся по-разному, в зависимости от постановки задачи. Если рассматривается распространение радиоволн, излученных данной антенной, то, как было указано выше, токи в антенне можно считать заданными и вводить с помощью $\mathbf{j}^{\mathrm{e}}$. Однако в реальных условиях передача энергии от генератора к антенне происходит по передающей линии. Для анализа прохождения энергии по линии достаточно заменить генератор некоторой сторонней электродвижущей силой, а антенну — некоторой нагрузкой. Таким образом, при теоретическом анализе одной и той же реальной системы сторонние токи или электродвижущие силы можно помещать в различные места — в зависимости от того, какие свойства и какие части системы нужно исследовать. Сторонние источники как раз позволяют учесть, что кроме выделенной части системы существуют и другие, не рассматриваемые детально, но влияющие на выделенную часть. Если такого выделения не производить и все рассматривать совместно, то всегда будут получаться сложные задачи, не поддающиеся решению.

Часто вводят, наряду со сторонними электрическими токами, также сторонние магнитные токи, плотность которых будем обозначать через $\mathbf{j}^{\mathrm{m}}$. Вектор $\mathbf{j}^{\mathrm{m}}$ вводится в уравнения поля так, чтобы они стали симметричными относительно электрических и магнитных величин; комплексные уравнения электромагнитного поля приобретают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\mathrm{i}k\mu\mathbf{H}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{\mathrm{m}},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-\mathrm{i}k\varepsilon\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{\mathrm{e}}. \tag{3.05}$$

Нужно, однако, иметь в виду, что магнитных токов и магнитных зарядов в действительности не существует. Это находит, в частности, свое выражение в том, что в правых частях уравнения Максвелла (II) и (IIа), приведенных в конце § 1, стоят нули. Магнитные токи вводятся в уравнения поля из формальных соображений — чтобы облегчить расчет полей, создаваемых сложными источниками. Из тех же соображений, в сущности, вводятся магнитные заряды при современном изложении теории магнитного поля.

В теории статического магнитного поля доказывается, что небольшой замкнутый контур тока создает такое же магнитное поле,

как и магнитный диполь, состоящий из двух близко расположенных зарядов, противоположных по знаку. Эта аналогия распространяется на переменные токи и поля (см. § 74); таким образом «реализуется» и поле колеблющегося магнитного диполя с переменными зарядами и соединяющим их магнитным током. Рассматривать же магнитный диполь проще, чем контур тока. В данном примере вместо реально существующего распределения $\mathbf{j}^e$ введено распределение $\mathbf{j}^m$.

Заметим, что в теории монохроматических электромагнитных полей обычно не рассматривают зарядов, поскольку в силу соотношения (2.07) и уравнения непрерывности (1.01) они однозначно определяются токами

$$\rho = \operatorname{div} \mathbf{j}/i\omega. \tag{3.06}$$

Плотность сторонних зарядов — как электрических, так и магнитных — определяется аналогичными соотношениями

$$\rho^e = \operatorname{div} \mathbf{j}^e/i\omega, \quad \rho^m = \operatorname{div} \mathbf{j}^m/i\omega, \tag{3.07}$$

и если образовать дивергенции от обеих частей уравнений (3.04), использовать тождество $\operatorname{div}\operatorname{rot}=0$ и формулы (3.07), то получим уравнения

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 4\pi\rho^m, \quad \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho^e, \tag{3.08}$$

аналогичные уравнениям (Ia) и (IIa) в § 1. Таким образом, в теории монохроматических полей как заряды, так и уравнения поля, в которые они входят, не имеют самостоятельного значения и поэтому не принимаются во внимание.

В заключение перепишем основные комплексные уравнения поля со сторонними токами

$$\text{(II)}\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e\ \text{(I)}.$$

§ 4. Граничные условия

Параметры ε и μ, фигурирующие в уравнениях электромагнитного поля, могут любым образом изменяться в пространстве. Это изменение может происходить не только непрерывно, но и скачкообразно, например на некоторой поверхности S параметры могут терпеть скачок — такая поверхность является границей раздела двух сред. На поверхности S электромагнитное поле также испытывает скачок, и уравнения электромагнитного поля должны быть дополнены граничными условиями. Как известно из общей электродинамики, на поверхности раздела двух сред имеют место граничные условия

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}, \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)}, \tag{4.01}$$

справедливые при отсутствии поверхностных токов. Здесь индекс t определяет тангенциальные составляющие полей, а значками $^{(1)}$ и $^{(2)}$ отмечены поля по обе стороны границы раздела S.

БИБЛИОТЕКА



Рис. 2. Граница раздела S

Граничные условия (4.01) получаются с помощью предельного перехода из уравнений (I) и (II) § 1. Если тот же предельный переход применить к комплексным уравнениям (I) и (II) § 3, то получим такие же граничные условия (4.01) для комплексных амплитуд $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

Как указывалось выше, для монохроматических процессов уравнения (3.08) следуют из уравнений (3.05). Можно показать, что граничные условия для нормальных составляющих поля, вытекающие из уравнений (3.08), также автоматически удовлетворяются, коль скоро справедливы граничные условия (4.01).

В случае если на поверхности S имеются поверхностные токи — электрические и магнитные, поверхностные плотности которых соответственно обозначаются через $\mathbf{i}^e$ и $\mathbf{i}^m$, то тангенциальные составляющие электрического и магнитного поля терпят разрыв и вместо граничных условий (4.01) будем иметь граничные условия

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)}]=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^m,\quad [\mathbf{n},\ \mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^e, \tag{4.02}$$

где через $\mathbf{n}$ обозначена нормаль к поверхности S, направленная в сторону *2* (рис. 2). Если имеются поверхностные электрические токи, возбуждаемые полем, то в граничных условиях (4.03) под $\mathbf{i}^e$ нужно понимать полную поверхностную плотность тока (как стороннего, так и возбужденного полем).

Заметим, что поверхностные электрические токи не могут существовать в проводниках, имеющих конечную проводимость: действительно, наличие поверхностных токов означает, что через бесконечно малое поперечное сечение проводника идет конечный ток, что приведет к выделению бесконечно большого джоулева тепла. Поэтому поверхностные токи становятся физически возможными только при бесконечной проводимости тела (идеально проводящие тела, см. § 24). Поверхностные магнитные токи имеют еще более условное значение (см. § 74 и 92).

§ 5. Леммы о смысле квадратов и произведений комплексных амплитуд

Выше приведены в комплексной форме как уравнения электромагнитного поля, так и граничные условия. К числу основных положений теории поля (см. § 1) относится также связь между величинами, фигурирующими в уравнениях (в данном случае — комплексными амплитудами полей и сторонних токов), и энергетическими величинами.

Как видно из § 1, энергетические величины определяются квадратами и произведениями мгновенных значений полей и токов. Ниже выразим энергетические величины, характеризующие монохроматические поля, непосредственно через комплексные амплитуды. Для этого понадобятся две простые леммы.

Пусть имеются две физические величины $a(t)$ и $b(t)$, которые сначала будем считать скалярными. Им соответствуют комплексные амплитуды $a(\omega)$ и $b(\omega)$, связанные с самими величинами соотношениями

$$a(t)=\mathrm{Re}\{a(\omega)e^{-i\omega t}\},\quad b(t)=\mathrm{Re}\{b(\omega)e^{-i\omega t}\}. \tag{5.01}$$

Если $a(\omega)$ и $b(\omega)$ суть комплексные числа:

$$a(\omega)=Ae^{i\alpha},\quad b(\omega)=Be^{i\beta}, \tag{5.02}$$

где A и B — абсолютные величины, а α и β — аргументы этих комплексных чисел, то

$$a(t)=A\cos(\omega t-\alpha),\quad b(t)=B\cos(\omega t-\beta). \tag{5.03}$$

Таким образом, абсолютные величины комплексных амплитуд являются амплитудами соответствующих физических величин, а аргументы комплексных амплитуд определяют фазу этих величин.

Образуя произведение

$$a(t)\,b(t)=AB\cos(\omega t-\alpha)\cos(\omega t-\beta)=$$

$$=\frac{1}{2}AB[\cos(\alpha-\beta)+\cos(2\omega t-\alpha-\beta)] \tag{5.04}$$

и вычисляя его среднее значение за период колебания

$$\overline{a(t)\,b(t)}=\frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,b(t)\,dt, \tag{5.05}$$

очевидно, получим

$$\overline{a(t)\,b(t)}=\frac{1}{2}AB\cos(\alpha-\beta), \tag{5.06}$$

или

$$\overline{a(t)\,b(t)}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{a(\omega)\,b^*(\omega)\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{a^*(\omega)\,b(\omega)\}. \tag{5.07}$$

При $a(t)=b(t)$ эта формула дает выражение для среднего квадрата

$$\overline{a^2(t)}=\frac{1}{2}a(\omega)\,a^*(\omega)=\frac{1}{2}|a(\omega)|^2. \tag{5.08}$$

Формулы (5.07) и (5.08) дают первую лемму, в которой от скалярных физических величин не представляет трудности перейти к векторным. Рассмотрим энергетические величины

$$w_\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{8\pi}E^2,\quad w_\mu=\frac{\mu_0}{8\pi}H^2, \tag{5.09}$$

$$p=\mathbf{jE},\quad \mathfrak{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \tag{5.10}$$

о которых говорилось в § 1 [см. формулы (1.13), (1.14) и (1.16)].

Соответствующие средние (за период колебания) значения выразятся через комплексные амплитуды полей по формулам:

$$\overline{w}_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{16\pi} |\mathbf{E}(\omega)|^2, \quad \overline{w}_\mu = \frac{\mu_0}{16\pi} |\mathbf{H}(\omega)|^2, \tag{5.11}$$

$$\overline{p} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{j}^*(\omega)\,\mathbf{E}(\omega)\}, \quad \overline{\mathfrak{S}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{H}^*(\omega)], \tag{5.12}$$

непосредственно вытекающим из формул (5.08) и (5.07).

Доказанная лемма позволяет по известным комплексным амплитудам вычислять среднее значение или постоянную часть энергетических величин. Докажем теперь другую лемму, позволяющую делать то же самое для переменной или, что то же, колеблющейся части энергетических величин.

Действительно, выражение (5.04) для произведения $a(t)\,b(t)$ можно переписать в виде

$$a(t)\,b(t) = \overline{a(t)\,b(t)} + \dddot{a}(t)\,\dddot{b}(t),$$

где функцию времени

$$\dddot{a}(t)\,\dddot{b}(t) = \frac{1}{2} AB \cos(2\omega t - \alpha - \beta) \tag{5.13}$$

естественно назвать переменной или колеблющейся частью произведения $a(t)\,b(t)$: эта часть колеблется во времени с частотой 2ω и имеет среднее значение, равное нулю. Формулу (5.13) можно переписать в виде

$$\dddot{a}(t)\,\dddot{b}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a(\omega)\,b(\omega)\,e^{-2i\omega t}\}, \tag{5.14}$$

показывающем, что половина произведения комплексных амплитуд $a(\omega)\,b(\omega)$ является комплексной амплитудой колеблющейся части произведения $a(t)\,b(t)$. В самом деле, формула (5.14) аналогична формулам (5.01), отличается лишь временными множителями ($e^{-2i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$). При $a(t) = b(t)$ формула (5.14) принимает вид

$$\dddot{a}^2(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{a^2(\omega)\,e^{-2i\omega t}\}. \tag{5.15}$$

Анализируя с помощью формул (5.14) и (5.15) энергетические величины (5.09) и (5.10), получаем

$$\tilde{w}_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{16\pi} \mathbf{E}^2(\omega), \quad \tilde{w}_\mu = \frac{\mu_0}{16\pi} \mathbf{H}^2(\omega), \tag{5.16}$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} \mathbf{j}(\omega)\,\mathbf{E}(\omega), \quad \tilde{\mathfrak{S}} = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}(\omega)\,\mathbf{H}(\omega)], \tag{5.17}$$

где $\tilde{w}_\varepsilon$ и $\tilde{w}_\mu$ — комплексные амплитуды колеблющейся части плотности электрической и магнитной энергии соответственно; $\tilde{p}$ — комплексная амплитуда колеблющейся части плотности отдаваемой мощности; $\tilde{\mathfrak{S}}$ — комплексная амплитуда колеблющейся части вектора Умова — Пойнтинга.

Доказанные леммы раскрывают смысл произведения $\frac{1}{2}a(\omega)b(\omega)$ и вещественной части произведения $\frac{1}{2}a(\omega)b^*(\omega)$. При этом смысл мнимой части $\frac{1}{2}a(\omega)b^*(\omega)$ остается неопределенным и, в частности, мнимая часть вектора $(c/8\pi)[\mathbf{E}(\omega)\mathbf{H}^*(\omega)]$ не имеет четкого физического смысла. То же относится и к мнимой части $\frac{1}{2}\mathbf{j}^*(\omega)\mathbf{E}(\omega)$.

Применим доказанные выше простые леммы к двухполюснику — некоторой цепи, состоящей из элементов R, L и C (рис. 3). Пусть $J(t)$ — ток, а $U(t)$ — напряжение. Тогда мгновенная мощность, вводимая в двухполюсник,

$$\mathcal{P}(t)=J(t)U(t). \tag{5.18}$$

Она равна работе электрического поля, прогоняющего через двухполюсник за единицу времени заряд $J(t)$.

Если напряжение и ток изменяются по синусоидальному закону с частотой ω, то можно ввести комплексные амплитуды

$$U(\omega)=U_0e^{i\alpha},\ J(\omega)=J_0e^{i\beta}, \tag{5.19}$$

где U_0 и J_0 — абсолютные величины комплексных амплитуд, α и β — их фазы, а через φ обычно обозначается разность фаз

$$\varphi=\alpha-\beta. \tag{5.20}$$

Величину

$$\hat{\mathcal{P}}=\frac{1}{2}J^*(\omega)U(\omega)=\frac{1}{2}J_0U_0e^{i\varphi} \tag{5.21}$$

в электротехнике и радиотехнике называют комплексной мощностью, ее вещественную часть

$$\mathrm{Re}\,\hat{\mathcal{P}}=\frac{1}{2}J_0U_0\cos\varphi \tag{5.22}$$

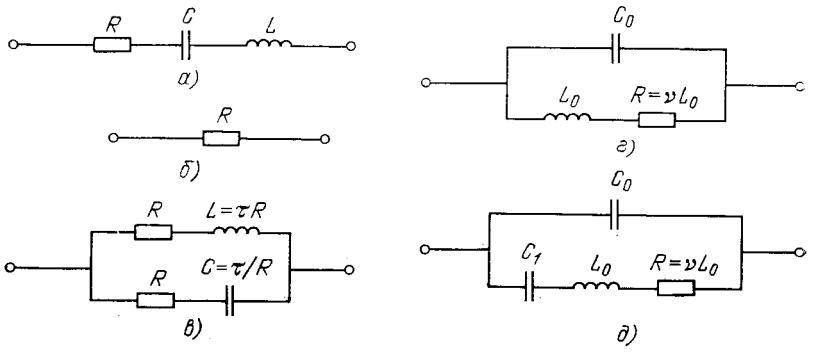


Рис. 3. Двухполюсники (к § 5 и 8)

— активной мощностью, ее мнимую часть

$$\operatorname{Im}\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} J_0 U_0 \sin\varphi \tag{5.23}$$

— реактивной мощностью. Величина (5.22) по первой лемме равна среднему значению мгновенной мощности (5.18), величина (5.23) четкого энергетического смысла не имеет. Колеблющаяся часть мгновенной мощности (5.18) определяется по второй лемме комплексной амплитудой

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} J(\omega) U(\omega) = \frac{1}{2} J_0 U_0 e^{i(\alpha+\beta)}. \tag{5.24}$$

Ниже, в § 6, аналогичные понятия будут введены для электромагнитных полей. В двухполюсниках, изображенных на рис. 3,*б*, *в*, всегда $\varphi=0$; к рис. 3 вернемся в § 8.

Величина $\mathcal{P}(t)$ в теории электромагнитного поля заменяется на $-\Sigma$, т. е. на поток энергии в данный объем из окружающего пространства. Поэтому соотношение (1.11) для двухполюсника принимает вид

$$\mathcal{P}(t) = P + \frac{dW}{dt}, \tag{5.25}$$

где P — мощность потерь; W — электромагнитная энергия в двухполюснике.

§ 6. Теорема о комплексной мощности

Из комплексных уравнений § 3

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i k \mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i k \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e \tag{6.01}$$

легко получаются уравнения для комплексно-сопряженных векторов $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^* = -i k \mu^* \mathbf{H}^* - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{m*}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^* = i k \varepsilon^* \mathbf{E}^* + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{e*}, \tag{6.02}$$

где

$$\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'', \quad \mu = \mu' + i\mu'', \\ &\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \mu^* = \mu' - i\mu''. \end{aligned} \tag{6.03}$$

Умножим первое уравнение (6.01) скалярно на $\mathbf{H}^*$, второе уравнение (6.02) на $-\mathbf{E}$ и результаты сложим. Используя известное тождество векторного анализа

$$\mathbf{H}^*\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}^* = \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \tag{6.04}$$

получаем соотношение

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = -i k \varepsilon^* |\mathbf{E}|^2 + i k \mu |\mathbf{H}|^2 - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E} + \mathbf{j}^m \mathbf{H}^*), \tag{6.05}$$

которое после умножения на $-c/8\pi$ и использования формул (2.05) и (6.03) принимает вид

$$-\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}^*]=\frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''|\mathbf{E}|^2+\mu''|\mathbf{H}|^2)+$$

$$+i\frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon'|\mathbf{E}|^2-\mu'|\mathbf{H}|^2)+\frac{1}{2}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E}+\mathbf{j}^{m}\mathbf{H}^*). \tag{6.06}$$

Введем обозначения:

$$\hat{\mathfrak{S}}=\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}^*],\quad \hat{p}_e=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathbf{j}^{e*}}\mathbf{E},\quad \hat{p}_m=\frac{1}{2}\mathbf{j}^{m}\mathbf{H}^*, \tag{6.07}$$

$$\overline{p}_\varepsilon=\frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}|\mathbf{E}|^2,\quad \overline{p}_\mu=\frac{\omega\mu''}{8\pi}|\mathbf{H}|^2, \tag{6.08}$$

$$w'_\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{16\pi}|\mathbf{E}|^2,\quad w'_\mu=\frac{\mu'}{16\pi}|\mathbf{H}|^2, \tag{6.09}$$

причем отметим, что величины $\hat{\mathfrak{S}}$, $\hat{p}_e$ и $\hat{p}_m$ — комплексные, а остальные — вещественные. С помощью этих обозначений перепишем соотношение (6.06) более кратко:

$$-\operatorname{div}\hat{\mathfrak{S}}=\overline{p}_\varepsilon+\overline{p}_\mu+2i\omega(w'_\varepsilon-w'_\mu)+\hat{p}_e+\hat{p}_m. \tag{6.10}$$

По форме это соотношение напоминает формулу (1.18); ниже будет показано, что соотношение (6.10) включает в себя закон сохранения энергии для монохроматических полей. Чтобы облегчить физический анализ этого соотношения, введем интегральные величины (V — объем, ограниченный поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$, см. рис. 1):

$$\hat{\Sigma}=\oint_S\hat{\mathfrak{S}}_n\,dS,\quad \hat{P}_e=\int_V\hat{p}_e\,dV,\quad \hat{P}_m=\int_V\hat{p}_m\,dV, \tag{6.11}$$

$$\overline{P}_\varepsilon=\int_V\overline{p}_\varepsilon\,dV,\quad \overline{P}_\mu=\int_V\overline{p}_\mu\,dV, \tag{6.12}$$

$$W'_\varepsilon=\int_V w'_\varepsilon\,dV,\quad W'_\mu=\int_V w'_\mu\,dV \tag{6.13}$$

и преобразуем с помощью теоремы Гаусса — Остроградского формулу (6.10) в интегральное соотношение

$$-\hat{\Sigma}=\overline{P}_\varepsilon+\overline{P}_\mu+2i\omega(W'_\varepsilon-W'_\mu)+\hat{P}_e+\hat{P}_m. \tag{6.14}$$

Вектор $\hat{\mathfrak{S}}$ называется комплексным вектором Умова — Пойнтинга, а величина $\hat{\Sigma}$ — комплексной мощностью излучения из данного объема V. Формула (5.12) показывает, что вещественные части этих комплексных величин имеют четкий физический смысл

$$\operatorname{Re}\hat{\mathfrak{S}}=\overline{\mathfrak{S}},\quad \operatorname{Re}\hat{\Sigma}=\overline{\Sigma}, \tag{6.15}$$

где $\overline{\mathfrak{S}}$ — среднее (за период колебания) значение обычного вектора Умова — Пойнтинга $\mathfrak{S}$, а $\overline{\Sigma}$ — среднее значение мощности излу-

чения (или, что то же, потока энергии) из данного объема. Физический смысл этих величин нами подробно рассмотрен в § 1. Мгновенное значение мощности, поглощаемой сторонними электрическими токами, можно по аналогии с формулами (1.09) и (1.14) написать в виде

$$P_e = \int_V p_e \, dV, \quad p_e = \mathbf{j}^e(t)\,\mathbf{E}(t), \tag{6.16}$$

тогда комплексные величины $\hat{P}_e$ и $\hat{p}_e$ будут связаны с P_e и p_e соотношениями

$$\mathrm{Re}\hat{p}_e = \bar{p}_e, \ \mathrm{Re}\hat{P}_e = \bar{P}_e, \tag{6.17}$$

подобными формулам (6.15). Аналогичные соотношения можно написать для мощности, поглощаемой сторонними магнитными токами:

$$P_m = \int_V p_m \, dV, \quad p_m = \mathbf{j}^m(t)\,\mathbf{H}(t) \tag{6.18}$$

и

$$\mathrm{Re}\,\hat{p}_m = \bar{p}_m, \quad \mathrm{Re}\,\hat{P}_m = \bar{P}_m. \tag{6.19}$$

Эти величины позволяют рассчитывать мощность, извлекаемую из электромагнитного поля рамочными антеннами, щелями и отверстиями (см. далее § 74), а также мощность, сообщаемую ими полю (при отрицательности $\bar{P}_m$).

Приравнивая в соотношении (6.14) вещественные части, получаем

$$-\mathrm{Re}\hat{\Sigma} = \bar{P}_в + \bar{P}_\mu + \bar{P}_e + \bar{P}_m. \tag{6.20}$$

Левая часть этого соотношения в силу знака минус равна средней мощности, поступающей в данный объем V через его поверхность S. Если эту среднюю мощность умножить на период колебаний T, то получим полную электромагнитную энергию, втекающую в данный объем через поверхность за период.

Исходя из общего закона сохранения энергии, можно считать, что поступление электромагнитной энергии за период T приведет к соответствующему увеличению энергии объема V как электромагнитной, так и других форм энергии. Однако из-за периодичности процесса электромагнитные поля в объеме V при истечении времени T возвращаются к прежним значениям, и так как электромагнитная энергия должна однозначно определяться полями, то и она по истечении периода T приходит к начальному значению. Поэтому остается только одна возможность: электромагнитная энергия, втекающая в данный объем за период, равна приращению неэлектромагнитной энергии в этом объеме.

Из этих соображений следует, что стоящая в правой части формулы (6.09) сумма четырех слагаемых

$$\bar{P} = \bar{P}_в + \bar{P}_\mu + \bar{P}_e + \bar{P}_m \tag{6.21}$$

есть средняя мощность, отдаваемая полем в данном объеме. Слагаемое $\bar{P}_\varepsilon$ дает мощность электрических потерь, слагаемое $\bar{P}_\mu$ — мощность магнитных потерь, слагаемые $\bar{P}_e$ и $\bar{P}_m$ — мощность, сообщаемую электромагнитным полем сторонним электрическим и магнитным токам. Величины $\bar{p}_\varepsilon$, $\bar{p}_\mu$, $\bar{p}_e$ и $\bar{p}_m$ определяют соответственно объемные плотности этих мощностей, сумма их

$$\bar{p}=\bar{p}_\varepsilon+\bar{p}_\mu+\bar{p}_e+\bar{p}_m \tag{6.22}$$

дает объемную плотность мощности, отдаваемой полем. Правильность этой интерпретации легко проверить в случае, когда справедливы простейшие материальные условия (III) § 1. В этом случае [ср. формулу (2.09)]

$$\varepsilon''=4\pi\sigma/\omega,\quad \mu''=0,\quad \mathbf{j}^m=0, \tag{6.23}$$

так что

$$\bar{p}=\frac{1}{2}\sigma|\mathbf{E}|^2+\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^{e*}\mathbf{E})=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\sigma\mathbf{E}+\mathbf{j}^e)^*\mathbf{E}\}, \tag{6.24}$$

что можно благодаря соотношению (3.01) записать более кратко:

$$\bar{p}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{j}^*\mathbf{E}), \tag{6.25}$$

а это полностью согласуется с первой формулой (5.12), выведенной выше для отдаваемой мощности. Ниже (в § 8) более детально рассмотрен физический смысл величин $\bar{p}_\varepsilon$ и $\bar{p}_\mu$ в том случае, когда простейшие материальные условия (III) не имеют места.

Предыдущее изложение базировалось на том, что данное в § 1 выражение (1.10) для потока энергии остается справедливым для любых сред, в том числе для веществ с любыми комплексными проницаемостями ε и μ. Только благодаря этому обстоятельству выяснен смысл левой части формулы (6.20) и всей этой формулы.

Выше рассмотрена вещественная часть комплексного соотношения (6.14) и сделан вывод о том, что она представляет собой энергетический баланс за период или, что то же самое, баланс средних мощностей. Вещественная часть введенной выше комплексной мощности излучения $\hat{\Sigma}$, равная средней мощности, называется обычно активной мощностью, а мнимая часть комплексной мощности — реактивной мощностью. Эта терминология распространяется на другие виды мощности: так, величины $\hat{P}_e$ и $\hat{P}_m$ называются комплексными мощностями, отдаваемыми сторонним токам, тогда $\operatorname{Re}\hat{P}_e$ и $\operatorname{Re}\hat{P}_m$ суть активные, $\operatorname{Im}\hat{P}_e$ и $\operatorname{Im}\hat{P}_m$ — реактивные мощности.

Применяя эту терминологию, соотношение (6.14) можно назвать теоремой о комплексной мощности, его вещественную часть (6.20) — теоремой об активной мощности, а его мнимую часть

$$-\operatorname{Im}\hat{\Sigma}=2\omega(W'_\varepsilon-W'_\mu)+\operatorname{Im}(\hat{P}_e+\hat{P}_m) \tag{6.26}$$

— теоремой о реактивной мощности.

Последнее соотношение является прямым следствием уравнений поля и часто весьма полезно для расчетов. Однако оно не имеет четкого физического смысла. Прежде всего таким смыслом не обладает само понятие реактивной мощности, как это уже было отмечено в конце § 5. Часто с понятием реактивной мощности связывают представление о колеблющейся мощности (среднее значение которой равно нулю), в отличие от постоянного слагаемого в выражении для мощности — средней или активной мощности. Однако на самом деле это не так: в следующем параграфе рассмотрена теорема о колеблющейся мощности и показано, что она существенно отличается от теоремы о реактивной мощности.

Следует добавить, что величины W'_ε и W'_μ также не имеют в общем случае четкого физического смысла: они не равны средней за период электрической и магнитной энергии поля в объеме V, как будет видно ниже (см. § 8 и 9).

Рассмотренная выше теорема о комплексной мощности в литературе часто называется комплексной теоремой Умова — Пойнтинга.

§ 7*. Теорема о колеблющейся мощности

Теорему о колеблющейся мощности легко получить из уравнений (6.01), умножая первое на $\mathbf{H}$, второе на $-\mathbf{E}$ и складывая:

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}] = \mathrm{i}\,k\varepsilon\,\mathbf{E}^2 - \mathrm{i}\,k\mu\,\mathbf{H}^2 - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\,\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\mathrm{m}}\,\mathbf{H}). \tag{7.01}$$

Добавляя множитель $-c/8\pi$ и пользуясь формулами (6.03), приходим к соотношению

$$-\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon''\,\mathbf{E}^2 + \mu''\,\mathbf{H}^2) - \mathrm{i}\,\frac{\omega}{8\pi}(\varepsilon'\,\mathbf{E}^2 + \mu'\,\mathbf{H}^2) +$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\,\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\mathrm{m}}\,\mathbf{H}). \tag{7.02}$$

Оно похоже по внешнему виду на соотношение (6.06), но имеет иной физический смысл. Согласно формуле (5.17) вектор

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}] \tag{7.03}$$

дает колеблющуюся часть вектора Умова — Пойнтинга, а величины

$$\widetilde{p}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\,\mathbf{E}, \qquad \widetilde{p}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\,\mathbf{j}^{\mathrm{m}}\,\mathbf{H} \tag{7.04}$$

— колеблющуюся часть мощности, отдаваемой полем сторонним электрическим и магнитным токам в единице объема.

Как увидим далее, соотношение (7.02) дает теорему о колеблющейся мощности. Прежде чем переходить к более детальному анализу этого соотношения, вернемся к формуле (1.18) — дифференциальной форме закона сохранения и превращения энергии для

любого поля. Рассматривая монохроматическое электромагнитное поле и усредняя соотношение (1.18) по времени, в силу равенства

$$\overline{\frac{\partial w}{\partial t}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial w}{\partial t}\,dt = \frac{w(T) - w(0)}{T} = 0, \tag{7.05}$$

вытекающего из периодичности энергии (см. § 6), получаем формулу

$$\overline{p} + \operatorname{div}\overline{\mathfrak{S}} = 0. \tag{7.06}$$

Это — дифференциальная формулировка закона сохранения энергии в среднем за период или теорема об активной мощности. Согласно § 6 величина $\overline{p}$ определяется формулой (6.22), а величина $\overline{\mathfrak{S}}$ — формулой (6.15); само соотношение (7.06) получим, если в выражении (6.10) приравняем вещественные части.

Беря колеблющуюся (переменную) часть каждого слагаемого в формуле (1.18), получаем соотношение

$$\dddot{\frac{\partial w}{\partial t}} + \dddot{p} + \operatorname{div}\dddot{\mathfrak{S}} = 0. \tag{7.07}$$

Действительно, производная $\partial w/\partial t$ согласно формуле (7.05) постоянной части не имеет, поэтому ее переменная часть

$$\dddot{\frac{\partial w}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{w} + \dddot{w}) = \frac{\partial \dddot{w}}{\partial t}. \tag{7.08}$$

Вводя вместо колеблющихся величин $\dddot{w}$, $\dddot{p}$ и $\dddot{\mathfrak{S}}$ их комплексные амплитуды $\tilde{w}$, $\tilde{p}$ и $\tilde{\mathfrak{S}}$ по формулам

$$\dddot{w} = \operatorname{Re}(\tilde{w}\,e^{-2i\omega t}), \quad \dddot{p} = \operatorname{Re}(\tilde{p}\,e^{-2i\omega t}),$$
$$\dddot{\mathfrak{S}} = \operatorname{Re}(\tilde{\mathfrak{S}}\,e^{-2i\omega t}) \tag{7.09}$$

(см. § 5), приходим к соотношению

$$-\operatorname{div}\tilde{\mathfrak{S}} = \tilde{p} - 2i\omega\tilde{w}. \tag{7.10}$$

Переменную часть плотности мощности, отдаваемой полем, естественно представить, как и постоянную часть (6.22), в виде суммы четырех слагаемых

$$\tilde{p} = \tilde{p}_\varepsilon + \tilde{p}_\mu + \tilde{p}_e + \tilde{p}_m, \tag{7.11}$$

где величины $\tilde{p}_e$ и $\tilde{p}_m$ определяются формулами (7.04), а величины $\tilde{p}_\varepsilon$ и $\tilde{p}_\mu$ дают переменную часть мощности электрических и магнитных потерь в веществе.

Переменная часть плотности энергии

$$\tilde{w} = \tilde{w}_\varepsilon + \tilde{w}_\mu, \tag{7.12}$$

где $\tilde{w}_\varepsilon$ — переменная часть плотности электрической энергии; $\tilde{w}_\mu$ — магнитной.

При сравнении формул (7.02) и (7.10) можно сделать вывод, что переменная часть плотности электрических и магнитных потерь в веществе

$$\tilde{p}_\varepsilon = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}\mathbf{E}^2, \quad \tilde{p}_\mu = \frac{\omega\mu''}{8\pi}\mathbf{H}^2, \tag{7.13}$$

а переменная часть плотности электрической и магнитной энергии

$$\tilde{w}_\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{16\pi}\mathbf{E}^2, \quad \tilde{w}_\mu = \frac{\mu'}{16\pi}\mathbf{H}^2. \tag{7.14}$$

Однако такая физическая интерпретация слагаемых в формуле (7.02) является неоднозначной и в общем случае просто ошибочной. Действительно, сравнение тождеств (7.01) и (7.02) с законом сохранения энергии (7.10) приводит к соотношениям

$$\tilde{p}_\varepsilon - 2i\omega\tilde{w}_\varepsilon = -i\frac{\omega\varepsilon}{8\pi}\mathbf{E}^2, \quad \tilde{p}_\mu - 2i\omega\tilde{w}_\mu = -i\frac{\omega\mu}{8\pi}\mathbf{H}^2, \tag{7.15}$$

из которых формулы (7.13) и (7.14) можно получить лишь в частных случаях, например при справедливости простейших материальных уравнений (§ 1), когда $\varepsilon' = \varepsilon_0$, $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$ и $\mu = \mu_0$. Как увидим ниже, знание комплексных функций $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ еще не дает возможности вычислить плотность электромагнитной энергии — как ее среднего значения, так и переменной части (см. § 8).

От дифференциальной формулировки (7.07) нетрудно перейти к интегральной

$$\frac{d\tilde{W}}{dt} + \tilde{P} + \tilde{\Sigma} = 0, \tag{7.16}$$

где

$$\tilde{W} = \int_V \tilde{w}\,dV; \quad \tilde{P} = \int_V \tilde{p}\,dV; \quad \tilde{\Sigma} = \oint_S \tilde{\mathfrak{S}}_n\,dS. \tag{7.17}$$

Пользуясь соответствующими комплексными амплитудами $\hat{W}$, $\hat{P}$ и $\hat{\Sigma}$, можно также написать

$$-\hat{\Sigma} = \hat{P} - 2i\omega\hat{W}. \tag{7.18}$$

Соотношения (7.16) и (7.18) называются теоремой о колеблющейся мощности.

§ 8*. Энергия электромагнитного поля

Чтобы пояснить затруднения, возникающие при определении энергии электромагнитного поля, остановимся на вопросе, который редко разбирается в курсах электродинамики. Вопрос состоит в следующем: при справедливости простейших материальных уравнений § 1, в частности уравнений (IIIc) и (IVb), плотность потерь $\sigma E^2 = j^2/\sigma$, что соответствует выражению RJ^2 для мощности, выделяющейся в виде тепла в сопротивлении R при прохождении че-

рез него тока J. Это выражение соответствует опытному закону Джоуля — Ленца, которое, как кажется на первый взгляд, однозначно следует из закона Ома $U=RJ$ для напряжения U, т. е. из уравнения $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$.

На самом же деле закон Джоуля — Ленца не является тривиальным следствием закона Ома: закон Ома, т. е. соотношение $U=RJ$, для данного двухполюсника может выполняться, причем на всех частотах, а закон Джоуля — Ленца не выполняется, выражение RJ^2 для мощности потерь неприменимо. Более того, в противовес обычным представлениям в данном двухполюснике может накапливаться сколь угодно большое количество электрической и магнитной энергии. Поэтому из материальных уравнений (III) в общем случае не вытекают выражения (IVa) и (IVb) для плотности энергии и плотности потерь, последние требуют дополнительного опытного обоснования.

Поясним сказанное в предыдущем абзаце. Двухполюсники, изображенные на рис. 3,*б* и *в*, оба удовлетворяют закону Ома $U=RJ$ (задача 3). Мощность, сообщаемая двухполюснику, дается формулой (5.18): $\mathscr{P}=JU=RJ^2$. Однако в случае простого сопротивления (рис. 3,*б*) сообщаемая мощность немедленно превращается в тепло, а в случае более сложной цепи (рис. 3,*в*) часть поступающей мощности запасается в элементах L и C и выделяется в виде тепла спустя некоторое время (порядка τ). Таким образом, зная только импеданс двухполюсника на всех частотах, еще нельзя указать, какая часть подводимой к нему энергии остается электромагнитной, а какая превращается в иные формы; нельзя также вычислить запас энергии при гармонических колебаниях. Для определения этого запаса необходимо суммировать энергии во всех элементах L и C конкретной схемы.

Точно так же, зная только комплексные проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, нельзя вычислить плотности энергии $\bar{w}_\varepsilon$ и $\bar{w}_\mu$ в данной среде. Сказанное можно иллюстрировать двухполюсниками, изображенными на рис. 3,*г* и *д*. Возьмем конденсатор, который в отсутствие диэлектрического заполнения имеет емкость C_0. Если его заполнить веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, то получится двухполюсник с импедансом $Z(\omega)=\mathrm{i}/\omega\varepsilon(\omega)C_0$. Импеданс $Z(\omega)$ определяется как отношение комплексных амплитуд $U(\omega)/J(\omega)$. Беря $\varepsilon(\omega)$ в виде

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\mathrm{i}\nu)}, \tag{8.01}$$

соответствующем плазме, будем иметь такой же импеданс, какой имеет схема на рис. 3,*г* при $L_0=1/\omega_p^2 C_0$, $R=\nu L_0$. Подсчитывая полный запас энергии в этой схеме, для плотности электрической энергии в плазме получаем

$$\bar{w}_\varepsilon=\frac{1}{16\pi}\left(1+\frac{\omega_p^2}{\omega^2+\nu^2}\right)|\mathbf{E}|^2. \tag{8.02}$$

То же самое следует из микроскопических соображений, причем слагаемое, пропорциональное ω^2_p, обусловлено кинетической энергией электронов, движущихся в такт с электрическим полем. В схеме на рис. 3,*г* кинетической энергии соответствует магнитная энергия в элементе L_0.

Если в схеме, изображенной на рис. 3,*д*, положить $C_1 = \omega^2_p C_0/\omega^2_r$, а L_0 и R взять такими же, как для рис. 3,*г*, то импеданс такого двухполюсника будет равен импедансу конденсатора C_0, заполненного веществом с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega - \omega_r^2}, \tag{8.03}$$

т. е. диэлектриком с упруго связанными электронами, имеющими резонансную частоту ω_r. Суммируя энергию в элементах C_0, L_0 и C_1, найдем плотность энергии в таком диэлектрике:

$$\overline{w}_\varepsilon = \frac{1}{16\pi}\left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega^2 + \omega_r^2)}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \nu^2\omega^2}\right]|\mathbf{E}|^2. \tag{8.04}$$

Вывод формул (8.02) и (8.04) дан в задаче 4. Они согласуются с микроскопическим анализом, приводящим к формулам (8.01) и (8.03). Однако с чисто макроскопической точки зрения можно лишь утверждать, что выражения (8.02) и (8.04) дают *минимальную* плотность энергии, совместимую с формулами (8.01) и (8.03) для $\varepsilon(\omega)$. В самом деле, элементы R на рис. 3,*г*, *д* допустимо заменить, оставляя $Z(\omega)$ и $\varepsilon(\omega)$ прежними, более сложной схемой (рис. 3,*в*), а тогда в выражениях (8.02) и (8.04) появятся дополнительные слагаемые.

Металлические проводники обычно характеризуют (см. гл. IV) чисто мнимой проницаемостью $\varepsilon = i4\pi\sigma/\omega$ ($\sigma = \text{const}$), в этом случае импеданс $Z = 1/4\pi\sigma C_0$ сводится к сопротивлению, не зависящему от частоты; ему соответствуют эквивалентные схемы на рис. 3,*б* и *в*.

В идеальных двухполюсниках, не имеющих потерь, вся подводимая мощность идет на увеличение электромагнитной энергии W и соотношение (5.25) принимает вид

$$\mathcal{P} = dW/dt, \tag{8.05}$$

а импеданс $Z(\omega)$ чисто мнимый: $Z(\omega) = -iX(\omega)$. Поэтому переменная часть энергии определяется формулой

$$\tilde{W} = \frac{i}{4\omega} J(\omega) U(\omega) = \frac{X(\omega)}{4\omega} J^2(\omega). \tag{8.06}$$

В идеальных средах (без потерь, $\varepsilon'' = 0$ и $\mu'' = 0$) переменная часть плотности энергии определяется формулами (7.14).

В энергетических соотношениях для гармонических колебаний постоянная часть электромагнитной энергии отсутствовала. Это отсутствие совершенно естественно, так как при строго периодических процессах постоянная часть энергии электромагнитного

поля неизменна. Она является фиксированным запасом энергии, который образуется в процессе установления периодических колебаний и освобождается при их прекращении. Для вычисления этого запаса необходимо рассмотреть соответствующие переходные процессы, что и будет сделано ниже. Ясно, что такие процессы не могут быть характеризованы одной частотой и для полного их исследования необходимо в общем случае пользоваться интегралами Фурье (2.16).

С помощью искусственного приема можно рассмотреть процессы нарастания или постепенного прекращения колебаний, минуя интегралы Фурье: для этого достаточно брать в уравнениях монохроматических колебаний вместо вещественной частоты ω комплексную частоту

$$\Omega = \omega + i\gamma. \tag{8.07}$$

В зависимости от знака γ будем иметь колебания, экспоненциально возрастающие (при $\gamma > 0$) или затухающие (при $\gamma < 0$) во времени. Если величина γ достаточно мала, то колебания являются почти монохроматическими и позволяют исследовать медленное изменение средней за период энергии поля.

Здесь не будет рассматриваться произвольное электромагнитное поле с комплексной частотой Ω; ограничимся двухполюсником с чисто реактивным импедансом $Z(\omega) = -iX(\omega)$. Этот двухполюсник может быть катушкой индуктивности с сердечником, имеющим вещественную магнитную проницаемость (тогда $X = \omega\mu(\omega) L_0$), либо конденсатором, заполненным диэлектриком с вещественной диэлектрической проницаемостью (тогда $X = -1/\omega\varepsilon(\omega) C_0$). Вычислив энергию $\overline{W}$ в соответствующем двухполюснике, будем знать, какова плотность энергии в среде с проницаемостью $\mu(\omega)$ или $\varepsilon(\omega)$.

При малых γ средняя за период энергия $\overline{W}$ пропорциональна $e^{2\gamma t}$, поэтому

$$\overline{\mathcal{P}(t)} = \frac{d\overline{W}}{dt} = 2\gamma \overline{W}. \tag{8.08}$$

Для комплексной частоты Ω импеданс $Z(\omega)$ приобретает малую вещественную часть:

$$Z(\Omega) = -iX(\Omega) = -iX(\omega) + \gamma \frac{dX(\omega)}{d\omega} \tag{8.09}$$

и

$$\overline{\mathcal{P}(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[J^*(\Omega) U(\Omega)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z(\Omega) \cdot |J(\Omega)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \gamma \frac{dX(\omega)}{d\omega} |J(\Omega)|^2. \tag{8.10}$$

Сравнивая соотношения (8.08) и (8.10), видели, что при $\gamma \to 0$ запасенная в двухполюснике энергия

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \frac{dX}{d\omega} |J(\omega)|^2, \tag{8.11}$$

откуда получаются следующие выражения для плотностей энергии:

$$\bar{w}_\varepsilon = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}[\omega\varepsilon(\omega)]\,|\mathbf{E}|^2, \quad \bar{w}_\mu = \frac{1}{16\pi}\frac{d}{d\omega}[\omega\mu(\omega)]\,|\mathbf{H}|^2 \tag{8.12}$$

(см. задачу 5).

Энергия поля определяется так, чтобы в отсутствие поля (при $\mathbf{E}\equiv 0$ и $\mathbf{H}\equiv 0$) его энергия была равна нулю. Поскольку на создание поля затрачивается энергия от внешних источников, плотности энергии $\bar{w}_\varepsilon$ и $\bar{w}_\mu$ должны быть положительными. Это накладывает определенные ограничения на функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Для применимости выражений (8.11) и (8.12) необходимо, чтобы потерями можно было пренебречь при частотах, близких к данной частоте ω.

Как уже отмечалось, постоянная часть энергии не проявляется в периодических электромагнитных полях, и лишь при переходе к полям, отличающимся от периодических, ее приходится принимать во внимание (см. гл. VIII). Из энергетических величин наибольшее значение имеет вектор Умова — Пойнтинга, определяющий мощность, переносимую электромагнитными волнами, а также различные виды потерь в среде, где эти волны распространяются. В следующем параграфе потери будут рассмотрены более подробно.

§ 9. Энергетический смысл комплексных проницаемостей

Выражение (6.08) для плотности магнитных потерь $\bar{p}_\mu$ следует из материального уравнения (2.12). Если, пользуясь соотношением (2.13), перейти к физическим величинам $\mathbf{H}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ и считать для простоты, что эти векторы имеют только по одной декартовой составляющей, которые будем обозначать просто как $H(t)$ и $B(t)$, то при

$$H(t) = H_0\cos\omega t \tag{9.01}$$

будем иметь

$$B(t) = |\mu| H_0\cos(\omega t - \Delta). \tag{9.02}$$

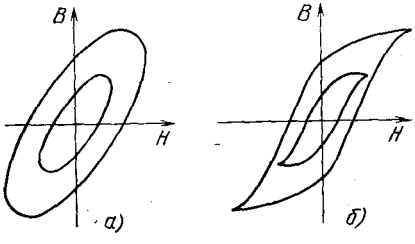


Рис. 4. Петли гистерезиса:
а — линейный гистерезис при высоких частотах; *б* — нелинейный гистерезис в сильных полях

Если для фиксированной амплитуды магнитного поля H_0 на плоскости H, B нанести последовательные значения величин H и B, то эти точки образуют, как легко показать, эллипс (при $\Delta=0$ эллипс вырождается в отрезок прямой, при $\Delta=\pi/2$ — в окружность). При изменении H_0 эти эллипсы образуют семейство подобных кривых с центром в начале координат. Каждый из этих

эллипсов имеет все свойства кривой гистерезиса: действительно (рис. 4,*а*) данному значению H соответствуют в общем случае два значения B. Однако эти эллипсы отличаются от кривых низкочастотного гистерезиса (рис. 4,*б*), наблюдаемых в сильных магнитных полях и имеющих сложную геометрическую форму. Формулы (9.01) и (9.02) и рис. 4,*а* определяют *линейный* гистерезис, при котором все эллиптические гистерезисные кривые подобны друг другу и амплитуда B пропорциональна амплитуде H. Обычно при достаточно низких частотах и слабых магнитных полях у ферромагнитных материалов $\Delta=0$. Однако при увеличении частоты вместе с падением абсолютной величины μ появляется запаздывание величины B по фазе на некоторый угол Δ.

Как известно (см. задачу 6), при магнитном гистерезисе тепло, выделяемое за период в единице объема, определяется интегралом

$$q_\mu = \frac{1}{4\pi}\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{B}, \tag{9.03}$$

где символ $\oint$ означает, что интегрирование производится по замкнутому циклу перемагничивания. Таким образом, выделяемое тепло пропорционально площади петли гистерезиса. Вычисляя эту площадь для линейного гистерезиса, происходящего по формулам (9.01) и (9.02), приходим к выражению

$$q_\mu = -\frac{1}{4\pi}\,|\mu|\,H_0^2\int_0^{2\pi}\cos\omega t\sin(\omega t-\Delta)\,d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{4}\,|\mu|\,H_0^2\sin\Delta = \frac{1}{4}\,\mu''\,H_0^2. \tag{9.04}$$

Среднее значение мощности магнитных потерь на единицу объема

$$\bar{p}_\mu = \frac{q_\mu}{T} = \frac{\omega\mu''}{8\pi}\,|\mathbf{H}|^2, \tag{9.05}$$

что соответствует формуле (6.08).

Выражение (6.08) для $\bar{p}_\varepsilon$ дает джоулево тепло на единицу объема, если справедливы простейшие материальные уравнения § 1. Действительно, в этом случае по формуле (6.21)

$$\bar{p}_\varepsilon = \frac{\sigma}{2}\,|\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2\sigma}\,|\mathbf{j}|^2. \tag{9.06}$$

В непроводящем диэлектрике ($\sigma=0$) векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ связаны соотношением (2.10) и потери вызываются диэлектрическим гистерезисом. Диэлектрические потери в единице объема за период определяются формулой

$$q_\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{D}, \tag{9.07}$$

аналогичной формуле (9.03). Проводя те же выкладки, что и выше, получаем

$$q_\varepsilon = \frac{1}{4}\,\varepsilon''\,|\mathbf{E}|^2, \tag{9.08}$$

и плотность электрических потерь

$$\overline{p_\varepsilon} = \frac{q_\varepsilon}{T} = \frac{\omega\varepsilon''}{8\pi}\,|\mathbf{E}|^2 \tag{9.09}$$

в соответствии с первой формулой (6.08).

Вообще говоря, среда может иметь как проводимость, так и диэлектрический гистерезис. Тогда согласно формулам (2.10) — (2.13)

$$\varepsilon' = \varepsilon'_1,\ \varepsilon'' = \varepsilon''_1 + 4\pi\sigma/\omega. \tag{9.10}$$

Электрические потери будут по-прежнему определяться формулой (9.09), которая объединяет как потери на диэлектрический гистерезис (пропорциональные ε''_1), так и джоулевы потери (пропорциональные σ): эти два вида потерь при фиксированной частоте с макроскопической точки зрения неразличимы. Таким образом, в среде с двумя комплексными проницаемостями переход электромагнитной энергии в другие формы может происходить не только из-за токов проводимости, но и под влиянием других причин: диэлектрического гистерезиса, который может определять частично или полностью ε'', и магнитного гистерезиса, который полностью определяет μ''. При этом подразумевается не обычный магнитный гистерезис, имеющий место в ферромагнетиках при перемагничивании их сильными и медленными магнитными полями, а линейный гистерезис в сравнительно слабых полях и на высоких частотах.

Из сказанного следует, что мнимые части комплексных проницаемостей ε'' и μ'' имеют непосредственный энергетический смысл. По этой причине величины ε'' и μ'' не могут быть отрицательными:

$$\varepsilon'' \geqslant 0,\ \mu'' \geqslant 0. \tag{9.11}$$

Отрицательность ε'' или μ'' применительно к обычным, пассивным веществам (т. е. находящимся в термодинамическом равновесии со своим окружением) означает, что в них происходит образование электромагнитной энергии за счет охлаждения, что согласно второму началу термодинамики невозможно. Активные среды квантовой электроники в линейном приближении часто характеризуют комплексными проницаемостями с отрицательными ε'' или μ'', но такие среды здесь рассматриваться не будут.

Вещественные части комплексных проницаемостей чаще всего положительны:

$$\varepsilon' > 0,\ \mu' > 0. \tag{9.12}$$

Однако непосредственного энергетического смысла они в общем случае не имеют (см. § 6—8). Поэтому при сильной зависимости от частоты ε' или μ' может быть отрицательной. Наиболее известным примером среды с отрицательным ε' является плазма, для которой $\varepsilon(\omega)$ определяется формулой (8.01); при $\omega < \omega_p$ и малых ν для плазмы $\varepsilon' < 0$.

Таким образом, комплексные проницаемости

$$\varepsilon=\varepsilon'+i\varepsilon''=|\varepsilon|e^{i\delta},\ \mu=\mu'+i\mu''=|\mu|e^{i\Delta} \tag{9.13}$$

в силу неравенства (9.11) должны находиться в первом или втором квадранте плоскости комплексного переменного, т. е. аргументы их должны быть заключены в пределах

$$0\leqslant\delta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\Delta\leqslant\pi. \tag{9.14}$$

При выполнении неравенств (9.12) эти величины должны находиться только в первом квадранте, так что аргументы будут заключены в более узких пределах

$$0\leqslant\delta<\pi/2,\ 0\leqslant\Delta<\pi/2. \tag{9.15}$$

Идеальным средам (без потерь) соответствуют вещественные положительные значения ε и μ, т. е. $\delta=0$ и $\Delta=0$. Заметим, что аргументы δ и Δ часто называют углами потерь: δ — углом электрических потерь; Δ — углом магнитных потерь.

§ 10. Теоремы единственности. Условия излучения

Различные задачи, которые приходится решать в теории монохроматических электромагнитных полей, можно разбить на две категории: внутренние задачи и внешние задачи.

Во внутренних задачах рассматривается поле в ограниченной части пространства, окруженной поверхностью S. Внутри поверхности S задаются сторонние токи, а на самой поверхности — либо тангенциальная составляющая электрического поля E_t (заданная, например, на части S_1 поверхности S), либо тангенциальная составляющая магнитного поля H_t (на остальной части S_2 поверхности S, см. рис. 5,*а*).

Во внешних задачах рассматриваются электромагнитные поля в безграничном пространстве вне некоторой поверхности S, на которой также заданы тангенциальные составляющие E_t или H_t, а в окружающем эту поверхность пространстве заданы сторонние токи (рис. 5,*б*).

Для обеих задач можно доказать теорему единственности, т. е. показать, что двух решений быть не может. Важность этой теоремы заключается в том, что, найдя каким-нибудь способом решение внутренней или внешней задачи, можно гарантировать, что оно реализуется в действительности и что другого решения искать не нужно.

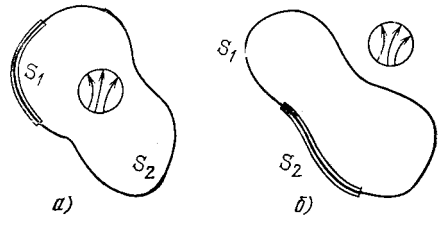


Рис. 5. К теореме единственности:
***а* — для внутренней задачи; *б* — для внешней задачи**

Теорему единственности для обеих задач удается доказать только в предположении, что в каждой точке пространства отличны от нуля (хотя, может быть, и весьма малы) либо

электрические, либо магнитные потери, т. е. либо всюду $\varepsilon''>0$, либо всюду $\mu''>0$.

Доказательство теоремы единственности проведем от противного и предположим, что существуют два решения поставленной задачи, т. е. два различных электромагнитных поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Образуем разность этих полей:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2,\ \mathbf{H}=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2. \tag{10.01}$$

Разностное поле будет удовлетворять однородным комплексным уравнениям поля (см. конец § 2) и граничным условиям на поверхности

$$E_t=0 \text{ на } S_1,\ H_t=0 \text{ на } S_2, \tag{10.02}$$

которые можно согласно § 4 также переписать в виде

$$[\mathbf{nE}]=0 \text{ на } S_1,\ [\mathbf{nH}]=0 \text{ на } S_2. \tag{10.03}$$

К этому разностному полю можно применить теорему об активной мощности (6.18). Для внутренней задачи эту теорему нужно применить ко всему объему V, ограниченному поверхностью S. В силу граничных условий (10.03) имеем

$$\hat{\mathfrak{S}}_n=\frac{c}{8\pi}[\mathbf{EH}^*]\mathbf{n}=\frac{c}{8\pi}[\mathbf{nE}]\mathbf{H}^*=-\frac{c}{8\pi}[\mathbf{nH}^*]\mathbf{E}=0 \text{ на } S \tag{10.04}$$

и $\hat{\Sigma}=0$; сторонних токов нет, поэтому $\bar{p}_e=\bar{p}_m=0$. Формула (6.20) для разностного поля примет вид

$$\overline{P}_\varepsilon+\overline{P}_\mu=0. \tag{10.05}$$

В силу неравенства $\varepsilon''>0$ из этого соотношения следует, что разностное электрическое поле в любой точке внутри поверхности S должно быть равно нулю. Отсюда из уравнения (II) (см. § 2) следует, что разностное магнитное поле также тождественно равно нулю. Если же считать, что в каждой точке пространства $\mu''>0$, то из соотношения (10.05) следует, что разностное поле $\mathbf{H}\equiv 0$, тогда из уравнения (I) следует, что и $\mathbf{E}\equiv 0$.

Таким образом, теорема единственности для внутренней задачи доказана, причем для ее доказательства существенно предположение о наличии электрических или магнитных потерь в каждой точке рассматриваемого объема V. В доказательстве теоремы единственности для внешней задачи помимо этого предположения сделаем еще два:

1) все сторонние токи находятся на конечном расстоянии;

2) на бесконечности поля убывают быстрее, чем $1/R$, где R — расстояние от фиксированной точки. Последнее условие можно формулировать следующим образом:

$$|\mathbf{E}|<M/R^{1+\alpha},\ |\mathbf{H}|<M/R^{1+\alpha} \text{ при } R\to\infty, \tag{10.06}$$

где M — некоторое положительное число, а α — конечная положительная константа.

Для доказательства теоремы единственности применим опять теорему об активной мощности к разностному полю в рассматриваемой области пространства, ограниченной с одной стороны поверхностью S, а с другой — сферой бесконечно большого радиуса. Для поверхности S имеем $\hat{\Sigma}=0$ в силу условий (10.03) для разностного поля, а для бесконечно большой сферы $\hat{\Sigma}=0$ в силу следующих оценок:

$$|\mathbf{E}| \leqslant |\mathbf{E}_1| + |\mathbf{E}_2| < 2M/R^{1+\alpha}, \quad |\mathbf{H}| < 2M/R^{1+\alpha},$$

$$|\hat{\Sigma}| \leqslant \frac{c}{8\pi} \oint |\mathbf{E}|\,|\mathbf{H}|\,dS < \frac{c}{8\pi} \frac{4M^2}{R^{2+2\alpha}} \cdot 4\pi R^2 = \frac{2cM}{R^{2\alpha}} \to 0 \quad \text{при } R \to \infty.$$

Так как для разностного поля $\bar{P}_e = \bar{P}_m = 0$, то опять приходим к соотношению (10.05), откуда и делаем заключение, что разностное поле должно быть тождественно равно нулю, т. е. двух различных решений одной и той же задачи быть не может.

Физический смысл теоремы единственности заключается в том, что в данном объеме V не может существовать разностное электромагнитное поле, поскольку оно лишено подвода энергии через источники поля (для него сторонние токи отсутствуют) и через границы объема [согласно условиям (10.03) и (10.04)]. Благодаря потерям в каждой точке объема V такое поле должно затухать во времени и монохроматическим быть не может.

Предположение о потерях является не только математически, но и физически необходимым. В самом деле, если во внутренней задаче совершенно отсутствуют потери, разностное поле может быть отличным от нуля, по крайней мере, для некоторых частот. Действительно, рассмотрим объемный резонатор, ограниченный идеально проводящей стенкой, имеющей форму поверхности S; внутри такой поверхности могут существовать незатухающие электромагнитные колебания, имеющие определенные частоты и удовлетворяющие однородным уравнениям поля и граничному условию $E_t = 0$ на S (см. гл. XV). При этих частотах решение внутренней задачи для данного объема становится неоднозначным, поскольку разностное поле может быть равно полю этих колебаний.

Решение внешней задачи при отсутствии потерь также теряет свою единственность. Так, для безграничного пустого пространства при известных токах и зарядах электромагнитное поле не определяется однозначно: помимо запаздывающего решения (см. § 17) можно написать опережающее решение, также удовлетворяющее всем уравнениям поля, и, кроме того, прибавить еще произвольное решение однородных уравнений поля, например сумму произвольных плоских волн. Вводя небольшое поглощение в пространство и пользуясь условиями (10.06), мы при доказательстве теоремы единственности исключили как опережающее решение, имеющее вид волн, сходящихся из бесконечности к источникам поля, так и решение однородных уравнений типа плоских волн, а оставили только запаздывающие решения, имеющие вид расходящихся

от источников сферических волн. Действительно, только эти последние, претерпевая затухание при своем распространении во все стороны от источников, стремятся на бесконечности к нулю быстрее, чем $1/R$. Опережающие же решения при $R\to\infty$ экспоненциально возрастают, поскольку направление их распространения — от бесконечности к источникам. Плоские волны также исключаются из рассмотрения с помощью условий (10.06), поскольку они затухают в направлении своего распространения и в противоположном направлении экспоненциально возрастают.

При отсутствии поглощения в бесконечном пространстве сходящиеся и расходящиеся волны перестают отличаться друг от друга по поведению амплитуд при $R\to\infty$. Поэтому теорему единственности для бесконечной непоглощающей среды сформулировать труднее. Для этого нужно потребовать, чтобы электромагнитные поля на бесконечности имели вид сферических волн, расходящихся от источников и зависящих от R по закону e^{ikR}/R (в пустоте). Точная математическая формулировка этого требования может быть дана в виде следующих предельных соотношений:

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial R} - ik\mathbf{E}\right) = 0, \quad \lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial R} - ik\mathbf{H}\right) = 0, \tag{10.07}$$

которые называются условиями излучения. Этим условиям удовлетворяют лишь расходящиеся волны, сходящиеся (имеющие зависимость e^{-ikR}/R) и плоские волны им не удовлетворяют.

Физически ясно, что условия излучения выделяют поля, создаваемые данными источниками, и обеспечивают единственность решения внешних задач. Более широко рассматривать эти вопросы нецелесообразно, поскольку при практическом решении задач гораздо проще предполагать с самого начала, что пространство имеет малые потери (например, приписать пространству малую проводимость), получить решение задачи и лишь в окончательных результатах перейти к непоглощающей среде, положив $\varepsilon''=0$ и $\mu''=0$.

Задачи к гл. I

1. Выяснить, какой вид принимают уравнения (Ia) и (IIa) при переходе к комплексным обозначениям и как они связаны с уравнениями (2.16).

Р е ш е н и е. Из первого уравнения (2.16) ввиду тождества $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}=0$ следует уравнение $\mathrm{div}(\mu\mathbf{H})=0$, совпадающее с уравнением (IIa) в комплексной форме. Второе уравнение в силу формул (2.12) и (1.07) приводит к соотношению

$$\mathrm{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \mathrm{div}\left(\varepsilon_1\mathbf{E} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\mathbf{E}\right) = \mathrm{div}\,\mathbf{D} + i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$$

или

$$-i\frac{\omega}{4\pi}\mathrm{div}\,\mathbf{D} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0,$$

что в силу уравнения (Ia) совпадает с уравнением непрерывности (1.01).

2. В однородное электростатическое поле параллельно ему помещен тонкий проводящий лист (толщина a, проводимость σ), в котором возбуждается

постоянный ток. Используя второе граничное условие (4.02), найти вектор Умова — Пойнтинга и связать его с джоулевым теплом, выделяющимся в листе. Решить ту же задачу, предполагая, что наряду с магнитным полем от тока в листе имеется также однородное магнитостатическое поле, перпендикулярное электрическому и параллельное листу.

Решение. Направим ось x вдоль электростатического поля, тогда в проводящем листе $-a/2<z<a/2$ возбуждается объемная плотность тока $j_x=\sigma E_x$ и возникает магнитное поле с составляющей H_y. Обозначим через H^-_y значение H_y при $z<-a/2$, а через H^+_y — при $z>a/2$, тогда формула (4.02) приводит к соотношениям

$$H_y^- - H_y^+ = \frac{4\pi}{c}\sigma a E_x, \quad \frac{c}{4\pi} E_x\left(H_y^- - H_y^+\right) = \sigma a E_x^2.$$

Правая часть последнего соотношения определяет джоулево тепло, выделяющееся в листе на единицу его площади, левая часть — поток вектора Умова — Пойнтинга к единичной площадке листа. При отсутствии внешнего магнитного поля потоки слева и справа симметричны ($\mathfrak{S}^-_z=-\mathfrak{S}^+_z>0$, так как $H^+_y=-H^-_y$), при наличии внешнего поля H^0_y имеем

$$\mathfrak{S}_z^- = \mathfrak{S}_z^0 + \frac{1}{2}\sigma a E_x^2, \quad \mathfrak{S}_z^+ = \mathfrak{S}_z^0 - \frac{1}{2}\sigma a E_x^2, \quad \mathfrak{S}_z^0 = \frac{c}{4\pi} E_x H_y^0.$$

3. Найти входной импеданс двухполюсника на рис. 3,*в*, а также постоянную и колеблющуюся часть электромагнитной энергии в нем при гармонических колебаниях.

Решение. Импедансы Z_1 и Z_2 верхней и нижней ветвей определяются выражениями:

$$Z_1 = R - i\omega L = R(1 - i\omega\tau), \quad Z_2 = R - \frac{1}{i\omega C} = -R\frac{1 - i\omega\tau}{i\omega\tau},$$

а импеданс Z всего двухполюсника

$$1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2 = 1/R, \text{ т. е. } Z = R.$$

Величины $\overline{W}$ и $\widetilde{W}$ соответственно равны:

$$\overline{W} = \frac{1}{2} R|J|^2 \frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}, \quad \widetilde{W} = \frac{1}{2} RJ^2 \frac{\tau}{(1 - i\omega\tau)^2},$$

где J — комплексная амплитуда тока, проходящего через двухполюсник.

4. Найти импедансы двухполюсников, изображенных на рис. 3,*г* и *д*, вычислить запас энергии в них при гармонических колебаниях и вывести формулы (8.02) и (8.04).

Решение. Верхняя и нижняя ветви двухполюсника на рис. 3,*д* имеют импедансы

$$Z_1 = \frac{i}{\omega C_0}, \quad Z_2 = R - i\left(\omega L_0 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = \frac{\nu - i\left(\omega - \omega_r^2/\omega\right)}{\omega_p^2},$$

поэтому

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = -i\omega C_0\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega - \omega_r^2}\right) = -i\omega\varepsilon(\omega) C_0. \qquad (a)$$

Электромагнитная энергия этого двухполюсника

$$\overline{W} = \frac{1}{4} C_0 |U|^2 + \frac{1}{4} (L_0 + 1/\omega^2 C_1) |J_2|^2, \quad J_2 = U/Z_2,$$

где U — комплексная амплитуда напряжения. Отсюда

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \omega_r^2)}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2 + \nu^2 \omega^2} \right] C_0 |U|^2. \qquad (b)$$

Для пустоты

$$\overline{W} = \frac{1}{4} C_0 |U|^2, \text{ и } \overline{w}_\varepsilon = \frac{1}{16\pi} |\mathbf{E}|^2,$$

поэтому из формулы (b) следует искомое выражение (8.04). В формуле (b) слагаемое, пропорциональное $\omega^2_p \omega^2$, соответствует магнитной энергии в элементе L_0 (кинетической энергии электронов), а пропорциональное $\omega^2_p \omega^2_r$ — электрической энергии в элементе C_1 (потенциальной энергии электронов).

Полагая $\omega_r = 0$, из формулы (8.03) получаем (8.01), а выражение (8.04) переходит в (8.02).

5. Из формулы (8.11) вывести выражения (8.12). Полагая в двухполюсниках на рис. 3,*а, г, д* $R = 0$, показать, что формула (8.11) дает правильные выражения для запаса энергии в них.

Р е ш е н и е. Запас магнитной энергии в катушке

$$\overline{W}_\mu = \frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} [\omega \mu(\omega)] L_0 |J|^2,$$

откуда следует второе выражение (8.12). Запас электрической энергии в конденсаторе вычисляется по формуле

$$\overline{W}_\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{dX}{d\omega} \frac{|U|^2}{X^2} = -\frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{X} \right) |U|^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} [\omega \varepsilon(\omega)] C_0 |U|^2, \qquad (a)$$

что ведет к первому выражению (8.12).

Двухполюсник на рис. 3,*а* при $R = 0$ имеет реактанс

$$X = \omega L - 1/\omega C, \quad dX/d\omega = L + 1/\omega^2 C,$$

поэтому

$$\overline{W} = \frac{1}{4} (L + 1/\omega^2 C) |J|^2.$$

Для двухполюсника на рис. 3,*д*

$$\frac{1}{X} = -\omega \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2} \right) C_0,$$

поэтому

$$\overline{W} = -\frac{1}{4} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{X} \right) |U|^2 = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\omega_p^2 (\omega^2 + \omega_r^2)}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2} \right] C_0 |U|^2,$$

что при $\nu = 0$ совпадает с формулой (b) задачи 4. При $\omega_r = 0$ получаем соотношения для рис. 3,*г*.

6. Вывести формулы (9.03) и (9.07) из уравнений Максвелла (I) и (II) (§ 1), полагая в них $\mathbf{j}=0$.

Решение. Пользуясь формулой (6.04) для напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (а не для комплексных амплитуд), мы получим соотношение

$$-\operatorname{div}\mathfrak{S}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right).$$

Считая, что поля суть периодические функции времени (период T), проинтегрируем обе части этого соотношения по t; получаем

$$-\int_0^T \operatorname{div}\mathfrak{S}\,dt=q_\mu+q_\varepsilon \qquad (a)$$

где

$$q_\mu=\frac{1}{4\pi}\int_0^T \mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\,dt,\quad q_\varepsilon=\frac{1}{4\pi}\int_0^T \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\,dt,$$

причем q_μ и q_ε при желании можно переписать в виде (9.03) и (9.07). Интегрируя соотношение (a) по произвольному объему V, приходим к соотношению

$$-\int_0^T \Sigma\,dt=\int(q_\mu+q_\varepsilon)\,dV.$$

Слева стоит энергия, поступающая в объем V извне за период; поскольку при $t=0$ и $t=T$ поля одинаковы, то это значит, что электромагнитная энергия при $t=0$ и $t=T$ одна и та же. Следовательно, поступившая за период T электромагнитная энергия должна превратиться в другие формы энергии. При гистерезисе вещество нагревается и величины q_μ и q_ε дают количественную меру выделяющегося тепла.

Глава II.
ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 11. Плоские волны в однородной изотропной среде

С помощью комплексных уравнений поля исследуем прежде всего распространение монохроматических плоских электромагнитных волн в однородной среде с постоянными комплексными проницаемостями ε и μ. Плоской электромагнитной волной называется электромагнитное поле, векторы которого в каждый момент времени принимают постоянные значения на системе параллельных плоскостей. Таким образом, если выбрать ось z перпендикулярной этим плоскостям, то в монохроматической плоской волне комплексные амплитуды полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ будут зависеть только от координаты z, но не от координат x и y.

Запишем однородные векторные уравнения § 2 в декартовой системе координат x, y, z:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=\mathrm{i}k\mu H_x,\quad \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=-\mathrm{i}k\varepsilon E_x,$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=\mathrm{i}k\mu H_y,\quad \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\mathrm{i}k\varepsilon E_y,$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=\mathrm{i}k\mu H_z,\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=-\mathrm{i}k\varepsilon E_z. \qquad (11.01)$$

Для плоской волны производные по x и y равны нулю и уравнения (11.01) значительно упрощаются. Прежде всего из третьего уравнения каждого столбца получаем

$$H_z=0,\ E_z=0, \qquad (11.02)$$

откуда видно, что плоские электромагнитные волны в любой среде суть волны поперечные.

Комбинируя затем попарно уравнения, в которые входят E_x и H_y, с одной стороны, и E_y и H_x, с другой стороны, приходим к двум независимым системам уравнений (в которых символ $\partial/\partial z$ заменен на d/dz, поскольку все величины зависят только от z):

$$\frac{dE_x}{dz}=\mathrm{i}k\mu H_y,\quad \frac{dE_y}{dz}=-\mathrm{i}k\mu H_x,$$
$$\frac{dH_y}{dz}=-\mathrm{i}k\varepsilon E_x,\quad \frac{dH_x}{dz}=-\mathrm{i}k\varepsilon E_y. \qquad (11.03)$$

Исключая из каждой системы какую-нибудь одну функцию, для каждой из четырех величин E_x, H_y, E_y и H_x получаем простое уравнение

$$\frac{d^2F}{dz^2}+K^2F=0, \qquad (11.04)$$

где введено обозначение

$$K=k\sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad (11.05)$$

Величина K называется комплексным волновым числом данной среды. Помимо этого часто вводят обозначение

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu} \qquad (11.06)$$

и n называют комплексным показателем преломления данной среды. Величины K и n связаны соотношением $K=kn$. Квадратный корень в этих формулах извлекается так:

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}=\sqrt{|\varepsilon|\cdot|\mu|}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\delta+\Delta}{2}\right), \qquad (11.07)$$

где углы δ и Δ взяты в пределах (9.14) или (9.15), а корень $\sqrt{|\varepsilon|\cdot|\mu|}$ понимается в арифметическом смысле. Поэтому число n всегда находится в первом или втором квадранте плоскости ком-

плексного переменного, а при выполнении дополнительных условий (9.12) — в первом квадранте.

Дифференциальное уравнение (11.04) имеет общее решение

$$F = C_1 e^{ikz} + C_2 e^{-ikz}, \tag{11.08}$$

где C_1 и C_2 суть произвольные постоянные. Написав для четырех величин E_x, H_y, E_y и H_x выражения такого вида с разными постоянными и подставив их в уравнения (11.03), приходим окончательно к следующим выражениям:

$$E_x = Ae^{ikz} + Be^{-ikz}, \quad E_y = Ce^{ikz} + De^{-ikz},$$

$$H_y = \frac{1}{\zeta}(Ae^{ikz} - Be^{-ikz}), \quad H_x = \frac{1}{\zeta}(-Ce^{ikz} + De^{-ikz}), \tag{11.09}$$

где введено обозначение

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{|\mu|}{|\varepsilon|}} \exp\left(i\frac{\Delta - \delta}{2}\right). \tag{11.10}$$

Комплексное число ζ называют волновым импедансом данной среды; смысл этого термина будет ясен из § 13.

Разберем физический смысл выражений для E_x и H_y, причем ограничимся только первым слагаемым, положив $B=0$:

$$E_x = Ae^{ikz}, \quad H_y = \frac{1}{\zeta}Ae^{ikz}. \tag{11.11}$$

Перейдем к физическим величинам, полагая

$$K = K' + iK'', \quad n = n' + in'', \quad A = |A|e^{i\alpha}. \tag{11.12}$$

Пользуясь соотношениями (2.01), получаем

$$E_x(t) = |A|e^{-K''z}\cos(K'z - \omega t + \alpha),$$

$$H_y(t) = \frac{1}{|\zeta|}|A|e^{-K''z}\cos\left(K'z - \omega t + \alpha + \frac{\delta - \Delta}{2}\right). \tag{11.13}$$

Эти формулы показывают, что, отвлекаясь от экспоненциального множителя $e^{-K''z}$, мы имеем электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью

$$u = \omega/K' = c/n', \tag{11.14}$$

поскольку составляющие E_x и H_y изменяются в зависимости от z и t по закону

$$\cos(K'z - \omega t + \varphi) = \cos[K'(z - ut) + \varphi], \quad \varphi = \text{const}.$$

Распространение благодаря наличию экспоненциального множителя $e^{-K''z}$ сопровождается затуханием, причем амплитуда поля уменьшается в e раз при прохождении волной расстояния

$$d = 1/K''. \tag{11.15}$$

Расстояние d называется глубиной проникания поля в данную среду, а для металлических проводников имеет еще одно название —

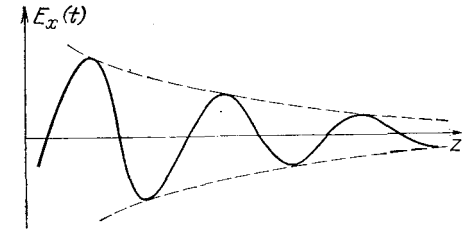


Рис. 6. Монохроматическая волна, распространяющаяся в поглощающей среде

толщина скин-слоя; происхождение второго названия рассмотрим детально в гл. IV.

Таким образом, физический смысл K' и n' заключается в том, что они определяют скорость распространения волны в данном веществе, точнее, ее фазовую скорость, поскольку речь идет о фазе монохроматической плоской волны (11.13). При этом величина n' связана с фазовой скоростью u в данной среде и скоростью c в пустоте таким же соотношением, что и обыкновенный показатель преломления в оптике. Поэтому величину $n = n' + in''$ естественно назвать комплексным показателем преломления. Величины K'' и n'' определяют затухание волн при распространении в данной среде и связанную с этим затуханием глубину проникания d.

Если нарисовать зависимость поля $E_x(t)$ от z в какой-то определенный момент t, то получим кривую на рис. 6 — синусоиду, затухающую по оси z. С течением времени эта синусоида, оставаясь ограниченной сверху и снизу двумя экспонентами $\pm|A|e^{-K''z}$, передвигается со скоростью u по оси z: с такой скоростью, в частности, перемещаются узлы поля, т. е. точки, где поле равно нулю.

Величина K' определяет в мгновенной картине поля (рис. 6) пространственную периодичность (или, точнее, при $K''>0$ квазипериодичность) поля. Если ввести длину волны λ' в данной среде с помощью соотношения

$$\lambda' = 2\pi/K' \quad (K' = 2\pi/\lambda'), \tag{11.16}$$

то длина λ' будет равна удвоенному расстоянию между двумя соседними узлами поля и приближенно равна (с тем большей точностью, чем меньше затухание K'') расстоянию между двумя соседними максимумами или минимумами поля. Отсюда название «длина волны» для λ' и «волновое число» для K, поскольку вещественная часть K равна числу волн, укладывающихся на отрезке 2π.

Формула (11.11) всегда определяет волну, затухающую в положительном направлении оси z, так как в силу условий (9.14) и формулы (11.07) всегда будем иметь $n''>0$ и $K''>0$. Что же касается скорости распространения, то она для такой волны может быть как положительной, так и отрицательной. В последнем случае с течением времени синусоида на рис. 6 передвигается не направо, а налево. Такой тип распространения принципиально возможен, хотя и встречается довольно редко; для осуществления этого необходимо, чтобы было $u<0$, $K'<0$ и $n'<0$ или $\delta+\Delta>\pi$. Это возможно, если один угол потерь больше $\pi/2$, а другой достаточно велик (он может быть меньше $\pi/2$).

Комплексный вектор Умова — Пойнтинга $\hat{\mathfrak{S}}$ в поле плоской электромагнитной волны (11.09) имеет только составляющую

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right). \tag{11.17}$$

Для волны (11.11)

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi\zeta^*}\,|A|^2\,\mathrm{e}^{-2K''z}. \tag{11.18}$$

Образуя вещественную часть последнего выражения

$$\mathrm{Re}\,\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi\,|\zeta|}\cos\frac{\delta-\Delta}{2}\,|A|^2\,\mathrm{e}^{-2K''z}, \tag{11.19}$$

можно видеть, что в силу неравенства

$$-\pi/2 < (\delta-\Delta)/2 < \pi/2, \tag{11.20}$$

вытекающего из неравенств (9.14), плоская распространяющаяся волна (11.11) переносит в среднем за период энергию в направлении z, т. е. в направлении своего затухания. Таким образом, направление переноса энергии распространяющейся волной всегда совпадает с направлением ее затухания и может (при отрицательной фазовой скорости) быть противоположно направлению набегания фазы.

Перейдем теперь от частной формулы (11.11) к общим выражениям (11.09) для плоской электромагнитной волны. Слагаемые

$$E_x = B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kz}, \quad H_y = -\frac{1}{\zeta}B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Kz} \tag{11.21}$$

в формулах (11.09) определяют плоскую волну, отличающуюся от волны (11.11) противоположным направлением распространения и затухания. Для такой волны $\mathrm{Re}\,\hat{\mathfrak{S}}_z < 0$, чем и объясняется знак минус в выражении для H_y.

Выражения (11.09) для E_y и H_x определяют сумму двух волн, распространяющихся в направлениях $+z$ и $-z$ и поляризованных перпендикулярно волнам (11.11) и (11.21). Наложением таких четырех волн и получается плоская электромагнитная волна в самом общем случае.

§ 12. Распространение электромагнитных волн в различных средах

Дадим краткий обзор электродинамических свойств различных сред и зависимости этих свойств от частоты.

Наиболее простыми свойствами обладает пустота, для которой $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$. Пустота является единственной средой, в которой нет дисперсии и потерь. Так как для нее $n = 1$ и $\zeta = 1$, то плоская распространяющаяся волна (11.11) в пустоте имеет вид

$$E_x(t) = H_y(t) = |A|\cos(kz - \omega t + \alpha). \tag{12.01}$$

Таким образом, волновое число k, введенное в § 2, имеет простой физический смысл — оно определяет пространственную зависимость плоской электромагнитной волны в пустоте. В отличие от волнового числа K, введенного в § 11 для любой среды, величина k часто называется волновым числом в пустоте. Оно связано с длиной волны λ в пустоте формулой

$$k=2\pi/\lambda,\ \lambda=c/f=2\pi c/\omega, \tag{12.02}$$

где f — частота. Длина волны λ, как видно из формулы (12.01), есть пространственный период плоской волны в пустоте. Скорость плоских волн в пустоте равна c и не зависит от частоты. Ввиду электромагнитного характера световых волн скорость c кратко называют скоростью света.

В других средах законы распространения плоских волн иные. Если взять диэлектрики, имеющие в постоянных полях и при низких частотах пренебрежимо малую проводимость, магнитную проницаемость $\mu=1$ и некоторую вещественную диэлектрическую постоянную ε_0, то для них

$$K=k\sqrt{\varepsilon_0},\quad \xi=1/\sqrt{\varepsilon_0},\quad u=c/\sqrt{\varepsilon_0}. \tag{12.03}$$

Соотношение $n=\sqrt{\varepsilon_0}$ между показателем преломления для волн в прозрачном диэлектрике и его диэлектрической постоянной называется соотношением Максвелла. Это соотношение применимо лишь для таких частот, при которых диэлектрическая проницаемость ε практически совпадает со статической диэлектрической постоянной ε_0. Если же при данной частоте ε отличается от ε_0, то нужно применять соотношение $n=\sqrt{\varepsilon}$, справедливое, как мы видели в § 11, для всех веществ, имеющих $\mu=1$.

Все диэлектрики в той или иной степени имеют дисперсию, и при достаточно высоких частотах для каждого диэлектрика соотношение $n=\sqrt{\varepsilon_0}$ становится неправильным и должно быть заменено соотношением $n=\sqrt{\varepsilon}$. Наиболее ярким примером неприменимости соотношения Максвелла к электромагнитным волнам весьма высокой частоты является вода, имеющая при низких частотах $\varepsilon_0=81$ и $n=1{,}32$ для инфракрасных волн ($\lambda\sim 1$ мкм).

Вода является примером дипольного (полярного) диэлектрика. Поляризация таких диэлектриков происходит в результате поворота молекул, обладающих сильной инерцией, поэтому дисперсия диэлектрической проницаемости проявляется для них в радиодиапазоне. Для воды дисперсия начинается при частотах $f\sim 10^{10}$ Гц, что соответствует длине волны $\lambda\sim 3$ см. Для спиртов, молекулы которых более сложны, дисперсия появляется при еще более низких частотах ($f\sim 10^9$ Гц). Водяной пар сильно меняет свою диэлектрическую проницаемость при более коротких волнах, при $\lambda\sim 0{,}1$ мм. Как правило, при сильной дисперсии в некотором диапазоне частот в том же диапазоне имеются большие диэлектрические потери.

Другими свойствами обладают неполярные диэлектрики, например сухой неионизированный воздух, водород, бензол, гелий, неон и другие инертные газы; из твердых веществ — сера и алмаз. Поляризация этих диэлектриков обусловлена смещением электронов внутри атомов и молекул. Для них соотношение Максвелла $n=\sqrt{\varepsilon_0}$ выполняется иногда даже в оптическом диапазоне. Объясняется это тем, что электроны обладают малой инерцией и следуют за изменениями поля вплоть до весьма высоких частот.

Формула (8.03) соответствует неполярному диэлектрику с полосой поглощения в окрестности частоты ω_r. Реальные диэлектрики имеют много полос поглощения, их диэлектрическая проницаемость определяется более сложной формулой, в которой учитывается набор резонансных частот ω_r и относящихся к ним параметров ω_p и ν.

Среди проводников наибольшее практическое значение имеют металлы. Если ограничиться сначала неферромагнитными металлами, то можно сказать, что электродинамические свойства металлов определяются исключительно их проводимостью. Как показывает опыт, проводимость металлов при всех радиочастотах (вплоть до миллиметровых волн) практически сохраняет то же значение, что на постоянном токе. В оптическом диапазоне (начиная с инфракрасных волн) электрические свойства металлов усложняются.

Комплексная диэлектрическая проницаемость металлов имеет весьма большую мнимую часть

$$\varepsilon''=4\pi\sigma/\omega=2\sigma/f. \qquad (12.04)$$

Действительно, для меди имеем удельное сопротивление $\rho=1{,}7\cdot10^{-6}$ Ом·см, откуда в абсолютной системе единиц проводимость $\sigma=5\cdot10^{17}$ с$^{-1}$ ($\sigma=9\cdot10^{11}/\rho$). Даже для висмута, являющегося полуметаллом и сравнительно плохим проводником ($\rho=1{,}2\cdot10^{-4}$ Ом·см), имеем $\sigma=7{,}5\cdot10^{15}$ с$^{-1}$, в то время как для световых волн частота $f\sim5\cdot10^{14}$ Гц. Поэтому для всех металлов во всем диапазоне радиочастот и отчасти даже при оптических частотах величина ε'' является весьма большим числом, по сравнению с которым вещественной частью ε' комплексной диэлектрической проницаемости можно практически пренебречь. Поэтому для металлов обычно полагают

$$\varepsilon=i4\pi\sigma/\omega. \qquad (12.05)$$

Комплексное волновое число в металле

$$K=k\sqrt{\sigma/f}\,(1+i),\quad K'=K''=1/d, \qquad (12.06)$$

где для d — глубины проникания поля в металл — можно написать выражение

$$d=(\lambda/2\pi)\sqrt{f/\sigma}=(1/2\pi)\sqrt{\lambda c/\sigma}. \qquad (12.07)$$

Для меди $d=0{,}4$ мкм при $\lambda=1$ см, $d=4$ мкм при $\lambda=1$ м, $d=40$ мкм при $\lambda=100$ м, $d=0{,}4$ мм при $\lambda=10$ км.

Из других проводников следует отметить электролиты, проводимость которых обусловлена ионами (а не электронами, как у металлов). Проводимость электролитов при низких частотах довольно велика, однако при повышении частоты она падает. В качестве иллюстрации этого обстоятельства можно указать хотя бы на прозрачность большинства электролитов для световых волн, что свидетельствует об отсутствии проводимости при оптических частотах. Заметим, что снижение электропроводности для раствора поваренной соли наблюдается уже при радиочастотах — на метровых волнах.

Следует подчеркнуть, что резкое изменение свойств при переходе от одного диапазона частот к другому наблюдается в большинстве веществ. При этом не только проводники могут становиться изоляторами, но и диэлектрики при некоторых частотах могут сильно поглощать электромагнитные волны.

Магнитные свойства ферромагнитных веществ, как правило, весьма сильно изменяются с частотой. Для обычных ферромагнитных материалов, используемых для сердечников на низких (звуковых) частотах, μ при повышении частоты резко падает уже на частотах, превышающих частоты звукового диапазона, и одновременно появляются магнитные потери (растет μ'').

Специальные магнитные материалы сохраняют свои магнитные свойства при более высоких частотах. Большое применение имеют ферриты — непроводящие магнитные материалы.

Интересными электродинамическими свойствами обладает плазма. Для не слишком интенсивных электромагнитных волн плазму можно считать в первом приближении средой с проницаемостями

$$\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2 \quad \left(\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}\right), \quad \mu = 1, \tag{12.08}$$

где ω_p — так называемая плазменная частота; e и m — заряд и масса электрона соответственно, а N — число свободных электронов в единице объема. Формула (12.08) показывает, что при $\omega < \omega_p$ диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна, т. е. волны в ней затухают, не распространяясь ($K' = 0$). При учете потерь в плазме формула (12.08) заменяется более сложной формулой (8.01).

Из сделанного выше краткого обзора следует, что комплексные уравнения поля и комплексные проницаемости ε и μ позволяют охватить большое число различных сред и эффективно учесть дисперсию этих сред, что в рамках обычных уравнений Максвелла (§ 1) сделать не удается.

§ 13. Нормальное падение волны на плоскую границу раздела

Перед тем как исследовать в § 15 задачу о падении любой плоской волны на плоскую границу раздела, рассмотрим более простую задачу для волны, падающей нормально на эту границу, а именно: пусть в пустом полупространстве $z < 0$ (см. рис. 7) рас-

пространяется по направлению к плоскости раздела $z=0$ плоская волна, составляющие поля которой по § 11 и 12 равны:

$$E_x=H_y=Ae^{ikz}. \qquad (13.01)$$

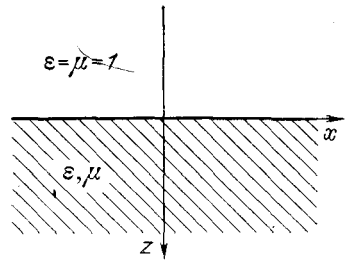


Рис. 7. Плоская граница раздела

Это поле не зависит от x и y. Из соображений симметрии ясно, что в результате падения этой волны на границу возникает дополнительное поле, также не зависящее от x и y, т. е. согласно § 11 при $z\gtrless 0$ будут плоские волны, распространяющиеся в направлениях $\pm z$. Полное поле в пустоте согласно формуле (11.10) запишем в виде

$$E_x=A(e^{ikz}+Re^{-ikz}),\quad H_y=A(e^{ikz}-Re^{-ikz})\ \text{при}\ z<0, \qquad (13.02)$$

где введено обозначение $R=B/A$. Величина R называется (комплексным) коэффициентом отражения по электрическому полю; коэффициент отражения по магнитному полю равен $-R$.

Полупространство $z>0$ является однородной средой с комплексными проницаемостями ε и μ. Полное поле в нем естественно искать в виде

$$E_x=\tilde{A}e^{iKz}+\tilde{B}e^{-iKz},\quad H_y=\frac{1}{\zeta}(\tilde{A}e^{iKz}-\tilde{B}e^{-iKz})\ \text{при}\ z>0, \qquad (13.03)$$

поскольку оно также не должно зависеть от x и y. Здесь $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — новые постоянные, K и ζ — комплексные параметры, соответствующие проницаемостям ε и μ. Первое слагаемое в выражениях (13.03), пропорциональное $\tilde{A}$, дает волну, распространяющуюся от границы $z=0$ внутрь среды, а второе слагаемое, пропорциональное $\tilde{B}$, определяет волну, распространяющуюся в противоположном направлении. Из физических соображений ясно, что в данной задаче следует положить $\tilde{B}=0$. Действительно, значение $\tilde{B}\neq 0$ нужно брать в случае, когда плоская волна падает на границу раздела $z=0$ из полупространства $z<0$ (снизу), в данной же задаче нужно считать $\tilde{B}=0$. Введя обозначение $T=\tilde{A}/A$, можем окончательно написать

$$E_x=ATe^{iKz},\quad H_y=\frac{1}{\zeta}ATe^{iKz}\ \text{при}\ z>0. \qquad (13.04)$$

Величина T называется коэффициентом (комплексным) прохождения по электрическому полю; коэффициент прохождения по магнитному полю равен T/ζ. Для определения коэффициентов R и T нужно воспользоваться граничными условиями (4.01), которые в данном случае имеют вид

$$E_x|_{z=-0}=E_x|_{z=+0},\quad H_y|_{z=-0}=H_y|_{z=+0} \qquad (13.05)$$

и дают соотношения

$$1+R=T,\quad 1-R=T/\zeta, \qquad (13.06)$$

откуда

$$R=\frac{\zeta-1}{\zeta+1},\quad T=\frac{2\zeta}{\zeta+1}. \tag{13.07}$$

Между формулами (13.07) и соответствующими формулами для коэффициентов отражения и прохождения при сочленении двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями (см. § 45) существует полная аналогия. Этим объясняется название волнового импеданса для введенной в § 11 величины ζ; при этом пустоте приписывается волновое сопротивление $\zeta=1$. Нужно, однако, отметить, что волновой импеданс ζ при переходе к общей задаче об отражении и прохождении плоской волны (§ 15) теряет свое значение.

Формула (13.07) для R показывает, что вещество, у которого $\zeta=1$, т. е. у которого диэлектрическая проницаемость равна магнитной ($\varepsilon=\mu$), не отражает электромагнитных волн при нормальном падении. Пластина из такого вещества, помещенная на пути электромагнитных волн, излучаемых радиолокатором, будет «радиолокационной невидимкой» вследствие того, что радиолокатор при облучении плоской поверхности принимает только волны, отражаемые нормально обратно к нему.

Выше решена задача о падении плоской волны на границу раздела. Физически ясно, что эта задача допускает лишь единственное решение (полученное выше), хотя непосредственно теорему единственности § 10 здесь применить нельзя, поскольку поле возбуждается не сторонними стоками, расположенными в конечной части пространства, а падающей из бесконечности плоской волной. Отметим, однако, что условие $\bar{E}=0$ имеет, по существу, тот же физический смысл, что и условия (10.06) в теореме единственности: при $\bar{E}\neq 0$ поле, возбуждаемое падающей волной во второй среде, имело бы недопустимый характер, экспоненциально возрастая (если $K''>0$) при удалении от границы раздела.

§ 14. Волновые уравнения. Обобщенные плоские волны

Электромагнитные волны в однородной изотропной среде можно рассмотреть несколько иначе, чем это сделано в § 11. Например, рассмотрим комплексные уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mu\mathbf{H},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\varepsilon\mathbf{E} \tag{14.01}$$

в однородной среде, т. е. при $\varepsilon=\text{const}$ и $\mu=\text{const}$. В однородной среде из уравнений (14.01) в качестве следствия получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0. \tag{14.02}$$

Из комплексных уравнений поля (14.01) можно исключить один из векторов поля $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. Для этого применим операцию rot к обеим частям этих уравнений и воспользуемся известным тождеством векторного анализа

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\Delta\mathbf{A}+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}, \tag{14.03}$$

принимающим в силу соотношений (14.02) для векторов **E** и **H** более простой вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\Delta\mathbf{E},\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=-\Delta\mathbf{H}. \tag{14.04}$$

Здесь через ΔA обозначен оператор Лапласа, примененный к **A**, т. е. такой вектор, составляющие которого по осям x, y, z декартовой системы координат

$$(\Delta\mathbf{A})_x=\Delta A_x,\quad (\Delta\mathbf{A})_y=\Delta A_y,\quad (\Delta\mathbf{A})_z=\Delta A_z. \tag{14.05}$$

Окончательно получаем для векторов **E** и **H** уравнения

$$\Delta\mathbf{E}+K^2\mathbf{E}=0,\quad \Delta\mathbf{H}+K^2\mathbf{H}=0. \tag{14.06}$$

Эти уравнения называют волновыми уравнениями (для монохроматических колебаний) или векторными уравнениями Гельмгольца. Через K обозначено, как и выше, волновое число в данной среде (в общем случае комплексное), определяемое формулой (11.05).

Таким образом, при решении задач о распространении электромагнитных волн в однородной среде можно исходить не из уравнений электромагнитного поля, а из волнового уравнения (14.06) для одного из векторов поля. При этом нельзя забывать, что, помимо волнового уравнения, этот вектор должен еще удовлетворять одному из уравнений (14.02). Найдя, например, вектор **E**, удовлетворяющий обоим уравнениям

$$\Delta\mathbf{E}+K^2\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0, \tag{14.07}$$

всегда можем найти вектор **H** из первого уравнения (14.01), т. е. по формуле

$$\mathbf{H}=(1/ik\mu)\operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{14.08}$$

и тем самым решить исходные уравнения (14.01). Аналогично, найдя решения уравнений для магнитного поля

$$\Delta\mathbf{H}+K^2\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0 \tag{14.09}$$

и определив электрическое поле формулой

$$\mathbf{E}=(-1/ik\varepsilon)\operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{14.10}$$

также получим векторы, удовлетворяющие исходным уравнениям (14.01). Оба эти метода применим ниже в § 15.

Векторные уравнения (14.06), в сущности, означают, что любая декартова составляющая каждого из векторов поля удовлетворяет скалярному волновому уравнению (уравнению Гельмгольца)

$$\Delta F+K^2F=0. \tag{14.11}$$

Для плоских волн это уравнение переходит в уравнение (11.04). Изучим более подробно частные решения уравнения (14.11). Как легко показать, функция

$$F=C\,e^{iK(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \tag{14.12}$$

является решением этого уравнения, если C есть постоянная, а постоянные коэффициенты α, β, γ в экспоненте удовлетворяют соотношению

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1. \tag{14.13}$$

Такое частное решение скалярного волнового уравнения (14.11) назовем обобщенной плоской волной. Если α, β, γ вещественные числа, удовлетворяющие соотношению (14.13), то функция (14.12) является плоской волной в том смысле, как она определена в § 11. Действительно, в этом случае можно ввести новую координату z' с помощью соотношения

$$z'=\alpha x+\beta y+\gamma z \tag{14.14}$$

и функция (14.12) переписывается в виде $Ce^{iKz'}$, вполне аналогичном выражению (11.11) для плоской волны. Числа α, β, γ имеют смысл направляющих косинусов, фиксирующих направление оси z' относительно системы координат x, y, z.

Если же среди чисел α, β, γ, удовлетворяющих соотношению (14.13), есть хотя бы одно комплексное число, то обобщенную плоскую волну (14.12) уже нельзя привести к простой плоской волне; такая волна, как увидим ниже, имеет целый ряд особенностей, отличающих ее от обычных плоских волн (см. § 16).

Рассмотрим более детально случай комплексных чисел α, β, γ. Положим

$$\alpha=\alpha'+i\alpha'',\ \beta=\beta'+i\beta'',\ \gamma=\gamma'+i\gamma'', \tag{14.15}$$

где α', β', γ' — вещественные части, α'', β'', γ'' — мнимые части этих чисел. Тогда в пустоте ($K=k$) формула (14.12) примет вид

$$F=Ce^{ik(\alpha'x+\beta'y+\gamma'z)}e^{-k(\alpha''x+\beta''y+\gamma''z)}, \tag{14.16}$$

так что поверхности равной фазы будут плоскостями

$$\alpha'x+\beta'y+\gamma'z=\text{const}, \tag{14.17}$$

а поверхности равной амплитуды — плоскостями

$$\alpha''x+\beta''y+\gamma''z=\text{const}. \tag{14.18}$$

Плоскости (14.17) и (14.18) перпендикулярны друг другу, так как из условия (14.13) вытекает соотношение

$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0. \tag{14.19}$$

В поглощающих средах плоскости равной амплитуды и плоскости равной фазы могут образовывать острые углы (см. § 16). Во всех случаях несовпадения этих плоскостей амплитуда волны меняется в плоскости равной фазы, поэтому обобщенные плоские волны часто называют неоднородными плоскими волнами.

В заключение остановимся на вопросе, всегда ли электромагнитные волны являются поперечными? В § 11 показано, что плоские волны непременно являются волнами поперечными: они не имеют продольных составляющих — составляющих E_z и H_z — в направлении своего распространения (по оси z). Однако плоские

волны с бесконечно широким фронтом являются, в сущности, далеко идущей идеализацией: реальные электромагнитные волны либо имеют конечное поперечное сечение, либо обладают некоторой расходимостью.

Рассмотрим (рис. 8,*б*) картину силовых линий в плоской волне, границы которой изображены штриховой линией, так что вне этих границ электромагнитные поля отсутствуют. Вдали от границы плоской волны картина силовых линий электрического поля практически такая же, как и в бесконечной плоской волне на рис. 8,*а*: пучки электрических силовых линий с противоположной направленностью чередуются и находятся друг от друга на расстоянии $\lambda/2$, если распространение плоских волн происходит в пустоте. В плоской волне, ограниченной с боков, силовые линии электрического поля не могут, очевидно, выходить за боковые границы волны, поскольку вне этих границ поле отсутствует. Так как поле в однородной среде удовлетворяет соотношениям (14.02), то силовые линии должны быть замкнутыми (рис. 8,*б*). Форма электрических силовых линий (о магнитных силовых линиях можно сказать то же самое) показывает, что такая плоская волна уже не является чисто поперечной и ее поле неизбежно имеет продольные составляющие.

Можно показать, что не только ограничение фронта волны, но и любое изменение амплитуды волны вдоль ее фронта неизбежно влечет за собой появление продольных составляющих. Напомним, что при расходимости волны также появляются составляющие в направлении распространения. Действительно, в сферической волне, излучаемой, например, элементарным диполем, даже на больших расстояниях от него имеется небольшая радиальная составляющая электрического поля, благодаря которой электрические силовые линии образуют замкнутые кривые.

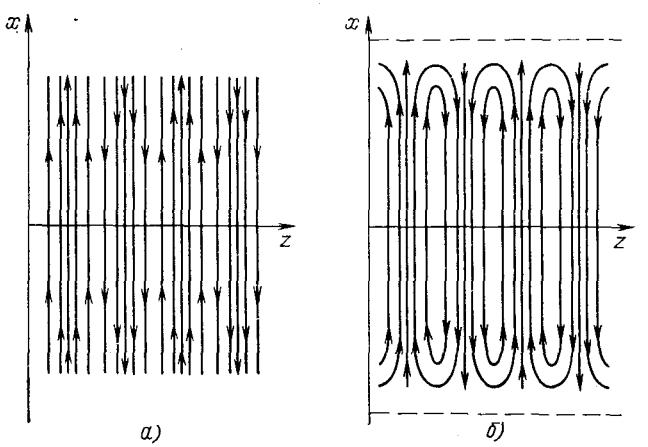


Рис. 8. Силовые линии в электромагнитной волне:
а — идеальная плоская волна; *б* — плоская волна, имеющая конечное поперечное сечение

Из сказанного следует, что электромагнитные волны имеют чисто поперечный характер только в простейшем случае идеальной плоской волны (§ 11), а в более сложных случаях этого, вообще говоря, нет.

§ 15. Отражение плоской волны от плоской границы раздела

Пусть плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в пустоте, падает на плоскую границу полубесконечной среды, имеющей комплексные проницаемости ε и μ. Направим ось z перпендикулярно плоской поверхности раздела внутрь правой среды и будем, как в § 13, считать, что плоскость x, y той же системы координат совпадает с границей раздела (рис. 9). Обозначим направление распространения падающей плоской волны через z' и проведем ось z' через начало координатной системы x, y, z. Кроме того, выберем ось x так, чтобы она лежала в плоскости z, z', которую в оптике обычно называют плоскостью падения (плоскостью падения называется, как известно, плоскость, образованная нормалью к поверхности раздела и падающим лучом).

При рассмотрении явлений, происходящих при падении волны на границу раздела, необходимо знать еще поляризацию падающей волны. В данной задаче приходится различать две различные поляризации падающей волны в зависимости от ориентации ее электрического и магнитного полей по отношению к плоскости падения, а именно:

1. Магнитное поле падающей волны перпендикулярно плоскости падения и, следовательно, параллельно границе раздела: оно имеет только составляющую H_y. Электрическое поле лежит в плоскости падения и имеет составляющие E_x и E_z.

2. Электрическое поле перпендикулярно плоскости падения и, следовательно, параллельно плоскости раздела: оно имеет единственную составляющую E_y. Магнитное поле параллельно плоскости падения и имеет составляющие H_x и H_z.

Для краткости будем называть эти две поляризации просто 1-й и 2-й поляризациями. В оптике эти поляризации отличают буквами p и s. В работах радиотехнического профиля — буквами E и H (электрическая и магнитная поляризация), причем у разных авторов эти названия часто имеют противоположный смысл.

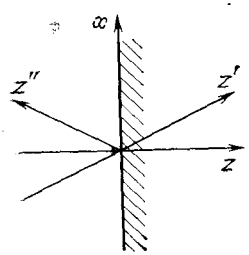


Рис. 9. Наклонное падение плоской волны на плоскую границу раздела

При рассмотрении 1-й поляризации будем считать, что падающая волна имеет единичную амплитуду, так что ее составляющая H_y равна

$$H_y^0 = e^{ikz'}. \qquad (15.01)$$

Обозначим через φ угол падения, т. е. угол между осями z и z'. Тогда

$$z' = z\cos\varphi + x\sin\varphi \qquad (15.02)$$

и падающая волна (15.01) перепишется в виде

$$H_y^0 = e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)}. \qquad (15.03)$$

Предположим, что полное магнитное поле имеет только составляющую H_y в правой среде (при $z>0$). Будем искать H_y в виде обобщенной плоской волны

$$H_y = T_1 e^{iK(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \qquad (15.04)$$

амплитуда T_1 которой считается постоянной, а коэффициенты α, β, γ выбирают из следующих соображений. Во-первых, падающая волна (15.03) не зависит от y, поэтому из соображений симметрии и полное поле во всем пространстве не должно зависеть от y, вследствие чего полагаем $\beta=0$, при этом удовлетворяется также второе уравнение (14.02). Далее, зависимость падающей волны от x дается множителем $e^{ikx\sin\varphi}$. Волна, возбуждаемая в правой среде, должна зависеть от x по тому же закону, иначе с помощью волны (15.04) нельзя удовлетворить граничным условиям на всей плоскости раздела $z=0$, т. е. при любых значениях x; отсюда следует, что

$$K\alpha = k\sin\varphi, \quad \alpha = \sin\varphi/n. \qquad (15.05)$$

Третий коэффициент γ должен быть определен из соотношения (14.13), но при этом необходимы дополнительные соображения, которые позволили бы выбрать знак квадратного корня в выражении

$$\gamma = \sqrt{1-\sin^2\varphi/n^2}. \qquad (15.06)$$

Этот знак выбирается из тех же соображений, что и в § 13, а именно: если правая среда обладает потерями, то γ определяется условием

$$\operatorname{Im}\nu > 0, \quad \nu = n\gamma = \sqrt{n^2-\sin^2\varphi}. \qquad (15.07)$$

В этом случае волна (15.04) в правой среде будет затухать при удалении от границы раздела, что и следует ожидать от волны, возбужденной на границе раздела. Выбор другого знака для ν означал бы, что рассматривается волна, падающая на границу раздела справа и затухающая при приближении к этой границе.

Некоторые трудности представляет выбор знака для ν в случае, когда правая среда не имеет потерь и коэффициент ν вещественный. В этом случае его обычно выбирают положительным, чтобы распространение фазы волны происходило от границы раздела внутрь данной среды. Нужно выбирать такое ν, чтобы распространение энергии (ср. § 11) шло от границы раздела. Однако, вводя в рассмотрение малые потери в правой среде и выбирая ν в соответствии с неравенством (15.07), получаем правильный результат и в пределе, когда потери отсутствуют.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на плоскости $z=0$, необходимо считать, что в левом полупространстве

($z<0$), наряду с падающей волной (15.03), имеется еще дополнительное поле, которое будем также искать в виде обобщенной плоской волны

$$H_y^1 = R_1 e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)}. \tag{15.08}$$

Из тех же соображений, что и выше, получим $\beta=0$ и $\alpha=\sin\varphi$, откуда из соотношения (14.13) $\gamma=-\cos\varphi$, так как при $\gamma=\cos\varphi$ имеем волну вида (15.03), которую прибавлять к падающей нельзя, так как амплитуда последней равна единице по условию задачи.

Для составляющей H_y полного поля в левом и правом полупространствах приходим к выражениям

$$H_y = (e^{ikz\cos\varphi} + R_1 e^{-ikz\cos\varphi}) e^{ikx\sin\varphi} \quad \text{при} \quad z<0,$$
$$H_y = T_1 e^{ik(\nu z+x\sin\varphi)} \text{ при } z>0. \tag{15.09}$$

Неизвестные коэффициенты R_1 и T_1 в этих формулах должны быть определены из граничных условий, которым должны удовлетворять поля на плоскости раздела $z=0$. Они называются (см. § 13): R_1 — коэффициентом отражения; T_1 — коэффициентом прохождения. Индекс *1* указывает, что они относятся к 1-й поляризации (и к магнитному полю).

В дальнейшем будем считать, что магнитное поле имеет единственную составляющую (15.09). Оно удовлетворяет уравнениям (14.09) и позволяет по формуле (14.10) вычислить электрическое поле.

Граничные условия для волн 1-й поляризации даются формулами (13.05). Учитывая, что согласно уравнению (14.10)

$$E_x = (1/ik\varepsilon)\,\partial H_y/\partial z,$$

первое граничное условие (13.05) перепишем в виде

$$\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=-0} = \frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{\partial H_y}{\partial z}\right|_{z=+0}. \tag{15.10}$$

Подставляя выражения (15.09) в эти граничные условия, приходим к следующим уравнениям:

$$1+R_1=T_1,\ \varepsilon\cos\varphi(1-R_1)=\nu T_1, \tag{15.11}$$

откуда R_1 и T_1 получаются в виде

$$R_1 = \frac{\varepsilon\cos\varphi-\nu}{\varepsilon\cos\varphi+\nu},\quad T_1 = \frac{2\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon\cos\varphi+\nu}. \tag{15.12}$$

Расчет 2-й поляризации производится аналогичным образом. В этом случае имеем в падающей волне только составляющие E_y, H_x, H_z и полное поле ищем с такими же тремя составляющими, выражая его через E_y. Из тех же соображений при падении плоской волны с единичной амплитудой под углом φ

$$E_y^0 = e^{ikz'} = e^{ik(z\cos\varphi+x\sin\varphi)}, \tag{15.13}$$

ищем полное поле в виде

$$E_y = (e^{ikz\cos\varphi} + R_2 e^{-ikz\cos\varphi}) e^{ikx\sin\varphi} \quad \text{при } z < 0,$$

$$E_y = T_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)} \quad \text{при } z > 0, \tag{15.14}$$

удовлетворяющем уравнениям (14.07), и ставим граничные условия

$$E_y|_{z=-0} = E_y|_{z=+0}, \quad H_x|_{z=-0} = H_x|_{z=+0}. \tag{15.15}$$

Из формулы (14.08) следует

$$H_x = (-1/ik\mu)\,\partial E_y/\partial z,$$

поэтому второе граничное условие (15.15) можно записать в виде

$$\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=-0} = \frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0}. \tag{15.16}$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$1 + R_2 = T_2, \quad \mu\cos\varphi(1 - R_2) = \nu T_2 \tag{15.17}$$

и окончательно получаем

$$R_2 = \frac{\mu\cos\varphi - \nu}{\mu\cos\varphi + \nu}, \quad T_2 = \frac{2\mu\cos\varphi}{\mu\cos\varphi + \nu}, \tag{15.18}$$

где R_2 — коэффициент отражения, T_2 — коэффициент прохождения для 2-й поляризации (по электрическому полю).

Рассмотрим физический смысл данных формул. Прежде всего в формулах (15.09) и (15.14) содержится известный закон отражения: угол падения равен углу отражения. Действительно, второе слагаемое для поля отраженной волны, появляющееся при $z<0$ в результате влияния поверхности раздела, имеет зависимость от координат в виде

$$e^{ikz''}, \quad z'' = -z\cos\varphi + x\sin\varphi. \tag{15.19}$$

При этом ось z'', по направлению которой происходит распространение отраженной волны, составляет с осью $-z$ тот же угол φ, какой направление распространения падающей волны (ось z') составляет с осью z.

В формулах (15.09) и (15.14) содержится также (для непоглощающих сред) известный закон преломления, который рассмотрен в § 16.

Выведенные выше формулы имеют широкое применение. Ниже остановимся на простейших следствиях, вытекающих из них.

Для нормального падения электромагнитной волны имеем $\varphi = 0$ и формулы (15.12) и (15.18) переходят в формулы (13.07). Точнее, получаем

$$R = -R_1 = R_2, \quad T = \zeta T_1 = T_2. \tag{15.20}$$

При нормальном падении плоскость падения становится неопределенной и различие поляризаций пропадает. Соотношения (15.20) получаются вследствие того, что R_1 и T_1 суть коэффициенты отражения и прохождения по магнитному полю, а R_2 и T_2 — коэффициенты отражения и прохождения по электрическому по-

лю. О различии этих коэффициентов для нормального падения говорилось уже в § 13.

В связи со сказанным в § 13 естественно возникает вопрос о том, какими свойствами должно обладать вещество, чтобы являться «оптической невидимкой». Так как визуальное обнаружение любого тела обусловлено волнами, отраженными и рассеянными телом под самыми различными углами, то для этого необходимо, чтобы коэффициенты отражения R_1 и R_2 равнялись нулю для любого угла падения φ, что согласно формулам (15.12) и (15.18) возможно только при $\varepsilon=\mu=1$, т. е. когда электромагнитные свойства вещества неотличимы от электромагнитных свойств пустоты (воздуха).

Отметим условия, при которых вещество полностью отражает падающие на него электромагнитные волны. Например, если $\varepsilon\to\infty$ при конечном μ, то коэффициенты отражения обеих поляризаций стремятся к предельным значениям $R_1=1$ и $R_2=-1$. Как видно из § 12, к этому предельному случаю весьма близко подходят металлы, у которых проницаемость ε имеет весьма большую мнимую часть. Поэтому металлы являются почти идеальными зеркалами для электромагнитных волн: они почти полностью отражают падающую на них электромагнитную энергию. Если бы существовали вещества, для которых проницаемость μ была бы весьма велика (при конечном ε), то коэффициенты отражения от таких веществ приближались бы к предельным значениям $R_1=-1$ и $R_2=1$.

Приведенные примеры не исчерпывают случаев сильного отражения. Полное отражение может реализоваться и при конечных значениях проницаемостей ε и μ, именно: если ε и μ вещественны, то при мнимости величины ν, определяемой формулой (15.07), или равенстве ее нулю, коэффициенты R_1 и R_2 становятся по абсолютной величине равными единице:

$$|R_1|=|R_2|=1. \tag{15.21}$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$n^2\leqslant\sin^2\varphi, \tag{15.22}$$

которое (если не считать случаев падения волны на границу диэлектрик — пустота со стороны диэлектрика, о чем будет сказано ниже) может иметь место при падении волны на плоскую границу плазмы, параметры которой определяются формулами (12.08). Действительно, в этом случае всегда $\varepsilon<1$, поэтому существует такой интервал углов падения, при котором отражение от границы будет полным. Если же при данной частоте диэлектрическая проницаемость ε отрицательна, то равенство (15.21) имеет место при всех φ, т. е. падающая волна всегда претерпевает полное отражение.

Разберем еще вопрос о том, при каких углах падения на плоскую границу вещества с проницаемостями ε и μ коэффициент отражения будет равен нулю. Обозначим через φ_1 угол падения при

нулевом отражении для 1-й поляризации, φ_2 — такой же угол для 2-й поляризации. Углы φ_1 и φ_2 должны удовлетворять соотношениям

$$\varepsilon\cos\varphi_1=\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\varphi_1},\quad \mu\cos\varphi_2=\sqrt{\varepsilon\mu-\sin^2\varphi_2},$$

откуда получаем

$$\cos\varphi_1=\sqrt{(\varepsilon\mu-1)/(\varepsilon^2-1)},\quad \cos\varphi_2=\sqrt{(\varepsilon\mu-1)/(\mu^2-1)}. \qquad (15.23)$$

Нулевое отражение имеет место, если величины $\cos\varphi_1$ и $\cos\varphi_2$, вычисляемые по этим формулам, вещественны и лежат между нулем и единицей. Например, при $\varepsilon=\mu$ получаем $\cos\varphi_1=\cos\varphi_2=1$, $\varphi_1=\varphi_2=0$, что соответствует разобранному в § 13 случаю вещества, не видимого для радиолокатора.

Если имеется прозрачный немагнитный диэлектрик ($\mu=1$, $n=\sqrt{\varepsilon}$) с вещественным значением n, то для него по формулам (15.23)

$$\cos\varphi_1=1/\sqrt{n^2+1},\quad \cos\varphi_2=\infty. \qquad (15.24)$$

Таким образом, волны 2-й поляризации всегда частично отражаются от немагнитных диэлектриков, а волны 1-й поляризации не отражаются при падении под углом

$$\varphi_1=\operatorname{arctg} n, \qquad (15.25)$$

который называется углом Брюстера.

Выше было подробно исследовано падение плоских волн на границу раздела в предположении, что одна из сред, а именно та среда, в которой распространяется падающая плоская волна, является пустотой. Легко показать (это можно сделать как непосредственно, так и с помощью леммы § 21), что если волна падает со стороны среды, имеющей проницаемости ε_1 и μ_1, а другая полубесконечная среда имеет проницаемости ε_2 и μ_2, то формулы (15.12) и (15.18) сохраняют свою силу, если в них через ε и μ обозначить относительные проницаемости $\varepsilon=\varepsilon_2/\varepsilon_1$ и $\mu=\mu_1/\mu_2$, а через n — относительный показатель преломления. Формулы (15.09) и (15.14) при этом также сохранят свой смысл, если k заменить на комплексное волновое число в первой (левой) среде с проницаемостями ε_1 и μ_1.

Полученные таким путем формулы позволяют рассмотреть, в частности, падение плоской волны из любой среды на ее границу с пустотой. Соотношение (15.22) есть условие полного отражения от границы, называемого обычно полным внутренним отражением.

§ 16. Структура электромагнитного поля прошедшей волны

Выше основное внимание уделялось волне, отраженной от границы раздела. Исследуем более подробно структуру поля, возбуждаемого падающей волной во второй среде и кратко называ-

емого прошедшей волной. Для этого воспользуемся формулами (15.09) и (15.14), а также формулами

$$E_x = \frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad H_x = -\frac{1}{ik\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z},$$
$$E_z = -\frac{1}{ik\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad H_z = \frac{1}{ik\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}, \tag{16.01}$$

вытекающими из уравнений поля (14.08) и (14.10).

Составляющие поля для 1-й поляризации

$$H_y = T_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)},$$
$$E_x = \frac{\nu}{\varepsilon} T_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}, \quad E_z = -\frac{\sin\varphi}{\varepsilon} T_1 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}, \tag{16.02}$$

а для 2-й поляризации

$$E_y = T_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)},$$
$$H_x = -\frac{\nu}{\mu} T_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}, \quad H_z = \frac{\sin\varphi}{\mu} T_2 e^{ik(\nu z + x\sin\varphi)}. \tag{16.03}$$

Наиболее простой физический смысл эти формулы имеют при вещественных значениях n и ν. В этом случае зависимость всех составляющих поля от координат определяется множителем $e^{ikn z'''}$, где

$$z''' = (\nu z + x\sin\varphi)/n = z\cos\psi + x\sin\psi,$$
$$n\sin\psi = \sin\varphi, \quad n\cos\psi = \nu = \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}. \tag{16.04}$$

Распространение во второй среде происходит в направлении оси z''', составляющей с осью z, т. е. с нормалью к поверхности раздела, угол ψ, который в этом случае называют углом преломления. Угол преломления ψ связан с углом падения φ законом Снеллиуса

$$\sin\varphi/\sin\psi = n, \tag{16.05}$$

известным из элементарной физики.

Структура прошедшей волны в этом случае довольно проста. Если перейти к новой системе координат, в которой ось z есть ось z''', ось x перпендикулярна оси z''' и лежит в плоскости падения, а ось y — та же, что и раньше, то в этой системе координат поле прошедшей волны определяется, как легко показать на основании выражений (16.02) и (16.03), формулами вида (11.11). Иначе говоря, во второй среде распространяется обычная плоская волна.

Если же величина ν, определяемая формулой (15.07), оказывается комплексной

$$\nu = \nu' + i\nu'', \quad \nu'' > 0, \tag{16.06}$$

то структура поля во второй среде оказывается более сложной. В этом случае в ней распространяется обобщенная плоская волна, которая не сводится к простым плоским волнам, изученным в § 11, а подчиняется более сложным закономерностям § 14.

Фаза поля определяется множителем

$$e^{ik(\nu' z + x\sin\varphi)} = e^{ik\tilde{n}z'''}, \quad \tilde{n} = \sqrt{(\nu')^2 + \sin^2\varphi},$$

так что распространение фазы прошедшей волны происходит в направлении оси

$$\begin{aligned} z''' &= z\cos\psi + x\sin\psi, \\ \tilde{n}\sin\psi &= \sin\varphi, \quad \tilde{n}\cos\psi = \nu', \end{aligned} \tag{16.07}$$

составляющей с осью z угол ψ, который по-прежнему можно считать углом преломления; он связан с углом падения φ более сложным соотношением

$$\sin\varphi/\sin\psi = \tilde{n}, \tag{16.08}$$

переходящим в формулу (16.05) при вещественном ν.

При распространении в среде прошедшая волна испытывает затухание, определяемое множителем $e^{-k\nu'' z}$ в формулах (16.02) и (16.03). Таким образом, волна затухает в направлении нормали к поверхности, а фаза распространяется под некоторым углом к нормали. Иначе говоря, плоскости равной амплитуды и поверхности равной фазы прошедшей волны пересекаются друг с другом под некоторым углом ψ, чего в случае простой плоской волны (§ 11) нет. Другой особенностью обобщенной плоской волны, возбуждаемой во второй среде при комплексных значениях ν, является наличие составляющих поля, параллельных оси z'''. В этом случае прошедшая волна теряет свой поперечный характер, если под поперечностью понимать отсутствие составляющих, перпендикулярных фазовому фронту (см. конец § 14).

Заметим, что при нормальном падении электромагнитная волна во второй среде всегда является простой плоской волной, распространяющейся от границы в глубину среды. Действительно, в этом случае из формул (16.02) и (16.03) легко получить выражения

$$\begin{aligned} H_y &= T_1 e^{iknz}, \quad E_y = T_2 e^{iknz}, \\ E_x &= \zeta T_1 e^{iknz}, \quad H_x = -(1/\zeta) T_2 e^{iknz}, \end{aligned} \tag{16.09}$$

эквивалентные выражениям (13.04) в силу формул (15.20).

Предположим теперь, что комплексный показатель преломления второй среды имеет большую абсолютную величину ($|n| \gg 1$). При этом условии составляющими E_z и H_z в поле прошедшей волны при любых углах φ можно пренебречь по сравнению с составляющими E_x и H_x, так как последние по порядку величины в n раз больше первых. Кроме того, при этом условии можно считать $\nu = n$. Составляющие поля прошедшей волны можно записать в приближенной форме

$$\begin{aligned} H_y &= T_1 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}, \quad E_y = T_2 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}, \\ E_x &= \zeta T_1 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}, \quad H_x = -(1/\zeta) T_2 e^{ik(nz + x\sin\varphi)}. \end{aligned} \tag{16.10}$$

Эти формулы показывают, что при $|n|\gg 1$ во второй среде возбуждается почти нормально распространяющая плоская волна, отличающаяся от волны, определяемой формулами (16.09), численными значениями T_1 и T_2, а также тем, что ее зависимость от x определяется множителем $e^{ikx\sin\varphi}$ (эта зависимость задается падающей волной). Однако при $n'\gg 1$ плоскости равных фаз почти параллельны границам раздела и составляют с плоскостями равных амплитуд малые углы. Поэтому прошедшая волна имеет практически ту же структуру, что и нормально распространяющаяся плоская волна. Составляющие электрического и магнитного полей прошедшей волны, как видно из формул (16.10), связаны между собой соотношениями

$$E_x=\zeta H_y,\quad E_y=-\zeta H_x, \tag{16.11}$$

к которым мы вернемся в гл. IV.

Изученные выше явления, происходящие при падении волны на границу раздела двух сред, имеют более широкую область приложения, чем это может показаться с первого взгляда. Во-первых, законы отражения и преломления используются в оптике и тогда, когда электромагнитные волны и поверхности раздела не являются плоскими (при расчете оптических систем, состоящих из линз и зеркал). Как можно показать, такое использование законов преломления и отражения должно приводить к правильным результатам, если радиусы кривизны как поверхности раздела, так и поверхности фронта волны значительно больше длины волны. Во-вторых, те же законы могут быть применены для расчета прохождения волн через пластинки и более сложные слоистые среды (если при этом учитывать повторные отражения волн). В-третьих, эти же законы применимы к линиям передачи (коаксиальным и волноводным), частично заполненным каким-либо веществом, если границы раздела совпадают с поперечным сечением линии. На последнем применении этих законов мы подробно остановимся в § 29 и 44.

Задачи к гл. II

1. Качественно исследовать поведение коэффициентов R_1 и R_2 при $\mu=1$ и $\varepsilon\gg 1$ в зависимости от угла падения.

Решение. При указанных условиях имеем $\nu\approx n=\sqrt{\varepsilon}\gg 1$, поэтому $R_2\approx -1$ при всех φ. Поведение R_1 более сложно: при $\cos\varphi\sim 1$ имеем $R_1\approx 1$, однако $R_1\to -1$ при $\varphi\to\pi/2$. Переход от 1 к -1 происходит при $\cos\varphi\sim 1/|n|$.

2. Найти комплексный вектор Умова — Пойнтинга для поля (16.02) и исследовать потоки энергии в непоглощающей нижней среде для однородной и неоднородной плоских волн.

Решение. Вектор $\hat{\mathfrak{S}}$ имеет составляющие

$$\hat{\mathfrak{S}}_z=\frac{c}{8\pi}\frac{\nu}{\varepsilon}|T_1|^2e^{-2k\nu''z},\quad \hat{\mathfrak{S}}_x=\frac{c}{8\pi}\frac{\sin\varphi}{\varepsilon}|T_1|^2e^{-2k\nu''z}.$$

Если величина ν вещественна, то в силу соотношений (16.04) получаем

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi}\frac{n}{\varepsilon}\cos\psi\,|T_1|^2, \quad \hat{\mathfrak{S}}_x = \frac{c}{8\pi}\frac{n}{\varepsilon}\sin\psi\,|T_1|^2,$$

т. е. вектор $\hat{\mathfrak{S}}$ вещественный и параллелен направлению распространения преломленной плоской волны. Если же величина ν — мнимая, $\nu = i\nu''$, то составляющая $\hat{\mathfrak{S}}_z$ — чисто мнимая (постоянного потока энергии в направлении оси z нет), а составляющая $\hat{\mathfrak{S}}_x$ — вещественная (постоянный поток энергии параллелен границе раздела). В направлении оси z существует переменный поток энергии, поскольку $\mathfrak{S}_z \neq 0$.

Глава III.

ПОТЕНЦИАЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

§ 17. Векторные потенциалы

Потенциалы применяются в электродинамике для решения задач двух типов. Во-первых, с помощью потенциалов находится решение задачи о полях, возбуждаемых в свободном пространстве заданными источниками — токами и зарядами. Во-вторых, потенциалы позволяют решать граничные задачи электродинамики, в которых рассматриваются электромагнитные поля при наличии границ.

Употребление потенциалов электромагнитного поля значительно облегчает решение таких задач. В этом параграфе рассмотрим лишь задачу о поле заданных источников в безграничном пустом пространстве. Заметим, что решение этой задачи можно получить и без потенциалов, исходя непосредственно из уравнений электромагнитного поля. Однако в последнем случае выкладки оказываются более сложными и громоздкими.

Напомним, как вводятся потенциалы при решении задачи о поле заданных источников в безграничном пространстве. Рассматривая электромагнитное поле в пустоте, где

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E}, \tag{17.01}$$

и считая заданными плотность тока $\mathbf{j}$ и плотность заряда ρ, исходят из общих уравнений Максвелла, выписанных в конце § 1. При этом оказывается, что уравнения (II) и (IIa) выполняются тождественно, если электрическое и магнитное поля выражены через векторный потенциал $\mathbf{A}$ и скалярный потенциал Φ следующим образом:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\Phi. \tag{17.02}$$

Остальные уравнения электромагнитного поля удовлетворяются, если векторный и скалярный потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{17.03}$$

и дополнительному соотношению

$$\operatorname{div}\mathbf{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{17.04}$$

Как известно, запаздывающие потенциалы

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{j}]}{R}\,dV, \quad \Phi = \int \frac{[\rho]}{R}\,dV \tag{17.05}$$

являются частным решением волновых уравнений (17.03). Эти частные решения удовлетворяют дополнительному соотношению (17.04), так как $\mathbf{j}$ и ρ связаны уравнением непрерывности (1.01). Общее решение волновых уравнений (17.03) есть сумма частного решения (17.05) и общего решения однородных волновых уравнений

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{17.06}$$

При решении задачи о поле, возбужденном заданными токами и зарядами, обычно используют только частное решение в виде запаздывающих потенциалов (17.05). Это делается из физических соображений, так как общее решение однородных уравнений (17.06) дает электромагнитные волны (в частности, изученные в § 11 плоские волны), распространяющиеся в безграничном пространстве и не имеющие в нем источников. Для монохроматических процессов и комплексных амплитуд, введенных в § 2, уравнения (17.02) принимают вид

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = ik\mathbf{A} - \operatorname{grad}\Phi, \tag{17.07}$$

причем потенциалы $\mathbf{A}$ и Φ должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \Delta\Phi + k^2\Phi = -4\pi\rho \tag{17.08}$$

и дополнительному соотношению

$$\operatorname{div}\mathbf{A} - ik\Phi = 0, \tag{17.09}$$

показывающему, что скалярный потенциал монохроматического поля выражается через векторный потенциал, подобно тому как плотность заряда ρ определяется плотностью тока $\mathbf{j}$ по формуле (3.06). Поэтому для монохроматического электромагнитного поля оказывается достаточным один векторный потенциал, с помощью которого электрическое и магнитное поля находятся в виде

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} + k^2\mathbf{A}), \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{17.10}$$

Векторный потенциал удовлетворяет первому из уравнений (17.08), частное решение которого имеет вид

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{j}\,dV. \tag{17.11}$$

Последнее выражение непосредственно следует из первой формулы (17.05). Действительно, мгновенное значение $\mathbf{j}(t)$ плотности тока связано с его комплексной амплитудой $\mathbf{j}(\omega)$, входящей в формулы (17.08) и (17.11), соотношением (см. § 2)

$$\mathbf{j}(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{j}(\omega)e^{-i\omega t}\}. \tag{17.12}$$

Поэтому «запаздывающая» плотность тока

$$[\mathbf{j}]=\mathbf{j}\left(t-\frac{R}{c}\right)=\mathrm{Re}\{\mathbf{j}(\omega)e^{-i\omega(t-R/c)}\}=\mathrm{Re}\{\mathbf{j}(\omega)e^{ikR}e^{-i\omega t}\} \tag{17.13}$$

и ей соответствует комплексная амплитуда $e^{ikR}\mathbf{j}(\omega)$, благодаря чему и приходим к выражению (17.11). Можно убедиться непосредственной проверкой, что выражение (17.11) действительно удовлетворяет первому уравнению (17.08). Опережающим потенциалам, которые тоже удовлетворяют уравнениям (17.03), соответствуют $\mathbf{j}(t+R/c)$ и $e^{-ikR}\mathbf{j}(\omega)$; при замене e^{ikR} на e^{-ikR} в решении (17.12) поля (17.11) уже не будут удовлетворять условиям (10.06) и (10.07), а при $\mathrm{Im}\,k>0$ будут неограниченно возрастать при $R\to\infty$.

Векторный потенциал удобно применять при расчете полей в свободном пространстве, возбуждаемом заданными источниками. Далее в теории излучения и дифракции электромагнитных волн рассмотрен случай, когда монохроматическое электромагнитное поле в пустоте возбуждается как электрическими, так и магнитными токами и, следовательно, удовлетворяет уравнениям

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=ik\mathbf{H}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H}=-ik\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \tag{17.14}$$

решение которых записывается в виде (см. задачу 1)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=-\frac{1}{ik}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}^e+k^2\mathbf{A}^e)-\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^m,\\ \mathbf{H}&=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^e-\frac{1}{ik}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A}^m+k^2\mathbf{A}^m),\end{aligned} \tag{17.15}$$

где

$$\mathbf{A}^e=\frac{1}{c}\int\frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{j}^e\,dV,\quad \mathbf{A}^m=\frac{1}{c}\int\frac{e^{ikR}}{R}\mathbf{j}^m\,dV \tag{17.16}$$

суть запаздывающие векторные потенциалы — электрический ($\mathbf{A}^e$) и магнитный ($\mathbf{A}^m$).

§ 18. Векторы Герца

Наряду с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ и скалярным потенциалом Φ вводят еще один потенциал — вектор Герца, который бу-

дем обозначать через $\mathbf{\Pi}$. Вектор Герца позволяет вычислить векторный и скалярный потенциалы с помощью соотношений

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}, \quad \Phi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}, \tag{18.01}$$

причем получаемые по этим формулам потенциалы $\mathbf{A}$ и Φ автоматически удовлетворяют дополнительному соотношению (17.04). С помощью вектора Герца просто и изящно выражается поле элементарного диполя (вибратора Герца), причем вектор Герца оказывается непосредственно связанным с дипольным моментом вибратора.

В теории монохроматических электромагнитных полей эти соотношения принимают вид

$$\mathbf{A}=-ik\mathbf{\Pi}, \quad \Phi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}. \tag{18.02}$$

Вектор $\mathbf{\Pi}$, отличающийся лишь постоянным множителем от векторного потенциала $\mathbf{A}$, определяет напряженность электрического и магнитного полей по формулам

$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}+k^2\mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{H}=-ik\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \tag{18.03}$$

вытекающим из формул (17.10).

В сущности говоря, для монохроматических полей в векторе Герца нет особой необходимости — его может вполне заменить векторный потенциал. Однако по традиции вектор Герца вводится при исследовании электромагнитного поля в пустом пространстве (без источников) или в ограниченной части такого пространства. В этих случаях вектор $\mathbf{\Pi}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (уравнению Гельмгольца)

$$\Delta\mathbf{\Pi}+k^2\mathbf{\Pi}=0. \tag{18.04}$$

Введенный выше вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ часто называется электрическим вектором Герца, в отличие от магнитного вектора Герца, который будет введен несколько позже. Из сказанного вытекает следующее: если в качестве $\mathbf{\Pi}$ взять любое решение векторного волнового уравнения (18.04) и образовать с помощью формул (18.03) векторы электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то они будут тождественно удовлетворять комплексным уравнениям электромагнитного поля в пустом пространстве

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\mathbf{E} \tag{18.05}$$

и таким образом определять некоторый возможный электромагнитный процесс.

Так как формулы для вектора Герца получены довольно сложным обходным путем с использованием векторного и скалярного потенциалов, то полезно также провести непосредственно доказательство сделанного утверждения. Образуем с помощью формул (18.03) выражения

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=k^2\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}=-ik(-\Delta\mathbf{\Pi}+$$
$$+\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}).$$

Поскольку Π является решением уравнения (18.04), то выражение для rot $\mathbf{H}$ может быть переписано в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik(\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi+k^2\Pi),$$

откуда уже непосредственно видно, что уравнения электромагнитного поля (18.05) тождественно удовлетворяются.

Смысл введения вектора Π заключается в том, что решение уравнений электромагнитного поля сводится к более простой задаче — решить уравнение (18.04).

Даже при беглом взгляде на уравнения электромагнитного поля в пустоте видна симметрия этих уравнений относительно векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В самом деле, если обозначить через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ какое-нибудь решение уравнений (18.05), то векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$, образованные по формулам

$$\mathbf{E}'=-\mathbf{H},\quad \mathbf{H}'=\mathbf{E}, \tag{18.06}$$

также будут удовлетворять уравнениям электромагнитного поля в пустоте

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=ik\mathbf{H}',\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}'=-ik\mathbf{E}'. \tag{18.07}$$

Поэтому наряду с электрическим вектором Герца, определяющим электромагнитные поля по формулам (18.03), можно ввести магнитный вектор Герца, который обозначаем через Π^m. Вектор Π^m связан с напряженностью электрического и магнитного полей следующим образом:

$$\mathbf{E}=ik\operatorname{rot}\Pi^m,\quad \mathbf{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi^m+k^2\Pi^m. \tag{18.08}$$

Вектор Π^m связан с векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ так же, как вектор Π связан по формулам (18.03) с векторами $-\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ соответственно, как это и требует симметрия уравнений поля в пустоте.

Непосредственной проверкой нетрудно также убедиться, что если вектор Π^m удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta\Pi^m+k^2\Pi^m=0, \tag{18.09}$$

то векторы (18.08) тождественно удовлетворяют уравнениям (18.05).

Иногда при исследовании электромагнитных волн оказывается необходимым ввести электрический и магнитный векторы Герца одновременно. Тогда выражения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi^e+k^2\Pi^e+ik\operatorname{rot}\Pi^m,\\ \mathbf{H}&=-ik\operatorname{rot}\Pi^e+\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi^m+k^2\Pi^m,\end{aligned} \tag{18.10}$$

т. е. являются суммой выражений (18.03) и (18.08). Векторы $\Pi^e=\Pi$ и Π^m по-прежнему должны удовлетворять волновым уравнениям (18.04) и (18.09).

Введенные в этом параграфе формулы относятся к электромагнитному полю в пустоте. При необходимости все выведенные выше формулы могут быть обобщены таким образом, что они станут применимы для любой однородной среды с произвольными

комплексными проницаемостями ε и μ. Это обобщение можно произвести как непосредственно, так и с помощью леммы § 21.

Формулы (18.10) можно также вывести из формул (17.15) предыдущего параграфа, если положить

$$\mathbf{A}^e = -ik\boldsymbol{\Pi}^e, \quad \mathbf{A}^m = -ik\boldsymbol{\Pi}^m. \tag{18.11}$$

Таким образом, электрический и магнитный векторы Герца пропорциональны соответственно электрическому и магнитному векторным потенциалам. Формулы (18.10) были выведены еще раз независимым путем, поскольку для полей без источников, которым посвящен настоящий параграф, выкладки гораздо проще.

§ 19. Криволинейные ортогональные координаты

Для исследования электромагнитного поля при наличии поверхностей раздела сложной формы часто вместо декартовых координат x, y, z используются криволинейные координаты ξ, η, ζ, связанные с ними однозначно:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta). \tag{19.01}$$

На рис. 10 изображен бесконечно малый прямоугольный параллелепипед (слегка искривленный), образованный тремя координатными поверхностями

$$\xi = \text{const}, \quad \eta = \text{const}, \quad \zeta = \text{const} \tag{19.02}$$

и тремя бесконечно близкими поверхностями, соответствующими значениям $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$; в дальнейшем считаем дифференциалы $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ положительными. Обозначим через ds_ξ, ds_η, ds_ζ ребра этого параллелепипеда, проходящие через точку ξ, η, ζ (индекс указывает на координату, изменяющуюся вдоль данного ребра), dS_ξ, dS_η, dS_ζ — его грани, проходящие через ту же точку (индекс указывает на координату, остающуюся постоянной на данной грани), dV — его объем. Тогда

$$ds_\xi = h_\xi\, d\xi, \quad ds_\eta = h_\eta\, d\eta, \quad ds_\zeta = h_\zeta\, d\zeta, \tag{19.03}$$

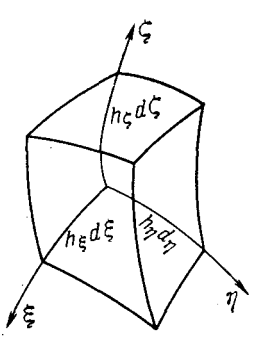


Рис. 10. Криволинейные координаты ξ, η ζ

где коэффициенты h_ξ, h_η, h_ζ в общем случае изменяются от точки к точке; они называются коэффициентами Ламе. Далее можно написать

$$dS_\xi = h_\eta h_\zeta\, d\eta\, d\zeta, \quad dS_\eta = h_\zeta h_\xi\, d\zeta\, d\xi, \quad dS_\zeta = h_\xi h_\eta\, d\xi\, d\eta \tag{19.04}$$

и

$$dV = h_\xi h_\eta h_\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{19.05}$$

Длина диагонали этого параллелепипеда, т. е. длина бесконечно малого отрезка ds, соединяющего две точки с

координатами ξ, η, ζ и $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$, определяется формулой

$$ds^2 = h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\zeta^2 d\zeta^2. \tag{19.06}$$

Вычислим составляющие вектора

$$\mathbf{R} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{19.07}$$

в криволинейной ортогональной системе координат. Согласно теореме Стокса, примененной, например, к грани $\xi = \text{const}$ параллелепипеда на рис. 10, имеем

$$R_\xi \, dS_\xi = \oint A_s \, ds, \tag{19.08}$$

где интегрирование производится по периметру этой грани. Легко показать, что

$$\oint A_s \, ds = d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} (A_\zeta \, ds_\zeta) - d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_\eta ds_\eta) \tag{19.09}$$

и, пользуясь формулами (19.03) и (19.04), получаем формулы

$$\begin{aligned} h_\eta h_\zeta R_\xi &= \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta A_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta A_\eta), \\ h_\zeta h_\xi R_\eta &= \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi A_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\zeta A_\zeta), \\ h_\xi h_\eta R_\zeta &= \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta A_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi A_\xi), \end{aligned} \tag{19.10}$$

причем составляющие R_η и R_ξ получаются циклической перестановкой переменных ξ, η, ζ, ξ в формуле для R_ξ. Заметим, что для справедливости формул (19.09) и (19.10) направления ξ, η, ζ должны образовывать правую тройку (как направления x, y, z).

Составляющие вектора

$$\mathbf{G} = \operatorname{grad} \psi, \tag{19.11}$$

как известно, определяются соотношениями

$$G_\xi = \frac{\partial \psi}{\partial s_\xi}, \quad G_\eta = \frac{\partial \psi}{\partial s_\eta}, \quad G_\zeta = \frac{\partial \psi}{\partial s_\zeta}, \tag{19.12}$$

поэтому по формулам (19.03) получаем

$$G_\xi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad G_\eta = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad G_\zeta = \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}. \tag{19.13}$$

Дивергенцию любого вектора $\mathbf{A}$ можно вычислить по теореме Гаусса — Остроградского

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \oint A_n dS, \tag{19.14}$$

где справа интеграл берется по поверхности бесконечно малого координатного объема на рис. 10. Так как

$$\oint A_n \, dS = d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} (A_\xi \, dS_\xi) + d\eta \frac{\partial}{\partial \eta} (A_\eta \, dS_\eta) + d\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (A_\zeta \, dS_\zeta), \tag{19.15}$$

то с помощью формул (19.04) и (19.05) получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(n_\eta h_\zeta A_\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(h_\xi h_\zeta A_\eta)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(h_\xi h_\eta A_\xi)\right\}. \tag{19.16}$$

Так как оператор Лапласа определяется (применительно к скалярной функции ψ) формулой

$$\Delta\psi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi, \tag{19.17}$$

то комбинация формул (19.13) и (19.16) дает

$$\Delta\psi=\frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_\zeta h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{h_\xi h_\eta}{h_\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)\right\}. \tag{19.18}$$

В дальнейшем наиболее часто будем пользоваться цилиндрической системой координат r, φ, z, связанной с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi. \tag{19.19}$$

Полагая в выведенных выше формулах

$$\xi=r,\ \eta=\varphi,\ \zeta=z;\ h_r=1,\ h_\varphi=r,\ h_z=1, \tag{19.20}$$

можем написать

$$\Delta\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{19.21}$$

Сферические координаты r, ϑ, φ, которыми также часто приходится пользоваться, связаны с декартовыми координатами следующим образом:

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z=r\cos\vartheta, \tag{19.22}$$

причем φ имеет тот же геометрический смысл, что и в формулах (19.19), а r — другой. Чтобы применить выведенные выше общие формулы к сферическим координатам, достаточно положить

$$\xi=r,\ \eta=\vartheta,\ \zeta=\varphi;\ h_r=1,\ h_\vartheta=r,\ h_\varphi=r\sin\vartheta. \tag{19.23}$$

Поэтому оператор Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \tag{19.24}$$

§ 20*. Поля и потенциалы в криволинейных ортогональных координатах

Запишем комплексные уравнения электромагнитного поля в пустоте

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mathbf{H},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\mathbf{E} \tag{20.01}$$

с помощью криволинейных ортогональных координат. Применяя формулы (19.10), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \eta}(h_\zeta E_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\eta E_\eta) = \mathrm{i}\, k h_\eta h_\zeta H_\xi,\\
&\frac{\partial}{\partial \eta}(h_\zeta H_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\eta H_\eta) = -\mathrm{i}\, k h_\eta h_\zeta E_\xi,\\
&\frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi E_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\zeta E_\zeta) = \mathrm{i}\, k h_\zeta h_\xi H_\eta,\\
&\frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi H_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(h_\zeta H_\zeta) = -\mathrm{i}\, k h_\zeta h_\xi E_\eta,\\
&\frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta E_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi E_\xi) = \mathrm{i}\, k h_\xi h_\eta H_\zeta,\\
&\frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta H_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi H_\xi) = -\mathrm{i}\, k h_\xi h_\eta E_\zeta.
\end{aligned} \tag{20.02}$$

В ряде случаев удается все шесть функций (E_ξ, E_η, E_ζ, H_ξ, H_η, H_ζ), входящих в эти уравнения, выразить через две вспомогательные функции U и V, удовлетворяющие уравнениям второго порядка (волновому уравнению или уравнению, приводящему к волновому). Это возможно, если уравнения (20.02) допускают решения электрического и магнитного типов; тогда функция U однозначно определяет электромагнитное поле электрического типа, функция V — поле магнитного типа.

Решением электрического типа (или поперечно-магнитным полем) называется такое решение уравнений (20.02), у которого $E_\zeta \neq 0$ и $H_\zeta = 0$, а решением магнитного типа (поперечно-электрическим полем) — такое, у которого $E_\zeta = 0$ и $H_\zeta \neq 0$. Для решения электрического типа из условия $H_\zeta = 0$ вытекает соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(h_\eta E_\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta}(h_\xi E_\xi),$$

из которого следует, что составляющие E_ξ и E_η могут быть представлены в виде

$$E_\xi = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial U'}{\partial \xi}, \quad E_\eta = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial U'}{\partial \eta}, \tag{20.03}$$

где U' — вспомогательная функция. Подставляя эти выражения во второе и четвертое уравнения (20.02) и учитывая условие $H_\zeta = 0$, получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\eta H_\eta) = \mathrm{i}\, k \frac{h_\eta h_\zeta}{h_\xi}\frac{\partial U'}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_\xi H_\xi) = -\mathrm{i}\, k \frac{h_\zeta h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial U'}{\partial \eta}, \tag{20.04}$$

которые могут быть легко разрешены, если коэффициенты Ламе данной координатной системы ξ, η, ζ удовлетворяют условиям

$$h_\zeta = 1, \quad \partial/\partial\zeta\,(h_\xi/h_\eta) = 0$$

или, что то же самое, если

$$h_\xi = g_1(\xi, \eta)\, g(\zeta), \quad h_\eta = g_2(\xi, \eta)\, g(\zeta), \quad h_\zeta = 1. \tag{20.05}$$

Действительно, полагая

$$U' = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \quad H_\xi = -\frac{ik}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad H_\eta = \frac{ik}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \tag{20.06}$$

где U — новая функция, удовлетворим уравнениям (20.04). Последнее уравнение (20.02) дает

$$E_\zeta = -\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h_\xi \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right]. \tag{20.07}$$

Таким образом, с помощью всех уравнений (20.02), за исключением первого и третьего, составляющие поля электрического типа выражены через функцию U. Подставим теперь эти выражения в эти два уравнения, получим соотношения

$$-\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h_\xi \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right]\right\} - \frac{\partial^3 U}{\partial \eta\, \partial \zeta^2} = k^2 \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h_\xi \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right]\right\} + \frac{\partial^3 U}{\partial \xi\, \partial \zeta^2} = -k^2 \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

которые удовлетворяются, если функция U есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{h_\xi h_\eta}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h_\eta \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h_\xi \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\right] + k^2 U = 0. \tag{20.08}$$

Найдя решение уравнения (20.08), можно построить решение исходных уравнений (20.02), относящееся к электрическому типу, в виде

$$E_\xi = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\, \partial \zeta}, \quad E_\eta = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial^2 U}{\partial \eta\, \partial \zeta}, \quad E_\zeta = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + k^2 U,$$

$$H_\xi = -\frac{ik}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad H_\eta = \frac{ik}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad H_\zeta = 0. \tag{20.09}$$

По аналогии нетрудно построить поле магнитного типа:

$$E_\xi = \frac{ik}{h_\eta}\frac{\partial V}{\partial \eta}, \quad E_\eta = -\frac{ik}{h_\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad E_\zeta = 0,$$

$$H_\xi = \frac{1}{h_\xi}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial \zeta}, \quad H_\eta = \frac{1}{h_\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial \eta\, \partial \zeta}, \quad H_\zeta = \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2} + k^2 V, \tag{20.10}$$

причем функция V должна удовлетворять тому же уравнению (20.08). При написании формул (20.10) проще всего исходить из отмеченной в § 18 симметрии уравнений поля (20.01). Общее решение уравнений поля обычно представляется в виде суммы решений (20.09) и (20.10).

Отметим, что вывод формул (20.09) и (20.10) основан на условиях (20.05). Если в выбранной координатной системе эти условия не выполняются, то данный способ решения оказывается неприменимым. В такой координатной системе общее решение урав-

нений поля не распадается на сумму решений электрического и магнитного типов.

Условиям (20.05) удовлетворяет координатная система, в которой ζ есть декартова координата z, а ξ, η — любые криволинейные ортогональные координаты на плоскости x, y: это могут быть декартовы координаты ($\xi=x$, $\eta=y$), полярные координаты ($\xi=r$, $\eta=\varphi$) и т. д. Во всех случаях

$$h_\xi = g_1(\xi, \eta), \quad h_\eta = g_2(\xi, \eta), \quad h_z = 1 \tag{20.11}$$

в соответствии с формулами (20.05).

В декартовой системе координат x, y, z согласно условию $h_x = h_y = h_z = 1$ получаем для функций U и V волновые уравнения

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad \Delta V + k^2 V = 0, \tag{20.12}$$

а суперпозиция полей электрического и магнитного типов имеет вид

$$E_x = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} + \mathrm{i}k\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_y = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \mathrm{i}k\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U,$$

$$H_x = -\mathrm{i}k\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}, \quad H_y = \mathrm{i}k\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad H_z = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2 V. \tag{20.13}$$

Как легко проверить, последние выражения могут быть получены из формул (18.10), если в них положить

$$\Pi_x^e = \Pi_y^e = 0, \quad \Pi_z^e = U; \quad \Pi_x^m = \Pi_y^m = 0, \quad \Pi_z^m = V. \tag{20.14}$$

Таким образом, если ζ — декартова координата, то функции U и V являются (единственными) составляющими электрического и магнитного векторов Герца по оси z. В этом случае U называется электрической функцией Герца; V — магнитной функцией Герца. Сделанный выше вывод о связи U и V с векторами Герца сохраняется при любом выборе координат ξ, η в плоскости x, y. Функции Герца будут применены в теории волноводов (гл. VII): поле электрического типа есть в этом случае совокупность электрических волн, поле магнитного типа — совокупность магнитных волн в волноводе.

Если ζ есть радиус-вектор цилиндрической системы координат, то условия (20.05), как легко проверить, не удовлетворяются. Поэтому для цилиндрических волн, распространяющихся в секториальном рупоре (см. § 55), разделение полей на электрический и магнитный типы производится по отношению к оси z цилиндрической системы, а не по отношению к направлению распространения волн.

Если ζ есть радиус-вектор сферической системы координат, то условия (20.08) соблюдаются. Действительно, полагая $\xi=\vartheta$, $\eta=\varphi$ и $\zeta=r$, имеем

$$h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r\sin\vartheta, \quad h_r = 1 \tag{20.15}$$

в соответствии с формулами (20.05). Формулы (20.09) для полей электрического типа примут вид

$$E_r=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+k^2U,\quad E_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\vartheta},\quad E_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi},$$

$$H_r=0,\quad H_\vartheta=-\frac{ik}{r\sin\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi},\quad H_\varphi=\frac{ik}{r}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}, \tag{20.16}$$

а формулы (20.10) дают поле магнитного типа в виде

$$E_r=0,\quad E_\vartheta=\frac{ik}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},\quad E_\varphi=-\frac{ik}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta},$$

$$H_r=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+k^2V,\quad H_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\vartheta},\quad H_\varphi=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial r\partial\varphi}. \tag{20.17}$$

Функции U и V должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right]+k^2U=0, \tag{20.18}$$

которое уже не является волновым. Однако если ввести функции u и v по формулам

$$U=ru,\quad V=rv, \tag{20.19}$$

то благодаря соотношению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

они будут удовлетворять волновым уравнениям

$$\Delta u+k^2u=0,\quad \Delta v+k^2v=0, \tag{20.20}$$

где оператор Δ в сферической системе координат определяется формулой (19.24). Функции u и v обычно называют потенциалами Дебая. Эти функции, равно как и введенные выше функции Герца, позволяют свести интегрирование уравнений поля к более простой задаче — интегрированию волновых уравнений.

Подведем некоторые итоги. Выше были рассмотрены криволинейные координаты, удовлетворяющие условиям (20.05). При этих условиях существуют решения уравнений (20.02), относящиеся к электрическому и магнитному типам, и можно ввести потенциалы U и V. Было проверено то, что условиям (20.05) удовлетворяют декартовы и сферические координаты. Точнее, эти условия справедливы в такой координатной системе ξ, η, ζ, где координата ζ является либо расстоянием вдоль прямолинейной оси ($\zeta=z$, поверхности $\zeta=\text{const}$ суть параллельные плоскости), либо расстоянием от фиксированной точки ($\zeta=r$, поверхности $\zeta=\text{const}$ суть концентрические сферы). Можно показать, что эти два случая исчерпывают все многообразие координатных систем, подчиняющихся условиям (20.05).

§ 21. Лемма о пропорциональном изменении проницаемостей ε и μ во всем пространстве

Для многих задач полезна следующая лемма. Пусть требуется определить электромагнитное поле в пространстве, проницаемости ε и μ которого являются, вообще говоря, функциями координат x, y, z, и пусть функции ε и μ могут быть представлены в виде

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \tilde{\varepsilon}, \quad \mu = \mu_1 \tilde{\mu}, \tag{21.01}$$

где ε_1 и μ_1 — постоянные числа (вообще говоря, комплексные), а $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ соответствуют случаю, когда электромагнитное поле в пространстве известно. Тогда, как можно показать, легко найти электромагнитное поле и для проницаемостей ε и μ, отличающихся от $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ коэффициентами пропорциональности ε_1 и μ_1, постоянными для всего пространства.

Итак, пусть требуется определить поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющие комплексным уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i k \mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i k \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e \tag{21.02}$$

с заданными плотностями сторонних токов $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ (см. § 3). При этом пусть известны вспомогательные поля $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = i \tilde{k} \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}} - \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}^m, \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = -i \tilde{k} \tilde{\varepsilon} \tilde{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c}\tilde{\mathbf{j}}^e, \tag{21.03}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ удовлетворяют соотношениям (21.01), а сторонние токи имеют плотности

$$\tilde{\mathbf{j}}^e = \sqrt{\mu_1}\,\mathbf{j}^e, \quad \tilde{\mathbf{j}}^m = \sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{j}^m. \tag{21.04}$$

Тогда если выбрать волновое число $\tilde{k}$ в уравнениях (21.03) согласно формуле

$$\tilde{k} = k\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \tag{21.05}$$

то решение уравнений (21.02) выражается через решение уравнений (21.03) в виде

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}/\sqrt{\varepsilon_1}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}/\sqrt{\mu_1}. \tag{21.06}$$

Доказательство этой леммы элементарно. Действительно, образуем $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ по формулам (21.06):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left\{i k \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}\,\frac{\mu}{\mu_1}\sqrt{\mu_1}\,\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{j}^m\right\} =$$

$$= i k \mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}}=\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\left\{-\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_1}\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\sqrt{\mu_1}\,\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\right\}=$$

$$=-\mathrm{i}k\varepsilon\,\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{\mathrm{e}}.$$

При использовании этой леммы нужно иметь в виду, что часто́ты искомого поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и вспомогательного поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ различны: первому полю соответствует временно́й множитель $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, а второму — множитель $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\omega}t}$, где в силу формулы (21.05)

$$\tilde{\omega}=\omega\sqrt{\varepsilon_1\mu}. \tag{21.07}$$

Поэтому при комплексной ε_1 или μ_1 частота $\tilde{\omega}$ также комплексна, т. е. соответствует колебаниям, экспоненциально нарастающим во времени. Это обстоятельство не является препятствием для применения доказанной выше леммы, так как если известно решение комплексных уравнений электромагнитного поля, то оно обычно известно при любых $\tilde{k}$, и поэтому не составляет никакого труда считать $\tilde{k}$ комплексным числом, аналитически продолжая полученное решение (см. § 8).

Поясним на примерах, как применять доказанную выше лемму.

Для бегущих в направлении оси z плоских волн в пустоте при $\tilde{\varepsilon}=\tilde{\mu}=1$ (см. § 11) составляющие электромагнитного поля равны

$$\tilde{E}_x=\tilde{H}_y=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{k}z}\ . \tag{21.08}$$

Из закона распространения плоских волн в пустоте и из леммы легко вывести закон распространения в однородной среде с произвольными проницаемостями $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\mu=\mu_1$, а именно из формул (21.08) и (21.06) получаем

$$E_x=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon\mu}\,z}/\sqrt{\varepsilon},\quad H_y=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon\mu}z}/\sqrt{\mu}. \tag{21.09}$$

Отсюда видно, что плоские волны в произвольной среде распространяются с комплексным волновым числом $K=k\sqrt{\varepsilon\mu}$, причем составляющие E_x и H_y связаны соотношением

$$E_x=\zeta H_y,\quad \zeta=\sqrt{\mu/\varepsilon}. \tag{21.10}$$

Эти формулы приведены в § 11.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред (рис. 11,*а*), причем левая среда, в которой распространяется падающая волна, имеет проницаемости ε_1 и μ_1, а правая — проницаемости ε_2 и μ_2. В качестве вспомогательного поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ возьмем рассмотренное в § 15 электромагнитное поле, возбуждаемое падающей под тем же углом плоской волной в пустоте — левой среде, в то время как правая среда имеет проницаемости $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ (рис.

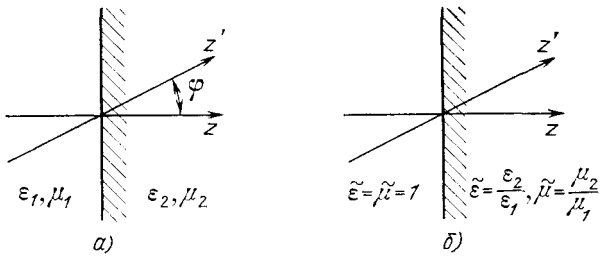


Рис. 11. Падение плоской волны на плоскость раздела $z=0$:
а — в общем случае; *б* — из пустоты

11,*б*). Если во вспомогательной задаче параметры нижней среды

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2/\varepsilon_1, \quad \tilde{\mu} = \mu_2/\mu_1, \tag{21.11}$$

то можно применить лемму и, в частности, вычислить коэффициенты отражения и прохождения для рис. 11,*а*. Так как наличие постоянных множителей $1/\sqrt{\varepsilon_1}$ и $1/\sqrt{\mu_1}$ в формулах (21.06) не влияет на значения коэффициентов отражения и прохождения (которые дают отношение отраженного и прошедшего поля к полю падающей волны), то для коэффициентов R и T справедливы формулы (15.12) и (15.18), если в эти формулы вместо ε и μ подставить $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$, определяемые соотношениями (21.11).

В качестве третьего примера можно рассмотреть обобщение потенциалов электромагнитного поля, введенных выше в § 17 и 18 для пустоты, на случай однородной среды с произвольными комплексными проницаемостями, а именно обобщить формулы (18.04), (18.09) и (18.10).

Из леммы следует, что в среде с проницаемостями ε и μ векторы $\mathbf{\Pi}^e$ и $\mathbf{\Pi}^m$ вместо уравнений (18.04) и (18.09) должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta \mathbf{\Pi}^e + K^2 \mathbf{\Pi}^e = 0, \quad \Delta \mathbf{\Pi}^m + K^2 \mathbf{\Pi}^m = 0, \quad K = k\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{21.12}$$

Что же касается полей, то они определяются через электрический и магнитный векторы Герца по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^e + k^2\varepsilon\mu\,\mathbf{\Pi}^e + i\,k\,\mu\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^m, \\ \mathbf{H} &= -i\,k\,\varepsilon\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^e + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^m + k^2\varepsilon\mu\,\mathbf{\Pi}^m, \end{aligned} \tag{21.13}$$

обобщающим формулы (18.10). Хотя выражения (21.13) могут быть получены с помощью леммы, их справедливость проще всего установить непосредственной проверкой, а именно показать, что комплексные уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E} \tag{21.14}$$

тождественно удовлетворяются, если выполняются соотношения (21.12) и (21.13).

§ 22. Цилиндрические волны

В § 14 было показано, что каждая декартова составляющая любого из векторов поля удовлетворяет в однородной среде с комплексными проницаемостями ε и μ волновому уравнению (14.11). Пользуясь выражением (19.21) для оператора Лапласа в цилиндрической системе координат r, φ, z, легко написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+K^2 F=0, \tag{22.01}$$

где через K обозначено комплексное волновое число (11.05) в данной среде.

В дальнейшем цилиндрической волной будем называть такое решение уравнения (22.01), которое не зависит от координаты z, а от координат r и φ имеет зависимость вида

$$F=R_m(r)\cos m\varphi \text{ или } F=R_m(r)\sin m\varphi, \tag{22.02}$$

где m — положительное вещественное число (которое не обязательно считать целым). Подставляя выражения (22.02) в уравнение (22.01), получаем для функции R_m обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr}+\left(K^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R_m=0. \tag{22.03}$$

Вводя независимую переменную $x=Kr$, приводим уравнение (22.03) к виду

$$\frac{d^2 R_m}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR_m}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R_m=0. \tag{22.04}$$

Последнее уравнение есть не что иное, как уравнение Бесселя. Решения этого уравнения хорошо изучены, поэтому здесь ограничимся кратким перечнем их основных свойств.

Уравнение (22.04) имеет особую точку при $x=0$, вследствие чего из двух линейно независимых решений этого уравнения только одно остается конечным при $x=0$. Это последнее называется функцией Бесселя и обозначается через $J_m(x)$, причем x называется аргументом, а m — индексом функции Бесселя. При малых значениях аргумента для вычисления функции Бесселя можно применить степенной ряд, первый член которого

$$J_m(x)=(x/2)^m/m!+\ldots \tag{22.05}$$

Для функции с индексами 0 и 1, которые чаще всего встречаются, приведем первые два члена степенных разложений:

$$J_0(x)=1-x^2/4+\ldots,\quad J_1(x)=x/2-x^3/16-\ldots \tag{22.06}$$

При больших значениях аргумента (точнее, при тех аргументах, которые удовлетворяют также неравенству $x\gg m^2$) функцию $J_m(x)$

можно заменить первым членом асимптотического разложения

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right]. \qquad (22.07)$$

Второе решение уравнения Бесселя называется функцией Неймана и обозначается обычно через $N_m(x)$. При малых аргументах для функций $N_m(x)$ имеются приближенные формулы

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}, \quad N_m(x) = -\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^m \quad (m = 1, 2, \ldots), \qquad (22.08)$$

где $\gamma = 1{,}7811\ldots$ — так называемая постоянная Эйлера. Формулы (22.08) показывают, что функции Неймана имеют особенность в точке $x=0$. Для больших аргументов функция $N_m(x)$ может быть приближенно вычислена с помощью выражения

$$N_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left[x - (2m+1)\frac{\pi}{4}\right]. \qquad (22.09)$$

Выражения (22.07) и (22.09) показывают, что функции Бесселя и Неймана определяют стоячие цилиндрические волны, причем из функции Бесселя получается цилиндрическая волна, принимающая всюду конечные значения, а функция Неймана дает стоячую цилиндрическую волну с бесконечной амплитудой на оси цилиндрической системы координат, т. е. при $r=0$.

Наиболее наглядный физический смысл цилиндрической волны имеют в непоглощающей среде с вещественным волновым числом K, когда стоячие волны (22.07) и (22.09) имеют бесконечное число узловых окружностей (в чем наиболее ярко проявляется стоячий характер этих волн) и амплитуду, убывающую как $1/\sqrt{r}$ (в чем сказывается цилиндрический характер этих волн, т. е. расходимость в радиальном направлении).

Функции Бесселя и Неймана часто рассматриваются как основные решения уравнения Бесселя, с помощью которых может быть найдено общее решение этого уравнения

$$R_m = CJ_m(x) + C'N_m(x), \qquad (22.10)$$

где C и C' — произвольные постоянные. Функции J_m и N_m при вещественных положительных x принимают вещественные значения, что делает их удобными при численных расчетах. Можно пользоваться и другими решениями уравнения Бесселя. Наиболее часто в этой связи рассматриваются так называемые функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, определяемые формулами

$$H^{(1)}{}_m(x) = J_m(x) + iN_m(x), \quad H^{(2)}{}_m(x) = J_m(x) - iN_m(x). \qquad (22.11)$$

Обе функции Ханкеля являются комплексными при вещественных x и обращаются в бесконечность при $x=0$. При больших значе-

ниях x для функций Ханкеля из формул (22.07) и (22.09) получаются приближенные выражения

$$H_m^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i[x-(2m+1)\pi/4]},\quad H_m^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i[x-(2m+1)\pi/4]}, \tag{22.12}$$

показывающие, что функции Ханкеля определяют бегущие цилиндрические волны. При временно́й зависимости $e^{-i\omega t}$, которая здесь применяется, функция Ханкеля 1-го рода $H^{(1)}_m$ соответствует цилиндрической волне, расходящейся от оси системы координат на бесконечность, а функция Ханкеля 2-го рода $H^{(2)}_m$ соответствует сходящейся цилиндрической волне.

Так как бегущие волны при рассмотрении волновых процессов встречаются весьма часто, то функции Ханкеля находят, наряду с функциями Бесселя и Неймана, широкое применение. При больших значениях Kr цилиндрическая волна (22.02), содержащая функции Ханкеля, имеет множитель e^{iKr} или e^{-iKr}, подобный множителям e^{iKz} и e^{-iKz} для плоских волн (см. § 11), но наряду с этим содержит и дополнительный множитель $\sqrt{2/\pi Kr}$, указывающий на изменение амплитуды волны вследствие ее цилиндрического характера.

В настоящее время для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля имеются подробные таблицы, охватывающие также и комплексные значения аргумента x. Поэтому пользоваться этими функциями для расчетов лишь немного сложнее, чем пользоваться тригонометрическими и экспоненциальными функциями. Расчет цилиндрических волн может быть в принципе произведен в любом конкретном случае с той же полнотой, что и расчет плоских волн.

Функции Бесселя и Неймана с индексами 0 и 1 связаны между собой соотношениями

$$J'_0(x) = -J_1(x),\quad N'_0(x) = -N_1(x), \tag{22.13}$$

причем аналогичные соотношения справедливы и для функций Ханкеля.

Более общее решение уравнения (22.01) имеет вид

$$F = R_m(r)\cos(m\varphi+\varphi_0)\,e^{ihz}, \tag{22.14}$$

где φ_0 — постоянный угол, а h называется продольным волновым числом. Для радиальной функции R_m получается уравнение (22.03), в котором K^2 заменяется на g^2, где

$$g = \sqrt{K^2-h^2} \tag{22.15}$$

называется поперечным волновым числом; считаем $\operatorname{Im} g>0$, а при $\operatorname{Im} g=0$ полагаем $g>0$. Радиальная функция должна быть решением уравнения (22.04), в котором $x=gr$.

Для функции Бесселя $J_m(x)$ имеется интегральное представление

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \psi - m\psi)}\, d\psi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{22.16}$$

рассмотренное в задаче 2.

§ 23*. Сферические волны

В § 20 показано, что потенциалы U и V в сферической системе координат удовлетворяют уравнению (20.18), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_* U + k^2 U = 0, \tag{23.01}$$

где введено обозначение (угловой лапласиан)

$$\Delta_* U = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \tag{23.02}$$

Если искать решение уравнения (23.01) в виде

$$U = R(r)\Omega(\vartheta, \varphi), \tag{23.03}$$

то обычные рассуждения метода разделения переменных (см. § 41) приводят к следующим уравнениям для функций R и Ω:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\chi}{r^2} \right) R = 0, \quad \Delta_* \Omega + \chi \Omega = 0, \tag{23.04}$$

где χ — постоянная разделения, которую будем представлять в виде $\chi = \nu(\nu+1)$ (ν — новый параметр). Рассмотрим сначала уравнение для функции R, которое после введения новой независимой переменной $x = kr$ принимает вид

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \left[1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} \right] R = 0. \tag{23.05}$$

Одним из решений этого уравнения является функция

$$\psi_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2}\, J_{\nu+1/2}(x), \tag{23.06}$$

где $J_{\nu+1/2}(x)$ — функция Бесселя с индексом $\nu + 1/2$ (см. задачу 3). В качестве второго решения этого уравнения возьмем функцию

$$\zeta_\nu(x) = \sqrt{\pi x/2}\, H^{(1)}_{\nu+1/2}(x), \tag{23.07}$$

которая дает расходящуюся волну, имеющую (при $\chi \neq 0$) особенность в точке $x = 0$. Функция (23.06) определяет стоячую волну, остающуюся всюду конечной.

При больших значениях x функции $\psi_\nu(x)$ и $\zeta_\nu(x)$ имеют асимптотические выражения

$$\psi_\nu(x) = \cos[x - (\nu+1)\pi/2], \quad \zeta_\nu(x) = e^{i[x-(\nu+1)\pi/2]}, \tag{23.08}$$

вытекающие из формул (22.07) и (22.09).

Уравнение (23.04) для угловой функции $\Omega=\Omega(\vartheta, \varphi)$ также можно решать методом разделения переменных. Таким путем приходим к выражениям

$$\Omega = P_\nu^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi,\ \Omega = P_\nu^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi, \tag{23.09}$$

где функция $P_\nu{}^m$ есть решение уравнения

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP_\nu^m}{d\vartheta}\right)+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]P_\nu^m=0. \tag{23.10}$$

Она называется присоединенной функцией Лежандра. Если ввести переменную $x=\cos\vartheta$, то уравнение (23.10) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\nu^m}{dx}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\nu^m=0. \tag{23.11}$$

При исследовании сферических волн в свободном пространстве, где φ принимает любые значения, а ϑ заключено в пределах $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, индексы m и ν могут быть лишь целыми положительными числами (включая нуль). Действительно, лишь при целых m функции (23.09) являются однозначными функциями точки, т. е. не меняются при замене φ на $\varphi\pm2\pi$, $\varphi\pm4\pi$ и т. д. С другой стороны, в теории сферических функций доказывается, что уравнение (23.10) имеет конечное решение во всем интервале $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$ лишь при $\nu=0, 1, 2, \ldots$; отрицательные значения ничего нового не дают: например, полагая $\nu=-1$, получаем то же уравнение, что при $\nu=0$, и т. д.

При $m=0$ уравнение (23.10) принимает вид

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dP_\nu}{d\vartheta}\right)+\nu(\nu+1)P_\nu=0. \tag{23.12}$$

При целых ν уравнению (23.12) удовлетворяют полиномы Лежандра $P_\nu(x)$, имеющие степень ν и нормируемые обычно так, что $P_\nu(1)=1$. Второе решение уравнения (23.12) обращается в бесконечность при $\vartheta=0$ или $\vartheta=\pi$. Присоединенные функции Лежандра выражаются через полиномы Лежандра по формуле

$$P_\nu^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\nu(x), \tag{23.13}$$

показывающей, что каждому значению постоянной разделения $\chi=\nu(\nu+1)$ соответствует $\nu+1$ присоединенных функций $P_\nu{}^m$, так как $P_\nu{}^m\equiv0$ при $m>\nu$. Поскольку при $m=0$ вторая функция (23.09) обращается в нуль, то при каждом целом значении ν существует $2\nu+1$ различных угловых функций (23.09).

В заключение напомним, что уравнение (23.01) не является волновым; однако оно сводится к волновому при замене функции U на функцию u по формуле (20.19).

Задачи к гл. III

1. Вывести формулы (17.15) и (17.16).

Решение. Будем искать электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}^{e}+\mathbf{E}^{m},\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}^{e}+\mathbf{H}^{m},$$

где поле $\mathbf{E}^e$, $\mathbf{H}^e$ порождается электрическими токами $\mathbf{j}^e$ и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^{e}=ik\mathbf{H}^{e},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^{e}=-ik\mathbf{E}^{e}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{e}, \tag{a}$$

а поле $\mathbf{E}^m$, $\mathbf{H}^m$ порождается магнитными токами $\mathbf{j}^m$ и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}^{m}=ik\mathbf{H}^{m}-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{m},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}^{m}=-ik\mathbf{E}^{m}. \tag{b}$$

Уравнения (*a*), по существу, исследованы в § 17, но векторы $\mathbf{E}^e$, $\mathbf{H}^e$ и $\mathbf{j}^e$ обозначались через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{j}$. Поэтому, если обозначить через $\mathbf{A}^e$ введенный в § 17 векторный потенциал, то поля

$$\mathbf{E}^{e}=-\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^{e}+k^{2}\mathbf{A}^{e}),\quad \mathbf{H}^{e}=\operatorname{rot}\mathbf{A}^{e}$$

удовлетворяют уравнениям (*a*); вектор $\mathbf{A}^e$ должен удовлетворять волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{A}^{e}+k^{2}\mathbf{A}^{e}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{e},$$

частное решение которого дается первой формулой (17.16).

Уравнения (*b*) имеют ту же структуру, что и уравнения (*a*). Действительно, если произвести (формально) замену

$$\mathbf{E}^{m}\to-\mathbf{H}^{e},\quad \mathbf{H}^{m}\to\mathbf{E}^{e},\quad \mathbf{j}^{m}\to\mathbf{j}^{e},$$

то уравнения (*b*) переходят в уравнения (*a*). Отсюда видно, что, вводя магнитный векторный потенциал $\mathbf{A}^m$, определяющий поля по формулам

$$\mathbf{E}^{m}=-\operatorname{rot}\mathbf{A}^{m},\quad \mathbf{H}^{m}=-\frac{1}{ik}(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^{m}+k^{2}\mathbf{A}^{m})$$

и удовлетворяющий волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{A}^{m}+k^{2}\mathbf{A}^{m}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{m},$$

получаем решение уравнений (*b*); для $\mathbf{A}^m$ можно сразу же написать частное решение (17.16). Сумма найденных решений дает нам формулы (17.15).

2. Доказать, что функция $J_m(x)$, которая определяется интегралом (22.16) при целом m, удовлетворяет уравнению Бесселя (22.04), а при $x\to 0$ ее поведение дается формулой (22.05). Эти два условия определяют функцию Бесселя.

Решение. Подставляя интеграл (22.16) в уравнение Бесселя, видим, что требуется доказать тождество

$$\int_{-\pi}^{\pi}(x^{2}\cos^{2}\psi+ix\sin\psi-m^{2})\,e^{i(x\sin\psi-m\psi)}\,d\psi=0,$$

для чего надо произвести двухкратное интегрирование по частям

$$\int m^2 e^{i(x\sin\psi - m\psi)}\, d\psi = i\, m\, e^{i(x\sin\psi - m\psi)} + m\int x\cos\psi\, e^{i(x\sin\psi - m\psi)}\, d\psi =$$

$$= i\,(m + \cos\psi)\, e^{i(x\sin\psi - m\psi)} + \int (x^2\cos^2\psi + i\,x\sin\psi)\, e^{i(x\sin\psi - m\psi)}\, d\psi,$$

и при подстановке пределов внеинтегральный член обращается в нуль, будучи периодическим. Требуемое тождество доказано.

Полагая

$$e^{ix\sin\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} (i\,x)^n \sin^n\psi/n! \quad \sin\psi = (e^{i\psi} - e^{-i\psi})/2i,$$

легко понять, что в формуле (22.16) первый неисчезающий член будет при $n = m$; при $x \to 0$ он будет главным, т. е.

$$J_m(x) = (x/2)^m/m!,$$

в соответствии с формулой (22.05).

3. Проверить, что функция (23.06) удовлетворяет уравнению (23.05), если функция $J_{\nu+1/2}(x)$ удовлетворяет уравнению (22.04) при $m = \nu + 1/2$.

Р е ш е н и е. Образуем

$$\psi'_\nu = \sqrt{\pi x/2}\left(J'_m + J'_m/2x\right), \quad \psi''_\nu = \sqrt{\pi x/2}\left(J''_m + J'_m/x - J_m/4x^2\right)$$

(штрих — производная по x; $m = \nu + 1/2$); тогда

$$\psi''_\nu + [1 - \nu(\nu+1)/x^2]\,\psi_\nu = \sqrt{\pi x/2}\,[J''_m + J'_m/x + (1 - m^2/x^2)\,J_m] = 0.$$

Глава IV.

ТЕОРИЯ СКИН-ЭФФЕКТА

§ 24. Понятие идеального проводника и граничные условия на его поверхности

В § 12 отмечалось, что металлы обладают настолько высокой электропроводностью, что при всех радиочастотах их комплексная диэлектрическая проницаемость ε имеет весьма большую мнимую часть:

$$\varepsilon = i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad \frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg 1. \tag{24.01}$$

Магнитная же проницаемость металлов по сравнению с ε всегда является конечной.

Идеализируя свойства хороших проводников, удовлетворяющих условию (24.01), можно ввести понятие идеального проводника, для которого по определению имеем

$$\varepsilon = i\infty, \ \mu \text{ — конечно.} \tag{24.02}$$

Внутри такого идеального проводника электромагнитное поле тождественно равно нулю, а на его поверхности имеет место граничное условие

$$E_t = 0 \text{ или } [\mathbf{nE}] = 0, \tag{24.03}$$

т. е. тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности идеального проводника должна исчезать. Что же касается тангенциальной составляющей магнитного поля, то на поверхности идеального проводника она в общем случае не исчезает, а подчиняется соотношению

$$[\mathbf{nH}] = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{24.04}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности идеального проводника, направленная внутрь него, а $\mathbf{i}$ — поверхностная плотность электрического тока.

В формулах (24.03) и (24.04) через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ обозначены значения полей в точках, бесконечно близких к поверхности идеального проводника, но лежащих вне его. Эти формулы вытекают из условий (24.02) и добавочного предположения о конечности электрического и магнитного полей. Последнее предположение является с физической точки зрения вполне естественным, так как появление бесконечно больших полей связано с бесконечно большой энергией поля, чего при источниках поля, имеющих конечную мощность, быть не может. В этом случае из первого уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}$$

следует, что внутри идеального проводника $\mathbf{E}=0$, ибо конечные значения $\mathbf{E}$ при условии (24.02) возможны только при бесконечно больших значениях $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}$. Из второго уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mu\mathbf{H}$$

и условия $\mathbf{E}=0$ следует, что внутри идеального проводника также $\mathbf{H}=0$. Так как при идеальной проводимости могут существовать только поверхностные электрические токи, а поверхностных магнитных токов быть не может, то применение обычных граничных условий § 4 к поверхности идеального проводника при учете отсутствия поля внутри него приводит к граничным условиям (24.03) и (24.04).

Заметим, что известны проводники, проводимость которых можно считать бесконечной: это так называемые сверхпроводники. Однако при рассмотрении идеального проводника имеют в виду реальные проводники, например металлы, обладающие высокой, но все же конечной проводимостью. Поэтому представляет интерес выяснить, в какой мере поведение идеального проводника отображает свойства реальных проводников. Это проще всего сделать, рассмотрев какую-нибудь конкретную задачу, например задачу о падении плоской волны на плоскую поверхность проводящего тела (см. § 15 и 16).

Для идеального проводника задача о падении плоской волны решается совсем просто: для 1-й поляризации ищем поле в первой среде (пустота) в виде

$$H_y = e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)} + R_1 e^{ik(-z\cos\varphi + x\sin\varphi)}, \qquad (24.05)$$

а для 2-й поляризации — в виде

$$E_y = e^{ik(z\cos\varphi + x\sin\varphi)} + R_2 e^{ik(-z\cos\varphi + x\sin\varphi)}. \qquad (24.06)$$

Применение граничных условий (24.03) приводит к выражениям $R_1 = 1$ и $R_2 = -1$, которые получены в § 15. Для реальных проводников эти выражения не совсем точны: так, например, если взять медь ($\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$) и частоту $f = 3 \cdot 10^9$ Гц, что соответствует длине волны $\lambda = 10$ см, то $\varepsilon = i\,3{,}3 \cdot 10^8$, $|\zeta| \sim 10^{-4}$ и коэффициенты R_1 и R_2 отличаются от предельных значений ± 1 лишь на величину порядка 10^{-4}; при более длинных волнах отличие еще меньше. С такой же точностью выполняется и граничное условие (24.03), так что при единичной амплитуде падающей волны тангенциальная составляющая электрического поля по порядку величины равна $|\zeta|$.

Что же касается поля внутри хорошего проводника, то согласно формулам § 16 электромагнитное поле быстро затухает при удалении от поверхности раздела. Коэффициент затухания связан с глубиной проникания d, введенной в § 11 и подробно рассмотренной для металлов в § 12. Таким образом, в металл поле не проникает глубоко вследствие сильного поглощения, которое сопровождается почти полным отражением падающей волны от поверхности металла.

Поле внутри металла сосредоточено в весьма тонком слое вблизи поверхности металла — так называемом скин-слое, на расстояниях от поверхности, по порядку величины не превышающих d. Поля **E** и **H** проникают в этот слой по-разному, что легко непосредственно усмотреть хотя бы из формул (15.20): магнитное поле имеет тот же порядок на поверхности металла, что и в падающей волне, а электрическое поле проникает в поверхностный слой уже ослабленным в ζ раз по сравнению с магнитным. При переходе к предельному случаю идеальной проводимости ($\sigma \to \infty$) толщина скин-слоя стремится к нулю, тангенциальное электрическое поле на поверхности исчезает, а тангенциальное магнитное поле терпит скачок. У реальных же металлов толщина скин-слоя конечна, но весьма мала, особенно на сверхвысоких частотах (см. § 12).

Из сказанного выше следует, что идеальный проводник правильно передает свойства реальных металлических проводников как в отношении поля около проводников, так и в отношении распределения поля в самих проводниках. Различие между идеальными и реальными проводниками заключается главным образом в том, что в идеальных проводниках потери на джоулево тепло отсутствуют, в то время как в реальных проводниках они имеются в тем большей степени, чем меньше толщина скин-слоя d. В

случаях, когда необходимо учесть явления, связанные с потерями, понятием идеального проводника пользоваться нельзя.

Понятие идеального проводника вводится для того, чтобы упростить (а в ряде случаев сделать вообще возможным) решение большого числа электродинамических задач. Упрощение выражается в том, что поле внутри идеального проводника можно вообще не рассматривать, а наличие проводника учитывать с помощью граничного условия (24.03) на его поверхности. Исходя из решения задачи об идеальном проводнике, можно также вычислить потери в реальных проводниках, применяя метод возмущений (см. гл. IX и XV).

§ 25. Сильный скин-эффект. Граничные условия Леонтовича

Перейдем к изучению электромагнитных волн в веществах с большим комплексным показателем преломления

$$n=n'+in'',\ n''\gg 1 \tag{25.01}$$

и с произвольным волновым импедансом ζ. Параметры n и ζ были введены в § 11; ниже они будут употребляться вместо первоначальных параметров ε и μ.

В принципе неравенство (25.01) может выполняться из-за большой комплексной диэлектрической проницаемости ε или же большой комплексной магнитной проницаемости μ. Однако в большинстве случаев вещества, удовлетворяющие этому условию, являются хорошими проводниками и имеют конечную магнитную проницаемость. Для таких веществ волновой импеданс ζ является малой величиной. Рассмотрение этого конкретного случая проведено в § 26.

В § 13 показано, что при нормальном падении плоской волны на плоскую поверхность любого вещества внутри него возбуждается плоская волна (16.09), составляющие которой связаны между собой соотношением (16.11). Поэтому на поверхности раздела составляющие электрического и магнитного полей удовлетворяют граничным условиям

$$E_x=\zeta H_y,\ E_y=-\zeta H_x\ (\text{при } z=0), \tag{25.02}$$

где ось z направлена внутрь среды, имеющей волновой импеданс ζ.

Граничные условия (25.02) точно выполняются, если плоская волна падает на плоскость раздела нормально. Если же волна падает на плоскую поверхность наклонно, то эти граничные условия, как следует из тех же формул (16.11), справедливы приближенно — для веществ с большим комплексным показателем преломления (25.01).

Объясним физически, что́ происходит при наклонном падении плоской волны на поверхность тела с большим комплексным по-

казателем преломления. Как известно, при падении волны на более плотную в оптическом отношении среду направление распространения прошедшей волны приближается к нормали. При большом показателе преломления второй среды волна в ней распространяется почти по нормали при любых углах падения. Если к тому же показатель преломления второй среды является комплексным, то прошедшая волна затухает при своем распространении вдоль нормали и глубина ее проникновения во вторую среду

$$d = 1/kn'' = \lambda/2\pi n'', \qquad (25.03)$$

так что при условии $n'' \gg 1$ получаем $d \ll \lambda/2\pi$.

Предположим теперь, что на ту же плоскую границу раздела падает не плоская, а, например, сферическая электромагнитная волна, имеющая радиус кривизны $\mathcal{R}$. Эта волна может возбуждаться диполем, находящимся в первой среде на расстоянии $\mathcal{R}$ от рассматриваемой точки плоскости раздела. Отличие сферической волны от плоской заключается в том, что не только фаза, но и амплитуда электромагнитного поля изменяется вдоль границы раздела, причем амплитуда претерпевает заметные изменения на расстояниях, сравнимых с $\mathcal{R}$. Однако если выполняется условие $d \ll \mathcal{R}$, то это изменение амплитуды не повлияет на структуру поля во второй среде: там по-прежнему будут возбуждаться волны, распространяющиеся по нормали от границы раздела. Приближенные граничные условия (25.02) останутся без изменений.

Сказанное можно пояснить следующим образом. Если расстояние между двумя точками A и B на плоскости раздела (рис. 12) составляет малую часть $\mathcal{R}$, то приближенно на всем участке AB падающую сферическую волну можно считать плоской волной с постоянной амплитудой и постоянным углом падения. Если к тому же участок AB велик по сравнению с d, то на нем поле проходит в нижнюю среду так же, как при падении плоской волны, и потому удовлетворяет условиям (25.02). Линейные размеры участка AB должны удовлетворять неравенствам $d \ll AB \ll \mathcal{R}$, и при условии $d \ll \mathcal{R}$ такой участок всегда можно выбрать.

Предположим теперь, что электромагнитные волны падают не на полубесконечное тело, а на пластину толщиной D, вещество которой обладает большим комплексным показателем преломления. Так как волны в пластинке, возбуждаемые вблизи одной ее граничной плоскости, могут отражаться от другой плоскости, то в общем случае характер поля в пластинке изменится и граничные условия (25.02) уже не будут иметь места. Однако если выполняется условие $d \ll D$, то волна, идущая от одной границы раздела, не сможет практически дойти до другой границы, пластинка будет себя вести в электромагнитном отношении как бесконеч-

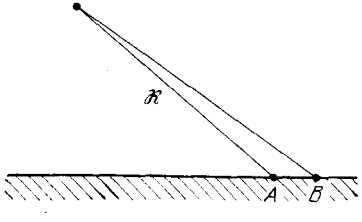


Рис. 12. К обоснованию условия $d \ll \mathcal{R}$

но толстая, и на каждой ее границе будут выполняться приближенные граничные условия (25.02).

Рассмотрим теперь тело, поверхность которого имеет радиусы кривизны порядка a. Если для этого тела выполняется условие (25.01) и, кроме того, условие $d \ll a$, то кривизна поверхности не должна влиять на структуру поля, проникшего на небольшую глубину d в это тело, и на его поверхности по-прежнему должны выполняться условия (25.02). Здесь через x, y, z обозначена местная декартова система координат, плоскость x, y которой совпадает с касательной плоскостью к поверхности тела в данной точке, а ось z направлена по нормали внутрь тела.

Для тела, ограниченного неплоской поверхностью, граничные условия (25.02) целесообразно переписать в векторной форме. Если обозначим через $\mathbf{n}$ нормаль к поверхности тела, направленную внутрь тела, то условия (25.02) легко преобразовать к виду

$$[\mathbf{nE}] = -\zeta[\mathbf{n}[\mathbf{nH}]]. \tag{25.04}$$

Условия (25.02) или (25.04) называются приближенными граничными условиями М. А. Леонтовича. Эти граничные условия применимы при выполнении неравенств

$$d \ll \lambda/2\pi,\ d \ll \mathscr{R},\ d \ll D,\ d \ll a. \tag{25.05}$$

Так как явление концентрации электромагнитного поля вблизи поверхности тела называется обычно скин-эффектом, то можно сказать, что приближенные граничные условия Леонтовича имеют место при *сильном* скин-эффекте, когда толщина скин-слоя d мала по сравнению со всеми величинами, имеющими размерность длины и характеризующими рассматриваемую электродинамическую систему. В частности, толщина скин-слоя должна быть мала как по сравнению с размерами тела во всех направлениях, так и по сравнению с радиусами кривизны его поверхности. Иначе говоря, при сильном скин-эффекте электромагнитное поле должно занимать лишь небольшую часть объема тела.

Выше рассматривалось тело с большим комплексным показателем преломления, окруженное пустотой. Если электромагнитные свойства окружающего пространства отличаются от свойств пустоты, то приближенные граничные условия Леонтовича, как легко показать, не изменяются, однако условия их применимости принимают несколько иной вид.

Значение приближенных граничных условий Леонтовича заключается в том, что они позволяют не рассматривать поле внутри тела и учитывать наличие тела с помощью граничных условий на его поверхности. Такими же свойствами обладали граничные условия на поверхности идеального проводника, введенные выше в § 24.

Для оценки точности приближенных граничных условий применим их к падению плоской волны на плоскую границу раздела. Записывая поле в пустоте с помощью формул (24.05) и (24.06) с

неизвестными коэффициентами отражения R_1 и R_2, с помощью граничных условий (25.02) получаем

$$R_1 = \frac{\cos\varphi - \zeta}{\cos\varphi + \zeta}, \quad R_2 = \frac{\zeta\cos\varphi - 1}{\zeta\cos\varphi + 1}, \tag{25.06}$$

которые легко можно вывести из выражений (15.12) и (15.18), если в последних величину $\nu = \sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}$ заменить на n. Отсюда видно, что относительная погрешность, даваемая приближенными граничными условиями, имеет порядок $1/n^2$.

Граничные условия Леонтовича можно уточнить, если учесть структуру электромагнитного поля вблизи поверхности тела. Например, при рассмотрении лучей, отражающихся от поверхности поглощающего тела (см. конец § 16), можно связать между собой тангенциальные составляющие векторов **E** и **H** таким образом, чтобы получить *точные* коэффициенты отражения R_1 и R_2, выведенные в § 15. В задачах распространения и дифракции электромагнитных волн поле часто как бы скользит вдоль граничной поверхности. Так бывает при распространении радиоволн на большие расстояния (по сравнению с высотами передающей и приемной антенн), а при дифракции — в области тени и полутени. В этих случаях следует сформулировать граничные условия, приводящие к коэффициентам R_1 и R_2 при $\varphi = \pi/2$. Соответствующее уточнение условий Леонтовича дано В. А. Фоком; уточненные граничные условия имеет смысл применять, если величины $|n|$ и n'' не очень велики.

§ 26. Сопротивление проводников при сильном скин-эффекте

Конкретизируем приближенные граничные условия Леонтовича для хороших проводников, не являющихся ферромагнетиками. Комплексные проницаемости таких проводников

$$\varepsilon = i4\pi\sigma/\omega, \quad \mu = 1, \tag{26.01}$$

их волновой импеданс

$$\zeta = 1/n = 0{,}5\sqrt{f/\sigma}\,(1-i) = kd\,(1-i)/\sqrt{2}. \tag{26.02}$$

Так как $|\zeta| \ll 1$, то в самом грубом приближении граничные условия (25.04) переходят для хороших проводников в граничные условия (24.03), соответствующие идеальному проводнику. Граничные условия Леонтовича дают гораздо лучшее приближение к свойствам реального проводника, так как они учитывают проникание поля в проводник и связанные с этим потери, что с помощью понятия идеального проводника непосредственно сделать не удается.

Действительно, для хороших проводников приближенные граничные условия позволяют правильно учесть влияние проводника в первом приближении относительно малого параметра $\zeta = 1/n$ и, как видно из § 25, дают погрешность порядка $1/n^2$.

Если на поверхности тела, имеющего параметры (26.01) и удовлетворяющего условию (25.01), имеют место приближенные граничные условия (25.02) или (25.04), то можно легко вычислить сопротивление проводника при скин-эффекте. Получаемые результаты справедливы лишь в случае сильного скин-эффекта.

Выразим тангенциальное магнитное поле на поверхности проводящего тела через ток, текущий в его скин-слое. Если толщина скин-слоя равна нулю, то мы имеем поверхностный ток с плотностью $\mathbf{i}$, текущий по геометрической поверхности и связанный с тангенциальным магнитным полем на ней соотношением (24.04). Если же толщина скин-слоя d конечна, то ток не носит поверхностного характера, а распределен по объему. Однако при достаточно малом d можно ввести вектор $\mathbf{I}$, который естественно назвать плотностью квазиповерхностного тока. Вектор $\mathbf{I}$ связан с обычной (объемной) плотностью тока $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ соотношением

$$\mathbf{I}=\int_0^{Nd}\mathbf{j}\,dz, \tag{26.03}$$

где интегрирование производится по нормали от поверхности тела до глубины Nd (несколько d), ниже которой токами и полями можно пренебречь (с погрешностью порядка e^{-N}). Для вектора $\mathbf{I}$ справедливо соотношение

$$[\mathbf{nH}]=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{I}. \tag{26.04}$$

Подставляя его в граничные условия (25.04), получаем

$$[\mathbf{nE}]=\tilde{\zeta}\,[\mathbf{nI}],\quad \tilde{\zeta}=\frac{4\pi}{c}\zeta. \tag{26.05}$$

Заметим, что соотношение (26.04) в противоположность аналогичному соотношению (24.04) является приближенным и справедливо лишь при достаточно малом d — в той же степени, как и сами граничные условия (25.04). Кроме того, соотношение (26.04) справедливо лишь для хороших проводников, внутри которых можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости и, следовательно, считать комплексную диэлектрическую проницаемость ε чисто мнимой, как в формуле (26.01). Действительно, соотношение (26.04) можно вывести обычным способом из первого уравнения поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\varepsilon\mathbf{E},$$

где в силу (26.01)

$$-ik\varepsilon\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Применяя это уравнение в интегральной форме

$$\oint H_s\,ds=\frac{4\pi}{c}\int j_n\,dS$$

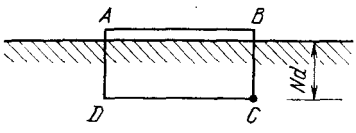


Рис. 13. К выводу соотношения (26.04)

к контуру $ABCDA$, изображенному на рис. 13, приходим к соотношению (26.04), если провести сторону CD на такой глубине Nd, что полем и током на этой глубине можно пренебречь. Интегралами по сторонам BC и DA пренебрегаем на том основании, что толщина скин-слоя мала и нормальные составляющие поля внутри проводника согласно § 16 также малы.

Приближенное граничное условие (26.05), выведенное для хороших проводников, можно также записать в виде

$$E_t = \tilde{\zeta} I_t, \tag{26.06}$$

так что тангенциальное электрическое поле на поверхности проводника и плотность квазиповерхностного тока, текущего по этому проводнику, пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности $\tilde{\zeta}$ естественно назвать поверхностным импедансом проводника. Поверхностный импеданс есть комплексная величина, которую с помощью формул (26.01) и (26.05) легко представить в виде

$$\tilde{\zeta} = (1-i)/\sigma d, \tag{26.07}$$

где

$$d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\overline{\lambda c}}{\sigma}} \text{ или } d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\overline{\lambda c}}{\sigma\mu}} \text{ (при } \mu \neq 1) \tag{26.08}$$

есть толщина скин-слоя, определяемая формулой (12.07). Если имеются магнитные потери, так что проницаемость μ комплексна, то выражение для поверхностного импеданса усложняется и аргумент комплексного числа ζ становится отличным от $-\pi/4$.

Поверхностный импеданс можно разложить, как и всякий импеданс, на вещественную и мнимую части, т. е.

$$\tilde{\zeta} = \tilde{r} - i\tilde{x} \tag{26.09}$$

и назвать $\tilde{r}$ активным, а $\tilde{x}$ реактивным поверхностным сопротивлением. Заметим, что в теории цепей активное и реактивное сопротивления вводятся по формуле $Z = R + iX$, но там применяется зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$. Так как у нас взята временна́я зависимость $e^{-i\omega t}$, то для получения соотношений при зависимости $e^{i\omega t}$ надо во всех наших формулах мнимую единицу i заменить на $-i$. Поэтому активное и реактивное сопротивления R и X вводятся по формуле $Z = R - iX$, причем для индуктивности $X > 0$, как обычно.

Из формулы (26.07) видно, что активное поверхностное сопротивление проводника при сильном скин-эффекте $\tilde{r} = 1/\sigma d$, т. е. имеет то же значение, какое на постоянном токе (при отсутствии скин-эффекта, когда ток равномерно заполняет все поперечное се-

чение проводника) имеет пластинка толщиной d. Это соотношение с новой точки зрения обосновывает название «толщина скин-слоя» для d: толщина d показывает, какая часть проводника эффективно проводит переменный электрический ток, и определяет активное сопротивление проводника. Иначе говоря, толщина скин-слоя d показывает толщину поверхностного слоя, равномерно заполненного током и имеющего то же активное сопротивление. Что касается реактивного поверхностного сопротивления, то оно численно равно активному и положительно, т. е. поверхностный импеданс имеет индуктивный характер. Физически это объясняется тем, что полный поверхностный ток I_t отстает по фазе от тангенциальной составляющей поля E_t на поверхности проводника. Действительно, лишь плотность тока $\mathbf{j}$ на самой поверхности оказывается в силу соотношения $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$ в фазе с поверхностным электрическим полем; токи же в более глубоких слоях проводника отстают по фазе от поверхностного электрического поля из-за того, что в проводнике возбуждается волна, распространяющаяся нормально внутрь проводника.

С помощью теоремы о комплексной мощности можно выяснить энергетический смысл активного и реактивного поверхностных сопротивлений. Обозначая через $\overline{P}_\varepsilon$ мощность потерь в проводнике, а через $\overline{W}_\mu$ — заключенную в нем магнитную энергию, приходим (см. задачу 1) к формулам

$$\frac{1}{2}\oint \tilde{r}\,|\mathbf{I}|^2\,dS=\overline{P}_\varepsilon,\quad \frac{1}{4}\oint \tilde{x}\,|\mathbf{I}|^2\,dS=\omega\,\overline{W}_\mu, \tag{26.10}$$

показывающим, что активное поверхностное сопротивление $\tilde{r}$ определяет мощность потерь в проводнике, а реактивное поверхностное сопротивление $\tilde{x}$ — магнитную энергию, находящуюся в проводнике. Отметим еще раз, что ток, распределенный по глубине проводника по экспоненциальному закону (сплошная кривая на рис. 14), выделяет то же тепло, что и ток той же величины, равномерно распределенный в слое толщины d (штриховая линия на рис. 14).

Полученное выше общее соотношение можно применить к вычислению погонного сопротивления цилиндрического провода радиуса a при сильном скин-эффекте, т. е. когда выполняется условие $d\ll a$. Будем считать, что электрический ток течет вдоль провода, и обозначим через E_z продольную составляющую электрического поля на поверхности провода, а через J — полный ток, протекающий через поперечное сечение провода. По определению погонным внутренним импедансом провода (или внутренним им-

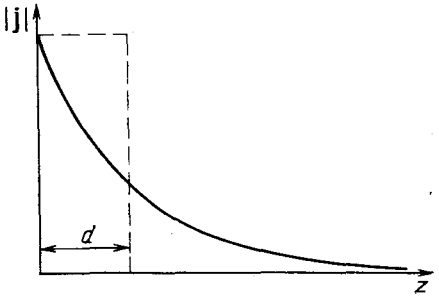


Рис. 14. Распределение тока по глубине

педансом на единицу длины) называется комплексный коэффициент пропорциональности Z_i в соотношении

$$E_z = Z_i J. \tag{26.11}$$

При этом предполагается, что поля и токи распределены симметрично. Соотношение (26.11) является непосредственным следствием соотношения (26.06) и того обстоятельства, что при симметрии вращения полный ток J и плотность квазиповерхностного тока I_z связаны между собой формулой

$$J = 2\pi a I_z, \tag{26.12}$$

откуда и получаем как соотношение (26.11), так и выражение для погонного импеданса

$$Z_i = R - i\omega L_i = \frac{\zeta}{2\pi a} = \frac{1-i}{2\pi a \sigma d}, \quad R = \omega L_i = \frac{1}{2\pi a \sigma d}. \tag{26.13}$$

Так как реактивное погонное сопротивление имеет индуктивный характер, то оно обозначено через ωL_i, где L_i — погонная внутренняя индуктивность провода. Погонные параметры провода R и L_i согласно формулам (26.10) имеют простой энергетический смысл

$$\frac{1}{2} R |J|^2 = \overline{P}_\varepsilon, \quad \frac{1}{4} L_i |J|^2 = \overline{W}_\mu, \tag{26.14}$$

где $\overline{P}_\varepsilon$ и $\overline{W}_\mu$ относятся к единице длины провода.

Погонный импеданс провода Z_i является обобщением понятия погонного сопротивления, вводимого для постоянного тока как отношение падения напряжения на единицу длины провода к току в нем. При вычислении Z_i электрическое поле E_z, являющееся естественным обобщением падения напряжения на единицу длины провода, берется на поверхности провода. Основания для этого следующие: во-первых, именно это падение напряжения измеряется вольтметром, присоединенным к различным точкам проводника (по необходимости на его поверхности); во-вторых, только при таком определении импеданса его активная и реактивная части имеют четкий энергетический смысл.

Основные законы скин-эффекта мы получаем, рассматривая возбуждение электромагнитных волн в проводнике. Нужно при этом иметь в виду, что в окружающем пространстве волновые свойства переменного электромагнитного поля могут быть выражены слабо (например, если скин-эффект имеет место в цепи переменного тока), в то время как в проводниках, несущих переменные электрические токи, имеет место сильный скин-эффект и, следовательно, поле имеет резко выраженный волновой характер. Это вызывается тем, что показатель преломления проводника весьма велик, вследствие чего волновые свойства поля проявляются в первую очередь внутри проводников. Например, при $\lambda = 100$ м в меди $d = 0{,}04$ мм и $\lambda' = 2\pi/K' = 2\pi d = 0{,}24$ мм (см. § 11 и 12). Поэтому в проводе диаметром 1 мм волновые свойства поля

выражено сильно, а в окружающем пространстве поле будет квазистатическим, т. е. в каждый момент таким же, как при постоянном токе.

§ 27. Скин-эффект в цилиндрическом проводе

Изучим распределение переменного электрического тока в цилиндрическом проводе радиуса a. Будем считать, что плотность тока и электрическое поле имеют лишь составляющие вдоль оси провода (ось z) и не зависят от координаты z. Кроме того, будем в соответствии с симметрией задачи считать, что распределение тока и поля обладает симметрией вращения. Волновое уравнение, которому должна подчиняться соответствующая E_z внутри провода

$$\Delta E_z + K^2 E_z = 0, \tag{27.01}$$

из-за отсутствия зависимости от φ и z сводится к уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_z}{dr} + K^2 E_z = 0, \tag{27.02}$$

являющемуся частной формой уравнения (22.03) при $m=0$. Предполагая, что материал провода является хорошим проводником, не имеющим магнитных потерь, в соответствии с формулой (12.06) можем брать комплексное волновое число в проводнике в виде

$$K = (1+i)/d, \tag{27.03}$$

где d — толщина скин-слоя, определяемая формулой (26.08).

В качестве решения уравнения (27.02) нужно взять функцию Бесселя $J_0(Kr)$, т. е. положить

$$E_z = CJ_0(Kr). \tag{27.04}$$

В выражении для E_z не может присутствовать слагаемое $C'N_0(Kr)$, так как это привело бы к бесконечно большим значениям поля и тока в центре провода (при $r=0$), что недопустимо из физических соображений.

Формула (27.04) уже дает картину распределения переменного тока в проводе. В самом деле, распределение тока (и поля) по поперечному сечению провода характеризуется функцией

$$f(r) = E_z(r)/E_z(a) = j_z(r)/j_z(a), \tag{27.05}$$

обращающейся в единицу на поверхности провода, при $r=a$. Согласно формуле (27.04)

$$f(r) = J_0(Kr)/J_0(Ka) \tag{27.06}$$

и характер распределения тока по поперечному сечению провода определяется произведением Ka, т. е. согласно формуле (27.03) отношением радиуса провода a к толщине скин-слоя d. Для данного проводника толщина скин-слоя d зависит от длины волны. Для постоянного тока ($\omega=0$, $\lambda=\infty$) имеем $d=\infty$, вследствие чего аргументы функций $J_0(Kr)$ и $J_0(Ka)$ равны нулю и $f(r)\equiv 1$. При

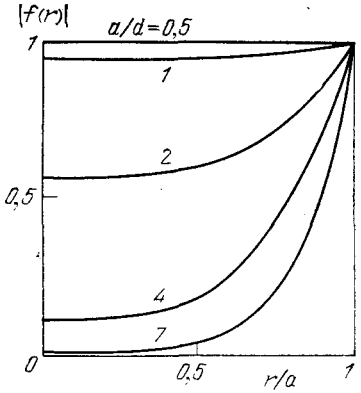


Рис. 15. Распределение тока в цилиндрическом проводе

увеличении частоты толщина скин-слоя d уменьшается и при небольших отношениях a/d абсолютная величина функции $f(r)$ мало отличается от единицы (кривые $a/d=0{,}5$ и $a/d=1$ на рис. 15): центральная часть проводника несет несколько меньшую плотность тока, чем его периферийная часть. При увеличении отношения a/d распределение тока становится все более неравномерным, и при больших значениях a/d абсолютная величина функции $f(r)$ быстро спадает при удалении от поверхности провода. Если скин-эффект сильный, то функции Бесселя $J_0(Ka)$ и $J_0(Kr)$ (при $r \approx a$) можно вычислить по формуле (22.07), пригодной и для комплексных x; при $\operatorname{Im} x \gg 1$ эта формула может быть записана в виде

$$J_0(x) = e^{-i(x-\pi/4)}/\sqrt{2\pi x}. \qquad (27.07)$$

так как

$$\cos(x-\pi/4) = [e^{i(x-\pi/4)} + e^{-i(x-\pi/4)}]/2 \approx e^{-i(x-\pi/4)}/2.$$

Подставляя выражение (27.07) в формулу (27.06), получаем

$$f(r) = \sqrt{a/r}\, e^{iK(a-r)} \approx e^{iK(a-r)}, \qquad (27.08)$$

поскольку функция $f(r)$ отлична от нуля практически лишь при $r \approx a$. Отсюда

$$|f(r)| = e^{-(a-r)/d}, \qquad (27.09)$$

при $d \ll a$ ток сосредоточивается в тонком слое у поверхности провода (рис. 15, кривая $a/d=7$).

Пользуясь формулой (27.04), нетрудно вычислить с помощью определения (26.21) погонный импеданс провода Z_i. Для этого нужно вычислить полный ток J, соответствующий распределению поля в проводе по формуле (27.04). Так как плотность тока j_z связана с E_z соотношением

$$j_z = \sigma E_z, \qquad (27.10)$$

то полный ток может быть найден в виде интеграла

$$J = \int j_z\, dS = 2\pi\sigma \int_0^a E_z\, r dr. \qquad (27.11)$$

Пользуясь уравнением (27.02), можно написать

$$E_z = -\frac{1}{K^2}\left(\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_z}{dr}\right),$$

$$r E_z = -\frac{1}{K^2}\left(r\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{d E_z}{dr}\right) = -\frac{1}{K^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d E_z}{dr}\right)$$

и, подставляя последнее выражение в формулу (27.11), получаем

$$J = -\frac{2\pi\sigma}{K^2}\int_0^a \frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right)dr = -\frac{2\pi\sigma a}{K} CJ_0'(Ka)\ . \qquad (27.12)$$

С помощью первого соотношения (22.13) можно также написать

$$J = (2\pi\sigma a/K) C J_1(Ka). \qquad (27.13)$$

Погонный импеданс Z_i получается в виде

$$Z_i = \frac{E_z(a)}{J} = \frac{K}{2\pi\sigma a}\frac{J_0(Ka)}{J_1(Ka)}\ . \qquad (27.14)$$

Вводя погонное сопротивление провода на постоянном токе

$$R_0 = 1/\pi\sigma a^2, \qquad (27.15)$$

можно придать формуле (27.14) следующий вид:

$$Z_i/R_0 = xJ_0(x)/2J_1(x),\ x = Ka = (1+\mathrm{i})a/d. \qquad (27.16)$$

Если скин-эффект выражен слабо, т. е. если $a/d \ll 1$, то вследствие малости аргумента x можно пользоваться разложениями (22.06). В этом случае формула (27.16) принимает вид

$$Z_i/R_0 = 1 - x^2/8 = 1 - k^2 a^2 \varepsilon/8, \qquad (27.17)$$

откуда, полагая, как в формуле (26.13), $Z_i = R - \mathrm{i}\omega L_i$, получаем

$$R = R_0,\ L_i = 1/2c^2, \qquad (27.18)$$

если проводник имеет параметры (26.01); при вещественном $\mu \neq 1$ погонную внутреннюю индуктивность L_i нужно умножить на μ.

Таким образом, при достаточно низких частотах, когда скин-эффект выражен слабо, активное сопротивление провода практически равно его сопротивлению на постоянном токе. Его внутреннюю индуктивность, как легко показать, можно вычислить из элементарных соображений, принимая равномерное распределение постоянного тока внутри провода и вычисляя вызванное им внутри провода магнитное поле (см. задачу 2).

В случае сильного скин-эффекта, когда отношение a/d велико, для функции $J_0(x)$ может быть применено приближенное выражение (27.07), а для функции $J_1(x)$ — аналогичное выражение

$$J_1(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x - 3\pi/4)} / \sqrt{2\pi x}\ , \qquad (27.19)$$

откуда

$$\frac{Z_i}{R_0} = -\mathrm{i}\frac{x}{2}\ ,\ Z_i = \frac{1-\mathrm{i}}{2\pi a\sigma d}\ . \qquad (27.20)$$

Таким образом, при сильном скин-эффекте получается выражение (26.13) для погонного импеданса, выведенное выше из других соображений. Этому, разумеется, не следует удивляться, так как в случае сильного скин-эффекта распределение тока и поля

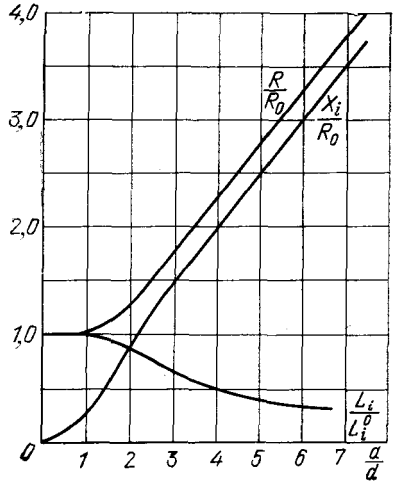


Рис. 16. Погонный внутренний импеданс цилиндрического провода

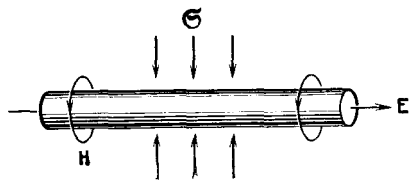


Рис. 17. Поток энергии к потребляющему участку цепи

по формуле (27.08) получилось таким же, как для плоской волны, распространяющейся внутрь провода в радиальном направлении (см. § 25).

При конечных значениях a/d погонный импеданс приходится вычислять с помощью формулы (27.16), пользуясь таблицами функций Бесселя от комплексного аргумента. В безразмерных переменных нетрудно построить универсальный график, пригодный для расчета погонного импеданса проводов из любого материала. Этот график дан на рис. 16, где представлены (в зависимости от a/d) три отношения: R/R_0, $\omega L_i/R_0$ и L_i/L_i^0, где через L_i^0 обозначена погонная индуктивность на постоянном токе, определяемая формулой (27.18).

Видно, что активное и реактивное сопротивления единицы длины провода при увеличении отношения a/d, т. е. при росте частоты, неограниченно возрастают, в то время как внутренняя индуктивность падает. Действительно, из формулы (27.20) следует, что

$$\frac{R'}{R_0} = \frac{\omega L_i}{R_0} = \frac{a}{2d}, \quad \frac{L_i}{L_i^0} = \frac{2d}{a} \quad \text{при} \quad \frac{a}{d} \to \infty. \tag{27.21}$$

Уменьшение L_i с ростом частоты физически объясняется тем, что при уменьшении d ток и поле вытесняются из внутренней области провода, из-за чего находящаяся внутри провода магнитная энергия стремится к нулю.

При этом нетрудно показать, что введенные в этом параграфе величины R и L_i имеют тот же энергетический смысл, что и соответствующие величины в § 26, и, в частности, удовлетворяют соотношениям (26.14). Доказательство этого утверждения дано в задаче 3; оно основано на теореме о комплексной мощности, примененной к единице длины провода (рис. 17).

Существенно, что как при переменном, так и при постоянном токе мощность поступает в данный участок цепи (отрезок проводника) не через поперечные сечения, где $\mathfrak{S}_z=0$, а через его боковую поверхность, где $\overline{\mathfrak{S}_r}<0$, т. е. из внешнего пространства. Во внешнее пространство мощность подается теми участками цепи,

где приложены сторонние электродвижущие силы. Поэтому скин-эффект в цепи переменного тока и скин-эффект при падении волны на проводящее тело можно рассматривать с единой точки зрения.

Отметим, что выражение для Z_i было выведено в предположении, что переменный ток равномерно распределен по длине провода. Если же, например, вдоль провода бежит волна с волновым числом h, так что зависимость поля и тока от z определяется множителем e^{ihz}, то в каждом поперечном сечении $z=\text{const}$ составляющая E_z будет удовлетворять не уравнению (27.02), а уравнению

$$\frac{d^2 E_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_z}{dr} + g^2 E_z = 0, \quad g = \sqrt{K^2 - h^2}\ , \tag{27.22}$$

как показано в конце § 22. В связи с этим в выражениях (27.06) и (27.14) нужно заменить K на g. Однако при выполнении условия $|K| \gg |h|$ величины K и g практически совпадают. В большинстве случаев это неравенство удовлетворяется благодаря условию (25.01), так как $|h| \sim k$. Поэтому для волн, распространяющихся вдоль длинных линий, можно пользоваться погонным внутренним импедансом Z_i, вычисленным выше.

Задачи к гл. VI

1. Вывести формулы (26.14) из соотношения (6.14), примененного ко всему объему проводника с проницаемостями (26.01).

Решение. Ввиду отсутствия сторонних токов соотношение (6.14) принимает вид

$$-\hat{\Sigma} = \overline{P}_\varepsilon - 2i\omega W'_\mu\ ,$$

где $\overline{P}_\varepsilon$ — средняя за период мощность электрических потерь (6.10) в объеме проводника V, а W'_μ при $\mu=\mu_0$ совпадает со средней магнитной энергией $\overline{W}_\mu$, находящейся в том же объеме [формулы (5.11) и (6.13)].

Величина $-\hat{\Sigma}$ есть комплексная мощность, втекающая в объем проводника через его поверхность S. Она может быть преобразована к виду

$$-\hat{\Sigma} = \frac{c}{8\pi}\oint \mathbf{n}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\,dS = \frac{c}{8\pi}\oint [\mathbf{n}\mathbf{E}]\,\mathbf{H}^*\,dS = -\frac{c}{8\pi}\oint \zeta\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\mathbf{H}]]\,\mathbf{H}^*\,dS,$$

так что

$$-\hat{\Sigma} = -\frac{c}{8\pi}\oint \zeta|[\mathbf{n}\mathbf{H}]|^2\,dS = \frac{1}{2}\oint \tilde{\xi}\,|\mathbf{I}|^2\,dS,$$

причем при преобразовании мы использовали формулы (25.04), (26.04) и (26.05). Здесь $\mathbf{n}$, в отличие от § 6, означает нормаль к поверхности проводника S, направленную внутрь проводника. Разделяя в полученном соотношении вещественную и мнимую части, приходим к формулам (26.14).

2. Вывести соотношение (27.18) для L_i в случае постоянного тока I, равномерно заполняющего сечение цилиндрического провода.

Решение. Применим формулу

$$\oint H_\varphi\, ds = \frac{4\pi}{c} \int j_z\, dS$$

к окружности $r=\text{const}$ внутри провода, получаем

$$2\pi r\, H_\varphi = \frac{4\pi}{c}\, j_z \pi r^2 = \frac{4\pi}{c} J \frac{r^2}{a^2}, \quad H_\varphi = \frac{2J}{c} \frac{r}{a^2}.$$

Внутренняя магнитная энергия провода на единицу его длины

$$W_\mu = \frac{1}{8\pi} \int H_\varphi^2\, dS = \frac{1}{4} \int_0^a H_\varphi^2\, r dr = \frac{1}{4c^2} J^2.$$

Поскольку $W_\mu = \frac{1}{2} L_i J^2$, мы приходим к требуемому соотношению.

3. Вывести соотношения (26.14) для провода в общем случае, т. е. не считая скин-эффект сильным.

Решение. Применяя соотношение (6.14) к отрезку провода, имеющему единичную длину, и учитывая, что на поперечных сечениях $\hat{\mathfrak{S}}_z = 0$, получим для $-\hat{\Sigma}$ интеграл

$$-\hat{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} \int E_z H_\varphi^*\, dS,$$

распространенный по боковой поверхности провода; $dS = ds dz$, где ds — элемент окружности $r=a$. Интеграл по z дает единицу, поэтому

$$-\hat{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} E_z \oint H_\varphi^*\, dr = \frac{1}{2} E_z J^* = \frac{1}{2} Z_i |J|^2,$$

где J — комплексная амплитуда тока в проводе. Отсюда следуют соотношения (26.14).

Глава V.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ

§ 28. Классификация линий передачи

Передача электромагнитной энергии осуществляется с помощью передающих линий самых различных типов. Для теоретического рассмотрения все линии передачи можно разбить на две основные группы. К первой группе относят линии передачи, подчиняющиеся телеграфным уравнениям. К их числу принадлежат: коаксиальная линия (концентрический кабель), двухпроводная линия и различные их модификации, как например экранированная двухпроводная линия. Ко второй группе относят линии, не подчиняющиеся телеграфным уравнениям и рассчитываемые чисто электродинамическими методами. К числу таких линий принадле-

жат прежде всего волноводы, например прямоугольный или круглый волновод, а также волноводы специального назначения, например волноводы с медленными волнами.

Приведенная классификация четко разграничивает физические принципы, лежащие в основе действия линий передачи. Нужно при этом отметить, что в некоторых случаях передающие линии имеют свойства, не позволяющие их отнести вполне определенно к одной из групп: так бывает, если данная линия может быть рассчитана с помощью телеграфного уравнения весьма грубо, а более точный расчет осуществляется электродинамическими методами. Такие примеры будут приведены, в частности, при рассмотрении однопроводной и двухпроводной линий.

Историческое развитие радиотехники было, в частности, связано с переходом от длинноволнового диапазона к диапазонам все более и более коротковолновым. В начальной стадии развития радиотехники, когда дециметровые и более короткие волны не имели еще практического значения, для передачи электромагнитной энергии использовались почти исключительно передающие линии первой группы. Полный инженерный расчет этих линий может быть произведен с помощью телеграфных уравнений, и, таким образом, данные линии с практической точки зрения почти не нуждаются в электродинамической трактовке. Для вычисления их параметров достаточно знать законы квазистатического поля; так, расчет погонной емкости линий производится с помощью электростатики, а расчет погонной индуктивности — с помощью законов постоянного магнитного поля (см. § 32). Интересно, что с помощью телеграфных уравнений распространение электромагнитных волн вдоль линий и близость их скорости к электродинамической постоянной c были теоретически предсказаны раньше, чем была создана теория распространения электромагнитных волн в свободном пространстве.

Ввиду большого технического значения телеграфных уравнений будет подробно изучена их связь с законами электродинамики и, в частности, рассмотрен важный вопрос о пределах применимости телеграфных уравнений. Дело в том, что пределы применимости какой-либо теории нельзя, как правило, вывести из нее самой. Для этого необходимо прибегнуть либо к опыту, либо к другой, более общей теории, содержащей первую в качестве частного случая. Применимость обычной теории длинных линий, базирующейся на телеграфных уравнениях, можно выяснить с помощью теории электромагнитного поля.

Для того чтобы физически понять особое положение передающих линий первой группы, отметим связь между волнами в этих линиях и плоскими волнами в свободном пространстве. Рассмотрим плоскую волну в пустоте, распространяющуюся в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (рис. 18).

Если перпендикулярно линиям электрического поля поставить две параллельные идеально проводящие плоскости, то (согласно равенству нулю тангенциального электрического поля на них)

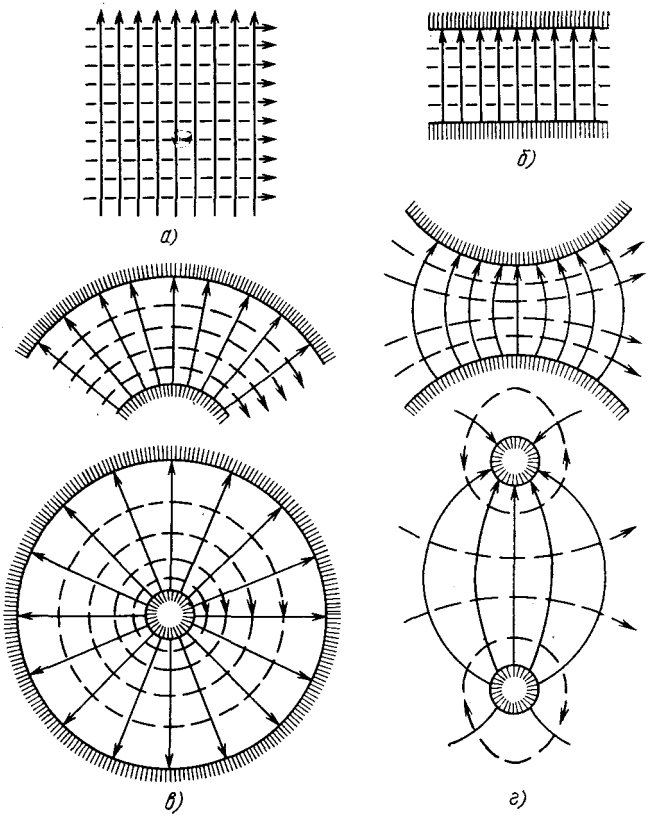


Рис. 18. Плоская волна и волны в линиях первой группы:
а — плоская волна в свободном пространстве; *б* — плоская волна между проводящими плоскостями; *в* — преобразование плоской волны в волну коаксиальной линии; *г* — то же для двухпроводной линии; ——— электрические силовые линии; — — — магнитные силовые линии

они не исказят электромагнитного поля. Поэтому между параллельными идеально проводящими плоскостями может распространяться (рис. 18,*б*) плоская поперечная волна и в случае, когда вне пространства между плоскостями поля нет. Пара параллельных плоскостей является простейшим примером передающей линии первой группы. Непрерывной деформацией этих плоскостей и поля между ними можно получить (рис. 18,*в* и *г*) электромагнитное поле волны в коаксиальной и двухпроводной линиях.

Из этих нестрогих рассуждений вытекает, что электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль передающих линий первой группы, родственны плоским электромагнитным волнам в свободном пространстве. Разумеется, конечная проводимость несколько искажает распределение поля. При этом скорость распространения волн в линиях изменяется (становится меньше c) и появляется затухание. Все эти явления подробно будут рассмотрены

в дальнейшем. Электромагнитные волны в передающих линиях второй группы имеют более сложную структуру, которая подробно изучена в гл. VII и XI.

§ 29. Электромагнитные волны в идеально проводящих линиях

Исследуем электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль бесконечно длинных идеально проводящих линий, принадлежащих к первой группе. В § 28 приведены нестрогие соображения о том, что волны распространяются вдоль таких линий со скоростью c и без затухания, причем структура их электромагнитного поля в некотором смысле близка к структуре поля плоских волн в неограниченном пустом пространстве.

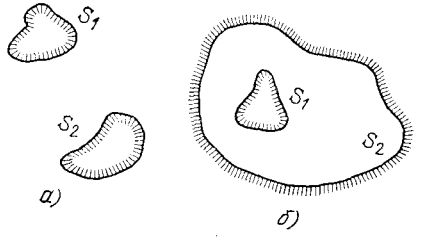


Рис. 19. Передающие линии, состоящие из двух проводников:
$а$ — обобщенная двухпроводная линия; $б$ — обобщенная коаксиальная линия

Рассмотрим этот вопрос более точно, причем в общем виде. Будем считать, что линия передачи образована двумя бесконечными идеально проводящими цилиндрами S_1 и S_2 с произвольной формой поперечного сечения, не соприкасающимися друг с другом. Эти цилиндры могут быть расположены либо рядом (рис. 19,$а$), либо один внутри другого (рис. 19,$б$).

Покажем, что вдоль такой идеально проводящей линии может распространяться волна, имеющая скорость c и электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}^e$, компоненты которого

$$\Pi^e_x = \Pi^e_y = 0,\ \Pi^e_z = \Pi(x, y)\, e^{\pm ikz}, \tag{29.01}$$

откуда по формулам (18.02)

$$A_x = A_y = 0,\ A_z = -ik\Pi(x, y)\, e^{\pm ikz},\ \Phi = \mp ik\Pi(x, y)\, e^{\pm ikz}. \tag{29.02}$$

Множитель $e^{\pm ikz}$ показывает, что рассматривается волна, бегущая со скоростью c в положительном (+) или отрицательном (—) направлении оси z.

Применительно к вектору Герца (29.01) формулы (18.03) дают

$$E_x = \pm ik\frac{\partial \Pi}{\partial x} e^{\pm ikz},\ E_y = \pm ik\frac{\partial \Pi}{\partial y} e^{\pm ikz},\ E_z = 0,$$

$$H_x = -ik\frac{\partial \Pi}{\partial y} e^{\pm ikz},\ H_y = ik\frac{\partial \Pi}{\partial x} e^{\pm ikz},\ H_z = 0, \tag{29.03}$$

причем равенство $E_z = 0$ вытекает из того, что

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^e = \partial^2 \Pi^e_z/\partial z^2 = -k^2 \Pi^e_z. \tag{29.04}$$

Наличие у векторов Π^e и $\mathbf{A}$ только составляющих по оси z связано с тем, что поверхностные токи, обусловленные рассматриваемой волной в линии, текут только вдоль оси z — в продольном направлении, как это легко установить из формул (29.03). Составляющая Π^e_z должна удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0, \tag{29.05}$$

и в силу формулы (29.04) для функции $\Pi(x, y)$, зависящей только от поперечных координат, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 0, \tag{29.06}$$

т. е. двухмерное уравнение Лапласа. Тому же уравнению должны согласно формулам (29.02) удовлетворять величины A_z и Φ, рассматриваемые как функции x и y. Поэтому можно сказать, что электрическое и магнитное поля в поперечном сечении имеют статический или потенциальный характер. Для того чтобы подчеркнуть это обстоятельство, можно в формулы (29.03) ввести скалярный потенциал Φ, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \tag{29.07}$$

после чего формулы (29.03) примут вид

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = 0,$$

$$H_x = \pm E_y, \quad H_y = \pm E_x, \quad H_z = 0. \tag{29.08}$$

Таким образом, из электрического вектора Герца, заданного формулой (29.01), получается электромагнитная волна со следующими свойствами:

1. В поперечном сечении электрическое и магнитное поля подчиняются статическим законам. В частности, электрическое поле получается из потенциала, удовлетворяющего двухмерному уравнению Лапласа.

2. Волна чисто поперечная, так как $E_z = H_z = 0$.

3. Магнитное поле связано в каждой точке с электрическим так же, как у бегущей плоской волны: эти поля перпендикулярны и имеют одинаковую абсолютную величину.

Может ли данная линия поддерживать распространение волны со всеми этими свойствами? Необходимым условием возможности такого распространения является идеальная проводимость проводов, поскольку в данной волне $E_z = 0$, а токи текут в продольном направлении. Граничное условие $E_t = 0$ выполняется на поверхности проводов, если на ней функция $\Pi(x, y)$ принимает некоторое постоянное значение. Для системы, изображенной на фис. 19, должны выполняться условия

$$\Pi = \Pi_1 \text{ на } S_1, \quad \Pi = \Pi_2 \text{ на } S_2, \tag{29.09}$$

где Π_1 и Π_2 — две постоянные.

Действительно, при выполнении этих граничных условий в каждом поперечном сечении $z=\text{const}$ на контуре каждого проводника $\Phi=\text{const}$, поэтому согласно формулам (29.08) электрические силовые линии подходят к поверхности проводника нормально и граничное условие $E_t=0$ удовлетворяется.

Уравнение Лапласа (29.06) всегда имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям (29.09) и позволяющее построить поле волны в данной линии.

В качестве примера рассмотрим электромагнитные волны в коаксиальной и двухпроводной линиях. Из сказанного выше следует, что в поперечном сечении коаксиальной линии электрическое поле бегущей волны распределено так же, как электростатическое поле в цилиндрическом конденсаторе тех же размеров. Отсюда вытекает формула

$$E_r=\pm H_\varphi=(A/r)\,e^{\pm ikz} \qquad (29.10)$$

(A — постоянная), приводящая к распределению электрических и магнитных силовых линий, изображенному на рис. 18,*в*.

В двухпроводной линии наибольшее значение имеет так называемая противофазная волна, распределение поля которой изображено на рис. 18,*г*. Электрические силовые линии этой волны распределены так же, как линии электростатического поля между двумя бесконечными параллельными проводами, несущими одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды.

Таким образом, отличие между статическим и динамическим полями в концентрическом кабеле или в системе их двух проводов заключается лишь в том, что интенсивность полей в каждом поперечном сечении зависит от времени, а в фиксированный момент меняется от сечения к сечению. Распространение происходит со скоростью c при всех частотах, поэтому волны любой формы распространяются без искажений (см. задачу 1).

Полученные результаты легко обобщаются на случай трех и более проводников. Если же имеется один идеально проводящий цилиндр, то в окружающем его пространстве легко получить решение уравнений электромагнитного поля, соответствующее распространению волны изученного выше типа со скоростью c. Так как одиночный провод можно рассматривать как предельный случай коаксиальной линии с бесконечно большим радиусом оболочки, то электромагнитное поле этой волны также определяется формулой (29.10). Соответствующее распределение поля изображено на рис. 20,*а*. Как легко показать, такая волна переносит через поперечное сечение $z=\text{const}$ бесконечно большую мощность

$$\int \hat{\mathfrak{S}}_z\,dS=\frac{c}{8\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_a^\infty E_r\,H_\varphi^*\,r\,dr=\pm\frac{c}{4}\,|A|^2\int_a^\infty\frac{dr}{r}=\pm\ln\infty$$

и поэтому не может быть возбуждена в однопроводной линии (как, впрочем, и плоская волна в свободном пространстве) с помощью источников поля, располагающих конечной мощностью. Тем же свойством обладает и однотактная волна в двухпроводной

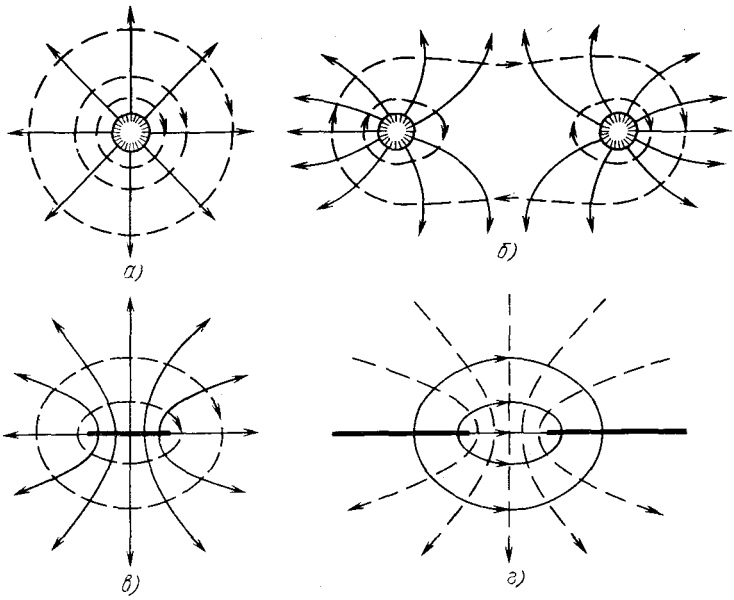


Рис. 20. Электромагнитное поле:
а — в однопроводной линии; *б* — в двухпроводной линии (для синфазной волны); *в* — вблизи ленты; *г* — вблизи щели

линии, распределение электрического поля которой соответствует одинаковым зарядам на проводах (см. рис. 20,*б*); в этой волне вдали от проводов E_r и H_φ также пропорциональны $1/r$, и интеграл для мощности расходится.

При замене провода (рис. 20,*а*) тонкой лентой (рис. 20,*в*) распределение поля вблизи ленты будет иным, несимметричным, но вдали при $r\to\infty$ совпадает с распределением поля от провода. Для щели в *бесконечной* идеально проводящей плоскости (при противоположных зарядах на противостоящих частях плоскости, рис. 20,*г*) распределение электрического поля совпадает с распределением магнитного поля для ленты (рис. 20,*в*), и наоборот; в этом проявляется теорема двойственности, общая формулировка дана в § 94. Поэтому «щелевая волна» несет конечную мощность только при условии, что щель прорезана в полосе *конечной* ширины: тогда данная система не отличается от системы, изображенной на рис. 19,*а*.

Выше рассматривались линии передачи, между проводниками которых — пустота. С помощью леммы § 21 нетрудно показать, что при заполнении пространства между проводами однородным веществом с комплексной диэлектрической проницаемостью ε и комплексной магнитной проницаемостью μ распространение данной волны происходит не с волновым числом k, а с волновым числом $K=k\sqrt{\varepsilon\mu}$, т. е. с тем же волновым числом, с каким распространяются плоские волны в данном веществе. Иначе говоря,

цилиндрические проводники в передающих линиях первой группы лишь ограничивают и как бы поддерживают электромагнитную волну, а характер распространения этой волны вдоль линии определяется свойствами пространства между проводниками, в котором происходят электромагнитные процессы.

При любом однородном заполнении статический характер электрического и магнитного полей в поперечном сечении сохраняется. Благодаря этому можно утверждать, что распределение полей и потенциалов в любой линии первой группы можно получить путем конформного преобразования полей в простейшей передающей линии первой группы, образованной парой параллельных плоскостей (см. рис. 18,*б*). Так как электромагнитное поле между плоскостями имеет точно такую же структуру, что и поле плоской волны в свободном пространстве, то в бесконечно малом элементе объема электромагнитное поле волны идеально проводящей коаксиальной или двухпроводной линии такое же, как поле плоской волны в свободном пространстве.

На основании сказанного легко без всяких вычислений решить задачу об отражении волны от границы раздела в коаксиальной линии, заполненной двумя различными веществами (рис. 21). Действительно, волна в коаксиальной линии отражается от поперечного сечения $z=0$ с таким же коэффициентом отражения R и проходит в другую половину коаксиальной линии с таким же коэффициентом прохождения T, что и плоская волна, падающая нормально на плоскую границу раздела тех же веществ [формулы (13.07)].

Если попытаться применить вектор Герца вида (29.01) к волнам, распространяющимся внутри замкнутой цилиндрической оболочки без внутреннего проводника (см. рис. 31), то какого-либо решения уравнений электромагнитного поля получить нельзя. Действительно, в этом случае придем к уравнению Лапласа (29.05), и так как на внутренней поверхности S оболочки должно выполняться граничное условие (29.09), то получим условие $\Pi=\text{const}$ на S. Как известно из электростатики, единственное решение уравнения Лапласа внутри замкнутой поверхности S, удовлетворяющее условию $\Pi=\text{const}$ на самой поверхности, есть постоянная, приводящая по формулам (29.03) к электромагнитным полям, тождественно равным нулю. Поэтому внутри замкнутой цилинд-

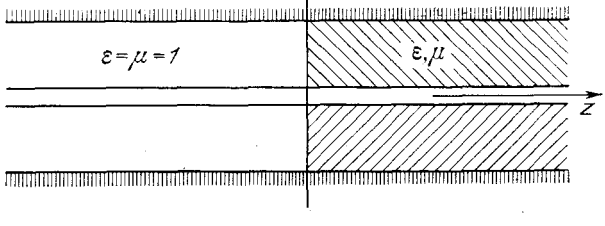


Рис. 21. Коаксиальная линия, заполненная различными веществами при $z<0$ и $z>0$

рической оболочки, лишенной внутреннего проводника, не могут распространяться поперечные волны со скоростью c, а распространяются волны совсем иного характера, которые будут изучены в теории волноводов. Физически этот результат нужно понимать так: если бы поперечная волна существовала, то ее электрическое поле имело бы электростатический характер, а электростатическое поле не может существовать внутри замкнутых оболочек, если туда не внесены свободные заряды.

Задачи к гл. V

1. Исходя из формул (2.18) и (29.03), исследовать распространение волны произвольной формы в идеально проводящей линии.

Решение. Беря в формулах (29.03) экспоненту $e^{ikz}=e^{i\omega z/c}$, видим, что каждая составляющая (2.18) зависит от t и z в комбинации $t-z/c$, что соответствует волне, распространяющейся со скоростью c вдоль оси z без изменения своей формы. Экспонента e^{-ikz} дает распространение в противоположном направлении.

2. Проводящая лента (рис. 20,*в*) несет электростатический заряд q на единицу своей длины. Вводя эллиптические координаты ξ, η по формулам

$$x=f\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\quad y=f\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta,$$

где ленте ширины $2f$ соответствует значение $\xi=0$ (т. е. $-f<x<f$, $y=0$), найти распределение заряда на ленте. Воспользоваться формулами § 19 и тем обстоятельством, что поверхностная плотность заряда на проводнике равна $-(1/4\pi)\partial\Phi/\partial n$, где Φ — потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа, а n — направление внешней нормали.

Решение. Образуя дифференциалы dx и dy, легко получить соотношение

$$dx^2+dy^2=f^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta)(d\xi^2+d\eta^2),$$

откуда видно, что

$$h_\xi=h_\eta=f\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta},$$

поэтому уравнение Лапласа записывается в виде

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2}=0$$

и на ленте

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=\frac{1}{\sqrt{f^2-\xi^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}.$$

Поскольку на ленте должно выполняться условие $\Phi=\mathrm{const}$, потенциал Φ может зависеть только от ξ; из уравнения Лапласа следует, что $\Phi=C\xi+C'$, где C и C' — постоянные. Отсюда видно, что поверхностная плотность заряда на ленте (с обеих сторон) равна $q/\pi\sqrt{f^2-x^2}$.

3. Используя решение предыдущей задачи, найти потенциал ленты на больших расстояниях от нее. Сравнить с потенциалом кругового провода радиуса a, несущего тот же погонный заряд q. Считать, что на ленте и проводе $\Phi=0$.

Решение. Для ленты надо взять $\Phi = C\xi = -2q\xi$. При $\xi \gg 1$ формулы, связывающие декартовы координаты с эллиптическими, принимают вид

$$x = r\cos\eta, \quad y = r\sin\eta, \quad r = (f/2)\,e^{\xi}, \quad \xi = \ln(2r/f),$$

где r — расстояние от середины ленты. Поэтому при $r \gg f$

$$\Phi = -2q\ln(2r/f),$$

в то время как для кругового цилиндра (см. § 32)

$$\Phi = -2q\ln(r/a).$$

Таким образом, при $f = 2a$ потенциал ленты вдали от нее такой же, как потенциал кругового цилиндра.

Глава VI.

ТЕЛЕГРАФНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 30. Основные свойства телеграфных уравнений

Передающие линии первой группы рассчитывают обычно с помощью телеграфных уравнений. Здесь будут приведены основные понятия, относящиеся к телеграфным уравнениям.

Электромагнитное поле в телеграфных уравнениях явно не фигурирует, а вместо него для каждого поперечного сечения z данной линии передачи в каждый момент t вводятся две величины — напряжение $U = U(z, t)$ и ток $J = J(z, t)$. Каждый однородный отрезок линии передачи характеризуется четырьмя параметрами: R — погонное сопротивление линии; L — погонная индуктивность линии; C — погонная емкость линии; G — погонный коэффициент утечки.

Напряжение и ток связаны между собой уравнениями в частных производных — телеграфными уравнениями первого порядка:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = RJ + L\frac{dJ}{dt}\ ; \quad -\frac{\partial J}{\partial z} = GU + C\frac{\partial U}{\partial t}\ . \tag{30.01}$$

Исключая из этих уравнений одну из величин (U или J), для другой величины получаем уравнение в частных производных второго порядка, которое обычно также называется телеграфным уравнением. Это уравнение здесь не выписано (см. задачу 1).

При применении телеграфных уравнений к реальным линиям передачи нужно иметь в виду, что, например, погонное сопротивление линии R вследствие скин-эффекта зависит от частоты, и поэтому его нельзя рассматривать как константу для волн любой формы. В этом случае необходимо ограничиться рассмотрением монохроматических волн, т. е. колебаний вполне определенной частоты ω. Для таких колебаний, как и для монохроматических электромагнитных полей (см. § 2), мы будем применять комплексные обозначения и брать временной множитель $e^{-i\omega t}$. Обозначая

комплексные амплитуды физических величин (в данном случае напряжения U и тока J) так же, как и сами физические величины, из обычных телеграфных уравнений (30.01) получаем телеграфные уравнения в комплексной форме

$$-\frac{dU}{dz}=(R-\mathrm{i}\omega L)\,J,\quad -\frac{dJ}{dz}=(G-\mathrm{i}\omega C)\,U. \tag{30.02}$$

Здесь производные по z обозначены через d/dz, поскольку комплексные амплитуды суть функции только z.

Найдем общее решение уравнений (30.02). Для этого исключим одну из величин, например J. Дифференцируя первое уравнение (30.02)

$$-\frac{d^2U}{dz^2}=(R-\mathrm{i}\omega L)\frac{dJ}{dz}=-(R-\mathrm{i}\omega L)(G-\mathrm{i}\omega C)\,U,$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2U}{dz^2}+h^2U=0, \tag{30.03}$$

где

$$h^2=-(R-\mathrm{i}\omega L)(G-\mathrm{i}\omega C)=(\omega L+\mathrm{i}R)(\omega C+\mathrm{i}G). \tag{30.04}$$

Обозначая через

$$h=\sqrt{(\omega L+\mathrm{i}R)(\omega C+\mathrm{i}G)} \tag{30.05}$$

корень уравнения (30.04), удовлетворяющий условию $\operatorname{Im} h>0$, получим общее решение уравнения (30.03) в виде

$$U=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}+B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hz} \tag{30.06}$$

и, подставляя это выражение в первое уравнение (30.02), найдем ток

$$J=\frac{1}{Z}\,(A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}-B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hz}), \tag{30.07}$$

где

$$Z=\frac{\omega L+\mathrm{i}R}{h}=\sqrt{\frac{\omega L+\mathrm{i}R}{\omega C+\mathrm{i}G}} \tag{30.08}$$

называется волновым импедансом линии.

Величина h, определяемая формулой (30.05), называется комплексным волновым числом. Формулы (30.06) и (30.07) показывают, что общее решение телеграфных уравнений для любого однородного отрезка линии передачи равно сумме двух бегущих волн с произвольными комплексными амплитудами: одна волна бежит в положительном направлении (слагаемые, пропорциональные $\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}$), а другая — в отрицательном направлении (слагаемые, пропорциональные $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hz}$).

Если имеется только одна бегущая волна, распространяющаяся в положительном направлении, то $B=0$ и $U/J=Z$. В случае

волны, бегущей в отрицательном направлении, $U/J=-Z$. Таким образом, волновой импеданс определяет отношение напряжения к току в «чистой» бегущей волне.

Заметим, что структура формул для волн в линиях вполне аналогична структуре формул (11.09) для плоских волн в однородных средах: h соответствует волновому числу $K=k\sqrt{\varepsilon\mu}$, напряжение U — составляющей E_x, ток J — составляющей H_y, волновой импеданс Z — волновому импедансу $\zeta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$. Это объясняется тем, что телеграфные уравнения (30.02) имеют ту же структуру, что и уравнения (11.03) для плоских волн.

В качестве простейшего примера рассмотрим линию без потерь. Это значит, что считаем утечку равной нулю ($G=0$), т. е. предполагаем, что пространство между проводами является непроводящим; например, это может быть пустота, как это считали в § 29. Кроме того, пренебрегаем потерями в проводах, считая их идеально проводящими ($R=0$). Так как для идеальных проводников внутренняя индуктивность равна нулю, то в этом случае полная погонная индуктивность линии L сводится к ее внешней индуктивности, которую будем в дальнейшем обозначать через L_e. При этих упрощениях формулы (30.05) и (30.08) принимают вид

$$h=\omega\sqrt{L_eC},\quad Z=\sqrt{L_e/C}. \tag{30.09}$$

Если воспользоваться результатами § 29, в котором для проводов в пустоте получены волновые числа $\pm k$, то получим следующее соотношение между погонной емкостью и погонной внешней индуктивностью:

$$L_eC=1/c^2. \tag{30.10}$$

Пользуясь этим соотношением, легко преобразовать выражение (30.09) для волнового сопротивления к виду

$$Z=1/cC. \tag{30.11}$$

В системе единиц СГС, которая здесь все время используется, погонная емкость C является безразмерным параметром (иначе говоря, имеет размерность см/см). Если желательно выразить волновое сопротивление в омах, считая величину C по-прежнему безразмерной, то в формуле (30.11) достаточно заменить

$$1/c\to 30\ \text{Ом}. \tag{30.12}$$

§ 31. Электродинамический вывод телеграфных уравнений

Дадим электродинамический вывод телеграфных уравнений (30.02) для линии передачи, состоящей из двух проводов (рис. 22). Будем считать, что в первом проводе ток $J=J(z,\ t)$, а во втором проводе $-J$. Этим самым определено понятие тока в линии. Напряжение U ввести труднее, так как понятие напряжения в случае электродинамического поля, вообще говоря, непримени-

мо. Эту трудность обходим тем, что напряжением $U=U(z,\ t)$ между проводами *1* и *2* называем интеграл

$$U=\int_1^2 E_s\,ds, \tag{31.01}$$

взятый в данном поперечном сечении $z=\text{const}$ по кратчайшему пути от провода *1* к проводу *2*.

Перейдем теперь к выводу уравнений (30.02) для функций U и J. Как оказывается, первое уравнение (30.02) является следствием закона электромагнитной индукции Фарадея, а второе уравнение (30.02) — следствие закона сохранения заряда. Однако, выводя телеграфные уравнения из этих общих законов электродинамики, необходимо сделать дополнительные предположения, которые выполняются приближенно и делают телеграфные уравнения применимыми только при определенных условиях.

Напишем второе уравнение Максвелла в интегральной форме (закон электромагнитной индукции Фарадея)

$$\oint_C E_s\,ds=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S B_n\,dS, \tag{31.02}$$

где S — поверхность, ограниченная замкнутым контуром C. Применим его к прямоугольному контуру *abcda*, изображенному на рис. 22. Этот контур состоит из двух отрезков *ab* и *cd*, лежащих на поверхности проводов *1* и *2*, и двух отрезков *bc* и *ad*, соединяющих провода по кратчайшей прямой в поперечном сечении $z+dz$ и z соответственно. Вычисляя циркуляцию электрического поля по замкнутому контуру *abcda*, для интеграла по каждой стороне в отдельности получаем

$$\begin{aligned}
&\int_b^c E_s\,ds=U(z+dz)=U(z)+\frac{\partial U}{\partial z}\,dz,\\
&\int_d^a E_s\,ds=-\int_a^d E_s\,ds=-U(z),\\
&\int_a^b E_s\,ds=E_{z,1}\,dz,\ \int_c^d E_z\,ds=-E_{z,2}\,dz,
\end{aligned} \tag{31.03}$$

где через $E_{z,1}$ и $E_{z,2}$ обозначены составляющие электрического

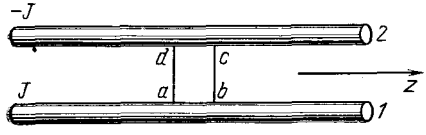


Рис. 22. К выводу 1-го телеграфного уравнения

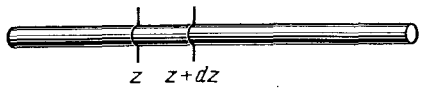


Рис. 23. К выводу 2-го телеграфного уравнения

поля на проводах *1* и *2* соответственно. Полагая согласно § 26 и 27

$$E_{z,1}=(R_1-\mathrm{i}\omega L_{i,1})J,\ E_{z,2}=-(R_2-\mathrm{i}\omega L_{i,2})J, \tag{31.04}$$

где $R_1-\mathrm{i}\omega L_{i,1}$ и $R_2-\mathrm{i}\omega L_{i,2}$ — погонные внутренние импедансы проводов *1* и *2*, и обозначая

$$R=R_1+R_2,\ L_i=L_{i,1}+L_{i,2}, \tag{31.05}$$

получаем циркуляцию электрического поля

$$\oint\limits_{abcda} E_s\,ds=\left[\frac{\partial U}{\partial z}+(R-\mathrm{i}\,\omega L_i)\,U\right]dz. \tag{31.06}$$

Магнитный поток через прямоугольник *abcda* можно представить в виде

$$\int\limits_{abcda} B_n\,dS=c\,\Psi\,dz, \tag{31.07}$$

поскольку элемент площади $dS=ds\,dz$, где ds есть элемент длины прямой, соединяющей провода *1* и *2*. Величина

$$\Psi=\frac{1}{c}\int\limits_1^2 B_n\,ds \tag{31.08}$$

равна (с точностью до множителя $1/c$) магнитному потоку, проходящему между проводами линии на единицу ее длины.

Подставляя выражения (31.06) и (31.08) в уравнение (31.02), для временной зависимости $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ получаем комплексное уравнение

$$-\frac{dU}{dz}=(R-\mathrm{i}\,\omega L_i)\,J-\mathrm{i}\,\omega\Psi. \tag{31.09}$$

Входящая в него величина $\Psi=\Psi(z)$ определяется согласно формуле (31.08) магнитным полем в данном поперечном сечении z. Магнитное поле в конечном счете возбуждается токами, текущими по проводам *1* и *2*. Предположим, что это поле определяется только током J, проходящим через сечение z, и не зависит от токов, имеющихся в других частях линии. Предположение о локальном характере магнитного поля может выполняться лишь приближенно, поскольку из электродинамики известно, что сколь угодно удаленные токи влияют на магнитное поле в точке наблюдения. Примем, однако, пока это предположение без критики и выясним, какие следствия из него вытекают.

Поскольку магнитное поле пропорционально создающему его току,

$$\Psi=L_eJ, \tag{31.10}$$

где коэффициент пропорциональности L_e, зависящий от геометрической формы и размеров линии в поперечном сечении и магнитной проницаемости среды между проводами, называется погонной внешней индуктивностью линии, так как он определяет магнитный поток, проходящий целиком вне проводов.

Сочетание формул (31.09) и (31.10) приводит к первому телеграфному уравнению (30.02). Действительно, для монохроматических колебаний получается уравнение

$$-\frac{dU}{dz}=(R-\mathrm{i}\,\omega L)\,J,\quad L=L_e+L_i, \tag{31.11}$$

в котором погонное сопротивление R и погонная индуктивность L линии определяются формулами (31.05), (31.10) и (31.11).

Заметим, что в силу формулы (31.05) сопротивление и внутренняя индуктивность линии на единицу длины складываются из соответствующих величин, вычисленных для каждого провода в отдельности, как и при последовательном соединении сопротивлений. Это объясняется тем, что в электрическом отношении провода линии передачи включены последовательно. Действительно, представим себе, что справа на рис. 22 к проводам линии присоединена некоторая нагрузка; ток J, идущий по проводу *1*, проходит через нагрузку и возвращается обратно в виде тока $-J$ по проводу *2*.

Для вывода второго телеграфного уравнения будем исходить из уравнения непрерывности (1.01) в интегральной форме, т. е. из закона сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\,dV+\oint\limits_S j_n\,dS=0 \tag{31.12}$$

и применим его к отрезку $z,\ z+dz$ провода *1* (рис. 23). Интеграл

$$\int\limits_V \rho\,dV=q\,dz \tag{31.13}$$

определяет заряд на этом отрезке провода и поэтому равен погонной плотности заряда q на проводе *1*, умноженной на dz (погонная плотность на проводе *2* равна, очевидно, $-q$). Поверхностный интеграл в формуле (31.12) может быть разложен на сумму интегралов по поперечным сечениям z и $z+dz$ провода *1*

$$\begin{aligned}&\int\limits_{(z+dz)} j_n\,dS=J\,(z+dz)=J\,(z)+\frac{\partial J}{\partial z}\,dz\quad (j_n=j_z),\\ &\int\limits_{(z)} j_n\,dS=-J\,(z)\quad (j_n=-j_z)\end{aligned} \tag{31.14}$$

и на интеграл по боковой поверхности провода S_0 на том же участке $(z,\ z+dz)$. Обозначая через σ_0 проводимость среды между проводами, а через ε_0 ее диэлектрическую постоянную, получаем

$$\int\limits_{S_0} j_n\,dS=\sigma_0\int\limits_{S_0} E_n\,dS=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\int\limits_{S_0} D_n\,dS. \tag{31.15}$$

Последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\int\limits_{S_0} D_n\,dS = \oint\limits_{S} D_n\,dS - \int\limits_{(z)} D_n\,dS - \int\limits_{(z+dz)} D_n\,dS =$$

$$= 4\pi q dz - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\int\limits_{(z)} j_n\,dS - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\int\limits_{(z+dz)} j_n\,dS = 4\pi q dz -$$

$$-(\varepsilon_1/\sigma_1)\,[J(z+dz) - J(z)], \tag{31.16}$$

причем через ε_1 и σ_1 обозначены диэлектрическая постоянная и проводимость провода *1* и использована теорема Гаусса. Таким путем приходим к уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \left(1 - \frac{\varepsilon_1\sigma_0}{\varepsilon_0\sigma_1}\right)\frac{\partial J}{\partial z} + \frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_0}\,q = 0, \tag{31.17}$$

которое в силу условия $\sigma_0 \ll \sigma_1$ (проводимость среды гораздо меньше, чем у проводов) практически сводится к уравнению

$$-\frac{dJ}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_0}\,q, \tag{31.18}$$

или в комплексных обозначениях

$$-\frac{dJ}{dz} = \left(\frac{4\pi\sigma_0}{\varepsilon_0} - i\omega\right) q. \tag{31.19}$$

Если сделать далее предположение о локальном характере электрического поля, т. е. предположить, что электрическое поле в данном поперечном сечении $z=\text{const}$ определяется исключительно погонной плотностью заряда q в том же сечении и не зависит от токов и зарядов, имеющихся в других участках линии, то отсюда вытекает, что погонная плотность заряда q и напряжение U в той же точке линии должны быть связаны соотношением

$$q = CU, \tag{31.20}$$

где коэффициент пропорциональности C называется погонной емкостью линии. Если ввести величину G по формуле

$$G = 4\pi\sigma_0 C/\varepsilon_0, \tag{31.21}$$

то окончательно уравнение (31.19) примет вид

$$-\frac{dJ}{dz} = (G - i\omega C)\,U, \tag{31.22}$$

т. е. совпадает со вторым телеграфным уравнением (30.02). При этом коэффициент G (коэффициент погонной утечки) оказывается пропорциональным погонной емкости C и проводимости среды σ_0.

Таким образом, для вывода телеграфных уравнений одних законов электродинамики недостаточно и к ним приходится прибавлять предположения о локальном характере магнитного и электрического полей. Эти предположения позволили характеризовать свойства линии с помощью таких величин, как емкость и индуктивность, строго применимых лишь для полей, постоянных во

времени. Поэтому естественно думать, что телеграфные уравнения применимы лишь для достаточно медленных колебаний, т. е. при достаточно низких частотах. В § 35 подробно рассмотрены пределы применимости телеграфных уравнений и показано, что это действительно так.

§ 32. Расчет параметров длинных линий

В этом параграфе выведем формулы для расчета параметров коаксиальной и двухпроводной линий. Начнем с погонной емкости C и погонной внешней индуктивности L_e, определяемых формулами (31.20) и (31.10). Эти формулы базируются на предположениях о локальном характере электрического и магнитного полей, введенных в § 31 без надлежащего обоснования. Однако ясно, что для бесконечно длинной линии, провода которой несут постоянный ток или заряжены статическим электричеством, эти формулы являются вполне точными, поэтому предположение о локальном характере поля удовлетворяется автоматически. Действительно, в статических условиях заряд распределяется равномерно вдоль проводов линии, так что создаваемое им электрическое поле в любом поперечном сечении системы одно и то же: оно пропорционально погонной плотности зарядов на проводах, постоянной по длине линии. Аналогично стационарный ток постоянен по длине провода, вследствие чего магнитное поле в любом поперечном сечении одинаково и пропорционально силе тока J.

Рассматривая электростатическое поле в бесконечной коаксиальной линии (кабеле), легко видеть, что получаем обычный цилиндрический конденсатор (рис. 24). Электрическое поле в таком конденсаторе имеет только радиальную составляющую

$$E_r = 2q/r. \tag{32.01}$$

Это выражение проще всего вывести, если применить теорему Гаусса к цилиндру, коаксиальному с конденсатором и имеющему единичную длину по оси z. Эта теорема дает соотношение

$$\oint E_r \, ds = 4\pi q, \tag{32.02}$$

если между обкладками конденсатора — пустота и радиус цилиндра r лежит в интервале $a<r<b$. Поскольку

$$\oint E_r \, ds = 2\pi r E_r, \tag{32.03}$$

получаем выражение (32.01). Вычисляя напряжение между внутренним проводником *1* и внешним проводником *2*, имеем

$$U = \int_a^b E_r \, dr = 2q \ln \frac{b}{a}, \tag{32.04}$$

где a — радиус внутреннего провода, b — радиус оболочки коаксиальной линии.

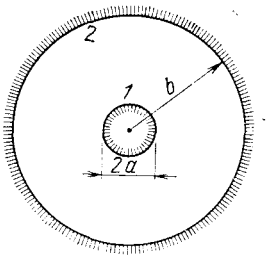


Рис. 24. Коаксиальная линия

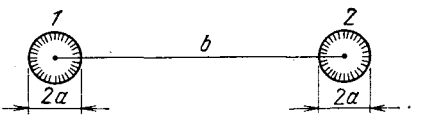


Рис. 25. Двухпроводная линия

Сравнивая выражение (32.04) с формулой (31.23), видим, что погонная емкость коаксиальной линии

$$C = 1/2 \ln(b/a). \tag{32.05}$$

Если коаксиальная линия заполнена диэлектриком, имеющим диэлектрическую постоянную ε_0, то из тех же рассуждений получаем

$$C = \varepsilon_0/2 \ln(b/a). \tag{32.06}$$

Для вычисления погонной внешней индуктивности коаксиальной линии нужно считать, что по проводнику *1* течет постоянный ток J, а по проводнику *2* течет ток $-J$. В этом случае магнитное поле будет отлично от нуля только в пространстве $a<r<b$, так как при $r>b$, т. е. во внешнем пространстве, магнитные поля проводников *1* и *2* будут взаимно уничтожаться. Магнитное поле данной системы будет иметь только составляющую

$$H_\varphi = 2J/cr. \tag{32.07}$$

Действительно, применяя соотношение

$$\oint H_\varphi \, ds = \frac{4\pi}{c} J \tag{32.08}$$

к любой окружности $r=\text{const}$, сразу получаем формулу (32.07).

Вычисляя погонный магнитный поток Ψ по формуле (31.08), получаем

$$\Psi = \frac{1}{c} \int_a^b H_\varphi \, dr = \frac{2J}{c^2} \ln \frac{b}{a} \tag{32.09}$$

для магнитного поля в пустоте. Сравнивая соотношение (32.09) с соотношением (31.10), получаем

$$L_e = (2/c^2) \ln(b/a). \tag{32.10}$$

Если коаксиальная линия заполнена магнетиком с магнитной проницаемостью μ_0, то формула (32.10) приобретает вид

$$L_e = (2\mu_0/c^2) \ln(b/a). \tag{32.11}$$

Выражения (32.05) и (32.10) удовлетворяют соотношению

$$L_e C = 1/c^2, \tag{32.12}$$

благодаря которому при отсутствии потерь в проводах, т. е. при идеальной проводимости их, волны вдоль линии согласно формуле (30.09) распространяются со скоростью c. Этот важный результат был получен с помощью телеграфных уравнений исторически раньше, чем была создана теория электромагнитных волн в свободном пространстве. С точки зрения электродинамической теории длинных линий, изложенной в § 29, этот результат очевиден.

Если считать провода линии по-прежнему идеально проводящими и подставить в формулу (30.09) выражения (32.06) и (32.11), то получим волновое число $h=k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ в соответствии с результатами § 29.

Переходя к расчету погонной емкости двухпроводной линии, состоящей из двух параллельных проводов радиуса a, центры которых отстоят на расстоянии b друг от друга (рис. 25), мы ограничимся приближенным рассмотрением этой системы при условии $a/b\ll 1$, т. е. когда радиус проводов значительно меньше расстояния между ними. В этом случае, обозначая через q погонный заряд провода *1* и через $-q$ погонный заряд провода *2*, мы можем вычислять электрическое поле каждого провода так, как если бы другой провод отсутствовал. В частности, для поля провода *1* можно в этом случае пользоваться формулой (32.01), где r обозначает радиус-вектор, проведенный от оси провода *1*, а поле провода *2* можно вычислять по формуле

$$E_{r'}{}^{(2)}=-2q/r', \tag{32.13}$$

где r' обозначает расстояние от оси провода *2*. Так как на отрезке прямой, соединяющей центры обоих проводов в данном поперечном сечении $z=\text{const}$, направление отсчета r' противоположно направлению отсчета r ($E_{r'}{}^{(2)}=-E_r{}^{(2)}$), то на этой линии можно окончательно написать выражение для составляющей E_r полного поля:

$$E_r=\frac{2q}{r}+\frac{2q}{r'}\,. \tag{32.14}$$

Так как напряжение между проводами

$$U=\int\limits_a^{b-a} E_r\,dr, \tag{32.15}$$

то согласно формуле (32.16)

$$U=\int\limits_a^{b-a}\left(\frac{2q}{r}+\frac{2q}{r'}\right)dr=2q\int\limits_a^{b-a}\frac{dr}{r}-2q\int\limits_{b-a}^{a}\frac{dr'}{r}=4q\ln\frac{b}{a}\,, \tag{32.16}$$

причем в последнем выражении в силу условия $a\ll b$ вместо $b-a$ можно написать просто b. Отсюда видно, что погонная емкость двухпроводной линии

$$C=1/4\ln(b/a). \tag{32.17}$$

Эта формула — приближенная. С помощью метода конформных

отображений данную электростатическую задачу можно решить точно, и в результате получается формула

$$C = 1/4 \ln [b/2a + \sqrt{(b/2a)^2 - 1}], \quad (32.18)$$

переходящая в формулу (32.17) при $b/a \gg 1$.

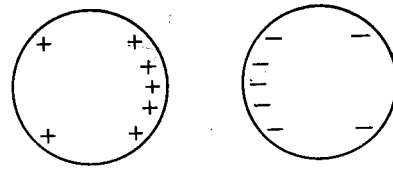


Рис. 26. Эффект близости в двухпроводной линии

При выводе формулы (32.18) принимается во внимание так называемый эффект близости, заключающийся в том, что благодаря взаимодействию проводов распределение зарядов (и токов) по их окружности становится неравномерным. На рис. 26 показано, как благодаря притяжению разноименных зарядов они скапливаются на одной стороне проводов. При условии $b/a \gg 1$ этот эффект выражен слабо, благодаря чему погонную емкость системы можно рассчитать, исходя из предположения о симметричном распределении заряда на поверхности каждого провода.

Погонная внешняя индуктивность двухпроводной линии удовлетворяет соотношению (30.10) и легко может быть найдена из этого соотношения (см. также задачу 2).

Что касается волнового импеданса идеально проводящей коаксиальной или двухпроводной линии, то он легко вычисляется по второй формуле (30.09) или по формуле (30.11). С учетом соотношения (30.12) для коаксиальной линии получаем волновое сопротивление, Ом

$$Z = 60 \ln (b/a), \quad (32.19)$$

а для двухпроводной линии

$$Z = 120 \ln (b/a). \quad (32.20)$$

Эти формулы справедливы, если электромагнитное поле линии расположено в пустоте. Если же пространство заполнено веществом с проницаемостями ε и μ, то погонная емкость C умножается на ε, погонная индуктивность L_e — на μ, а волновое сопротивление приобретает множитель $\sqrt{\mu/\varepsilon}$.

Согласно формулам (31.05) величины R и L_i для линии складываются из соответствующих величин для каждого провода, а они были вычислены в теории склин-эффекта (гл. IV). В случае сильного скин-эффекта для коаксиальной линии получаем простые формулы

$$R_1 = \omega L_{i,1} = 1/2\pi a \sigma_1 d_1, \quad R_2 = \omega L_{i,2} = 1/2\pi b \sigma_2 d_2, \quad (32.21)$$

где индекс 1 относится к внутреннему, а индекс 2 — к внешнему проводнику коаксиальной линии. Первую формулу (32.21) можно применять и к каждому из проводов двухпроводной линии. Если провода, как это предполагалось выше, одинаковы, то для линии

$$R = 2R_1, \quad L_i = 2L_{i,1}. \quad (32.22)$$

В этой формуле не учтен эффект близости, и она применима поэтому лишь при условии $a \ll b$. Заметим, что из-за эффекта близости внутреннее сопротивление линии увеличивается, так как появляется дополнительная неравномерность в распределении тока; при $a \ll b$ эта неравномерность мала, поскольку поле, действующее на данный провод со стороны другого, мало по сравнению с собственным полем провода.

Что же касается коэффициента G, то он для любой линии передачи вычисляется по формуле (31.21).

§ 33*. Энергетический смысл параметров длинных линий

В теории цепей средние значения электрической и магнитной энергий при гармонических колебаниях определяются формулами

$$\overline{W}_\varepsilon = \frac{1}{4} C |U|^2, \quad \overline{W}_\mu = \frac{1}{4} L |J|^2, \tag{33.01}$$

где U — напряжение между обкладками конденсатора с емкостью C; J — ток в катушке с индуктивностью L. Эти же формулы дают погонную электрическую и магнитную энергии в длинной линии, если в качестве C и L взять введенные выше погонные параметры линии, а под U и J понимать комплексные амплитуды напряжения и тока в данном отрезке линии. При этом погонная индуктивность L определяется второй формулой (31.11), и соответственно погонная магнитная энергия является суммой внешней и внутренней энергий; последняя была исследована еще в теории скин-эффекта (см. § 26 и 27).

Потери в цепи обусловливаются, во-первых, омическим сопротивлением R, во-вторых, утечкой в конденсаторе. Обозначим среднюю мощность омических потерь через $\overline{P}_1$, а потерь в конденсаторе через $\overline{P}_2$; тогда

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{2} R |J|^2, \quad \overline{P}_2 = \frac{1}{2} G |U|^2, \tag{33.02}$$

где коэффициент G связан с емкостью конденсатора C и параметрами σ_0 и ε_0 заполняющего его вещества формулой (31.21). Те же формулы дают погонные потери в длинной линии, если под R и G понимать соответствующие погонные параметры этой линии.

Данное выше толкование формул (33.01) и (33.02) базируется, во-первых, на теории скин-эффекта (§ 26 и 27), в которой подробно рассмотрен энергетический смысл L_i и R, и, во-вторых, на предположении, что поле в пространстве между проводами распределено по квазистатическим законам. Последнее предположение служит основой для вычисления параметров L_e, C и G (см. § 32) и будет дополнительно рассмотрено в § 35. Здесь заметим лишь, что для волны в идеально проводящей линии это предположение выполняется точно (см. § 29), а при конечной проводимости линии — приближенно (см. § 35).

Таким образом, среднее значение электромагнитной энергии в линии на единицу ее длины

$$\overline{W} = \overline{W}_\varepsilon + \overline{W}_\mu = \frac{1}{4}(C|U|^2 + L|J|^2), \tag{33.03}$$

а среднее значение мощности потерь на единицу длины линии

$$\overline{P} = \frac{1}{2}(G|U|^2 + R|J|^2). \tag{33.04}$$

Выведем теперь из телеграфных уравнений (30.03) и (30.04) соотношение, аналогичное теореме о комплексной мощности (§ 6). Для этого умножим первое уравнение (30.02) на J^*, уравнение

$$-\frac{dJ^*}{dz} = (G + i\omega C)U^*,$$

комплексно-сопряженное второму уравнению (30.02), на U, и результаты сложим. Полученное соотношение

$$-\frac{d}{dz}(UJ^*) = G|U|^2 + R|J|^2 + i\omega(C|U|^2 - L|J|^2) \tag{33.05}$$

можно переписать, используя формулы (33.01) и (33.04), в виде

$$-\frac{d\hat{\Sigma}}{dz} = \overline{P} + 2i\omega(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W}_\mu), \tag{33.06}$$

где введено обозначение

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{2}UJ^*. \tag{33.07}$$

Правая часть соотношения (33.06) имеет ту же структуру, что и в соотношении (6.14). Поскольку мы для простоты считаем, что для данной системы справедливы простые материальные условия § 1, то в соотношении (33.05) фигурируют не вспомогательные величины W'_ε и W'_μ (см. § 9), а средние значения погонных энергий $\overline{W}_\varepsilon$ и $\overline{W}_\mu$. Более того, можно соотношение (33.06) получить непосредственно из соотношения (6.10), если последнее переписать в виде

$$-\operatorname{div}\hat{\mathfrak{S}} = \overline{p} + 2i\omega(\overline{w}_\varepsilon - \overline{w}_\mu), \tag{33.08}$$

учитывая отсутствие сторонних токов, и затем проинтегрировать по поперечному сечению. Интегралы

$$\overline{P} = \int_{S_\perp} \overline{p}\,dS,\ \overline{W}_\varepsilon = \int_{S_\perp} \overline{w}_\varepsilon\,dS,\ \overline{W}_\mu = \int_{S_\perp} \overline{W}_\mu\,dS, \tag{33.09}$$

взятые по поперечному сечению $S_\perp$ (т. е. по всем x и y при $z = \text{const}$), дают, очевидно, погонную мощность потерь $\overline{P}$ и погонные энергии $\overline{W}_\varepsilon$ и $\overline{W}_\mu$.

Интеграл

$$\hat{\Sigma} = \int_{S_\perp} \hat{\mathfrak{S}}_z\,dS = \frac{c}{8\pi}\int_{S_\perp} [\mathbf{EH}^*]_z\,dS \tag{33.10}$$

дает комплексную мощность, переносимую полем через поперечное сечение линии. Интеграл

$$\iint\limits_{S_\perp} \left(\frac{\partial \hat{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\mathfrak{S}}_y}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_C \hat{\mathfrak{S}}_n \, ds \tag{33.11}$$

обращается в нуль. Контур C для коаксиальной линии нужно провести в глубине Nd ее оболочки на достаточно большом расстоянии от внутренней поверхности, тогда в каждой точке контура C поле практически равно нулю, и интеграл (33.11) исчезает. Для двухпроводной линии в качестве контура C можно взять окружность достаточно большого радиуса r: легко показать, что на такой окружности электрическое и магнитное поля противофазной волны обратно пропорциональны r^2, поэтому при $r \to \infty$ интеграл (33.11) стремится к нулю.

Окончательно в результате интегрирования уравнения (33.08) получаем соотношение

$$-\frac{d\hat{\Sigma}}{dz} = \overline{P} + 2i\omega(\overline{W}_\text{в} - \overline{W}_\mu), \tag{33.12}$$

формально тождественное соотношению (33.06). Особенность соотношения (33.12) заключается в том, что оно выведено из электродинамических уравнений и потому остается справедливым для волноводов и других линий передачи (см. § 51), если входящие в него величины определять с помощью формул (33.09) и (33.10).

Выписанные же ранее выражения (33.01), (33.04) и (33.07) пригодны лишь для длинных линий, подчиняющихся телеграфным уравнениям. Последняя из этих формул вскрывает энергетический смысл волнового импеданса Z; если имеем волну, бегущую в положительном направлении, то

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{2} Z |J|^2 = \frac{1}{2Z^*} |U|^2. \tag{33.13}$$

Из телеграфных уравнений нетрудно вывести также тождество, аналогичное теореме о колеблющейся мощности (см. задачу 3).

§ 34. Зависимость свойств длинных линий от частоты

Рассмотрим, как зависят свойства линий от частоты. Остановимся на наиболее важном случае, когда между проводами линии — пустота, так что $G=0$, а L_e и C связаны соотношением (30.10).

Чтобы получить представление о конкретных численных соотношениях, возьмем коаксиальную линию, выполненную из меди, причем радиус внутреннего проводника $a=0{,}05$ см, а ра-

диус внешнего проводника $b=0{,}5$ см. Ограничимся достаточно высокими частотами, при которых скин-эффект сильный. Тогда

$$R=\omega L_i=9{,}05\cdot 10^{-5}\sqrt{f},\ \text{Ом/м},$$

$$\omega L_e=2{,}9\cdot 10^{-6}f,\ \text{Ом/м},$$

где f — частота в герцах. Отношение

$$R/\omega L_e=L_i/L_e=31/\sqrt{f}$$

стремится к нулю при возрастании частоты. Это отношение показывает, как увидим дальше, насколько объем проводников участвует в электромагнитных процессах, происходящих при распространении волн вдоль линии. Для достаточно высоких частот это отношение принимает малые значения, например, при $f=10^8$ Гц ($\lambda=3$ м) оно равно $3{,}1\cdot 10^{-3}$.

Если взять линию с другими геометрическими размерами или другие проводники, то численные коэффициенты в написанных выше выражениях несколько изменятся, однако зависимость всех величин от частоты сохранится, и для достаточно высоких частот отношение $R/\omega L_e=L_i/L_e$ будет малым.

Вычисляя по формуле (30.11) волновой импеданс линии передачи

$$\mathrm{Z}=\sqrt{\frac{\omega L+\mathrm{i}R}{\omega C}}=\sqrt{\frac{L_e}{C}\left(1+\frac{L_i}{L_e}+\mathrm{i}\frac{R}{\omega L_e}\right)},\qquad(34.01)$$

видим, что при увеличении частоты он стремится к выражению

$$\mathrm{Z}=\sqrt{L_e/C},\qquad(34.02)$$

соответствующему линии той же геометрической формы [согласно формуле (30.09)], но идеально проводящей.

Выясним, как ведет себя волновое число h при увеличении частоты. Так как $G=0$, то формула (30.05) принимает вид

$$h=\sqrt{(\omega L+\mathrm{i}R)\,\omega C}\qquad(34.03)$$

или в силу соотношения (30.10)

$$h=k\sqrt{1+\frac{L_i}{L_e}+\mathrm{i}\frac{R}{\omega L_e}}.\qquad(34.04)$$

Учитывая, что при высоких частотах отношение $L_i/L_e=R/\omega L_e$ становится малым, мы можем использовать формулу $\sqrt{1+x}=1+x/2$, пригодную при малых x, и написать

$$h=k\left(1+\frac{L_i}{2L_e}+\mathrm{i}\frac{R}{2\omega L_e}\right).\qquad(34.05)$$

В общем случае имеем $h=h'+\mathrm{i}h''$, где вещественная часть волнового числа h' определяет фазовую скорость волны $u=\omega/h'$ [см.

формулу (11.14)], а мнимая часть h'' есть коэффициент затухания волны в линии. Из приближенной формулы (34.05) следует, что

$$u=c/(1+L_i/L_e). \qquad (34.06)$$

Эта скорость меньше скорости света c; она стремится к c при увеличении частоты. Физически это объясняется тем, что поле вследствие скин-эффекта вытесняется из проводов ($L_i\to 0$), и электродинамические процессы переносятся исключительно в пространство между проводами.

Коэффициент затухания линии может быть записан в виде

$$h''=R/2cL_e=R/2Z, \qquad (34.07)$$

где Z — волновое сопротивление (34.02). Отсюда видно, что затухание на фиксированной длине линии (например, на длине 100 м) увеличивается пропорционально $\sqrt{f}$, когда через нее передаются волны все более высоких частот. Таким образом, в отношении затухания реальная линия при увеличении частоты все более отличается от идеально проводящей линии.

Однако в некоторых случаях бывает важен так называемый относительный коэффициент затухания $\varkappa=h''\lambda$; он дает ослабление волны на отрезке линии, равном длине волны. Так как

$$\varkappa=\pi R/\omega L_e=\pi L_i/L_e, \qquad (34.08)$$

то с ростом частоты он стремится к нулю как $1/\sqrt{f}$. Поэтому можно сказать, что по относительному коэффициенту затухания реальная линия при росте частоты приближается к идеально проводящей линии.

На сверхвысоких частотах обычные резонансные контуры обладают в силу многих причин большим декрементом затухания, т. е. малой добротностью. В качестве контуров с высокой добротностью в этом диапазоне часто применяют отрезки линий длиной порядка четверти или половины волны, закороченные на конце или разомкнутые. Как показывает расчет, декремент затухания таких отрезков примерно равен четверти или половине относительного коэффициента затухания (34.08), и поэтому такие отрезки при увеличении частоты обладают все более высокой добротностью, чем и оправдывается их использование. Если применяется отрезок коаксиальной линии, то это — объемный резонатор (см. гл. XV), а отрезок двухпроводной линии есть, в сущности, открытый резонатор (см. гл. XVII).

При практическом применении телеграфных уравнений нужно учитывать (см. далее § 35), что при слишком высоких частотах телеграфные уравнения становятся неприменимыми. Поэтому в приведенных выше соотношениях частоту нельзя увеличивать неограниченно.

Заметим, что распространение весьма длинных волн (например от 1 до 100 км) происходит вдоль линий со скоростью, значительно меньшей, чем скорость света, причем скорость распространения сильно зависит от частоты и от параметров линии. Для та-

ких волн отношение $R/\omega L_e$ является большим числом, а погонное сопротивление линии нельзя рассчитывать по формулам сильного скин-эффекта. Относящиеся к этому случаю формулы могут быть легко получены из общих соотношений, однако на этом останавливаться не будем.

§ 35. Пределы применимости телеграфных уравнений

Рассмотрим условия применимости телеграфных уравнений к неоднородным линиям, т. е. к линиям с оконечной нагрузкой, к разомкнутым на конце или закороченным отрезкам линий и т. д. Возьмем, например, открытый конец двухпроводной линии, на который набегает слева волна, распространяющаяся в линии (рис. 27). Как известно, телеграфные уравнения позволяют рассчитать коэффициент отражения волны при любом импедансе оконечной нагрузки: коэффициент отражения определяется отношением импеданса нагрузки к волновому сопротивлению линии. Разомкнутый конец с точки зрения телеграфных уравнений есть оконечная нагрузка с бесконечным импедансом, поэтому коэффициент отражения от открытого конца равен единице: энергия падающей волны должна полностью отражаться от открытого конца назад. На самом деле отражение никогда не бывает полным, так как часть энергии тратится на излучение. Действительно, переменный ток, текущий в каждом отрезке провода, является элементарным диполем — источником сферических электромагнитных волн. В результате сложения волн, посылаемых обоими проводами, возникает электромагнитная волна, расходящаяся от открытого конца двухпроводной линии и уносящая с собой часть мощности набегающей волны. Поэтому коэффициент отражения этой волны от конца линии всегда несколько меньше единицы. Если, однако, выполняется условие $kb \ll 1$ (где k — волновое число в пустоте, b — расстояние между проводами), то сферическая волна уносит лишь пренебрежимо малую часть мощности набегающей волны. Действительно, дипольный момент отрезка dz_1 провода *1* отличается лишь знаком от дипольного момента соответствующего отрезка dz_2 на проводе *2* (рис. 27), а волны, создаваемые этими диполями в любой точке вдали от конца линии, имеют при условии $kb \ll 1$ малую дополнительную разность фаз и поэтому почти полностью погашают друг друга.

Если же условие $kb \ll 1$ не выполняется, то линия сильно излучает. Так как это излучение никак не учитывается телеграфными уравнениями, по которым коэффициент отражения от разомкнутого конца всегда равен единице, то телеграфные уравнения теряют свою силу: они не позволя-

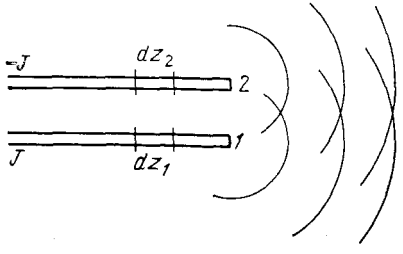


Рис. 27. Двухпроводная линия с разомкнутым концом

ют рассчитывать неоднородные линии. Одновременно двухпроводная линия становится практически не пригодной для передачи электромагнитной энергии, так как любая неоднородность приводит к сильным потерям на излучение.

Те же рассуждения применимы и к коаксиальной линии. Так, например, рассмотрим открытый конец коаксиальной линии; он будет давать пренебрежимо малое излучение лишь при условии $kb \ll 1$, где под b нужно понимать радиус внешнего проводника. Однако коаксиальная линия может не иметь сообщения с внешним пространством, и тогда для нее излучение не играет роли. Тем не менее телеграфные уравнения применимы для расчета коаксиальной линии с нагрузками и неоднородностями лишь при условии $kb \ll 1$. Последнее утверждение будет обосновано дальше при анализе волноводных свойств коаксиальных линий (см. § 45). Здесь отметим лишь, что телеграфное уравнение относится к распространению только одной волны в линии, а именно той, которая в идеально проводящей линии распространяется со скоростью c и имеет чисто поперечную структуру поля (см. § 29). В § 45 будет показано, что в коаксиальной линии наряду с этой волной могут распространяться (при достаточно высоких частотах) и другие волны — так называемые волноводные волны, которые телеграфным уравнениям не подчиняются и возникают в местах, где нарушается однородность коаксиальной линии. Эти волноводные волны при условии $kb \ll 1$ можно во внимание не принимать.

Наличие распространяющихся волноводных волн в коаксиальной линии обычно лишает ее практического значения в соответствующем диапазоне частот, поскольку, например, согласование такой линии с нагрузкой и другие технические задачи становятся практически неразрешимыми. Можно сказать, что как только передающие линии первой группы перестают подчиняться телеграфным уравнениям, так одновременно они теряют свою практическую ценность.

Условие $kb \ll 1$ можно назвать условием поперечной квазистатичности. Оно показывает, что в любом поперечном сечении линии в каждый момент распределение электрического и магнитного полей будет практически таким же, как в статике (для постоянных во времени полей). Действительно, обычное условие квазистатичности $kD \ll 1$ гарантирует то же самое для системы (электрической цепи), наибольший размер которой во всех трех измерениях равен D.

Вместе с квазистатическим характером поля в поперечном сечении условие $kb \ll 1$ обеспечивает локальный характер электрического и магнитного полей в соответствии с предположениями § 31. Действительно, как было показано, волна распространяется вдоль линии с волновым числом h, не слишком отличающимся от k. Поэтому условие $kb \ll 1$ приводит к тому, что в бегущей волне фазы тока и погонного заряда на проводах (а в стоячей волне — их амплитуды) остаются практически постоянными на длине линии, равной Nb, где N есть число порядка нескольких единиц или бо-

лее. Токи и заряды на таком отрезке линии, очевидно, возбуждают основную часть поля в некотором среднем сечении этого отрезка, а остальные участки линии дают лишь малые поправки к этому полю. Таким образом реализуется локальный характер полей в поперечном сечении.

Иначе можно сказать, что для справедливости теории длинных линий, основанной на телеграфных уравнениях, необходимо, чтобы длина линии в окружающем пространстве была достаточно велика, а именно значительно превосходила поперечные размеры данной линии.

Заметим, что условие применимости телеграфных уравнений для волны, распространяющейся в бесконечно длинной *однородной* линии, является более мягким, чем условие $kb \ll 1$. Оно имеет вид

$$\sqrt{k^2 - h^2}\, b \ll 1, \tag{35.01}$$

где h есть волновое число в линии, которое можно получить из телеграфных уравнений по формуле (34.03). Подробное обоснование условия (35.01) можно найти далее в § 59. Надо отметить, что для идеально проводящих линий ($R=0$, $L_i=0$) оно удовлетворяется автоматически, так как для них по телеграфному уравнению получается $h^2=k^2$, что полностью соответствует электродинамической теории § 29, которая при всех условиях дает $h^2=k^2$. Более того, в § 29 показано, что электромагнитное поле в поперечном сечении распределено как в статике, а это позволяет применять понятия погонной емкости и погонной индуктивности, не внося этим какой-либо ошибки.

Если же экспонента $e^{\pm ikz}$ заменяется на $e^{\pm ihz}$ (из-за потерь в проводниках), то вместо уравнения Лапласа (29.06) получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + (k^2 - h^2)\,\Pi = 0, \tag{35.02}$$

решение которого при условии (35.01) мало отличается от решения уравнения Лапласа, т. е. тогда распределение полей в поперечном сечении близко к статическому.

§ 36. Однопроводная линия. Понятие об электродинамической теории вибраторов

Однопроводную линию (см. § 29) можно рассматривать, например, как предельный случай коаксиальной линии при бесконечном радиусе внешнего проводника ($b=\infty$). Однако непосредственное применение телеграфных уравнений к однопроводной линии наталкивается на невозможность разумного определения параметров C, L_e и Z для такой линии. Действительно, по формулам (32.05), (32.10) и (32.19)

$$C=0,\ L_e=\infty,\ \mathrm{Z}=\infty. \tag{36.01}$$

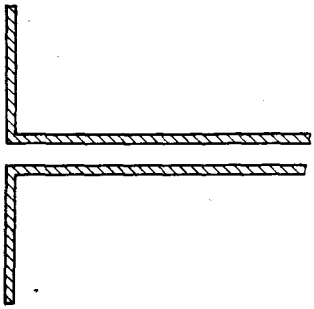


Рис. 28. Вибратор и передающая линия

Этот результат является вполне естественным, так как условию применимости телеграфных уравнений (см. § 35) однопроводная линия не удовлетворяет. Из-за отсутствия обратного провода при возбуждении однопроводной линии возникает сильное излучение в стороны и электромагнитная энергия лишь частично направляется вдоль линии. Поэтому телеграфные уравнения к однопроводной линии и ее отрезкам применять, строго говоря, нельзя.

Для излучения и приема радиоволн с давних пор находят широкое применение антенные системы, вибраторы которых являются отрезками тонких проводов. Простейшая антенна такого типа состоит (рис. 28) из одного вибратора. К его разрезу присоединена передающая линия, провода которой переходят в противоположные края разреза. Чаще всего длина вибратора выбирается приблизительно равной половине длины волны в свободном пространстве, а разрез расположен в середине вибратора. Для расчета основных свойств такой антенны, как, например, характеристики излучения, сопротивления излучения, требуется знать распределение тока по длине вибратора. Ясно, что строгое электродинамическое решение этой задачи представляет серьезные трудности. Поэтому в течение долгого времени из-за отсутствия электродинамической теории данную задачу трактовали с помощью телеграфных уравнений. Конечно, этот подход ни физически, ни математически обосновать невозможно из-за соображений, высказанных выше, однако ввиду практической важности данной задачи нужно было получить хотя бы самое грубое ее решение.

Электродинамическая теория вибраторов была построена в работах Халле́на, М. А. Леонтовича и М. Л. Левина и других авторов. В этой теории вибратор предполагается достаточно тонким: его радиус a не только удовлетворяет условию $ka \ll 1$, но и $\ln(1/ka)$ является большим числом. Удобно ввести большой параметр

$$\Omega = 2\ln(i/\gamma ka), \quad \gamma = 1{,}781..., \tag{36.02}$$

и вести расчеты, пренебрегая относительными погрешностями порядка $1/\Omega^2$ и меньше.

Возбуждение вибратора линией передачи (см. рис. 28) трактуется в электродинамической теории как возбуждение сторонней электродвижущей силой $\mathscr{E}$, распределенной на отрезке длины b, который удовлетворяет условиям

$$kb \ll 1, \quad b \gg a; \tag{36.03}$$

их значение отмечалось в § 32 и 35.

Если рассмотреть сначала бесконечную однопроводную линию, то такое возбуждение приведет, разумеется, к появлению в линии

волн тока, расходящихся от места возбуждения. Пусть линия — идеально проводящая, а электродвижущая сила $\mathscr{E}$ приложена к отрезку $-b/2<z<b/2$; тогда ток $J(z)$ в линии имеет вид

$$J(z)=\frac{c\mathscr{E}}{2\Omega}\,\psi(|z|)\,e^{ik|z|}, \tag{36.04}$$

где $\psi(z)$ — медленно изменяющаяся (по сравнению с экспонентой e^{ikz}), функция, обращающаяся в единицу при $z=0$. Входной импеданс бесконечной линии

$$Z_\infty=\mathscr{E}/J(0)=2\Omega/c=(4/c)\,[\ln(1/\gamma ka)+i\pi/2]. \tag{36.05}$$

Заменяя функцию $\psi(z)$ единицей при всех z, приходим к выражению

$$J(z)=(\mathscr{E}/Z_\infty)\,e^{ik|z|}, \tag{36.06}$$

соответствующему теории длинных линий в рамках телеграфных уравнений: амплитуда тока $|J(z)|$ по мере распространения не изменяется, поскольку потери в проводе и окружающей среде (пустоте) не учитываются. На самом деле из-за излучения в пространство амплитуда тока медленно уменьшается. Влияние излучения на ток передает функция $\psi(z)$.

Существенно, что та же функция $\psi(z)$ соответствует волнам тока, начинающимся на концах вибратора и возникающим при многократном отражении волн (36.04). Рассматривая вибратор как отрезок $-l<z<l$ однопроводной линии и задавая ток в таком отрезке формулой

$$J(z)=(\mathscr{E}/Z_\infty)\,[\psi(|z|)\,e^{ik|z|}-A_+\psi(l-z)\,e^{ik(l-z)}-$$
$$-A_-\psi(l+z)\,e^{ik(l+z)}], \tag{36.07}$$

легко найти постоянные A_+ и A_- из условий $J(\pm l)=0$ в виде

$$A_+=A_-=\psi(l)\,[1-\psi(2l)\,e^{i2kl}]/D,\quad D=1-\psi^2(2l)\,e^{i4kl}. \tag{36.08}$$

Фигурирующая в формулах (36.04), (36.07) и (36.08) функция $\psi(z)$ имеет вид

$$\psi(z)=1/[1+F(2kz)/\Omega], \tag{36.09}$$

где функция

$$F(u)=(1-e^{-iu})\ln\frac{\gamma u}{2i}+e^{-iu}\int_0^u(1-e^{it})\,\frac{dt}{t}=$$

$$=\ln\frac{\gamma u}{i}+e^{-iu}\int_u^\infty e^{it}\,\frac{dt}{t}$$

выражается через интегральный косинус и интегральный синус, которые хорошо табулированы.

Эти формулы позволяют вычислить входной импеданс вибратора, распределение тока в нем и характеристику излучения. Для вычисления входного импеданса отличие $\psi(l)$ и $\psi(2l)$ от единицы, т. е. влияние излучения на распределение тока, весьма существен-

но, поскольку, полагая $\psi(z)\equiv 1$, при $2kl=\pi$ (для полуволнового вибратора) приходим к абсурдному результату: $D=0$ и $J(z)=\infty$.

При умеренных значениях kz вместо (36.09) можно пользоваться выражением

$$\psi(z)=1-F(2kz)/\Omega, \qquad (36.10)$$

пренебрегая слагаемыми порядка $1/\Omega^2$ и меньшими. В этом приближении входной импеданс вибратора практически совпадает с тем, что дает метод наводимых ЭДС. При больших kz выражение (36.10) становится неприменимым, поскольку оно не передает медленного стремления $\psi(z)$ к нулю при $z\to\infty$, когда согласно формуле (36.09)

$$\psi(z)=1/[1+\ln(2\gamma kz/i)/\Omega] \quad (kz\gg 1). \qquad (36.11)$$

Для линии передачи, подающей энергию вибратору, последний является оконечной нагрузкой, характеризуемой входным импедансом $Z=\mathscr{E}/J(0)$. Отношение Z к волновому импедансу линии Z определяет коэффициент отражения от такой нагрузки, при $Z=Z$ отражения нет.

Раздельное рассмотрение вибратора и линии полностью соответствует указанному в § 3 применению сторонних токов и сторонних полей. Впрочем, в недавнее время удалось произвести непосредственный анализ всей системы, изображенной на рис. 28. Этот анализ привел к тем же результатам.

§ 37. Полосковые и щелевые линии

В последние десятилетия большое значение приобрели полосковые линии, которые здесь кратко рассмотрим вместе со щелевыми линиями. Полосковая линия в простейшем варианте состоит из проводящей полоски (ленты), находящейся на плоскопараллельном слое магнитодиэлектрика, который лежит на металлической подложке (рис. 29,*а*). В щелевой линии (рис. 29,*б*) поле электромагнитной волны сконцентрировано вблизи щели, образованной двумя широкими проводящими полосами, которые лежат на плоскопараллельном магнитодиэлектрическом слое; металличе-

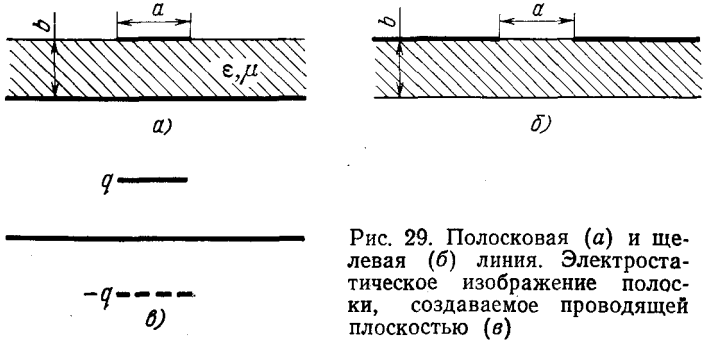


Рис. 29. Полосковая (*а*) и щелевая (*б*) линия. Электростатическое изображение полоски, создаваемое проводящей плоскостью (*в*)

ская подложка отсутствует. Ниже будем считать, что щель прорезана в бесконечной идеально проводящей плоскости, хотя это предположение иногда ведет к неправильным выводам (см. § 29). Потерями в проводниках и магнитодиэлектрике будем пренебрегать.

Надо сразу же сделать две оговорки. Во-первых, полосковые и особенно щелевые линии лишь с натяжкой можно отнести к линиям первой группы — по причинам, которые будут разъяснены ниже. Во-вторых, наличие магнитодиэлектрического (или диэлектрического) слоя и сравнительно сложная геометрия обеих линий позволяют произвести простой количественный анализ лишь в предельных случаях, а в остальных случаях, важных для практики, придется ограничиваться качественными соображениями, утешая себя тем, что важны «не числа, а понимание».

Рассмотрим сначала полосковую линию без магнитодиэлектрика. Такая линия в принципе не отличается от двухпроводной линии (см. рис. 19,*а*), один из проводов — полоска, второй — подложка. Условно можно считать, что второй провод — это электростатическое изображение полоски, создаваемое подложкой (рис. 29,*в*). Погонная емкость C_0 и погонная внешняя индуктивность L_0 такой линии удовлетворяют соотношению (32.12), однако простые формулы для C_0 и L_0 можно дать только при больших и малых значениях b/a, где a — ширина полоски, b — ее расстояние до подложки. Тогда (см. задачу 4)

$$C_0 = 1/2\ln(8b/a),\quad L_0 = (1/c^2)\,2\ln(8b/a)\quad \text{при}\quad b \gg a \tag{37.01}$$

и

$$C_0 = a/4\pi b,\quad L_0 = (1/c^2)\,4\pi b/a\quad \text{при}\quad b \ll a. \tag{37.02}$$

Что изменится, если учесть проницаемость ε и μ магнитодиэлектрика? Возьмем для ориентировки коаксиальную линию, в которой при $0<\varphi<2\pi\theta$ — магнитодиэлектрик ($0<\theta<1$), а при $2\pi\theta<\varphi<2\pi$ — пустота (рис. 30,*а*). Как легко показать (см. задачу 5), при таком заполнении параметры C_0 и L_0 заменяются на

$$C = C_0(1-\theta+\theta\varepsilon),\quad L = L_0/(1-\theta+\theta/\mu). \tag{37.03}$$

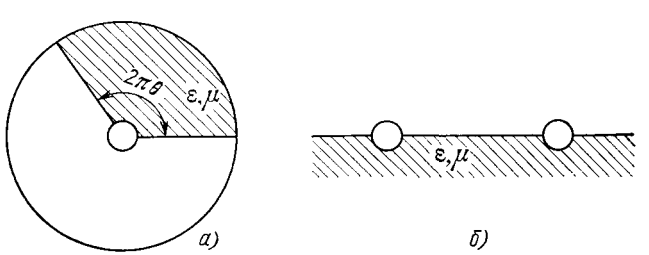


Рис. 30. Коаксиальная и двухпроводная линии, иллюстрирующие свойства полосковой линии

Применяя телеграфные уравнения, согласно формулам (30.09) получим

$$h=\omega\sqrt{LC}=k\sqrt{\frac{1-\theta+\theta\varepsilon}{1-\theta+\theta/\mu}},\quad Z=\frac{\sqrt{L_0/C_0}}{\sqrt{(1-\theta+\theta\varepsilon)(1-\theta+\theta/\mu)}}. \tag{37.04}$$

При $\theta=1/2$ эти соотношения применимы к двухпроводной линии (рис. 30,*б*), плоскость симметрии которой совпадает с плоскостью раздела. Можно думать, что они же приближенно будут применимы к полосковой и щелевой линиям при $b\to\infty$. Фактически для полосковой линии при $b\gg a$

$$\frac{1}{C}=\frac{4}{\varepsilon+1}\left\{\ln\frac{4(\varepsilon+1)b}{\varepsilon a}+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^r\left[\ln\left(1+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\right]\right\}, \tag{37.05}$$

а L получается из $1/c^2C$ заменой ε на $1/\mu$. На выводе этих формул останавливаться не будем, отметим лишь, что они находятся в качественном согласии с формулами (37.04) при $\theta\sim 1/2$. С другой стороны,

$$C=C_0\varepsilon \text{ и } L=L_0\mu \text{ при } b\ll a, \tag{37.06}$$

поскольку тогда поле сосредоточено между полоской и противостоящей частью подложки.

Напишем теперь условия применимости телеграфных уравнений, т. е. формул (37.04), к однородной по длине коаксиальной линии, изображенной на рис. 30,*а*. При учете потерь в проводниках, когда $h^2\neq k^2$, ранее было приведено условие (35.01), при котором распределение полей в поперечном сечении мало отличается от статического. Теперь ввиду наличия двух сред следует написать два условия

$$\sqrt{k^2-h^2}\,b\ll 1 \text{ и } \sqrt{k^2\varepsilon\mu-h^2}\,b\ll 1, \tag{37.07}$$

где b — радиус внешнего проводника; h вычисляется по первой формуле (37.04). При значениях θ, не слишком близких к 0 или 1, условия (37.07) практически равнозначны условиям

$$kb\ll 1 \text{ и } k\sqrt{\varepsilon\mu}\,b\ll 1, \tag{37.08}$$

т. е. к условиям применимости телеграфных уравнений к линиям, неоднородным по длине (§ 35).

Очевидно, что для полосковых линий существенны те же условия, если вместо b подставить наибольшую из величин a и b. При этих условиях в полосковой линии может распространяться только рассмотренная выше *квазипоперечная* волна с квазистатическим распределением полей в каждом сечении $z=\text{const}$. Продольные составляющие E_z и H_z у такой волны отличны от нуля, но малы по сравнению с поперечными. Малые продольные состав-

ляющие появляются и в линиях, рассмотренных ранее, если учесть потери в проводниках.

Полосковые линии используются и в таких частотных диапазонах, когда условия (37.07) и (37.08) выполняются с трудом или не выполняются. Тогда появляется заметное излучение и начинают играть роль волны высших типов (см. § 45).

В § 29 изучены волны, бегущие вдоль идеально проводящей ленты или вдоль щели в идеально проводящей плоскости. Они имеют скорость c, несут бесконечную мощность и аналогичны волне, распространяющейся вдоль одиночного провода (см. рис. 20). Магнитодиэлектрический слой в щелевой линии (см. рис. 29,*б*) замедляет эту волну, и она становится подобной волнам, которые будут рассматриваться в гл. XI (см. особенно § 63).

При отсутствии магнитодиэлектрика в щелевой линии могут возбуждаться волны напряжения (между краями щели), аналогичные волнам тока в проводящей полоске (§ 29), а последние идентичны волнам тока в однопроводной линии, исследованным в § 36. Соответствующие результаты легко переносятся на волны в полоске и щели.

Задачи к гл. VI

1. Исходя из уравнений (30.01), вывести телеграфные уравнения второго порядка, которым удовлетворяют U и J по отдельности.

Решение. Дифференцируя первое уравнение (30.01) по z, а второе уравнение по t, получаем

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=R\frac{\partial J}{\partial z}+L\frac{\partial^2 J}{\partial z\,\partial t}=-R\left(GU+C\frac{\partial U}{\partial t}\right)+L\frac{\partial^2 J}{\partial z\,\partial t},$$

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial z\,\partial t}=G\frac{\partial U}{\partial t}+C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

откуда выводим уравнение для U

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial U}{\partial t}+RGU=0$$

и такое же уравнение для J.

2. Рассчитать L_e для двухпроводной линии при условии $a\ll b$.

Решение. Исходя из формулы (32.07) и учитывая, что на линии, соединяющей центры проводов в плоскости $z=\text{const}$, поле токов J и $-J$ складывается, получаем на этой линии

$$H_\varphi=\frac{2J}{cr}+\frac{2J}{cr'},$$

откуда

$$\Psi=\frac{1}{c}\int_a^b H_\varphi\,dr=\frac{4J}{c^2}\ln\frac{b}{a},\quad L_e=\frac{4}{c^2}\ln\frac{b}{a}.$$

3. Из уравнений (30.02) вывести соотношение, аналогичное теореме о колеблющейся мощности (§ 7), и дать его физический анализ.

Решение. Умножая первое уравнение (30.02) на J, а второе на U, получаем тождество

$$-\frac{d}{dz}(UJ) = GU^2 + RJ^2 - i\omega(CU^2 + LJ^2), \qquad (a)$$

в котором

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}(GU^2 + RJ^2)$$

есть комплексная амплитуда колеблющейся части погонной мощности потерь;

$$\tilde{W} = \frac{1}{4}(CU^2 + LJ^2)$$

дает колеблющуюся часть погонной электромагнитной энергии;

$$\tilde{\Sigma} = \frac{1}{2}UJ$$

— колеблющуюся часть мощности, переносимой через поперечное сечение линии.

Окончательно соотношение (a) можно записать в виде

$$-\frac{d\tilde{\Sigma}}{dz} = \tilde{P} - 2i\omega\tilde{W}.$$

Физический смысл выражений для $\tilde{P}$ и $\tilde{W}$ может быть легко установлен по аналогии с теорией цепей, как это было сделано для выражений (33.04) и (33.03).

4. Вывести формулы (37.01) и (37.02) для емкости C_0. При выводе формулы (37.01) воспользоваться решением задачи 3 к гл. V.

Решение. Полоска шириной a, несущая погонный заряд q, создает в свободном пространстве потенциал

$$\Phi = -2q\ln(4r/a).$$

Если бы имели двухпроводную линию, состоящую из двух параллельных лент шириной a, отстоящих друг от друга на расстоянии $2b$ и несущих погонные заряды q и $-q$, то погонная емкость такой линии была бы равна $1/4\ln(8b/a)$, поскольку разность потенциалов между лентами была бы равна $4q\ln(8b/a)$. На самом деле второй ленты нет, вместо нее — подложка, над которой поле первой ленты такое же, как если бы в свободном пространстве была вторая лента (см. рис. 29,*в*). В определении погонной емкости как отношения q/U под U понимается напряжение между лентой и подложкой. Поэтому емкость удваивается и получаем первую формулу (37.01).

Формула (37.02) получается из известной формулы $S/4\pi b$ для емкости плоского конденсатора; вычисляя погонную емкость, надо заменить S на a. Формулы для L_0 получаются из соотношения (30.10).

5. Вывести формулы (37.03) для коаксиальной линии, изображенной на рис. 30,*а*, а при $\theta = 1/2$ — для двухпроводной линии (рис. 30,*б*).

Решение. При наличии заполнения электрическое поле в цилиндрическом конденсаторе имеет по-прежнему только радиальную составляющую, однако вместо формулы (32.01) будем иметь

$$E_r = A/r, \quad A = U/\ln(b/a).$$

Заряд на той части проводников, которая примыкает к диэлектрику, будет в ε раз больше, поскольку поверхностный заряд определяется составляющей $D_r = \varepsilon E_r$; отсюда

$$q = 2\pi a (1 - \theta + \theta\varepsilon) A/4\pi a = U(1 - \theta + \theta\varepsilon)/2 \ln(b/a) = CU$$

и приходим к формуле (37.03) для C.

Поле постоянного тока в коаксиальной линии имеет только составляющую

$$B_\varphi = A'/r, \quad A' = c\Psi/\ln(b/a),$$

где Ψ определяется формулой (37.08); составляющая B_φ не зависит от φ, поскольку на границах $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi\theta$ она должна быть непрерывной. Ток J, текущий по внутреннему проводнику, связан с составляющей $H_\varphi = B_\varphi/\mu$ соотношением

$$J = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} H_\varphi \, r \, d\varphi = \frac{cA'}{2} \left(1 - \theta + \frac{\theta}{\mu}\right) = \frac{c^2 \Psi}{2 \ln(b/a)} \left(1 - \theta + \frac{\theta}{\mu}\right) = \frac{\Psi}{L},$$

приводящим ко второй формуле (37.03).

Эти задачи решаются просто потому, что форма силовых линий та же, что и в случае однородного заполнения. Для двухпроводной линии на рис. 30,*б* силовые линии тоже сохраняются, поэтому формулы (37.03) к ней применимы при $\theta = 1/2$.

Формулы (37.03) можно также получить, рассматривая параллельно соединенные емкости $C_0(1-\theta)$ и $C_0\theta\varepsilon$. Результирующая емкость равна их сумме, а индуктивность вычисляется по рецепту, сформулированному после формулы (37.05).

Глава VII.
ВОЛНОВОДЫ

§ 38. Основные свойства электромагнитных волн в волноводах

Волноводом называется полый металлический цилиндр, имеющий поперечное сечение произвольной формы (рис. 31). Электромагнитное поле в волноводе заключено внутри металлической оболочки; в этом отношении волновод аналогичен коаксиальной линии. Однако под волноводом обычно понимают полый цилиндр без внутреннего провода. Отсутствие внутреннего провода приводит к тому, что свойства волновода как линии передачи радикально отличаются от свойств коаксиальной линии. Впрочем, методы исследования электромагнитных волн в волноводах могут быть перенесены и на коаксиальные линии (см. § 45).

В дальнейшем покажем, что в волноводах могут существовать волны различных типов. Каждая из этих волн имеет следующие особенности, отличающие ее от волн, изученных в § 29.

1. Критические частоты. Электромагнитная волна может распространяться в волноводе и эффективно переносить электромагнитную энергию, если частота превышает так называемую крити-

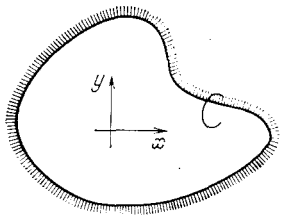


Рис. 31. Поперечное сечение волновода, ограниченного контуром C

ческую частоту данной волны. Если вместо частоты пользоваться длиной волны, соответствующей данной частоте в свободном пространстве, то можно сказать, что распространение возможно только при условии, что длина волны короче критической длины волны.

Оказывается, что критическая длина волны λ_0 для волноводов простой формы (круговое, прямоугольное, квадратное поперечные сечения и т. д.) имеет порядок наибольшего размера волновода или меньше. Поэтому использование таких волноводов рационально лишь в диапазоне сантиметровых и более коротких волн; для более длинных волн габаритные размеры поперечного сечения волновода становятся слишком большими.

2. Дисперсия. Фазовая скорость волны, распространяющейся в волноводе, зависит от частоты, даже если считать стенки волновода идеально проводящими. Эта фазовая скорость оказывается больше c (см. далее § 47).

3. Структура поля. Электромагнитное поле волн в волноводе не является чисто поперечным, а имеет также продольные составляющие. Последнее обстоятельство не должно удивлять, так как чисто поперечное поле реализуется лишь в предельном случае плоской волны с неограниченным поперечным сечением (см. § 14).

Оказывается, что все электромагнитные волны в волноводе могут быть разбиты на два класса в зависимости от того, какое поле имеет продольную составляющую — электрическое или магнитное. Если электрическое поле данной волны имеет продольную составляющую, а магнитное не имеет таковой, то волна условно называется электрической. Если магнитное поле имеет продольную составляющую, а электрическое ее не имеет, то волна именуется магнитной. Таким образом, обозначая через z координату, отчитываемую вдоль волновода, имеем для электрических волн $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, а для магнитных волн $H_z \neq 0$, $E_z = 0$.

Напомним: в § 29 было показано, что распространение волн со скоростью c и с поперечной структурой поля внутри волноводов невозможно. Поэтому неудивительно, что волны в волноводах так сильно отличаются от волн, рассмотренных в § 29.

Теоретическое исследование электромагнитных волн в волноводах проведем сначала в предположении, что стенки волновода обладают идеальной проводимостью и внутри волновода — пустота. От этих ограничений освободимся только в гл. IX.

§ 39. Электрические волны в волноводах

Будем искать частные решения уравнений электромагнитного поля внутри волноводов с произвольным поперечным сечением. При этом рассмотрим бегущие волны, точнее предположим, что

зависимость всех комплексных амплитуд электромагнитного поля от z определяется множителем e^{ihz}, где h — пока неизвестное продольное волновое число.

Легко показать, что целый класс таких решений может быть получен с помощью электрического вектора Герца с составляющими

$$\Pi^e_x = \Pi^e_y = 0,\ \Pi^e_z = \Pi^e(x, y)\, e^{ihz}. \tag{39.01}$$

Электрический вектор Герца должен удовлетворять волновому уравнению (18.04), поэтому для составляющей Π^e_z будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi^e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^e_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi^e_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi^e_z = 0 \tag{39.02}$$

или для функции $\Pi^e(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial y^2} + g^2 \Pi^e = 0,\ g = \sqrt{k^2 - h^2}. \tag{39.03}$$

Заметим, что g естественно назвать поперечным волновым числом. Волновые числа g и h связаны с k (волновым числом в свободном пространстве) соотношением

$$g^2 + h^2 = k^2, \tag{39.04}$$

показывающим, что g и h можно рассматривать как проекцию вектора k, имеющего абсолютную величину k, на плоскость поперечного сечения и ось z соответственно.

Формулы (18.03), примененные к электрическому вектору Герца частного вида (39.01), определяют составляющие электромагнитного поля

$$E_x = i h \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} e^{ihz},\ E_y = ih \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} e^{ihz},\ E_z = g^2 \Pi^e e^{ihz},$$

$$H_x = -ik \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} e^{ihz},\ H_y = ik \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} e^{ihz},\ H_z = 0. \tag{39.05}$$

Таким образом, электрический вектор Герца (39.01) дает электромагнитное поле, не имеющее продольной составляющей вектора **H** и соответствующее электрической волне по классификации § 38. Разумеется, этот термин не означает, что в данной волне отсутствует магнитное поле: этим только подчеркивается, что магнитное поле не имеет продольной составляющей.

Электромагнитное поле (39.05) удовлетворяет комплексным уравнениям поля, если Π^e есть решение двухмерного волнового уравнения (39.03). Граничное условие $E_t = 0$ на идеально проводящей стенке волновода будет выполняться, если функция Π^e удовлетворяет граничному условию

$$\Pi^e = 0 \text{ на } C, \tag{39.06}$$

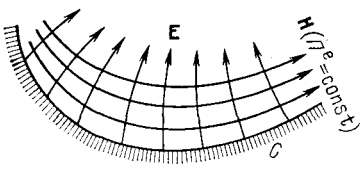


Рис. 32. Электрическое и магнитное поле электрической волны в поперечном сечении $z=\text{const}$

где C — контур, получающийся при пересечении внутренней поверхности стенки волновода с плоскостью $z=\text{const}$. Действительно, согласно условию (39.06) на стенке будем иметь $E_z=0$. Кроме того, составляющие электрического поля E_x и E_y отличаются от двухмерного градиента функции $\Pi^e(x, y)$, т. е. от вектора с составляющими $\partial\Pi^e/\partial x$ и $\partial\Pi^e/\partial y$, только постоянным множителем. Поэтому силовые линии электрического поля в плоскости поперечного сечения $z=\text{const}$ ортогональны семейству линий уровня $\Pi^e=\text{const}$ (рис. 32) и подходят к стенке, являющейся одной из линий уровня, под прямым углом. Таким образом, граничное условие (39.06) ведет к выполнению граничного условия $E_t=0$.

Более строго связь между этими условиями можно установить, если образовать составляющую

$$E_s = E_x\frac{dx}{ds} + E_y\frac{dy}{ds} = ih\left(\frac{\partial\Pi^e}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\Pi^e}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)e^{ihz} =$$

$$= ih\frac{\partial\Pi^e}{\partial s}e^{ihz} \qquad (39.07)$$

по касательной к контуру C; здесь s — длина дуги вдоль контура C. Полученное выражение показывает, что при выполнении условия (39.06) на контуре C будем иметь $E_s=0$.

Нанеся линии уровня $\Pi^e=\text{const}$, путем построения семейства кривых, им ортогональных, получим картину электрических силовых линий в плоскости поперечного сечения. Точнее, это проекции электрических силовых линий, являющихся трехмерными пространственными кривыми, на плоскость поперечного сечения. Из формул (39.05) вытекает соотношение

$$E_xH_x+E_yH_y=0, \qquad (39.08)$$

поэтому электрическое поле в каждой точке перпендикулярно магнитному и магнитные силовые линии совпадают с линиями уровня функции $\Pi^e(x, y)$. Так как $H_z=0$, то магнитные силовые линии являются плоскими кривыми.

Двухмерное волновое уравнение (39.03) имеет внутри замкнутого контура C отличное от нуля решение Π^e, удовлетворяющее граничному условию (39.06), не при любом g^2, а лишь при некоторых значениях $g^2_1, g^2_2, \ldots, g^2_j, \ldots$, образующих спектр собственных значений данной граничной задачи. Величины g^2_j образуют возрастающую (или, по крайней мере, неубывающую) последовательность положительных вещественных чисел. Каждому собственному значению g_j поперечного волнового числа соответствуют два значения продольного волнового числа $\pm\sqrt{k^2-g^2_j}$, получающиеся из соотношения (39.04), и некоторая собственная функция

$\Pi^e_j(x, y)$. Эта функция по формулам (39.05) дает распределение электромагнитного поля некоторой электрической волны, а продольное волновое число — зависимость этого поля от координаты z.

Формула (39.04) показывает, что значение h^2 может быть как положительным, так и отрицательным. В первом случае получаем волну с вещественным волновым числом

$$h=\pm\sqrt{k^2-g^2}. \tag{39.09}$$

Эта волна распространяется вдоль волновода без затухания, так как потерями в стенках волновода пренебрегаем и считаем их идеально проводящими. Во втором случае волновое число h получается чисто мнимым:

$$h=\pm i\sqrt{g^2-k^2} \tag{39.10}$$

и волна затухает, не распространяясь. Это затухание не связано, разумеется, с какими-либо потерями (см. § 44).

Исследуем подробнее, при каких условиях данная волна в волноводе распространяется, а при каких затухает. Для этого положим $k=2\pi/\lambda$, где в соответствии с формулой (12.02) λ есть длина волны в свободном пространстве. Будем далее считать, что волна распространяется, возьмем в формуле (39.09) знак плюс и введем длину волны в волноводе Λ по формуле $h=2\pi/\Lambda$. Длина волны Λ определяет периодичность поля распространяющейся волны по оси z. Если так же определить критическую длину волны λ_0 по формуле $g=2\pi/\lambda_0$ (считаем $g>0$), то соотношение (30.09) примет вид

$$1/\Lambda=\sqrt{1/\lambda^2-1/\lambda_0^2}. \tag{39.11}$$

Данная волна является распространяющейся только при $\lambda<\lambda_0$, т. е. когда длина волны меньше критической. Если же, наоборот, длина волны больше критической ($\lambda>\lambda_0$), то волна является затухающей и ее волновое число определяется формулой (39.10). О длине волны в волноводе в этом случае вообще говорить нельзя, так как поле не имеет периодической зависимости от z.

Критической длиной волны λ_0 называется потому, что при непрерывном изменении λ при $\lambda=\lambda_0$ происходит качественное изменение — данная волна из распространяющейся становится затухающей или наоборот.

Каждое собственное значение g^2 определяется лишь геометрией поперечного сечения волновода — его размерами и формой. То же относится и к критической длине волны λ_0. С другой стороны, продольное волновое число h определяется как частотой (или длиной волны λ), так и геометрией поперечного сечения.

В § 41 и 42 изложенная выше общая теория электрических волн в волноводе с произвольным поперечным сечением будет применена к волноводам с прямоугольным и круговым сечениями.

§ 40. Магнитные волны в волноводах

Для волноводов произвольного поперечного сечения можно найти еще один класс частных решений. Эти решения выражаются через магнитный вектор Герца с составляющими

$$\Pi_x^m = \Pi_y^m = 0, \quad \Pi_z^m = \Pi^m(x, y)\, e^{ihz}, \tag{40.01}$$

подобными составляющим (39.01). С помощью формул (18.08) легко можно вычислить электромагнитное поле, соответствующее вектору (40.01), а именно

$$\begin{aligned} E_x &= ik\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} e^{ihz}, \quad E_y = -ik\frac{\partial \Pi^m}{\partial x} e^{ihz}, \quad E_z = 0, \\ H_x &= ih\frac{\partial \Pi^m}{\partial x} e^{ihz}, \quad H_y = ih\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} e^{ihz}, \quad H_z = g^2 \Pi^m e^{ihz}. \end{aligned} \tag{40.02}$$

Отсюда видно, что магнитный вектор Герца (40.01) определяет электромагнитное поле, у которого продольная составляющая E_z равна нулю. Поэтому выражения (40.02) определяют поле магнитной волны по классификации § 38. Через g здесь обозначено поперечное волновое число магнитной волны, а через h — ее продольное волновое число; эти волновые числа связаны соотношением (39.04).

Магнитный вектор Герца Π^m должен удовлетворять волновому уравнению (18.09). Отсюда получаем для функции $\Pi^m(x, y)$ двухмерное волновое уравнение, подобное уравнению (39.03). Для того чтобы электромагнитное поле (40.02) удовлетворяло граничному условию $E_s = 0$ на стенке волновода, необходимо и достаточно, чтобы функция Π^m удовлетворяла граничному условию

$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial n} = 0 \text{ на } C, \tag{40.03}$$

где C есть тот же контур, что и в условии (39.06), а $\partial\Pi^m/\partial n$ есть производная функции Π^m по нормали.

Действительно, если на плоскости x, y проведем линии уровня $\Pi^m = \text{const}$, то магнитные силовые линии согласно формулам (40.02) будут ортогональны к этим линиям уровня. Так как из формул (40.02) опять вытекает соотношение (39.08), указывающее на перпендикулярность электрического и магнитного полей в каждой точке пространства, то электрические силовые линии будут совпадать с линиями уровня $\Pi^m = \text{const}$ (рис. 33). Поэтому линии уровня $\Pi^m = \text{const}$ должны подходить к контуру C под прямым углом; это значит, что при движении по нормали к контуру C сначала останемся на той же линии уровня, а это равноценно граничному условию (40.03).

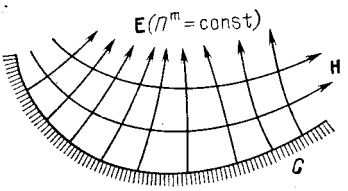


Рис. 33. Электрическое и магнитное поле магнитной волны в поперечном сечении $z = \text{const}$

Более строго граничное условие (40.03) выводится следующим образом. Так как в магнитной волне $E_z=0$, то на стенке волновода должна обращаться в нуль лишь касательная к контуру C составляющая электрического поля

$$E_s = E_x \frac{dx}{ds} + E_y \frac{dy}{ds} = i k \left(\frac{\partial \Pi^m}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial \Pi^m}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) e^{ihz}. \qquad (40.04)$$

Так как единичная нормаль n к контуру C имеет составляющие $n_x=-dy/ds$ и $n_y=dx/ds$, то

$$E_s = i k \left(\frac{\partial \Pi^m}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Pi^m}{\partial y} n_y \right) e^{ihz} = i k \frac{\partial \Pi^m}{\partial n} e^{ihz} \qquad (40.05)$$

и требование $E_s=0$ приводит к граничному условию (40.03).

Из сказанного следует, что, построив линии уровня $\Pi^m=\text{const}$, тем самым получим электрические силовые линии, которые являются плоскими кривыми, целиком лежащими в плоскости поперечного сечения. Проводя линии, им ортогональные, получаем магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения, точнее проекции магнитных силовых линий на эту плоскость.

Данная граничная задача для функции Π^m имеет нетривиальное решение лишь при некоторых собственных значениях $g^2_1, g^2_2, \ldots$, образующих ее спектр (вообще говоря, отличный от спектра задачи, рассмотренной в § 39). Эти собственные значения также образуют возрастающую (точнее, неубывающую) последовательность. Каждому собственному значению g^2 соответствует некоторая собственная функция Π^m, дающая распределение поля данной магнитной волны, и продольное волновое число $\pm\sqrt{k^2-g^2}$.

Для магнитных волн соотношения (39.09)—(39.11) также справедливы, в частности распространение или затухание данной волны имеет место в зависимости от соотношения между рабочей длиной волны λ и критической волной λ_0; последняя зависит лишь от геометрии поперечного сечения и от номера магнитной волны.

Заметим, что в число собственных значений не включено значение $g^2=0$, которому соответствует собственная функция $\Pi^m=\text{const}$, удовлетворяющая уравнению (39.03) и условию (40.03). Действительно, такая собственная функция приводит по формулам (40.02) к электромагнитному полю, тождественно равному нулю, и потому не представляет интереса.

В § 41 и 42 применим развитую здесь общую теорию магнитных волн к волноводам частного вида — прямоугольному и круглому.

Изложенная выше теория электрических и магнитных волн в волноводах показывает, что потенциалы облегчают решение электродинамических задач. В самом деле, с помощью электрического и магнитного векторов Герца задача об электромагнитных волнах в волноводе произвольного поперечного сечения сведена к двум граничным задачам для двухмерного волнового уравнения. Эти задачи давно исследованы в связи с другими физическими проблемами. Например, можно показать, что теория собственных

колебаний мембраны, натянутой на жесткий контур C (см. рис. 31), сводится к уравнению (39.03) с граничным условием (39.08). Другая граничная задача (для магнитных волн) имеет скорее математический смысл: она соответствует мембране, ограниченной свободным контуром C. Критические длины волн — это резонансные длины волн таких мембран.

Найдены два класса частных решений, соответствующие электрическим и магнитным волнам. Разумеется, из данного изложения еще не следует полнота полученной системы волн: не доказано, что в волноводе других волн не существует. Однако можно показать, что система электрических и магнитных волн действительно является полной. Свойство полноты означает, что при любом способе возбуждения поля в волноводе оно представляется вне возбуждающих источников в виде суммы (точнее, ряда) электрических и магнитных волн, изученных выше.

§ 41. Система волн в прямоугольном волноводе

Выберем начало координат в одной из вершин прямоугольного поперечного сечения и направим ось x вдоль большей стороны a, а ось y — вдоль меньшей стороны b прямоугольника (рис. 34).

Будем искать решение двухмерного волнового уравнения (39.03) для электрических волн методом разделения переменных: а именно напишем для функции Π^e выражение

$$\Pi^e(x,\ y)=X(x)\,Y(y) \tag{41.01}$$

и подставим его в уравнение (39.03). После деления обеих частей уравнения на произведение XY получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+g^2=0. \tag{41.02}$$

Из последнего соотношения следует, что как $(d^2X/dx^2)/X$, так и $(d^2Y/dy^2)/Y$ должны быть постоянными величинами; обозначим эти постоянные соответственно через $-g^2_x$ и $-g^2_y$. Таким образом,

$$(d^2X/dx^2)/X=-g^2_x,\quad (d^2Y/dy^2)/Y=-g^2_y \tag{41.03}$$

или

$$\frac{d^2X}{dx^2}+g_x^2X=0,\quad \frac{d^2Y}{dy^2}+g_y^2Y=0, \tag{41.04}$$

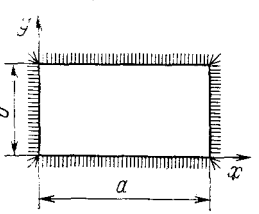


Рис. 34. Прямоугольный волновод

где в силу соотношения (41.02) должно выполняться равенство

$$g^2_x+g^2_y=g^2, \tag{41.05}$$

которое можно рассматривать как продолжение разложения (39.05), а именно разложение поперечного вектора $\mathbf{g}$ на составляющие g_x и g_y, каждая из которых определяет зависимость потенциалов и полей от поперечной координаты x или y.

Общие решения уравнений (41.04) имеют вид

$$X=A_1\cos(g_x x)+A_2\sin(g_x x),\quad Y=B_1\cos(g_y y)+B_2\sin(g_y y), \tag{41.06}$$

где A_1, A_2, B_1 и B_2 суть произвольные постоянные. Функция Π^e должна удовлетворять граничному условию (39.06), поэтому

$$\Pi^e=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=a,\ y=0 \text{ и } y=b \tag{41.07}$$

и функции X и Y должны удовлетворять следующим соотношениям:

$X=0$ при $x=0$, откуда $A_1=0$;

$X=0$ « $x=a$, « $A_2\sin(g_x a)=0$;

$Y=0$ « $y=0$, « $B_1=0$;

$Y=0$ « $y=b$, « $B_2\sin(g_y b)=0$.

Для того чтобы получить нетривиальное решение граничной задачи, необходимо выбрать числа g_x и g_y так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\sin(g_x a)=0,\ \sin(g_y b)=0, \tag{41.08}$$

т. е. взять

$$g_x=m\pi/a,\ g_y=n\pi/b, \tag{41.09}$$

где m и n суть целые числа 1, 2, 3, ... Таким образом получаем собственные функции данной граничной задачи в виде

$$\Pi^e=C^e\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad m,\ n=1,2,..., \tag{41.10}$$

где C^e — произвольная постоянная. Собственная функция (41.10) соответствует по формулам (41.05) и (41.09) собственному значению

$$g^2=(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2. \tag{41.11}$$

Заметим, что ни одно из чисел m или n нельзя брать равным нулю, так как это приводит к функции (41.10), тождественно равной нулю. Если же взять в качестве m или n отрицательное целое число, то нового решения не получим, так как это приведет лишь к изменению знака постоянной C^e в формуле (41.10).

Собственные функции (41.10) и собственные значения (41.11) исчерпывают все возможные решения граничной задачи. То же самое относится к полученному ниже решению граничной задачи для магнитных волн.

Собственная функция (41.10) и собственное значение (41.11) определяют электрическую волну, которая называется волной E_{mn} в прямоугольном волноводе.

Граничная задача для магнитных волн решается аналогичным образом: ищем функцию Π^m, которая должна удовлетворять двухмерному волновому уравнению (39.03) в виде произведения (41.01). Рассуждая таким же образом, как и выше, получаем для функций X и Y уравнения (41.04) и общие решения (41.06). Однако

граничные условия в этом случае будут иные, так как в силу формулы (40.03) должно быть

$$\frac{\partial \Pi^m}{\partial x}=0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=a, \quad \frac{\partial \Pi^m}{\partial y}=0 \quad \text{при } y=0 \text{ и } y=b, \tag{41.12}$$

поэтому

$dX/dx=0$ при $x=0$, откуда $g_x A_2=0$;
$dX/dx=0$ « $x=a$, « $g_x A_1 \sin(g_x a)=0$;
$dY/dy=0$ « $y=0$, « $g_y B_2=0$;
$dY/dy=0$ « $y=b$, « $g_y B_1 \sin(g_y b)=0$.

Таким образом, для получения нетривиального решения граничной задачи необходимо выбрать числа g_x и g_y, удовлетворяющие тем же самым уравнениям (41.08), которые были получены выше для электрических волн. Поэтому возможные значения g_x и g_y по-прежнему определяются формулами (41.09) с тем лишь отличием, что индексы m и n могут быть также равными нулю. Действительно, например, при $m=0$ имеем $X=A_1$ и функция $\Pi^m=XY$ в нуль не обращается.

Окончательно получаем собственные функции

$$\Pi^m = C^m \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}, \quad m,\ n=0,1,2\ldots \tag{41.13}$$

и собственные значения

$$g^2=(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2. \tag{41.14}$$

Они определяют магнитную волну, которая называется волной H_{mn} в прямоугольном волноводе.

Заметим, что среди магнитных волн в волноводе имеются волны H_{10}, $H_{20}, \ldots$, H_{01}, $H_{02}, \ldots$, однако волна H_{00}, у которой оба индекса равны нулю и $g^2=0$, отсутствует, так как по формулам (40.02) такой волне соответствовало бы электромагнитное поле, равное тождественно нулю. Отметим также, что поле волны H_{10} (а также волн H_{20}, $H_{30}, \ldots$) не зависит от координаты y. Подобная ей волна E_{10} не может существовать по следующей причине: поле такой волны не должно зависеть от координаты y, но так как при $y=0$ и $y=b$ должно быть $E_z=0$, то вследствие независимости E_z от y составляющая E_z должна тождественно обращаться в нуль. А это означает, что такой волны нет.

Рассмотрим структуру электромагнитных полей. Простейшая электрическая волна в прямоугольном волноводе есть волна E_{11}, у которой

$$\Pi^e = C^e \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{41.15}$$

Построим линии уровня функции Π^e. Так как в центре прямоугольника при $x=a/2$ и $y=b/2$ функция Π^e принимает максимальное значение, то вблизи него линии уровня имеют вид эллипсов, цент-

ры которых совпадают с центром прямоугольника, а полуоси направлены по осям x и y и относятся как $a:b$. По мере увеличения размера эллипса форма его искажается и он начинает все больше походить на прямоугольник со слегка закругленными углами. Наконец, линия уровня $\Pi^e=0$ есть не что иное, как сам периметр прямоугольника. Изображенные на рис. 35,*а* штриховые линии $\Pi^e=$ $=\text{const}$ по общим соображениям § 39 (см. рис. 32) дают силовые линии магнитного поля, а перпендикулярные к ним сплошные кривые на рис. 35,*а* дают электрические силовые линии.

Полученная картина силовых линий в волне E_{11} напоминает коаксиальную линию передачи (см. рис. 18,*в*). Создается такое впечатление, как будто в центре прямоугольного волновода находится проводник, на котором кончаются электрические силовые линии, а ток в проводнике охватывается кольцеобразными магнитными силовыми линиями. Однако сходимость силовых линий к центру прямоугольного сечения волновода кажущаяся, так как на самом деле электрические силовые линии — пространственные, а на рис. 34,*а* даны лишь их проекции на плоскость поперечного сечения. Если учесть, что по третьей формуле (39.05) составляющая E_z имеет максимальное значение в центре прямоугольника, то ясно, что вблизи центра силовые линии электрического поля идут в осевом направлении. Изменяющемуся во времени продольному электрическому полю соответствует ток смещения, направленный по оси волновода; именно этот ток смещения и охватывается магнитными силовыми линиями, изображенными на рис. 35,*а*.

Силовые линии электрического поля распространяющейся волны E_{11} в продольном сечении y, z изображены на рис. 35,*б*, из которого видно, что силовые линии начинаются на стенках и идут сначала перпендикулярно этим стенкам — в плоскости поперечного сечения. Затем, приближаясь к оси волновода, они отходят от этого сечения, идут в основном параллельно оси волновода и кончаются опять на стенке, подходя к ней под прямым углом в плоскости другого поперечного сечения. Картина силовых линий в плоскости продольного сечения обладает периодом, равным длине волны в волноводе Λ.

Структура электромагнитного поля волны E_{mn} в прямоугольном волноводе может быть получена следующим образом: если разбить сторону прямоугольника a на m равных частей, а сторону b на n равных частей и через соответствующие точки провести

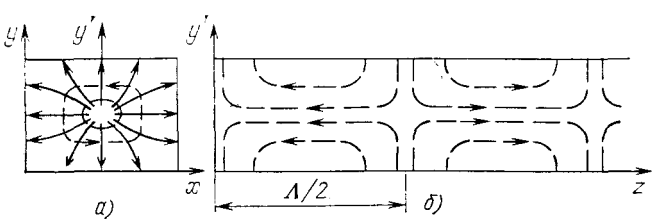


Рис. 35. Волна E_{11} в прямоугольном волноводе

прямые, параллельные осям x и y, то прямоугольное поперечное сечение волновода разобьется на $m \times n$ одинаковых прямоугольников. Легко показать, что в каждом малом прямоугольнике электромагнитное поле волны E_{mn} имеет ту же структуру, которую имеет в волноводе с таким поперечным сечением рассмотренная выше волна E_{11}. Поэтому электромагнитное поле волны E_{mn} в прямоугольном волноводе является лишь многократным повторением поля волны E_{11}, но в более мелком масштабе. Доказательство этих утверждений легко получается из сравнения формул (41.10) и (41.15).

Перейдем к рассмотрению магнитных волн. С практической точки зрения наиболее важна волна H_{10}, для которой

$$\Pi^m = C^m \cos\frac{\pi x}{a} \quad \text{и} \quad g = \frac{\pi}{a}. \tag{41.16}$$

С помощью формул (40.02) легко вычислить составляющие электромагнитного поля волны H_{10}:

$$\begin{gathered} E_x = 0, \quad E_y = \mathrm{i}\, kgC^m \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{ihz}, \quad E_z = 0, \\ H_x = -\mathrm{i}\, hgC^m \sin\frac{\pi x}{a}\, e^{ihz}, \quad H_y = 0, \quad H_z = g^2 C^m \cos\frac{\pi x}{a}\, e^{i\,hz}. \end{gathered} \tag{41.17}$$

Из этих формул видно, что электрическое поле волны H_{10} направлено по оси y, причем наибольшая густота силовых линий достигается при $x = a/2$. Магнитные силовые линии лежат в горизонтальных плоскостях, их проекции на плоскости поперечного сечения являются горизонтальными прямыми, изображенными на рис. 36,*а* штриховыми линиями. Если изображать силовые линии магнитного поля распространяющейся волны H_{10} в плоскости продольного сечения x, z, то это будут замкнутые кривые (рис. 36, *б*).

Структура поля волны H_{m0} является m-кратным повторением структуры волны H_{10} по оси x. Структура поля волны H_{01} та же, что и у волны H_{10}, но с заменой оси x на ось y и наоборот. Поле волны H_{0n} является n-кратным повторением поля волны H_{01} по оси y в уменьшенном масштабе.

Функция Π^m для волны H_{11} в прямоугольном волноводе определяется формулой

$$\Pi^m = C^m \cos\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}. \tag{41.18}$$

Линии уровня этой функции изображены на рис. 37,*а*. Эту картину легко построить, если учесть, что в каждой вершине прямоугольника функция (41.18) достигает своего максимального или минимального значения, так что вблизи каждой вершины прямоугольника линии уровня имеют вид эллипсов (точнее, вблизи каждого угла имеет значение лишь четверть эллипса). При удалении от вершины форма эллипсов искажается и они становятся

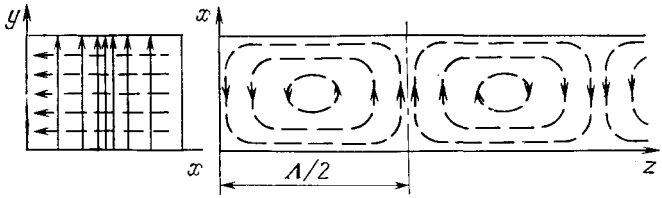


Рис. 36. Волна H_{10} в прямоугольном волноводе

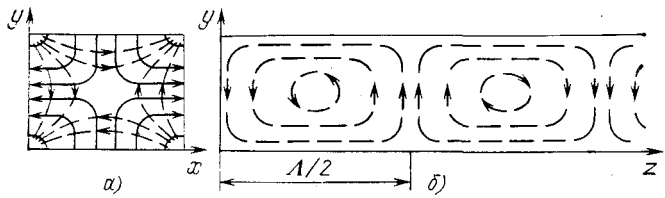


Рис. 37. Волна H_{11} в прямоугольном волноводе

похожими на гиперболы, имеющие в качестве асимптот прямые $x=a/2$; $y=b/2$, являющиеся линиями уровня $\Pi^{m}=0$.

Магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения изображены на рис. 37, *а* штриховой линией. Они являются пространственными кривыми, и их проекции на плоскость продольного сечения y, z для распространяющейся волны H_{11} изображены на рис. 37, *б*.

Структура поля волны H_{mn} ($m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$) связана со структурой волны H_{11} таким же образом, как структура поля волны E_{mn} связана со структурой волны E_{11} (см. выше).

Сравним между собой критические длины волн, которые определяются поперечным волновым числом g соответствующей волны в волноводе по формуле $g=2\pi/\lambda_0$. Волна H_{10} имеет наименьшее значение g, которое определяется формулой (41.16). Ему соответствует критическая длина волны $\lambda_0=2a$. Таким образом, на большей стороне прямоугольного волновода укладывается как раз половина критической длины волны λ_0. Все другие волны в прямоугольном волноводе имеют меньшие критические длины волн. Так, например, для волны H_{01} имеем $\lambda_0=2b$, и так как $a>b$, то это значение λ_0 меньше, чем для H_{10}. Для волн E_{11} и H_{11} величины g и λ_0 определяются формулами

$$g=\pi\sqrt{1/a^2+1/b^2},\quad \lambda_0=2/\sqrt{1/a^2+1/b^2}.$$

При условии $a<\sqrt{3}b=1{,}73b$ имеем

$$2\pi/a>\pi\sqrt{1/a^2+1/b^2},$$

поэтому волна H_{20} и все другие волны в прямоугольном волноводе, имеющие более высокие индексы m и n, чем рассмотренные выше четыре волны, обладают бо́льшими значениями g и, следо-

вательно, более короткими критическими длинами волн λ_0. При $\sqrt{3}b<a<2b$ вслед за волнами H_{10} и H_{01} непосредственно следует волна H_{20}. При $a=2b$ критические частоты волн H_{01} и H_{20} совпадают.

В § 39 было показано, что при длине волны, превышающей критическую, распространение в волноводе невозможно. Поэтому при условии $\lambda>2a$ все волны в прямоугольном волноводе (как электрические, так и магнитные) являются затухающими волнами, и волновод не может служить линией передачи в этом диапазоне. При укорочении волны, когда λ становится меньше $2a$, магнитная волна H_{10} становится распространяющейся, и с ее помощью можно передавать электромагнитную энергию по волноводу. При дальнейшем укорочении длины волны может также распространяться и волна H_{01}: так будет при $\lambda<2b$; в квадратном волноводе ($a=b$) критические значения волн H_{10} и H_{01} совпадают. Для более коротких волн число распространяющихся волн становится еще больше, в частности волны E_{11} и H_{11} могут также распространяться. Как правило, передача электромагнитной энергии по волноводам с помощью нескольких распространяющихся волн представляет значительные технические неудобства, поэтому для заданного диапазона частот размеры прямоугольного волновода обычно подбираются таким образом, чтобы в нем распространялась только волна H_{10}, а все остальные волны были затухающими.

В заключение остановимся на вырождении волн в прямоугольном волноводе. В граничных задачах бывают случаи, когда две или больше собственных функций соответствуют одному и тому же собственному значению. Это явление называется вырождением, а такие собственные значения называются вырожденными (кратными).

С такими случаями мы встречаемся в граничной задаче для электрических волн — при решении уравнения (39.03) с условием (39.08), или в граничной задаче для магнитных волн — при решении уравнения (39.03) с условием (40.03). Если будем для собственных значений этих задач писать последовательности $g^2_1, g^2_2, \ldots$ и приписывать каждому собственному значению одну собственную функцию, то при вырождении эти последовательности будут иметь одинаковые элементы. В прямоугольном волноводе с соизмеримыми сторонами a и b (т. е. когда отношение a/b является рациональным числом) всегда будет вырождение. В частности, в квадратном волноводе, при $a=b$, волны E_{mn} и E_{nm} $(m\neq n)$ будут иметь одинаковые собственные значения, хотя распределения их полей в пространстве не совпадают.

Если рассматривать задачу об электромагнитных волнах в волноводе как одну граничную задачу, то для прямоугольного волновода характерно особое вырождение, которое можно назвать вырождением E—H. Оно заключается в том, что поперечные волновые числа для волн E_{mn} и H_{mn} совпадают и, таким образом, все собственные значения, соответствующие волнам E_{mn}, являются

вырожденными. Невырожденные собственные значения могут иметь лишь волны H_{m0} и H_{0n}, так как электрические волны с теми же индексами не существуют. В частности, при $a>b$ собственное значение $g=\pi/a$ для волны H_{10} является всегда невырожденным.

Отмеченное вырождение E—H в прямоугольном волноводе приводит к тому, что вместо волн E_{mn} и H_{mn} в качестве основных решений уравнений поля можно брать любые линейные комбинации этих волн. В частности, можно составить такие линейные комбинации, для одной из которых $E_x\neq 0$, $H_x=0$, а для другой $H_x\neq 0$, $E_x=0$. Эти новые волны также можно назвать «электрическими» и «магнитными», но теперь эта классификация производится относительно оси x. Можно показать, что эти новые волны могут быть получены с помощью электрического и магнитного векторов Герца, имеющих по одной составляющей Π^e_x и Π^m_x.

Здесь не будут рассматриваться соответствующие формулы, так как в дальнейшем они не понадобятся (см., однако, § 56). Заметим, что вырождение E—H в волноводах другой формы, например в круглых, места не имеет.

§ 42. Система волн в круглом волноводе

Рассмотрим электрические и магнитные волны в волноводе с круговым поперечным сечением радиуса a или, кратко, в круглом волноводе. Для решения двухмерного волнового уравнения (39.03) внутри круглого волновода введем полярную систему координат r, φ с центром на оси волновода, после чего оно примет вид

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Pi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2}+g^2\Pi=0. \tag{42.01}$$

Решения этого уравнения были исследованы в § 22. Они имеют вид

$$\Pi=CJ_m(gr)\cos m\varphi \text{ или } \Pi=CJ_m(gr)\sin m\varphi, \tag{42.02}$$

где C — постоянная, а m — любое целое число, включая нуль; если $m=0$, то второе решение (42.02) обращается в нуль и существует только одно решение $\Pi=CJ_0(gr)$. Заметим, что функции $N_m(gr)$ или $H_m^{(1,2)}(gr)$ в данной задаче использовать не можем, так как они принимают бесконечные значения при $r=0$.

Так как функция Π^e должна удовлетворять граничному условию $\Pi^e=0$ при $r=a$, то для поперечного волнового числа g электрических волн в круглом волноводе получаем уравнение

$$J_m(ga)=0. \tag{42.03}$$

Обозначим n-й положительный корень уравнения $J_m(\nu)=0$ через ν_{mn}, тогда для электрических волн возможны значения $g=\nu_{mn}/a$. Электрическая волна с таким g, функция Π^e которой определяется формулами (42.02), называется волной E_{mn} в круглом волноводе.

Функция Π^m для магнитных волн в круглом волноводе также должна удовлетворять уравнению (42.01) и поэтому представляется в том же виде, что и функция Π в формулах (42.02). Гра-

ничное условие для нее имеет вид $\partial\Pi^m/\partial r=0$ при $r=a$, поэтому поперечное волновое число g магнитной волны должно удовлетворять уравнению

$$J'_m(ga)=0. \qquad (42.04)$$

Если через μ_{mn} обозначить n-й положительный корень уравнения $J'_m(\mu)=0$, то возможные значения g для магнитных волн в круглом волноводе имеют вид $g=\mu_{mn}/a$. Такое волновое число по определению соответствует волне H_{mn} в круглом волноводе. Здесь не будут приведены таблицы величин ν_{mn} и μ_{mn}, определяющих поперечные волновые числа волн в круглом волноводе. Заметим, что числа ν_{m1}, ν_{m2}, ... и μ_{m1}, μ_{m2}, ... образуют возрастающие последовательности, в которых наибольший интерес представляют числа ν_{m1} и μ_{m1}, соответствующие наименьшим значениям g и, следовательно, наибольшим значениям критических длин волн λ_0. Приведем таблицу значений λ_0 для наиболее важных волн в круглом волноводе.

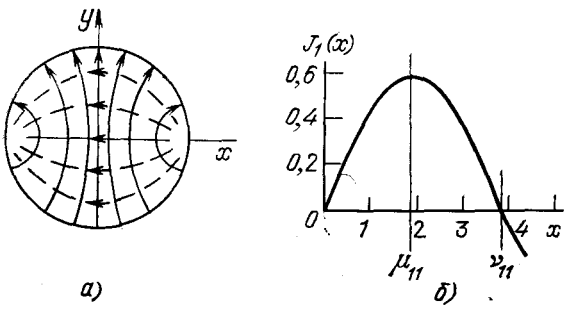
Таблица 1

Волна	E_{01}	E_{11}	E_{21}	H_{01}	H_{11}	H_{21}
$\lambda_0/2a$	1,31	0,82	0,61	0,82	1,71	1,05

Из табл. 1 видно, что наибольшее значение λ_0 соответствует магнитной волне H_{11}: для нее критическая длина волны равна 1,71 диаметра волновода. Функция Π^m волны H_{11} определяется формулой

$$\Pi^m=C^mJ_1(gr)\cos\varphi, \quad g=\mu_{11}/a, \quad \mu_{11}=1{,}841\ldots \qquad (42.05)$$

Линии уровня $\Pi^m=\text{const}$ для этой волны изображены на рис. 38,*а* сплошными линиями. Эти линии уровня согласно § 40 совпадают с электрическими силовыми линиями, которые нормальны к окружности волновода. Рисунок 38 легко построить, если учесть, что функция Бесселя $J_1(gr)$ имеет ход, изображенный на рис. 38,*б*,



а) *б)*

Рис. 38. Волна H_{11} в круглом волноводе

благодаря чему $J_1(gr)$ принимает максимальное значение при $r=a$. Поэтому функция Π^m достигает максимального и минимального значения на концах горизонтального диаметра при $r=a$, $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$. Вблизи этих двух точек линии уровня имеют вид слегка искаженных эллипсов, подходящих к окружности волновода под прямым углом. Вертикальный диаметр волновода, соответствующий значениям $\varphi=\pm\pi/2$, также является линией уровня, поскольку на нем $\Pi^m=0$. Ближайшие к нему линии уровня почти параллельны ему и лишь слегка изгибаются, чтобы подойти к стенке нормально. Таким образом, распределение электрических силовых линий волны H_{11} в круглом волноводе весьма похоже на ту же картину для волны H_{10} в прямоугольном волноводе (см. рис. 36,*а*): в обоих случаях имеется пучок электрических силовых линий, идущий в вертикальном направлении вдоль оси симметрии волновода.

Магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения изображены на рис. 38,*а* штриховыми линиями, ортогональными сплошным линиям. Ход магнитных силовых линий волны H_{11} в круглом волноводе также напоминает волну H_{10} в прямоугольном волноводе. В пространстве эти силовые линии образуют замкнутые петли, проекции которых на продольное сечение x, z подобны изображенным на рис. 37,*б*.

Заметим, что поперечному волновому числу $g=\mu_{11}/a$ помимо функции (42.05) соответствует также функция

$$\Pi^m=C^mJ_1(gr)\sin\varphi. \qquad (42.06)$$

Картина силовых линий, получаемая из последней функции, отличается от картины на рис. 38,*а* лишь поворотом на 90°. Поэтому собственное значение $g=\mu_{11}/a$ является двухкратно вырожденным, так как ему соответствуют две собственные функции (42.05) и (42.06).

Можно вообще сказать, что любое собственное значение g, соответствующее несимметричной электрической или магнитной волне, т. е. имеющее индекс $m=1, 2, 3, \ldots$, является вырожденным, так как ему соответствуют по крайней мере две собственные функции (42.02). Это вырождение называется поляризационным (или поворотным) вырождением и является следствием того, что круглый волновод обладает симметрией вращения.

Согласно сводке в начале параграфа следующей по величине критической длиной волны обладает электрическая волна E_{01}. Для волны E_{01}

$$\Pi^e=C^eJ_0(gr),\quad g=\nu_{01}/a,\quad \nu_{01}=2{,}405\ldots \qquad (42.07)$$

Собственное значение $g=\nu_{01}/a$ является невырожденным, так как ему соответствует только одна собственная функция (42.07). Нетрудно показать, что собственные значения всех симметричных электрических волн E_{0n} являются невырожденными.

Линии уровня $\Pi^e=\text{const}$ для волны E_{01} изображены на рис. 39,*а*; на рис. 39,*б* изображена зависимость функции $J_0(gr)$ от аргумента gr. Магнитные силовые линии волны E_{01}, совпадающие с

линиями $\Pi^e = \text{const}$, суть окружности, а электрические силовые линии в плоскости поперечного сечения идут в радиальном направлении и как бы сходятся в центре. В этом отношении волна E_{01} похожа на поперечную волну в коаксиальной линии (см. рис. 18,*в*). Однако на самом деле электрические силовые линии волны E_{01} расположены вне плоскости поперечного сечения и в плоскости продольного сечения ведут себя качественно так же, как и электрические силовые линии волны E_{11} в прямоугольном волноводе (см. рис. 35,*б*). Вообще нужно отметить, что структура электромагнитного поля волны E_{11} в прямоугольном волноводе и волны E_{01} в круглом чрезвычайно похожи одна на другую.

Выше при исследовании волн в прямоугольном и круглом волноводах обращалось основное внимание на электромагнитные поля этих волн. Заметим, что тангенциальные составляющие магнитного поля на стенке волновода позволяют по формуле (24.04) вычислить также поверхностную плотность электрического тока, текущего по стенке. Для электрических волн в волноводе выполняется соотношение $H_z = 0$, поэтому плотность тока имеет только составляющую i_z. Таким образом, при прохождении через волновод электрических волн в стенках волновода возбуждаются только продольные токи. В этом отношении электрические волны в волноводе аналогичны поперечным волнам, изученным в § 29.

Для магнитных волн $H_z \neq 0$, поэтому поверхностная плотность тока магнитных волн имеет кроме продольной составляющей также и поперечные составляющие. В частности, поперечными составляющими тока обладают изученные выше волны: H_{10} в прямоугольном волноводе и H_{11} в круглом волноводе; эти волны, как легко видеть из рис. 36 и 38, несут и продольные токи.

В круглом волноводе существует симметричная магнитная волна H_{01}, несущая только поперечные токи. Это исключительное свойство волны H_{01} резко выделяет ее среди всех других волн в волноводах, так как благодаря ему затухание этой волны падает с ростом частоты (см. § 52), и потому она способна с малыми потерями переносить электромагнитную энергию на большие расстояния. Для волны H_{01} в круглом волноводе

$$\Pi^m = C^m J_0(gr), \quad g = \mu_{01}/a, \quad \mu_{01} = 3{,}832... \tag{42.08}$$

Структура электромагнитного поля этой волны изображена на рис. 40: электрические силовые линии этой волны суть окружности, а магнитные силовые линии в плоскости поперечного сечения

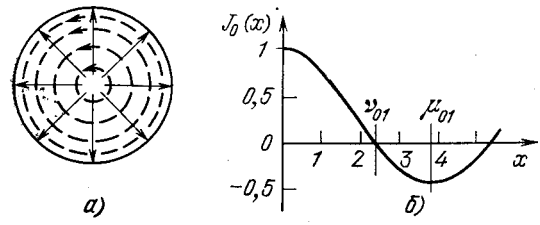


Рис. 39. Волна E_{01} в круглом волноводе

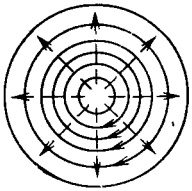


Рис. 40. Волна H_{01} в круглом волноводе

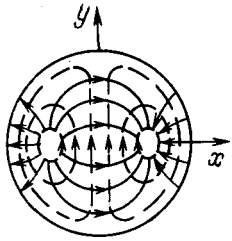


Рис. 41. Волна E_{11} в круглом волноводе

идут по радиусам. Существенно, что для данной волны $H_\varphi=0$ (из-за ее симметрии), и поэтому по формуле (24.04) имеем $i_z=0$, так что данная волна возбуждает только токи, текущие по окружности волновода. Из таблицы в начале параграфа видно, что собственное значение $g=\mu_{01}/a$ является вырожденным, так как той же критической волной обладает и волна E_{11} (точнее, две волны E_{11}, отличающиеся друг от друга поворотом на 90°). Это вырождение является следствием соотношения (22.13) для бесселевых функций, благодаря которому $\mu_{0n}=\nu_{1n}$ $(n=1, 2, ...)$.

Волна E_{11} в круглом волноводе имеет функцию

$$\Pi^e=C^eJ_1(gr)\cos\varphi,\quad g=\nu_{11}/a=\mu_{01}/a. \tag{42.09}$$

Линии уровня этой функции изображены на рис. 41. Картину этих линий легко построить, если учесть, что на горизонтальном диаметре, т. е. при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, при $gr=\mu_{11}<ga$ достигается согласно рис. 38 максимум и минимум функции Π^e, вблизи которых линии уровня имеют эллиптическую форму. Кроме того, вертикальный диаметр также является линией уровня, так как $\Pi^e=0$ при $\varphi=\pm\pi/2$. Эти линии уровня дают магнитные силовые линии, а электрические линии, им ортогональные, изображены на рис. 41 штриховой линией, они напоминают двухпроводную экранированную линию.

Вырождение собственного значения $g=\mu_{01}/a$, соответствующего волне H_{01}, делает проблему передачи энергии с помощью такой волны довольно трудной, так как при небольших возмущениях формы волновода волна H_{01} имеет тенденцию превращаться в волну E_{11}, обладающую той же фазовой скоростью, но гораздо бо́льшим затуханием (см. также § 53).

§ 43. О волноводах сложной формы

Изучив электромагнитные волны в волноводах простейшей формы (круглом и прямоугольном), мы убедились, что критические длины волн для этих волноводов того же порядка, что и наибольший поперечный размер волновода. Сказанное относится к простейшим электромагнитным волнам в волноводе, имеющем наи-

большие длины волн; волны с более высокими номерами имеют более короткие критические длины волн.

Действительно, согласно § 41 значение λ_0 для волны H_{10} в прямоугольном волноводе вдвое превышает наибольшую сторону волновода. Согласно § 42 значение λ_0 для волны H_{11} в круглом волноводе в 1,71 раза превышает диаметр волновода. Однако не нужно думать, что эта закономерность является общей и имеет место для волноводов любой формы. Легко показать, что, выбирая форму поперечного сечения волновода надлежащим образом, можно добиться того, что значение λ_0 для этого волновода будет во много раз превосходить его поперечные габариты.

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим (рис. 42,*а*) прямоугольный волновод с очень малой стороной b. Поскольку значение λ_0 для волны H_{10} в таком волноводе не зависит от стороны b, оно по-прежнему будет равно $2a$. Если теперь свернуть такой волновод по спирали (рис. 42,*в*) или по ломаной линии (рис. 42,*б*), то в первом приближении критическая длина волны будет по-прежнему равна удвоенной длине спирали или ломаной линии и гораздо больше наибольшего поперечного размера свернутого волновода.

Существует другой принцип, позволяющий создать волновод с критической длиной волны, во много раз превышающей поперечные размеры волновода. Этот принцип легко понять, если учесть, что обычный резонансный контур имеет резонансную длину волны, во много раз превосходящую его размеры, а критическая длина волны соответствует резонансной частоте в мембранных задачах (см. конец § 40). На рис. 43,*а* изображено поперечное сечение «гантельного» волновода, в котором малый плоскопараллель-

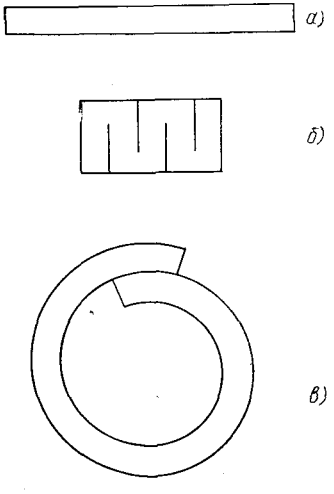


Рис. 42. Свернутые волноводы

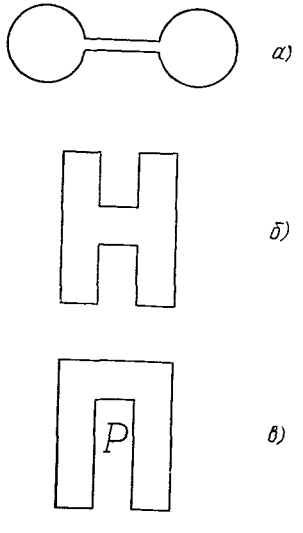


Рис. 43. Гантельный, Н-образный и П-образный волноводы

ный зазор играет роль конденсатора, где сосредоточено электрическое поле, а прилегающие расширения, заполненные продольным магнитным полем, аналогичны катушкам индуктивности. Такое распределение полей характерно для основной волны, у которой критическая длина волны λ_0 велика (расчет λ_0 дан в задаче 1 к гл. XV), а у остальных волн λ_0 порядка поперечных размеров волновода или меньше.

Часто применяются также Н-волноводы и П-волноводы, поперечные сечения которых напоминают очертания букв Н и П (см. рис. 43,*б* и *в*). Можно представить, что П-волновод получается из обычного прямоугольного волновода выдвижением добавочной металлической пластины P, а основная волна в таком волноводе — искажением волны H_{10} в прямоугольном волноводе. Электрическое поле волны сосредоточивается в зазоре между пластиной P и верхней стенкой волновода, а критическая длина волны увеличивается — в тем большей степени, чем меньше зазор. Аналогичными свойствами обладает Н-волновод.

Таким образом, через волноводы сложной формы можно передавать более длинные волны, чем через простые волноводы с теми же поперечными габаритами. Необходимость в волноводах сложной формы возникает лишь в особых случаях, так как обычно для передачи более длинных волн целесообразнее использовать коаксиальные или двухпроводные линии.

§ 44. Распространяющиеся и затухающие волны в волноводах

Рассмотрим более подробно физические свойства распространяющихся и затухающих волн в волноводах различной формы. Для этого прежде всего изучим энергетические свойства таких волн. Комплексная мощность, переносимая данным электромагнитным полем через поперечное сечение волновода, определяется интегралом

$$\hat{\Sigma} = \int\int \hat{\mathfrak{S}}_z \, dxdy, \tag{44.01}$$

взятым по поперечному сечению волновода $S_\perp$. Подынтегральное выражение

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) \tag{44.02}$$

является продольной составляющей комплексного вектора Умова — Пойнтинга

$$\hat{\mathfrak{S}} = \frac{c}{8\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*], \tag{44.03}$$

введенного в § 6.

Вычислим составляющую $\hat{\mathfrak{S}}_z$ для распространяющихся электрических и магнитных волн, поля которых определяются форму-

лами (39.05) и (40.02) при вещественных значениях h. Для обоих типов волн получаем сходные формулы:

для электрических волн

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} hk\left(\left|\frac{\partial \Pi^e}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi^e}{\partial y}\right|^2\right), \tag{44.04}$$

для магнитных

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} hk\left(\left|\frac{\partial \Pi^m}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi^m}{\partial y}\right|^2\right). \tag{44.05}$$

Таким образом, распространяющиеся волны переносят лишь активную мощность, причем в том направлении, в котором они сами распространяются: волны, распространяющиеся в направлении $+z$ ($h>0$), переносят активную мощность вдоль оси z ($\hat{\mathfrak{S}}_z>0$), а волны, распространяющиеся в направлении $-z$ ($h<0$), несут энергию в направлении $-z$. Мощность, переносимая распространяющейся волной, не зависит от z, поскольку амплитуда волны при ее распространении остается постоянной.

Производя то же вычисление для затухающих волн (при чисто мнимых значениях h), получаем:

для электрических волн

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} hk\left(\left|\frac{\partial \Pi^e}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi^e}{\partial y}\right|^2\right) e^{2ihz}; \tag{44.06}$$

для магнитных волн

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} h^* k\left(\left|\frac{\partial \Pi^m}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi^m}{\partial y}\right|^2\right) e^{2ihz}. \tag{44.07}$$

Из этих формул видно, что затухающие волны переносят лишь реактивную мощность, причем величина этой мощности зависит от z экспоненциально, так что по мере затухания волны происходит и уменьшение переносимой ею реактивной мощности.

Рассмотрим, например, диполь, возбуждающий электромагнитное поле в волноводе (рис. 44). Вдали от него будут распространяться волны, например, в прямоугольном волноводе — волна H_{10}, имеющая простейшую структуру. Вблизи же, так сказать в ближней зоне диполя, поле имеет более сложную структуру, напоминающую структуру поля в свободном пространстве. В этой области имеют значение затухающие волны, возбуждаемые диполем и переносящие лишь реактивную мощность.

Можно показать, что благодаря ортогональности различных волн в волноводе (см. § 75) комплексная мощность, переносимая суммой распространяющихся и затухающих волн одного и того же направления (например, распространяющихся и затухающих в положительном направлении оси z) равна сумме мощностей, переносимых каждой волной в отдельности. В данном выше примере реактивная мощность излучения диполя обусловлена всеми затухающими волнами, а активная мощность излучения — волнами, распространяющимися от диполя. Если частота такова, что рас-

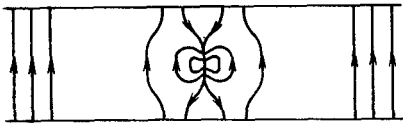


Рис. 44. Диполь в бесконечном волноводе

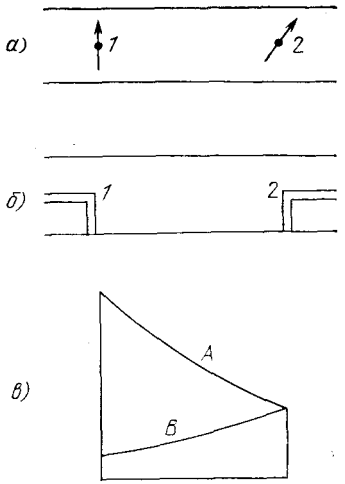


Рис. 45. Передача мощности по волноводу затухающей волной

пространяющихся волн нет, то диполь не может сообщать активной мощности бесконечному волноводу.

Последний вывод относится лишь к бесконечному идеально проводящему волноводу, в котором отсутствуют какие-либо устройства, способные потреблять электромагнитную энергию. Если же, например, на конечном расстоянии от излучающего диполя *1* находится приемный диполь *2* (рис. 45,*а*), то даже при отсутствии распространяющихся волн в месте нахождения приемного диполя возбуждается слабое электромагнитное поле, обусловленное затухающими волнами. Приемный диполь извлекает из этого поля небольшую активную мощность.

Описанная схема является, в сущности, простейшим примером волнового аттенюатора (ослабителя). Обычная конструкция волноводного ослабителя состоит из двух линий передачи (например, коаксиальных, как на рис. 45,*б*), разделенных отрезком волновода. Характерное для волноводного ослабителя явление переноса активной мощности затухающими волнами не находится в противоречии со сказанным выше, поскольку ранее говорилось о волнах, затухающих в одном направлении и возбуждаемых, например, диполем в бесконечном волноводе. Если же имеется второй (приемный) диполь, то он также возбуждает затухающие волны, и в отрезке волновода между двумя диполями существуют две затухающие волны (рис. 45,*в*): прямая затухающая волна A и встречная затухающая волна B. Такое поле способно переносить некоторую активную мощность, как нетрудно показать аналитически. В самом деле, если рассмотреть сумму прямой и встречной электрических волн, т. е. вместо выражения (39.01) взять

$$\Pi_z^e = \Pi^e(x, y)\,(e^{ihz} + R\,e^{-ihz}), \tag{44.08}$$

где R — коэффициент отражения данной волны, то

$$\operatorname{Re}\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} h \left(\left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} \right|^2 \right) \operatorname{Im} h \operatorname{Im} R, \tag{44.09}$$

и аналогичное выражение получаем (с заменой Π^e на Π^m) для магнитной волны (см. задачу 1). Отсюда видно, что при наличии

прямой и встречной («отраженной») затухающих волн по волноводу может передаваться активная мощность.

Возвращаясь к волноводам, в которых при данной частоте имеются распространяющиеся волны, можно сказать, что распространяющиеся волны определяют электромагнитное поле в дальней зоне излучателя, где затухающими волнами уже можно пренебречь, так как они существенны лишь в ближней зоне излучателя. Интересно отметить, что в большинстве случаев переход от ближней зоны к дальней в волноводе происходит, как для диполя в свободном пространстве, на расстояниях порядка длины волны; при этом под длиной волны подразумевается длина волны Λ в волноводе. Действительно, размеры волновода на практике выбирают обычно так, чтобы при данной частоте в нем могла распространяться только одна волна, имеющая поперечное волновое число g_1, продольное волновое число $h_1 = \sqrt{k^2 - g_1^2}$ и длину волны $\Lambda = 2\pi/h_1$ (в прямоугольном волноводе это волна H_{10}, см. § 41). Все другие волны являются затухающими, причем наименьшим затуханием обладает волна с наименьшим (после g_1) значением g_2 поперечного волнового числа; продольное волновое число этой волны $h_2 = \sqrt{k^2 - g_2^2}$, так что ее коэффициент затухания $|h_2| = \sqrt{g_2^2 - k^2}$. Так как волновое число k обычно лежит вблизи середины интервала $g_1 < k < g_2$, то коэффициент затухания $|h_2|$ имеет тот же порядок, что и волновое число h_1. Поэтому экспонента $e^{-|h_2|z}$, определяющая зависимость этой затухающей волны от z, становится малой уже при $z \sim \Lambda$, где

$$|h_2| z \sim 2\pi |h_2|/h_1 \sim 2\pi. \tag{44.10}$$

Эти рассуждения применимы не только к затухающим волнам, возбуждаемым диполем, но и к затухающим волнам, возникающим в местах, где нарушается однородность волновода, например, где находятся пассивные вибраторы (стержни), диафрагмы, различные расширения или изгибы волноводов и т. п. В таких местах всегда возникают затухающие волны, обусловливающие сложную структуру электромагнитного поля в непосредственной окрестности этих мест, или, иначе говоря, в соответствующих ближних зонах.

Свойства электромагнитных волн в волноводе становятся физически более наглядными, если учесть связь этих волн с плоскими волнами, распространяющимися в свободном пространстве. Исследование этой связи мы начнем с простейшей волны H_{10} в прямоугольном волноводе. Для нее согласно формулам (40.01) и (41.16) можно написать

$$\Pi_z^m = C^m \cos gx\, e^{ihz} = (C^m/2)\,[e^{i(gx+hz)} + e^{i(-gx+hz)}], \tag{44.11}$$

откуда видно, что волна H_{10} может быть представлена в виде двух плоских волн (подробный анализ полей дан в задаче 2).

Чтобы определить направления распространения этих волн, введем, учитывая соотношение (39.04), угол ϑ, лежащий в интервале $0<\vartheta<\pi/2$ и удовлетворяющей соотношениям

$$g=k\sin\vartheta,\quad h=k\cos\vartheta\quad (h>0). \tag{44.12}$$

Отсюда видно, что указанные выше плоские волны распространяются в направлениях *1* и *2* (рис. 46,*а*), составляющих с осью волновода угол ϑ.

В результате сложения плоских волн возникает электромагнитное поле, имеющее вдоль оси z характер бегущей волны, а вдоль оси x — характер стоячей волны, так как в этом направлении плоские волны распространяются навстречу друг другу. Электрическое поле плоских волн имеет только составляющую E_y и, следовательно, оно перпендикулярно оси волновода. Так как по оси x поле образует стоячую волну, на некоторых плоскостях $x=\text{const}$, а именно при $x=0,\ \pm a,\ \pm 2a, \ldots$, электрическое поле обращается в нуль ($E_y=0$). Поэтому, рассматривая суперпозицию двух плоских волн (44.11) в неограниченном пространстве, можем поставить при $x=0$ и $x=a$ идеально проводящие плоскости, на которых будет удовлетворяться граничное условие $E_y=0$ без возмущения поля. Такие же плоскости можно поставить например, при $y=0$ и $y=b$, они также будут нормальны к электрическим силовым линиям. Окончательно можно сказать, что простейшую волну H_{10} можно рассматривать как результат суперпозиции двух плоских волн в пределах объема волновода.

Ранее (в § 28) была показана связь волн в передающих линиях первой группы с плоскими волнами в свободном пространстве. Связь волноводных волн с плоскими волнами более сложна, так как здесь нужно брать по крайней мере две волны, распространяющиеся под углом ϑ к оси волновода. Эта связь позволяет наглядно понять как продольный характер волноводных волн, так и наличие критических частот. Действительно, при приближении угла ϑ к $\pi/2$ (рис. 46,*а*) расстояние между узлами электрического поля по оси x уменьшается и при $\vartheta=\pi/2$ оказывается равным $\lambda/2$, где

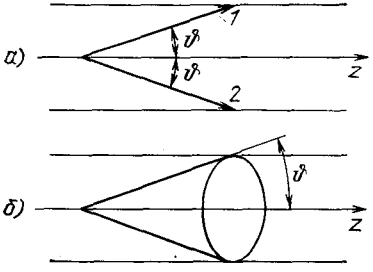


Рис. 46. Направления распространения плоских волн, образующих волну в волноводе:
а — два направления; *б* — конус направлений

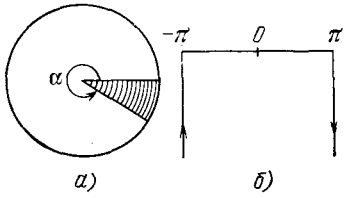


Рис. 47. Волновод с клиновидной перегородкой (*а*) и путь интегрирования для него (*б*)

λ — рабочая длина волны. Если длина широкой стенки волновода a такова, что $a<\lambda/2$, т. е. $\lambda>2a$, то любая суперпозиция плоских волн не будет удовлетворять граничным условиям на стенках волновода. Распространение волны в волноводе в этом случае невозможно, и в нем существуют лишь затухающие волны, как показано в § 41. Затухающая волна может быть представлена в виде суммы двух обобщенных (неоднородных) волн, введенных в § 14.

При поверхностном изучении теории волн часто создается впечатление, что затухание гармонических волн в пространстве всегда вызывается поглощением их энергии. Однако затухание волн в идеальных волноводах, разумеется, с поглощением никак не связано. При полном внутреннем отражении поле во второй среде имеет характер волны, затухающей при удалении от границы раздела (см. § 16), что также обусловлено формированием неоднородной плоской волны, а не поглощением.

Соотношения (44.12) легко обобщаются на волны H_{m0} и H_{0n}. Нетрудно также показать, что волну H_{mn} ($m\neq 0$ и $n\neq 0$) и E_{mn} можно разложить на четыре плоские волны (задача 2).

В круглых волноводах и в некоторых других волноводах функции Π^e и Π^m могут быть представлены в виде (см. задачу 3)

$$\Pi(x,\ y)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, e^{ig\,(x\cos\psi+y\sin\psi)}\,d\psi, \tag{44.13}$$

а это значит, что распространяющаяся волна также разлагается на плоские волны, направления распространения которых образуют в пространстве круговой конус, ось вращения которого совпадает с осью z (рис. 46,*б*). Угол раствора ϑ этого конуса связан с продольным и поперечным волновыми числами данной волны соотношениями (44.12).

Однако представление (44.13) годится не всегда, в общем случае к нему надо добавить разложение по обобщенным плоским волнам, которым соответствуют комплексные значения ψ. Например, в круглом волноводе с клиновидной перегородкой $\alpha<\varphi<2\pi$ (рис. 47,*а*) функции Π^e и Π^m получаются в виде

$$\Pi^e=C^e J_\nu(gr)\sin\nu\varphi,\quad \Pi^m=C^m J_\nu(gr)\cos\nu\varphi, \tag{44.14}$$

где индекс ν, как правило, не является целым (см. задачу 4); тогда представление (22.18) для функции Бесселя неприменимо и должно быть заменено представлением

$$J_\nu(gr)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi-i\infty}^{\pi-i\infty} e^{i(gr\sin\psi-\nu\psi)}\,d\psi \tag{44.15}$$

с путем интегрирования, изображенным на рис. 47,*б*. Это значит, что для разложения распространяющихся волн в таком волноводе необходимо привлечь неоднородные (в направлениях x и y) плоские волны (задача 5).

Представление волноводных волн в виде суперпозиции плоских волн позволяет без вычислений решить задачу о волноводе, запол-

ненным различными средами при $z<0$ и $z>0$ (ср. с рис. 21 для коаксиальной линии); а именно, волне E, падающей на границу раздела $z=0$, соответствуют коэффициенты (15.12), а волне H — коэффициенты (15.18), причем роль угла падения играет угол ϑ [см. рис. 46 и формулу (44.12)].

Между волноводами и длинными линиями, рассмотренными в гл. V и VI, имеется некоторое сходство: и там и тут в рабочем диапазоне частот обычно распространяется и эффективно переносит энергию только одна волна. При наличии неоднородностей в волноводе (например, нагрузок, разветвлений, расширений, изгибов и т. д.) вблизи каждой неоднородности возникают ближние поля, т. е. затухающие волны, однако вдали от неоднородности поле всегда представляется в виде суммы прямой и встречной распространяющейся волны. Для данного типа неоднородности всегда можно подобрать эквивалентную схему, имеющую *при данной частоте* те же соотношения между прямыми и встречными распространяющимися волнами, что и реальная волноводная система. При этом, однако, нужно иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, эквивалентную схему можно построить лишь в случае, когда с помощью электродинамических методов вычислены (или же измерены на опыте) коэффициенты отражения и прохождения или другие величины, характеризующие распространяющиеся волны в реальной волноводной системе. Иначе говоря, эквивалентная схема служит не для решения электродинамической задачи, а является одним из способов представления готового решения, полученного другим методом. Во-вторых, эквивалентная схема годится лишь для представления поля в дальней зоне и может давать совершенно ошибочные результаты для ближней зоны.

§ 45. Волноводные свойства коаксиальных и полосковых линий

В коаксиальной линии, т. е. в пространстве между двумя коаксиальными проводниками с радиусами a и b (см. рис. 24), существуют волноводные волны электрического и магнитного типов. Электрические волны в коаксиальной линии получаются по формулам (39.05) из функции Π^z, удовлетворяющей уравнению (42.01). Для коаксиальной линии решение этого уравнения нужно брать не в виде (42.02), а в более общем виде

$$\Pi^e=[CJ_m(gr)+DN_m(gr)]\cos m\varphi \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{45.01}$$

или

$$\Pi^e=[CJ_m(gr)+DN_m(gr)]\sin m\varphi \quad (m=1,\ 2,\ldots), \tag{45.02}$$

так как рассматривается решение волнового уравнения в кольцеобразной области $a<r<b$, где обе функции $J_m(gr)$ и $N_m(gr)$ принимают конечные значения. Функция Π^e должна удовлетворять граничным условиям

$$\Pi^e=0 \text{ при } r=a \text{ и } r=b, \tag{45.03}$$

что приводит к уравнению

$$J_m(ga)N_m(gb)-N_m(ga)J_m(gb)=0 \qquad (45.04)$$

для поперечного волнового числа g. В результате решения этого трансцендентного уравнения определяются поперечные волновые числа и критические длины электрических волн E_{mn} в коаксиальной линии [m есть азимутальный индекс, а n означает номер корня уравнения (45.04) при данном m].

Исследование магнитных волн в коаксиальной линии производится таким же путем. Функция Π^m для магнитных волн также записывается в виде (45.01) или (45.02), и граничные условия

$$\partial\Pi^m/\partial r=0 \text{ при } r=a \text{ и } r=b \qquad (45.05)$$

приводят к уравнению

$$J'_m(ga)N'_m(gb)-N'_m(ga)J'_m(gb)=0, \qquad (45.06)$$

определяющему поперечные волновые числа магнитных волн H_{mn} в коаксиальной линии.

Вывод и исследование уравнений (45.04) и (45.06) даны в задаче 6. Заметим, что получающиеся из них волны E_{mn} и H_{mn} не находят практического применения для передачи электромагнитной энергии по коаксиальной линии. Приведем лишь приближенные формулы для простейших волноводных волн. Наибольшей критической длиной волны обладает магнитная волна H_{11}, у которой

$$\lambda_0\approx\pi(a+b), \qquad (45.07)$$

и таким образом на средней окружности радиуса $(a+b)/2$ как раз укладывается критическая волна. Следующей критической длиной волны обладает волна E_{01}, у которой

$$\lambda_0\approx 2(b-a), \qquad (45.08)$$

так что на зазоре между проводниками (шириной $b-a$) укладывается половина критической волны. Волна H_{01} имеет критическую длину волны, близкую к (45.08). Остальные волноводные волны коаксиальной линии имеют еще меньшие критические длины волн.

В полосковой линии, помимо рассмотренной в § 37 квазипоперечной волны, могут распространяться волны высших типов (высшие волны); это происходит при повышенных частотах, когда уже не удовлетворяются условия (37.08). Высшие волны обычно не называют волноводными, поскольку полосковая линия — открытая система, в которой распространение может сопровождаться излучением.

Критические длины волн для полосковой линии всего проще найти при условии $a\gg b$, когда основная часть поля сосредоточена в объеме с поперечным сечением $a\times b$. Этот объем можно приближенно (пренебрегая краевыми эффектами) трактовать как прямоугольный волновод, заполненный средой с проницаемостями ε и μ. Однако на вертикальных сторонах этого волновода следует ставить условие $H_t=0$, в то время как на горизонтальных стенках ставится традиционное граничное условие $E_t=0$. Условие $H_t=0$ —

это приближенное условие для открытой границы (разомкнутого конца; ср. рис. 27), а противоположное условие $E_t=0$ соответствует закрытой границе (стенке, осуществляющей короткое замыкание).

В таком прямоугольном волноводе также имеются (см. задачу 7) волны E_{mn} и H_{mn}. Их поперечные волновые числа определяются теми же формулами (41.11) и (41.14), однако распределения полей иные, чему у волн E_{mn} и H_{mn}, рассмотренных в § 41. Наименьшее значение g имеет волна E_{10}, которая может распространяться при $k\sqrt{\varepsilon\mu}>\pi/a$, т. е. при $\lambda<2a\sqrt{\varepsilon\mu}$.

При уменьшении отношения a/b проведенный анализ становится все более грубым. Можно лишь сказать, что при $a<b$ наименьшее значение g имеет волна E_{10}, у которой $g\sim\pi/b$, но обычно это значение g комплексно, так что распространение волны E_{10} происходит с затуханием из-за излучения.

Вернемся к коаксиальной линии, где излучение отсутствует. В этой линии основное значение имеет поперечная волна. Расчет коаксиальной линии производится обычно с помощью телеграфных уравнений, позволяющих рассмотреть неоднородные линии, линии с различными оконечными нагрузками и т. д. Отметим еще раз, что телеграфные уравнения учитывают (см. гл. V и VI) только поперечную волну, а волноводные волны в расчет не принимают. На самом деле волноводные волны присутствуют в коаксиальной линии вблизи всех мест, где нарушается однородность коаксиальной линии.

Если рассмотреть, например, сочленение одной коаксиальной линии с другой линией большего радиуса b (рис. 48,*а*), то вблизи плоскости сочленения линии электрического поля не могут идти по радиусам, как в однородной коаксиальной линии, так как они должны быть перпендикулярные стенке AB. Вследствие этого вблизи плоскости сочленения электромагнитное поле имеет сложную структуру, связанную с наличием затухающих волноводных волн в ближней зоне данной неоднородности. С подобным же явлением мы столкнулись при рассмотрении волноводов, где протяженность ближней зоны по порядку величины была равна Λ. Оценим протяженность ближней зоны в коаксиальных линиях при условии $kb\ll 1$, которое сформулировано в § 35. Это условие приводит к тому, что все волноводные волны будут сильно затухать, так как в выражении для продольных волновых чисел этих волн $h=\sqrt{k^2-g^2}$ первое слагаемое под знаком радикала во много раз меньше второго слагаемого. Действительно, по формулам (45.07) и (45.08) величина g имеет порядок $2/b$ (или больше) и поэтому

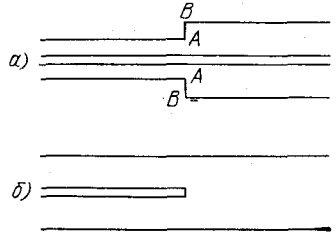


Рис. 48. Стык двух линий передачи:
а — двух линий передачи с различными волновыми сопротивлениями; *б* — коаксиальной линии и волновода

для волноводных волн можно считать $h \approx ig$, $g \gtrsim 2/b$. Отсюда видно, что при $kb \ll 1$ протяженность ближней зоны в коаксиальных линиях по порядку величины равна b, т. е. поперечному размеру коаксиальной линии, и во много раз меньше длины волны λ. Таким образом, волноводные волны успевают затухнуть на таких расстояниях от плоскости сочленения на рис. 48,*а*, на которых распространяющаяся волна еще сохраняет практически ту же фазу, что и на самой плоскости сочленения. Поэтому телеграфные уравнения позволяют решить задачу об отражении поперечной волны от стыка двух коаксиальных линий, не прибегая к рассмотрению волноводных волн, и дают результаты, близкие к истине.

При расчетах других типов неоднородностей в коаксиальных линиях телеграфные уравнения также дают правильные результаты, если выполняется условие $kb \ll 1$. Если же это условие не выполняется, то коэффициент затухания волноводных волн получается меньшим, протяженность ближней зоны растет, и вследствие этого при анализе различных неоднородностей необходимо принимать во внимание волноводные волны. В этом случае телеграфные уравнения становятся неприменимыми. Если же хотя бы одна из этих волн распространяется, то непригодность телеграфных уравнений становится очевидной, поскольку в этом случае волноводная волна способна переносить электромагнитную энергию на равных правах с поперечной волной.

Приведенные выше соображения поясняют, почему коэффициент отражения от стыка двух волноводов или от стыка волновода и коаксиальной линии (рис. 48,*б*) не может быть рассчитан по формуле

$$R = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2), \tag{45.09}$$

выводимой с помощью телеграфных уравнений (Z_1 и Z_2 — волновые сопротивления линий, изображенных на рис. 48). Действительно, строгий расчет системы, изображенной на рис. 48,*б*, приводит к простой формуле

$$|R| = (k - h)/(k + h), \tag{45.10}$$

пригодной при условии, что в круглом волноводе может распространяться только волна E_{01} с волновым числом h, а в коаксиальной линии — только поперечная волна. Так как волновое сопротивление коаксиальной линии определяется формулой (32.19), то формула (45.10) никак не может быть истолкована в духе формулы (45.09).

Этот пример показывает, что проблемы, связанные с неоднородностями в волноводах, не могут быть решены с помощью представлений, дающих правильные результаты для обычных длинных линий. Основное отличие волноводов заключается в большей протяженности их ближней зоны, что приводит к необходимости учета затухающих волн вблизи неоднородности. Теория длинных линий может быть использована лишь для формального представления дальнего поля в волноводах (см. конец § 44).

Задачи к гл. VII

1. Вывести формулу (44.09) и аналогичную формулу для магнитных волн.

Решение. Исходя из формулы (44.08), получаем

$$E_x = i h \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}\left(e^{ihz} - R e^{-ihz}\right), \quad E_y = i h \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}\left(e^{ihz} - R e^{-ihz}\right),$$

$$H_x = -i k \frac{\partial \Pi^e}{\partial y}\left(e^{ihz} + R e^{-ihz}\right), \quad H_y = i k \frac{\partial \Pi^e}{\partial x}\left(e^{ihz} + R e^{-ihz}\right),$$

откуда

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} hk \left(\left|\frac{\partial \Pi^e}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi^e}{\partial y}\right|\right)\left(e^{ihz} - R e^{-ihz}\right)\left(e^{-ih^* z} + R^* e^{ih^* z}\right)$$

и при мнимом h приходим к формуле (44.09). Беря для Π^m выражение, подобное (44.08), получим для магнитных волн

$$E_x = i k \frac{\partial \Pi^m}{\partial y}\left(e^{ihz} + R e^{-ihz}\right), \quad E_y = -i k \frac{\partial \Pi^m}{\partial x}\left(e^{ihz} + R e^{-ihz}\right),$$

$$H_x = i h \frac{\partial \Pi^m}{\partial x}\left(e^{ihz} - R e^{-ihz}\right), \quad H_y = i h \frac{\partial \Pi^m}{\partial x}\left(e^{ihz} - R e^{-ihz}\right)$$

и

$$\hat{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi} h^* k \left(\left|\frac{\partial \Pi^m}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \Pi^m}{\partial y}\right|^2\right)\left(e^{ihz} + R e^{-ihz}\right)\left(e^{-ih^* z} - R^* e^{ih^* z}\right),$$

причем для $\operatorname{Re} \hat{\mathfrak{S}}_z$ справедлива та же формула (44.09), если в ней заменить Π^e на Π^m.

2. Исследовать поля плоских волн, определяемых формулами (44.11) и (44.12). Произвести разложение волн H_{mn} $(m \neq 0,\ n \neq 0)$ и E_{mn} на плоские волны, найти их направления распространения.

Решение. Формулам (44.11) и (41.17) соответствуют поля с составляющими

$$E_y = (kg C^m/2)\left[e^{i(gx+hz)} - e^{i(-gx+hz)}\right],$$
$$H_x = -(hg C^m/2)\left[e^{i(gx+hz)} - e^{i(-gx+hz)}\right]. \qquad (a)$$
$$H_z = (g^2 C^m/2)\left[e^{i(gx+hz)} + e^{i(-gx+hz)}\right].$$

Выражения (а) показывают [их можно сравнить с первой формулой (15.14)], что поле волны H_{10} возникает в результате отражения плоской волны $e^{i(-gx+hz)}$, падающей под углом $\pi/2-\theta$ на стенку $x=0$, с коэффициентом отражения -1. В результате возникает плоская волна $e^{i(gx+hz)}$.

Если рассматривать отражение от стенки $x=a$, то падающая и отраженная волны меняются местами. Каждая волна является чисто поперечной. Магнитное поле этих волн имеет составляющие H_x и H_z, поэтому результирующее поле магнитной волны H_{10} имеет продольную составляющую $H_z \neq 0$.

Для волны H_{mn} $(m,\ n = 1, 2, \ldots)$

$$\Pi_z^m = C^m \cos(g_x x)\cos(g_y y)\, e^{ihz} = (C^m/4)\left[e^{i(g_x x + g_y y + hz)} + \right.$$
$$\left. + e^{i(-g_x x + g_y y + hz)} + e^{i(g_x x - g_y y + hz)} + e^{i(-g_x x - g_y y + hz)}\right]$$

и аналогично для волны E_{mn}

$$\Pi_z^e = C^e \sin(g_z x)\sin(g_y y)\, e^{ihz} = -(C^e/4)\,[\, e^{i(g_x x+g_y y+hz)} -$$

$$-e^{i(-g_x x+g_y y+hz)} - e^{i(g_x x-g_y y+hz)} + e^{i(-g_x x-g_y y+hz)}],$$

где

$$g_x = m\pi/a,\ g_y = n\pi/b.$$

Сравнивая эти выражения с формулой (14.12), видим, что для полученных выше четырех волн

$$\alpha = \pm g_x/k,\ \beta = \pm g_y/k,\ \gamma = h/k,$$

причем γ есть косинус угла между направлением распространения каждой волны и осью z. Согласно соотношениям (44.12) этот угол обозначен через ϑ ($\gamma = \cos\vartheta$).

3. Показать, что интегральное представление (44.13) приводит к выражениям (42.02), если положить

$$f(\psi) = C_1 e^{im\psi} + C_2 e^{-im\psi}$$

и надлежащим образом подобрать константы C_1 и C_2.

Р е ш е н и е. Переходя в интеграле (44.13) к полярным координатам, получаем

$$\Pi = C_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[gr\cos(\varphi-\psi)+m\psi]}\, d\psi + C_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[gr\cos(\psi-\varphi)-m\psi]}\, d\psi.$$

Переходя в первом интеграле к переменной $\psi' = \pi/2+\varphi-\psi$, а во втором — к $\psi'' = \pi/2+\psi-\varphi$ и учитывая периодичность подынтегральных функций и представление (22.16), приходим к выражению

$$\Pi = 2\pi i^m J_m(gr)\,(C_1 e^{im\varphi} + C_2 e^{-im\varphi}),$$

откуда легко получается требуемое.

4. Показать, что в волноводе с клиновидной перегородкой (см. рис. 46,*а*) волны E_{mn} и H_{mn} определяются функциями Герца (44.14), и найти возможные значения ν и g. При каких условиях все индексы ν будут целыми?

Р е ш е н и е. При наличии перегородки функции Π^e и Π^m должны удовлетворять граничным условиям

$$\Pi^e = 0,\ \frac{\partial \Pi^m}{\partial r} = 0 \text{ при } r = a,\ \Pi^e = 0,\ \frac{\partial \Pi^m}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha \quad (a)$$

и, разумеется, уравнению (42.01) при $r<a$ и $0<\varphi<\alpha$. Это уравнение допускает решения (44.14), где $J_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению (22.04) при замене m на ν. Граничные условия (a) при $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ приводят к уравнению $\sin\nu\alpha = 0$, откуда $\nu = m\pi/\alpha$, $m = 1, 2, \ldots$ для волн E_{mn} и H_{mn}, причем при $m = 0$ получаются еще волны H_{0n} — те же, что в круглом волноводе без перегородки. Значения g получаются из уравнений

$$J_{m\,\pi/\alpha}(ga) = 0 \text{ для } E_{mn},\quad J'_{m\,\pi/\alpha}(ga) = 0 \text{ для } H_{mn}.$$

Все значения ν целые, если $\alpha = \pi,\ \pi/2,\ \pi/3,\ \pi/4, \ldots$

5. Показать, что при целом ν представление (44.15) переходит в представление (22.16). Проверить, что при нецелом ν выражение (22.16) не удовлет-

воряет уравнению Бесселя (ср. с задачей 2 к гл. III), а выражение (44.15) — удовлетворяет. Для волн в круглом волноводе с клиновидной перегородкой написать представление, обобщающее (44.13), воспользовавшись решением задачи 3.

Решение. На вертикальных частях пути интегрирования (см. рис. 46,*б*)

$$\psi = \mp\pi - i\,t \quad (0 < t < \infty), \quad e^{i(gr\sin\psi - \nu\psi)} = e^{-gr\,\mathrm{sh}\,t \mp i\nu\pi + \nu t}$$

и при целом ν подынтегральные функции совпадают, если t одно и то же, и интегралы по этим частям взаимно уничтожаются. Остается только интеграл по отрезку $-\pi < \psi < \pi$, т. е. выражение (22.16).

Когда в задаче 2 к гл. III выражение (22.16) подставлялось в уравнение Бесселя (22.04), последнее удовлетворялось благодаря периодичности подынтегральной функции. При нецелом m интегрирование по частям оставляет отличные от нуля слагаемые вне интеграла, и уравнение Бесселя не удовлетворяется. Если те же операции производить с интегралом (44.15), то слагаемые вне интеграла исчезнут, так как $e^{-gr\,\mathrm{sh}\,t + \nu t} \to 0$ при $t \to \infty$.

Функции (44.14) при $y > 0$ можно представить в виде

$$\Pi \int_{-\pi - i\infty}^{\pi - i\infty} f(\psi)\, e^{ig(x\cos\psi + y\sin\psi)}\, d\psi, \quad f(\psi) = C_1 e^{i\nu\psi} + C_2 e^{-i\nu\psi},$$

поскольку тогда интеграл сходится; при $y < 0$ пределы надо брать другие.

6. Вывести уравнения (45.04) и (45.06) для волн E_{mn} и H_{mn} в коаксиальной линии. Исследовать эти уравнения, используя приближенные выражения (22.07) и (22.09) для функций J_m и N_m и, в частности, получить формулы (45.07) и (45.08). Особое внимание обратить на случай $b \approx a$, когда $b - a \ll a$.

Решение. Условия (45.03), примененные к функции Π^e, приводят к уравнениям

$$CJ_m(ga) + DN_m(ga) = 0, \quad CJ_m(gb) + DN_m(gb) = 0,$$

а уравнение (45.04) есть условие, при котором эти уравнения имеют отличные от нуля решения для C и D. Для функции Π^m должны выполняться граничные условия (45.05), которые приводят к уравнениям, в которых вместо функций J_m и N_m стоят их производные J'_m и N'_m, т. е. к уравнению (45.06).

Если в уравнение (45.04) вместо J_m и N_m подставить выражения (22.07) и (22.09), то оно примет вид

$$\sin g(b-a) = 0, \quad \text{откуда} \quad g = n\pi/(b-a), \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (a)$$

Однако приближенные выражения (22.07) и (22.09) можно применять только при условии

$$ga = n\pi a/(b-a) \gg 1, \qquad (b)$$

т. е. либо при $n \gg 1$, либо при $b \approx a$. Если $n = 1$ и отношение $(b-a)/a$ не мало, то условие (b) выполняется с натяжкой и приводит к формуле (45.08) для волны E_{01}.

Аналогичным образом исследуется уравнение (45.06), в котором J'_m и N'_m получаются дифференцированием только тригонометрических функций в выражениях (22.07) и (22.09), что законно при $x \gg 1$. Мы опять приходим к приближенному уравнению (a) и к формуле (45.08) для волны H_{01}.

Исследование несимметричных магнитных волн H_{m1}, в частности волны H_{11}, производится иначе. Предположим для простоты, что $a \approx b$, и введем $r_0 = (a+b)/2$. Тогда можно написать приближенное выражение

$$J'_m(gb) = J'_m(gr_0) + J''_m(gr_0)\, g\,(b-r_0) = J'_m(gr_0) -$$

$$-J'_m(gr_0)\,(b-r_0)/r_0 - \left(1 - m^2/g^2 r_0^2\right) J_m(gr_0)\, g\,(b-r_0),$$

где использовано уравнение (22.04) для функции $J_m(gr_0)$. Такое же выражение надо написать для остальных функций в уравнении (45.06), после чего оно примет простой вид

$$1 - m^2/g^2 r_0^2 = 0, \quad g = m/r_0,$$

и при $m=1$ получаем формулу (45.07).

7. Исследовать высшие волны в полосковой линии, рассматривая ее как прямоугольный волновод ($0<x<a$, $0<y<b$) и ставя граничные условия $E_t = 0$ при $y=0$, $y=b$ и $H_t = 0$ при $x=0$, $x=a$. Найти собственные функции $\Pi^e(x, y)$ и $\Pi^m(x, y)$, собственные значения и продольные волновые числа (с учетом заполнения, см. рис. 29,*а*). Какие собственные функции Π^e и Π^m соответствуют основной (квазипоперечной) волне?

Р е ш е н и е. Рассуждая так же, как в § 41, для волн E_{mn} получаем

$$\Pi^e = C^e \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (m = 0,1,2,\ldots,\ n = 1,2,\ldots)$$

а для волн H_{mn}

$$\Pi^m = C^m \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \quad (m = 1,2,\ldots,\ n = 0,1,2,\ldots).$$

Для основной волны

$$\Pi^e = Cy \text{ или } \Pi^m = -Cx, \quad g = 0,$$

так что ее можно называть волной E_{00} или волной H_{00}. Продольные и поперечные волновые числа определяются формулами

$$g^2 = (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2, \quad h^2 = k^2\varepsilon\mu - g^2.$$

Глава VIII.

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

§ 46. Фазовая и групповая скорость

Теория распространения электромагнитных волн в волноводе (см. гл. VII) для электрического и магнитного полей каждой волны дает следующие выражения:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ihz}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{ihz}, \tag{46.01}$$

где векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ не зависят от координаты z вдоль волновода, а h есть волновое число распространяющейся волны. Переходя к

мгновенным значениям электрического и магнитного полей по формулам (2.01), получаем

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(hz-\omega t)}\}, \quad \mathbf{H}(t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{H}_0 e^{i(hz-\omega t)}\}. \tag{46.02}$$

В таком же виде можно представить монохроматические волны, распространяющиеся вдоль передающих линий других типов, в однородной среде (см. гл. II) и т. д. Такие волны (при вещественном h) распространяются со скоростью

$$u = \omega/h, \tag{46.03}$$

которая называется фазовой скоростью данной монохроматической волны (см. § 11).

Передача сигналов с помощью монохроматической волны невозможна из-за ее однородности в пространстве и во времени, поэтому сигнал всегда имеет некоторый спектр частот и распространяется со скоростью, вообще говоря, отличной от u.

Согласно формулам (2.18) электрическое поле волны, переносящей сигнал, представляется в виде

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \mathbf{E}_0(\omega)\, e^{i(hz-\omega t)}\, d\omega, \tag{46.04}$$

где вектор $\mathbf{E}_0(\omega)$ кроме частоты ω зависит еще от поперечных координат x и y, а продольное волновое число h есть функция частоты. В таком же виде записывается магнитное поле. Ниже мы будем рассматривать какую-нибудь одну составляющую поля при фиксированных значениях x и y, обозначая ее через $f(z, t)$. Вместо выражения (46.04) используем более удобную запись

$$f(z, t) = \mathrm{Re}\int_0^\infty F(\omega)\, e^{i[h(\omega)z-\omega t]}\, d\omega, \tag{46.05}$$

в которой явно фигурируют все существенные аргументы рассматриваемых функций.

Интеграл (46.05) легко вычисляется, если при всех частотах $h(\omega) = \omega/c$, где c — постоянная; такая зависимость h от ω реализуется для плоских волн в пустоте (см. § 12). При такой зависимости выражение (46.05) принимает вид

$$f(z, t) = \mathrm{Re}\int_0^\infty F(\omega)\, e^{-i\omega(t-z/c)}\, d\omega = f(0, t-z/c). \tag{46.06}$$

В дальнейшем будем называть $f(0, t)$ начальным сигналом, предполагая, что его посылают из точки $z=0$, и следить за тем, в каком виде он придет в любую точку $z>0$. Формула (46.06) показывает, что при $h(\omega) = \omega/c$ сигнал распространяется без искажения и в точке $z>0$ появляется, запаздывая на время z/c, т. е. c есть скорость его распространения.

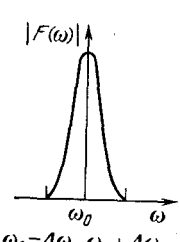


Рис. 49. Спектр узкополосного сигнала (квазимонохроматической волны)

При иной зависимости h от ω ситуация усложняется и интеграл (46.05) так просто не вычисляется. Прибегнем к аппроксимации, предполагая, что сигнал узкополосный, имеет достаточно узкий спектр, т. е. функция $F(\omega)$ практически отлична от нуля лишь при $\omega \approx \omega_0$ (рис. 49), где ω_0 — несущая частота. Тогда функцию $h(\omega)$ можно заменить первыми двумя членами ряда Тейлора

$$h(\omega) = h(\omega_0) + \frac{dh}{d\omega}(\omega_0)(\omega - \omega_0) \tag{46.07}$$

и

$$\int F(\omega)\, e^{i[h(\omega)z - \omega t]}\, d\omega = e^{i[h(\omega_0)z - \omega_0 t]} \int F(\omega)\, e^{i\left[\frac{dh}{d\omega}(\omega_0)\, z - t\right](\omega - \omega_0)}\, d\omega.$$

Чтобы понять смысл получающегося выражения, надо учесть, что узкополосный начальный сигнал $f(0, t)$ всегда задается в виде

$$f(0, t) = \mathrm{Re}\{\mathscr{E}(t)\, e^{-i\omega_0 t}\}, \tag{46.08}$$

где $\mathscr{E}(t)$ — комплексная огибающая начального сигнала, определяемая интегралом

$$\mathscr{E}(t) = \int_0^\infty F(\omega)\, e^{-i(\omega - \omega_0)t}\, d\omega \tag{46.09}$$

и являющаяся медленно изменяющейся функцией времени t (по сравнению с $e^{-i\omega_0 t}$). Медленное изменение $\mathscr{E}(t)$ следует из того, что интеграл (46.09) фактически распространен (рис. 49) на небольшую окрестность частоты ω_0; если $2\Delta\omega$ — ширина частотной полосы, занятой сигналом ($\Delta\omega \ll \omega_0$), то в интеграле (46.09) $|\omega - \omega_0| < \Delta\omega$ и $\mathscr{E}(t)$ изменяется не быстрее, чем $e^{\pm i\Delta\omega t}$, и значительно медленнее, чем $e^{-i\omega_0 t}$.

При амплитудной модуляции изменяется абсолютная величина $\mathscr{E}(t)$, которую обычно называют амплитудой или огибающей сигнала. При частотной или фазовой модуляции изменяется фаза комплексной функции $\mathscr{E}(t)$. Во всех случаях информацию переносит комплексная огибающая $\mathscr{E}(t)$. Аппроксимируя функцию $h(\omega)$ выражением (46.07), получаем функцию $f(z, t)$ в виде

$$f(z, t) = \mathrm{Re}\{\mathscr{E}(t - z/v)\, e^{-i\omega_0(t - z/u)}\}, \tag{46.10}$$

где

$$u = \omega_0 / h(\omega_0), \qquad v = 1 \Big/ \frac{dh}{d\omega}(\omega_0) = (d\omega/dh)_{\omega = \omega_0}. \tag{46.11}$$

Таким образом, комплексная огибающая и высокочастотное заполнение перемещаются с разными скоростями. Заполнение перемещается с фазовой скоростью u, введенной выше формулой (46.03), в которой надо заменить ω на ω_0. Комплексная огибающая движется с *групповой* скоростью v: с этой скоростью передается энергия сигнала, пропорциональная $|\mathscr{E}(t)|^2$, и связанная с ним информация.

Термин «групповая скорость» объясняется тем, что рассматриваемый сигнал (46.05) с узким спектром частот называется группой волн или *квазимонохроматической группой*; последнее название подчеркивает узость спектрального состава. Групповую скорость можно назвать просто скоростью сигнала, поскольку вся информация передается комплексной огибающей, а не высокочастотным заполнением.

Заметим, что в механике скорость материальной точки определяется единственным образом, а при анализе волновых процессов приходится вводить фазовую и групповую скорости, а также ряд других скоростей (см. далее). Это объясняется тем, что отдельные монохроматические волны, входящие в состав сигналов, распространяются в общем случае с различными фазовыми скоростями, и вследствие этого форма сигнала при его распространении искажается. По этой причине получаем различные значения скоростей в зависимости от того, за каким признаком сигнала следим при его перемещении.

Зависимость фазовой скорости (46.03) от частоты называется *дисперсией*. Постоянство фазовой скорости — это отсутствие дисперсии, тогда отношение $h(\omega)/\omega$ постоянно и справедливо выражение (46.06), согласно которому групповая скорость равна фазовой. Наоборот, равенство этих скоростей при всех частотах приводит к их независимости от частоты (см. задачу 1).

Отметим, что при наличии дисперсии групповая скорость лишь приближенно характеризует распространение сигнала. Дело в том, что к понятию групповой скорости и формуле (46.10) приходим, заменяя $h(\omega)$ линейной функцией (46.07). Если произвести уточнение, учесть следующие члены ряда Тейлора, то окажется, что при достаточно больших z приближенное выражение (46.10) значительно отличается от точного выражения (46.05). Это происходит потому, что малые поправки к формуле (46.07) умножаются в интеграле (46.05) на z.

Поэтому на очень больших расстояниях его огибающая уже не перемещается со скоростью v как единое целое, а происходит деформация сигнала. Чем уже спектральный диапазон сигнала, тем деформация происходит медленнее, так как с тем большей точностью применимо выражение (46.07).

§ 47. Распространение модулированных волн в волноводе

Волновое число распространяющейся волны в волноводе

$$h = \sqrt{k^2 - g^2}\ (k > g), \tag{47.01}$$

где $k=\omega/c$, а g от частоты не зависит. Ее фазовая скорость

$$u = c/\sqrt{1-(g/k)^2}. \tag{47.02}$$

Она характеризует скорость распространения фазы в монохроматической волне, являющейся в пространстве (вдоль оси z) и во времени бесконечной синусоидой.

Фазовая скорость в волноводе по формуле (47.02) превосходит c. Этот результат не противоречит теории относительности, запрещающей передачу сигналов и движение тел со скоростью, превышающей скорость света. Как отмечалось в § 46, с помощью монохроматической волны нельзя передавать сигнал, несущий какую-либо информацию. Передача информации возможна лишь с помощью модулированных волн, не являющихся монохроматическими, причем информацию и энергию несет комплексная огибающая, перемещение которой происходит с так называемой групповой скоростью (§ 46)

$$v = d\omega/dh. \tag{47.03}$$

Формула (47.03) является общей формулой, позволяющей рассчитывать скорость распространения сигнала в любой системе. Единственным условием применимости этой формулы является требование, чтобы спектр сигнала, схематически изображенный на рис. 49, был сосредоточен в достаточно малом диапазоне вблизи произвольной центральной частоты ω.

Вычисляя по формуле (47.03) групповую скорость электромагнитной волны в волноводе

$$v = 1/(dh/d\omega) = c/(dh/dk), \tag{47.04}$$

получаем

$$v = c\sqrt{1-(g/k)^2}. \tag{47.05}$$

Таким образом, групповая скорость волн в волноводе оказывается, как это и следовало ожидать, всегда меньше скорости c. Поскольку $u > v$, то относительно наблюдателя, движущегося вместе с огибающей (со скоростью v), синусоида высокочастотного заполнения будет двигаться вперед; при этом передние гребни синусоиды будут исчезать, доходя до передней границы сигнала, а задние гребни — возникать в «хвосте» сигнала. Интересно, что фазовая и групповая скорости в волноводе удовлетворяют соотношению

$$uv = c^2. \tag{47.06}$$

Если имеется сигнал, ограниченный во времени, например одиночный высокочастотный импульс с резко выраженным фронтом, то в его спектральном разложении (46.04) или (46.05) теоретически представлены все частоты вплоть до самых высоких; разумеется, функции $E_0(\omega)$ и $F(\omega)$ при $\omega \to \infty$ стремятся к нулю, но они обращаются в нуль лишь при $\omega = \infty$. Поскольку согласно формуле (47.02)

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega/h = c, \tag{47.07}$$

то при достаточно больших ω, например при $\omega > \omega_1 \gg \omega_0$, можем

приближенно положить $h=\omega/c$, и тогда в выражении (46.05) будет слагаемое

$$\mathrm{Re}\int_{\omega_1}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega(z/c-t)}\, d\omega = g(t-z/c), \tag{47.08}$$

которое соответствует волне, распространяющейся со скоростью c и опережающей основной сигнал, бегущий со скоростью v. Это слагаемое будет однако весьма малым, поскольку при $\omega \gg \omega_0$ функция $F(\omega)$ принимает малые значения.

Таким образом, прямоугольный высокочастотный импульс в волноводе приобретает слабо выраженные предвестники, уходящие от него по мере распространения (рис. 50). Нужно, однако, иметь в виду, что реальный приемник не воспринимает этих предвестников и не регистрирует приход сигнала по теоретическому переднему фронту P, перемещающемуся со скоростью c. Это объясняется не только тем, что предвестники обладают малой энергией, но также тем, что их частотный спектр лежит далеко от рабочего диапазона, соответствующего основной энергии сигнала. Для создания сигнала с резко выраженным фронтом передатчик должен работать в бесконечной широком диапазоне частот, чего обычно не бывает. Поэтому фактически регистрируется приход сигнала по фронту огибающей Q (рис. 50), перемещающейся с групповой скоростью v.

Можно показать, что передний фронт в любой диспергирующей среде также перемещается со скоростью c, поскольку волновое число h в любой реальной среде или в реальной линии передачи удовлетворяет соотношению (47.07).

Проведенное выше исследование движения фронта волны не является строгим с математической точки зрения. Для волноводов, т. е. для закона дисперсии (47.01), можно провести более строгое рассмотрение вопроса, если воспользоваться уравнением

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+g^2 f=0, \tag{47.09}$$

которому удовлетворяет функция (46.05). Действительно, этому уравнению удовлетворяет функция

$$e^{i(hz-\omega t)}=e^{i(\sqrt{k^2-g^2}z-\omega t)},$$

а вследствие этого и весь интеграл (46.05).

Фронтом волны в данный момент t называется такая плоскость $z=z(t)$, правее которой поле тождественно равно нулю ($f=0$ вместе со всеми своими производными), а левее — отлично от нуля. Таким образом, при $z=z(t)$ поле

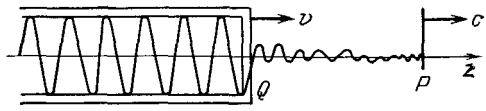


Рис. 50. Распространение радиоимпульса в волноводе (схематически)

терпит разрыв. Теория дифференциальных уравнений в частных производных исследует движение таких разрывов, при этом оказывается, что кривая с уравнением $z=z(t)$ должна быть так называемой характеристикой соответствующего дифференциального уравнения (47.09). Не останавливаясь на теории характеристик, отметим лишь, что характеристики уравнения (47.09) и соответствующего ему уравнения

$$-\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z^2}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial t^2}=0, \tag{47.10}$$

в котором сохранены лишь старшие производные (производные второго порядка), совпадают. Уравнение (47.10) есть обычное волновое уравнение, или уравнение Даламбера. Его решения — это волны, бегущие со скоростью c. С той же скоростью перемещается разрыв, соответствующий фронту волны, удовлетворяющей уравнению (47.09). Аналогичным путем можно найти скорость фронта для волны, подчиняющейся телеграфным уравнениям (см. задачу 2).

Физический смысл формул (47.01) и (47.05) всего легче понять на примере волны H_{10} в прямоугольном волноводе, которая разлагается на две плоские волны (§ 44). Рассмотрим (рис. 51) одну из плоских волн. Если плоская волна распространяется в направлении *1*, то ее фазовые плоскости перемещаются в направлении *1* со скоростью c. В направлении оси z скорость перемещения этих плоскостей оказывается больше c:

$$u=c/\cos\vartheta. \tag{47.11}$$

Это и есть фазовая скорость волноводной волны. Учитывая, что по формулам (44.12)

$$\cos\vartheta=h/k=\sqrt{1-(g/k)^2}, \tag{47.12}$$

видно, что формула (47.11) эквивалентна формуле (47.02). Как видно из рис. 51, длина волны в направлении оси z

$$\Lambda=\lambda/\cos\vartheta. \tag{47.13}$$

Величина Λ определяет периодичность поля вдоль оси волновода, это — волноводная длина волны.

Для вычисления групповой скорости необходимо рассмотреть, например, распространение амплитудно-моделированной волноводной волны, амплитуда которой зависит от z и t. Разложение такой модулированной волноводной волны ведет к плоским волнам, амплитуда (огибающая) которых непостоянна. Это значит, что в плоскости равной фазы каждой плоской волны, схематически изображенной на рис. 51, амплитуда на прямой *1* несколько отличается от амплитуды на параллельной ей прямой *1′*. Из геометрической оптики известно, что энергия волны перемещается в направлении лучей, являющихся нормалями к волновым поверхностям (поверхностям равной фазы), т. е. в данном случае по прямым *1* или *1′*. Дойдя до поверхности стенки волновода, энергия отражается от нее и продолжает распространяться в направлении отраженного луча, который образует с осью волновода z тот же

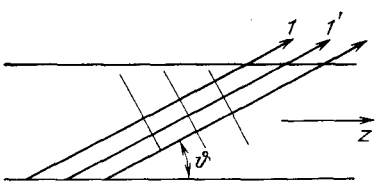


Рис. 51. Фазовые плоскости и поток энергии в плоской волне, иллюстрирующие фазовую и групповую скорость волн в волноводе

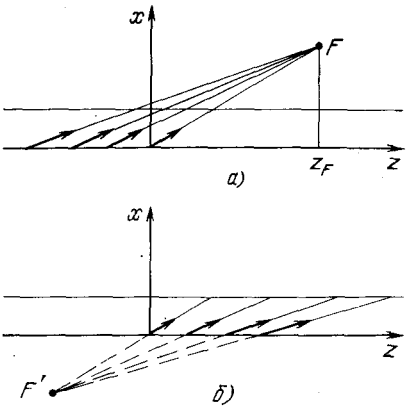


Рис. 52. Сжатие и расширение частотно-модулированных импульсов

угол ϑ, что и первоначальный луч. Скорость распространения энергии вдоль каждого луча равна c.

Таким образом, распространение энергии, заключенной в некотором цилиндре с образующими 1 и $1'$, происходит по зигзагообразному пути, каждое звено которого наклонено к оси z под углом ϑ. Поэтому скорость перемещения энергии по оси z

$$v = c\cos\vartheta. \tag{47.14}$$

Это и есть групповая скорость, вычисленная ранее [см. формулу (47.05)]. Заметим, что одна и та же причина — несовпадение направления распространения плоских волн с осью волновода — приводит к увеличению фазовой скорости и уменьшению групповой скорости по сравнению с теми же величинами для свободного пространства. Различие между этими скоростями возникает вследствие того, что они определяют скорость движения различных физических признаков волны, распространяющейся в волноводе. Скорости u и v удовлетворяют соотношению (47.06).

Деформацию модулированной волны при распространении в волноводе (см. конец § 46) частично можно учесть в рамках геометрической оптики. Пусть, например, из сечения $z=0$ посылаем по волноводу длинный импульс с медленно изменяющейся частотой. Различным частотам соответствуют различные значения k, h и ϑ. Углы ϑ могут быть распределены в пространстве, например, так, что лучи собираются вблизи точки F — фокуса (рис. 52,*а*) или же расходятся от точки F' — мнимого фокуса (рис. 52,*б*); с волноводной точки зрения это означает, что импульс, вступающий в волновод при $z=0$, вследствие частотной модуляции сжимается при $z\approx z_F$ (с последующим расширением) или же сразу расширяется. Формула (46.10) относится к таким расстояниям, когда непостоянство углов ϑ еще не успевает сказаться.

Если же волна модулирована только по амплитуде, например имеется прямоугольный высокочастотный импульс, то в приближении геометрической оптики распространение такого импульса в волноводе происходит без изменения его формы. Фактически же

при своем распространении импульс деформируется. Это явление можно отождествить с дифракцией, испытываемой пучком параллельных лучей (плоской волной с конечным поперечным сечением). Под влиянием дифракции сечение волны расширяется, т. е. лучи как бы начинают расходиться (см. гл. XVII). Прямоугольный импульс в волноводе можно представить как пучок параллельных лучей, которые претерпевают последовательные отражения от стенок волновода: его расширение происходит так же, как и расширение пучка лучей в свободном пространстве. Оно подчиняется законам дифракции Френеля.

Оказывается, что деформацию комплексной огибающей (как лучевую, так и диффракционную) можно вычислить, учитывая в разложении Тейлора (46.07) следующий член. Однако этот подход приводит к громоздким соотношениям, которые здесь приводиться не будут.

§ 48*. Скорость движения энергии

Рассмотрим (см. § 8) электромагнитную волну, имеющую комплексную частоту

$$\Omega=\omega+i\gamma, \tag{48.01}$$

т. е. нарастающую или затухающую (в фиксированной точке пространства) по экспоненциальному закону. Электрическое и магнитное поля такой волны при ее распространении по оси z имеют вид

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i[h(\Omega)z-\Omega t]}\},\ \mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\{\mathbf{H}_0 e^{i[h(\Omega)z-\Omega t]}\}, \tag{48.02}$$

где $h(\Omega)$ — волновое число, соответствующее частоте Ω. При достаточном малом γ (достаточно медленном изменении амплитуды поля в фиксированной точке)

$$h(\Omega)=h+\frac{dh}{d\omega}i\gamma, \tag{48.03}$$

где $h=h(\omega)$ и производная $dh/d\omega$ соответствуют уже вещественной частоте ω. Пользуясь формулами (48.01) и (48.03), получаем

$$\exp i[h(\Omega)z-\Omega t]=\exp i(hz-\omega t)\cdot\exp\left[-\gamma\left(\frac{dh}{d\omega}z-t\right)\right]. \tag{48.04}$$

Этот множитель определяет зависимость электромагнитного поля данной волны от z и t. Первый множитель правой части (48.04) определяет быстро изменяющуюся фазу электромагнитного поля, которая распространяется с фазовой скоростью $u=\omega/h$. Второй множитель определяет (медленно изменяющуюся) амплитуду поля, перемещающуюся с групповой скоростью $v=d\omega/dh$. Эти соотношения можно применить также к распространению плоских электромагнитных волн в однородной среде (см. § 11); при этом нужно заменить волновое число h на $K=k\sqrt{\varepsilon\mu}$. Однако мы пока ограничиваемся средами без потерь, поскольку во всем предыдущем анализе групповой скорости предполагали волновое

число h вещественным, и сейчас должны считать проницаемости ε и μ вещественными и положительными.

С помощью комплексной частоты можно также исследовать распространение фронта (см. § 46). Действительно, считая в формуле (48.01) величину γ достаточно большой и положительной, получаем волну с крутым фронтом, переходящим при $\gamma\to\infty$ в бесконечно крутой фронт. В этом случае, разумеется, формула (48.03) неприменима, так что фронт распространяется не с групповой скоростью. Если фазовая скорость удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\omega\to\infty} u = \lim_{\omega\to\infty} \omega/h = c, \tag{48.05}$$

которое для реальных сред и линий передачи всегда выполняется, то при $\gamma\to\infty$ можно считать $h(\Omega)=\Omega/c$ и вместо формулы (48.04) получаем

$$e^{i[h(\Omega)z-\Omega t]} = e^{i\Omega(z/c-t)}, \tag{48.06}$$

так что фронт волны распространяется со скоростью c.

Физический смысл соотношения (48.05) заключается в том, что волны достаточно высоких частот проходят, например, через диэлектрик как через пустоту, поскольку вследствие своей инерции электроны (а тем более атомы или молекулы диэлектрика) в колебаниях достаточно высокой частоты принимать участие не могут. Таков же смысл выражения (48.06): достаточно крутой фронт проходит через вещество как через пустоту, поскольку за время его прохождения вещество включиться в электромагнитный процесс не успевает.

Вывод формулы для групповой скорости, данный в этом параграфе, не может иметь самостоятельного значения, так как, в отличие от § 46, здесь рассмотрена квазимонохроматическая волна вполне определенного вида. Этот вывод приведен, чтобы подчеркнуть металлическую связь групповой скорости и электромагнитной энергии (см. § 8): для рассмотрения обоих понятий необходимо пользоваться переходными процессами, например процессами с комплексной частотой (48.01). Оказывается, что групповую скорость можно представить в виде

$$v=\overline{\mathfrak{S}}_z/\overline{w}, \tag{48.07}$$

где $\overline{\mathfrak{S}}_z$ — среднее значение составляющей вектора Умова — Пойнтинга, а $\overline{w}$ — среднее значение плотности электромагнитной энергии. Для незатухающих плоских волн в однородной среде без потерь усреднение происходит по времени [в этом случае правильность формулы (48.06) можно проверить непосредственно, см. задачу 3], для волн в линиях передачи нужно еще усреднить $\mathfrak{S}_z$ и w по поперечному сечению, после чего $\overline{\mathfrak{S}}_z$ и $\overline{w}$ будут удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{S}}_z}{\partial z} = 0 \tag{48.08}$$

(см. задачу 4).

Выражение (48.07) находится в соответствии с идеей Н. А. Умова, который приписывал энергии определенную скорость движения $\mathbf{v}$ и представлял вектор $\mathcal{S}$ в виде $\mathcal{S}=w\mathbf{v}$. Можно показать в общем виде, что в задаче о распространении квазимонохроматической волны скорость движения энергии связана с распространением сигнала.

Пусть производится измерение мощности приходящей волны при некотором фиксированном значении координаты z: это значит, что измеряется $\overline{\mathcal{S}}_z$ как функция t. Момент прихода τ данного сигнала определим формулой

$$\tau = \int t\,\overline{\mathcal{S}}_z\,dt \Big/ \int \overline{\mathcal{S}}_z\,dt, \tag{48.09}$$

где интегрирование производится по t от $-\infty$ до ∞. Считаем, что сигнал имеет конечную продолжительность (точнее, поток энергии $\overline{\mathcal{S}}_z$ достаточно быстро убывает при $t\to\pm\infty$), поэтому все интегралы сходятся. Очевидно, что τ характеризует приход центра сигнала в данную точку z и скорость распространения сигнала, естественно, определяется как $dz/d\tau$. При этом сигнал может сильно деформироваться при своем распространении.

Образуем производную

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\int t\,\dfrac{\partial\overline{\mathcal{S}}_z}{\partial z}\,dt}{\int \overline{\mathcal{S}}_z\,dt} - \frac{\int \dfrac{\partial\overline{\mathcal{S}}_z}{\partial z}\,dt \int t\,\overline{\mathcal{S}}_z\,dt}{\left[\int \overline{\mathcal{S}}_z\,dt\right]^2}. \tag{48.10}$$

С помощью уравнения (48.08) получаем тождества

$$\int \frac{\partial\overline{\mathcal{S}}_z}{\partial z}\,dt = -\int \frac{\partial\overline{w}}{\partial t}\,dt = 0,\quad \int t\,\frac{\partial\overline{\mathcal{S}}_z}{\partial z}\,dt = -$$

$$-\int t\,\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}\,dt = \int \overline{w}dt,$$

полагая $\overline{w}\to 0$ и $t\overline{w}\to 0$ при $t\to\pm\infty$. Соотношение (48.09) принимает вид

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{\int \overline{w}dt}{\int \overline{\mathcal{S}}_z\,dt}. \tag{48.11}$$

Для квазимонохроматического сигнала можно положить

$$\frac{\int \overline{w}dt}{\int \overline{\mathcal{S}}_z\,dt} = \frac{\overline{w}}{\overline{\mathcal{S}}_z}, \tag{48.12}$$

где правая часть вычисляется для монохроматической волны (с несущей частотой сигнала). Таким образом, скорость центра совпадает со скоростью (48.07). Поскольку в § 46 показано, что в отсутствие затухания сигнал (точнее, его комплексная огибающая) распространяется с групповой скоростью, то с той же скоростью движется и его центр. Отсюда видно, что групповая скорость и скорость движения энергии всегда совпадают.

Надо отметить, что вычисление групповой скорости по энергетической формуле (48.07) обычно более громоздко, чем по формуле (46.11). Однако проведенный выше анализ показывает, что на больших расстояниях, где сигнал заметно исказится (см. конец § 46), его центр по-прежнему будет перемещаться с групповой скоростью, равной скорости движения энергии на несущей частоте.

Во многих работах (а также в первом издании этой книги) скорость движения энергии вводилась и при наличии потерь, когда волны распространяются с затуханием. Вообще говоря, против введения этой величины трудно возражать, однако к распространению сигналов она имеет лишь косвенное отношение. Это объясняется в первую очередь тем, что при наличии потерь нельзя однозначно определить плотность электромагнитной энергии (см. § 8). Например, комплексные проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ позволяют полностью рассчитать передачу сигналов плоскими волнами, однако скорость (48.07) содержит произвол из-за неопределенности $\bar{w}$. Кроме того, при учете потерь соотношение (48.11) приобретает дополнительные слагаемые, которые нельзя оценить, не зная, как распространяется сигнал. А если это известно, то расчет скорости (48.07) мало что дает.

§ 49*. Влияние затухания на распространение модулированных волн

Причина деформации комплексной огибающей при распространении без затухания была указана в конце § 46: это — непостоянство групповой скорости в пределах полосы частот (конечной, хотя и узкой), занятой сигналом. Если волны при своем распространении затухают, то происходит дополнительная деформация из-за непостоянства коэффициента затухания в той же полосе. Начальную стадию дополнительной деформации легко исследовать, если с самого начала считать волновое число h комплексной функцией частоты и воспользоваться выражением (46.07) в окрестности несущей частоты ω_0. Тогда вместо выражения (46.10) получаем

$$f(z, t) = \mathrm{Re}\{\mathcal{E}(t - h_1 z)\, e^{i(h_0 z - \omega_0 t)}\}, \tag{49.01}$$

где введены сокращенные обозначения

$$h_0 = h(\omega_0),\ h_1 = \frac{dh}{d\omega}(\omega_0). \tag{49.02}$$

Поскольку h_0 и h_1 комплексны, функция $f(z, t)$ с ростом z затухает (из-за экспоненты $e^{ih_0 z}$), а огибающая $\mathcal{E}$ искажается (из-за комплексности аргумента $t - h_1 z$). Характер и причину искажения легче всего пояснить на простейшем примере. Пусть

$$F(\omega) = F_0 \text{ при } |\omega - \omega_0| < \Delta\omega,$$
$$F(\omega) = 0 \text{ при } |\omega - \omega_0| > \Delta\omega, \tag{49.03}$$

тогда по формуле (46.09)

$$\mathscr{E}(t) = 2F_0 \frac{\sin \Delta\omega t}{t} = F_0 \frac{e^{i\Delta\omega t} - e^{-i\Delta\omega t}}{it}. \qquad (49.04)$$

При условии

$$|\operatorname{Im} h_1| \Delta\omega z \ll 1 \qquad (49.05)$$

искажение огибающей $\mathscr{E}$ под влиянием затухания практически не проявляется. Этот результат имеет общее значение и на словах может быть сформулирован так: чем слабее зависимость затухания от частоты, чем уже полоса сигнала, и чем меньше расстояние, тем меньше искажается комплексная огибающая $\mathscr{E}$.

При противоположном условии

$$|\operatorname{Im} h_1| \Delta\omega z \gg 1 \qquad (49.06)$$

огибающая $\mathscr{E}$ искажается до неузнаваемости и, в частности, в формуле (49.04) для $\mathscr{E}(t - h_1 z)$ практически остается только одна экспонента. Будем для определенности считать $\operatorname{Im} h_1 > 0$, тогда формула (49.01) примет вид

$$f(z, t) = \operatorname{Re}\left\{F_0 \frac{\exp i\,[(h_0 - h_1 \Delta\omega) z - (\omega_0 - \Delta\omega) t]}{i\,(t - h_1 z)}\right\}. \qquad (49.07)$$

Отсюда видно, что при условии (49.06) модулированная волна полностью изменилась. При $z = 0$ она модулирована по амплитуде в соответствии с формулой (49.04) и имеет несущую частоту ω_0. На расстояниях, где выполняется условие (49.06), она имеет несущую частоту $\omega_0 - \Delta\omega$, комплексное волновое число $h_0 - h_1 \Delta\omega \approx \approx h(\omega_0 - \Delta\omega)$ и совершенно иную амплитудную модуляцию, определяемую множителем $1/|t - h_1 z|$; максимум амплитуды реализуется при $t = \operatorname{Re} h_1$, т. е. этот максимум движется со скоростью $v = 1/\operatorname{Re} h_1$.

Таким образом, распространяющаяся волна не похожа на первоначальный сигнал. Происходит это потому, что при распространении с затуханием сигнал не только ослабляется, но еще изменяется *форма его спектра*, которая определяется функцией

$$S(\omega, z) = |F(\omega)|^2 \exp\{-2[\operatorname{Im} h(\omega) - \operatorname{Im} h(\omega_0)]z\}. \qquad (49.08)$$

В рассмотренном выше примере начальный спектр — прямоугольный (рис. 53,*а*), а затухание увеличивается с частотой. Эволюция формы спектра при последовательном увеличении z показана на рис. 53,*б* и *в*. При существенно бо́льших z спектр уже сосредоточен вблизи наименьшей частоты $\omega_m = \omega_0 - \Delta\omega$, которая является эффективной несущей; при этом скорость амплитудного максимума должна быть равна $v = 1/\operatorname{Re} \frac{dh}{d\omega}(\omega_0 - \Delta\omega)$, а не $v = 1/\operatorname{Re} h_1$, как получается по приближенной формуле (49.01).

Фактически спектр любого сигнала простирается от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$, а не ограничен полосой $|\omega - \omega_0| < \Delta\omega$, как это предполагалось выше. Поэтому при неограниченном увеличении z максимум

функции (49.08) смещается в сторону тех частот, где затухание меньше. Например, если затухание монотонно увеличивается с ростом частоты, то эффективная несущая стремится к нулю, т. е. радиоимпульс, изменяя свою форму, постепенно превращается в видеоимпульс.

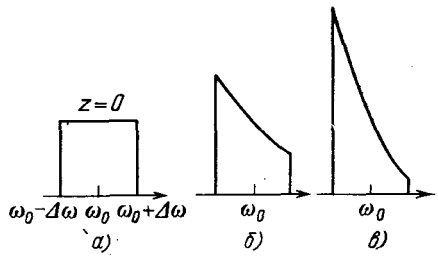


Рис. 53. Изменение функции (49.07) при увеличении z

Формула $v=1/\mathrm{Re}\,h_1$ может давать как $v>c$, так и $v<0$. Как показывает прямое вычисление интеграла (46.09), при значительном затухании максимум $|\mathscr{E}(t)|$ на короткой дистанции может действительно переместиться со сверхсветовой или отрицательной скоростью. Но это — проявление деформации сигнала, а не результат его движения как целого. В спектре сигнала всегда присутствуют частоты, на которых затухание меньше, а скорость $1/\mathrm{Re}\,\dfrac{dh}{d\omega}$ не превосходит предельной скорости c. По мере увеличения z эти частоты становятся преобладающими и скорость амплитудного максимума приходит в соответствие со скоростью движения всего сигнала, которая всегда меньше c.

Резюмируем: главное явление, которое сопровождает затухание модулированных волн — это, наряду с ослаблением, изменение формы спектра и, в частности, смещение эффективной несущей в сторону тех частот, где затухание меньше; искаженный сигнал, который при этом воспринимается, обусловлен частью спектра вблизи эффективной несущей; эта часть спектра определяется как начальным спектром сигнала, так и зависимостью затухания от частоты.

Задачи к гл. VIII

1. Вывести следствия из равенства $u=v$ (при всех частотах).

Решение. Это равенство можно переписать в виде

$\omega/h=d\omega/dh$, или $dh/h=d\omega/\omega$.

Отсюда следует, что

$\ln h=\ln\omega+\mathrm{const}$, т. е. $h=\omega/c$,

где c — постоянная. Поэтому равенство $u=v$ возможно только при отсутствии дисперсии.

2. Найти скорость фронта для волн в длинных линиях, пользуясь телеграфным уравнением второго порядка (задача 1 к гл. VI), а также соотношением (48.05).

Решение. Характеристики указанного уравнения совпадают с характеристиками более простого уравнения

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0.$$

Поэтому фронт волны распространяется со скоростью $v_0 = 1/\sqrt{LC}$. По формулам (48.05) и (30.05) получаем тот же результат:

$$v_0 = \lim_{\omega\to\infty} 1/\sqrt{(L + iR/\omega)(C + iG/\omega)} = 1/\sqrt{LC}.$$

3. Доказать тождественность формулы (48.07) и формулы $v = d\omega/dh$ для плоских волн в однородной среде, учитывая выражения (8.12).

Решение. Волновое число K можно представить в виде $K = (1/c)\sqrt{\omega\varepsilon\cdot\omega\mu}$, и групповая скорость удовлетворяет соотношению

$$\frac{c}{v} = \frac{d}{d\omega}\sqrt{\omega\varepsilon\cdot\omega\mu} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{d}{d\omega}(\omega\mu)\right].$$

С другой стороны, для бегущей плоской волны

$$E_x = \sqrt{\mu/\varepsilon}\,H_y = Ae^{iKz}, \quad E_y = -\sqrt{\mu/\varepsilon}\,H_x = Be^{iKz},$$

так что

$$\overline{\mathfrak{S}}_z = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(|A|^2 + |B|^2),$$

$$\overline{w} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon)\,|\mathbf{E}|^2 + \frac{d}{d\omega}(\omega\mu)\,|\mathbf{H}|^2\right] =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon) + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{d}{d\omega}(\omega\mu)\right](|A|^2 + |B|^2),$$

откуда и получается соотношение (48.07).

4. Исходя из уравнения (1.18) при $p = 0$, вывести уравнение (48.07) для усредненных величин в передающей линии без потерь.

Решение. В декартовых составляющих уравнение (1.18) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{S}_z}{\partial z} = 0.$$

При усреднении по поперечному сечению $z = \mathrm{const}$ появляется интеграл (33.11) для вектора $\mathfrak{S}$. Правая часть соотношения (33.11) — это интеграл по контуру C, ограничивающему поле в поперечном сечении. Контур C всегда можно выбрать так, чтобы интеграл по нему был равен нулю; для волноводов он совпадает с границей стенки (см. рис. 31).

Глава IX.

ПОТЕРИ В ВОЛНОВОДАХ

§ 50. Волноводы, заполненные веществом

Выше рассмотрены свойства волноводов в предположении, что пространство внутри волновода имеет электромагнитные свойства пустоты. В ряде случаев интересно знать, как изменяются свойства волновода при его заполнении однородным веществом с произвольными электродинамическими параметрами. Для ответа на этот вопрос достаточно воспользоваться леммой § 21. Обозна-

чим через ε и μ комплексную диэлектрическую и магнитную проницаемость однородной среды, заполняющей волновод. Продольное волновое число в пустом волноводе

$$h=\sqrt{k^2-g^2}, \tag{50.01}$$

где g — поперечное волновое число, зависящее лишь от геометрии волновода.

При переходе к волноводу, заполненному веществом, согласно § 21 нужно заменить волновое число k для пустоты комплексным волновым числом $K=k\sqrt{\varepsilon\mu}$ в веществе, и тогда

$$h=\sqrt{k^2\varepsilon\mu-g^2}. \tag{50.02}$$

Отсюда видно, что, заполняя волновод диэлектриком с вещественным значением $\varepsilon>1$ и $\mu=1$, получаем возможность передавать по волноводу более длинные волны. Действительно, распространение волны в волноводе без заполнения возможно лишь при $k>g$, а с диэлектрическим заполнением — при $k>g/\sqrt{\varepsilon}$: волна будет распространяться при частотах более низких.

Если среда, заполняющая волновод, имеет потери, т. е. проницаемость ε или μ имеет заметную мнимую часть, то при любых соотношениях между рабочей длиной волны и поперечными размерами волновода данная волна в волноводе имеет комплексное продольное волновое число h, как это следует из формулы (50.02). В этом случае нельзя провести четкого разделения волн в волноводе на распространяющиеся и затухающие, поскольку распространение волн неизбежно связано с затуханием, так как при распространении возникают потери в веществе. Чисто затухающих волн при этом тоже нет, так как из-за потерь в среде все волны переносят активную мощность и обладают некоторой скоростью распространения.

Сказанное можно иллюстрировать следующими соотношениями: положим

$$\varepsilon\mu=\varepsilon_0\mu_0+\eta,\quad h_0^2=k^2\varepsilon_0\mu_0-g^2, \tag{50.03}$$

где ε_0 и μ_0 вещественны и положительны; тогда формула (50.02) приобретает вид

$$h=\sqrt{h_0^2+\eta k^2}, \tag{50.04}$$

и если величина η мала по абсолютной величине, то

$$h=h_0+\eta k^2/2h_0. \tag{50.05}$$

Если $h_0>0$ и $\eta=i|\eta|$, то поправочный член в формуле (50.05) чисто мнимый, он определяет затухание распространяющейся волны. Если же $h_0=i|h_0|$ и $\eta=i|\eta|$, то поправочный член вещественный, он дает для затухающей волны малую вещественную часть продольного волнового числа, т. е. конечную фазовую скорость.

Однако формула (50.05) применима только при $\eta k^2\ll h_0^2$ и вблизи критической частоты, когда $|h_0|\to 0$, дает неправильные

результаты, в то время как формула (50.04) применима при любых частотах и при $h_0=0$ дает простой результат $h=k\sqrt{\eta}$.

Из приведенных выше простых соотношений видно, что достаточно малые потери вызывают малое возмущение волн в волноводе. Данное в гл. VII разделение волн на распространяющиеся и затухающие правильно передает их основные черты при частотах, не слишком близких к критической частоте каждой волны. Наличие потерь в волноводе делает, однако, скачкообразный переход от распространения к затуханию при критической частоте данной волны непрерывным, размытым.

Из этих соотношений следует также методический вывод: если метод возмущений приводит к формуле вида (50.05), не применимой при $h_0\to 0$, то это отнюдь не означает, что метод возмущений не годится. В этом случае надо такую формулу заменить формулой вида (50.04), т. е. искать малую поправку, пропорциональную η, не для h, а для h^2.

§ 51. Волноводы с конечной проводимостью стенок

При изложении теории волноводов предполагалось, что стенки волноводов обладают идеальной проводимостью. Разумеется, в реальных условиях проводимость стенок всегда конечна. Конечная проводимость стенок может быть учтена с помощью приближенных граничных условий Леонтовича, применимых при сильном скин-эффекте (см. § 25 и 26). Так как волноводы обычно используются в сантиметровом диапазоне, где толщина скин-слоя имеет порядок микрона или даже меньше (см. § 12), то скин-эффект в металлических стенках волновода является сильным и можно записать на поверхности стенок граничное условие

$$[\mathbf{nE}] = -\zeta\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{nH}]] \qquad (51.01)$$

(см. § 25). Волновой импеданс ζ металлов есть безразмерное комплексное число, имеющее весьма малую абсолютную величину (см. начало § 26). Если положить $\zeta=0$, то граничное условие (51.01) принимает вид

$$[\mathbf{nE}]=0, \qquad (51.02)$$

т. е. переходит в граничное условие $E_t=0$ для идеально проводящих стенок, и мы возвращаемся к развитой выше теории волноводов с идеально проводящими стенками. Малость параметра ζ означает, что структура электромагнитного поля волны в волноводе с металлическими стенками мало отличается от структуры поля в волноводе, стенкам которого приписывается идеальная проводимость. Затухание волн, вызываемое омическими потерями в стенках волновода, обычно невелико (см. § 52). Однако при достаточно большой длине волновода как линии передачи полное затухание может быть весьма ощутимым, поэтому важно знать коэффициент затухания.

Обозначим через h'' коэффициент затухания волноводной волны по полю. Если обозначить через $\overline{\Sigma}(z)$ активную мощность, переносимую волной через поперечное сечение волновода z, то при наличии потерь

$$\overline{\Sigma}(z) = \overline{\Sigma}(0)\, e^{-2h''z} \tag{51.03}$$

(для волны, распространяющейся в положительном направлении оси z). Поэтому

$$-d\overline{\Sigma}/dz = 2h''\overline{\Sigma}. \tag{51.04}$$

Применим теперь теорему об активной мощности (§ 6), для чего воспользуемся соотношением

$$-\operatorname{div}\overline{\mathfrak{S}} = \overline{p}, \tag{51.05}$$

получающимся из уравнения (6.10) путем приравнивания его вещественных частей. Соотношение (51.05) есть закон сохранения энергии в дифференциальной форме: $\overline{p}$ согласно формуле (6.10) есть среднее значение объемной плотности электрических потерь в стенках, поскольку в данной задаче магнитные потери и сторонние токи отсутствуют, а

$$\overline{\mathfrak{S}} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] \tag{51.06}$$

согласно формуле (6.15) есть среднее значение вектора Умова — Пойнтинга. Проинтегрируем соотношение (51.05) по всему поперечному сечению волновода $z=\text{const}$, включая его стенки, и воспользуемся двухмерной теоремой Гаусса — Остроградского (см. также § 33 и задачу 4 к гл. VIII)

$$\int\limits_{S_\perp}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{S}}_x}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\mathfrak{S}}_y}{\partial y}\right)dS = \oint\limits_{C_0}\overline{\mathfrak{S}}_n\, ds, \tag{51.07}$$

где C_0 есть контур в плоскости $z=\text{const}$, ограничивающий сечение $S_\perp$ и проведенный внутри стенок волновода на такой глубине, что поле на контуре C_0 можно считать равным нулю. Так как интеграл

$$\overline{P} = \int\limits_{S_\perp}\overline{p}\,dS \tag{51.08}$$

дает среднюю мощность потерь на единицу длины волновода (погонную мощность потерь), а введенная выше величина

$$\overline{\Sigma} = \int\limits_{S_\perp}\overline{\mathfrak{S}}_z\,dS, \tag{51.09}$$

то окончательно из соотношения (51.05) получаем

$$-d\overline{\Sigma}/dz = \overline{P}, \tag{51.10}$$

т. е. скорость убывания мощности волны при ее распространении вдоль линии определяется потерями в линии.

Пользуясь формулой (51.04), получаем выражение для коэффициента затухания

$$h'' = \overline{P}/2\overline{\Sigma}, \tag{51.11}$$

которое является в принципе совершенно точным, если под $\overline{\Sigma}$ и $\overline{P}$ понимать точные значения для волновода со стенками конечной проводимости. Заметим, что при сильном скин-эффекте погонную мощность потерь $\overline{P}$ можно вычислять по формулам (26.04) и (26.10), т. е.

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\oint_C \widetilde{r}\,|\mathbf{I}|^2\,ds = \frac{c}{8\pi}\oint_C \operatorname{Re}\zeta\,|[\mathbf{n}\mathbf{H}]|^2\,ds. \tag{51.12}$$

В этих выражениях, в отличие от (51.07), интегрирование производится по дуге контура C, являющегося линией пересечения стенки волновода с плоскостью $z=\text{const}$. Выражения (51.12) дают потери на единицу длины оси z, поэтому в них фигурирует не элемент площади $dS=dsdz$, как в § 26, а элемент дуги ds.

При применении формулы (51.12) плотность квазиповерхностного тока $\mathbf{I}$ и потери в стенках точно не известны. Не известна также активная мощность $\overline{\Sigma}$, переносимая волной при конечной проводимости стенок. Действительно, эти величины точно известны только тогда, когда электродинамическая задача о волноводе с неидеальными стенками решена строго, а в таком случае известны электромагнитное поле и волновое число h и в применении формулы (51.11) нет необходимости (см. задачу 1).

Поэтому формулу (51.11) применяют обычно для приближенного расчета коэффициента затухания, подставляя в нее величины, образованные с помощью известного решения задачи о волноводе с идеально проводящими стенками. Активная мощность $\overline{\Sigma}$ волноводной волны вычисляется по формулам § 44, а мощность потерь $\overline{P}$ рассчитывается по формуле (51.12), в которой магнитное поле $\mathbf{H}$ берется для идеального волновода или, что то же, в формулу (51.12) вместо $\mathbf{I}$ подставляется поверхностная плотность тока $\mathbf{i}$ на идеально проводящей стенке волновода.

Этот расчет основан на том, что вследствие малости параметра ζ структура поля внутри волновода мало изменяется при замене идеально проводящих стенок стенками с хорошей, но конечной проводимостью (см. выше). Поэтому, рассчитывая коэффициент затухания h'' по формуле (51.11), можно в первом приближении пренебречь возмущением поля внутри волновода, вплоть до самой поверхности стенки. В стенке поле изменяется сильно, так как при конечной проводимости в ней образуется скин-слой, приводящий к потерям. Плотность квазиповерхностного тока в скин-слое определяется тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности стенки; последняя приравнивается тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности идеально проводящей стенки.

Изложенный способ расчета часто называют методом скин-эффекта. Он является разновидностью метода возмущений и применяется в других случаях, например, при расчете декремента затухания объемных резонаторов (см. гл. XV). Можно сказать, что в данном методе принимается во внимание лишь превращение поверхностного тока на идеальном проводнике в квазиповерхностный ток реального проводника и выделение тепла этим квазиповерхностным током.

Рассчитаем сначала коэффициент затухания электрических волн в волноводе произвольной формы. Формулы § 44 дают

$$\overline{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} hk \int\limits_{S_\perp} \left(\left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial y} \right|^2 \right) dS. \qquad (51.13)$$

Преобразуем подынтегральное выражение, используя уравнение (39.03):

$$|\partial \Pi/\partial x|^2 + |\partial \Pi/\partial y|^2 = \operatorname{grad} \Pi \cdot \operatorname{grad} \Pi^* = \operatorname{div} (\Pi^* \operatorname{grad} \Pi) - \Pi^* \Delta \Pi =$$
$$= \operatorname{div} (\Pi^* \operatorname{grad} \Pi) + g^2 |\Pi|^2, \ \Delta \Pi = \partial^2 \Pi/\partial x^2 + \partial^2 \Pi/\partial y^2.$$

Применяя теорему Гаусса — Остроградского, получаем

$$\int\limits_{S_\perp} \left(\left| \frac{\partial \Pi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right|^2 \right) dS = \oint\limits_C \Pi^* \frac{\partial \Pi}{\partial n} ds + g^2 \int\limits_{S_\perp} |\Pi|^2 dS. \qquad (51.14)$$

Вследствие граничного условия (39.06) интеграл по контуру C равен нулю и формула (51.13) принимает вид

$$\overline{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} hkg^2 \int\limits_{S_\perp} |\Pi^e|^2 dS. \qquad (51.15)$$

Для электрических волн

$$|[\mathbf{nH}]|^2 = |H_t|^2 = k^2 |\partial \Pi^e/\partial n|^2, \qquad (51.16)$$

поскольку составляющая $\mathbf{H}$ в направлении x или y по формулам (39.05) пропорциональна производной функции Π^e в перпендикулярном направлении. Считая для простоты, что материал стенок обладает всюду одними и теми же электромагнитными параметрами ($\zeta = \text{const}$), получаем погонную мощность потерь в виде

$$\overline{P} = \frac{c}{8\pi} \zeta' k^2 \oint\limits_C \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial n} \right|^2 ds, \qquad (51.17)$$

а коэффициент затухания (51.11) — в виде

$$h'' = \zeta' \varkappa^2 / 2h, \qquad (51.18)$$

где для сокращения обозначено

$$\varkappa^2 = k \oint \left| \frac{\partial \Pi^e}{\partial n} \right|^2 ds / g^2 \int |\Pi^e|^2 dS. \qquad (51.19)$$

Активная мощность, переносимая магнитной волной, дается формулой

$$\overline{\Sigma} = \frac{c}{8\pi} hkg^2 \int\limits_{S_\perp} |\Pi^m|^2 \, dS, \tag{51.20}$$

аналогичной формуле (51.15). Здесь также используется соотношение (51.14) для функции Π^m, причем интеграл по контуру C исчезает вследствие граничного условия (40.03). Согласно формулам (40.02) имеем

$$|[\mathbf{nH}]|^2 = |H_t|^2 = |H_s|^2 + |H_z|^2 = h^2 \left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial s} \right|^2 + g^2 |\Pi^m|^2 , \tag{51.21}$$

где H_s — составляющая магнитного поля вдоль касательной к контуру C.

Наличие двух членов в правой части этой формулы объясняется тем, что в магнитных волнах поверхностная плотность тока имеет как продольную составляющую, пропорциональную H_s (первый член), так и поперечную составляющую, пропорциональную H_z (второй член). У электрических волн токи текут лишь в продольном направлении (см. § 42), и поэтому в правой части формулы (51.16) имеется лишь один член.

Если ζ' не зависит от s, то формулы (51.12) и (51.21) дают

$$\overline{P} = \frac{c}{8\pi} \zeta' \oint\limits_C \left(h^2 \left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial s} \right|^2 + g^4 |\Pi^m|^2 \right) ds. \tag{51.22}$$

Коэффициент затухания магнитных волн также можно записать в виде (51.18), но теперь

$$\varkappa^2 = \left[h^2 \oint \left| \frac{\partial \Pi^m}{\partial s} \right|^2 ds + g^4 \oint |\Pi^m|^2 \, ds \right] \Big/ kg^2 \int |\Pi^m|^2 \, dS. \tag{51.23}$$

Напомним еще раз, что во всех этих формулах g и h (а также Π^e и Π^m) относятся к идеальному волноводу.

Примеры количественных расчетов по формуле (51.21) даны в § 52. Здесь ограничимся качественным исследованием зависимости затухания от частоты. Для этого введем относительную частоту

$$\nu = f/f_0 = \lambda_0/\lambda = k/g, \tag{51.24}$$

равную отношению рабочей частоты к критической частоте данной волны. Рассмотрим значение относительной частоты в пределах $1 < \nu < \infty$, когда данная волна в идеально проводящем волноводе является распространяющейся. Благодаря конечной проводимости стенок волна приобретает затухание (51.18), для вычисления которого необходимо знать лишь функции Π^e или Π^m. Эти собственные функции, равно как и соответствующие им собственные значения g^2, зависят лишь от геометрии волновода и не зависят от частоты. От частоты зависят лишь следующие величины: k (пропорциональна ν), h (пропорциональна $\sqrt{\nu^2 - 1}$) и ζ'

[пропорциональна $\sqrt{\nu}$, см формулу (26.02)]. Поэтому для электрических волн

$$h'' = \frac{C_0 \nu \sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu^2 - 1}}, \tag{51.25}$$

а для магнитных

$$h'' = \frac{C_1 (\nu^2 - 1) + C_2}{\sqrt{\nu (\nu^2 - 1)}}, \tag{51.26}$$

где положительные коэффициенты C_0, C_1 и C_2 от ν не зависят. Эти формулы показывают, что при $\nu \to 1$, т. е. при стремлении частоты к критической, затухание волн неограниченно возрастает и при $\nu = 1$ обращается в бесконечность. Последний вывод является ошибочным и объясняется неприменимостью формулы (51.18) вблизи критической частоты (см. ниже); однако при $\nu \approx 1$ затухание волн действительно становится аномально большим: оно во много раз больше, чем при более высоких частотах.

При больших значениях ν формула (51.25) принимает вид $h'' = C_0 \sqrt{\nu}$, а формула (51.26) приводит к аналогичному соотношению $h'' = C_1 \sqrt{\nu}$ для магнитных волн. Таким образом, при достаточно высоких частотах коэффициент затухания возрастает пропорционально квадратному корню из частоты. Подобный закон имеет место и в теории длинных линий [см. формулу (34.07)]. Во всех случаях эта зависимость объясняется тем, что параметры $\tilde{r}$ и ζ', определяющие потери, пропорциональны корню квадратному из частоты.

Вследствие возрастания h'' при $\nu \to 1$ и $\nu \to \infty$ зависимость коэффициента затухания от частоты имеет характер кривой A на рис. 54. Эта кривая имеет один минимум при $\nu > 1$.

Затухание электрических волн всегда представляется кривыми качественно того же вида, что и кривая A на рис. 54. Однако затухание некоторых магнитных волн может изменяться и по кривой вида B. Этот исключительный случай имеет место при $C_1 = 0$, когда формула (51.26) принимает вид

$$h'' = C_2 / \sqrt{\nu (\nu^2 - 1)}. \tag{51.27}$$

В этом случае при увеличении частоты затухание быстро спадает: при $\nu \gg 1$ имеем $h'' = C_2 / \nu^{3/2}$. Как видно из формулы (51.26), условие $C_1 = 0$ влечет за собой равенство

$$\oint |\partial \Pi^m / \partial s|^2 \, ds = 0,$$

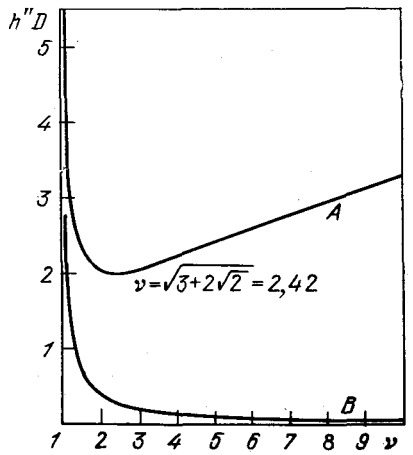


Рис. 54. Коэффициент затухания как функция частоты

что возможно лишь при

$$\partial \Pi^m/\partial s = 0, \text{ или } \Pi^m = \text{const на } C. \tag{51.28}$$

Таким образом, затухание представляется кривой вида B лишь для магнитной волны, функция Π^m которой постоянна на граничном контуре C. В прямоугольном волноводе согласно общей формуле (41.13) такой волны нет, но в круглом волноводе она существует; это — волна H_{01}, функция Π^m которой определяется формулой (42.08), а также волны H_{02}, H_{03} и т. д.

Заметим, что соотношение (51.28) показывает, что у данной магнитной волны продольные токи равны нулю. Физическое отличие волны H_{01} в круглом волноводе, приводящее к аномально малым затуханиям, заключается именно в отсутствии у нее продольных токов (см. § 42). Наличие продольных токов у всех других волн ведет к тому, что затухание при $\nu \gg 1$ возрастает пропорционально $\sqrt{f}$, как у обычных длинных линий, где токи текут лишь в продольном направлении.

§ 52. Затухание важнейших волн в зависимости от частоты

Выведем расчетную формулу для коэффициента затухания волны H_{10} в прямоугольном волноводе, применяемом обычно для передачи сантиметровых радиоволн. Для этого воспользуемся формулой (51.18) и подставим в формулу (51.23)

$$\Pi^m = \cos\frac{\pi x}{a} \quad \text{и} \quad g = \frac{\pi}{a} \tag{52.01}$$

в соответствии с выражением (41.16). Напомним, что через a и b обозначены стороны прямоугольного сечения волновода. Пользуясь соотношениями

$$\int |\Pi^m|^2 \, dS = \int_0^a \int_0^b \cos^2\frac{\pi x}{a} \, dx dy = \frac{ab}{2},$$

$$\oint |\Pi^m|^2 \, ds = a + 2b, \quad \oint |\partial \Pi^m/\partial s|^2 \, ds = \frac{\pi^2}{a} = g^2 a,$$

получим

$$\varkappa^2 = 4\,\frac{(a/2b)\,k^2 + g^2}{ka}, \tag{52.02}$$

так что

$$h'' = \frac{2\zeta'}{a}\,\frac{(a/2b)\,k^2 + g^2}{kh}. \tag{52.03}$$

Вводя относительную частоту ν по формуле (51.24) и пользуясь соотношением (26.02), находим

$$h'' = \frac{1}{D}\,\frac{(a/2b)\,\nu^2 + 1}{\sqrt{\nu\,(\nu^2 - 1)}}, \quad D = a\sqrt{\frac{\sigma}{f_0}}. \tag{52.04}$$

Через f_0 здесь обозначена критическая частота волны H_{10} ($f_0 = c/\lambda_0 = c/2a$), поэтому

$$D = a\sqrt{2\sigma a/c}, \text{ или } D = \sqrt{60\sigma a^3}; \qquad (52.05)$$

в последнюю формулу нужно подставлять значение σ, $Ом^{-1}\cdot см^{-1}$ [см. мнемоническое правило (30.12)]. Ширину a нужно выражать в сантиметрах, тогда величина D, имеющая размерность длины, также получается в сантиметрах.

Кривая A на рис. 54 построена по формуле (52.04) для волны H_{10} в прямоугольном волноводе, бóльшая сторона которого вдвое шире меньшей ($a=2b$). Видно, что минимальное затухание достигается при $\nu=2{,}42$, причем минимум является довольно пологим. Рабочий диапазон частот обычно выбирают слева от этого минимума (при $\nu<2$), поскольку при $\nu>2$ появляются распространяющиеся волны H_{01} и H_{20}, в сильной степени усложняющие свойства волновода как передающей линии.

Оценим теперь порядок величины D в формуле (52.04). Для этого положим $a=2$ см, $b=1$ см, что примерно соответствует размерам стандартного прямоугольного волновода для трехсантиметрового диапазона волн, и возьмем медный волновод с проводимостью стенок $\sigma=5\cdot10^{17}$ $с^{-1}$. В этом случае

$$f_0 = 7{,}5\cdot10^9 \text{ Гц}, \quad \sqrt{f_0/\sigma} = 1{,}23\cdot10^{-4}, \quad D \approx 2\cdot10^4 \text{ см} = 200 \text{ м}.$$

Поэтому вблизи минимума затухания на рис. 54 (где $h''D\approx2$) электромагнитное поле волны H_{10} ослабляется в e раз при передаче на расстояния порядка 100 м. При увеличении рабочей длины волны и соответственном расширении поперечных габаритов волновода дальность передачи по волноводу увеличивается, так как длина D пропорциональна $a^{3/2}$.

Наблюдаемые на практике значения коэффициентов затухания всегда несколько превосходят расчетные. Это расхождение, достигающее 15...25%, можно формально устранить, вводя в формулу (52.04) или (52.05) эффективное значение проводимости стенок, меньшее проводимости σ, измеренной на постоянном токе или на более низких частотах. Аналогичное расхождение наблюдается для декрементов затухания объемных резонаторов.

Снижение проводимости не связано, как правило, с дисперсией и объясняется следующим образом. Во-первых, благодаря малой толщине скин-слоя на сантиметровых волнах в пропускании тока участвуют главным образом поверхностные слои металла, которые вследствие окисления или механической обработки проводят хуже основной массы металла, переносящей ток на низких частотах. Во-вторых, микроскопические неровности и шероховатости металла также приводят к увеличению потерь по сравнению с гладкой поверхностью стенок, принятой при расчетах. В пользу этого объяснения говорит то обстоятельство, что эффективная проводимость металла в сильной степени зависит от способа обработки его поверхности.

Как было отмечено в § 51, почти все волны в волноводах имеют качественно такую же зависимость затухания от частоты, что

и волна H_{10} в прямоугольном волноводе (кривая A на рис. 54). Исключение составляет волна H_{01} (а также волны H_{02}, H_{03}, ...) в круглом волноводе, затухание которой с ростом частоты неограниченно падает. Для этой волны согласно формуле (42.08) нужно взять

$$\Pi^m = J_0(gr) \text{ и } g = 3{,}832/a;$$

тогда

$$\int |\Pi^m|^2 \, dS = 2\pi \int_0^a J_0^2(gr)\, r\, dr = (2\pi/g^2) \int_0^{ga} J_0^2(x)\, x\, dx,$$

$$\oint |\partial \Pi^m/\partial s|^2 \, ds = 0, \quad \oint |\Pi^m|^2 \, ds = 2\pi a J_0^2(ga).$$

Известное соотношение теории бесселевых функций

$$\int_0^{ga} J_0^2(x)\, x\, dx = \frac{1}{2}(ga)^2 [J_0^2(ga) - J_1^2(ga)] \tag{52.06}$$

в данном случае упрощается в силу того, что $J'_0(ga) = -J_1(ga) = 0$. По формуле (51.23) получаем

$$\varkappa^2 = 2g^2/ka, \tag{52.07}$$

так что коэффициент затухания волны H_{01} в круглом волноводе можно записать в виде

$$h'' = \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{\nu(\nu^2 - 1)}}, \quad D = 2a \sqrt{\frac{\sigma}{f_0}}. \tag{52.08}$$

Кривая B на рис. 54 вычислена по этой формуле.

Заметим, что при $a/2b \to 0$ формула (52.04) принимает тот же вид, что и формула (52.08). Таким образом, заменяя в пределе $b = \infty$ прямоугольный волновод парой параллельных плоскостей, получаем для волны H_{10} в этой передающей линии аномально малое затухание — такое же, как у волны H_{01} в круглом волноводе. Физически это объясняется тем, что волна H_{10} в прямоугольном волноводе возбуждает продольные токи на сторонах a, а на сторонах b текут лишь поперечные токи, как легко показать из формул (41.17) для магнитного поля. Неограниченно увеличивая сторону b и получая в пределе пару параллельных плоскостей, приходим к волне с чисто поперечными токами на этих плоскостях.

§ 53*. Волны в волноводе и метод возмущений

Конечная проводимость стенок приводит не только к затуханию волноводных волн, но также влияет на их скорость и на структуру поля. Все эти явления можно учесть более последовательно, если рассматривать переход к граничному условию (51.01) от граничного условия (51.02) методом возмущений, считая ζ ма-

лым параметром и представляя электромагнитное поле **E**, **H** в виде

$$\mathbf{E}=\{\mathbf{E}_0(x,\ y)+\zeta\mathbf{E}_1(x,\ y)+\ldots\}e^{ihz},$$
$$\mathbf{H}=\{\mathbf{H}_0(x,\ y)+\zeta\mathbf{H}_1(x,\ y)+\ldots\}e^{ihz}, \qquad (53.01)$$

где волновое число

$$h=h_0+\zeta h_1+\ldots \qquad (53.02)$$

При этом поля $\mathbf{E}_0e^{ih_0z}$, $\mathbf{H}_0e^{ih_0z}$ соответствуют идеально проводящему волноводу, а выражения, пропорциональные ζ, дают первую поправку на конечную проводимость стенок, которой обычно можно ограничиться.

Из формулы (53.02) вытекает выражение для коэффициента затухания

$$h''=\zeta'\operatorname{Im}h_1+\zeta''\operatorname{Re}h_1 \quad (\zeta'=\operatorname{Re}\zeta,\ \zeta''=\operatorname{Im}\zeta). \qquad (53.03)$$

Сопоставляя формулу (53.03) с полученным выше соотношением (51.21), получим

$$\operatorname{Re}h_1=0,\ h_1=i\varkappa^2/2h_0, \qquad (53.04)$$

где h_0 — волновое число в идеальном волноводе, а положительная величина $\varkappa^2$ определяется формулой (51.19) для электрических волн и формулой (51.23) для магнитных. Таким образом, формула (53.02) принимает вид

$$h=h_0+i\zeta\varkappa^2/2h_0. \qquad (53.05)$$

Физический смысл этой формулы в том, что вещественная часть ζ, т. е. активное поверхностное сопротивление металла $\tilde{r}$ [см. формулы (26.05) и (26.09)], определяет затухание волны, а мнимая часть ζ, т. е. реактивное поверхностное сопротивление $\tilde{x}$, определяет фазовую скорость волны. Действительно, формула (53.05) дает

$$h'=h_0-\zeta''\varkappa^2/2h_0. \qquad (53.06)$$

Согласно формуле (26.02) обычно $\zeta''=-\zeta'$, поэтому

$$h'=h_0+\zeta'\varkappa^2/2h_0=h_0+h'', \qquad (53.07)$$

так что фазовая скорость

$$u=\omega/(h_0+h'') \qquad (53.08)$$

уменьшается под влиянием конечной проводимости стенок. Подобный результат был получен для длинных линий [см. формулу (34.06)].

Недостаток выражения (53.05) и следующих за ним заключается в том, что вблизи критической частоты (когда $h_0\to0$) они становятся неприменимыми. Этот недостаток легко исправить, если учесть соображения, высказанные в § 50, а именно от формулы (53.05) следует перейти к формуле

$$h=\sqrt{h_0^2+i\zeta\varkappa^2}, \qquad (53.09)$$

которая уже применима при любых частотах. При критической частоте для идеального волновода (когда $h_0=0$) $h=\varkappa\sqrt{i\zeta}$, так что затухание имеет порядок $\varkappa\sqrt{|\zeta|}$. Поскольку величина $|\zeta|$ мала, а при более высоких частотах затухание пропорционально $|\zeta|$, то отсюда следует, что при приближении рабочей частоты к критической частоте затухание резко возрастает. Эта тенденция приближенно передается формулой (51.18), хотя при самой критической частоте и при весьма близких частотах эта формула уже неприменима.

Формула (53.09) сохраняет свою силу также при частотах, меньших критической частоты; из нее вытекает формула (53.05), которая вследствие соотношения $h_0=i|h_0|$ принимает вид

$$h=i|h_0|+\zeta\varkappa^2/2|h_0|. \qquad (53.10)$$

Таким образом, благодаря конечной проводимости стенок продольное волновое число затухающей волны приобретает небольшую вещественную часть, и эта волна становится слегка распространяющейся. Точно так же влияют потери в объеме волновода (см. § 50).

В § 51 и 52 было отмечено уникальное свойство волны H_{01}, а также всех волн H_{0n}: их коэффициент затухания неограниченно убывает с ростом частоты. Имеет смысл исследовать эти волны более детально. Прежде всего эти волны допускают точный расчет (см. задачу 1), хотя практически достаточно пользоваться первым приближением метода возмущений. Сравнительная простота точного расчета обусловлена тем, что при конечной проводимости стенок волны H_{0n} сохраняют свой магнитный характер, т. е. имеют $E_z=0$. В общем случае этого уже не будет, а именно волны, являющиеся в идеальном волноводе электрическими, под влиянием конечной проводимости стенок становятся слегка магнитными, т. е. приобретают небольшую составляющую H_z. Наоборот, магнитные волны становятся слегка электрическими благодаря приобретению малой составляющей E_z. Поэтому электромагнитная волна в неидеальном волноводе представляется в виде суммы электрической и магнитной волн, распространяющихся с одним и тем же комплексным волновым числом h. Таким свойством обладают все волны в прямоугольном волноводе и несимметричные волны (волны E_{11}, H_{11}...) в круглом. Волны E_{0n} остаются электрическими.

Другой особенностью волны H_{0n} является ее вырождение: в идеальном круглом волноводе то же волновое число h_0 имеет волна E_{1n} (см. § 42). Под влиянием конечной проводимости стенок это вырождение снимается, поскольку волны H_{0n} и E_{1n} имеют различное затухание. При этом волны H_{0n} и E_{1n} имеются и в реальных волноводах, но в слегка возмущенном виде.

Однако расщепление волновых чисел h у волн H_{0n} и E_{1n}, вызванное потерями в стенках, невелико. При более сильных возмущениях это расщепление не сказывается и волны E_{0n} и E_{1n} сво-

бодно трансформируются друг в друга. Например, при изгибе круглого волновода (при его повороте на некоторый угол) волна H_{01} переходит в волну E_{11} и этот переход нельзя ослабить, делая радиус поворота достаточно большим. Волна H_{01}, бегущая в прямом волноводе, рассеивается на случайно расположенных небольших неоднородностях и порождает целый спектр волн с малыми амплитудами, в том числе волну E_{11}. Поскольку скорости распространения волн H_{01} и E_{11} близки, амплитуда волны E_{11} имеет тенденцию накапливаться (резонанс в пространстве, см. гл. XIII), в то время как амплитуды других распространяющихся волн остаются малыми.

В течение многих лет в СССР и за рубежом велись теоретические и экспериментальные работы по использованию волны H_{01} в круглом волноводе для передачи колебаний сантиметрового и миллиметрового диапазонов на большие расстояния. Малое затухание волны H_{01} реализуется при таких частотах, когда волновод может поддерживать распространение многих волн, и главная задача заключается в том, чтобы возбудить и на всем протяжении трассы сохранить волну H_{01} в чистом виде, в частности, не допустить ее перерождения в волну E_{11}. Для этого предложено несколько способов, наиболее простой и вместе с тем эффективный — это нанесение диэлектрического слоя на стенку волновода. Поскольку у волны H_{01} электрическое поле вблизи стенки (составляющая E_φ) близко к нулю, этот слой возмущает волну H_{01} лишь в слабой степени; волны H_{02}, H_{03}, ... возмущаются немного больше, но все же очень слабо. Все другие волны, в том числе E_{11}, вблизи стенки имеют большую составляющую E_r и испытывают сильное возмущение, а из-за потерь в диэлектрике получают дополнительное затухание. Расщепление волновых чисел у волн H_{0n} и E_{1n} увеличивается и их взаимная трансформация ослабевает.

В настоящее время использование волны H_{01} в круглом волноводе для передачи информации перестало быть актуальным из-за появления оптических квантовых генераторов и волоконных линий передачи (световодов). Однако в технике сверхвысоких частот волна H_{01} находит довольно широкое применение; в частности, отрезки круглых волноводов служат высокодобротными объемными резонаторами (см. гл. XV). Опыт, накопленный в ходе работ с волной H_{01}, пригодился при создании других сверхразмерных линий передачи — волноводов, поддерживающих распространение многих волн.

В § 51 и 53 предполагалось, что структура поля данной волны слабо изменяется под влиянием конечной проводимости стенок и что данная волна распространяется в неидеальном волноводе как единое целое, не распадаясь на несколько волн. Поэтому полученные выше результаты относятся лишь к невырожденным волнам (например, к волне H_{10} в прямоугольном волноводе). Если же данная волна является вырожденной, то для применения к ней формулы (51.18) или (53.09) необходимо произвести особое исследование. Как было отмечено, волна H_{01} остается «сама собой»

и при учете потерь в стенке круглого волновода, хотя имеется волна E_{11} с тем же волновым числом h_0. В других случаях необходимо показать, что в неидеальном волноводе данная волна не распадается. Если этот вопрос не разобран, то по формуле (51.18) можно получить коэффициент затухания несуществующей волны.

Во многих книгах по волноводам читатель найдет графики для коэффициентов затухания волн E_{11}, H_{11} и т. д. в прямоугольном волноводе, вычисленные по формуле (51.18) или формулам, ей эквивалентным. Эти графики не имеют смысла, поскольку в реальном прямоугольном волноводе волна E_{11} или волна H_{11} в отдельности распространяться не может, а существуют лишь волны, близкие к некоторым линейным комбинациям этих волн и зависящие от характера возмущений.

Задачи к гл. IX

1. Исходя из выражения (42.08), исследовать волны H_{0n} в круглом волноводе с конечной проводимостью стенок, ставя при $r=a$ граничное условие $E_\varphi=\zeta H_z$. Исследовать получающееся уравнение для поперечного волнового числа g, учитывая соотношения

$$J'_0(x)=-J_1(x),\quad J'_1(x)=J_0(x)-J_1(x)/x \tag{a}$$

и малость параметра ζ. Сравнить с результатами § 52 и 53.

Решение. Для волн H_{0n}

$$E_\varphi=-\mathrm{i}\,k\frac{d\,\Pi^m}{dr}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}=\mathrm{i}\,k\,g\,CJ_1(gr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz},\quad H_z=g^2\,\Pi^m\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}=g^2\,CJ_0(gr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}$$

и граничное условие приводит к характеристическому уравнению

$$J_1(ga)=-\mathrm{i}\zeta(g/k)J_0(ga) \tag{b}$$

для g. При $\zeta=0$ должно быть $J_1(ga)=0$; корень этого уравнения обозначим через g_0, а корень уравнения (b) будем искать в виде $g=g_0+\zeta g_1+\ldots$ В первом приближении в силу второго соотношения (a) можно положить

$$J_1(ga)=J_1(g_0a)+\zeta J'_1(g_0a)\,g_1a=\zeta g_1aJ_0(g_0a),\quad J_0(ga)=J_0(g_0a)$$

и уравнение (b) дает $g_1=-\mathrm{i}g_0/ka$, откуда

$$g^2=g^2_0+2\zeta g_0g_1=g^2_0-\mathrm{i}\zeta\varkappa^2,\quad \varkappa^2=2\mathrm{i}g_0g_1=g^2_0/ka$$

и

$$h=\sqrt{k^2-g^2}=\sqrt{h_0^2+\mathrm{i}\,\zeta\varkappa^2},\quad h_0^2=k^2-g_0^2$$

в соответствии с формулами (52.08) и (53.09).

2. Применить формулу (53.09) к поперечной волне в коаксиальной линии и сравнить полученный результат с формулой (34.03). Учесть, что эту волну можно трактовать как волну E (ее можно назвать волной E_{00}), у которой $g_0=0$, поэтому для нее формула (51.14) принимает вид

$$\int\limits_{S_\perp}\left(\left|\frac{\partial\Pi^e}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\Pi^e}{\partial y}\right|^2\right)dS=\oint\limits_C\Pi^{e*}\frac{\partial\Pi^e}{\partial n}\,ds,\quad \Pi^e=\ln\frac{r}{a}.$$

Решение. С учетом сделанного замечания формула (51.19) дает

$$\varkappa^2 = k\oint \left|\frac{d\Pi^e}{dr}\right|^2 ds \Big/ \oint \Pi^{e*}\,\frac{d\Pi^e}{dr}\,ds = k\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Big/ \ln\frac{b}{a}.$$

При сильном скин-эффекте и одинаковых электрических параметрах внутреннего и внешнего проводников коаксиальной линии ее погонный внутренний импеданс согласно формуле (32.21) оказывается равным

$$Z_i = (\zeta/2\pi)\,(1/a+1/b) = (2\zeta/c)\,(1/a+1/b).$$

Поскольку погонная емкость линии $C = 2\ln(b/a)$, формула (53.09) принимает вид

$$h = \sqrt{k^2 + i\omega C Z_i} = \sqrt{k^2 + i\omega C\,(R - i\omega L_i)} = \sqrt{[\omega\,(L_e + L_i) + iR]\,\omega C}$$

и совпадает с формулой (34.03).

Глава X.

РУПОРЫ

§ 54. Электромагнитные волны в рупорах

Для создания направленного излучения радиоволн часто применяют рупорные антенны, или, кратко, рупоры. Рупоры особенно удобны в сантиметровом диапазоне радиоволн, поскольку в конструктивном отношении они хорошо сочетаются с волноводами, являясь как бы их естественным продолжением (ср. рис. 55).

Разумеется, электромагнитные волны могут излучаться в пространство непосредственно из открытого конца волновода. Однако рупор делает излучение более направленным, так как благодаря рупору площадь излучающего отверстия возрастает. Кроме того, рупор улучшает согласование волновода с открытым пространством (см. ниже), благодаря чему увеличивается излучаемая мощность.

Идея применения рупоров была перенесена в сантиметровую радиотехнику из акустики. Однако у акустического рупора размеры излучающего отверстия обычно составляют малую часть длины волны, и потому рупор дает почти ненаправленное излучение. Главное назначение такого рупора — улучшать согласование источника звука с открытым пространством.

Основные свойства рупоров легко понять и даже приближенно рассчитать, если рассматривать рупор как постепенно расширяющийся волновод. В следующем параграфе увидим, что такой подход позволяет составить наглядное представление о волнах, распространяющихся в рупоре. Таким образом можно оценить и свойства открытого конца рупора как передающей антенны.

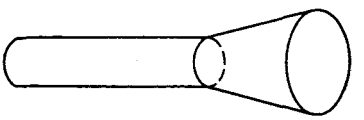


Рис. 5. Круглый волновод, переходящий в конический рупор.

Отмеченное выше отличие в свойствах акустических и электромагнитных рупоров имеет место, несмотря на то, что размеры их примерно одного порядка. Это отличие вызывается в основном двумя причинами:

1. Звуковые волны являются волнами продольными.

2. Звук, воспринимаемый человеческим ухом, соответствует довольно длинным волнам, например нота «до» основной октавы (с частотой 256 Гц) имеет в воздухе длину волны $\lambda=1{,}3$ м. Лишь самые высокие ноты звукового диапазона имеют длину волны порядка нескольких сантиметров.

Вследствие продольности звуковых волн они могут распространяться по трубам (акустическим волноводам) сравнительно малого диаметра при любой длине волны. Действительно, звук распространяется по трубе в виде «поршневой» волны, т. е. в виде продольной плоской волны, ограниченной со всех сторон стенкой трубы и бегущей вдоль оси трубы со скоростью звука в свободном пространстве. Если радиус трубы a мал по сравнению с длиной волны λ, то из открытого конца трубы излучается лишь незначительная часть мощности набегающей поршневой волны и ее коэффициент отражения близок к единице. Таким же свойством обладает поперечная электромагнитная волна в коаксиальной линии (§ 35). Расчеты показывают, что по мере увеличения отношения a/λ коэффициент отражения поршневой волны от открытого конца трубы уменьшается довольно быстро, в то время как направленность излучения растет (при $a/\lambda<1$) медленно. То же справедливо и для рупора.

С рупорами для электромагнитных волн дело обстоит как раз наоборот. Рассмотрим волну H_{11} в круглом волноводе, обладающую наибольшей критической длиной волны и дающей при излучении из открытого конца диаграмму направленности с максимумом в направлении «прямо вперед» (подобно поршневой волне в акустике). Волна H_{11} может распространяться при $ka>1{,}841$ (см. § 42), и уже при $ka>2$ коэффициент отражения мал. Поэтому при частотах, лишь немного превышающих критическую частоту, волновод сам по себе хорошо согласован с открытым пространством. Рупор улучшает это согласование лишь в незначительной степени, но зато направленность излучения он увеличивает существенно.

§ 55. «Электрические» и «магнитные» волны в секториальном рупоре

Исследуем электромагнитные волны в секториальном рупоре. Секториальный рупор расширяется лишь в одном поперечном измерении (рис. 56). Если ввести цилиндрическую систему r, φ, z, то боковые стенки рупора, образующие между собой двухгранный угол α, могут быть совмещены с координатными плоскостями $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, а верхняя и нижняя стенки рупора — с плоскостями $z=0$ и $z=l$, где l — высота секториального рупора.

Электромагнитные волны, существующие в секториальном рупоре, могут быть, подобно волнам в волноводе, разбиты на два класса — на электрические и магнитные волны. Это разбиение производится относительно координаты z: электрические волны имеют $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, у магнитных $E_z = 0$, $H_z \neq 0$. Так как координата z не совпадает с направлением распространения волн в рупоре (последние являются цилиндрическими волнами и движутся в направлении радиальной координаты r), то данное разбиение физически не соответствует волноводной классификации, поэтому в дальнейшем применительно к секториальному рупору термины «электрическая» или «магнитная» волна будем употреблять в кавычках.

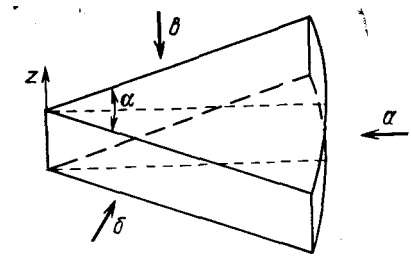


Рис. 56. Секториальный рупор

Поля «электрических» волн в секториальном рупоре вычисляются по формулам (18.03) с помощью электрического вектора Герца, имеющего единственную составляющую Π^e_z ($\Pi^e_x = \Pi^e_y = 0$). Если переписать эти формулы в цилиндрической системе координат, то получим

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi^e_z}{\partial r \partial z}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi^e_z}{\partial \varphi \partial z}, \quad E_z = \frac{\partial^2 \Pi^2_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi^2_z,$$
$$H_r = -\frac{ik}{r} \frac{\partial \Pi^e_z}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = ik \frac{\partial \Pi^e_z}{\partial r}, \quad H_z = 0. \tag{55.01}$$

Отсутствие составляющей H_z оправдывает название «электрическая» волна.

Функция Π^e_z должна удовлетворять волновому уравнению, которое в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z = 0. \tag{55.02}$$

На стенках рупора, которые считаем идеально проводящими, должны выполняться граничные условия

$$E_r = E_\varphi = 0 \quad \text{при } z = 0,\ z = l; \quad E_r = E_z = 0 \quad \text{при } \varphi = 0,\ \varphi = \alpha. \tag{55.03}$$

Эти условия могут быть выполнены, если функция Π^e_z удовлетворяет граничным условиям

$$\partial \Pi^e_z / \partial z = 0 \quad \text{при } z = 0,\ z = l; \quad \Pi^e_z = 0 \quad \text{при } \varphi = 0,\ \varphi = \alpha. \tag{55.04}$$

Функцию Π^e_z ищем в виде

$$\Pi^e_z = R(r)\, \Phi(\varphi)\, Z(z). \tag{55.05}$$

Применяя метод разделения переменных к уравнению (55.02), для функций R, Φ и Z получаем уравнения

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(h^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R=0, \quad h^2=k^2-g^2, \tag{55.06}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\nu^2\Phi=0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2}+g^2Z=0.$$

Здесь ν^2 и g^2 суть две постоянные разделения. Согласно условию (55.04)

$$dZ/dz=0 \text{ при } z=0,\ z=l,$$

откуда

$$Z=\cos gz,\ g=n\pi/l \ (n=0,\ 1,\ 2,\ ...,). \tag{55.07}$$

Так как согласно второму условию (55.04)

$$\Phi=0 \text{ при } \varphi=0,\ \varphi=\alpha,$$

то

$$\Phi=\sin\nu\varphi,\ \nu=m\pi/\alpha \ (m=1,\ 2,\ ...). \tag{55.08}$$

Общее выражение для функции R имеет вид

$$R=CJ_\nu(hr)+C'N_\nu(hr). \tag{55.09}$$

В этих формулах обозначения несколько изменены по сравнению с § 22, где также рассматривались цилиндрические волны.

Обобщая волноводную терминологию, можно назвать g — поперечным волновым числом, а h — продольным (или радиальным) волновым числом, поскольку h определяет зависимость поля от радиальной координаты, вдоль которой происходит распространение волн. Если рассматриваются волны, бегущие в радиальном направлении от его вершины, то нужно положить $C'=iC$, и тогда

$$R=CH_\nu^{(1)}(hr). \tag{55.10}$$

Окончательно получаем

$$\Pi_z^e=CH_\nu^{(1)}(hr)\sin\nu\varphi\cos\frac{n\pi z}{l}, \tag{55.11}$$

$$\nu=m\pi/\alpha \ (m=1,\ 2,...), \quad h=\sqrt{k^2-(n\pi/l)^2} \ (n=0,\ 1,\ 2,...)$$

Это выражение определяет электромагнитное поле волны, которую можно назвать «электрической» волной E_{mn} в секториальном рупоре (по отношению к координате z).

Наибольший интерес представляет простейшая «электрическая» волна E_{10}, для которой

$$\Pi_z^e=CH_\nu^{(1)}(kr)\sin\nu\varphi, \quad \nu=\pi/\alpha \tag{55.12}$$

и по формулам (55.01)

$$E_z=k^2CH_\nu^{(1)}(kr)\sin\nu\varphi, \quad E_r=E_\varphi=H_z=0,$$
$$H_r=-\frac{i\nu k}{r}CH_\nu^{(1)}(kr)\cos\nu\varphi, \quad H_\varphi=ik^2CH_\nu^{(1)\prime}(kr)\sin\nu\varphi. \tag{55.13}$$

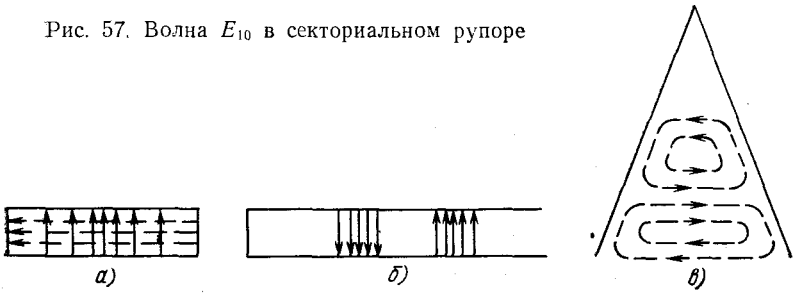
Чтобы разобраться в структуре электромагнитного поля этой волны, нарисуем мгновенную картину распределения электрических (сплошные линии) и магнитных (штриховые линии) силовых линий при наблюдении электромагнитного поля в рупоре с трех направлений (рис. 57). Поверхности равной фазы суть цилиндрические поверхности $r=\text{const}$, как это видно из формул (55.12) и (55.13). На каждой из этих поверхностей силовые линии электрического поля будут образовывать вертикальный пучок, наиболее густой при $\varphi=\alpha/2$ (рис. 57,*а*). На той же поверхности магнитные силовые линии горизонтальны. Вблизи средней плоскости рупора $\varphi=\alpha/2$, где $\sin\nu\varphi\approx 1$ и $\cos\nu\varphi\approx 0$, магнитные силовые линии будут практически лежать на поверхности $r=\text{const}$. Однако при приближении к боковым стенкам рупора (при $\varphi\approx 0$ и $\varphi\approx\alpha$), составляющая H_r становится преобладающей, магнитные силовые линии идут вдоль этих стенок и замыкаются в кольцо неправильной формы на другой поверхности $r=\text{const}$, как это изображено на рис. 57,*в*. Продольное сечение рупора по средней плоскости $\varphi=\alpha/2$ дано на рис. 57,*б*: в этом сечении расстояния между центрами сгущения вертикальных пучков электрического поля не являются строго постоянными, поскольку функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}(kr)$ не является строго периодической функцией своего аргумента.

При больших значениях kr, точнее, при условии $kr\gg\nu^2$, функцию Ханкеля можно заменить ее асимптотическим выражением (22.12), тогда формулы (55.13) принимают вид

$$\begin{aligned} E_z &= -H_\varphi = k^2 C\sqrt{2/\pi kr}\, e^{i[kr-(2\nu+1)\pi/4]}\sin\nu\varphi,\\ H_r &= \nu kC\sqrt{2/\pi kr^3}\, e^{i[kr-(2\nu+3)\pi/4]}\cos\nu\varphi. \end{aligned} \qquad (55.14)$$

Они показывают, что при достаточно больших kr волна распространяется по секториальному рупору со скоростью c в радиальном направлении, спадая по амплитуде по закону $1/\sqrt{kr}$, характерному для цилиндрических волн. Такая цилиндрическая волна (как и плоская волна в свободном пространстве) практически является поперечной, поскольку $H_r\ll H_\varphi$ при $\varphi\neq 0$, $\varphi\neq\alpha$. Этот результат легко понять, если рассматривать волну E_{10} в рупоре с малым углом α как простейшую волну H_{10} в постепенно расши-

Рис. 57. Волна E_{10} в секториальном рупоре



ряющемся волноводе со сторонами $a=\alpha r$, $b=l$. Вычисляя продольное волновое число в таком волноводе по формуле

$$h=\sqrt{k^2-(\pi/a)^2}=\sqrt{k^2-(\pi/\alpha r)^2}, \qquad (55.15)$$

мы видим, что при условии $kr\gg\nu=\pi/\alpha$ можно считать $h=k$, т. е. фазовая скорость волны близка к скорости c. Легко показать с помощью волноводных формул (41.17), что волна при этом должна стать практически поперечной.

Как следует из теории бесселевых функций, достаточным условием применимости формул (55.14) является не условие $kr\gg\nu$, а более жесткое условие $kr\gg\nu^2$, гарантирующее не только близость фазовой скорости волны в рупоре к c, но и строго периодический характер расположения центров сгущения силовых линий на рис. 57,*б*. Смысл условия $kr\gg\nu^2$ также легко понять с помощью волноводной аналогии. Действительно, при достаточно больших r формула (55.15) дает

$$h=k-\nu^2/2kr^2, \quad \int h dr = kr+\nu^2/2kr.$$

Интеграл определяет зависимость фазы волны от координаты r, поскольку приращение фазы на отрезке dr расширяющегося волновода равно $h dr$. В этом интеграле можно пренебречь вторым слагаемым, нарушающим периодичность максимумов электрического поля, лишь при выполнении условия $kr\gg\nu^2$.

Можно доказать применимость простой волноводной формулы (55.15) для вычисления скорости распространения волны на различных расстояниях r от вершины рупора. Это обстоятельство тем более важно, что реальные рупоры никогда не бывают столь длинны, чтобы для них можно было считать выполненным условие $kr\gg\nu^2$. Фактически волна в рупоре излучается из его открытого конца, не успев достичь предельного вида, определяемого выражениями (55.14).

Перейдем к рассмотрению «магнитных» волн в волноводах, которые имеют магнитный вектор Герца Π^m с единственной составляющей Π^m_z. Поле «магнитной» волны вычисляется по формулам

$$E_r=\frac{ik}{r}\frac{\partial\Pi^m_z}{\partial\varphi}, \quad E_\varphi=-ik\frac{\partial\Pi^m_z}{\partial r}, \quad E_z=0,$$
$$H_r=\frac{\partial^2\Pi^m_z}{\partial r\partial z}, \quad H_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi^m_z}{\partial\varphi\,dz}, \quad H_z=\frac{\partial^2\Pi^m_z}{\partial z^2}+k^2\Pi^m_z, \qquad (55.16)$$

причем граничные условия (55.03) удовлетворятся, если

$$\Pi^m_z=0 \text{ при } z=0,\ z=l, \quad \partial\Pi^m_z/\partial\varphi=0 \text{ при } \varphi=0,\ \varphi=\alpha. \qquad (55.17)$$

Составляющая Π^m_z удовлетворяет тому же волновому уравнению (55.02), что и составляющая Π^e_z. Поэтому ищем Π^m_z в виде произведения (55.05) и приходим к уравнениям (55.06). Однако в силу граничных условий (55.17) теперь будем иметь

$$Z=0 \text{ при } z=0,\ z=l;\ d\Phi/d\varphi=0 \text{ при } \varphi=0,\ \varphi=\alpha,$$

благодаря чему получаем

$$Z=\sin gz,\ g=n\pi/l\ \ (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{55.18}$$

и

$$\Phi=\cos\nu\varphi,\ \nu=m\pi/\alpha\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{55.19}$$

Выбирая функцию R согласно формуле (55.10), получаем выражение

$$\Pi_z^m=CH_\nu^{(1)}(hr)\cos\nu\varphi\sin\frac{n\pi z}{l},$$
$$\nu=m\pi/\alpha\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ldots),\quad h=\sqrt{k^2-(n\pi/l)^2}\ \ (n=1,\ 2,\ldots), \tag{55.20}$$

дающее по определению «магнитную» волну H_{mn} в секториальном рупоре. Простейшей и наиболее важной волной является волна H_{01}, для которой

$$\Pi_z^m=CH_0^{(1)}(hr)\sin(\pi z/l),\quad h=\sqrt{k^2-(\pi/l)^2} \tag{55.21}$$

и

$$E_\varphi=ik^2CH_1^{(1)}(hr)\sin(\pi z/l),\ E_r=E_z=H_\varphi=0,$$
$$H_r=-(\pi k/l)CH_1^{(1)}(hr)\cos(\pi z/l),\ H_z=h^2CH_0^{(1)}(hr)\sin(\pi z/l). \tag{55.22}$$

Здесь использовано тождество

$$H_0^{(1)\prime}(x)=-H_1^{(1)}(x).$$

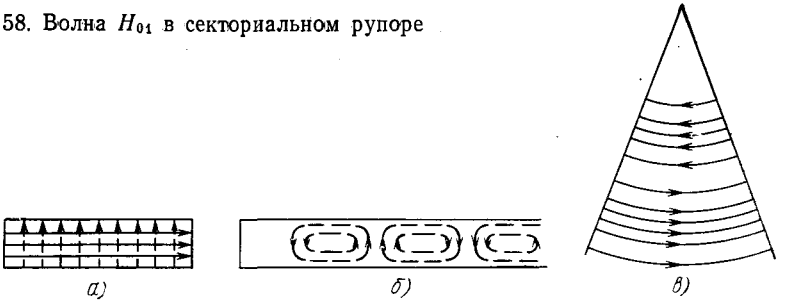
Структура электромагнитного поля волны H_{01} изображена на рис. 58 в трех разных видах (как на рис. 57). Электрическое поле волны H_{01} направлено по окружности от одной боковой стенки к другой, а магнитное поле имеет вертикальную и радиальную составляющие, благодаря чему оно образует в плоскости продольного сечения рупора $\varphi=\text{const}$ замкнутые кольца неправильной формы, расположенные приблизительно периодически (рис. 58,*б*).

Отвлекаясь от цилиндрического характера данной волны в рупоре, можно сказать, что ее структура поля подобна структуре волны H_{10} в прямоугольном волноводе со сторонами $a=l$, $b=\alpha r$. Это сходство станет очевидным, если при $hr\gg1$ воспользоваться асимптотическими выражениями (22.12). Тогда формулы (55.22) примут вид

$$E_\varphi=khC\sqrt{2/\pi hr}\,e^{i(hr-\pi/4)}\sin(\pi z/l),$$
$$H_r=(\pi k/l)C\sqrt{2/\pi hr}\,e^{i(hr+\pi/4)}\cos(\pi z/l), \tag{55.23}$$
$$H_z=h^2C\sqrt{2/\pi hr}\,e^{i(hr-\pi/4)}\sin(\pi z/l).$$

Поэтому при $r\to\infty$ волна в рупоре не становится поперечной, а ее волновое число $h<k$. Это объясняется тем, что в данном случае рупор является расширяющимся прямоугольным волноводом, у которого увеличивается сторона b, а от нее продольное волновое число в волноводе не зависит.

Рис. 58. Волна H_{01} в секториальном рупоре



Аналогия между рупором и волноводом является весьма плодотворной, однако она не позволяет охватить свойства волн вблизи вершины рупора при $hr \ll 1$. Заметим, что при $r=0$ поле расходящейся волны обращается в бесконечность, и при малых hr оно не имеет волнового характера. Это обстоятельство не проявляется, если электромагнитное поле в рупоре возбуждается волноводом, как показано на рис. 55 (см. также § 56). В этом случае нужно рассматривать только ту часть рупора, которая соответствует значениям $r > r_0$, где r_0 есть расстояние от начала цилиндрической системы координат до края волновода.

§ 56. Сочленение волновода с рупором

Секториальный рупор можно двояким образом сочетать с прямоугольным волноводом, а именно секториальный рупор может расширяться в плоскости E или в плоскости H набегающей волны H_{10} в прямоугольном волноводе со сторонами a и b. Здесь для краткости плоскостью E названа плоскость продольного сечения волновода, параллельная электрическому полю, а плоскостью H — плоскость, параллельная магнитному полю волны H_{10}.

Секториальный рупор, расширяющийся в плоскости H, получается путем постепенного увеличения стороны a волновода. Сторона b, параллельная электрическому полю набегающей волны, оказывается равной высоте l секториального рупора, так что параллельные стенки рупора суть геометрические продолжения широких стенок волновода.

Из соображений симметрии ясно, что в таком секториальном рупоре возбуждаются «электрические» волны E_{m0}, поле которых имеет, подобно полю набегающей волны, единственную составляющую электрического поля E_z в системе координат на рис. 56. Так как структура электромагнитного поля волны E_{10} в секториальном рупоре мало отличается от структуры волны H_{10} в прямоугольном волноводе, то при малых углах α в горле рупора, т. е. в месте сочленения его с волноводом, происходит почти полное преобразование одной волны в другую, не сопровождаемое появлением отраженных волн и волн с высшими индексами, например волны E_{30}, E_{50}, ... в секториальном рупоре. При увеличении α, например

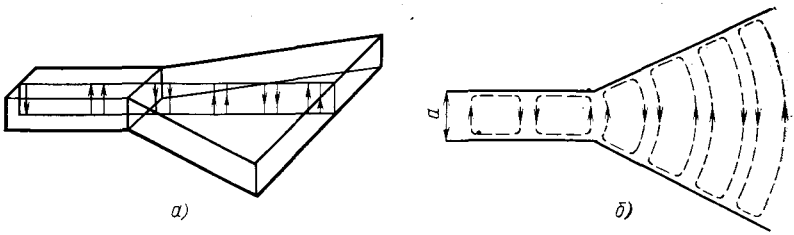


Рис. 59. Сочленение прямоугольного волновода с секториальным рупором, расширяющимся в плоскости H

при $\alpha=\pi$, это утверждение перестает быть правильным, так как тогда переход из волновода в рупор перестает быть плавным, волноводная волна H_{10} и рупорная волна E_{10} сильно различаются по кривизне поверхностей равной фазы, вследствие чего возникают отражения и появляются высшие волны.

На рис. 59,*б* схематически показано, как происходит преобразование магнитного поля волны H_{10} в волноводе при его сочленении с рупором, расширяющемся в плоскости H (рис. 59,*а*). В рупоре возникает магнитное поле, которое было раньше изображено на рис. 57,*в*.

Секториальный рупор, расширяющийся в плоскости E, можно рассматривать как прямоугольный волновод, у которого постепенно увеличивается сторона b, параллельная электрическому полю волны H_{10} (рис. 60,*а*). Так как электрическое поле волны H_{01} в рупоре близко по своей структуре к электрическому полю волны H_{10} в волноводе, то одна волна почти целиком преобразуется в другую, что схематически и показано на рис. 60,*б*. Магнитные поля этих волн также весьма близки (см. § 55).

Выводы о преобразовании волноводных волн в рупорные основаны на сходстве их электромагнитных полей. Однако в волноводе и рупоре сходные волны имеют различные наименования, что не соответствует существу дела. Этот терминологический изъян можно устранить, если ввести новую классификацию волн в прямоугольных волноводах. Действительно, вследствие вырождения $E=H$ в прямоугольных волноводах можно ввести электрический и магнитный векторы Герца с единственной составляющей по оси

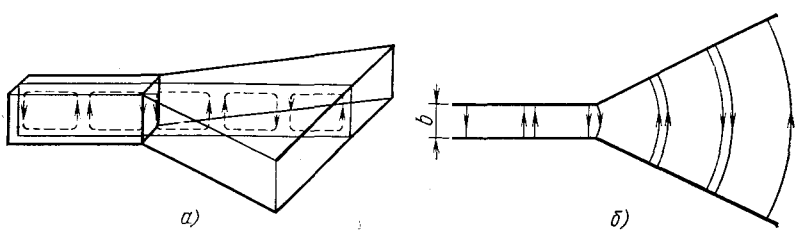


Рис. 60. Сочленение прямоугольного волновода с секториальным рупором, расширяющимся в плоскости E

x и y, и называть волну «электрической» или «магнитной» в зависимости от наличия составляющих поля по выбранной оси (см. конец § 41).

По новой классификации магнитные волны H_{m0} и H_{n0} будут называться иначе. Их название зависит от того, по какой оси (x или y) производится классификация и выбираются составляющие векторов Герца. Вместо вырожденных волн E_{mn} и H_{mn} ($m \neq 0$, $n \neq 0$) новые векторы Герца будут определять некоторые их линейные комбинации.

Легко видеть, что такая классификация волноводных волн может быть приведена в полное согласие с введенными выше наименованиями волн в секториальном рупоре. Для этого нужно характеризовать волны в прямоугольном волноводе с помощью тех же составляющих Π^e_z и Π^m_z, что и в сочлененном с ним рупоре. Вводя эти составляющие для волновода с секториальным рупором, расширяющимся в плоскости H (см. рис. 59), должны назвать волну H_{10} в волноводе «электрической» волной E_{10}. Делая то же при сочленении волновода с рупором, расширяющимся в плоскости E (см. рис. 60), называем ту же волну «магнитной» волной H_{01}. Введенная терминология соответствует тому факту, что на рис. 59 волноводная волна E_{10} переходит в рупорную волну E_{10}, причем при недостаточном согласовании рупора с волноводом (при больших значениях α), помимо отражений, возникают еще волны E_{30}, E_{50}, ... Аналогично на рис. 60, помимо превращения волноводной волны H_{01} в рупорную волну того же названия, возникают еще дополнительные волны H_{21}, H_{41}, ... в волноводе и рупоре. Амплитуды этих волн при малых углах раствора рупора пренебрежимо малы.

Эти высшие волны возбуждаются в горле рупора. При малых углах раствора α начальные амплитуды высших волн в горле рупора малы из-за сходства полей у основной волны в волноводе и рупоре. Кроме того, в волноводе обычно распространяется только одна волна, и все другие волны в волноводе затухают при удалении от плоскости сочленения. Поперечные размеры рупора вблизи его горла примерно такие же, как и у волновода, поэтому по аналогии с волноводом можно утверждать, что высшие волны в некотором начальном отрезке рупора, примыкающем к горлу, будут также затухающими. Длина этого отрезка тем больше, чем медленнее расширяется рупор, т. е. чем меньше α, так как затухающая волна превращается в распространяющуюся при поперечных размерах рупора, достаточных для распространения данной волны. Чем больше длина этого отрезка, тем больше ослабление затухающей волны в рупоре.

Из сказанного вытекает основное свойство рупора: горло рупора есть фильтр, не пропускающий высшие волны к открытому концу рупора.

Если вместо рупора взять волновод с излучающим отверстием таких же размеров, то теоретически можно получить ту же направленность излучения и даже бóльшую, поскольку поверхности

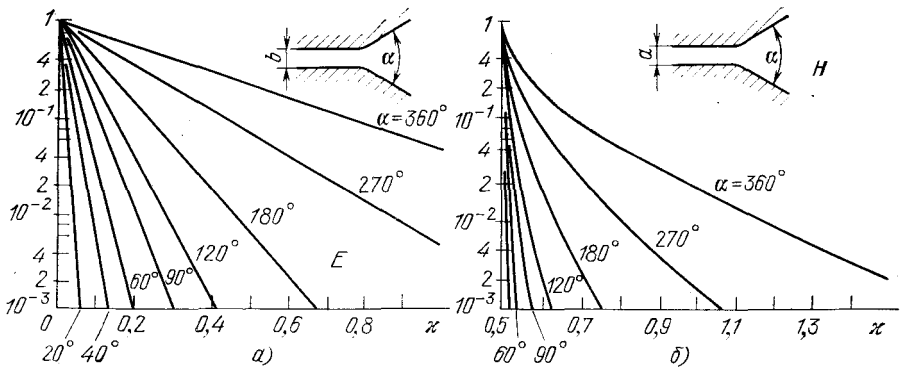


Рис. 61. Коэффициент отражения волны H_{10} от плавного перехода волновод — рупор:
а — рупор расширяется в плоскости E; $\varkappa = b/\Lambda$, $\Lambda = \lambda / \sqrt{1-(\lambda/2a)^2}$; *б* — рупор расширяется в плоскости H; $\varkappa = a/\lambda$

равной фазы у волн в рупоре искривлены и без их дополнительного выпрямления (рупорной линзой) рупор дает менее направленное излучение. Только создавая на излучающей апертуре рупора синфазное поле, можно реализовать направленность, соответствующую размерам апертуры. Однако в широком волноводе практически невозможно возбудить одну волну с простейшей структурой электромагнитного поля; в нем будут распространяться высшие волны, ухудшающие диаграмму направленности. В противоположность этому, благодаря фильтрующему действию горла, к открытому концу рупора приходит практически только основная (простейшая) волна.

Коэффициент отражения волноводной волны от сочленения волновода с рупором обычно мал, но при частоте, приближающейся к критической, по абсолютной величине может быть близок к единице. На рис. 61 дан коэффициент отражения (по полю) для сглаженного перехода волновод — рупор, для резкого перехода (рис. 59 и 60) отражение будет, очевидно, более сильным.

Кривые на рис. 61 показывают, что волны полностью отражаются от горла рупора при критической частоте. При увеличении частоты их коэффициенты отражения быстро спадают до весьма малых значений — тем быстрее, чем меньше угол раствора α. Угол $\alpha = 360°$ соответствует прямоугольному волноводу, зажатому между двумя параллельными плоскостями, частично совпадающими со сторонами a (рис. 61,*а*) или b (рис. 61,*б*) волновода.

§ 57*. Электрические и магнитные волны в коническом рупоре

Рассмотрим электромагнитные волны в идеально проводящем коническом рупоре. Для этого введем сферическую систему координат с центром в вершине рупора (рис. 62) так, чтобы по-

верхность совпадала со стенкой рупора, и будем рассматривать поле в пространстве, определенном неравенствами

$$0<\vartheta<\gamma,\ 0\leqslant\varphi<2\pi. \tag{57.01}$$

Угол γ обычно называют углом раствора конического рупора. При исследовании волн в рупоре, очевидно, можно считать $\gamma<\pi/2$ (или даже $\gamma<\pi/3$), однако значения $\gamma>\pi/2$ также имеют физический интерес, поскольку возникает возможность рассмотреть дифракцию электромагнитных волн на металлическом конусе, расположенном в свободном пространстве (см. гл. XIV). Заметим, что выведенные ниже формулы при $\gamma<\pi/2$ и $\gamma>\pi/2$ не отличаются по своему внешнему виду; при $\gamma=\pi/2$ уравнение $\vartheta=\gamma$ определяет плоскость, а условия (57.01) — полупространство.

С помощью сферических координат можно исследовать рупоры более сложной формы: биконический и пирамидальный. В биконическом рупоре (рис. 63,*а*) электромагнитное поле занимает область пространства

$$\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2,\ 0\leqslant\varphi<2\pi. \tag{57.02}$$

Пирамидальный рупор (рис. 63,*б*) является равномерно расширяющимся прямоугольным волноводом и часто применяется вместе с обычным прямоугольным волноводом. Его стенки ограничивают область пространства, которую приближенно можно определить

$$\pi/2-\vartheta_0<\vartheta<\pi/2+\vartheta_0,\ -\varphi_0<\varphi<\varphi_0. \tag{57.03}$$

В § 20 были введены потенциалы U и V, которые позволяют вычислить поля электрических и магнитных волн в коническом рупоре: с помощью функции U и формул (20.16) получаются электрические волны, с помощью функции V и формул (20.17) — магнитные волны. Сами функции U и V должны удовлетворять уравнению (20.18), решение которого ищем в виде

$$U=\zeta_\nu(kr)\Omega(\vartheta,\ \varphi),\ \text{или}\ U=\psi_\nu(kr)\Omega(\vartheta,\ \varphi); \tag{57.04}$$

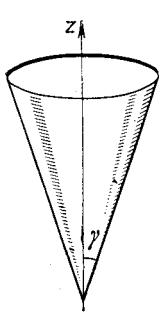


Рис. 62. Конический рупор

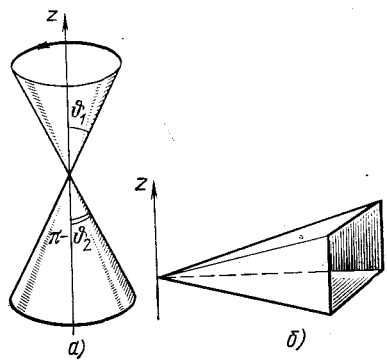


Рис. 63. Рупоры более сложной формы:
а — биконический; *б* — пирамидальный

функция Ω удовлетворяет уравнению

$$\Delta_*\Omega+\nu(\nu+1)\Omega=0. \qquad (57.05)$$

Функция ζ_ν определяет волну, бегущую в радиальном направлении, а функция ψ_ν — стоячую волну, конечную или равную нулю при $r=0$ (см. § 23).

Функция $\Omega(\vartheta, \varphi)$ задана на единичной сфере, где положение точки определяется углами ϑ и φ. Стенка рупора вырезает на единичной сфере площадку S, ограниченную контуром C. На этом контуре функции U и V должны удовлетворять граничным условиям

$$U=0, \ \partial V/\partial n=0, \qquad (57.06)$$

вытекающим из условий $E_r=E_s=0$ на идеально проводящей поверхности рупора; s — направление касательной к контуру C; n — направление нормали к C, лежащей в касательной плоскости единичной сферы.

Для конического рупора контур C определяется уравнением $\vartheta=\gamma$, а $\partial V/\partial n$ можно заменить на $\partial V/\partial\vartheta$. В этом случае согласно § 23

$$\Omega = P_\nu^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi, \ \Omega = P_\nu^m(\cos\vartheta)\sin m\varphi. \qquad (57.07)$$

Таким образом, для конического рупора переменные полностью разделяются: функции U и V представлены в виде произведения трех функций: r, ϑ, φ. Индекс m в формулах (57.07) должен быть целым ($m=0, 1, 2, \ldots$), поскольку поле должно быть однозначным в области (57.01), т. е. не изменяться при замене φ на $\varphi\pm2\pi$. Однако индекс ν, вообще говоря, не будет целым: он определяется из граничных условий (57.06). Для электрических волн индекс ν удовлетворяет уравнению

$$P_\nu^m(\cos\gamma)=0\,; \qquad (57.08)$$

для магнитных волн обозначаем индекс через μ и имеем для него уравнение

$$\frac{d\,P_\mu^m}{d\,\vartheta}(\cos\gamma)=0. \qquad (57.09)$$

Через $P_\nu{}^m(\cos\vartheta)$ обозначена присоединенная функция Лежандра, принимающая при $\vartheta=0$ конечные значения. Она выражается через функцию Лежандра $P_\nu(\cos\vartheta)$, удовлетворяющую уравнению (23.12) и условию $P_\nu(1)=1$, посредством формулы (23.13). Поскольку ν и μ не являются целыми, функции P_ν и P_μ не будут полиномами, и $P_\nu{}^m$ отличны от нуля при любых m.

Уравнение (57.08) дает последовательность чисел ν_{mn} ($n=1, 2, \ldots$), зависящих от угла γ, а уравнение (57.09) — другую последовательность чисел μ_{mn} ($n=1, 2, \ldots$), также зависящих от γ. Эти числа являются, по существу, собственными значениями данной граничной задачи: это — положительные числа, которые распо-

лагаются (при фиксированном m) в порядке возрастания, причем лишь, как исключение, они могут быть целыми числами.

Если возьмем число $\nu=\nu_{mn}$ и соответствующую функцию U по формулам (57.04) и (57.07), то получим электрическую волну, которая называется волной E_{mn} в коническом рупоре. Аналогично число $\mu=\mu_{mn}$ и функция V определяют магнитную волну H_{mn} в коническом рупоре.

Волны E_{mn} и H_{mn} в коническом рупоре весьма похожи на волны тех же номеров в круглом волноводе. Так как конический рупор есть, в сущности, постепенно расширяющийся круглый волновод (расширение происходит равномерно по всем сторонам, в отличие от секториального волновода), то эти волны E_{mn} и H_{mn} являются сферическими волнами. Фазовая скорость распространяющихся волн, соответствующих функциям $\zeta_\nu(kr)$ и $\zeta_\mu(kr)$, зависят от r; более того, каждая из этих волн является распространяющейся лишь при достаточно больших r, а при меньших r данная волна имеет затухающий характер. При $r\to\infty$ фазовая скорость всех волн стремится к c, что непосредственно следует из асимптотических формул (23.08).

Между волнами E_{mn} и H_{mn} в коническом рупоре и круглом волноводе может быть установлена и аналитическая связь, а именно при больших ν имеют место асимптотические выражения

$$P^m_{\nu-1/2}(\cos\vartheta)=\nu^m\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J_m(\nu\vartheta),$$

$$\frac{d}{d\vartheta}P^m_{\nu-1/2}(\cos\vartheta)=\nu^{m+1}\sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\,J'_m(\nu\vartheta), \tag{57.10}$$

дающие качественно правильные результаты и при конечных ν. Отсюда легко установить приближенную связь между числами ν_{mn} и μ_{mn}, введенными выше, и так же обозначенными числами, введенными в § 42.

Если круглый волновод переходит в конический рупор, то волноводная волна, приходящая к горлу рупора, почти нацело преобразуется в соответствующую рупорную волну. То же самое происходит и в горле секториального рупора (см. § 56).

В биконическом и пирамидальном рупорах также существуют электрические и магнитные волны, поля которых могут быть вычислены с помощью функций U и V. Выражения для этих функций получаются, однако, более сложными, чем для конического рупора (см. задачи 1 и 2).

Задачи к гл. X

1. Исследовать волны в биконическом рупоре [формула (57.02) и рис. 63,*а*], полагая

$$\Omega=\left[CP^m_\nu(\cos\vartheta)+DP^m_\nu(-\cos\vartheta)\right]\cos m\varphi \quad (\text{или } \sin m\varphi);$$

вывести уравнения для ν, аналогичные уравнениям (57.08) и (57.09). Показать, что среди этих волн имеется поперечная волна, у которой $\Omega = C_\varphi$, изучить поле этой волны.

Решение. Граничные условия (57.06) для функции U, т. е. для электрических волн, принимают вид

$$CP_\nu^m(\cos\vartheta_j) + DP_\nu^m(-\cos\vartheta_j) = 0, \quad j = 1,2$$

и вместо уравнения (57.08) получаем более сложное уравнение

$$P_\nu^m(\cos\vartheta_1)\,P_\nu^m(-\cos\vartheta_2) = P_\nu^m(-\cos\vartheta_1)\,P_\nu^m(\cos\vartheta_2).$$

Для магнитных волн вместо уравнения (57.09) получаем

$$\frac{dP_\nu^m}{d\vartheta}(\cos\vartheta_1)\,\frac{dP_\nu^m}{d\vartheta}(-\cos\vartheta_2) = \frac{dP_\nu^m}{d\vartheta}(-\cos\vartheta_1)\,\frac{dP_\nu^m}{d\vartheta}(\cos\vartheta_2).$$

Последнее уравнение имеет частное решение $\nu = m = 0$, при котором функция $\Omega = C_\varphi$ удовлетворяет второму уравнению (23.04), а первое принимает вид

$$\frac{d^2R}{dr^2} + k^2R = 0,$$

т. е. для бегущей волны $R = e^{ikr}$. Таким образом, функция $V = Ce^{ikr}\varphi$ по формулам (20.17) дает поле с двумя отличными от нуля составляющими

$$E_\vartheta = H_\varphi = ikCe^{ikr}/r\sin\vartheta. \qquad (a)$$

Это — поперечная сферическая волна, направляемая идеально проводящими коническими поверхностями $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$. Она аналогична поперечной волне в коаксиальной линии.

К такому же полю приводит функция $U = Ce^{ikr}\ln\operatorname{tg}(\vartheta/2)$. Поэтому поперечную сферическую волну (a) можно назвать волной E_{00} или же волной H_{00}. В полосковой линии основная (поперечная) волна тоже именуется волной E_{00} или H_{00} (см. задачу 7 к гл. VII). В коаксиальной линии поле основной волны выражалось через составляющую $\Pi^e{}_z$ (§ 29), вследствие чего она именовалась (в задаче 2 к гл. IX) волной E_{00}. С тем же успехом ее можно назвать волной H_{00}, выражая ее поле через составляющую $\Pi^m{}_z = C\varphi e^{ikz}$.

2. Исследовать волны в пирамидальном рупоре [формула (57.03) и рис. 63,*б*], используя результаты задачи 1.

Решение. Функцию Ω в данной задаче можно взять такую же, как в задаче 1, но индекс m надо заменить на μ, поскольку он уже не является целым числом, а именно $\mu = m\pi/2\varphi_0$, где m — целое. С этой заменой уравнения, определяющие индекс ν, будут такими же, как в задаче 1, если положить $\vartheta_1 = \pi/2 - \vartheta_0$, $\vartheta_2 = \pi/2 + \vartheta_0$.

Глава XI.

ЗАМЕДЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ДИЭЛЕКТРИКАМИ И ПРОВОДНИКАМИ

§ 58. Медленные электромагнитные волны

Медленные электромагнитные волны находят применение в электронных приборах типа лампы с бегущей волной и в линейных ускорителях заряженных частиц. В лампе с бегущей волной электроны движутся по прямой с нерелятивистскими скоростями (порядка 0,1 c). В линейных ускорителях электроны (или другие частицы) в своем прямолинейном движении ускоряются до скоростей, близких к c. В обоих случаях фазовая скорость электромагнитной волны подбирается приблизительно равной скорости электронов. Если электрон попадает в правильную фазу электромагнитной волны и отдает свою кинетическую энергию полю (в лампе с бегущей волной) или увеличивает свою кинетическую энергию за счет поля (в ускорителе), то благодаря близости скоростей он движется вместе с электромагнитной волной, оставаясь в поле той же фазы, и взаимодействие продолжается.

Для получения интенсивного взаимодействия между частицами и волной также необходимо, чтобы электрическое поле волны имело достаточно сильную составляющую вдоль направления движения частиц, благодаря которой происходит их торможение или ускорение. Изученные ранее волны в передающих линиях первой и второй группы не могут быть использованы для взаимодействия с заряженными частицами. Действительно, хотя фазовая скорость волн в линиях первой группы (например, в коаксиальной линии) близка к c, однако у этих волн практически отсутствует составляющая E_z. Электрические волны в волноводах, например волна E_{01} в круглом или волна E_{11} в прямоугольном волноводе, имеют $E_z \neq 0$, однако их фазовая скорость больше c. Чтобы использовать эти волны для взаимодействия с частицами, летящими по оси z, необходимо их замедлить.

Наиболее простой способ замедления волноводных волн заключается в заполнении волновода диэлектриком. Согласно § 50 при однородном заполнении волновода продольное волновое число данной волны

$$h = \sqrt{k^2 \varepsilon - g^2}, \tag{58.01}$$

так что фазовая скорость

$$u = \omega/h = c/\sqrt{\varepsilon - (g/k)^2}, \tag{58.02}$$

где g есть поперечное волновое число данной волны, зависящее от геометрической формы и размеров поперечного сечения волновода. Формула (58.02) показывает, что при достаточно высоких значениях диэлектрической постоянной ε фазовая скорость волн может быть сколь угодно снижена.

При заполнении диэлектриком всего волновода не остается места для прохождения электронов, которые могут свободно двигаться лишь в вакууме. Поэтому в диэлектрике должен быть канал; если его поперечные размеры невелики, то он мало изменяет фазовую скорость волны, и ее по-прежнему можно рассчитывать по формуле (58.02).

Замедление электромагнитных волн диэлектриком в электронных приборах практически не применяется. Однако целесообразно рассмотреть сначала волны, замедленные диэлектриками или проводниками (с конечной проводимостью), чтобы на простейших примерах познакомиться со свойствами медленных волн.

Отметим одно важное свойство, которым обладает в пустоте электромагнитное поле медленной волны (например, поле в канале, упомянутом выше). В пустоте векторы Герца и составляющие электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению (18.04). Рассматривая волну, бегущую вдоль оси z с волновым числом h, будем вычислять его поле с помощью продольных составляющих электрического и магнитного векторов Герца

$$\Pi_z^e = \Pi^e(x, y)\, e^{ihz},\ \Pi_z^m = \Pi^m(x, y)\, e^{ihz}. \tag{58.03}$$

Тогда, как было показано в § 39 и 40, функции Π^e и Π^m будут удовлетворять двухмерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + g^2 \Pi = 0,\ g^2 = k^2 - h^2. \tag{58.04}$$

В теории волноводов величина g^2 была положительной, так как $h^2 < k^2$. Для идеально проводящих линий первой группы $h^2 = k^2$ и $g^2 = 0$ (см. § 29). Для медленных волн $h^2 > k^2$, и поэтому разность $k^2 - h^2$ отрицательна, а поперечное волновое число g является чисто мнимым. Введем вещественное положительное число p с помощью соотношения

$$p^2 = -g^2 = h^2 - k^2, \tag{58.05}$$

тогда уравнение (58.04) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = p^2 \Pi = 0. \tag{58.06}$$

Рассмотрим сначала случай, когда функция Π зависит только от координаты x и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \Pi}{dx^2} - p^2 \Pi = 0, \tag{58.07}$$

имеющему общее решение

$$\Pi = Ae^{px} + Be^{-px}, \tag{58.08}$$

где A и B — произвольные постоянные. Представим себе, что при $x < 0$ расположена замедляющая часть системы, например диэлектрик, так что при $x > 0$ координата x показывает расстояние точки наблюдения до поверхности диэлектрика. Если в решении (58.08) положить $A = 0$, то функция $\Pi = Be^{-px}$ убывает экспо-

нециально с удалением от поверхности $x=0$ вместе с соответствующим электромагнитным полем.

Волны, поля которых как бы прилипают к некоторой поверхности и убывают при удалении от нее по экспоненциальному закону (или близко к нему), называют поверхностными волнами. Из предыдущего вытекает, что поле медленной волны образовывает в пустоте поверхностную волну. В дальнейшем мы будем неоднократно встречаться с этим свойством медленных электромагнитных волн. Поэтому медленные и поверхностные волны естественно рассматривать совместно и выделить передающие линии с такими волнами в особую группу. О практическом значении поверхностных электромагнитных волн в диэлектрических структурах будет сказано в § 61 и 62.

Исследуем теперь решение уравнения (58.06) в цилиндрической системе координат. Рассуждая как в § 22 и 39, можем написать

$$\Pi = R_m(r)\cos m\varphi \text{ или } \Pi = R_m(r)\sin m\varphi, \tag{58.09}$$

где функция R_m должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2K_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr} - \left(p^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)R_m = 0, \tag{58.10}$$

которое подстановкой $y=pr$ приводится к виду

$$\frac{d^2R_m}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dR_m}{dr} - \left(1 + \frac{m^2}{y^2}\right)R_m = 0. \tag{58.11}$$

Последнее уравнение переходит в уравнение (22.04), если положить $x=\mathrm{i}y$, вследствие чего общее решение уравнения (58.11) можно написать в виде

$$R_m = CJ_m(\mathrm{i}\,y) + C'N_m(\mathrm{i}\,y),$$

если в качестве основных функций выбраны J_m и N_m. Однако при вещественных значениях y функции $J_m(\mathrm{i}y)$ и $N_m(\mathrm{i}y)$ будут, вообще говоря, комплексными, что неудобно для расчета и для физического анализа решения. Поэтому в качестве основных решений уравнения (58.11) берут две функции $I_m(y)$ и $K_m(y)$, принимающие при вещественных положительных y вещественные и положительные значения. Для функций I_m и K_m составлены подробные таблицы. Функция

$$I_m(y) = \mathrm{i}^m J_m(\mathrm{i}\,y) \tag{58.12}$$

называется модифицированной функцией Бесселя; при $y=0$ она конечна и согласно формуле (22.05)

$$I_m(y) = \frac{1}{m!}\left(\frac{y}{2}\right)^m \text{ при } y \ll 1. \tag{58.13}$$

Функция

$$K_m(y) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{i}^{m+1}H_m^{(1)}(\mathrm{i}\,y) \tag{58.14}$$

называется функцией Макдональда; при $y \ll 1$ применимы приближенные формулы

$$K_m(y) = \frac{(m-1)!}{2}\left(\frac{2}{y}\right)^m (m = 1, 2, \ldots), \quad K_0(y) = \ln\frac{2}{\gamma y} \tag{58.15}$$

($\gamma = 1{,}781\ldots$), вытекающие из формул (22.08).

При больших y (точнее, при $y \gg 1$ и $y \geqslant m^2$) функции I_m и K_m можно вычислять по асимптотическим формулам

$$I_m(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi y}}\, e^y, \quad K_m(y) = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-y}. \tag{58.16}$$

При возрастании y функция I_m монотонно возрастает, а функция K_m монотонно убывает. Поэтому если напишем общее решение уравнения (58.11) в виде

$$R_m = AI_m(pr) + BK_m(pr), \tag{58.17}$$

то функция П, образованная по формуле (58.09), будет иметь по отношению к радиальной координате r тот же характер, какой имеет более простое выражение (58.08) по отношению к декартовой координате x. Из выражения (58.17) также получаются поверхностные волны.

При вещественных g волновое уравнение (58.04) имеет колеблющиеся решения, соответствующие функциям $\cos gx$, $\sin gx$, $J_m(gr)$ или $N_m(gr)$. В противоположность этому уравнение (58.06) имеет при вещественном p затухающие или возрастающие решения (58.08) или (58.17). Это легко понять, так как при вещественном g уравнение (58.04) соответствует распространению двухмерных волн в плоскости x, y, а при мнимом g (при $g = ip$) распространение превращается в затухание.

Заметим, что в силу соотношений (58.12) и (58.14) на функции I_m и K_m могут быть перенесены тождества, которым удовлетворяют обычные бесселевы функции. В частности, справедливы соотношения

$$I'_0(y) = I_1(y), \quad K'_0(y) = -K_1(y). \tag{58.18}$$

Электромагнитные волны замедляются не только диэлектриками, но и проводниками. Соответствующие системы будут рассмотрены ниже. Параграф 37 был посвящен полосковым и щелевым линиям, в которых волны замедляются магнитодиэлектриком ($\varepsilon > 1$, $\mu > 1$). В дальнейшем слишком длинный термин «магнитодиэлектрик» применяться не будет, но при исследовании диэлектрических структур будет сохраняться параметр μ, придающий формулам симметрию.

§ 59. Распространение поверхностной волны вдоль привода с конечной проводимостью

Исследуем распространение симметричной электрической волны поверхностного типа вдоль металлического провода радиуса a. Электромагнитное поле этой волны при $r > a$ будем выра-

жать через электрический вектор Герца с единственной составляющей Π^e_z, определяемой формулой (58.03). Функция Π^e должна удовлетворять уравнению (58.10) с индексом $m=0$; поэтому полагаем

$$\Pi^e = AK_0(pr), \tag{59.01}$$

поскольку в силу асимптотических формул (58.16) она действительно дает поверхностную волну, поле которой исчезает при $r\to\infty$, а функция I_0 для этой цели непригодна. Вычисляя по формулам (18.03) составляющие электромагнитного поля при $r>a$, получаем

$$E_r = -ihpAK_1(pr)e^{ihz},\ E_z = -p^2AK_0(pr)e^{ihz},\ E_\varphi = 0,$$
$$H_\varphi = -ikpAK_1(pr)e^{ihz},\ H_r = H_z = 0. \tag{59.02}$$

Если провод является идеально проводящим, то распространение волны вдоль него происходит со скоростью c ($h=k$), как показано в § 29. В обычных линиях (см. § 34) конечное сопротивление проводов приводит к замедлению волны. Согласно § 58 она приобретает при этом поверхностный характер, обычно выраженный слабо (поскольку $h\approx k$).

К тому же результату приводит и конечная проводимость одиночного провода, которую легко учесть, ставя на поверхности провода граничное условие Леонтовича

$$E_z = \zeta H_\varphi \text{ при } r=a, \tag{59.03}$$

где ζ — волновой импеданс металла, определяемый формулой (26.02). Таким путем получается характеристическое уравнение

$$paK_0(pa)/K_1(pa) = i\zeta ka, \tag{59.04}$$

определяющее p и h для волны, бегущей вдоль провода.

При решении уравнения (59.04) нужно учесть, что параметр ζ весьма мал. Поэтому при малых и конечных значениях ka правая часть уравнения (59.04) весьма мала. Левая же часть уравнения, как легко показать с помощью формул § 58, может быть мала лишь при $pa\ll 1$. Пользуясь формулами (58.15), преобразуем уравнение (59.04) к виду

$$(pa)^2\ln(2/\gamma pa) = i\zeta ka. \tag{59.05}$$

Это уравнение было выведено (несколько иным путем) Зоммерфельдом еще в 1899 г. Трудность решения этого уравнения заключается в том, что правая часть его комплексна, поэтому нельзя применить графический метод, изложенный далее в § 67. Уравнение (59.05) приходится поэтому решать итерационным методом, для чего перепишем его в виде

$$(pa)^2 = i\zeta ka/\ln(2/\gamma pa). \tag{59.06}$$

Исходя из некоторого приближенного значения $\ln(2/\gamma pa)$, вычислим pa и подставим затем pa в правую часть под знак логариф-

ма; получаемое с помощью формулы (59.06) уточненное значение pa опять подставляют в правую часть и т. д. Итерационный процесс быстро сходится к искомому значению pa, если исходное значение $\ln(2/\gamma pa)$ брать не слишком далеко от истинного значения. Обычно можно полагать $\ln(2/\gamma pa) \approx 10$ и начинать итерации с этого значения для всех практически интересных случаев. Этот результат объясняется тем, что при больших значениях аргумента логарифм есть медленно меняющаяся функция.

Таким образом получается, что волна, распространяющаяся вдоль медного провода радиуса $a=1$ мм и имеющая частоту 10^9 Гц ($\lambda=30$ см), имеет волновое число $h=k[1+(6{,}0+i\,6{,}4)\times \times 10^{-5}]$. Благодаря конечной проводимости металла волна приобретает затухание (довольно малое), а ее фазовая скорость становится несколько меньше c. В теории длинных линий получаются аналогичные результаты (см. § 34).

Существенно отметить, что замедление волны, распространяющейся вдоль провода, превращает ее в поверхностную волну и энергия волны сосредоточивается вблизи провода, как это видно из формул (59.02). Обозначим через r (50%) и r (75%) радиусы цилиндров, коаксиальных данному проводу, через поперечные сечения которых проходит соответственно 50 и 75% мощности поверхностной волны. Приведем результаты расчетов r (50%) и r (75%) для медного провода радиусами $a=1$ и 5 мм (табл. 2).

Таблица 2

Радиусы цилиндров	$\lambda=30$ см		$\lambda=3$ см	
	$a=1$ мм	$a=5$ мм	$a=1$ мм	$a=5$ мм
r (50%), см	5	17	2	6,5
r (75%), см	38	100	9	14

Эти числа показывают, что в диапазоне дециметровых и сантиметровых волн радиальная протяженность поля одиночного провода не превышает нескольких длин волн. Эту протяженность можно еще уменьшить, если провод покрыть слоем диэлектрика (см. § 62).

Замедляющее действие провода с конечным сопротивлением объясняется тем, что в металле волны распространяются значительно медленнее, чем в воздухе, так как комплексный показатель преломления металла весьма велик (см. § 12 и 26). При распространении волны вдоль провода одна часть ее энергии (бо́льшая) находится в воздухе, а другая (меньшая) — в металле, и фазовая скорость волны есть взвешенная средняя. Так как поле в металле выделяет тепло, то наряду с замедлением волна приобретает и затухание. Аналогичным образом замедляет электромагнитные волны диэлектрик (см. § 61).

Отметим, что формулу (59.06) можно переписать в виде

$$h^2 = k^2 + i\xi k/a \ln(2/\gamma pa) = k^2 + i\omega \tilde{C} Z_i, \qquad (59.07)$$

где

$$Z_i = \tilde{\xi}/2\pi a = 2\xi/ca, \quad \tilde{C} = 1/2 \ln(2/\gamma pa); \qquad (59.08)$$

Z_i есть согласно формулам (26.11) и (26.13) погонный внутренний импеданс провода, а величину $\tilde{C}$ можно назвать (применительно к расчету h) с некоторой натяжкой погонной емкостью однопроводной линии. Тогда формула (59.07) приобретает тот же вид, что и формула (34.03) в теории длинных линий. Величина $\tilde{C}$ комплексна, однако в самом грубом приближении ее можно считать вещественным числом, равным 1/20.

Приведенные выше формулы позволяют дать электродинамический расчет волны в двухпроводной линии, принимая во внимание конечное сопротивление проводов. Согласно соотношению (32.08) ток, текущий по одиночному проводу, окруженному полем (59.02),

$J = J_0 e^{ihz}$, где

$$J_0 = -\frac{ca}{2} ikpAK_1(pa)$$

и этому току соответствует продольная составляющая электрического поля

$$E_z = -\frac{2ipJ_0}{cka K_1(pa)} K_0(pr) e^{ihz}. \qquad (59.09)$$

Если имеется второй такой же провод на расстоянии $b \gg a$ от первого, несущий ток $-J$, то

$$E_z = -\frac{2ipJ_0}{cka K_1(pa)} [K_0(pr) - K_0(pr')] e^{ihz}, \qquad (59.10)$$

где r' — расстояние точки наблюдения от оси второго провода. В этой формуле h и p пока неизвестны. Они могут быть определены из условия $E_z = Z_i J$ на поверхности первого провода (условие на втором проводе дает то же самое), где Z_i — погонный внутренний импеданс провода. Согласно условию $b \gg a$ при $r = a$ будем считать $r' = b$ и получаем для p уравнение

$$-2ip[K_0(pa) - K_0(pb)] = Z_i cka K_1(pa). \qquad (59.11)$$

Если выполняется условие $pb \ll 1$ (а значит, и условие $pa \ll 1$), то это уравнение принимает вид

$2p^2 \ln(b/a) = i\omega Z_i$, $h_2 = k^2 + i\omega 2Z_i C$, $C = 1/4 \ln(b/a)$, где согласно формуле (32.17) C — погонная емкость двухпроводной линии. Таким образом, при условии $pb \ll 1$ или, что то же, при условии (35.01) получаем волновое число h, совпадающее с тем, которое дают телеграфные уравнения. В этом случае поле в окрестности двухпроводной линии (на расстоянии порядка b от обоих проводов) является квазистатическим; благодаря интенсивному электродинамическому взаимодействию свойства двухпроводной линии радикально отличаются от свойств одиночного провода.

При противоположном условии $pb \gg 1$ уравнение (59.11) переходит в уравнение (59.04), полученное раньше для одиночного провода. В этом случае взаимодействия между проводами практически нет, поскольку поле одного провода «не дотягивается» до второго вследствие своего поверхностного характера.

§ 60. Поверхностная волна Ценнека

Термин «поверхностная волна» был впервые введен в связи с теорией распространения радиоволн над земной поверхностью. Ценнек в 1907 г. показал теоретически, что вдоль проводящей поверхности земли (или моря) может распространяться поверхностная волна. Эта волна аналогична поверхностной волне, распространяющейся вдоль провода. Характеристическое уравнение поверхностной волны Ценнека, распространяющейся над плоской земной поверхностью, можно получить, например, из уравнения (59.04), полагая в нем $a=\infty$ и пользуясь асимптотическими формулами (58.16). Таким путем приходим к соотношению

$$p=\mathrm{i}\zeta k. \tag{60.01}$$

Его проще получить непосредственно, исследуя распространение (вдоль оси z) волны, поле которой не зависит от координаты y. Задавая единственную составляющую вектора Герца над землей в виде

$$\Pi_z^e = A\,\mathrm{e}^{-px+\mathrm{i}hz}, \tag{60.02}$$

получаем

$$E_x = -\mathrm{i}\,hpA\,\mathrm{e}^{-px+\mathrm{i}hz},\ E_z = -p^2 A\,\mathrm{e}^{-px+\mathrm{i}hz},$$
$$H_y = -\mathrm{i}\,kpA\,\mathrm{e}^{-px+\mathrm{i}hz}, \tag{60.03}$$

а остальные составляющие равны нулю. Граничное условие Леонтовича $E_z=\zeta H_y$ при $x=0$ приводит к соотношению (60.01). При $\zeta\to 0$ это соотношение дает $p=0$, т. е. $h=\pm k$. Полагая $h=k$ и обозначая постоянную $-\mathrm{i}kpA$ до перехода к пределу $\zeta=0$ через A_0, получаем

$$E_x=H_y=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz},\ E_z=0, \tag{60.04}$$

т. е. волна Ценнека превращается в плоскую волну, скользящую вдоль идеально проводящей плоскости. Поэтому поверхностную волну Ценнека можно рассматривать как обычную плоскую волну, ставшую поверхностной благодаря просачиванию части энергии в почву. Ее волновое число

$$h=\sqrt{k^2+p^2}=k\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{60.05}$$

Для хороших проводников параметр ζ мал, поэтому волновое число h мало отличается от k при распространении волны Ценнека над сушей и тем более над морем.

Поверхностный характер этой волны выражен весьма слабо: так как обычно для почвы $|\zeta|\ll 1$, то $|p|\ll k$, и вертикальная протяженность волны Ценнека весьма велика по сравнению с длиной волны. Передающие антенны поверхностной волны Ценнека фактически не возбуждают, и она для распространения радиоволн над сушей или морем реального значения не имеет; поле радиоволн имеет совершенно иную структуру.

После того как теоретически и экспериментально было доказано, что особенности распространения радиоволн над земной поверхностью не могут быть объяснены с помощью поверхностной волны, сам опороченный термин «поверхностная волна» долгое время не употреблялся. Однако все медленные волны являются фактическими волнами поверхностными, так что волна, замедленная, например, проводом, качественно не отличается от поверхностной волны Ценнека.

Однако эти две поверхностные волны различаются в количественном отношении. Поверхностный характер волны вдоль провода с конечным сопротивлением выражен гораздо более резко, чем поверхностный характер волны, распространяющейся вдоль плоской границы проводника. Физически этот результат понятен, так как тонкий провод направляет электромагнитную волну вдоль своей оси.

Сравним обе системы — провод и плоскость — более детально. Электромагнитное поле вокруг идеально проводящей однопроводной линии наиболее интенсивно вблизи самого провода [[см. рис. 20,*а* и формулу (29.10)]. Поэтому при просачивании этого поля в провод с конечной проводимостью получается большее замедление, чем для плоской границы, и более быстрое спадание поля в поперечном направлении. Иначе можно сказать, что для провода замедление лишь усиливает закон спадания $1/r$, имевшийся при отсутствии замедления, а для плоской границы спадание появляется лишь в результате замедления.

Волна Ценнека может быть как быстрой, так и медленной. При $\delta \approx \pi/2$ (δ — угол электрических потерь) и $\varepsilon' > 1/4$ (ε' — вещественная часть диэлектрической проницаемости почвы или воды) волна Ценнека — быстрая (см. задачу 1); этот случай обычно реализуется при распространении радиоволн. Таким образом, среди поверхностных волн волна Ценнека занимает особое положение, поскольку ее поверхностный характер не связан с замедлением. В предельном случае $\delta = 0$ эта волна превращается в плоскую волну, падающую на плоскую границу раздела под углом Брюстера (15.25) и, естественно, является быстрой (см. § 44). При увеличении δ волна остается быстрой и лишь при $\delta \approx \pi/2$, когда нарушается условие $\varepsilon' > 1/4$, становится медленной и сохраняет это свойство в интервале $\pi/2 < \delta < \pi$ (в § 9 отмечалось, что такие значения δ в принципе возможны, хотя для земной поверхности они не реализуются). При $\delta = \pi$ волна Ценнека уже не отличается по своим свойствам от поверхностной волны над диэлектрической пластинкой (см. § 61) или гребенкой (см. § 66).

§ 61. Замедление волн диэлектрической пластиной

Исследуем распространение электромагнитных волн в диэлектрическом слое толщиной $2a$, изображенном на рис. 64. Для общности будем приписывать слою $-a < x < a$ вещественные проницаемости ε и μ, вне этого слоя при $|x| > a$ — пустота, где $\varepsilon = \mu = 1$.

Рассмотрим поверхностные электрические волны, поля которых не зависят от координаты y (двухмерные поля). Эти волны

имеют электрический вектор Герца с единственной составляющей

$$\Pi^e_z = \Pi^e(x)\, e^{ihz}. \tag{61.01}$$

В пластине при $|x| < a$ составляющая Π^e_z должна удовлетворять уравнению (21.12), отсюда для функции Π^e получаем уравнение

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} + g^2\Pi = 0,\ g^2 = k^2\varepsilon\mu - h^2, \tag{61.02}$$

имеющее частные решения

$$\Pi = B\sin gx \text{ и } \Pi = B'\cos gx. \tag{61.03}$$

Первое выражение (61.03) определяет по формулам (21.13) составляющие электромагнитного поля в диэлектрике

$$\begin{aligned} E_x &= i\,h\,d\Pi^e/dx\, e^{ihz} = i\,hg\,B\cos gx\, e^{ihz},\\ E_z &= g^2\Pi^e e^{ihz} = g^2 B\sin g\,x\, e^{ihz},\\ H_y &= i\,k\varepsilon\, d\Pi^e/dx\, e^{ihz} = i\,kg\varepsilon\, B\cos gx\, e^{ihz},\\ E_y &= H_x = H_z = 0. \end{aligned} \tag{61.04}$$

Над пластиной, при $x > a$, поле берется по формулам (60.03). Приравнивая составляющие E_z и H_y по формулам (60.03) и (61.04) на поверхности раздела $x = a$, получаем

$$-p^2 A e^{-pa} = g^2 B\sin ga,\quad -pA e^{-pa} = \varepsilon g B\cos ga. \tag{61.05}$$

Условие совместности этих алгебраических уравнений для постоянных A и B дает характеристическое уравнение

$$pa = (1/\varepsilon)\,ga\,\mathrm{tg}\,ga, \tag{61.06}$$

позволяющее вычислить фазовую скорость волн, распространяющихся вдоль пластины. Множитель a добавлен в правой и левой частях уравнения (61.06) и последующих уравнений для удобства исследования.

Второе решение (61.03) приводит к соотношениям

$$-p^2 A e^{-pa} = g^2 B'\cos ga,\quad pA e^{-pa} = \varepsilon g B'\sin ga. \tag{61.07}$$

Характеристическое уравнение в этом случае

$$pa = -(1/\varepsilon)\,ga\,\mathrm{ctg}\,ga. \tag{61.08}$$

Электрические волны, определяемые решениями (61.03), имеют различную симметрию относительно плоскости $x = 0$. Электрическую волну (61.04) естественно назвать четной, поскольку ее составляющие E_x и H_y являются четными функциями координаты x (а E_z и Π^e_z — нечетными). Электрическая волна, соответствующая второму выражению (61.03), называется нечетной электрической волной, так как ее поперечные составляющие электричес-

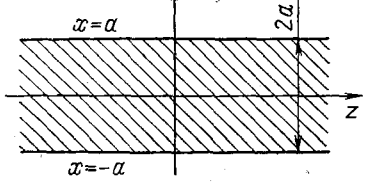


Рис. 64. Диэлектрическая пластина (плоскопараллельный слой)

кого и магнитного полей суть нечетные функции x. Заметим, что согласно четности или нечетности составляющих полей граничные условия этих волн удовлетворяются при $x=-a$ автоматически, если они удовлетворены при $x=a$, поэтому вторую границу раздела можно не рассматривать.

Наряду с электрическими волнами вдоль пластины могут распространяться магнитные волны, магнитный вектор Герца которых имеет единственную составляющую

$$\Pi_z^m = \Pi^m(x)\, e^{ihz}. \tag{61.09}$$

Характеристическое уравнение четных магнитных волн имеет вид

$$pa = (1/\mu)\, ga \operatorname{tg} ga, \tag{61.10}$$

а для нечетных волн

$$pa = -(1/\mu)\, ga \operatorname{ctg} ga. \tag{61.11}$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (61.06) и (61.08) заменой ε на μ.

При анализе необходимо учесть, что величины g и p связаны соотношением

$$g^2 + p^2 = k^2(\varepsilon\mu - 1). \tag{61.12}$$

Кроме того, должно быть $p>0$, так что если правая часть выписанных выше характеристических уравнений отрицательна, то поверхностной волны нет.

Правая часть уравнения (61.06) изображена на рис. 65,*а* сплошными кривыми (без множителя $1/\varepsilon$ и при тех ga, когда она положительна). Поскольку

$$(ga)^2 + (pa)^2 = (ka)^2(\varepsilon\mu - 1), \tag{61.13}$$

то искомые значения ga и pa, соответствующие заданным параметрам пластины a, ε, μ и заданной частоте $\omega = ck$, лежат на пересечениях кривых рис. 65,*а* (после того, как масштаб по оси ординат установлен в соответствии со значением ε), с окружностью радиуса

$$\rho = ka\sqrt{\varepsilon\mu - 1}, \tag{61.14}$$

имеющей центр в начале координат (в точке $ga = pa = 0$). Так как эта окружность пересекается лишь с конечным числом ветвей кривых на рис. 65,*а*, то уравнение (61.06) имеет лишь конечное число корней. При $\rho<\pi$ есть лишь один корень, который дает волну E_{00} в диэлектрической пластине; при $\rho>\pi$ появляется второй корень, соответствующий волне E_{20}, при $\rho>2\pi$ — корень, дающий волну E_{40}, и т. д. Волновые числа h этих волн определяются формулой: $h = \sqrt{k^2 + p^2}$.

Все эти волны — медленные. Число этих волн тем больше, чем выше частота, точнее, чем больше параметр ρ. В этом отношении диэлектрическая пластина аналогична волноводу, поэтому ее можно назвать плоскопараллельным диэлектрическим волново-

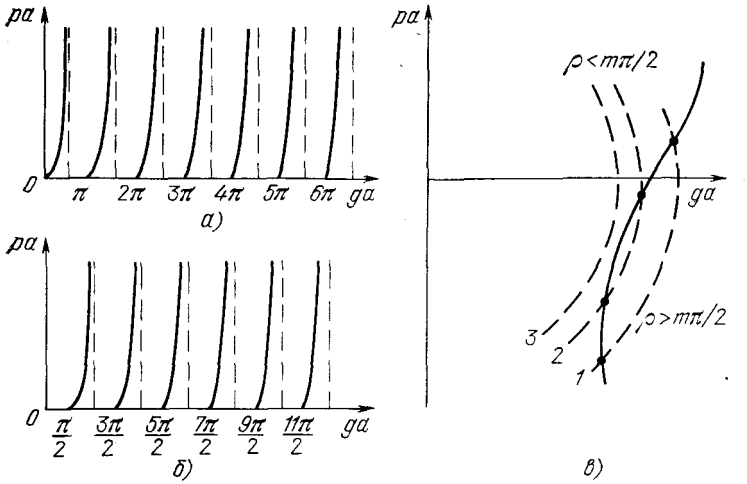


Рис. 65. Графическое решение характеристических уравнений:
а — для четных волн; *б* — для нечетных волн; *в* — появление вытекающей волны (окружность 3)

дом. Частоты, при которых появляются новые распространяющиеся волны в диэлектрическом волноводе, можно назвать критическими частотами. Они соответствуют значениям $\rho=\pi$, $\rho=2\pi$ и т. д.

Однако аналогия между диэлектрическим и обычным волноводом является неполной, так как электромагнитное поле частично просачивается за пределы диэлектрического волновода. Это приводит к тому, что новая волна, появляющаяся в диэлектрическом волноводе при своей критической частоте, имеет согласно рис. 65,*а* $p=0$ и $h^2=k^2$, т. е. распространяется со скоростью света, в то время как в обычном волноводе при критической частоте $h=0$. Другое важное отличие состоит в том, что при частоте ниже критической в диэлектрическом волноводе данной поверхностной волны нет: она существует в виде быстрой волны, при своем распространении затухающей из-за потерь на излучение. Быстрые волны будут рассмотрены в конце параграфа.

Характеристическое уравнение (61.08) для нечетных электрических волн дает семейство кривых, изображенных на рис. 65,*б*, пересечение которых с окружностью (61.13) определяет значения *ga* и *pa*, соответствующие данному значению параметра ρ. Из рис. 65,*б* видно, что при $\rho<\pi/2$ уравнение (61.08) не имеет решения, при этом условии нечетных электрических волн нет. При $\rho>\pi/2$ появляется волна E_{10}, при $\rho>3\pi/2$ — волна E_{30} и т. д. Вообще можно сказать, объединяя результаты исследования четных и нечетных волн, что волна E_{m0} существует лишь при условии $\rho>m\pi/2$.

Характеристические уравнения (61.10) и (61.11) исследуются аналогичным образом: кривые, определяющие зависимость *pa* от

ga для четных (H_{00}, H_{20} и т. д.) и нечетных (H_{10}, H_{30} и т. д.) магнитных волн, совпадают с кривыми на рис. 65,*а* и *б*. Поэтому неравенство $\rho > m\pi/2$ есть также условие существования поверхностной волны H_{m0}.

Из рис. 65 видно, что для данной волны (например, для волны E_{00} или E_{10}) при неограниченном увеличении параметра ρ величина ga стремится к конечному пределу ($\pi/2$, π и т. д.), а величина pa неограниченно возрастает. Поэтому при частоте, значительно превышающей критическую частоту данной волны, ее поле в основном сосредоточено в диэлектрике и в окружающее пространство просачивается слабо. Действительно, условие $pa \gg 1$ приводит к тому, что поперечная протяженность поля в пустоте значительно меньше a. Формула $h = \sqrt{k^2\varepsilon\mu - g^2}$ показывает, что при высоких частотах волна распространяется с волновым числом $h \approx k\sqrt{\varepsilon\mu}$ (так как k растет, а g конечно), т. е. с той же скоростью, что и в безграничном диэлектрике. Наоборот, при критической частоте $p = 0$ и $h = k$. Это значит, что при частоте, лишь немного превышающей критическую частоту, электромагнитное поле волны в основном расположено в пустоте; окружающее пространство заполнено полем на большом протяжении, так как $pa \ll 1$. При таких частотах $h \approx k$, скорость волны близка к c.

Эти закономерности, связывающие распределение поля волны с ее фазовой скоростью, находятся в согласии с высказанными в § 59 соображениями о том, что результирующая скорость волны, распространяющейся вдоль границы двух сред, является «взвешенной средней» скоростью.

Распространение медленных волн удобно характеризовать с помощью коэффициента замедления $u/c = k/h$, равного отношению фазовой скорости u данной волны к скорости света в пустоте c. На рис. 66 изображен коэффициент замедления u/c волны E_{00} в

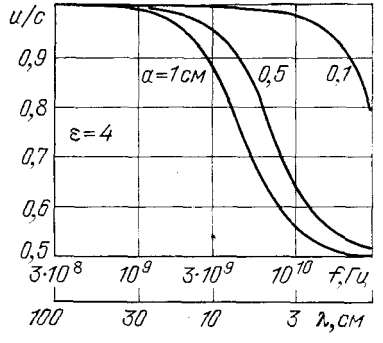


Рис. 66. Дисперсия волны E_{00} в диэлектрическом слое

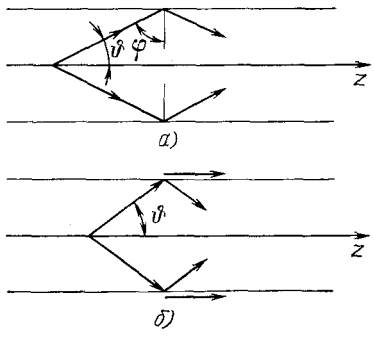


Рис. 67. Разложение волны в диэлектрической пластине на плоские волны:

***а* — при частоте выше критической; *б* — при критической частоте**

зависимости от частоты f и соответствующей ей длины λ в свободном пространстве. Расчет произведен для диэлектрической пластины, половинная толщина которой $a=1$, 0,5 и 0,1 см, а диэлектрическая постоянная $\varepsilon=4$. Видно, что в соответствии со сказанным отношение u/c при росте частоты уменьшается от $u/c=1$ (волна со скоростью c) до $u/c=1/2$ (скорость $c/\sqrt{\varepsilon}=c/2$).

Физический смысл явлений в диэлектрическом волноводе можно представить себе более ясно, если разложить электромагнитное поле в нем на плоские волны, как это сделано в § 44 для обычного волновода. Составляющая Π^e_z для нечетных электрических волн представится с помощью формул Эйлера в виде

$$\Pi^e_z = (B/2i)\,[e^{i(gx+hz)} - e^{i(-gx+hz)}], \tag{61.15}$$

на аналогичные слагаемые разложатся составляющие поля (61.04). Так как волновые числа g и h удовлетворяют соотношению

$$g^2+h^2=k^2\varepsilon\mu, \tag{61.16}$$

то можно, как и в § 44, ввести угол ϑ так, что

$$g=k\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\vartheta,\ h=k\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\vartheta. \tag{61.17}$$

Отсюда видно, что поле внутри диэлектрического волновода является суммой двух плоских волн, направление распространения которых образует с осью z угол ϑ. Угол падения этих волн на границу диэлектрика — плоскость $x=a$ или $x=-a$, очевидно, равен (рис. 67,*а*): $\varphi=\pi/2-\vartheta$. Изученные выше волны в диэлектрическом волноводе были медленными волнами, т. е. удовлетворяли условию

$$h=k\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\vartheta=k\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\varphi>k, \tag{61.18}$$

и угол падения φ удовлетворял неравенству

$$\sin\varphi>1/\sqrt{\varepsilon\mu}=1/n. \tag{61.19}$$

Поэтому плоские волны (61.15) на границе диэлектрика с пустотой испытывают полное внутреннее отражение.

Таким образом, волноводные свойства диэлектрической пластины обусловлены явлением полного внутреннего отражения, благодаря которому электромагнитная энергия сохраняется в пределах диэлектрика. Электромагнитное поле в окружающем диэлектрик пространстве возникает благодаря просачиванию энергии при полном отражении в другую среду, причем просачивающееся поле затухает при удалении от плоскости раздела по экспоненциальному закону.

При частотах, значительно превышающих критическую частоту данной волны, угол ϑ мал и плоские волны распространяются почти по оси z, чему соответствует $h\approx k\sqrt{\varepsilon\mu}$. При уменьшении частоты угол ϑ увеличивается, а угол φ уменьшается, что имеет место и в обычном волноводе (§ 44). Однако угол ϑ не может

увеличиваться до значения $\pi/2$, как в обычном волноводе, а именно, при критической частоте

$$\cos\vartheta = \sin\varphi = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} = 1/n \qquad (61.20)$$

и в окружающем пространстве появляется преломленный луч, идущий вдоль границы раздела (рис. 67,*б*). Этому лучу соответствует плоская волна, распространяющаяся в пустоте параллельно оси z со скоростью c. При более низких частотах данная волна как поверхностная существовать не может.

Особое положение занимают поверхностные волны E_{00} и H_{00}, не имеющие критической частоты и существующие при сколь угодно низких частотах. Если выполняется условие $\rho \ll 1$, то оно согласно формуле (61.13) влечет за собой неравенства $pa \ll 1$ и $ga \ll 1$. Это значит, что как в диэлектрике, так и над ним, поле становится практически поперечным: вдоль пластины распространяется плоская волна, слегка возмущенная пластиной.

Рассмотрим волноводные свойства диэлектрического слоя толщиной a, лежащего на идеально проводящей плоскости $x=0$. На этой плоскости должны выполняться граничные условия $E_y = E_z = 0$. Как непосредственно видно из формулы (61.04), четные электрические волны (E_{00}, E_{20}, E_{40}, ...) в диэлектрическом слое толщиной $2a$ автоматически удовлетворяют этим граничным условиям и поэтому распространяются в такой системе по тем же законам, что и в пластине толщиной $2a$. В частности, кривые на рис. 66 в равной степени применимы к волне E_{00}, распространяющейся вдоль плоскости с диэлектрическим слоем толщиной a. Нечетные магнитные волны (H_{10}, H_{30}, ...) также без всяких изменений существуют в новой системе. Указанными волнами исчерпываются поверхностные волны в данной системе. Все эти волны можно рассматривать как результат попеременного отражения плоских волн от проводящей плоскости $x=0$ и границы диэлектрика $x=a$.

Долгое время в диэлектрической пластине, как и в других замедляющих диэлектрических системах, видели, исследовали и применяли на практике только медленные (поверхностные) волны. Как видно из рис. 67,*а*, медленные волны в пластине соответствуют плоским волнам, испытывающим на границе диэлектрик — пустота полное отражение. Ранее считали (и это нашло свое отражение в первом издании этой книги), что кроме таких волн других нет. Нетрудно, однако, показать, что в диэлектрической пластине могут распространяться и быстрые волны, отражение которых от границ пластины не является полным; поэтому они распространяются вдоль пластины, затухая вследствие излучения в окружающее пространство.

Выше было отмечено, что при $\rho < m\pi/2$ поверхностных волн E_{m0} и H_{m0} нет. Однако волны E_{m0} и H_{m0} при $\rho < m\pi/2$ существуют, но не как медленные, а как быстрые волны; им соответствуют комплексные корни характеристических уравнений (61.06) и (61.10) при четном m и уравнений (61.08) и (61.11) при нечет-

ном m. Точнее, быстрая волна получается из поверхностной волны не сразу при $\rho<m\pi/2$, а пройдя стадию медленной «антиповерхностной» волны. Дело в том, что эти уравнения, имеющие вид $pa=f(ga)$, формально допускают при $\rho>m\pi/2$ также отрицательные значения p, соответствующие отрицательным частям кривых, изображенным на рис. 65,*в*: пересечение их с окружностью (61.13) (окружность *1* на рис. 65,*в*) дает антиповерхностную волну — медленную, незатухающую, с полем, экспоненциально растущим вне пластины при увеличении $|x|$. Такие значения p выше не рассматривались как не имеющие физического смысла, однако для полноты картины их надо учесть. Когда параметр ρ, пропорциональный частоте, уменьшается и проходит через значение $\rho=m\pi/2$, то сначала поверхностная волна становится второй антиповерхностной волной (окружность *2*), при дальнейшем уменьшении ρ точки в плоскости ga, pa, соответствующие двум таким волнам, сближаются и, наконец, окружность *3* уже не пересекается с кривой $pa=f(ga)$. Тогда характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $p=p'+ip''$, $p'<0$. В силу соотношения $h'h''=p'p''$, получающегося из формулы $h^2=k^2+p^2$, корень, у которого $p''<0$, определяет при $h'>0$ так называемую вытекающую волну: от диэлектрической пластины отходит неоднородная плоская волна, постепенно забирающая энергию у поля в пластине, вследствие чего волна затухает по оси z ($h''>0$). Корень, у которого $p''>0$, определяет волну, которую можно назвать втекающей (из окружающего пространства в пластину).

Антиповерхностные и втекающие волны фактически не возбуждаются и имеют лишь математический смысл. Вытекающие волны имеют четкий физический смысл и могут быть применены на практике.

На рис. 68 схематически изображено возбуждение поля в диэлектрической пластине источником, находящимся в точке 0. Лучи типа 1, полностью отражающиеся от границ $x=\pm a$, дают начало медленным (поверхностным) волнам. Лучи типа 2, испытывающие лишь частичное отражение, ответственны за формирование быстрых волн, затухающих из-за излучения (уходящие волны изображены лучами $2'$), т. е. вытекающих волн.

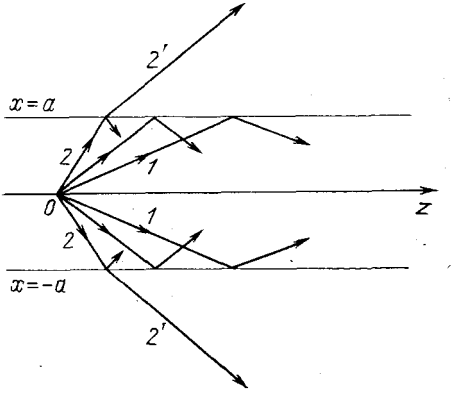


Рис. 68. Формирование волн в диэлектрической пластине

При возбуждении волн в диэлектрической пластине, диэлектрическом стержне и во многих других системах вытекающие волны не играют сколь-нибудь заметной роли, поскольку они довольно быстро затухают при удалении от

источника, и на значительном расстоянии преобладают поверхностные волны. Из-за неизбежных потерь в диэлектрике поверхностные волны тоже затухают, но эти потери увеличивают и затухание вытекающих волн. Однако так бывает не всегда: существуют системы, в которых затухание вытекающих (быстрых) волн меньше, чем затухание поверхностных волн, если учесть потери в диэлектрике. Это — диэлектрические трубки, которые будут рассмотрены в § 64.

Задача о диэлектрической пластине обрела новую жизнь с появлением планарных оптических волноводов (световодов) в интегральной оптике. Такие волноводы состоят из тонкой диэлектрической пленки на подложке, имеющей чуть меньший показатель преломления. Применяются также пленки с переменным по толщине показателем преломления; в такой пленке свет распространяется примерно так же, как в пустыне при образовании миража. Применяются также полосковые структуры, целиком диэлектрические.

Не останавливаясь на всех этих сложных системах, заметим лишь следующее. В оптическом диапазоне, где длина волны мала, диэлектрический слой будет поддерживать распространение многих поверхностных волн. Если же диэлектрический слой с проницаемостями ε, μ окружен средой, проницаемости ε_0, μ_0 которой близки к ε, μ, то согласно § 21 параметр (61.14) примет вид

$$\rho = ka\sqrt{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0} \qquad (61.21)$$

и добиться условия $\rho < \pi/2$, при котором существуют лишь поверхностные волны E_{00} и H_{00}, при $\varepsilon\mu \approx \varepsilon_0\mu_0$ уже нетрудно. В случае, когда среда с проницаемостями, близкими к ε, μ, примыкает к одной стороне слоя, а по другую сторону — пустота, поверхностные волны высших номеров отсутствуют при $\rho < 3\pi/4$, но сами волны E_{00} и H_{00} имеют критические частоты: они существуют как поверхностные лишь при $\rho > \pi/4$ (см. задачу 2).

§ 62. Волны в диэлектрических структурах

Из диэлектрических линий передачи наибольший практический интерес в настоящее время представляют световоды (оптические волокна). Планарные световоды, о которых говорилось в конце § 61, применяются для передачи световых сигналов на небольшие расстояния (не длиннее нескольких миллиметров) — как соединительные линии планарных оптических цепей. Волоконные светоды, предназначенные для передачи оптических сигналов на большие расстояния, должны иметь затухание не более нескольких децибел на километр. По мере усовершенствования технологии (а этот процесс происходит непрерывно ввиду большой важности волоконных линий связи) было достигнуто затухание около 0,1 дБ/км.

В оптическом диапазоне применяются как многоволновые, так и одноволновые волоконные световоды. В волоконных световодах

показатель преломления в зависимости от радиальной координаты часто изменяется не скачком, а непрерывно; это обусловлено диффузионными процессами, сопровождающими изготовление волокна. Надлежащее непрерывное распределение не ухудшает свойств волоконных световодов, а даже улучшает их.

В настоящее время имеется технология изготовления оптических волокон и пленок с минимальными поперечными размерами порядка микрона; практически применяются волокна немного толще человеческого волоса. Теория световодов разработана весьма детально. Однако ниже мы ограничимся простейшим случаем однородного диэлектрического волновода, окруженного однородной средой с иным показателем преломления; сначала для простоты можно считать, что диэлектрический волновод расположен в пустоте, к произвольной окружающей среде легко перейти с помощью леммы § 21.

Задача о диэлектрическом цилиндре рассматривалась еще в начале нашего века и затем применялась к сравнительно длинным радиоволнам (метровым, дециметровым). Решение этой задачи довольно громоздко; оно будет изложено в следующем параграфе, а здесь будут приведены лишь основные результаты.

Распространение электромагнитных волн вдоль диэлектрических цилиндров с физической точки зрения обусловлено отражением волны в диэлектрике от границы диэлектрика. В диэлектрической пластине (§ 61) все явления проще, поскольку волны и границы плоские, для цилиндрической волны и цилиндрической границы анализ усложняется. Однако в качественном отношении волны диэлектрического стержня имеют те же свойства, что и волны E_{m0} и H_{m0} ($m=1, 2, \ldots$) в диэлектрической пластине: каждая такая волна существует лишь при частотах, превышающих некоторую критическую частоту; при частотах, значительно превышающих критическую частоту, поле волны в основном расположено в стержне, и $h \approx k\sqrt{\varepsilon\mu}$; при частотах, близких к критической, — в окружающем пространстве, и $h \approx k$. Помимо этих волн существует волна, аналогичная волнам E_{00} и H_{00} в диэлектрической пластине и существующая при любых частотах. Эта волна — несимметричная, при весьма низких частотах структура ее поля вблизи стержня приобретает вид, изображенный на рис. 69. Данную волну можно рассматривать как обычную плоскую волну, возмущенную и замедленную диэлектрическим стержнем, вследствие чего она превращается в поверхностную волну с продольными составляющими электрического и магнитного поля.

Данная волна используется в диэлектрических антеннах, выполненных в виде сужающихся к концу стержней, для создания излучения, направленного вдоль оси стержня. При этом стержень обычно работает в одноволновом режиме.

Следует отметить, что палочковые клетки в сетчатке глаза, обеспечивающие сумеречное зрение (т. е. регистрирующие интенсивность света, а не его спектр), представляют собой широкодиапазонные приемные антенны световых волн в виде диэлектричес-

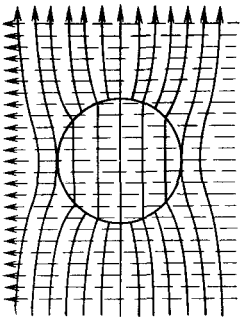


Рис. 69. Поле несимметричной волны (основной), распространяющейся вдоль диэлектрического стержня при низких частотах

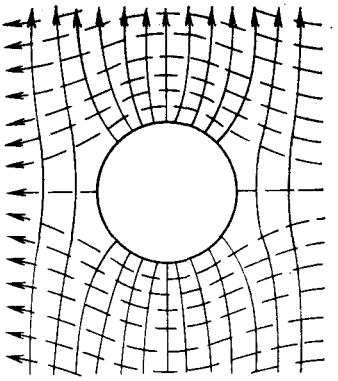


Рис. 70. Поле несимметричной волны (основной), распространяющейся вдоль проводящего стержня с весьма тонкой диэлектрической оболочкой

ких стерженьков, а колбочковые клетки, ответственные за цветное зрение, снабжены еще резонансными элементами — зрительными пигментами с различными спектрами поглощения.

Интересной замедляющей системой является металлический стержень с диэлектрической оболочкой, например провод, покрытый изолирующим слоем. Если считать металлический стержень идеально проводящим, то свойства волн в такой системе аналогичны свойствам волн, распространяющихся вдоль проводящей плоскости со слоем диэлектрика (см. конец § 61). При достаточно низких частотах вдоль идеально проводящего цилиндра с диэлектрической оболочкой могут распространяться только две волны — симметричная и несимметричная. Симметричная волна при отсутствии диэлектрика переходит в поперечную волну однопроводной линии (рис. 20,*а*), а несимметричная волна — в плоскую волну, возмущенную поверхностью стержня (рис. 70). Несимметричная *основная* волна аналогична такой же волне в диэлектрическом стержне; однако соответствующей симметричной волны в диэлектрическом стержне нет. Изложение теории волн в этой системе читатель найдет в § 63.

Как показано в § 59, конечное сопротивление металлического провода само по себе приводит к некоторому замедлению волны и превращает ее в поверхностную волну; диэлектрическая оболочка лишь усиливает замедление и уменьшает радиальную протяженность поля.

Из сказанного в конце § 60 вытекает, что диэлектрический слой на тонком проводе должен создавать симметричную поверхностную волну, выраженную гораздо сильнее, чем поверхностная волна, распространяющаяся вдоль диэлектрического слоя той же толщины на проводящей плоскости.

К числу линий с поверхностными волнами принадлежат полосковые и щелевые линии, рассмотренные в § 37. Наличие диэлектрической прокладки в этих линиях замедляет волну и придает ей поверхностный характер: электромагнитное поле в пространстве вне диэлектрика как бы стягивается к полоске или щели. Это обстоятельство не мешает полю в полосковой линии вблизи полоски иметь на длинных волнах квазистатический характер, благодаря чему эту линию можно отнести к линиям первой группы и рассчитывать с помощью телеграфных уравнений.

Возвращаясь к диэлектрическому цилиндру в пустоте, надо отметить, что при $\rho<\nu_{01}=2{,}405$ он может поддерживать только распространение основной волны, о которой говорилось выше (см. также рис. 69), а при $\rho>\nu_{01}$ возможно распространение волн E_{01} и H_{01} (§ 63). Параметр ρ для цилиндра определяется формулой (61.14), где под a следует понимать радиус цилиндра. Если цилиндр окружен средой с проницаемостями ε_0, μ_0, то параметр ρ определяется формулой (61.21), а условие $\rho<\nu_{01}$ по-прежнему гарантирует отсутствие высших поверхностных волн. В оптическом диапазоне одноволновый режим достигается при близости параметров волокна и оболочки, а при плавном радиальном распределении показателя преломления — малыми градиентами последнего.

Выше основное внимание уделялось волнам, распространяющимся вдоль диэлектрической структуры без затухания, т. е. с вещественным продольным волновым числом h. Комплексные волновые числа h могут возникать по следующим причинам: 1) потери в диэлектрике; 2) потери на излучение; 3) образование так называемых комплексных волн.

Первая причина совершенно очевидна: волны в линиях первой группы (см. гл. VI) и в волноводах (см. § 50) из-за потерь в пространстве, занятом полем, приобретают затухание. В диэлектрических структурах затухание из-за потерь в диэлектрике, как правило, тем больше, чем больше замедление волны. Эта качественная закономерность объясняется тем, что фазовая скорость волны, распространяющейся, например, вдоль диэлектрического стержня в пустоте, есть «взвешенная средняя» скоростей $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ (в диэлектрике) и c (в пустоте): чем больше энергии находится в диэлектрике, тем скорость ближе к $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, чем больше энергии в пустоте, тем скорость ближе к c. Применительно к диэлектрической пластине это было отмечено в § 61. Связь между замедлением и затуханием возникает из-за того, что плотность потерь пропорциональна плотности электрической энергии в диэлектрике (т. е. $|\mathbf{E}|^2$).

Вторая и третья причины действуют и при отсутствии обычных потерь, которым посвящены § 6 и 9. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать идеальные диэлектрики и идеальные проводники.

Затухающие волны в диэлектрических структурах — это быст-

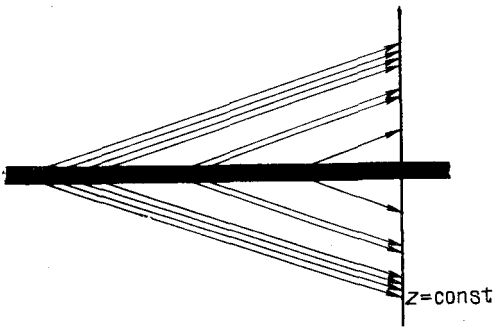


Рис. 71. Вытекающая волна: затухание в продольном направлении, возрастание в поперечном

рые волны, теряющие свою энергию из-за излучения. Такие волны называют вытекающими (см. § 61). В диэлектрических стержнях и аналогичных структурах поверхностная (медленная) волна превращается в вытекающую (быструю) при частотах ниже критической. Если сравнивать вытекающие волны в диэлектрическом стержне с затухающими волнами в круглом волноводе, то обнаруживается следующее отличие: в волноводе (при данной частоте) распространяющиеся и затухающие волны образуют полную систему (см. конец § 40), чего о поверхностных и вытекающих волнах диэлектрического стержня сказать нельзя. Даже в более простых задачах, например в задаче о возбуждении двухмерных полей в диэлектрической пластине (см. § 61 и рис. 68), возбуждаемое поле не сводится к суперпозиции поверхностных и вытекающих волн.

Вытекающие волны весьма своеобразно ведут себя на больших расстояниях от направляющей структуры: в отличие от поля поверхностных волн поле вытекающих волн экспоненциально возрастает в поперечных направлениях. Это возрастание, как легко понять, есть следствие потерь на излучение. Пусть вдоль некоторой линии передачи в положительном направлении оси z распространяется вытекающая волна, излучающая в окружающее пространство (рис. 71). В положительном направлении оси z ее амплитуда в окрестности линии убывает, в отрицательном направлении (при $z\to-\infty$) — неограничено возрастает. Лучи, вышедшие из линии при больших отрицательных z, переносят экспоненциально большую мощность (она тем больше, чем больше — z), распространяются в свободном пространстве без затухания, и поэтому поток энергии через любое сечение $z=\text{const}$ оказывается бесконечным (см. задачу 3).

По сравнению с внутренними потерями в линии и потерями внешними (на излучение) образование комплексных волн — явление более сложное. Комплексные волны существуют как в открытых, так и в закрытых диэлектрических структурах; примеры таких структур даны в § 63. Комплексные волны в обычных диэлектриках всегда принадлежат к числу гибридных волн, у которых имеются обе продольные составляющие E_z и H_z; в диэлектрических структурах, обладающих симметрией вращения, все несимметричные волны являются гибридными (§ 63). Каждую гибридную волну можно рассматривать как волну, возникшую в результате электродинамической связи между электрической волной

($E_z \neq 0$, $H_z = 0$) и магнитной волной ($H_z \neq 0$, $E_z = 0$). Если фазовые скорости этих волн при $\omega = \omega_0$ равны, а групповые скорости имеют разные знаки, то при $\omega \approx \omega_0$ появляются комплексные волны.

Исследование связанных волн в диэлектрических структурах требует серьезных численных расчетов, которые в случае комплексных волн особенно усложняются. Имеется, однако, простая и вместе с тем достаточно общая модель, позволяющая в явном виде проанализировать связанные волны и выяснить, при каких условиях образуются комплексные волны и какими свойствами они обладают. Этой моделью являются две связанные линии передачи, в каждой из которых может существовать только одна волна, распространяющаяся в положительном или отрицательном направлении оси z. В отсутствие связи эти линии подчиняются телеграфным уравнениям

$$-U'_s = Z_s J_s, \quad -J'_s = Y_s U_s \quad (s = 1, 2), \tag{62.01}$$

где штрих означает дифференцирование по z, J_s и U_s — ток и напряжение в s-й линии; Z_s и Y_s — ее погонные импеданс и адмиттанс. Уравнения (62.01) перейдут в уравнения (30.02), если положить $Z_s = R_s - i\omega L_s$ и $Y_s = G_s - i\omega C_s$ или, пренебрегая потерями, положить $Z_s = -i\omega L_s$ и $Y_s = -i\omega C_s$; тогда в s-й линии будет распространяться волна с волновым числом $h_s = \omega\sqrt{L_s C_s}$ и волновым импедансом $\mathrm{Z}_s = \sqrt{L_s/C_s}$.

Но можно рассматривать линии с иной зависимостью Z_s и Y_s от частоты. В такой линии волна, у которой U_s и J_s пропорциональны $e^{ih_s z}$, характеризуется соотношениями

$$h^2{}_s = -Z_s Y_s, \quad \mathrm{Z}_s = U_s/J_s = -ih_s/Y_s = iZ_s/h_s \tag{62.02}$$

и может случиться так, что h_s и Z_s имеют разные знаки. Например, при $Z_s = i/\omega C_s$ и $Y_s = i/\omega L_s$ ($C_s > 0$ и $L_s > 0$ от частоты не зависят) получаем

$$h_s = \frac{1}{\omega\sqrt{L_s C_s}}, \quad \mathrm{Z}_s = -\sqrt{\frac{L_s}{C_s}} \tag{62.03}$$

и также

$$u_s = \omega/h_s = \omega^2\sqrt{L_s C_s}, \quad v_s = d\omega/dh_s = -\omega^2\sqrt{L_s C_s} = -u_s, \tag{62.04}$$

т. е. фазовая и групповая скорости отличаются знаком.

Волна, у которой фазовая и групповая скорости направлены в разные стороны (т. е. набег фазы и поток энергии имеют противоположные направления), называется обратной. Этот термин узаконен тем, что такая волна используется в лампе с обратной волной, хотя там речь идет обычно об обратной пространственной гармонике (см. ниже § 65). Плоская волна в однородной среде, у которой $\varepsilon < 0$ и $\mu < 0$ [такие значения согласно формулам (9.14) в принципе возможны], также является обратной: при положительном волновом импедансе (11.10) показатель преломления (11.07) и волновое число (11.05) такой волны отрицательны. Волну, у которой фазовая скорость и поток энергии совпадают по направлению, естественно называть прямой.

Если рассмотренные выше линии связаны, то уравнения (62.01) заменяются более сложными уравнениями

$$\begin{aligned} -U'_1 &= Z_1 J_1 + \tilde{Z} J_2, \quad -J'_1 = Y_1 U_1 + \tilde{Y} U_2, \\ -U'_2 &= Z_2 J_2 + \tilde{Z} J_1, \quad -J'_2 = Y_2 U_2 + \tilde{Y} U_1, \end{aligned} \tag{62.05}$$

где погонные параметры $\tilde{Z}$ и $\tilde{Y}$ характеризуют связь между линиями; связь предполагается реактивной ($\tilde{Z}$ и $\tilde{Y}$ чисто мнимые). Предполагая, что все четыре функции, фигурирующие в уравнениях (62.05), пропорциональны e^{ihz}, для h получаем характеристическое уравнение (см. задачу 4)

$$\left(h^2-\tilde{h}_1^2\right)\left(h^2-\tilde{h}_2^2\right)=\left(Y_1\tilde{Z}+Z_2\tilde{Y}\right)\left(Y_2\tilde{Z}+Z_1\tilde{Y}\right), \tag{62.06}$$

где

$$\tilde{h}_s^2=-\left(Z_sY_s+\tilde{Z}\tilde{Y}\right)=h_s^2-\tilde{Z}\tilde{Y}. \tag{62.07}$$

Уравнение упрощается в случае идентичных линий ($Z_1=Z_2$, $Y_1=Y_2$, $h_1=h_2$, $\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$), его решения

$$h_\pm^2=\tilde{h}_1^2\pm\left(Y_1\tilde{Z}+Z_1\tilde{Y}\right)=h_1^2-\tilde{Z}\tilde{Y}\pm\left(Y_1\tilde{Z}+Z_1\tilde{Y}\right) \tag{62.08}$$

показывают, что простые результаты получаются только при слабой связи между линиями, когда $\tilde{h}_s$ и $h_\pm$ мало отличаются от h_s. Наличие двух волн в системе идентичных линий приводит к пространственным биениям — перекачке энергии из одной линии в другую (см. задачу 4).

Если в обеих линиях волны принадлежат к одному типу, т. е. обе прямые или обе обратные, то $Z_1Z_2<0$, $Y_1Y_2<0$ и правая часть (62.06) положительна, а в случае слабой связи мала. Сильное взаимодействие между волнами в линиях реализуется только при их синхронизме, когда $h_1=h_2$ при $\omega=\omega_0$; тогда в окрестности частоты ω_0 биквадратное уравнение (62.06) можно заменить квадратным уравнением

$$(h-h_1)(h-h_2)=\eta h_1h_2 \tag{62.09}$$

(η — малая положительная постоянная), а функции $h_1(\omega)$ и $h_2(\omega)$ считать линейными:

$$h_1(\omega)=h_0+\frac{\omega-\omega_0}{v_0},\quad h_2(\omega)=h_0+\frac{\omega-\omega_0}{v_2}. \tag{62.10}$$

На рис. 72,*а* штриховой линией нанесены зависимости (62.10), соответствующие положительным групповым скоростям v_1 и v_2 на частоте ω_0. Связь

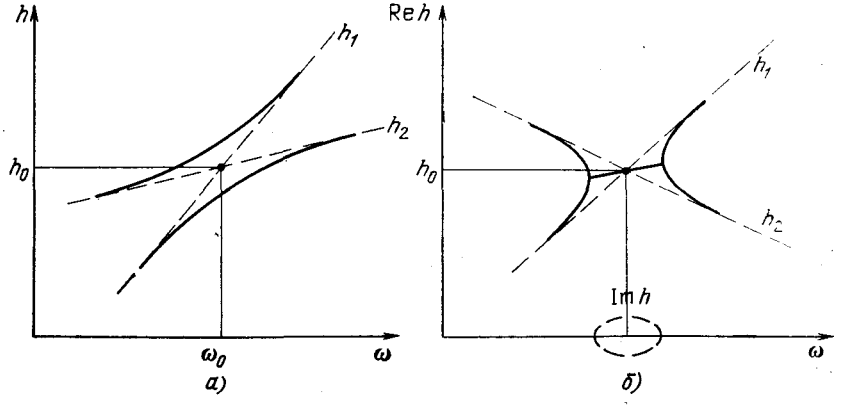


Рис. 72. Связанные волны в линиях передачи:
а — связь между двумя прямыми волнами; *б* — связь между прямой и обратной волной

между линиями приводит к тому, что вместо волновых чисел h_1 и h_2 появляются волновые числа

$$h_+ = \frac{h_1+h_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{h_1-h_2}{2}\right)^2 + \eta h_1 h_2},$$

$$h_- = \frac{h_1+h_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{h_1-h_2}{2}\right)^2 + \eta h_1 h_2} \qquad (62.11)$$

— корни уравнения (62.09). Зависимость h_+ и h_- от ω дана на рис. 72,*а* сплошными кривыми. Полагая $v_1=v_2$, возвращаемся к системе из двух одинаковых линий.

Если же связь осуществляется между прямой и обратной волнами, то $Z_1Z_2>0$, $Y_1Y_2>0$ и правая часть (62.06), равная $Y_1Y_2\bar{Z}^2+Z_1Z_2\bar{Y}^2-(h_1^2+h_2^2)\bar{Z}\bar{Y}=$ $=-h_1^2h_2^2[z^2+y^2-(h_1^2+h_2^2)zy/h_1h_2]$ отрицательна при $h_1\approx h_2$; здесь через z и y обозначены вещественные числа $z=\mathrm{i}\bar{Z}/\sqrt{Z_1Z_2}$, $y=\mathrm{i}\bar{Y}/\sqrt{Y_1Y_2}$. При наличии синхронизма и слабой связи опять получается уравнение (62.09), но теперь уже $\eta<0$, и корни (62.11) в окрестности частоты ω_0 комплексны. На рис. 72,*б* штриховой линией нанесены зависимости (62.10) при $v_1>0$ (прямая волна) и $v_2<0$ (обратная волна), сплошные кривые — вещественные части h_+ и h_-, штриховые кривые — мнимые части.

Таким путем возникают комплексные волны. Механизм их затухания состоит в том, что энергия, сообщенная прямой волне, перекачивается (благодаря синхронизму) в обратную волну, а из обратной (опять-таки благодаря синхронизму) — в прямую. При слабой связи эта циркуляция энергии происходит на значительной длине линии. Распространение становится невозможным, и линия передачи превращается в своеобразный резонатор. Надо сказать, что генерирующая лампа с обратной волной (носителем прямой волны в ней служит электронный пучок) также является резонансной системой особого рода — активной и нелинейной.

Простой пример комплексной волны дан в задаче 6; она возникает при синхронизме плазменной волны в тонком слое и поверхностной волны, близкой к плоской.

§ 63*. Распространение волн вдоль диэлектрического стержня и родственные задачи

Рассмотрим распространение поверхностных волн вдоль диэлектрических структур, обладающих симметрией вращения (рис. 73). Будем искать волну, у которой электрический и магнитный векторы Герца имеют в диэлектрике (с проницаемостями ε, μ) составляющие

$$\Pi_z^e = A\Phi(gr)\sin(m\varphi+\varphi_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz},\quad \Pi_z^m = B\Psi(gr)\cos(m\varphi+\varphi_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}, \qquad (63.01)$$

а в пустоте — составляющие

$$\Pi_z^e = C\hat{\Phi}(pr)\sin(m\varphi+\varphi_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz},\quad \Pi_z^m = D\hat{\Psi}(pr)\cos(m\varphi+\varphi_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}hz}. \qquad (63.02)$$

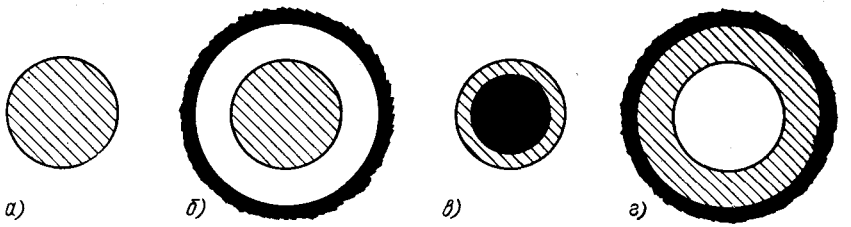


Рис. 73. Диэлектрические структуры, обладающие симметрией вращения:
а — диэлектрический стержень; *б* — диэлектрическая коаксиальная линия; *в* — проводящий цилиндр с диэлектрической оболочкой; *г* — волновод с диэлектрическим слоем у стенки

В этих формулах A, B, C и D — постоянные; φ_0 — фиксированный угол,

$$g = \sqrt{k^2 \varepsilon\mu - h^2},\ p = \sqrt{h^2 - k^2}, \tag{63.03}$$

h — неизвестное продольное волновое число. Функции $\Phi(gr)$ и $\hat{\Phi}(pr)$, а также $\Psi(gr)$ и $\hat{\Psi}(pr)$ — это разные функции своих аргументов, например в случае диэлектрического стержня (см. рис. 72,*а*)

$$\Phi(gr) = \Psi(gr) = J_m(gr),\ \hat{\Phi}(pr) = \hat{\Psi}(pr) = K_m(pr), \tag{63.04}$$

а в случае других структур $\Phi(gr)$ и $\Psi(gr)$ — комбинации функций $J_m(gr)$ и $N_m(gr)$, а $\hat{\Phi}(pr)$ и $\hat{\Psi}(pr)$ — комбинации функций $K_m(pr)$ и $I_m(pr)$. Функции (63.01) удовлетворяют волновому уравнению в диэлектрике, функции (63.02) — в пустоте.

Применяя формулы (21.13), нетрудно вычислить составляющие

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial r \partial z} + \frac{ik\mu}{r}\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial \varphi}, \qquad H_r = -\frac{ik\varepsilon}{r}\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial r \partial z},$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial \varphi \partial z} - i k\mu \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial r}, \quad H_\varphi = i k\varepsilon \frac{\partial \Pi_z^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi_z^m}{\partial \varphi \partial z}, \tag{63.05}$$

$$E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon\mu\right)\Pi_z^e, \qquad H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon\mu\right)\Pi_z^m.$$

В диэлектрике

$$E_\varphi = \left[\frac{imh}{r} A\Phi(gr) - i kg\mu B\Psi'(gr)\right]\cos(m\varphi + \varphi_0)\, e^{ihz},$$

$$E_z = g^2 A\Phi(gr)\sin(m\varphi + \varphi_0)\, e^{ihz},$$

$$H_\varphi = \left[i kg\varepsilon A\Phi'(gr) - \frac{imh}{r} B\Psi(gr)\right]\sin(m\varphi + \varphi_0)\, e^{ihz},$$

$$H_z = g^2 B\Psi(gr)\cos(m\varphi + \varphi_0)\, e^{ihz}, \tag{63.06}$$

а в пустоте

$$E_\varphi = \left[\frac{imh}{r} C\hat{\Phi}(pr) - i\,kp\,D\hat{\Psi}'(pr)\right]\cos(m\varphi+\varphi_0)\,e^{ihz},$$

$$E_z = -p^2 C\hat{\Phi}(pr)\sin(m\varphi+\varphi_0)\,e^{ihz},$$

$$H_\varphi = \left[i\,kpC\hat{\Phi}'(pr) - \frac{imh}{r} D\hat{\Psi}(pr)\right]\sin(m\varphi+\varphi_0)\,e^{ihz},$$

$$H_z = -p^2 D\hat{\Psi}(pr)\cos(m\varphi+\varphi_0)\,e^{ihz}. \qquad (63.07)$$

Требование непрерывности этих составляющих при $r=a$ (на границе диэлектрик — пустота) приводит к следующим уравнениям для постоянных A, B, C и D:

$$mh\,A\Phi(ga) - \mu\,kga\,B\Psi'(ga) = mh\,C\hat{\Phi}(pa) - kra\,D\hat{\Psi}'(pa),$$

$$g^2 A\Phi(ga) = -p^2 C\hat{\Phi}(pa), \qquad (63.08)$$

$$\varepsilon\,kga\,A\Phi'(ga) - mh\,B\Psi(ga) = kpa\,C\hat{\Phi}'(pa) - mh\,D\hat{\Psi}(pa),$$

$$g^2 B\Psi(ga) = -p^2 D\hat{\Psi}(pa).$$

Выразив C и D через A и B, получаем для последних соотношения

$$kp^2 ga\,[\mu\Psi'(ga) - ga\,F^m\Psi(ga)]\,B = mh\,(g^2+p^2)\,\Phi(ga)\,A,$$
$$kp^2 ga\,[\varepsilon\Phi'(ga) - ga\,F^e\Phi(ga)]\,A = mh\,(g^2+p^2)\,\Psi(ga)\,B \qquad (63.09)$$

и приходим к характеристическому уравнению

$$k^2p^4g^4a^4(\varepsilon f^e - F^e)(\mu f^m - F^m) = m^2h^2(g^2+p^2)^2, \qquad (63.10)$$

где введены обозначения

$$f^e = \frac{\Phi'(ga)}{ga\,\Phi(ga)},\quad f^m = \frac{\Psi'(ga)}{ga\,\Psi(ga)},\quad F^e = -\frac{\hat{\Phi}'(pa)}{pa\,\hat{\Phi}(pa)},\quad F^m = -\frac{\hat{\Psi}'(pa)}{pa\,\hat{\Psi}(pa)}. \qquad (63.11)$$

Пользуясь тождествами

$$g^2+p^2 = k^2(\varepsilon\mu-1),\quad g^2+\varepsilon\mu p^2 = h^2(\varepsilon\mu-1), \qquad (63.12)$$

можно переписать характеристическое уравнение следующим образом:

$$(\varepsilon f^e - F^e)(\mu f^m - F^m) = m^2\left[\frac{1}{(ga)^2}+\frac{1}{(pa)^2}\right]\left[\frac{\varepsilon\mu}{(ga)^2}+\frac{1}{(pa)^2}\right]. \qquad (63.13)$$

Это уравнение связывает между собой переменные ga и pa. Соотношение

$$(ga)^2+(pa)^2 = \rho^2,\quad (\rho = ka\sqrt{\varepsilon\mu-1}) \qquad (63.14)$$

дает дополнительную связь между этими переменными.

Для симметричных поверхностных волн, имеющих азимутальный индекс $m=0$, правая часть (63.13) исчезает и уравнение распадается на два уравнения

$$\varepsilon f^{e}=F^{e} \text{ и } \mu f^{m}=F^{m}. \qquad (63.15)$$

Для волны, удовлетворяющей первому уравнению (63.15), из второго соотношения (63.09) получаем $B=D=0$, так что такая волна является электрической. Из второго уравнения (63.15) получаются магнитные волны, поскольку для них $A=C=0$.

Несимметричные волны ($m=1, 2, \ldots$) — всегда гибридные. Форма характеристического уравнения (63.13) показывает, что каждую гибридную волну можно рассматривать как результат электродинамической связи между несимметричной электрической и несимметричной магнитной волнами. Эта связь возникает потому, что на границе диэлектрика электрическая волна порождает магнитную и наоборот, как видно из формул (63.08) и (63.09). Наличие связи может привести к появлению комплексных волн (см. конец § 62).

Перейдем к диэлектрическому стержню, для которого в силу формул (63.04)

$$f^{e}=f^{m}=\frac{J_m'(ga)}{ga\,J_m(ga)}=f,\ F^{e}=F^{m}=-\frac{K_m'(pa)}{pa\,K_m(pa)}=F. \qquad (63.16)$$

Уравнения (63.15) для симметричных волн в стержне удобно переписать в виде

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{\varepsilon f},\ \frac{1}{F}=\frac{1}{\mu f}\left[\frac{1}{F}=\frac{pa\,K_0(pa)}{K_1(pa)},\ \frac{1}{f}=-\frac{ga\,J_0(ga)}{J_1(ga)}\right]. \qquad (63.17)$$

Функция $1/F$ монотонно возрастает с увеличением аргумента pa (см. далее рис. 75), а функция $1/f$ имеет тот же характер, что и правая часть уравнения (61.08), изображенная на рис. 65,*б*; она состоит из ряда ветвей, причем n-я ветвь лежит в пределах $\nu_{0n}<ga<\mu_{0n}$, где согласно § 42 через ν_{0n} обозначен n-й положительный корень уравнения $J_0(\nu)=0$, а через μ_{0n} обозначен n-й корень уравнения $J_0'(\mu)=-J_1(\mu)=0$. Каждая (n-я) ветвь кривой дает начало симметричной электрической волне E_{0n} и симметричной магнитной волне H_{0n}, причем эти волны существуют при условии $\rho>\nu_{0n}$. При условии $\rho<\nu_{01}=2{,}405$ симметричных поверхностных волн в диэлектрическом стержне нет; нет и других поверхностных волн, кроме основной.

Результаты, полученные в § 61 для диэлектрической пластины, качественно сохраняются в данной задаче: вблизи критической частоты $h\approx k$ и поле в основном расположено в окружающем пространстве, при значительно более высоких частотах $h\approx k\sqrt{\varepsilon\mu}$ и поле сосредоточено внутри стержня.

Несимметричные электромагнитные волны разбиваются на два класса, которые обозначаются как волны HE_{mn} и EH_{mn} соответственно. Не будем здесь разбирать детально свойства этих волн и отметим лишь, что каждая из этих волн имеет критическую часто-

ту; ее скорость и распределение поля в пространстве зависят от частоты качественно так же, как соответствующие характеристики волн E_{0n} и H_{0n} в стержне или волн в диэлектрической пластине (§ 61).

Особое положение занимает основная волна, имеющая азимутальный индекс $m=1$ и критическую частоту, равную нулю. Эта волна существует при любой частоте, подобно волнам E_{00} и H_{00} в диэлектрической пластине. При низких частотах (когда $ka\ll 1$) волновое число $h\approx k$; более точно его можно рассчитать, если воспользоваться формулами

$$J'_m(x)=\frac{m}{x}J_m(x)-J_{m+1}(x),\quad -K'_m(y)=\frac{m}{y}K_m(y)+K_{m-1}(y) \tag{63.18}$$

и представить функции f и F в виде

$$f=\frac{m}{(ga)^2}-\frac{J_{m+1}(ga)}{ga\,J_m(ga)},\quad F=\frac{m}{(pa)^2}+\frac{K_{m-1}(pa)}{pa\,K_m(pa)}. \tag{63.19}$$

Пользуясь формулами (22.05) и (58.15), при $m=1$, $ga\ll 1$ и $pa\ll 1$ получаем

$$f=\frac{1}{(ga)^2}-\frac{1}{4},\quad F=\frac{1}{(pa)^2}+\ln\frac{2}{\gamma\, pa}. \tag{63.20}$$

При подстановке этих выражений в характеристическое уравнение (63.13) будем считать $pa\ll ga\approx\rho$, что оправдывается получаемой далее формулой (63.21). Приравнивая слагаемые, пропорциональные $1/(pa)^2$, получаем соотношение

$$\ln(2/\gamma pa)+(\varepsilon+\mu)/8=(\varepsilon+1)(\mu+1)/2(ga)^2$$

или в том же приближении

$$\ln(2/\gamma pa)=(\varepsilon+1)(\mu+1)/2\rho^2-(\varepsilon+\mu)/8,$$

$$pa=(2/\gamma)\exp[-(\varepsilon+1)(\mu+1)/2\rho^2+(\varepsilon+\mu)/8]. \tag{63.21}$$

Последнее выражение свидетельствует о большой радиальной протяженности поля в окружающем пространстве на низких частотах.

Основную волну круглого стержня можно рассматривать (см. § 62) как плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси z и получившую поверхностный характер благодаря замедлению; все остальные волны имеют критические частоты. Симметрия стержня приводит к поляризационному вырождению (см. § 42), так что плоские волны различных поляризаций замедляются одинаково. В системе, не обладающей симметрией вращения, в результате замедления возникают две поверхностные волны с разными скоростями, например в диэлектрической пластине имеются две основные волны E_{00} и H_{00}.

Идеально проводящий цилиндр радиуса b, окруженный концентрической оболочкой, имеющей параметры ε и μ и занимающей

область $b<r<a$ (см. рис. 72,*б*), является более сложной системой. Для него функции $\Phi(gr)$ и $\Psi(gr)$ нужно взять в виде

$$\Phi(gr)=N_m(gb)J_m(gr)-J_m(gb)N_m(gr),$$
$$\Psi(gr)=N'_m(gb)J_m(gr)-J'_m(gb)N_m(gr), \qquad (63.22)$$

обеспечивающем выполнение граничных условий $E_z=E_\varphi=0$ на поверхности $r=b$ проводящего цилиндра, а функции $\hat{\Phi}(pr)$ и $\hat{\Psi}(pr)$ — те же, что и для стержня. Характеристическое уравнение (63.13) справедливо и для цилиндра с оболочкой, если положить

$$f^{\mathrm{e}}=\frac{1}{ga}\,\frac{J'_m(ga)\,N_m(gb)-N'_m(ga)\,J_m(gb)}{J_m(ga)\,N_m(gb)-N_m(ga)\,J_m(gb)},$$
$$f^{\mathrm{m}}=\frac{1}{ga}\,\frac{J'_m(ga)\,N'_m(gb)-N'_m(ga)\,J'_m(gb)}{J_m(ga)\,N'_m(gb)-N_m(ga)\,J'_m(gb)}, \qquad (63.23)$$

а функции $F^{\mathrm{e}}=F^{\mathrm{m}}=F$ брать в соответствии с формулой (63.16)

Как уже отмечалось в § 62, данная система имеет две основные волны; симметричную электрическую ($m=0$) и несимметричную гибридную ($m=1$). Докажем это. Первое уравнение (63.15) для симметричных электрических волн при $ga\ll 1$ и $pa\ll 1$ принимает вид

$$(pa)^2\ln\frac{2}{\gamma pa}=\frac{(ga)^2}{\varepsilon}\ln\frac{a}{b}, \qquad (63.24)$$

поскольку согласно формулам (22.05), (22.08) и (58.15)

$$1/f^{\mathrm{e}}=(ga)^2\ln(a/b),\quad 1/F=(pa)^2\ln(2/\gamma pa).$$

Правая часть (63.24) подобна правой части (61.06) при $ga\ll 1$, а левая часть (63.24) подобна левой части (59.05). Нетрудно показать, что уравнение (63.24) имеет решение при сколь угодно низких частотах и дает основную волну E_{00}. Эта волна, распространяющаяся вдоль проводящего стержня с оболочкой (т. е. вдоль провода с диэлектрическим покрытием), является, в сущности, поперечной волной однопроводной линии (см. рис. 20,*а*), которая в результате замедляющего действия оболочки стала поверхностной волной. Такое же влияние на данную волну оказывает конечное сопротивление провода (см. § 59).

Для основной несимметричной волны ($m=1$) при $\rho\to 0$ должно быть $pa\to 0$ и $ga\to 0$, а тогда

$$f^{\mathrm{e}}\approx\frac{a^2+b^2}{(ga)^2(a^2-b^2)},\quad f^{\mathrm{m}}\approx\frac{a^2-b^2}{(ga)^2(a^2+b^2)}. \qquad (62.25)$$

В результате получается выражение, аналогичное (63.21) и имеющее тот же смысл.

§ 64*. Волны в диэлектрических трубках

В § 62 и 63 были бегло рассмотрены вытекающие (несобственные) волны. Может создаться впечатление, что эти волны — паразитные, что они не могут служить для передачи энергии и информации. Ошибочность этого впечатления видна уже из того, что открытые волноводы и открытые резонаторы (см. гл. XVII) успешно используют только несобственные волны и несобственные колебания, излучающие в окружающее пространство.

Этот параграф посвящен диэлектрическим трубкам, стенки которых состоят из нескольких слоев диэлектрика и избирательным образом поддерживают распространение быстрых волн. Избирательность означает следующее: радиус трубки a велик по сравнению с длиной волны ($ka \gg 1$), в трубке, как в круглом металлическом волноводе, существует много распространяющихся волн, но, в отличие от металлического волновода, коэффициенты затухания различных волн (вследствие излучения) сильно отличаются друг от друга. В частности, затухание простейшей по своей структуре волны EH_{11} (см. ниже) можно сделать существенно меньше затухания остальных волн.

Вернемся к рис. 67,*а* и 68, но будем считать, что при $|x|<a$ — пустота, а при $a<x<a+b$ расположена слоистая структура, которая для данного угла падения φ_0 (и данной частоты) обеспечивает коэффициент отражения, близкий по абсолютной величине к единице, причем при изменении угла падения он быстро падает. Тогда волна, у которой угол падения $\varphi=\varphi_0$, будет иметь малое затухание, а остальные волны будут затухать сильно. Так реализуется избирательность.

Слоистая структура, обладающая этими свойствами, подбирается таким образом, чтобы отражение волн от всех границ слоев происходило синфазно, т. е. чтобы при отражении все волны складывались арифметически (для данного угла падения и данной частоты). Иными словами, в качестве стенок надо взять хорошо известные слоистые зеркала. Однако обычно такие зеркала подбираются и рассчитываются для волн, падающих нормально или под небольшими углами. Здесь же нужно добиться сильного отражения для волны, скользящей вдоль зеркала ($\varphi_0 \approx \pi/2$), а это оказывается более легким делом: сильное отражение можно получить при небольшом числе слоев. Уже один слой диэлектрика способен обеспечить распространение с небольшими потерями. Ес-

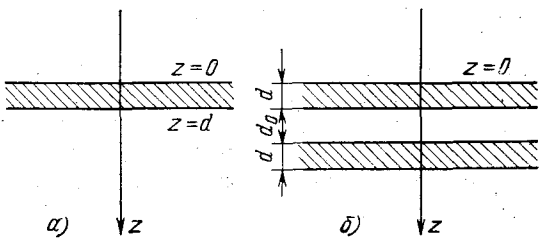


Рис. 74. Отражение от диэлектрического зеркала:
а — один диэлектрический слой;
б — два слоя

ли же взять два диэлектрических слоя, разделенных воздушным промежутком, то коэффициент отражения R от них по абсолютной величине приближается к единице так же, как коэффициент отражения от металла при скользящем падении и электрическом поле, параллельном границе (рис. 74 и задачи 7 и 8).

В отличие от металла диэлектрические слои (при $\varepsilon \sim 1$) почти одинаково хорошо отражают волны обеих поляризаций, если угол падения $\varphi \approx \pi/2$. Это видно уже из предельных соотношений

$$\lim_{\varphi \to \pi/2} R_1 = \lim_{\varphi \to \pi/2} R_2 = -1, \tag{64.01}$$

вытекающих из формул (15.12) и (15.18). Кроме того, интерференция волн в слоистом зеркале приводит к тому, что коэффициент отражения от него сильно зависит от угла φ и от частоты. Обозначим через d толщину диэлектрических слоев в зеркале, через d_0 — толщину пустых промежутков между ними (рис. 74); обозначим также

$$\alpha = k \nu d = k \sqrt{\varepsilon\mu}\, d \cos\psi, \quad \alpha_0 = k d_0 \cos\varphi, \tag{64.02}$$

где величина ν определена формулой (15.07), а ψ — угол преломления ($\sin\psi = \sin\varphi / \sqrt{\varepsilon\mu}$). Наиболее сильное отражение, когда волны, отраженные от всех границ, складываются в одной фазе, будет при условиях

$$\alpha = (p + 1/2)\pi, \quad \alpha_0 = (q + 1/2)\pi \quad (p,\ q = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{64.03}$$

и тогда коэффициент отражения

$$R = \frac{\delta^{2N} - 1}{\delta^{2N} + 1} \approx -1 + 2\delta^{2N}, \tag{64.04}$$

где для 1-й поляризации

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\nu} \cos\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \approx \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\mu - 1}}\, \vartheta, \tag{64.05}$$

а для 2-й поляризации

$$\delta = \frac{\mu}{\nu} \cos\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \approx \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu - 1}}\, \vartheta, \tag{64.06}$$

N — число диэлектрических слоев, $\vartheta = \pi/2 - \varphi$ — угол скольжения, при малости которого справедливы приближенные выражения, выписанные выше. Их вывод при $N = 1$ и 2 дан в задачах 8 и 9, при $N = 1/2$ они переходят в формулы (15.12) и (15.18).

Практический расчет слабозатухающих волн в волноводах с подобными стенками легче всего произвести так. Сначала на внутренней поверхности стенки ставятся граничные условия $E_n = H_n = 0$, которые (см. задачу 9) соответствуют предельным значениям (64.01). Затем с помощью метода возмущений (так же, как в теории металлических волноводов, см. § 51 и 53) можно вычислить затухание, вызванное неполным отражением волны от стен-

ки, используя формулу (64.04), поскольку при $ka \gg 1$ допустимо пренебречь кривизной стенки и отличием волны от плоской.

В диэлектрической трубке составляющие поля вычисляются по формулам (63.05); полагая в этих формулах $\varepsilon = \mu = 1$, $h \approx k$, (что предполагает условия $\vartheta \ll 1$ и $ka \gg 1$) и беря Π^e_z и Π^m_z в соответствии с формулами (63.01) и (63.04), получаем

$$E_r = H_\varphi = ikg[AJ'_m(gr) - mBJ_m(gr)/gr]\sin(m\varphi + \varphi_0)e^{ihz},$$

$$E_\varphi = -H_r = ikg[mAJ_m(gr)/gr - BJ'_m(gr)]\cos(m\varphi + \varphi_0)e^{ihz}, \quad (64.07)$$

и, кроме того, — составляющие E_z и H_z, которые при $\vartheta \ll 1$ малы по сравнению с выписанными.

Граничные условия $E_r = H_r = 0$ при $r = a$ (a — внутренний радиус трубки) дают соотношения

$$AJ'_m(ga) = mBJ_m(ga)/ga, \quad mAJ_m(ga)/ga = BJ'_m(ga),$$

умножение которых показывает, что $A^2 = B^2$, т. е. $B = \pm A$. Используя тождества

$$J'_m(x) = -J_{m+1}(x) + mJ_m(x)/x = J_{m-1}(x) - mJ_m(x)/x,$$

получаем при $B = A$

$$E_r = H_\varphi = -ikgAJ_{m+1}(gr)\sin(m\varphi + \varphi_0)e^{ihz},$$

$$E_\varphi = -H_r = ikgAJ_{m+1}(gr)\cos(m\varphi + \varphi_0)e^{ihz}, \quad (64.08)$$

а при $B = -A$

$$E_r = H_\varphi = ikgAJ_{m-1}(gr)\sin(m\varphi + \varphi_0)e^{ihz},$$

$$E_\varphi = -H_r = ikgAJ_{m-1}(gr)\cos(m\varphi + \varphi_0)e^{ihz}. \quad (64.09)$$

Теперь граничные условия приводят к уравнению $J_{m\pm1}(ga) = 0$. Наименьшее значение $ga = \nu_{01} = 2{,}405$ дает функция $J_0(x)$, ему соответствует волна EH_{11}, ее поле определяется выражениями (64.09) при $m = 1$ и $g = \nu_{01}/a$. Из выражений (64.08) и (64.09) получаются поля волн E_{01} ($m = 0$, $\varphi_0 = \pi/2$) и H_{01} ($m = 0$, $\varphi_0 = 0$), у которых $ga = \nu_{11} = 3{,}832$. Распределение полей этих волн дано на рис. 75: сплошные линии — электрическое поле, штриховые — магнитное, волны H_{0n} в трубке и круглом волноводе — практически одни и те же. Наиболее проста структура поля волны EH_{11}: в большей части поперечного сечения она близка к структуре поля

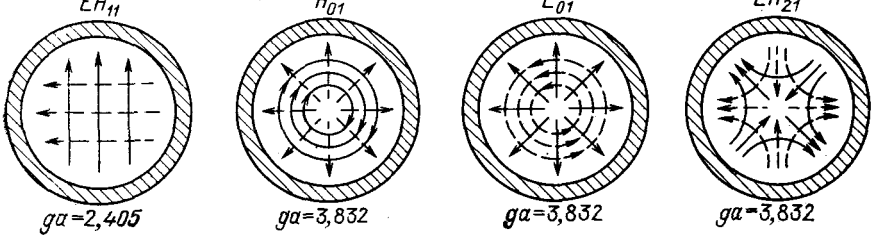


Рис. 75. Простейшие волны в диэлектрической трубке

плоской волны (задача 10). Эта волна при оптимальных условиях (64.03) имеет наименьшее затухание.

В сущности, все эти волны в каждой точке поперечного сечения близки к плоской волне: составляющие E_z и H_z малы, $E_x=H_y$ и $E_y=-H_x$. В этом отношении они похожи на волны в линиях первой группы (§ 29). Частичное сходство объясняется тем, что волны в трубке распространяются со скоростью, близкой к c ($h\approx k$, $g\ll k$, $\vartheta\ll 1$).

Наряду с быстрыми волнами, исследованными выше, в трубке существуют медленные волны, локализованные вблизи стенки. Качество диэлектрика для медленных волн более важно, чем для быстрых (см. § 62), поскольку в условиях, близких к оптимальным [они определяются формулой (64.03)], поле быстрых волн в диэлектрик почти не проникает. Источники, находящиеся внутри трубы, медленных волн практически не возбуждают. Расчет потерь на излучение показывает, что с ростом частоты коэффициент затухания быстрой волны в трубке убывает быстрее, чем коэффициент затухания волны H_{01} в круглом волноводе, причем деформация поперечного сечения трубки затухания не увеличивает.

В теории диэлектрических трубок проявились основные особенности квазиоптических (открытых) устройств: их характерные размеры велики по сравнению с длиной волны; поле является квазиплоской (локально плоской) волной; потери на излучение носят избирательный характер. В гл. XVII будут рассмотрены другие системы такого типа.

Задачи к гл. XI

1. Полагая $\zeta=1/\sqrt{\varepsilon}=|\zeta|e^{-i\delta/2}$, где $|\zeta|=1/\sqrt{|\varepsilon|}\ll 1$, а $\delta\leqslant\pi/2$ — угол электрических потерь, исследовать уравнение (60.01) и, в частности, найти условия, при которых фазовая скорость волны Ценнека $u=\omega/h'$ больше скорости света в пустоте. Рассмотреть поле этой волны при $\delta=0$.

Р е ш е н и е. Согласно уравнению (60.01)

$$h=\sqrt{k^2+p^2}=k\sqrt{1-\zeta^2}=k\left(1-\frac{1}{2}\zeta^2-\frac{1}{8}\zeta^4+\ldots\right),$$

откуда

$$h'=\operatorname{Re}h=k\left(1-\frac{1}{2}|\zeta|^2\cos\delta-\frac{1}{8}|\zeta|^4\cos 2\delta+\ldots\right).$$

При $\delta=\pi/2$ фазовая скорость $u<c$, поскольку $h=k\sqrt{1+|\zeta|^2}>k$. В реальных условиях распространения над сушей или морем $\delta<\pi/2$, хотя и $\delta\approx\pi/2$ (в силу чего можно положить $\cos 2\delta=-1$). Условие $u>c$, т. е. $h'<k$, реализуется, если

$$\cos\delta>|\zeta|^2/4=1/4|\varepsilon| \text{ или } \varepsilon'=|\varepsilon|\cos\delta>1/4.$$

При более точной оценке надо 1/4 умножить на $-\cos 2\delta$.

При $\delta=0$ величина $p=i\zeta k$ становится чисто мнимой, и можно положить

$$\zeta=\cos\varphi,\ p=ik\cos\varphi,\ h=k\sin\varphi,$$

откуда видно, что формулы (60.02) и (60.03) определяют плоскую волну, падающую под углом φ на плоскость $x=0$. Из первой формулы (15.12) следует, что для такой волны $R_1=0$, поскольку она падает под углом Брюстера

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}(1/\zeta) = \pi/2 - \operatorname{arc\,ctg}(1/\zeta) \approx \pi/2 - \zeta,\ \cos\varphi_1 \approx \sin\zeta \approx \zeta\ ;$$

φ_1 совпадает с углом φ, введенным выше (при $\zeta \ll 1$).

2. Решить задачу о распространении волн E_{m0} в диэлектрической пластине $-a<x<a$ при условии, что при $x>a$ — пустота, а при $x<-a$ — среда с проницаемостями ε_0, μ_0, для чего представить Π^e_z в виде

$$\Pi^e_z = (B_1 e^{igx} + B_2 e^{-igx}) e^{ihz} \text{ при } -a<x<a \qquad (a)$$

и воспользоваться коэффициентом отражения от границы $x=-a$

$$R_0 = \frac{(\varepsilon_0/\varepsilon)\cos\varphi - \sqrt{(\varepsilon_0\mu_0/\varepsilon\mu) - \sin^2\varphi}}{(\varepsilon_0/\varepsilon)\cos\varphi + \sqrt{(\varepsilon_0\mu_0/\varepsilon\mu) - \sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 g - i\varepsilon p_0}{\varepsilon_0 g + i\varepsilon p_0} = e^{-2i\psi_0},\ \operatorname{tg}\psi_0 = \frac{\varepsilon p_0}{\xi_0 g}$$

и аналогичным выражением для коэффициента отражения $R=e^{-2i\psi}$ от границы $x=0$, для чего положить $\varepsilon_0=\mu_0=1$ и взять p вместо p_0, где

$$p_0 = \sqrt{k^2(\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0) - g^2},\ p = \sqrt{k^2(\varepsilon\mu - 1) - g^2},\ \operatorname{tg}\psi = \varepsilon p/g.$$

При $\varepsilon_0=\mu_0=1$ получить уравнения (61.06) и (61.08). Получить характеристическое уравнение при произвольных ε_0 и μ_0 и в случае, когда ε_0 и μ_0 близки к проницаемостям ε и μ пластины, вывести условие, при котором кроме E_{00} и H_{00} других поверхностных волн нет.

Решение. В выражении (a) при $x=a$ первое слагаемое можно рассматривать как падающую, второе — как отраженную волну, а при $x=-a$ первое слагаемое — отраженная волна, а второе — падающая. Отсюда получаются соотношения

$$B_2 e^{-iga} = RB_1 e^{iga},\ B_1 e^{-iga} = R_0 B_2 e^{iga}$$

и характеристическое уравнение

$$e^{-4iga} = RR_0 = e^{-2i(\psi+\psi_0)},\ 2ga = \psi + \psi_0 + n\pi,\ n = 0,1,2,\ldots, \qquad (b)$$

которое при $\varepsilon_0=\mu_0=1$ и четных n эквивалентно уравнению (61.06), а при нечетных n — уравнению (61.08). Если $\varepsilon\mu$ лишь немного превышает $\varepsilon_0\mu_0$, то $p^2_0>0$ лишь в узком диапазоне сравнительно малых значений g^2, при которых $p \gg p_0$ и $p \gg g$, вследствие чего для поверхностных волн можно положить $\psi = \pi/2$; уравнение (b) принимает вид

$$\psi_0 = 2ga - \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ 2p_0 a = -(\varepsilon_0/\varepsilon)\,2ga\operatorname{ctg}2ga. \qquad (c)$$

Как видно из рис. 65,*в*, оно допускает существование одной поверхностной волны E_{00} при условии

$$\pi/2 < 2ka\sqrt{\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0} < 3\pi/2.$$

Для волны H_{00} получается то же условие, поскольку для нее в приближенном уравнении (c) $\varepsilon_0/\varepsilon$ заменяется на μ_0/μ; впрочем, обычно можно положить $\varepsilon_0/\varepsilon = \mu_0/\mu = 1$.

3. Как зависит составляющая $\hat{\mathfrak{S}}_z$ комплексного вектора Умова — Пойнтинга для вытекающих волн от поперечной координаты x (в двумерных задачах, см. § 61) или r (в трехмерных задачах)? Воспользоваться асимптотической формулой (22.12).

Решение. Пусть вытекающая волна имеет зависимость от z в виде e^{ihz}, где $h=h'+ih''$; будем считать для определенности, что $h'>0$ и $h''>0$ (как на рис. 71). Тогда в двухмерной задаче поле вне диэлектрической структуры (в пустоте) пропорционально $e^{ig|x|}$, где $g=g'+ig''$, причем должно быть $g'>0$, поскольку волны расходятся от структуры. Из волнового уравнения в пустоте следует, что

$$g^2+h^2=k^2,\ g'g''+h'h''=0,\ h'h''>0,$$

поэтому $g''<0$ и составляющая $\hat{\mathfrak{S}}_z$ пропорциональна $e^{-2g''|x|}=e^{2|g''x|}$, т. е. экспоненциально возрастает.

В трехмерных задачах поле выражается через функции $H^{(1)}_m(gr)$ и их производные, соответствующие расходящимся волнам. Поскольку $g'>0$ и $g''<0$, составляющая $\hat{\mathfrak{S}}_z$ в силу первой формулы (22.12) пропорциональна $e^{-2g''r}/r$. Множитель $1/r$ обусловлен расходимостью лучей, но экспоненциальное возрастание $\hat{\mathfrak{S}}_z$ преобладает при больших r.

4. Исходя из уравнений (62.05), вывести систему уравнений второго порядка для J_1 и J_2 и характеристическое уравнение (62.06). Рассмотреть распространение волн в системе двух идентичных линий, предполагая, что в начальном сечении $z=0$ энергия сосредоточена в 1-й линии ($J_2=0$, $U_2=0$).

Решение. Дифференцируя уравнения для J_1 и J_2, получаем соотношения

$$J_1''=\left(Z_1Y_1+\hat{Z}\hat{Y}\right)J_1+\left(Y_1\hat{Z}+Z_2\hat{Y}\right)J_2,$$
$$J_2''=\left(Z_2Y_2+\hat{Z}\hat{Y}\right)J_2+\left(Y_2\hat{Z}+Z_1\hat{Y}\right)J_1$$

или

$$J_1''+\hat{h}_1^2J_1=\left(Y_1\hat{Z}+Z_2\hat{Y}\right)J_2,\ J_2''+\hat{h}_2^2J_2=\left(Y_2\hat{Z}+Z_1\hat{Y}\right)J_1, \qquad (a)$$

где учтена формула (62.07). В системе двух идентичных линий волновое число h_+ соответствует противофазной волне ($J_1=-J_2$), волновое число h_- — синфазной волне ($J_1=J_2$). Если при $z=0$ энергия сосредоточена в 1-й линии, то при $z>0$

$$J_1=C\left(e^{ih_-z}+e^{ih_+z}\right),\ J_2=C\left(e^{ih_-z}-e^{ih_+z}\right),$$

где h_+ и h_- надо выбирать так, чтобы мощность переносилась в положительном направлении оси z. При $|h_+-h_-|z=\pi$ энергия целиком переходит во 2-ю линию, при $|h_+-h_-|z=2\pi$ переходит обратно в 1-ю и т. д. Из уравнений (a) легко выводится уравнение (62.06).

5. Показать, что вдоль тонкого плазменного слоя толщиной $2a$, у которого

$$\varepsilon=1-k_p^2/k^2<0,\ \mu=1 \text{ при } |x|<a,\ k_p=\omega_p/c,$$

может распространяться комплексная поверхностная волна. Исходить из соотношений (61.06) и (61.12), считая $|g|a\ll 1$, а величины $|\varepsilon|$ и $2k_pa$ — одного порядка малости. Выяснить физический смысл этого решения, для чего проанализировать это решение при $2k_pa\ll|\varepsilon|$, в частности исследовать струк-

туру полей. Сравнить с решением для тонкого диэлектрического слоя ($\varepsilon > 1$).

Р е ш е н и е. Уравнение (61.06) при $|g|a \ll 1$ принимает вид

$$-g^2 a = |\varepsilon| p, \quad |\varepsilon| = k_p^2/k^2 - 1,$$

а соотношение (61.12) дает $-g^2 = k_p^2 + p^2$, откуда для pa получается квадратичное уравнение

$$(pa)^2 - |\varepsilon| pa + (k_p a)^2 = 0, \quad p_\pm a = |\varepsilon|/2 \pm \sqrt{(|\varepsilon|/2)^2 - (k_p a)^2},$$

имеющее при $2k_p a > |\varepsilon|$ комплексные корни. При $2k_p a \ll |\varepsilon|$ корни этого уравнения

$$p_+ a = |\varepsilon|, \quad p_- a = (k_p a)^2/|\varepsilon|$$

зависят от частоты (входящей в $|\varepsilon|$) совершенно различным образом. Корень p_+ при $ka \ll 1$ дает начало квазистатическому электрическому полю плазменной волны, у которой согласно формулам (60.03) и (61.04) магнитное поле пренебрежимо мало; плазменная волна — обратная, поскольку для нее $h_+ \approx p_+$ убывает с ростом частоты. Корень p_- соответствует поверхностной волне (прямой), мало отличающейся от плоской поперечной волны в пустоте; в случае тонкого диэлектрического слоя такая поверхностная волна имеет $p = k^2 a(\varepsilon - 1)/\varepsilon$, а для плазмы это выражение совпадает с p_-. При $p_+ \sim p_-$ эти две волны связаны и возникает комплексная волна.

6. Показать, что первое уравнение (63.15) при большом комплексном показателе преломления $\sqrt{\varepsilon\mu}$ переходит в уравнение (59.04).

Р е ш е н и е. Пользуясь асимптотической формулой (27.07), получаем

$$f = -i/ga = -i/\sqrt{\varepsilon\mu}ka, \quad \varepsilon f = 1/i\zeta ka,$$

откуда следует требуемое.

7. Найти коэффициент отражения плоской волны от диэлектрической пластины толщиной d, выразив этот коэффициент через коэффициенты R_j и T_j ($j = 1, 2$), вычисленные в § 15, и коэффициенты $\tilde{R}_j$ и $\tilde{T}_j$, получающиеся при падении преломленной плоской волны из диэлектрика на его границу с пустотой. Предварительно найти связь между R_j и $\tilde{R}_j$, T_j и $\tilde{T}_j$. Получить формулу (64.01). Найти коэффициент прохождения через пластину.

Р е ш е н и е. Коэффициенты R_j и T_j можно представить в виде

$$R_j = \frac{\delta - 1}{\delta + 1}, \quad T_j = \frac{2\delta}{\delta + 1}$$

[см. формулы (64.05) и (64.06)]. В диэлектрической пластине (см. рис. 74,*а*) имеется преломленная волна, падающая на границу $z = d$ с углом падения ψ ($\sin\varphi/\sin\psi = \sqrt{\varepsilon\mu}$), отражающаяся от нее и падающая на границу $z = 0$ под тем же углом ψ и т. д. Выражения для $\tilde{R}_j$ и $\tilde{T}_j$ получатся путем замены ε на $1/\varepsilon$, μ на $1/\mu$ и φ на ψ; легко показать, что при этом надо заменить δ на $1/\delta$, вследствие чего $\tilde{R}_j = -R_j$ и $\tilde{T}_j = 1 - R_j$.

Для 1-й поляризации полагаем в соответствии с § 15

$$H_y = (e^{ikz\cos\varphi} + Re^{-ikz\cos\varphi})\, e^{ikx\sin\varphi} \text{ при } z < 0,$$

$$H_y = (Ae^{ikvz} + Be^{-ikvz})\, e^{ikx\sin\varphi} \text{ при } 0 < z < d,$$

$$H_y = Te^{ik[(z-d)\cos\varphi + x\sin\varphi]} \text{ при } z > d,$$

где коэффициенты R, A, B и T неизвестны. Они выражаются через рассмотренные выше коэффициенты так:

$$R=R_1+\tilde{T}_1B,\ A=T_1+\tilde{R}_1B,\ B=\tilde{R}_1Ae^{2i\alpha}\ (\alpha=kvd).$$

Первое соотношение связывает волну, отраженную от слоя, с волной, отраженной от его границы $z=0$, и волной, вышедшей из слоя. Второе соотношение выражает амплитуду волны, идущей в слое вниз, через амплитуду волны, прошедшей через границу $z=0$, и амплитуду волны, возникшей в результате отражения волны, идущей в слое вверх, на той же границе $z=0$. Третье соотношение описывает отражение на границе $z=d$. Такие же соотношения справедливы для 2-й поляризации.

Решая полученную систему уравнений для R, A и B и выражая $\tilde{R}_j$ и $\tilde{T}_j$ через R_j, получаем

$$R=R_j\frac{1-e^{2i\alpha}}{1-R_j^2e^{2i\alpha}},\ T=\frac{1-R_j^2}{1-R_j^2e^{2i\alpha}}e^{i\alpha},$$

и при $2\alpha=(2p+1)\pi$ приходим к формуле (64.04) для одного слоя ($N=1$).

8. Пользуясь методом и результатами предыдущей задачи, вывести формулу (64.04) для двух слоев.

Решение. Для одного слоя имеем

$$R=(\delta^2-1)/(\delta^2+1),\ T=\pm 2i\delta/(\delta^2+1)\ \text{при}\ \alpha=(p+1/2)\pi.$$

Представим теперь в случае двух слоев, разделенных пустым промежутком толщиной d_0 (см. рис. 74,*б*), H_y или E_y в виде

$$\left(e^{ikz\cos\varphi}+R^{(2)}e^{-ikz\cos\varphi}\right)e^{ikx\sin\varphi}\ \text{при}\ z<0,$$

$$\left(Ae^{ikz\cos\varphi}+Be^{-ikz\cos\varphi}\right)e^{ikx\sin\varphi}\ \text{при}\ d<z<d+d_0.$$

Для постоянных $R^{(2)}$, A и B пишем соотношения

$$R^{(2)}=R+TB,\ A=T+RB,\ B=RAe^{2i\alpha_0}\ (\alpha_0=kd_0\cos\varphi),$$

откуда

$$R^{(2)}=R\frac{1-e^{2i\alpha_0}}{1-R^2e^{2i\alpha_0}}\ \text{и}\ R^{(2)}=\frac{2R}{1+R^2}=\frac{\delta^4-1}{\delta^4+1}\ \text{при}\ \alpha_0=(q+1/2)\pi.$$

9. На основании формул (15.09) и (15.14) вывести граничные условия на плоскости $z=0$ при $R_1=R_2=-1$ в случае падения произвольной электромагнитной волны.

Решение. Из формул (15.09) и (15.14) следует, что при $z<0$

$$E_z=-(1/ik)\,\partial H_y/\partial x=-\sin\varphi\left(e^{ikz\cos\varphi}+R_1e^{-ikz\cos\varphi}\right)e^{ikx\sin\varphi},$$

$$H_z=(1/ik)\,\partial E_y/\partial x=\sin\varphi\left(e^{ikz\cos\varphi}+R_2e^{-ikz\cos\varphi}\right)e^{ikx\sin\varphi},$$

поэтому $E_z=H_z=0$ при $z=0$. Вместе с тем

$$E_x=\cos\varphi\left(e^{ikz\cos\varphi}-R_1e^{-ikz\cos\varphi}\right)e^{ikx\sin\varphi}\neq 0\ \text{при}\ z=0,$$

$$H_x=-\cos\varphi\left(e^{ikz\cos\varphi}-R_2e^{ikz\cos\varphi}\right)e^{ikx\sin\varphi}\neq 0\ \text{при}\ z=0.$$

Поэтому при падении произвольной волны соблюдаются лишь условия $E_z=0$ и $H_z=0$, а тангенциальные составляющие могут быть любыми.

10. Исследовать поле волны EH_{11} в трубке, для чего вывести выражения для декартовых составляющих поля.

Решение. Полагая в формулах (64.09) $m=1$ и $\varphi_0=0$, получаем

$$E_y=-H_x=A_0J_0(gr)e^{ihz},\ A_0=-ikgA,\ E_x=H_y=0$$

и, кроме того,

$$E_z=i\vartheta A_0J_1(gr)\sin\varphi,\ H_z=-i\vartheta A_0J_1(gr)\cos\varphi,\ \vartheta=g/k\ll 1.$$

В поперечном сечении силовые линии электрического и магнитного полей — прямые. Продольные составляющие E_z и H_z возрастают при увеличении r.

Глава XII.
ВОЛНЫ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

§ 65. Пространственные гармоники

В этой главе будут кратко рассмотрены периодические структуры простейшего типа: гребенчатая структура, диафрагмированный волновод, ребристый стержень (см. далее рис. 77, 79 и 82). В общем случае периодическую структуру можно определить соотношениями

$$\varepsilon(x, y, z+nl)=\varepsilon(x, y, z),\ \mu(x, y, z+nl)=\mu(x, y, z),$$
$$n=0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{65.01}$$

поскольку в данной книге рассматриваются лишь вещества, которые характеризуются комплексными ε и μ (см. гл. 1). Периодические структуры, выполненные из идеальных проводников (см. § 66 и 67), определяются соотношениями (65.01) и предельным переходом $\varepsilon\to i\infty$ (§ 24).

Электромагнитные волны в периодических структурах в общем случае удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{E}(x, y, z+nl)=e^{inhl}\,\mathbf{E}(x, y, z),\ \mathbf{H}(x, y, z+nl)=e^{inhl}\,\mathbf{H}(x, y, z), \tag{65.02}$$

т. е. поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в соседних периодах отличаются друг от друга постоянным множителем $\Theta=e^{ihl}$, вообще говоря комплексным. Иначе соотношения (65.02) можно записать в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z)=\mathbf{E}^0(x, y, z)e^{ihz};\ \mathbf{H}(x, y, z)=\mathbf{H}^0(x, y, z)\,e^{ihz} \tag{65.03}$$

или в виде

$$\mathbf{E}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_j(x, y)\,e^{ih_jz};\ \mathbf{H}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{H}_j(x, y)\,e^{ih_jz};\ h_j=h+j\frac{2\pi}{l}, \tag{65.04}$$

где $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ — периодические по координате z векторные функции,

а $\mathbf{E}_j$ и $\mathbf{H}_j$ — коэффициенты разложения (зависящие от x и y) функций $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ в ряд Фурье:

$$\mathbf{E}^0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_j(x, y)\, e^{ij2\pi z/l}, \quad \mathbf{H}^0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_j(x, y)\, e^{ij2\pi z/l}. \qquad (65.05)$$

Легко проверить, что поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, определенные формулами (65.03), удовлетворяют соотношениям (65.02); наоборот, если $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют соотношениям (65.02), то $e^{-ihz}\mathbf{E}$ и $e^{-ihz}\mathbf{H}$ будут периодическими функциями z, т. е. будут справедливы формулы (65.03).

В предыдущих главах исследовались системы, однородные по оси z; в таких системах волны записываются в виде (65.03), но $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ не зависят от z, а зависят только от поперечных координат x и y. Периодичность структуры как бы модулирует функции $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$: они приобретают ту же периодичность по z, что и сама структура. После разложения $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ в ряд Фурье (65.05) поле волны представляется в виде ряда *пространственных гармоник* (65.04). Каждая пространственная гармоника имеет свое продольное волновое число h_j и зависит от z по закону e^{ih_jz} — так же, как волна в однородной системе (в которой ε и μ не зависят от z), но в отдельности, как правило, физического смысла не имеет, поскольку не удовлетворяет уравнениям Максвелла или граничным условиям (или же тому и другому одновременно).

Направление распространения волны (65.03) при наличии потерь определяется мнимой частью h_j: поскольку $\operatorname{Im} h_j = \operatorname{Im} h$, коэффициент затухания всех пространственных гармоник одинаков; если он положителен ($\operatorname{Im} h > 0$), то волна распространяется в положительном направлении оси z. В отсутствие потерь направление распространения определяется групповой скоростью $v = d\omega/dh = d\omega/dh_j$, также одинаковой для всех пространственных гармоник: если она положительна ($v > 0$), то волна распространяется в положительном направлении оси z. Оба критерия ($\operatorname{Im} h > 0$ и $v > 0$) приводят к потоку энергии в положительном направлении оси z (см. § 48 и 51).

Что же касается фазовой скорости $u_j = \omega/\operatorname{Re} h_j$, то она для каждой пространственной гармоники своя и может быть как положительной, так и отрицательной — в зависимости от знака и абсолютной величины j, т. е. номера пространственной гармоники. Нумерация пространственных гармоник содержит произвол, связанный с тем, что в формулах (65.02) и (65.03) вместо h можно взять $h + n2\pi/l$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Обычно индекс $n = 0$ присваивается наибольшей пространственной гармонике, которая при не слишком высоких частотах имеет наименьшее волновое число $h_0 = h$, удовлетворяющее условию $|\operatorname{Re} h_0| < \pi/l$. При $h_0 l \ll 1$ нулевая гармоника является преобладающей, и всеми остальными можно пренебречь. Это приближение будет применяться ниже при решении задач, относящихся к периодическим структурам, поскольку более точный расчет, как правило, возможен только в рамках чис-

ленных методов. В этом приближении периодическая структура считается как бы однородной по оси z, что существенно упрощает рассмотрение.

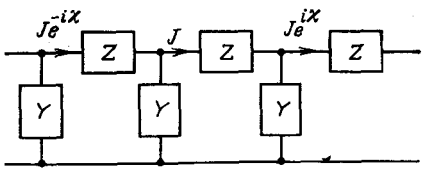


Рис. 76. Цепочка четырехполюсников

Периодичность структуры начинает сказываться, когда условие $h_0 l \ll 1$ перестает выполняться. В открытых периодических структурах без потерь (см. § 66 и 67) распространение поверхностной волны возможно только тогда, когда все ее пространственные гармоники медленные, т. е. удовлетворяют условию $|h_j| > k$: тогда согласно § 58 их поля экспоненциально убывают при удалении от структуры. Отсюда видно, что при $h_0 l \approx 2\pi$ распространение поверхностной волны невозможно, поскольку минус первая пространственная гармоника становится быстрой ($h_{-1} l \ll 1$). Фактически, однако, распространение возможно только при $h_0 l < \pi$.

Условие $h_0 l = \pi$ в любой периодической структуре без потерь — открытой или закрытой — обычно определяет границу полосы пропускания и полосы непропускания. При $h_0 l = \pi$, как легко видеть, соседние периоды структуры колеблются в противофазе: $h_{-i} = -h_0$, а также $h_{-j} = -h_{j-1}$ при $j = 2, 3, \ldots$; сравниваются по абсолютной величине не только продольные волновые числа (т. е. фазовые скорости) положительных и отрицательных гармоник, но сравниваются (из-за противофазности полей в соседних периодах) и соответствующие амплитуды; волна перестает переносить энергию вдоль оси z, поэтому групповая скорость при $h_0 l = \pi$ равна нулю.

В этой главе рассматриваются периодические структуры, поддерживающие распространение на низких частотах, причем с возрастанием частоты волновое число h_0 также увеличивается. При частоте, соответствующей значению $h_0 l = \pi$, структура «запирается», перенос энергии прекращается, и при более высоких частотах распространение невозможно. Возможна и обратная ситуация (т. е. непропускание при низких частотах, распространение при более высоких). Оба эти случая реализуются в простейшей периодической структуре — цепочке четырехполюсников, изображенной на рис. 76 (см. задачу 1).

Соотношения (65.02) и (65.03) аналогичны теореме Флоке в теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами; наиболее важным примером является уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + Q(z) F = 0$$

с заданной периодической функцией $Q(z)$. Простое (но нестрогое) доказательство соотношений (65.02) для замкнутой системы — периодического волновода (см., например, рис. 79) проводится следующим образом. Предположим, что имеется последовательность векторных функций $\mathbf{e}_m$, $\mathbf{h}_m$ — полная система,

так что любое другое решение комплексных уравнений Максвелла представляется в виде разложения по функциям $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{h}_m$. В качестве другого решения возьмем

$$\mathbf{e}'_m(x, y, z) = \mathbf{e}_m(x, y, z+l),\ \mathbf{h}'_m(x, y, z) = \mathbf{h}_m(x, y, z+l), \tag{65.06}$$

и по сказанному выше $\mathbf{e}'_m$ и $\mathbf{h}'_m$ можно представить в виде разложений

$$\mathbf{e}'_m = \sum_n a_{mn}\mathbf{e}_n,\ \mathbf{h}'_m = \sum_n a_{mn}\mathbf{h}_n \tag{65.07}$$

с постоянными коэффициентами a_{mn}. Полагая

$$\mathbf{E} = \sum_m b_m \mathbf{e}_m,\ \mathbf{H} = \sum_m b_m \mathbf{h}_m, \tag{65.08}$$

можно подобрать постоянные коэффициенты b_m так, чтобы удовлетворялись соотношения $\mathbf{E}' = \Theta\mathbf{E}$, $\mathbf{H}' = \Theta\mathbf{H}$, где штрихом, как в формуле (65.06) обозначена замена z на $z+l$, а Θ — постоянный множитель. Поскольку

$$\mathbf{E}' = \sum_m b_m \mathbf{e}'_m = \sum_{m,n} a_{mn} b_m \mathbf{e}_n,\ \mathbf{H}' = \sum_{m,n} a_{mn} b_m \mathbf{h}_n,$$

коэффициенты b_m должны удовлетворять бесконечной системе уравнений

$$\sum_m a_{mn} b_m = \Theta b_n,\ \text{или}\ \sum_m (a_{mn} - \Theta\delta_{mn}) b_m = 0 \tag{65.09}$$

(δ_{mn} — символ Кронекера); это возможно при условии, что определитель этой системы

$$\mathrm{Det}(a_{mn} - \Theta\delta_{mn}) = 0. \tag{65.10}$$

Последнее уравнение определяет возможные значения Θ; каждому такому значению соответствует нетривиальное решение системы (65.09), имеющее вид (65.02), где $\Theta = e^{ihl}$.

Приведенные соображения являются чисто формальными, поскольку система (65.08) и определитель (65.10) бесконечные. В общем случае они должны *порождать бесконечную последовательность решений вида* (65.02). Случай, когда уравнение (65.10), являющееся характеристическим уравнением для данной периодической структуры, имеет корни $\Theta = 1$ или $\Theta = -1$ (т. е. $h = 0$ или $hl = \pi$) или же кратные корни, приводит к осложнениям, поскольку тогда волны вида (65.02) не исчерпывают собой всех волн в данной структуре: в этих случаях надо учитывать так называемые присоединенные волны.

В обычных волноводах (см. гл. VII) были рассмотрены волны, имеющие зависимость от z в виде $F(z) = e^{\pm ihz}$. Функция F должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2F}{dz^2} + h^2 F = 0,$$

поэтому такая зависимость реализуется всегда, за исключением критической частоты, когда $h = 0$ и $F = C + C'z$. Волна, у которой амплитуды полей пропорциональны z, является частным примером присоединенной волны; она реализуется при строго определенной частоте. При учете потерь (§ 50 и 53) h в нуль не обращается, и зависимость $e^{\pm ihz}$ сохраняется при всех частотах.

В § 62 упоминалось об обратных и комплексных волнах, которые для однородных линий передачи являются в значительной степени экзотическими. В

периодических структурах обратные волны, точнее, обратные пространственные гармоники, существуют всегда, как это видно из формул (65.04), и вопрос лишь в том, насколько они заметны. При $0<h_0 l<\pi$ из обратных пространственных гармоник наибольшую амплитуду имеет обычно минус первая, у которой $-\pi<h_{-1}l<0$, она применяется в лампах с обратной волной. Совпадение волновых чисел достаточно интенсивных пространственных гармоник в двух волнах, бегущих в противоположных направлениях, происходит в периодических структурах довольно часто. При наличии связи между такими волнами образуются комплексные волны.

§ 66. Поверхностные волны над гребенчатой структурой

На рис. 77 изображена периодическая структура, состоящая из тонких проводящих пластин шириной a, бесконечно протяженных по оси y и укрепленных на проводящей плоскости $x=-a$. Данная система называется гребенчатой структурой, или, кратко, гребенкой. Вдоль нее могут распространяться медленные волны того же типа, что и вдоль диэлектрической пластинки (см. § 61). Отличие гребенки от пластинки — в том, что гребенка является анизотропной: распространение волн в направлениях z и y подчиняется разным законам. Другое отличие гребенки — в ее периодичности; однако при условии $hl\ll 1$ (l — период гребенки) периодичность не сказывается, высшими пространственными гармониками можно пренебречь (см. § 65) и в случае распространения электрической волны в направлении оси z поле над гребенкой записывать в виде (60.02) и (60.03). Здесь не учитываются все пространственные гармоники кроме нулевой (см. § 65), ее волновое число обозначается через h.

Электромагнитное поле в области $-a<x<0$, т. е. между проводящими перегородками, находится из следующих соображений. Фаза электромагнитной волны (60.03) над гребенкой зависит от z, однако при условии $hl\ll 1$ ее можно считать постоянной на протяжении *одного периода* гребенки. Поэтому между двумя соседними пластинами возбуждается главным образом поле, не зависящее от z. Это поле должно иметь составляющую E_z, ту же симметрию и определяться функцией Π^e_z, которая в пределах данного периода, например при $0<z<l$, практически не зависит от z. Поскольку Π^e_z не зависит и от y, поле между пластинками имеет только две составляющие

$$E_z = k^2 \Pi^e_z,\quad H_y = \mathrm{i}\, kd\, \Pi^e_z/dx \quad (-a<x<0), \tag{66.01}$$

причем функция Π^e_z должна удовлетворять уравнению

$$d^2 \Pi^e_z/dx^2 + k^2 \Pi^e_z = 0. \tag{66.02}$$

Будем считать как пластины, так и проводящую плоскость $x=-a$ идеально проводящей. Тогда при $x=-a$ должно выполняться граничное условие $E_z=0$, и формулы (66.01) и (66.02) приводят к выражениям

$$E_z = B \sin k(x+a),\quad H_y = \mathrm{i}\, B \cos k(x+a) \quad (x<0). \tag{66.03}$$

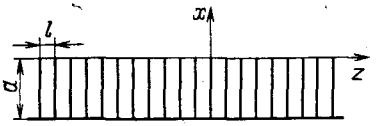


Рис. 77. Гребенка

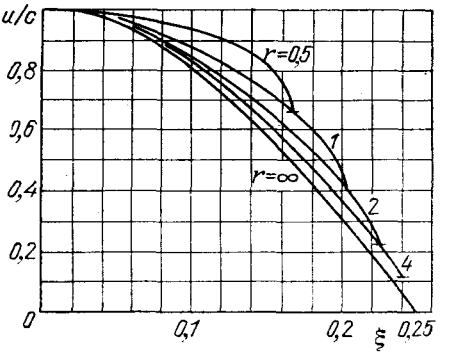


Рис. 78. Дисперсия гребенки

Зависимость электрического и магнитного поля между пластинами от координаты x совпадает с распределением напряжения и тока в стоячей волне на отрезке обычной линии. Это совпадение физически объясняется тем, что параллельные пластины являются простейшим примером передающей линии первой группы (см. § 29).

Выражения (60.03) и (66.03) определяют поля в разных областях: при $x>0$ и $x<0$ соответственно. Далее надо подобрать постоянные A и B в этих выражениях так, чтобы на общей границе этих областей, т. е. при $x=0$, эти поля непрерывно переходили друг в друга. Для этого естественно потребовать выполнения обычных граничных условий равенства тангенциальных составляющих **E** и **H** с обеих сторон границы:

$$E_z|_{x=+0}=E_z|_{x=-0},\quad H_y|_{x=+0}=H_y|_{x=-0}. \tag{66.04}$$

Отсюда, заменяя на периоде $0<z<l$ экспоненту e^{ihz} единицей, получаем соотношения

$$-p^2A=k^2B\sin ka,\quad -pA=kB\cos ka \tag{66.05}$$

и характеристическое уравнение

$$p=k\operatorname{tg}ka, \tag{66.06}$$

определяющее зависимость продольного волнового числа h и фазовой скорости $u=\omega/h$ от частоты:

$$p=k/\cos ka,\quad u/c=\cos ka. \tag{66.07}$$

По второй формуле (66.07) построена нижняя кривая ($r=\infty$, смысл обозначения раскрыт ниже) на рис. 78. По оси абсцисс отложена величина $\xi=a/\lambda=ka/2\pi$, пропорциональная частоте, по оси ординат — коэффициент замедления u/c. Эта кривая определяет дисперсию гребенки.

Рисунок 78 показывает, что распространение поверхностной волны вдоль гребенки возможно при $0<\xi<1/4$, т. е. при глубине гребенки, не превышающей четверти длины волны в свободном пространстве. При значениях $1/4<\xi<1/2$ такой волны нет, так как правая часть уравнения (66.06) отрицательна. При значениях $\xi>1/2$ уравнение (66.06) может иметь решения, однако их рассматривать не будем.

Отметим, что при $\xi=1/4$ наступает резонанс в отрезке линии, образованной каждой парой соседних пластин (рис. 77), этот резонанс происходит, когда на длине a укладывается четверть волны. Действительно, соседние пластины образуют линию длины a, разомкнутую при $x=0$ и закороченную при $x=-a$. Формулы (66.06) и (66.07) показывают, что если частота меньше резонансной частоты гребенки, то происходит замедление и образуется поверхностная волна. Если же частота выше резонансной, то поверхностной волны нет.

Полученный результат аналогичен известным выводам теории дисперсии. Действительно, диэлектрик без потерь ($\nu=0$), имеющий одну резонансную частоту ω_r и диэлектрическую проницаемость (8.03) замедляет волну при $\omega<\omega_r$ (тогда $\varepsilon>1$ и $u=c/\sqrt{\varepsilon}<c$). При $\omega=\omega_r$ и отсутствии потерь $\varepsilon=\infty$ и $u=0$ (как на рис. 78 при $\xi=1/4$). При более высоких частотах $\varepsilon<1$, и медленные волны в среде распространяться не могут.

При $\xi\to 0$ из формул (66.06) и (66.07) получаем $p\to 0$ и $u\to c$, и поле волны принимает вид (60.04). Таким образом, при $\xi=0$ по оси z распространяется обычная плоская волна с поперечным полем и скоростью c. Значение $\xi=0$ можно получить, полагая $a=0$, т. е. переходя от гребенчатой структуры к плоскости $x=0$. Вдоль этой плоскости может бежать плоская волна (60.04), поскольку ее электрическое поле перпендикулярно плоскости. Значение $\xi=0$ можно также получить, считая $\lambda=\infty$; достаточно длинные волны распространяются вдоль гребенки так же, как вдоль гладкой плоскости. Этот вывод имеет общее значение, поскольку волны при своем распространении «не замечают» неровностей, размеры которых малы по сравнению с их длиной волны.

Рассмотренный выше предельный случай опять приводит к представлению о поверхностной волне как о плоской волне (60.04), преобразованной в волну (60.03) вследствие замедляющего действия поперечных перегородок.

Выведенные выше формулы справедливы лишь при условии $hl\ll 1$. Благодаря этому условию период структуры l вообще не вошел в полученные нами соотношения. Однако при $\xi\to 1/4$ мы получили $h\to\infty$, и тогда условие $hl\ll 1$ перестает выполняться, как бы мал ни был период l. Отсюда следует ожидать, что при малых u/c формула (66.07) для реальных гребенок с конечным периодом l становится неприменимой. Строгая теория поверхностных волн в гребенке подтверждает это заключение. На рис. 78 представлены результаты вычислений u/c по этой теории гребенок с различными соотношениями $r=a/l$, характеризующими форму гребенки (чем величина r больше, тем гребенка более частая). Из этих кривых видно, что формулы (66.07) соответствуют значению $r=\infty$, т. е. бесконечно частой гребенке. Гребенчатые структуры с конечным значением r имеют дисперсные кривые, идущие тем выше, чем меньше r. Эти кривые обрываются при $\xi=\xi_{max}<1/4$ и $u=u_{min}>0$, причем при уменьшении r величина u_{min} уве-

личивается, а ξ_{max} уменьшается. Поэтому с помощью редких гребенок вообще нельзя сильно замедлить электромагнитную волну.

Учет высших пространственных гармоник (см. конец § 65) показывает, что поверхностная волна вдоль периодической структуры может распространяться лишь при условии $hl<\pi$. Если в результате замедления ее волновое число увеличится настолько, что $hl=\pi$, то при попытке дальнейшего замедления волны происходит срыв и она исчезает. Крайние правые точки кривых на рис. 78 как раз соответствуют условию $hl=\pi$.

Выше использован прием, довольно распространенный в электродинамике, который называется методом сшивания. Он заключается в том, что область сложной формы, в которой исследуется электромагнитное поле, с помощью вспомогательных поверхностей мысленно разбивают на две простые области (или ряд областей). В каждой из частичных областей для поля берется достаточно общее выражение, содержащее произвольные постоянные. Затем постоянные подбирают так, чтобы на границах областей поля «сшивались», т. е. непрерывно переходили друг в друга — с той или иной степенью приближения. Выше взяты простейшие выражения в каждой частичной области (с одной постоянной A или B), поэтому результаты получились довольно грубыми, как показывает рис. 78. Более точные результаты получаются, если при $x>0$ взять несколько пространственных гармоник (§ 65), а при $x<0$ наряду с поперечной стоячей волной (66.03) учесть несколько волноводных волн. Однако при этом формулы усложняются, теряют наглядность и требуют громоздких численных расчетов.

Вместо метода сшивания к поверхностным волнам над гребенкой при условии $hl\ll 1$ часто применяется другой подход, ведущий к простым соотношениям, а именно гребенку можно характеризовать анизотропным импедансом, т. е. граничными условиями

$$E_z=\zeta_1 H_y,\quad E_y=-\zeta_2 H_z \text{ при } x=0, \tag{66.08}$$

напоминающими граничные условия Леонтовича, но учитывающими анизотропную структуру. Для электрической волны, не зависящей от координаты y, по формулам (66.03) получаем $\zeta_1=-i\operatorname{tg} ka$, для такой же магнитной волны можно считать $\zeta_2=0$, потому что такая волна возбуждает токи, текущие вдоль пластинок почти так же, как в сплошной плоскости (точное вычисление дает $\zeta_2=-i\,0{,}22kl$; поскольку $h>k$, а $hl\ll 1$, то $|\zeta_2|\ll 1$).

Однако импедансные условия (66.08) позволяют рассмотреть более широкий круг задач, относящихся к гребенке, например учесть конечную толщину пластин, заполнение пространства между пластинами различными веществами и т. д. Если в гребенке нет потерь, то импедансы ζ_1 и ζ_2 чисто мнимые, в этом случае $\zeta_1=-i\xi_1$, $\zeta_2=-i\xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — вещественные числа. В задачах 2, 3 и 6 к этой главе показано, как применяются граничные условия (66.08) к различным структурам.

§ 67. Диафрагмированный волновод. Ребристый стержень

Рассмотрим медленные волны в круглом диафрагмированном волноводе, схематически изображенном на рис. 79. Этот волновод можно рассматривать как обычный круглый волновод радиуса b, к стенке которого на равных расстояниях l друг от друга прикреплены диафрагмы — тонкие поперечные перегородки с круговым отверстием радиуса a. Такая система находит себе применение в линейных ускорителях и в лампах с бегущей волной, причем электроны движутся по оси z.

Ограничимся исследованием симметричных электрических волн. Электромагнитное поле таких волн определяется по формулам (39.05) с помощью единственной составляющей электрического вектора Герца

$$\Pi_z^e = \Pi(r)\, e^{ihz}. \tag{67.01}$$

Функция Π не зависит от φ, и поэтому составляющие поля

$$E_r = i h \frac{d\Pi}{dr} e^{ihz},\ E_z = -p^2 \Pi e^{ihz},\ E_\varphi = 0, \tag{67.02}$$

$$H_\varphi = ik \frac{d\Pi}{dr} e^{ihz},\ H_r = H_\varphi = 0,\ p = \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Функция Π должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi}{dr} - p^2 \Pi = 0 \tag{67.03}$$

и поэтому равна $AI_0(pr)$, где A — произвольная постоянная. Другое решение уравнения (67.03) — функция $K_0(pr)$ — в выражение для Π не входит, так как составляющие поля должны быть конечны при $r=0$, т. е. на оси z.

Пользуясь первой формулой (58.18), можно переписать отличные от нуля составляющие электромагнитного поля (67.02) в виде

$$E_r = i hp A I_1(pr) e^{ihz},\ E_z = -p^2 A I_0(pr) e^{ihz}, \tag{67.04}$$

$$H_\varphi = i kp A I_1(pr) e^{ihz}.$$

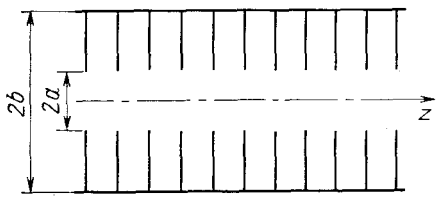


Рис. 79. Диафрагмированный волновод

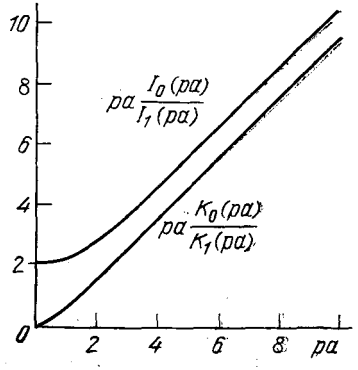


Рис. 80. Левые части уравнений (67.11) и (67.18)

Таково поле симметричной электрической волны в области $0<r<a$, свободной от перегородок (см. рис. 78). В области $a<r<b$ этими выражениями пользоваться нельзя, так как они не удовлетворяют граничным условиям на поверхности перегородок.

Диафрагмированный волновод является периодической структурой с пространственным периодом l по оси z. Задача о распространении волны вдоль этой структуры, как и в § 66, всего проще решается при условии $hl \ll 1$. Поле между диафрагмами, при $a<r<b$, должно иметь составляющую E_z и ту же симметрию, что и поле (67.04); при $hl \ll 1$ в пределах данного периода, например при $0<z<l$, функция Π^e_z практически не зависит от z, поэтому поле между перегородками будет иметь лишь две составляющие

$$E_z = k^2 \Pi^e_z, \quad H_\varphi = \mathrm{i}\, k\, d\Pi^e_z/dr, \tag{67.05}$$

причем функция Π^e_z должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d\Pi^e_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Pi^e_z}{dr} + k^2 \Pi^e_z = 0, \tag{67.06}$$

имеющему общее решение

$$\Pi^e{}_z = CJ_0(kr) + C'N_0(kr). \tag{67.07}$$

Здесь фигурируют обе функции $J_0(kr)$ и $N_0(kr)$, так как функция (67.07) определяет поле при $a<r<b$.

Пусть поперечные перегородки и поверхность волновода $r=b$ обладают идеальной проводимостью. Тогда поле с составляющими (67.05) автоматически удовлетворяет граничным условиям на перегородках, так как тождественно $E_r = E_\varphi = 0$. Для того чтобы удовлетворялось граничное условие $E_z = 0$ при $r=b$, должно быть

$$CJ_0(kb) + C'N_0(kb) = 0, \quad C = BN_0(kb), \quad C' = -BJ_0(kb),$$

где B — новая постоянная. Окончательно получаем

$$E_z = k^2 B[J_0(kr)N_0(kb) - N_0(kr)J_0(kb)],$$
$$H_\varphi = -\mathrm{i}k^2 B[J_1(kr)N_0(kb) - N_1(kr)J_0(kb)]. \tag{67.08}$$

Можно сказать, что наличие перегородок приводит к появлению в области $a<r<b$ стоячих цилиндрических волн. Постоянная B изменяется от периода к периоду, достаточно рассмотреть один период $(0<z<l)$.

Применяя граничные условия

$$E_z|_{z=a-0} = E_z|_{r=a+0}, \quad H_\varphi|_{r=a-0} = H_\varphi|_{r=a+0}, \tag{67.09}$$

аналогичные условиям (66.04), получаем соотношения

$$-p^2 AI_0(pa) = k^2 B[J_0(ka)N_0(kb) - N_0(ka)J_0(kb)],$$
$$-pAI_1(pa) = kB[J_1(ka)N_0(kb) - N_1(ka)J_0(kb)] \tag{67.10}$$

и характеристическое уравнение

$$pa\frac{I_0(pa)}{I_1(pa)} = ka\frac{J_0(ka)N_0(kb) - N_0(ka)J_0(kb)}{J_1(ka)N_0(kb) - N_1(ka)J_0(kb)}, \tag{67.11}$$

позволяющее определить фазовую скорость медленной волны при заданной часоте и известных размерах a и b диафрагмированного волновода. Действительно, с помощью таблиц бесселевых функций J_0, N_0, J_1 и N_1 можно вычислить правую часть уравнения (67.11). Левая часть этого уравнения есть монотонная функция одного аргумента pa. График этой функции изображен на рис. 80. Ход верхней кривой, показанной на рис. 80, легко понять, если воспользоваться формулой (58.13), из которой следует соотношение

$$\lim_{pa\to 0} paI_0(pa)/I_1(pa)=2, \tag{67.12}$$

и формулой (58.16), приводящей к приближенному равенству

$$paI_0(pa)/I_1(pa)\approx pa \text{ при } pa\gg 1. \tag{67.13}$$

Если правая часть уравнения (67.11) больше двух, то с помощью верхней кривой рис. 80 можно найти (единственное) значение pa, удовлетворяющее этому уравнению. Это значит, что в данной системе может распространяться замедленная волна; ее продольное волновое число $h=\sqrt{k^2+p^2}$, а фазовая скорость

$$u=c/\sqrt{1+p^2/k^2}<c. \tag{67.14}$$

Если же правая часть уравнения (67.11) меньше двух, то уравнение не имеет решения и медленная волна отсутствует.

Для того чтобы фазовая скорость u была лишь немного меньше c, частоту и размеры a и b следует выбирать так, чтобы правая часть уравнения (67.11) лишь немного превышала 2. В этом случае выполняются условия $pa\ll 1$, $p\ll k$ и формулы (67.04) упрощаются следующим образом:

$$E_z=A_0e^{ihz},\ E_r=H_\varphi=-A_0(ikr/2)e^{ihz}\ \ (A_0=-p^2A). \tag{67.15}$$

На рис. 81,*а* изображен ход электрических силовых линий волны, бегущей вдоль диафрагмированного волновода при этих условиях.

Для лампы с бегущей волной требуется отношение u/c порядка 0,1. Длина волны при этом на порядок меньше, чем в свободном пространстве, а произведение pa — порядка единицы или нескольких единиц. В этом случае распределение электрического поля в области $0<r<a$ диафрагмированного волновода принимает вид, изображенный на рис. 80,*б*: электромагнитное поле «прили-

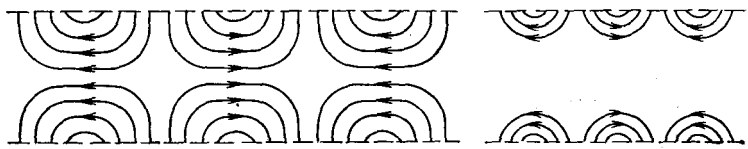


Рис. 81. Электрическое поле волны в диафрагмированном волноводе:
а — при фазовой скорости, близкой к *с*; *б* — при значительном замедлении

пает» к поверхности $r=a$ тем сильнее, чем больше pa. При $pa\gg 1$ и $pr\gg 1$ формулы (67.04) и (58.16) дают

$$E_z(r)/E_z(a)=I_0(pr)/I_0(pa)=\sqrt{a/r}\,e^{-p(a-r)}, \qquad (67.16)$$

т. е. поле экспоненциально убывает при удалении от диафрагм. По этой причине применять замедляющую систему при больших значениях параметра pa невыгодно, потому что на электроны, движущиеся вблизи оси z, действует сравнительно слабое поле. В этом обстоятельстве проявляется поверхностный характер медленных волн, о котором говорилось еще в § 58.

Если в уравнении (67.11) положить $a=b$, то правая часть обратится в нуль и характеристическое уравнение примет вид $I_0(pa)=0$. Это — уравнение для круглого волновода радиуса a без диафрагм. При вещественном p оно не имеет решения, поскольку $I_0\geqslant 1$. Этот результат очевиден: волновод без диафрагм не может поддерживать медленных волн, поскольку все волны в волноводах распространяются с фазовой скоростью, превышающей c. Если положить $p=ig$, то это уравнение принимает вид $J_0(ga)=0$, что согласно § 42 соответствует симметричным электрическим волнам в круглом волноводе.

Несимметричная волна в диафрагмированном волноводе имеет составляющую

$$E_z=A_mI_m(pr)\cos(m\varphi+\varphi_0)e^{ihz}\quad(m=1,\ 2,\ ...), \qquad (67.17)$$

поскольку эта составляющая является решением волнового уравнения. Из соотношения (58.13) видно, что в этом случае $E_z=0$ при $r=0$, так что электрическое поле волны не действует на электроны, движущиеся по оси z.

В диафрагмированном волноводе могут существовать также быстрые волны. Следует отметить, что при достаточно малом шаге l волны H_{0n} в диафрагмированном волноводе мало отличаются от волн H_{0n} в круглом волноводе того же радиуса a, поскольку в таких волнах имеются только азимутальные токи, которые по краям поперечных перегородок текут примерно так же, как по сплошной проводящей плоскости. Все остальные волны имеют продольные токи, распределение которых сильно возмущается поперечными перегородками.

Ребристый стержень (рис. 82) состоит из металлического стержня (цилиндра радиуса b) и надетых на него кольцеобразных поперечных перегородок (ребер) с внешним радиусом a. Ребристый стержень можно рассматривать как некоторое обращение диафрагмированного волновода (см. рис. 79) и рассчитывать тем же способом.

Полагая $\Pi=AK_0(pr)$, при $r>a$ приходим к характеристическому уравнению

$$pa\frac{K_0(pa)}{K_1(pa)}=-ka\frac{J_0(ka)N_0(kb)-N_0(ka)J_0(kb)}{J_1(ka)N_0(kb)-N_1(ka)J_0(kb)}, \qquad (67.18)$$

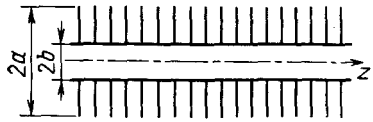


Рис. 82. Ребристый стержень

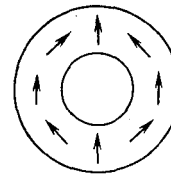


Рис. 83. Токи, возбуждаемые простейшей несимметричной волной на дисках ребристого стержня

отличающемуся от уравнения (67.11) лишь тем, что в его левой части стоят функции K_0 и K_1 вместо I_0 и I_1, а в правой — минус.

Исследование характеристического уравнения (67.18) можно произвести так же, как исследовалось уравнение (67.11). Зависимость левой части этого уравнения от переменной pa изображена на рис. 80; хотя при $pa\to\infty$ обе кривые неограниченно сближаются, при $pa\ll 1$ ход левой части уравнения (67.18) иной. Действительно, по формулам (58.15) получаем

$$paK_0(pa)/K_1(pa) = (pa)^2\ln(2/\gamma pa) \quad \text{при} \quad pa\ll 1. \tag{67.19}$$

Таким образом, при изменении pa от 0 до ∞ левая часть уравнения (67.18) монотонно изменяется в тех же пределах. Поэтому характеристическое уравнение может иметь решение, если правая часть оказывается положительной. Как было показано, тем же свойством обладает уравнение (66.06). Поэтому решения уравнений (66.06) и (67.18) качественно не отличаются друг от друга.

Ребристые стержни могут быть использованы в качестве антенн, создающих направленное излучение в дециметровом и метровом диапазонах радиоволн. Для такой цели рассмотренная выше симметричная электрическая волна неприменима, так как ее излучение прямо вперед, в направлении геометрического продолжения ребристого стержня, равно нулю. Действительно, симметричная волна возбуждает на поверхности $r=b$ продольные токи, не излучающие в направлении оси z, а на перегородках текут симметричные радиальные токи, излучение которых вдоль оси z взаимно уничтожается.

Для создания излучения, направленного вдоль оси ребристого стержня, в нем необходимо возбудить простейшую несимметричную волну, электрический ток которой в каждый момент времени имеет на поперечной перегородке ориентацию одного и того же знака (рис. 83), и в направлении оси z излучение всех этих токов складывается. Теория несимметричных волн рассмотрена в задаче 6 на основе импедансного приближения.

Заметим, что ребристый стержень можно считать некоторым аналогом многовибраторной антенны, если рассматривать каждую поперечную перегородку (несущую токи, изображенные на рис. 83) как отдельный излучатель. Вместе с тем излучение ребристого стержня можно уподобить излучению из открытого конца волново-

да или рупора. При этом к концу стержня подходит не волноводная или рупорная волна, а поверхностная волна, поперечную протяженность поля которой можно регулировать, изменяя ее замедление.

Задачи к гл. XII

1. Рассмотреть цепочку четырехполюсников, изображенную на рис. 76. Обозначая через J ток в центральной ячейке, а через $Je^{i\chi}$ и $Je^{-i\chi}$ — токи в соседних с ней ячейках, связать параметр χ с импедансом Z и адмиттансом Y каждой ячейки, т. е. вывести характеристическое уравнение цепочки. Полагая $Z=R-i\omega L$ и $Y=G-i\omega C$, показать, что при $|\chi|\ll 1$ данная цепочка эквивалентна однородной длинной линии, рассмотренной в гл. VI. Пренебрегая потерями (полагая $R=0$ и $G=0$), найти полосы пропускания и непропускания. Сделать то же при $Z=i/\omega C$ и $Y=i/\omega L$; показать, что в этом случае волна в цепочке обратная. Показать в общем виде, что в реактивной цепочке граница полосы пропускания соответствует значениям $\chi=0$ и $\chi=\pi$.

Решение. Если J — ток через импеданс Z центральной ячейки, то по первому закону Кирхгофа ток, текущий вниз по правой перемычке, равен $J(1-e^{i\chi})$, а ток текущий вверх по левой перемычки, равен $J(1-e^{-i\chi})$. Второй закон Кирхгофа приводит к соотношению

$$ZJ+J(1-e^{i\chi})/Y+J(1-e^{-i\chi})/Y=0 \text{ или } ZY+2-2\cos\chi=0,$$

$$2\sin\frac{\chi}{2}=\sqrt{-ZY} \text{ и } 2\sin\frac{\chi}{2}=\sqrt{(\omega L+iR)(\omega C+iG)}.$$

Если $|\chi|\ll 1$, то синус можно заменить аргументом; полагая $\chi=hl$, где l — длина ячейки, получаем выражение $h=\sqrt{(\omega L_1+iR_1)(\omega C_1+iG_1)}$ ($L_1=L/l$, $R_1=R/l$, $C_1=C/l$, $G_1=G/l$), в котором фигурируют погонные параметры — те же, что в формуле (30.05); волновой импеданс при $|\chi|\ll 1$ равен $-i\chi/Y$ и согласуется с формулой (30.08). Таким образом, при $|\chi|\ll 1$ периодичность цепочки не проявляется и она ведет себя так же, как однородная линия передачи, подчиняющаяся телеграфным уравнениям.

При произвольных χ для цепочек без потерь получаются характеристические уравнения

$$\sin\frac{\chi}{2}=\frac{\omega}{2\omega_0} \text{ и } \sin\frac{\chi}{2}\ \frac{\omega_0}{2\omega}\ (\omega_0=\sqrt{LC}). \qquad (a)$$

Первое уравнение определяет полосу пропускания $0<\omega<2\omega_0$, второе — полосу пропускания $\omega_0/2<\omega<\infty$. На границе полосы пропускания $\chi=\pi$ соседние ячейки колеблются в противофазе. В полосе непропускания $\chi=\pi+i\psi$ соседние ячейки по-прежнему в противофазе, но амплитуда колебаний при переходе к следующей ячейке уменьшается в e^{ψ} раз.

В общем случае произведение ZY для чисто реактивной цепочки вещественно. Полоса пропускания определяется неравенствами

$$0<-ZY<4,\ 0<\chi<\pi,$$

если ограничиться наименьшими положительными значениями χ. На границах полосы пропускания $\chi=0$ или $\chi=\pi$. При переходе от цепочки к периодической структуре надо полагать $\chi=hl$.

Из уравнений (*a*) следует, что

$$\frac{d\chi}{d\omega}=\frac{1}{\omega_0\cos(\chi/2)}>0 \quad \text{и} \quad \frac{d\chi}{d\omega}=-\frac{\omega_0}{\omega^2\cos(\chi/2)}<0.$$

Во втором случае волна обратная, поскольку при $u=\omega/h>0$ получаем $v=d\omega/dh=ld\omega/d\chi<0$, т. е. фазовая и групповая скорости имеют разные знаки; волновой импеданс $-i\sin\chi/Y$ при $\chi>0$ отрицателен. При $\chi=\pi$ групповое запаздывание $d\chi/d\omega=l/v$ в обоих случаях бесконечно, а групповая скорость и волновой импеданс равны нулю.

Таким образом, в цепочке из последовательно соединенных емкостей и параллельно соединенных индуктивностей может распространяться только обратная волна (см. также § 62).

2. Исследовать распространение поверхностных волн над гребенкой с анизотропным чисто реактивным импедансом, т. е. в случае граничных условий (66.08) при $\zeta_1=-i\xi_1$, $\zeta_2=-i\xi_2$. Для этого в качестве потенциалов взять (см. § 14 и 18)

$$\Pi_x^e=Ae^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)}, \quad \Pi_x^m=Be^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)}. \qquad (a)$$

Полученное характеристическое уравнение исследовать, полагая

$$\alpha=i\varkappa, \quad \gamma^2=\varkappa^2+1-\beta^2 \qquad (b)$$

и считая β фиксированным положительным числом. Выяснить, при каких условиях для $\varkappa$ и γ получаются комплексные значения, и связать этот результат с теорией комплексных волн (см. конец § 62).

Р е ш е н и е. Опуская экспоненциальные множители, для составляющих, входящих в условия (66.08), получаем

$$E_y=-k^2(\alpha\beta A+\gamma B), \quad E_z=-k^2(\alpha\gamma A-\beta B),$$

$$H_y=-k^2(-\gamma A+\alpha\beta B), \quad H_z=-k^2(\beta A+\alpha\gamma B)$$

и условия (66.08) дают соотношения

$$\gamma(\alpha-i\xi_1)A=\beta(1-i\xi_1\alpha)B, \quad \gamma(1-i\xi_2\alpha)B=-\beta(\alpha-i\xi_2)A,$$

показывающие, что при $\beta=0$ или $\gamma=0$ граничным условиям можно удовлетворить, ограничиваясь одной из функций (*a*), т. е. полагая $A=0$ или же $B=0$. При $\beta=0$ получаем $\varkappa=\xi_1$ $(A\neq0)$ или $\varkappa=-1/\xi_1$ $(B\neq0)$, а при $\gamma=0$ получаем $\varkappa=\xi_2$ $(A\neq0)$ и $\varkappa=-1/\xi_1$ $(B\neq0)$. Поскольку для поверхностной волны отрицательные значения $\varkappa$ неприемлемы, только два из этих решений имеют смысл.

При отличных от нуля значениях β и γ получается характеристическое уравнение

$$\gamma^2(\varkappa-\xi_1)(\xi_2\varkappa+1)+\beta^2(\varkappa-\xi_2)(\xi_1\varkappa+1)=0$$

или

$$(\xi_2\gamma^2+\xi_1\beta^2)\varkappa^2+(1-\xi_1\xi_2)(\gamma^2+\beta^2)\varkappa-(\xi_1\gamma^2+\xi_2\beta^2)=0.$$

Заменяя здесь $\varkappa^2$ на $\varkappa^2+1-1$ и учитывая вторую формулу (*b*), получаем более простое уравнение

$$(\varkappa^2+1)[\xi_2\gamma^2+\xi_1\beta^2+(1-\xi_1\xi_2)\varkappa-(\xi_1+\xi_2)]=0,$$

в котором первый множитель не дает приемлемого решения, а второй множитель приводит к квадратному уравнению, которое можно записать в виде

$$(\varkappa-\xi_1)(\varkappa+1/\xi_2)=\beta^2(1-\xi_1/\xi_2).$$

Оно показывает, что при $\beta\neq 0$ волны, у которых $\varkappa=\xi_1$ и $\varkappa=-1/\xi_2$, оказываются связанными, вследствие чего возникают две новые волны, у которых

$$\varkappa=\frac{1}{2}(\xi_1-1/\xi_2)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(\xi_1+1/\xi_2)^2+\beta^2(1-\xi_1/\xi_2)}.$$

Если $\xi_1>0$ и $\xi_2<0$, т. е. обе несвязанные волны — поверхностные, то оба значения $\varkappa$ вещественны, а обе новые волны — поверхностные ($\varkappa>0$) при дополнительном условии $\beta^2<\xi_1/(\xi_1-\xi_2)<1$. Если же ξ_1 и ξ_2 имеют одинаковые знаки, например $\xi_1>0$ и $\xi_2>0$, то подкоренное выражение отрицательно при условиях

$$\beta^2>(\xi_1\xi_2+1)^2/4\xi_2(\xi_1-\xi_2) \text{ и } \xi_1>\xi_2;$$

тогда оба корня комплексные. Они могли бы дать поверхностную волну при $\xi_1>1/\xi_2$, однако это неравенство несовместимо с условием $\xi_1>\xi_2$. Поэтому волны с комплексными значениями $\varkappa$ не являются поверхностными, а комплексность $\varkappa$ (а следовательно, и комплексность γ) обусловлена потерями на излучение (см. § 61). *Физическая причина этого* — в том, что одна из несвязанных волн (в данном примере та, у которой $\varkappa=-1/\xi_2<0$) — не поверхностная, а антиповерхностная (см. § 61).

Комплексные волны, рассмотренные в § 62, возникают при синхронизме несвязанных волн и при сколь угодно слабой связи; найденные выше комплексные значения $\varkappa$ этим условиям не удовлетворяют.

3. Показать, что если к гребенке, изображенной на рис. 77, добавить две идеально проводящие плоскости $y=0$ и $y=b$, то характеристическое уравнение для поверхностных волн в такой структуре совпадает с уравнением, полученным в задаче 2. Конкретизировать решения этого уравнения при дополнительных условиях $\xi_1>0$, $\xi_2=0$.

Р е ш е н и е. Полагая

$$\Pi_x^{\mathrm{e}}=\mathrm{i}A\sin k\beta y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\alpha x+\gamma z)},\quad \Pi_x^{\mathrm{m}}=B\cos k\beta y\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\alpha x+\gamma z)},$$

будем иметь, опуская множитель $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\alpha x+\gamma z)}$,

$$E_y=-k^2(\alpha\beta A+\gamma B)\cos k\beta y,\quad E_z=-\mathrm{i}k^2(\alpha\gamma A-\beta B)\sin k\beta y,$$
$$H_y=-\mathrm{i}k^2(-\gamma A+\alpha\beta B)\sin k\beta y,\quad H_z=-k^2(\beta A+\alpha\gamma B)\cos k\beta y.$$

Легко видеть, что при условии $\beta=n\pi/kb$ ($n=1, 2, \ldots$) условия $E_x=E_z=0$ при $y=0$ и $y=b$ удовлетворяются и что характеристическое уравнение получается то же, что и в задаче 1. При $\xi_2=0$ оно имеет один корень $\varkappa=\xi_1(1-\beta^2)$, который при $\beta^2<1$ соответствует поверхностной волне.

4. Показать, что при условиях $pa\gg 1$, $ka\gg 1$ и $kb\gg 1$ и конечном значении $k|a-b|$ уравнения (67.11) и (67.18) принимают вид $p=k\,\mathrm{tg}\,k|a-b|$, т. е. переходят в уравнение (66.06) для гребенки с шириной полос $|a-b|$.

Решение. При $pa \gg 1$ левые части (67.11) и (67.18) в силу формул (58.16) сводятся к pa. Правая часть (67.11) в силу формул (22.07) и (22.09) принимает вид

$$ka\,\frac{\cos(ka-\pi/4)\sin(kb-\pi/4)-\sin(ka-\pi/4)\cos(kb-\pi/4)}{\cos(ka-3\pi/4)\sin(kb-\pi/4)-\sin(ka-3\pi/4)\cos(kb-\pi/4)}=$$

$$=ka\,\frac{\sin k(b-a)}{\sin[k(b-a)+\pi/2]}=ka\,\mathrm{tg}\,k(b-a),$$

причем для диафрагмированного волновода $b>a$. Правая часть (67.18) равна $-ka\,\mathrm{tg}\,k(b-a)=ka\,\mathrm{tg}\,k(a-b)$, для ребристого стержня $a>b$. Приравнивая левые и правые части, приходим к искомому соотношению, очевидному с физической точки зрения.

5. Исследовать уравнение (67.18), полагая $b=a-\Delta a$ и считая Δa достаточно малым. Сравнить с уравнением (59.05).

Решение. При $\Delta a \to 0$ в числителе правой части (67.18) следует положить

$$J_0(kb)=J_0(ka)+J_1(ka)k\Delta a,\quad N_0(kb)=N_0(ka)+N_1(ka)k\Delta a,$$

используя формулы (22.13); в знаменателе можно просто положить $b=a$, после чего правая часть будет равна $k^2a\Delta a$. Малость правой части влечет за собой малость pa, и в силу формулы (67.19) приходим к уравнению

$$(pa)^2\ln(2/\gamma pa)=k^2a\Delta a.$$

Оно отличается от (59.05) тем, что вместо $i\zeta$ стоит $k\Delta a$ — малый индуктивный импеданс, создаваемый гребенчатой структурой и замедляющий волну, скользящую вдоль стержня.

6. Исследовать несимметричные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль ребристого стержня, в импедансном приближении, т. е. ставя при $r=a$ граничные условия

$$E_z=\zeta_1 H_\varphi,\quad E_\varphi=-\zeta_2 H_z\quad(\zeta_1=-i\xi_1,\ \zeta_2=-i\xi_2),$$

аналогичные условиям (66.08). Использовать выражения (63.07) для полей при $r>a$. Сравнить характеристическое уравнение с уравнением (63.13) для диэлектрического стержня. Рассмотреть характеристическое уравнение для основной несимметричной волны при низких частотах, считая, что ξ_1 и ξ_2 при $ka\to 0$ пропорциональны ka ($\xi_1>0$, $\xi_2>0$).

Решение. Из импедансных граничных условий и выражений (63.07) выводится характеристическое уравнение

$$\left(F-\frac{1}{\xi_1 ka}\right)\left(F+\frac{\xi_2}{ka}\right)=\frac{m^2}{(pa)^2}\left[\frac{1}{(ka)^2}+\frac{1}{(pa)^2}\right],\qquad(a)$$

имеющее ту же структуру, что и уравнение (63.13). При большом комплексном показателе преломления произведение $ga\approx ka\sqrt{\varepsilon\mu}$ есть большое число, величиной $1/(ga)^2$ можно пренебречь по сравнению с $1/(pa)^2$ и положить (см. § 27)

$$f=-\frac{i}{ga}=\frac{1}{i\,ka\sqrt{\varepsilon\mu}},\quad \varepsilon f=\frac{1}{i\zeta\,ka},\quad \mu f=-\frac{i\zeta}{ka},$$

после чего уравнение (63.13) примет вид

$$\left(F-\frac{1}{i\zeta ka}\right)\left(F+\frac{i\zeta}{ka}\right)=\frac{m^2}{(pa)^2}\left[\frac{1}{(ka)^2}+\frac{1}{(pa)^2}\right],$$

соответствующий уравнению (*а*).

При $m=1$, учитывая второе выражение (63.20) и поведение ξ_1 и ξ_2 при низких частотах, получаем соотношение

$$\ln\frac{2}{\gamma pa}=\frac{1}{\xi_1 ka}+\frac{1}{(ka)^2}-\frac{\xi_2}{ka},$$

аналогичное первому соотношению (63.21). Иначе говоря, при низких частотах основная несимметричная волна ребристого стержня имеет тот же характер, что и основная волна диэлектрического стержня и проводящего стержня с диэлектрической оболочкой (§ 63, рис. 69 и 70).

Глава XIII.

СПИРАЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

§ 68. Спираль как замедляющая линия. Приближенные граничные условия

Спиральная линия (*или спиральный волновод*) образована металлическим проводом, намотанным по винтовой линии. Заметим, что в математике винтовую линию не принято называть спиралью: спираль есть плоская кривая (спираль Архимеда, логарифмическая спираль и т. д.). Однако в радиотехнике термин «спиральная линия» является общепринятым.

Спиральная замедляющая линия имеет большое значение для лампы с бегущей волной и некоторых родственных ей электронных приборов. Замедление электромагнитных волн в спиральной линии осуществляется за счет того, что электромагнитные волны имеют тенденцию распространяться вдоль провода со скоростью c. Таким свойством обладает идеально проводящий прямой провод (см. § 29), и при искривлении провода это свойство, очевидно, в какой-то степени сохраняется. Если считать, что по согнутому проводу волна бежит со скоростью c, то замедление волны определяется чисто геометрическим параметром — так называемым углом намотки ϑ; он определяется формулой $\sin\vartheta=\Delta z/\Delta s$, где Δs — длина провода; Δz — длина спирали по оси z (рис. 84). В этом случае фазовая скорость волны по оси z, вдоль которой движутся электроны, равны $u=c\sin\vartheta$. Согласно этой элементарной формуле, фазовая скорость волны в спирали не зависит от частоты. Фактически волна в спирали обладает некоторой дисперсией. Однако эта дисперсия невелика, так что фазовая скорость остается почти постоянной в широком интервале частоты. По этой причине усилители на лампе с бегущей волной обладают большой

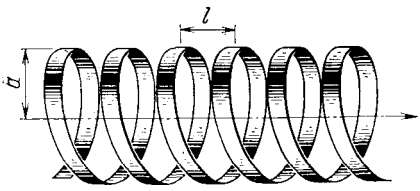


Рис. 84. Спиральный волновод (спиральная замедляющая линия)

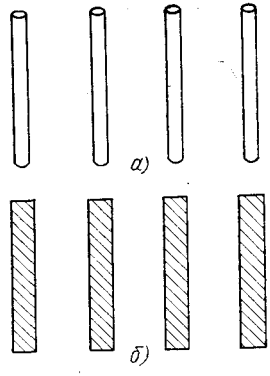


Рис. 85. Решетки:
а — из параллельных проволок круглого сечения; *б* — из параллельных лент

диапазонностью, так как близость фазовой скорости волны к скорости электронного потока сохраняется в большом частотном диапазоне.

Теория распространения волн вдоль бесконечного спирального волновода (точнее, вдоль провода, намотанного по винтовой линии) может быть развита, исходя из представления о волне тока

$$J = J_0 \exp(ih_0 z) = J_0 \exp(ih_0 s \cdot \sin\vartheta), \qquad (66.01)$$

бегущей по проводу с некоторым неизвестным волновым числом h_0; $s = z/\sin\vartheta$ — линейная координата вдоль оси провода (длина дуги). Вычисляя поле, создаваемое током J, и ставя для этого поля граничное условие на поверхности провода, можно получить характеристическое уравнение для волнового числа h_0. Однако это характеристическое уравнение имеет довольно сложный вид. Поэтому ниже волны в спиральном волноводе исследуются с помощью приближенного метода, позволяющего получить те же результаты более просто.

Этот метод основан на приближенных граничных условиях. Рассмотрим решетку из параллельных проводов круглого сечения (рис. 85,*а*) или параллельных металлических лент (рис. 85,б). Если период решетки l мал по сравнению с длиной волны, то решетку можно рассматривать как анизотропно проводящую плоскость, обладающую идеальной проводимостью в направлении проводов или лент и не проводящую в перпендикулярном направлении. Действительно, еще в классических опытах Генриха Герца было показано, что при падении на такую решетку электромагнитных волн различных поляризаций получаются совершенно различные результаты. Если электрическое поле падающей волны параллельно проводам, то волна почти полностью отражается от решетки — как если бы это была сплошная металлическая плоскость; если же электрическое поле перпендикулярно проводам, то электромагнитная волна беспрепятственно проходит через решетку, почти не отражаясь. Различие в поведении волн различных поляризаций физически объясняется тем, что в первом случае волна возбуждает в проводах решетки сильные токи, текущие вдоль них и создающие электромагнитное поле практически такое же, как

и при сплошной металлической плоскости; это приводит к тому, что падающая волна не проникает за решетку и полностью отражается. Во втором случае падающая волна стремится возбудить токи, текущие поперек проводов; провода — тонкие, токи — слабые, создаваемое токами поле ничтожно мало, и волна проходит через решетку, как если бы решетки совсем не было.

Сказанное выше позволяет сформулировать граничные условия в плоскости решетки. Обозначим через s направление вдоль проводов или лент, через t — перпендикулярное к ним направление (в той же плоскости решетки). Тогда граничные условия в плоскости решетки, соответствующие предположению об ее анизотропной проводимости, можно записать в виде

$$E_s=0,\ H_s^{(1)}=H_s^{(2)}. \tag{68.02}$$

Как легко видеть из граничного условия (4.02), последнее соотношение означает отсутствие поверхностного тока в направлении, перпендикулярном проводам (отсутствие составляющей i_t).

Условия (68.02) на поверхности спирального волновода позволяют вывести характеристические уравнения для распространяющихся вдоль него волн (см. ниже § 69 и 70). Подчеркнем еще раз, что эти условия являются приближенными. Ими можно пользоваться, если безразмерный параметр

$$\varkappa=kl/2\pi=l/\lambda \tag{68.03}$$

достаточно мал.

Их можно уточнить. Для решетки из параллельных металлических лент (рис. 85,*б*) вместо условий (68.01) можно написать более точные условия:

$$E_s=\mathrm{i}\,\xi_1\left[H_t^{(2)}-H_t^{(1)}-\frac{1}{\mathrm{i}\,k}\frac{\partial}{\partial s}\left(E_n^{(2)}-E_n^{(1)}\right)\right]\quad\left(\xi_1=\varkappa\ln\sin\frac{\pi b}{2l}\right),$$

$$H_s^{(2)}-H_s^{(1)}=-4\mathrm{i}\,\xi_2\left(E_t+\frac{1}{\mathrm{i}\,k}\frac{\partial}{\partial s}H_n\right)\quad\left(\xi_2=\varkappa\ln\cos\frac{\pi b}{2l}\right), \tag{68.04}$$

где b — ширина ленты; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, направленная от стороны *1* к стороне *2* этой поверхности и выбранная так, что тройка направлений $\mathbf{t}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ является правой.

Для решетки из параллельных проводов радиуса b (рис. 85,*а*) уточненные граничные условия при $b\ll l$ (т. е. когда радиус проводов составляет малую часть периода решетки) имеют вид

$$E_s=\mathrm{i}\,\xi_0\left[H_t^{(2)}-H_t^{(1)}-\frac{1}{\mathrm{i}\,k}\frac{\partial}{\partial s}\left(E_n^{(2)}-E_n^{(1)}\right)\right],\quad H_s^{(2)}=H_s^{(1)}, \tag{68.05}$$

где

$$\xi_0=\varkappa\ln(2\pi b/l). \tag{68.06}$$

Сравнивая формулы (68.04) и (68.06), видим, что при $b\ll l$ решетка из проводов радиуса b эквивалентна решетке из лент шириной $4b$ (см. задачу 4 к гл. VI).

Применимость как первоначальных, так и уточненных граничных условий для решеток можно проверить путем сравнения. На рис. 86 изображена за-

висимость $|A_0|$ и $|B_0|$ от $\varkappa$ для бесконечных решеток из параллельных идеально проводящих лент, ширина которых составляет половину периода решетки, т. е. равна ширине щелей между ними. Сплошные кривые вычислены по строгой теории, а штриховые — по граничным условиям (68.04). Предполагается, что электромагнитная волна падает нормально на решетку; если ее электрическое поле параллельно лентам, то A_0 — коэффициент отражения волны (по электрическому полю), а B_0 — коэффициент прохождения; для перпендикулярной поляризации B_0 является коэффициентом отражения (по магнитному полю), а A_0 — коэффициентом прохождения.

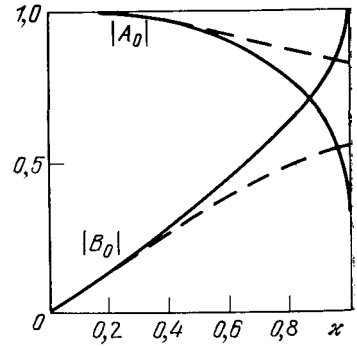


Рис. 86. Коэффициенты отражения и прохождения для решетки из параллельных лент

Мы видим, что при условии $\varkappa<0{,}3$ приближенные граничные условия (68.04) дают графическую точность, по крайней мере, для нормально падающей волны. Простые граничные условия (68.01) приводят к значениям $A_0=-1$, $B_0=0$ и, следовательно, пригодны для гораздо меньших $\varkappa$.

Заметим, что в § 66 были также введены приближенные граничные условия импедансного типа (для гребенчатой структуры), однако более простые, чем рассмотренные выше. В отличие от условий (66.08), которые ставились на одной стороне поверхности, новые условия (68.04) и (68.05) являются двухсторонними; анизотропия структуры учитывается в обоих случаях.

Применительно к медленным (поверхностным) волнам, которые только и будут изучаться в этой главе, уточнение простых граничных условий (68.02) дает лишь малые поправки. Однако для быстрых (вытекающих) волн, о которых шла речь в § 61 и 62, разумные результаты получаются только на основе граничных условий (68.04) или (68.05). В частности, спиральный волновод может поддерживать распространение быстрых волн H_{0n}, близких к соответствующим волнам в круглом волноводе и затухающих из-за излучения; расчет показывает, что коэффициент затухания (вообще говоря, небольшой) *сильно зависит от структуры спирального волновода, а не только от угла* ϑ.

§ 69. Симметричная волна в спиральном волноводе

Аналогия между обычным волноводом и спиральным усиливается, если пользоваться приближенными граничными условиями (68.01): тогда стенке спирального волновода приписывается анизотропная идеальная проводимость, в то время как стенку обычного волновода можно считать идеально проводящей в любом касательном к ней направлении. Однако анизотропия проводимости коренным образом изменяет свойства спирального волновода и, в частности, приводит к появлению медленных электромагнитных волн, имеющих поверхностный характер. Поле этих волн не сосредоточено внутри спирального волновода, а в значительной степени расположено вне его.

Кроме того, волны, распространяющиеся вдоль спирального волновода, не являются электрическими или магнитными: даже простейшая (симметричная) волна, которой посвящен этот параграф, имеет продольные составляющие электрического и магнитного полей. Если взять электрический и магнитный векторы Герца с единственными составляющими

$$\Pi^e_z = \Pi^e(r, \varphi)\, e^{ihz},\ \Pi^m_z = \Pi^m(r, \varphi)\, e^{ihz}, \tag{69.01}$$

где h — продольное волновое число данной волны, а r, φ, z — цилиндрические координаты (z есть ось спирального волновода), то составляющие электромагнитного поля по формулам (18.10) получатся в виде

$$E_r = \left(ih\frac{\partial \Pi^e}{\partial r} + \frac{ik}{r}\frac{\partial \Pi^m}{\partial \varphi}\right) e^{ihz},\ H_r = \left(-\frac{ik}{r}\frac{\partial \Pi^e}{\partial \varphi} + ih\frac{\partial \Pi^m}{\partial r}\right) e^{ihz},$$

$$E_\varphi = \left(\frac{ih}{r}\frac{\partial \Pi^e}{\partial \varphi} - ik\frac{\partial \Pi^m}{\partial r}\right) e^{ihz},\ H_\varphi = \left(ik\frac{\partial \Pi^e}{\partial r} + \frac{ih}{r}\frac{\partial \Pi^m}{\partial \varphi}\right) e^{ihz},$$

$$E_z = -p^2 \Pi^e e^{ihz}, \qquad H_z = -p^2 \Pi^m e^{ihz}, \tag{69.02}$$

где $p = \sqrt{h^2 - k^2}$.

Радиус спирального волновода обозначим через a. Пренебрегая толщиной провода, можно считать, что при $r = a$ расположены поверхностные токи и поверхностные заряды, благодаря чему составляющие E_r, H_φ и H_z должны терпеть скачок на поверхности $r = a$. Наоборот, составляющие E_φ, E_z и H_r должны быть непрерывны, откуда следует непрерывность функции Π^e и производной $\partial \Pi^m / \partial r$ при $r = a$. Функции Π^e и Π^m должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} - p^2 \Pi = 0,$$

поэтому в случае симметричных волн, не зависящих от координаты φ, надо задавать Π^e и Π^m в виде

$$\Pi^e = A \begin{Bmatrix} I_0(pr)\, K_0(pa) \\ I_0(pa)\, K_0(pr) \end{Bmatrix},\ \Pi^m = B \begin{Bmatrix} I_0(pr)\, K_0'(pa) \\ I_0'(pa)\, K_0(pr) \end{Bmatrix}, \tag{69.03}$$

где A и B — постоянные, а в фигурной скобке верхняя строчка берется при $r < a$, нижняя — при $r > a$. Составляющие E_s и H_s в граничных условиях (68.02) находятся по формулам

$$E_s = E_\varphi \cos\vartheta + E_z \sin\vartheta,\ H_s = H_\varphi \cos\vartheta + H_z \sin\vartheta.$$

Пользуясь формулами (69.02) и (69.03), получаем

$$E_s = (-p^2 A I_0 K_0 \sin\vartheta - i\,kp\,B I_0' K_0' \cos\vartheta)\, e^{ihz},$$

$$H_s = \begin{Bmatrix} i\,kp\, I_0' K_0 \cos\vartheta - p^2 B I_0 K_0' \sin\vartheta \\ i\,kp\, I_0 K_0' \cos\vartheta - p^2 B\, I_0' K_0 \sin\vartheta \end{Bmatrix} e^{ihz}, \tag{69.04}$$

где невыписанные аргументы функций I_0 и K_0 всюду равны pa.

Первое граничное условие (68.02) приводит к соотношению

$$p A I_0 K_0 \sin\vartheta + \mathrm{i}\, k B I_0' K_0' \cos\vartheta = 0. \tag{69.05}$$

Если воспользоваться тождеством

$$I_m'(y)\, K_m(y) - I_m(y)\, K_m'(y) = 1/y, \tag{69.06}$$

то второе граничное условие (68.02) легко преобразовать к виду

$$\mathrm{i}\, k A \cos\vartheta + p B \sin\vartheta = 0,$$

откуда постоянные A и B можно выразить через новую постоянную C следующим образом:

$$A = p C \sin\vartheta,\ B = -\mathrm{i}\, k C \cos\vartheta.$$

Подставляя эти выражения в соотношение (69.05), получим характеристическое уравнение

$$p^2 I_0 K_0 \operatorname{tg}^2\vartheta = -k^2 I_0' K_0'$$

для симметричных волн в спиральном волноводе. Пользуясь соотношениями (58.18), его можно переписать так:

$$(p^2/k^2) \operatorname{tg}^2\vartheta = I_1 K_1 / I_0 K_0. \tag{69.07}$$

Решение этого уравнения проще всего получить в параметрическом виде. Введем наряду с безразмерным параметром (68.03) аналогичный параметр

$$\eta = hl/2\pi = l/\lambda', \tag{69.08}$$

где λ' — длина волны вдоль оси спирали. Аргумент функций I_m и K_m в уравнении (69.07)

$$pa = \sqrt{h^2 - k^2}\, a = \sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}\,(2\pi a/l) = x \operatorname{ctg}\vartheta,\ x = \sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}, \tag{69.09}$$

где учтено соотношение $\operatorname{ctg}\vartheta = 2\pi a/l$, вытекающее из геометрии винтовой линии (см. рис. 84). Если в определении $\sin\vartheta$ положить $\Delta z = l$, то Δs будет длиной витка:

$$\Delta s = \sqrt{(2\pi a)^2 + l^2},\ \sin\vartheta = l/\Delta s,\ \cos\vartheta = 2\pi a/\Delta s,\ \operatorname{tg}\vartheta = l/2\pi a. \tag{69.10}$$

Поставим следующую задачу: построить дисперсионную кривую, т. е. зависимость величины

$$\beta = u/c = k/h = \varkappa/\eta$$

от частоты или безразмерной переменной $\varkappa$, пропорциональной частоте (u — фазовая скорость волны). Если ввести обозначение

$$Q(x) = \operatorname{tg}^2\vartheta\, \frac{I_0(x \operatorname{ctg}\vartheta)\, K_0(x \operatorname{ctg}\vartheta)}{I_1(x \operatorname{ctg}\vartheta)\, K_1(x \operatorname{ctg}\vartheta)}, \tag{69.11}$$

то для величин η и $\varkappa$ получаем два уравнения

$$\eta^2 - \varkappa^2 = x^2,\ (\eta^2 - \varkappa^2)/\varkappa^2 = 1/Q(x),$$

решение которых имеет вид

$$\eta = \pm x \sqrt{1 + Q(x)},\ \varkappa = x \sqrt{Q(x)}. \tag{69.12}$$

Параметр x принимает положительные значения, а корни взяты в арифметическом смысле. Знак плюс в выражении для η дает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, знак минус соответствует такой же волне, но бегущей в обратном направлении. Ограничиваясь волной с положительным η, получаем расчетные формулы

$$\beta = 1/\sqrt{1 + 1/Q(x)}, \quad \varkappa = x\sqrt{Q(x)}, \tag{69.13}$$

дающие возможность вычислить β как функцию $\varkappa$. Так как $\varkappa$ оказывается монотонной функцией x, то формулы (69.13) определяют только одну симметричную волну.

В предельных случаях для функции $Q(x)$ можно написать выражения

$$Q(x) = 2\,\mathrm{tg}^2\vartheta \ln(2/\gamma x\,\mathrm{ctg}\,\vartheta) \text{ при } x\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \ll 1,$$

$$Q(x) = \mathrm{tg}^2\vartheta \text{ при } x\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \gg 1, \tag{69.14}$$

вытекающие из формул (58.15) и (58.16). Второе соотношение (69.13) показывает, что $\varkappa \to 0$ при $x \to 0$, и $\varkappa \approx x\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ при $x\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \gg 1$, и первое соотношение (69.13) приводит к предельным равенствам

$$\lim_{x\to 0}\beta = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\beta = \sin\vartheta. \tag{69.15}$$

Таким образом, при высоких частотах, когда параметр $\varkappa$ достаточно велик, волна действительно бежит со скоростью c вдоль провода (см. § 68). При низких частотах, когда параметр $\varkappa$ мал, величина β близка к единице. Это значит, что волна распространяется вдоль оси спирали (оси z) со скоростью, близкой к c, как бы перескакивая с витка на виток. На рис. 87 приведены результаты расчетов по формулам (69.13) при $\mathrm{ctg}\,\vartheta = 10$; дисперсионная кривая при $\varkappa \approx 0{,}05$ (при $\varkappa\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \approx 0{,}5$) дает $\beta = \sin\vartheta$, при существенно бо́льших $\varkappa$ полученные соотношения теряют смысл (см. § 71).

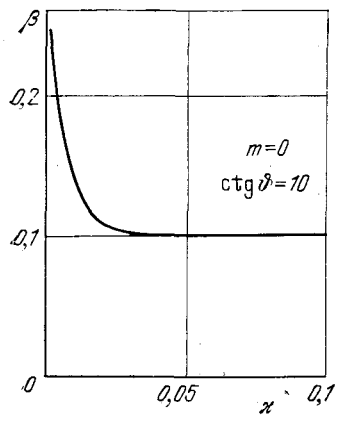


Рис. 87. Дисперсия симметричной волны спирального волновода

При низких частотах, когда выполняются условия $p \ll k$ и $pa \ll 1$, внутри спирального волновода (при $r < a$) преобладает функция Π^m, поскольку $B \gg A$, определяемое ею магнитное поле, по существу, мало отличается от однородного переменного поля внутри бесконечного соленоида; это поле изучается в элементарной физике при выводе формулы для индуктивности катушек (см. задачу 1).

§ 70. Несимметричные волны в спиральном волноводе

Электромагнитное поле несимметричной волны будем выражать через функции Герца (69.01), причем возьмем

$$\Pi^e = A \begin{Bmatrix} I_m(pr)\, K_m(pa) \\ I_m(pa)\, K_m(pr) \end{Bmatrix} e^{im\varphi}, \quad \Pi^m = B \begin{Bmatrix} I_m(pr)\, K'_m(pa) \\ I'_m(pa)\, K_m(pr) \end{Bmatrix} e^{im\varphi}, \quad (70.01)$$

где $m = 1, 2, \ldots$; при $m = 0$ возвращаемся к формулам (69.03). Множитель $e^{im\varphi}$ в формулах (70.01) указывает на то, что при своем распространении вдоль оси z волна вращается по азимуту φ.

Формулы (69.04) для несимметричных волн принимают вид

$$E_s = \left[-\left(p^2 + \frac{mh}{a} \operatorname{ctg} \vartheta \right) A I_m K_m \sin \vartheta - i\, kp\, B I'_m K'_m \cos \vartheta \right] e^{i(m\varphi + hz)}, \quad (70.02)$$

$$H_s = \begin{Bmatrix} ikpA I'_m K_m \cos \vartheta - \left(p^2 + \frac{mh}{a} \operatorname{ctg} \vartheta \right) B I_m K'_m \sin \vartheta \\ i\, kpA I_m K'_m \cos \vartheta - \left(p^2 + \frac{mh}{a} \operatorname{ctg} \vartheta \right) B I'_m K_m \sin \vartheta \end{Bmatrix} e^{i(m\varphi + hz)},$$

и граничные условия с учетом формул $\operatorname{ctg} \vartheta = \Delta h a$, $\Delta h = 2\pi/l$ приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} &(p^2 + mh\,\Delta h)\, A I_m K_m \sin \vartheta + ikp\, B I'_m K'_m \cos \vartheta = 0, \\ &i\, kpA \cos \vartheta + (p^2 + mh\,\Delta h)\, B \sin \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (70.03)$$

Последнее соотношение позволяет написать для A и B выражения

$$A = (p^2 + mh\Delta h)\, C \sin \vartheta, \quad B = -ikpC \cos \vartheta,$$

при подстановке которых в первое соотношение (70.03) получаем характеристическое уравнение

$$\frac{(p^2 + mh\,\Delta h)^2}{p^2 k^2} = -\frac{I'_m K'_m}{I_m K_m}. \quad (70.04)$$

Воспользуемся формулами

$$I_{m-1}(y) = I'_m + (m/y) I_m, \quad K_{m-1}(y) = -K'_m - (m/y) K_m,$$
$$I_{m+1}(y) = I'_m - (m/y) I_m, \quad K_{m+1}(y) = -K'_m + (m/y) K_m,$$

где I'_m и K'_m означают производные (по аргументу y) функций I_m и K_m. Умножая, получим соотношения

$$I_{m-1} K_{m-1} = -I'_m K'_m - (m^2/y^2)\, I_m K_m - (m/y)\,(I'_m K_m + I_m K'_m),$$
$$I_{m+1} K_{m+1} = -I'_m K'_m - (m^2/y^2)\, I_m K_m + (m/y)\,(I'_m K_m + I_m K'_m),$$

полусумма которых имеет вид

$$-I'_m K'_m = \frac{1}{2}\,(I_{m-1} K_{m-1} + I_{m+1} K_{m+1}) + (m^2/y^2)\, I_m K_m. \quad (70.0\ )$$

Подставляя выражения (70.05) в характеристическое уравнение (70.04), получаем

$$\frac{(p^2+mh\,\Delta h)^2}{p^2k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta=\frac{I_{m-1}K_{m-1}+I_{m+1}K_{m+1}}{2I_mK_m}+\frac{m^2}{p^2a^2}. \tag{70.06}$$

Для сокращения введем обозначения

$$h_0=h+m\,\Delta h,\quad p_0=\sqrt{h_0^2-k^2},\quad \beta_0=k/h_0, \tag{70.07}$$

физический смысл которых будет рассмотрен в § 71. Тогда, перенося член m^2/p^2a^2 из правой части (70.06) в числитель левой части и пользуясь тождествами

$$(p^2+mh\Delta h)^2-(mk\Delta h)^2=p^4+2mh\Delta hp^2+m^2(\Delta h)^2p^2=$$
$$=p^2[p^2+2mh\Delta h+m^2(\Delta h)^2]=p^2[h^2+2mh\Delta h+m^2(\Delta h)^2-k^2]=$$
$$=p^2(h^2_0-k^2)=p^2p^2_0,$$

получаем характеристическое уравнение в виде

$$(p^2_0/k^2)\operatorname{tg}^2\vartheta=(I_{m-1}K_{m-1}+I_{m+1}K_{m+1})/2I_mK_m. \tag{70.08}$$

Если наряду с безразмерным параметром η по формуле (69.08) ввести параметр $\eta_0=h_0l/2\pi=h_0/\Delta h$, то из формул (70.07) получим

$$\eta_0=\eta+m,\quad \beta_0=\varkappa/\eta_0. \tag{70.09}$$

Чтобы найти решение уравнения (70.08) в параметрическом виде, введем переменную x по формуле (69.09) и обозначим

$$Q_m(x)=\operatorname{tg}^2\vartheta\,\frac{2I_m(x\operatorname{ctg}\vartheta)K_m(x\operatorname{ctg}\vartheta)}{I_{m-1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)K_{m-1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)+I_{m+1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)K_{m+1}(x\operatorname{ctg}\vartheta)}. \tag{70.10}$$

Переменные η и $\varkappa$ удовлетворяют двум уравнениям

$$\eta^2-\varkappa^2=x^2,\quad [(\eta+m)^2-\varkappa^2]/\varkappa^2=1/Q_m(x). \tag{70.11}$$

Подставляя $\varkappa^2=\eta^2-x^2$ из первого уравнения во второе, приходим к квадратному уравнению

$$\eta^2-2mQ_m\eta-(x^2+x^2Q_m+m^2Q_m)=0$$

для величины η. Корни этого уравнения определяются формулой

$$\eta^{\pm}=\Psi_{\pm}(x),\quad \Psi_{\pm}(x)=mQ_m(x)\pm\sqrt{[1+Q_m(x)][x^2+m^2Q_m(x)]}, \tag{70.12}$$

причем корень η^+ — положительный, а корень η^- — отрицательный; каждому значению x соответствует значение

$$\varkappa=\sqrt{\Psi^2_{\pm}(x)-x^2}. \tag{70.13}$$

При $m=0$ формулы (70.12) и (70.13) переходят в выражения (69.12). Однако между симметричными и несимметричными волнами есть следующая существенная разница: в формулах (69.12) двойной знак $\pm$ дает, по существу, одну и ту же волну, распространяющуюся в направлениях $\pm z$ с одинаковой фазовой скоростью.

Двойной знак $\pm$ для несимметричных волн дает при фиксированных m и x две волны, распространяющиеся с различными фазовыми скоростями: одна в направлении $+z$, другая в направлении $-z$. Разумеется, каждая из волн может распространяться с той же фазовой скоростью и в обратном направлении, но при этом она будет по азимуту φ поворачиваться в обратном направлении, и ей будет соответствовать азимутальный индекс m другого знака.

Если взять $m>0$, например $m=1$ или $m=2$, то этим фиксируется направление и скорость вращения электромагнитного поля в спиральном волноводе по азимуту φ и получаются по выведенным выше формулам две волны, соответствующие двум корням $\eta^{\pm}$. Первая волна, имеющая $\eta^{+}>0$ и положительную фазовую скорость, является правовинтовой волной: ее поле ввинчивается в ось z как правый винт; напомним, что сама спираль предполагается правовинтовой (см. рис. 84). Вторая волна, имеющая $\eta^{-}<0$ и, следовательно, отрицательную фазовую скорость, является левовинтовой. Для каждой из этих волн можно вычислить величину β по формулам

$$\beta^{+}=\varkappa\eta^{+}=\sqrt{1-x^2/\Psi_{+}^2(x)},\quad \beta^{-}=-\varkappa/\eta^{-}=\sqrt{1-x^2/\Psi_{-}^2(x)}, \tag{70.14}$$

причем связь между $\varkappa$ и x дана выражением (70.13).

Полученные формулы в предельных случаях $x\operatorname{ctg}\vartheta\to\infty$ и $x\operatorname{ctg}\vartheta\to 0$ упрощаются и позволяют составить качественное представление о дисперсионных зависимостях.

Функция Q_m при всех m удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x\operatorname{ctg}\vartheta\to\infty} Q_m(x)=\operatorname{tg}^2\vartheta. \tag{70.15}$$

Заменяя при больших значениях $x\operatorname{ctg}\vartheta$ функцию $Q_m(x)$ ее предельным значением (70.15), получаем

$$\Psi_{\pm}(x)=m\operatorname{tg}^2\vartheta\pm\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\vartheta)(x^2+m^2\operatorname{tg}^2\vartheta)},$$

$$\Psi_{\pm}^2(x)-x^2=\operatorname{tg}^2\vartheta\left[2m^2\operatorname{tg}^2\vartheta+m^2+x^2\pm(2m/\cos\vartheta)\sqrt{x^2+m^2\operatorname{tg}^2\vartheta}\right]\approx$$

$$\approx\operatorname{tg}^2\vartheta\,(m^2/\cos^2\vartheta+x^2\pm 2mx/\cos\vartheta)=\operatorname{tg}^2\vartheta\,(m/\cos\vartheta\pm x)^2,$$

откуда

$$\varkappa=\operatorname{tg}\vartheta\,(m/\cos\vartheta\pm x)\quad\text{при}\quad\varkappa\operatorname{ctg}\vartheta\gg 1,\ \vartheta\ll 1. \tag{70.16}$$

Как будет видно в § 71, параметр x никогда не превышает единицы (обычно $x<0{,}6$), так что при $m=1, 2, \ldots$ скобка в формуле (70.16) всегда положительна. Вычисляя $\eta^{\pm}$, достаточно взять более грубое приближение, полагая

$$\eta^{\pm}=\Psi_{\pm}(x)=m\operatorname{tg}^2\vartheta\pm x/\cos\vartheta, \tag{70.17}$$

поэтому по формулам (70.09) получаем

$$\eta^{\pm}_0=(m/\cos\vartheta\pm x)/\cos\vartheta,\ \beta^{\pm}_0=\sin\vartheta. \tag{70.18}$$

Таким образом, при $x\operatorname{ctg}\vartheta\gg 1$ все волны — как симметричные, так

и несимметричные — имеют $\beta_0 = \sin\vartheta$; физический смысл этого результата будет пояснен в § 71.

При $x \operatorname{ctg}\vartheta \ll 1$ функции $Q_m(x)$ ведут себя при $m=1$ и при $m=2, 3, \ldots$ по-разному. Действительно, в силу соотношения

$$\lim_{y\to 0} I_m(y) K_m(y) = 1/2m \quad (m = 1,2,\ldots)$$

получаем

$$\lim_{x\to 0} Q_m(x) = \operatorname{tg}^2\vartheta\,(1 - 1/m^2) \text{ при } m = 2, 3, \ldots, \tag{70.19}$$

в то время как при $m=1$ и $x \operatorname{ctg}\vartheta \ll 1$ имеем

$$Q_1(x) = \operatorname{tg}^2\vartheta/[\ln(2/\gamma x \operatorname{ctg}\vartheta) + 1/4]. \tag{70.20}$$

Поэтому при $m=2, 3, \ldots$ и $x\to 0$ функция $\Psi_\pm(x)$ стремится к конечному пределу:

$$\Psi_\pm(0) = m(1 - 1/m^2)\operatorname{tg}^2\vartheta \pm m \operatorname{tg}\vartheta \sqrt{(1-1/m^2)[1+(1-1/m^2)\operatorname{tg}^2\vartheta]} \tag{70.21}$$

благодаря чему дисперсионные кривые таких несимметричных волн обрываются при $\varkappa = |\Psi_\pm(0)|$ и $\beta^\pm = 1$ (см. рис. 89,*б*). При $m=1$ в силу формулы (70.13)

$$\Psi_\pm(x)\to 0 \text{ и } \varkappa\to 0 \text{ при } x\to 0,\ \beta^\pm \to 1 \text{ при } \varkappa\to 0. \tag{70.22}$$

Таким образом, две несимметричные волны с азимутальным индексом $m=1$ при достаточно низких частотах распространяются вдоль оси спирали со скоростью c, как симметричная волна.

При вычислениях по формулам (70.13) и (70.14) сталкиваемся со следующим обстоятельством: если взять $\Psi_+(x)$, то величина $\varkappa$ будет монотонной функцией x, возрастая от $\Psi_+(0)$ при $x=0$ до значений $\varkappa$, вычисляемых по формуле (70.16) со знаком плюс при достаточно больших x. Поэтому при данных m и $\varkappa > \Psi_+(0)$ имеется лишь одна правовинтовая волна, фазовая скорость которой определяется первой формулой (70.14). Однако для функции $\Psi_-(x)$ по формуле (70.13) получается немонотонная зависимость $\varkappa$ от x: при $x=0$ имеем $\varkappa = |\Psi_-(0)|$, затем при росте x величина $\varkappa$ растет, достигает некоторого максимума $\varkappa_{max}$ и при бо́льших x убывает в соответствии с асимптотической формулой (70.16) (со знаком минус). Поэтому, хотя при данном x имеется согласно формуле (70.11) одна левовинтовая волна, при заданном $\varkappa$ дело обстоит сложнее: при $|\Psi_-(0)| < \varkappa < \varkappa_{max}$ имеются две левовинтовые волны, при $\varkappa < |\Psi_-(0)|$ и $\varkappa = \varkappa_{max}$ — одна, при $\varkappa > \varkappa_{max}$ нет ни одной. Для несимметричных волн с индексом $m=1$ значение $\Psi_-(0) = 0$, поэтому при $\varkappa < \varkappa_{max}$ будем иметь две левовинтовые волны: у одной из них $\beta^- \to 1$ при $\varkappa\to 0$ согласно формуле (70.22), а для другой $\beta_0^- \approx \sin\vartheta$ в соответствии с формулой (70.18).

На рис. 88 и 89 представлены дисперсионные кривые несимметричных волн с азимутальными индексами $m=1$ и $m=2$ для спирали, имеющей $\operatorname{ctg}\vartheta = 10$ (как и на рис. 87). При этом на рис. 88,*а* и 89,*а* по оси ординат отложены величины $\beta^\pm$ по формулам

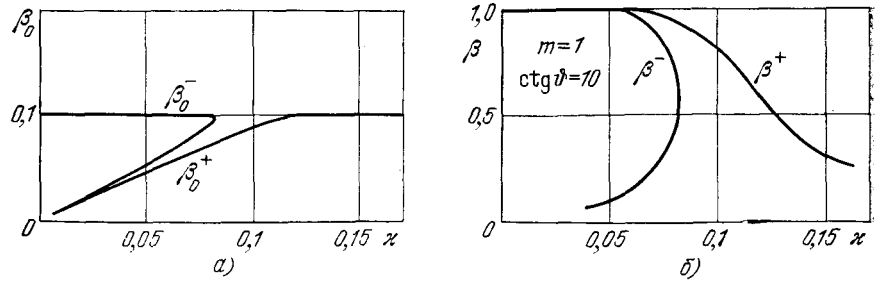


Рис. 88. Дисперсия несимметричных волн спирального волновода с индексом $m=1$

(70.14), а на рис. 88,*б* и 89,*б* — величины $\beta^{\pm}_0$ по формуле (70.09), физический смысл которых будет раскрыт в § 71. Число и общий характер этих дисперсионных кривых находятся в согласии с проведенными выше качественными рассуждениями, в частности с формулами (70.16)—(70.22).

Исследуем в заключение структуру электромагнитного поля двух простейших несимметричных волн с индексом $m=1$ при достаточно низких частотах, когда они имеют $\beta\approx 1$ в соответствии с формулой (70.22). Для сравнения возьмем плоскую волну с правой круговой поляризацией

$$E_x=H_y=A_0e^{ikz},\quad E_y=-H_x=iA_0e^{ikz},$$

имеющую в цилиндрической системе координат составляющие

$$E_r=H_\varphi=A_0e^{i(\varphi+kz)},\quad E_\varphi=-H_r iA_0e^{i(\varphi+kz)}. \tag{70.23}$$

Такое же поле получается для правовинтовой волны в спирали по формулам (70.01): действительно, в силу условий $p\ll k$ и $pa\ll 1$ при $r<a$ можно написать

$$\Pi^e=\tilde{A}I_1(pr)e^{i\varphi},\quad \Pi^m=\tilde{B}I_1(pr)e^{i\varphi},$$
$$\tilde{A}=\left(\frac{h\cos\vartheta}{a}+p^2\sin\vartheta\right)K_1(pa)C,\quad \tilde{B}=ipk\cos\vartheta K_1'(pa)C. \tag{70.24}$$

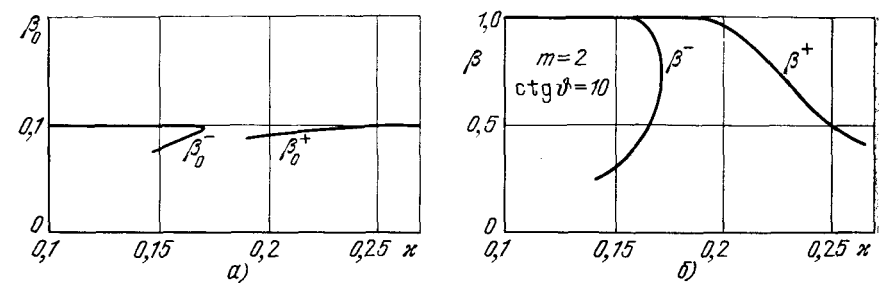


Рис. 89. Дисперсия несимметричных волн спирального волновода с индексом $m=2$

Подставляя эти выражения в формулы (69.02), получаем

$$E_r = \left[i h p \tilde{A} I_1'(pr) - \frac{k}{r} \tilde{B} I_1(pr) \right] e^{i(\varphi + hz)},$$

$$H_r = \left[\frac{k}{r} \tilde{A} I_1(pr) + i h p \tilde{B} I_1'(pr) \right] e^{i(\varphi + hz)},$$

$$E_\varphi = \left[-\frac{h}{r} \tilde{A} I_1(pr) - i k p \tilde{B} I_1'(pr) \right] e^{i(\varphi + hz)}, \qquad (70.25)$$

$$H_\varphi = \left[i k p \tilde{A} I_1'(pr) - \frac{h}{r} B I_1(pr) \right] e^{i(\varphi + hz)}.$$

Полагая $h \to k$, $pr \to 0$, из этих формул получаем выражения (70.23), причем $A_0 = kp(i\tilde{A} - \tilde{B})/2$. При более тщательном обосновании предельного перехода для получения выражений (70.23) необходимо привлечь также условие $ka \ll 1$.

Если же полагать $h \to -k$, $pr \to 0$, то получим выражения

$$E_r = -H_\varphi = B_0 e^{i(\varphi - kz)}, \quad E_\varphi = H_r = -i B_0 e^{i(\varphi - kz)}, \qquad (70.26)$$

соответствующие плоской волне с той же круговой поляризацией, но распространяющейся в отрицательном направлении оси z. Декартовы составляющие этой волны

$$E_x = -H_y = B_0 e^{-ikz}, \quad E_y = H_x = i B_0 e^{-ikz}, \quad B_0 = -kp(i\tilde{A} + \tilde{B})/2.$$

Таким образом, при низких частотах вдоль спирали могут распространяться две волны, структура поля которых лишь незначительно отличается от структуры плоских волн с круговой поляризацией. Эти плоские волны распространяются вдоль спирали, как бы не замечая ее присутствия. При повышении частоты эти две волны замедляются спиралью по-разному: как видно из рис. 88,*а*, левовинтовая плоская волна тормозится сильнее и при некотором значении $\varkappa_{max}$ вообще прекращает свое существование; правовинтовая волна (ориентация которой совпадает с ориентацией самой спиральной линии) замедляется в меньшей степени и существует, по крайней мере формально, при сколь угодно высоких частотах. При высоких частотах, однако изменяется структура электромагнитного поля этой волны — она приобретает поверхностный характер (см. ниже).

Несимметричные волны с индексом $m = 1$ существуют при сколь угодно низких частотах в диэлектрических замедляющих системах (см. § 62 и 63) и в ребристом стержне (§ 67). Во всех случаях структура поля этих волн близка к структуре плоской волны.

§ 71. Система волн спирального волновода. Пространственный резонанс

При анализе волн в спиральном волноводе нужно иметь в виду, что периодичность его структуры, по существу, не учитывалась, поскольку все формулы базировались на граничных условиях

(68.02). Однако спираль есть не только периодическая структура. Она отличается, например, от гребенки (§ 66) или ребристого стержня (§ 67) тем, что переходит сама в себя не только при смещении на период l (шаг спирали), но и при любом смещении по оси z, если оно сопровождается надлежащим поворотом по углу φ (таком, что комбинация $\varphi - 2\pi z/l = \text{const}$). Поэтому волна тока бежит по спиральному проводу в соответствии с формулой (68.01), как по однопроводной линии.

Формула (68.01) определяет h_0 — истинное волновое число волны в спиральном волноводе, дающее зависимость тока от координаты s вдоль провода. В этом — основное отличие спирали от произвольной периодической структуры (см. § 65), в которой каждое из чисел h_j с равным правом можно назвать волновым числом данной волны и лишь условно волновое число h_0 берется в пределах $-\pi/l < h_0 < \pi/l$.

Ток (68.01), текущий по спиральному проводу, в окружающем пространстве возбуждает сложное электромагнитное поле, представление о котором можно получить на основании следующих соображений. Плотность поверхностного тока на боковой поверхности спирального волновода $r=a$, соответствующая току (68.01), очевидно равна:

$$\mathbf{i} = J_0 e^{ih_0 z} \mathbf{f}(\varphi, z). \tag{71.01}$$

Функция $\mathbf{f}$ дает распределение плотности тока на поверхности $r=a$. Если, например, мы имеем металлическую ленту, намотанную по винтовой линии, то $\mathbf{f} \neq 0$ на ленте и $\mathbf{f}=0$ на зазорах между витками ленты. Во всех случаях функция $\mathbf{f}$ является периодической функцией φ (период 2π) и z (период l). Более того, функция $\mathbf{f}$ зависит только от комбинации $\varphi - 2\pi z/l$, а не от φ и z в отдельности в силу указанного выше геометрического свойства спирали. Раскладывая функцию

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\varphi - 2\pi z/l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_n e^{in(\varphi - 2\pi z/l)} \tag{71.02}$$

в ряд Фурье, можно представить плотность тока (71.01) в виде

$$\mathbf{i} = J_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{f}_n e^{i(n\varphi + h_n z)}, \quad h_n = h_0 - n\Delta h, \quad \Delta h = 2\pi/l. \tag{71.03}$$

Таким образом, плотность тока на поверхности спирального волновода представляется в виде ряда пространственных гармоник по φ и z, имеющих все возможные азимутальные индексы n и волновые числа h_n. Такой же характер имеет и электромагнитное поле

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n(r) e^{i(n\varphi + h_n z)}, \quad \mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_n(r) e^{i(n\varphi + h_n z)} \tag{71.04}$$

возбуждаемое этим током.

Формулы (71.01)—(71.04), по существу, подобны формулам (65.04) для периодической структуры; в обоих случаях поле пред-

ставляется в виде ряда пространственных гармоник. Заметим, что в § 65 использованы несколько иные обозначения (h_j вместо h_{-n}, j вместо $-n$).

В спиральном волноводе имеет место характерное явление, которое естественно назвать пространственным резонансом. Оно заключается в том, что при некоторых условиях в рядах (71.03) и (71.04) один какой-нибудь член (скажем, m-й) является главным и значительно превосходит все остальные; тогда можно говорить о m-м пространственном резонансе и заменять эти ряды одним лишь m-м членом. Таким образом, формулы § 69 соответствуют нулевому пространственному резонансу, формулы § 70 — пространственному резонансу с индексом $m=1, 2, \ldots$

При условии $h_0 l \ll 2\pi$ волна тока на протяжении одного витка спирали почти не изменяет своей фазы. Поскольку интересны спиральные линии с малым углом ϑ, каждый виток такой линии мало отличается от окружности, а постоянство тока по окружности приводит к тому, что в пространстве возбуждается симметричное электромагнитное поле. Поэтому условие $h_0 l \ll 2\pi$ соответствует нулевому пространственному резонансу, когда ток и поле почти не зависят от азимута φ.

При условии $h_0 l \approx 2\pi m$ ($m=1, 2, \ldots$) наступает m-й пространственный резонанс, так как ток и поле имеют практически ту же зависимость от φ, что и m-й член рядов (71.03) и (71.04). Условие m-го пространственного резонанса можно сформулировать иначе, вводя волновое число m-й пространственной гармоники $h_m = h_0 - m\Delta h$ в соответствии с формулой (71.03). Тогда условие $h_0 l \approx 2\pi m$ можно записать в виде $|h_m l| \ll 2\pi$.

Термином «пространственный резонанс» подчеркивается выделение в рядах (75.04) главных (резонансных) членов и возможность пренебрежения всеми другими (нерезонансными) слагаемыми. При обычном (временно́м) резонансе — например, при возбуждении объемного резонатора (см. § 89) — ряды (89.04) для электрического и магнитного полей также сводятся к одному резонансному слагаемому (89.17). Эту аналогию можно продолжить и далее: обычный резонанс происходит, когда в течение многих периодов колебания возбуждающий источник находится в фазе с собственным колебанием резонансной системы. Пространственный же резонанс имеет место, когда на протяжении большого числа витков (периодов спирали) ток на смежных участках витков (при $\varphi = \text{const}$) имеет практически одну и ту же фазу. Пространственный резонанс приводит к дисперсии: волна тока уже не бежит по проводу со скоростью c, характерной для изолированного провода, а благодаря действию на данный виток большого числа соседних витков, находящихся в одинаковой фазе, появляется сильная зависимость фазовой скорости от частоты.

В § 70 введено волновое число h_0 и соответствующие ему безразмерные параметры β_0 и η_0 по формулам (70.07) и (70.09); h_0 есть волновое число нулевой пространственной гармоники, которая при $h_0 l \approx 2\pi m$ ($m \neq 0$) выражена слабо, а β_0 есть отношение

фазовой скорости нулевой гармоники к c. Однако по волновому числу h_0 или соответствующему безразмерному параметру η_0 всего естественнее производить сравнение волн различной симметрии друг с другом, поскольку они дают фазовую скорость волны тока, бегущей по спиральному проводу. Поэтому на рис. 88,*б* и 89,*б* дан коэффициент β_0 в зависимости от $\varkappa$.

Таким образом, все формулы § 69 и 70 правильны лишь при наличии соответствующего пространственного резонанса в спирали, если же резонанса нет, то эти формулы становятся сомнительными. Рассмотрим с этой точки зрения результаты, полученные в § 69 и 70.

Симметричная волна в спиральном волноводе (§ 69) имеет при низких частотах то же поле, как и катушка с переменным током, и распространяется вдоль оси со скоростью, лишь немного меньшей c. При росте частоты фазовая скорость этой волны уменьшается, одновременно изменяется структура ее электромагнитного поля; поскольку параметр pa увеличивается, оно приобретает внутри и вне волновода поверхностный характер, прилипая к поверхности $r=a$, где текут создающие это поле токи (ср. с § 58 и 66).

При достаточно высоких частотах волна бежит со скоростью c вдоль провода спирали в соответствии с рис. 87. Нужно, однако, отметить, что кривая на рис. 87 при $\varkappa \gtrsim \sin\vartheta$ уже заведомо не соответствует действительности. Обозначим через $\Delta s = 2\pi a/\cos\vartheta$ длину витка спирали, тогда

$$\Delta s/\lambda = \varkappa/\sin\vartheta, \tag{71.05}$$

и при условиях $\varkappa \approx \sin\vartheta$, $\eta_0 \approx 1$ ток на спиральном проводе имеет вид, изображенный на рис. 90,*в*: на противоположных сторонах каждого витка ток имеет разные знаки. Следовательно, электромагнитное поле данной волны уже не является симметричным, как это предполагалось при построении дисперсионной кривой на рис. 87 в § 69, а соответствует полю несимметричной волны с азимутальным индексом $m=1$.

Переход от симметричной ($m=0$) к несимметричной ($m=1$) структуре поля происходит при условиях

$$\varkappa \approx \frac{1}{2}\sin\vartheta, \quad \eta \approx \frac{1}{2}, \tag{71.06}$$

когда ток на спиральном проводе имеет разные знаки на соседних витках, как это показано на рис. 90,*б*. Такое «чересполосное» распределение тока можно рассматривать либо как результат эволюции симметричной волны при увеличении частоты, либо можно получить из левовинтовой несимметричной волны с индексом $m=1$. Действительно, полагая в такой волне $\eta \approx -1/2$, опять приходим к рис. 90,*б*: благодаря множителю $e^{i\varphi}$ волна приобретает на одном витке дополнительную фазу 2π, которая за счет множителя e^{ihz} уменьшается до π.

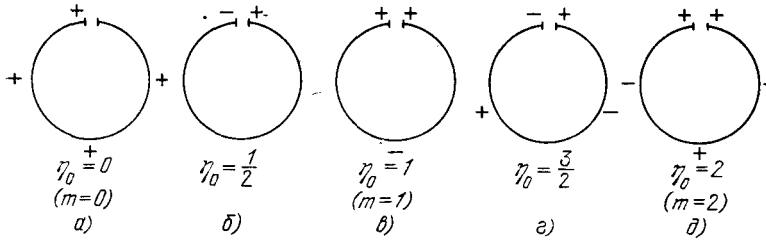


Рис. 90. Распределение тока на спиральном проводе

Данное рассуждение показывает, что волны с различными азимутальными индексами m могут непрерывно переходить друг от друга при изменении частоты. Эти переходы обусловлены структурой спирального волновода, которая в граничных условиях (68.02) никак не учитывается.

Из сравнения рис. 87 и 88,*б* видно, что при условиях (71.06) дисперсионная кривая симметричной волны смыкается с дисперсионной кривой одной из левовинтовых волн с азимутальным индексом $m=1$; это смыкание происходит при распределении тока на проводе согласно рис. 90,*б*. Из сравнения рис. 88,*б* и 89,*б* можно сделать вывод, что при условиях

$$\varkappa \approx \frac{3}{2}\sin\vartheta, \quad \eta_0 \approx \frac{3}{2} \tag{71.07}$$

происходит превращение правовинтовой волны с азимутальным индексом $m=1$ в левовинтовую волну с индексом $m=2$. Соответствующее распределение тока на витке изображено на рис. 90,*г*. Такое распределение является промежуточным между рис. 90,*в* (1-й резонанс) и рис. 90,*д* (2-й резонанс). Чтобы получить рис. 90,*г* из рис. 90,*д*, нужно взять левовинтовую волну, отрицательная фазовая скорость которой уменьшала бы скорость вращения волны по азимуту.

Таким образом получается полная система дисперсионных кривых для волн в спиральном волноводе, изображенная на рис. 91. При

$$\varkappa \approx \left(m+\frac{1}{2}\right)\sin\vartheta, \quad \eta_0 \approx m+\frac{1}{2}, \quad \beta_0 \approx \sin\vartheta \tag{71.08}$$

происходит переход от m-го пространственного резонанса к $(m+1)$-му $(m=0, 1, 2, \ldots)$, причем волна тока, переходящая из одной формы в другую, бежит со скоростью c вдоль провода спирали. Непрерывный переход, т. е. плавное смыкание дисперсионных кривых, полученных с помощью совершенно различных формул, обусловлен именно этим обстоятельством. Математически так получается потому, что при значениях (71.08) формулы (69.09) и (70.09) приводят к значениям $\eta \approx \pm 1/2$, $x \approx 1/2$ из-за малости угла ϑ. По той же причине $x\operatorname{ctg}\vartheta$ оказывается большим, и тогда имеют место соотношения (70.15) и (70.18). Практически смыка-

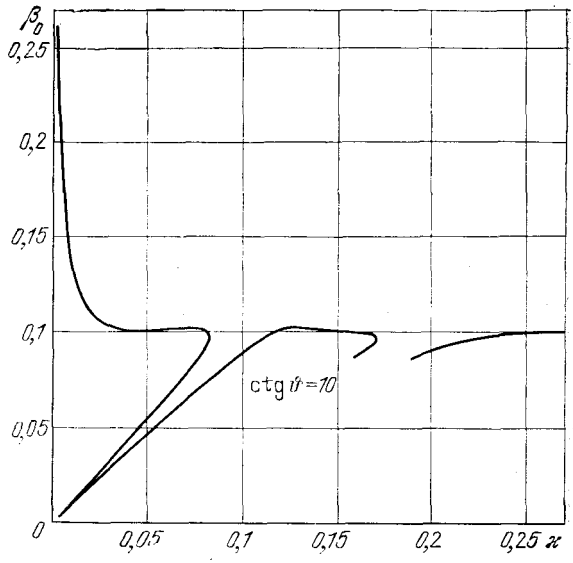


Рис. 91. Система волн спирального волновода

ние дисперсионных кривых происходит в интервале $0{,}4<x<0{,}6$, поэтому строить графики, подобные рис. 87—89, при $x>0{,}6$ не имеет смысла.

Сам пространственный резонанс номера m происходит при частотах, удовлетворяющих соотношениям

$$\varkappa \approx m \sin\vartheta \quad (m=1,\ 2,\ \ldots),\ \varkappa \ll \sin\vartheta \quad (m=0). \tag{71.09}$$

Фазовые скорости волн при резонансе могут принимать самые различные значения.

К сказанному необходимо добавить, что при заданном значении k волновые числа h_0 и h и коэффициенты замедления β_0 и β не могут принимать вполне произвольных значений. Действительно, вся развитая выше теория относилась к волнам поверхностного типа, у которых величина p в формулах § 69 и 70 должна быть вещественной, и, следовательно, должно быть $h^2>k^2$ и $\beta^2<1$, т. е. данная поверхностная волна может быть лишь волной замедленной. Этот результат очевиден как с точки зрения общих соображений § 58, так и из приведенных выше графиков для β. Условие $\beta^2<1$ можно переписать в виде

$$1/\beta^2 = h^2/k^2 = (1/\beta_0 - m/\varkappa)^2 > 1. \tag{71.10}$$

Противоположное условие

$$(1/\beta_0 - m/\varkappa)^2 \leqslant 1 \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{71.11}$$

дает так называемую m-ю запрещенную зону, в которой значения β_0 и $\varkappa$ для поверхностной волны находиться не могут. Граница m-й запрещенной зоны определяется уравнением

$$\beta_0 = 1/(m/\varkappa \pm 1) = \varkappa/(m \pm \varkappa), \tag{71.12}$$

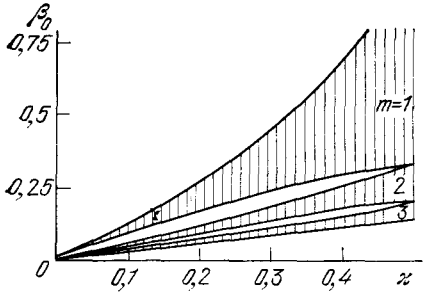


Рис. 92. Запрещение зоны спирального волновода

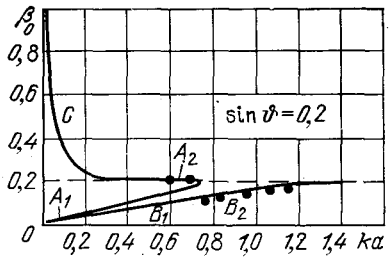


Рис. 93. Дисперсия волн в спирали и экспериментальные результаты

а сами зоны (при $m=1, 2, 3$) изображены на рис. 92 штриховкой; нулевая зона есть область, лежащая выше прямой $\beta_0=1$.

Наличие запрещенных зон тесно связано с явлением пространственного резонанса. Сложный характер дисперсионных кривых при частотах, соответствующих пространственному резонансу, обусловлен тем, что они не могут пересекать областей, заштрихованных на рис. 92, и поэтому вынуждены «сворачивать» при подходе к ним.

Спиральный волновод, как было указано в § 68, находит широкое применение в качестве замедляющей системы для лампы с бегущей волной. При этом используется симметричная волна, дисперсионная кривая которой изображена на рис. 87. Несимметричные волны с индексом $m=1$ находят применение в спиральных антеннах: такие волны дают направленное излучение с максимумом вдоль оси спирали, подобно волнам в диэлектрическом и ребристом стержнях (см. гл. XI и XII). В связи с этим были проделаны измерения фазовой скорости волны в зависимости от частоты: результаты измерений нанесены точками на рис. 93, а сплошными кривыми даны теоретические результаты. Рисунок 93 взят из статьи С. Х. Когана, впервые рассмотревшего волны в спирали с учетом ее периодической структуры. Оказывается, что на опыте не проявляются волны, соответствующие дисперсионным кривым A_1 и B_1, так что при росте частоты происходит как бы перескок с кривой A_2 на кривую B_2. Теоретически можно показать, что при обычных способах возбуждения эти волны имеют малые амплитуды (см. § 77).

§ 72. Бифилярная спираль

В § 62 и 65 были рассмотрены так называемые обратные волны, у которых фазовая и групповая скорости имеют различные знаки. В спиральном волноводе также имеется обратная волна: это — левовинтовая волна с азимутальным индексом $m=1$, при условиях (71.06) переходящая в симметричную волну; для нее $\eta^-<0$ (т. е. $h<0$), в то время как согласно рис. 88 $dh/d\omega=$

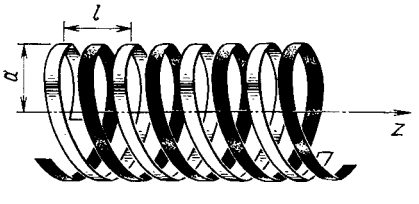


Рис. 94. Бифилярная спираль

$=dh_0/d\omega>0$, т. е. при положительной групповой скорости фазовая скорость отрицательна. Такая волна, перенося энергию в направлении $+z$, имеет фазовую скорость, направленную по $-z$, и наоборот.

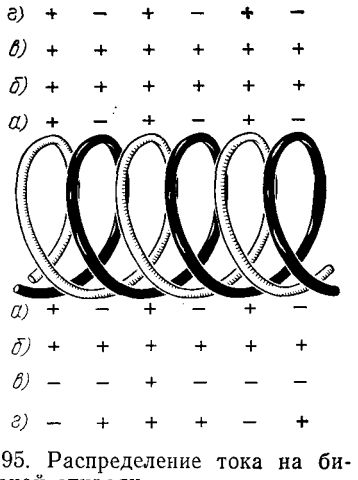


Рис. 95. Распределение тока на бифилярной спирали

Обратная волна более четко выражена в так называемой бифилярной спирали, к теории которой перейдем. Бифилярная спираль изображена на рис. 94; она получается, если между витками простой спирали (см. рис. 84) параллельно им поместить вторую такую же спираль. Бифилярная катушка является на низких частотах, как известно, практически безындукционным сопротивлением, если токи в проводах текут в противоположных направлениях, поскольку однородное магнитное поле в такой катушке отсутствует.

Электродинамическое исследование волн в бифилярной спирали можно произвести с помощью приближенных граничных условий § 68, и все сказанное в § 69 и 70 без каких-либо оговорок относится и к бифилярной спирали. При этом под l по-прежнему нужно понимать шаг каждой из простых спиралей, входящих в бифилярную, или пространственный период бифилярной структуры; расстояние между соседними витками (по оси z) будет теперь равно $l/2$.

При построении полной дисперсионной кривой для бифилярной спирали нужно различать волны двух различных типов: 1) синфазные волны, когда при данном z провода несут одинаковые токи; 2) противофазные волны, когда при данном z токи в проводах отличаются знаком.

Рассмотрим сначала синфазные поверхностные волны. При достаточно малых значениях $\varkappa$ поле этой волны является симметричным, так что следует воспользоваться результатами § 69. При условии $\varkappa\approx\sin\vartheta$, когда волна в простой спирали испытывает 1-й пространственный резонанс, для синфазной волны в бифилярной спирали резонанса нет, поскольку симметрия ее поля отличается от симметрии 1-й пространственной гармоники (рис. 95,*а*). Лишь при условии $\varkappa\approx 2\sin\vartheta$ волна приобретает несимметричную структуру, соответствующую сразу азимутальному индексу $m=2$ (рис.

95,*б*); смежные участки витков несут при этом одинаковые токи. Переход от индекса $m=0$ к индексу $m=2$ происходит при условии $\varkappa \approx \sin\vartheta$, когда токи в смежных витках отличаются знаком. Нетрудно показать, что синфазная волна испытывает только четные пространственные резонансы и ее дисперсионная кривая (рис. 96,*а*) проходит через нечетные запрещенные области, как бы не замечая их. Этот результат легко понять с точки зрения формул (71.03) и (71.04), поскольку в последних для синфазной волны суммирование производится лишь по четным индексам n.

Для волны с азимутальным индексом $m=1$ распределение тока в бифилярной спирали должно быть таким, как это изображено на рис. 95,*в*; эта волна непременно будет противофазной. Пространственный резонанс этой волны реализуется при условии $\varkappa \approx \approx \sin\vartheta$, и при малых значениях $\varkappa$ величина $\beta_0 \approx \sin\vartheta$, поскольку нулевого резонанса волна не имеет (см. рис. 96,*б*). Действительно, при малых $\varkappa$ распределение тока ни в коей мере не напоминает симметричную волну, как это видно из рис. 95,*г*, а физически соответствует противофазной волне, распространяющейся со ско-

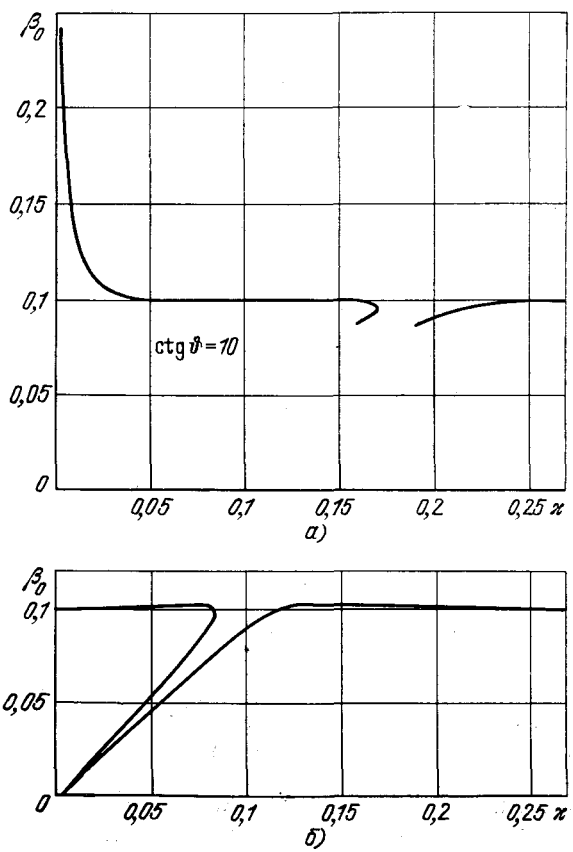


Рис. 96. Система волн бифилярной спирали:
а — синфазные волны; *б* — противофазные волны

ростью света в двойном проводе, изогнутом по винтовой линии. При еще более низких частотах поле противофазной волны в бифилярной спирали приближается к полю упомянутой выше безындукционной катушки подобно тому, как поле синфазной волны приближается к полю обычной катушки.

Данная волна является обратной в том смысле, как это было указано в начале параграфа, причем остается обратной в широком диапазоне от весьма низких частот до частоты 1-го резонанса, определяемого условием $\varkappa \approx \sin\vartheta$. В противоположность этому соответствующая волна простой спирали имела обратный характер при условии

$$\frac{1}{2}\sin\vartheta \lesssim \varkappa \lesssim \sin\vartheta,$$

поскольку при $\varkappa \approx \frac{1}{2}\sin\vartheta$ она переходила в симметричную волну, не являющуюся обратной. Точнее говоря, в полном выражении (71.04) для электромагнитного поля обратная пространственная гармоника ($n=-1$) имеется и при $\varkappa < 0{,}5\sin\vartheta$, однако она меньше основной (нулевой) гармоники.

Противофазная волна в бифилярной спирали не претерпевает также 2-го резонанса и всех четных резонансов и проходит через соответствующие запрещенные области (рис. 96,*б*). В частности, при условии $\varkappa \approx 2\sin\vartheta$ ее распределение тока еще грубо соответствует индексу $m=1$. В полном выражении (71.04) для поля противофазной волны присутствуют лишь нечетные индексы n.

Рисунок 96 получен тем же методом сопряжения, что и рис. 91 в § 71, но с учетом отмеченных особенностей волн обоих типов.

Изложенная в настоящей главе приближенная теория спирального волновода позволяет легко разобраться в его дисперсионных свойствах. Эта теория выделяет одну из пространственных гармоник, являющуюся главной и определяющую дисперсионные свойства в некотором диапазоне частот; кроме того, она позволяет указать следующую по величине пространственную гармонику, которая становится главной по другую сторону диапазона смыкания. Более точное исследование структуры поля нетрудно произвести, зная дисперсионные свойства спирали, а именно, вычисляя поля (71.04) по известному току (71.03), текущему по проводу.

Бифилярная спираль нашла применение в лампах с обратной волной. В статическом режиме при противоположно направленных токах бифилярная спираль создает вблизи своей оси поперечное магнитостатическое поле, направление которого периодически изменяется в зависимости от координаты z (задача 2). В таком магнитном поле электроны движутся по винтовой линии (с тем же шагом, что у спирали) и могут взаимодействовать с чисто поперечной электромагнитной волной.

Задачи к гл. XIII

1. Исследовать поле симметричной волны в спиральном волноводе при низких частотах, в частности при условии $ka \ll 1$.

Решение. По формулам (69.03) получаем

$$\Pi^e = p \sin\vartheta C K_0(pa) I_0(pr), \quad \Pi^m = ik \cos\vartheta C K_1(pa) I_0(pr) \text{ при } r < a$$

и по формулам (69.02) находим

$$H_r = -khp \cos\vartheta C K_1(pa) I_1(pr) e^{ihz},$$

$$H_\varphi = ikp^2 \sin\vartheta C K_0(pa) I_1(pr) e^{ihz},$$

$$H_z = -ikp^2 \cos\vartheta C K_1(pa) I_0(pr) e^{ihz}.$$

Отсюда, во-первых, видно, что составляющей H_φ можно пренебречь по сравнению с остальными двумя (из-за множителей $\sin\vartheta$ и $K_0(pa)$, и, во-вторых, следуют приближенные выражения

$$H_z = H_0 e^{ihz}, \quad H_r = -H_0 (ihr/2) e^{ihz},$$

где

$$H_0 = -ikp^2 \cos\vartheta C K_1(pa) \approx -ikp \cos\vartheta C/a. \qquad (a)$$

При выводе использованы приближенные формулы (58.13) и (58.15). При низких частотах $h \approx k$ и если выполняется добавочное условие $ka \ll 1$, т. е. окружность спирали мала по сравнению с длиной волны, то по формулам (a) получается однородное магнитное поле, как в обычной катушке индуктивности.

2. Исходя из формул (69.01), (69.02) и (70.01), исследовать поле противофазной волны в бифилярной спирали при $m=1$, $r<a$ и $k \to 0$, полагая $h = -2\pi/l$, т. е. рассматривая поле с той же периодичностью, что и сама спираль.

Решение. При $r<a$ формулы (70.01) дают

$$\Pi^e = A I_1(pr) K_1(pa) e^{i\varphi}, \quad \Pi^m = B I_1(pr) K'_1(pa) e^{i\varphi},$$

где A и B выражаются через третью константу C так:

$$A = -k^2 C \sin\vartheta, \quad B = -ikh C \cos\vartheta,$$

а $p \to -h = 2\pi/l$ и $A/B \to 0$ при $k \to 0$. Пренебрегая в формулах (69.02) функцией Π^e и полагая $p^2 B K'_1(pa) = 2H_0$, получаем

$$H_r = -i H_0 [I_0(pr) + I_2(pr)] e^{i(\varphi - pz)}, \quad H_\varphi = H_0 [I_0(pr) - I_2(pr)] e^{i(\varphi - pz)},$$

$$H_z = -2H_0 I_1(pr) e^{i(\varphi - pz)}, \quad p = 2\pi/l,$$

где использованы формулы (см. § 70)

$$I'_1(y) = [I_0(y) + I_2(y)]/2, \quad I_1(y)/y = [I_0(y) - I_2(y)]/2.$$

Согласно § 2 физический смысл при $\omega = 0$ имеет вещественная часть комплексного вектора $\mathbf{H}$. Поэтому окончательные выражения для составляющих магнитного поля принимают вид (считаем $H_0 > 0$)

$$H_r = H_0 [I_0(pr) + I_2(pr)] \sin(\varphi - pz), \quad H_\varphi = H_0 [I_0(pr) - I_2(pr)] \cos(\varphi - pz),$$

$$H_z = -2H_0 I_1(pr) \cos(\varphi - pz).$$

При $pr \ll 1$, т. е. вблизи оси, справедливы более простые выражения

$$H_r = H_0 \sin(\varphi - pz), \quad H_\varphi = H_0 \cos(\varphi - pz)$$

или

$$H_x = -H_0 \sin pz,\ H_y = H_0 \cos pz,$$

откуда следует физический смысл постоянной H_0: это — амплитуда поперечного магнитного поля на оси спирали.

Полученное магнитостатическое поле можно трактовать как магнитную волну нулевой частоты.

3. Пользуясь тождеством (69.06) и формулами (70.01) и (69.02), связать величину H_0 в предыдущей задаче с током в бифилярной спирали. Показать, что $H_0 \to 0$ при $\vartheta \to 0$, и выяснить физический смысл этого соотношения.

Р е ш е н и е. При $r > a$ вторая формула (70.01) дает

$$\Pi^m(r,\ \varphi) = BI'_1(pa)\,K_1(pr)\,e^{i\varphi},$$

поэтому

$$\Pi^m(a+0,\ \varphi) - \Pi^m(a-0,\ \varphi) = (B/pa)\,e^{i\varphi}$$

и согласно формулам (69.02)

$$H_\varphi^{(2)} - H_\varphi^{(1)} = (B/a^2)\,e^{i(\varphi - pz)}, \quad H_z^{(2)} - H_z^{(1)} = -(pB/a)\,e^{i(\varphi - pz)}.$$

Согласно формуле (4.02) поверхностная плотность тока, соответствующая этим скачкам магнитного поля, имеет составляющие

$$i_z = (cB/4\pi a^2)\,e^{i(\varphi - pz)}, \quad i_\varphi = (cpB/4\pi a)\,e^{i(\varphi - pz)},$$

которые после перехода к вещественным величинам принимают вид

$$i_z = i_0 \sin\vartheta \cos(\varphi - pz),\ i_\varphi = i_0 \cos\vartheta \cos(\varphi - pz),$$

где

$$i_0 = \frac{cH_0}{2\pi} \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta\, K'_1(\operatorname{ctg}\vartheta)} \quad \left(\operatorname{ctg}\vartheta = pa = \frac{2\pi a}{l}\right).$$

При $pa \to \infty$ произведение $pa\,K'_1(pa)$ стремится к нулю пропорционально $\sqrt{pa}e^{-pa}$ и, следовательно, магнитное поле на оси при данной плотности тока i_0 экспоненциально убывает. Отсюда видно, что поле, создаваемое бифилярной спиралью, имеет поверхностный характер и при $\vartheta \to 0$ (т. е. при $l/a \to 0$) сосредоточивается вблизи поверхности $r = a$: возвращаемся к бифилярной катушке с исчезающе малым магнитным полем. Плотность тока i_0 связана с током J в каждом из спиральных проводов соотношением $i_0 = 4J/l$.

Глава XIV.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАДАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

§ 73. Лемма Лоренца и теорема взаимности для электрических диполей

Лемма Лоренца есть вспомогательное математическое соотношение, связывающее комплексные амплитуды двух электромаг-

нитных полей. Пусть поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ возбуждается сторонними токами $\mathbf{j}^e_1$ и $\mathbf{j}^m_1$ и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = i k \mu \mathbf{H}_1 - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = -i k \varepsilon \mathbf{E}_1 + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e_1, \tag{73.01}$$

а поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ возбуждается сторонними токами $\mathbf{j}^e_2$ и $\mathbf{j}^m_2$ и, следовательно, удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_2 = i k \mu \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m_2, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_2 = -i k \varepsilon \mathbf{E}_2 + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e_2. \tag{73.02}$$

Оба электромагнитных процесса имеют одну и ту же частоту $\omega = ck$ и происходят в одном и том же пространстве, комплексные проницаемости которого ε и μ, вообще говоря, меняются от точки к точке.

Умножим первое уравнение (73.01) скалярно на $\mathbf{H}_2$, а второе уравнение (73.02) — на $-\mathbf{E}_1$ и сложим

$$\mathbf{H}_2 \operatorname{rot}\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \operatorname{rot}\mathbf{H}_2 = i k (\varepsilon \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2) - \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^e_2 \mathbf{E}_1 + \mathbf{j}^m_1 \mathbf{H}_2);$$

аналогично получаем второе тождество

$$\mathbf{H}_1 \operatorname{rot}\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2 \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = i k (\varepsilon \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 + \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2) - \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}^e_1 \mathbf{E}_2 + \mathbf{j}^m_2 \mathbf{H}_1\right).$$

Вычитая это тождество из первого и пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B},$$

получаем соотношение

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}_2] - \operatorname{div}[\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^e_1 \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}^e_2 \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}^m_1 \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}^m_2 \mathbf{H}_1), \tag{73.03}$$

представляющее собой лемму Лоренца в дифференциальной форме. Интегрируя по произвольному объему V и пользуясь теоремой Гаусса — Остроградского, получаем лемму Лоренца в наиболее общем виде

$$\oint_S \{[\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_1]\}\,\mathbf{n}\,dS = \frac{4\pi}{c}\int_V (\mathbf{j}^e_1 \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}^e_2 \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}^m_1 \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}^m_2 \mathbf{H}_1)\,dV, \tag{73.04}$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V, $\mathbf{n}$ — ее внешняя нормаль (см. рис. 1).

Частная формулировка леммы Лоренца получается, если в качестве объема V возьмем все бесконечное пространство, т. е. будем считать S бесконечно большой сферой. Принимая, как при доказательстве теоремы единственности в § 10, что все источники — электрические и магнитные токи — находятся в конечной области пространства, и считая, что на сфере S выполняются условия (10.06), получаем в левой части формулы (73.04) исчезающий интеграл. Поэтому лемма Лоренца для безграничного прост-

ранства, имеющего в каждой точке некоторые потери, принимает вид

$$\int (\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1 - \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2 + \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1)\, dV = 0. \tag{73.05}$$

В пределе это соотношение справедливо и для пространства без потерь.

Выведенная выше лемма Лоренца имеет многообразные применения. В этом параграфе ограничимся тем, что с ее помощью докажем теорему взаимности для элементарных электрических диполей.

Пусть имеются только сторонние электрические точки с плотностями $\mathbf{j}^e_1$ и $\mathbf{j}^e_2$, а сторонние магнитные токи отсутствуют. Тогда формула (73.05) упрощается следующим образом:

$$\int (\mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1)\, dV = 0. \tag{73.06}$$

Как известно, момент электрического диполя определяется с помощью соотношения $\mathbf{p} = e\mathbf{l}$, где $\mathbf{l}$ есть векторное расстояние между зарядами $-e$ и e. Колеблющемуся электрическому диполю соответствует переменный ток J, проходящий по отрезку $\mathbf{l}$ и равный $J = de/dt$ или $J = -i\omega e$. Отсюда видно, что $J\mathbf{l} = -i\omega\mathbf{p}$. К элементарному диполю переходим, полагая $\mathbf{l} \to 0$ и $e \to \infty$ так, что величины $\mathbf{p}$ и $J\mathbf{l}$ остаются постоянными. Плотность тока $\mathbf{j}^e$, соответствующая элементарному диполю, равна, очевидно, нулю всюду, за исключением точки, где расположен диполь. В этой точке плотность тока $\mathbf{j}^e$ бесконечна, причем интеграл по объему V_0, внутри которого находится эта точка, имеет конечное значение

$$\int \mathbf{j}^e\, dV = J\mathbf{l} = -i\omega\mathbf{p}. \tag{73.07}$$

Пусть теперь поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ возбуждено диполем $\mathbf{p}_1$, находящимся в точке *1*, а поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — диполем $\mathbf{p}_2$, расположенным в точке *2*. Применим к этим полям лемму Лоренца в простейшей форме (73.06). Так как функции $\mathbf{j}^e_1$ и $\mathbf{j}^e_2$ обращаются в нуль всюду, за исключением точек *1* и *2* соответственно, то

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2\, dV = \mathbf{E}_2(1) \int \mathbf{j}_1^e\, dV = -i\omega \mathbf{p}_1 \mathbf{E}_2(1), \\ &\int \mathbf{j}_2^e \mathbf{E}_1\, dV = \mathbf{E}_1(2) \int \mathbf{j}_2^e\, dV = -i\omega \mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2), \end{aligned} \tag{73.08}$$

откуда

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{E}_2(1) = \mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2), \tag{73.09}$$

где через $\mathbf{E}_2(1)$ обозначено значение электрического поля $\mathbf{E}_2$ в точке *1*, где расположен диполь $\mathbf{p}_1$, а $\mathbf{E}_1(2)$ есть значение поля $\mathbf{E}_1$ в точке *2*, где находится второй диполь $\mathbf{p}_2$.

Если воспользоваться трехмерными δ-функциями, то плотности тока, соответствующие элементарным диполям $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, можно записать в виде

$$\mathbf{j}_1^e = -i\omega \mathbf{p}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{j}_2^e = -i\omega \mathbf{p}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \tag{73.10}$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы точек *1* и *2* соответственно, $\mathbf{r}$ — текущий радиус-вектор с компонентами x, y, z. Пользуясь формулой (73.06) и известным свойством δ-функции, опять приходим к формуле (73.09).

Соотношение (73.09) есть теорема взаимности для элементарных электрических диполей. Если взять для простоты моменты $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ по абсолютной величине равными единице, то левая часть соотношения (73.09) будет равна электрическому полю диполя $\mathbf{p}_2$, действующему на диполь $\mathbf{p}_1$, а правая часть — электрическому полю диполя $\mathbf{p}_1$, действующему на диполь $\mathbf{p}_2$. При этом называем, например, проекцию вектора $\mathbf{E}_2(1)$ на направление вектора $\mathbf{p}_1$ полем, действующим на этот диполь, так как именно эта составляющая поля воздействует на диполь $\mathbf{p}_1$, возбуждая ток в соответствующем отрезке проводника 1. Поэтому теорему взаимности (73.09) можно сформулировать более кратко следующим образом: при равенстве абсолютных величин дипольных моментов, действие диполя 2 на диполь 1 равно действию диполя 1 на диполь 2.

Приведем простой пример применения доказанной теоремы взаимности. Пусть диполь $\mathbf{p}_1$ расположен в точке *1* вблизи земли (рис. 97), и нужно найти создаваемое им поле на большой высоте в точке *2*, в которой находится приемная антенна самолетной радиоустановки. Полное вычисление электромагнитного поля антенны, расположенной у земной поверхности, является довольно сложной задачей. Однако требуемое поле в точке *2* легко найти, не решая этой задачи, а именно поставим в точке *2* вспомогательный излучающий диполь $\mathbf{p}_2$; так как он находится на большом расстоянии от точки *1*, то излучаемую им сферическую волну можно в окрестности точки *1* считать плоской, а электромагнитное поле, возникающее при падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред, хорошо известно (см., например, § 15). По известному полю $\mathbf{E}_2(1)$ легко определяется с помощью теоремы взаимности (73.09) искомое поле $\mathbf{E}_1(2)$.

В связи с этим примером можно сказать, что в интересующей нас задаче в точке *1* находится передающая антенна, а в точке *2* — приемная. Вместо этого решается вспомогательная задача, в которой в точке *2* расположена передающая антенна, а в точке *1* — приемная, и применяется соотношение (73.09). С помощью леммы Лоренца можно обобщить теорему взаимности таким образом, чтобы она относилась не только к идеализированным антеннам — элементарным диполям, но и к реальным антеннам и антенным системам. Не останавливаясь на формулировке теорем взаимности в более общих случаях, отметим лишь, что эти теоремы связывают свойства данной приемной антенны со свойствами той же

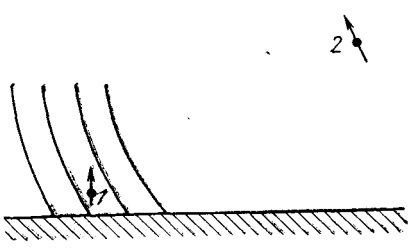


Рис. 97. К теореме взаимности

антенны при работе на передачу. В частности, оказывается, что диаграммы направленности любой антенны при работе на прием и на передачу совпадают.

§ 74. Магнитные диполи и теоремы взаимности для них

Обобщим соотношения (73.09) на случай, когда поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ создаются не электрическими, а магнитными диполями, расположенными в точках *1* и *2* и имеющими моменты $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ соответственно. Магнитный диполь формально определяется с помощью магнитного тока, плотность которого $\mathbf{j}^m$ равна нулю всюду, за исключением одной точки. Интеграл по окрестности V_0 этой точки связан с моментом магнитного диполя $\mathbf{m}$ соотношением

$$\int \mathbf{j}^m dV = -i\omega \mathbf{m}. \tag{74.01}$$

Используя лемму Лоренца в форме (73.05) и учитывая, что электрические сторонние токи отсутствуют, а интегралы от магнитных сторонних токов преобразуются к виду

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{j}_1^m \mathbf{H}_2\, dV = \mathbf{H}_2(1) \int \mathbf{j}_1^m\, dV = -i\omega \mathbf{m}_1 H_2(1), \\ &\int \mathbf{j}_2^m \mathbf{H}_1\, dV = \mathbf{H}_1(2) \int \mathbf{j}_2^m\, dV = -i\omega \mathbf{m}_2 \mathbf{H}_1(2), \end{aligned} \tag{74.02}$$

приходим к соотношению

$$\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_2(1) = \mathbf{m}_2 \mathbf{H}_1(2), \tag{74.03}$$

являющемуся теоремой взаимности для двух магнитных диполей. Плотности магнитных токов, соответствующих элементарным диполям, можно с помощью трехмерных δ-функций записать следующим образом:

$$\mathbf{j}_1^m = -i\omega \mathbf{m}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{j}_2^m = -i\omega \mathbf{m}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \tag{74.04}$$

откуда также выводится соотношение (74.03).

Рассмотрим, наконец, теорему взаимности для двух диполей различных типов — магнитного диполя $\mathbf{m}_1$, находящегося в точке *1* и возбуждающего поле $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$, и электрического диполя $\mathbf{p}_2$, находящегося в точке *2* и возбуждающего поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Соответствующие плотности тока имеют вид

$$\mathbf{j}_1^e = \mathbf{j}_2^m = 0, \quad \mathbf{j}_1^m = -i\omega \mathbf{m}_1 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{j}_2^e = -i\omega \mathbf{p}_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \tag{74.05}$$

Подставляя эти выражения в соотношение (73.05), получаем новую теорему взаимности

$$\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_2(1) = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2). \tag{74.06}$$

Выведенные в этом параграфе теоремы взаимности имеют пока формальный характер, поскольку физический смысл понятий «магнитный ток» и «магнитный диполь» неясен. Как уже отмечалось в конце § 3, магнитные токи в природе не существуют и вводятся по аналогии с электрическими токами для облегчения математической трактовки полей.

Покажем, что если сторонний электрический ток J^e течет по бесконечно малому замкнутому контуру C, то такая система в отношении создаваемого ею электромагнитного поля полностью эквивалентна магнитному диполю с моментом

$$\mathbf{m} = (\mu/c) J^e \mathbf{S}, \tag{74.07}$$

где μ — комплексная магнитная проницаемость среды в месте расположения контура C; а $\mathbf{S}$ есть векторная площадь, ограниченная этим контуром:

$$\mathbf{S} = \int \mathbf{n}\, dS. \tag{74.08}$$

В этой формуле интегрирование производится по любой поверхности, натянутой на контур C, а нормаль $\mathbf{n}$ связана с направлением положительного обхода контура C правилом правого винта.

Соотношениями (74.07) и (74.08) широко пользуются в магнитостатике, где магнитные диполи и магнитные заряды также вводят чисто формально, заменяя ими реально существующие замкнутые электрические токи. С помощью леммы Лоренца эти соотношения легко обосновать для электродинамических полей. Для этого возьмем в качестве источника поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ сторонний электрический ток J^e, текущий по бесконечно малому контуру C, расположенному в точке *1*. Источником поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ по-прежнему будем считать электрический диполь $\mathbf{p}_2$ в точке *2*. Применяя к этим двум полям соотношение (73.05), будем иметь

$$\int \mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2\, dV = J^e \oint \mathbf{E}_2\, d\mathbf{s} = J^e \int \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n} dS, \tag{74.09}$$

так как для линейного тока, текущего по контуру C,

$$\mathbf{j}_1^e\, dV = J^e\, d\mathbf{s},$$

где $d\mathbf{s}$ — элемент дуги этого контура. В силу уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_2 = ik\mu \mathbf{H}_2 \quad (\mathbf{j}_2^m \equiv 0)$$

выражение (74.09) принимает вид

$$\int \mathbf{j}_1^e \mathbf{E}_2\, dV = \mathrm{i}\, k J^e \int \mu \mathbf{H}_2 \mathbf{n} d S = \mathrm{i}\, k\, \mu(1) J^e \mathbf{H}_2(1) \int \mathbf{n}\, dS =$$

$$= \mathrm{i}\, k\, \mu(1) J^e \mathbf{S} \mathbf{H}_2(1). \tag{74.10}$$

Здесь учтено, что контур C бесконечно мал, благодаря чему магнитное поле $\mathbf{H}_2$ и комплексную магнитную проницаемость μ можно вынести за знак интеграла и воспользоваться формулой (74.08). Остальные интегралы в формуле (73.05) вычисляются без труда, и лемма Лоренца (73.05) приводит к соотношению

$$(\mu(1)/c) J^e \mathbf{S} \mathbf{H}_2(1) = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2). \tag{74.11}$$

Сравним теперь соотношения (74.06) и (74.11), для чего возьмем поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ и диполь $\mathbf{p}_2$ в обоих случаях одинаковыми. Для того чтобы получить то же самое электрическое поле $\mathbf{E}_1$ в точке *2* в обоих задачах, достаточно взять момент магнитного диполя $\mathbf{m}_1 = (\mu(1)/c) J^e \mathbf{S}$. Вектор $\mathbf{p}_2$ и точка *2* могут быть выбраны произвольным образом. Тем самым доказано, что электрическое поле

замкнутого электрического тока и элементарного магнитного диполя совпадают, если момент магнитного диполя определить формулой (74.07). Из уравнений электромагнитного поля вытекает, что магнитное поле обеих систем также совпадает всюду, за исключением точки, где находится сам диполь или контур с током.

Так как конечный замкнутый контур, обтекаемый током J^e, может быть разложен с помощью известного приема (рис. 98,*а*) на совокупность элементарных контуров с током, а каждый такой элементарный ток можно заменить элементарным магнитным диполем (рис. 98,*б*), то окончательно контур с током оказывается эквивалентным двойному магнитному слою или магнитному листку (рис. 98,*в*). Катушка (рис. 98,*г*), состоящая из многих витков — контуров с постоянным током, — может быть заменена пачкой магнитных листков (рис. 98,*д*). Поскольку противоположные магнитные заряды на соприкасающихся поверхностях магнитных листков взаимно уничтожаются, то такая пачка эквивалентна стержню с магнитными зарядами на концах (рис. 98,*е*), т. е. постоянному магниту. Таким путем доказывается эквивалентность катушки с током и постоянного магнита, рассматриваемого как совокупность магнитных зарядов. Из магнитостатики известно, что эта эквивалентность имеет место лишь для внешних точек пространства, а внутри магнита напряженность его магнитного поля **H** противоположна напряженности магнитного поля в катушке.

Доказанное выше положение вскрывает смысл магнитных токов и магнитных диполей. В частности, соотношение (74.03) можно характеризовать как теорему взаимности для двух рамочных антенн, выполненных в виде малых замкнутых контуров с током, а соотношение (74.06) есть теорема взаимности для элементар-

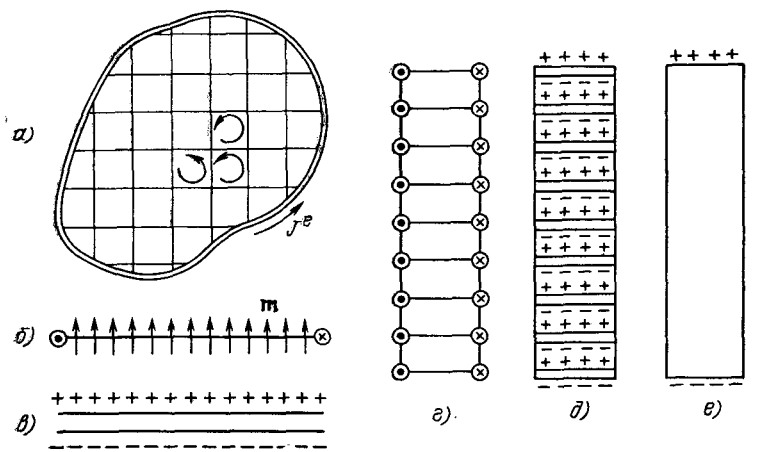


Рис. 98. Токи и магнитные заряды:

а — контур с электрическим током; *б* — эквивалентные ему диполи; *в* — эквивалентный двойной слой; *г* — катушка с электрическим током; *д* — двойные слои, эквивалентные каждому витку катушки; *е* — магнитные заряды, эквивалентные всей катушке

ной рамки и элементарного электрического диполя — вибратора Герца.

Магнитным токам можно придать другой смысл. Поверхностные электрические и магнитные токи вводятся по формулам (4.03) всякий раз, когда рассматриваемое электромагнитное поле претерпевает разрыв на некоторой поверхности S. Так, если электромагнитное поле принимает значения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ на стороне *1* поверхности S и равно нулю на стороне *2* этой поверхности, то формулы (4.03) принимают вид

$$[\mathbf{nH}] = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}^{e}, \quad [\mathbf{nE}] = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}^{m}. \tag{74.12}$$

Таким образом, данному разрывному полю соответствуют электрические и магнитные поверхностные токи. Это обстоятельство будет использовано в гл. XVII при выводе принципа Гюйгенса для электромагнитного поля. Формулы (74.12) остаются в силе, если S есть поверхность идеального проводника. Тогда в силу граничного условия (24.03) поверхностные магнитные токи на S отсутствуют, а первое соотношение (74.12) переходит в формулу (24.04).

В электродинамике рассматривают задачи об излучении из отверстий и щелей, прорезанных в металлических поверхностях, которые считают идеально проводящими. Часто тангенциальное электрическое поле на отверстии или на щели можно считать известным, а на металлической поверхности оно равно нулю. Если в лемме (73.04) сначала задать на идеально проводящей поверхности S_0 (части поверхности S) тангенциальное поле $[\mathbf{nE}_1]$, а потом плотность поверхностного тока $\mathbf{i}^{m_1}$ (предельный случай плотности $\mathbf{j}^{m_1}$), а поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ брать одним и тем же, то придем к соотношению

$$[\mathbf{nE}] = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}^{m}, \tag{74.13}$$

совпадающему со вторым соотношением (74.12). При выводе предполагается, что отверстие или щель как бы заметаллизированы, т. е. имеется сплошная идеально проводящая поверхность S_0 без вырезов, которой и соответствует вспомогательное поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$. Условие $E_t \neq 0$ на S_0 реализуется потому, что неявно вводится стороннее поле $\mathbf{E}^e$ (см. § 3), входящее в граничные условия

$$E_t + E_t^e = 0 \text{ и } [\mathbf{nE}^e] = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{i}^{m}. \tag{74.14}$$

В § 36 под $\mathscr{E}$ понимался интеграл $\int E^e_z dz$ по разрезу вибратора.

Решив задачу о возбуждении электромагнитного поля токами $\mathbf{j}^m$ в пространстве, ограниченном сплошной идеально проводящей поверхностью S_0, получаем в пределе решение задачи с граничным условием (74.13), если объемный ток с плотностью $\mathbf{j}^m$ превратить в поверхностный ток и перенести последний на поверхность

S. Как исходная задача о заданном тангенциальном поле $[\mathbf{nE}]$ на поверхности S, так и вспомогательная задача о токах $\mathbf{j}^m$ вблизи идеально проводящей поверхности S имеют согласно § 10 единственное решение. Поскольку внутри идеального проводника $\mathbf{E}=0$ в месте, где на поверхности S находится отверстие, действительно получаем заданное поле $[\mathbf{nE}]$, входящее в формулу (74.13).

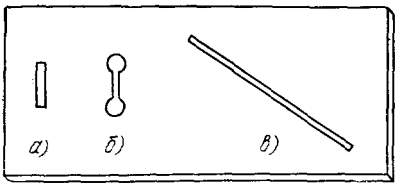


Рис. 99. Щели

Таким путем можно, в частности, решить задачу о возбуждении электромагнитного поля в волноводе щелями и другими отверстиями, прорезанными в его стенках (см. конец § 76).

Соотношение (74.13) позволяет отождествить короткую (рис. 99,*а*) или гантельную (рис. 99,*б*) щели, прорезанные в металлической поверхности, с элементарным магнитным диполем, полуволновую щель (рис. 99,*в*) — с полуволновым магнитным вибратором и т. д. Поэтому формулу (74.03) можно также интерпретировать как теорему взаимности для двух элементарных щелей такого же вида, как на рис. 99,*а* и *б*.

Заметим, что электрический ток в тонком проводнике течет вдоль этого проводника, а поперечными токами в таком проводнике можно обычно пренебречь. Аналогично этому «магнитный ток» течет вдоль узких щелей, а соответствующее ему по формуле (74.13) электрическое поле на щели направлено поперек щели. Это поле возникает обычно вследствие того, что щель перерезает линии электрического тока на металлической поверхности, и ток продолжается в виде тока смещения, соединяющего края щели по кратчайшему расстоянию.

§ 75. Ортогональность волн в волноводе

На протяжении всей книги рассматривались волны в линиях передачи (ср. гл. V, VII, XII) как решения однородных уравнений электродинамики. Иначе говоря, распространение электромагнитных волн исследовалось в таких системах как бы в отрыве от источников этих волн. Таким путем изучены свойства волн, могущих существовать в данной системе. Для практики важно, однако, знать, какое электромагнитное поле создается в данной системе под воздействием источника поля, с какими амплитудами возбуждаются различные волны и т. д.

Поэтому нельзя ограничиваться исследованием свободных или собственных колебаний (волн) в данной системе, удовлетворяющих однородным уравнениям поля (без источников)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'=\mathrm{i}k\mu\mathbf{H}',\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}'=-\mathrm{i}k\varepsilon\mathbf{E}'. \tag{75.01}$$

Необходимо исследовать также вынужденные электромагнитные колебания данной системы под действием источников поля. За-

давая эти источники в виде сторонних электрических и магнитных токов с плотностями $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$, следует решать неоднородные уравнения электромагнитного поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i k \mu \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i k \varepsilon \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e. \tag{75.02}$$

Оказывается, что задача о вынужденных колебаниях легко решается, если более простая задача о свободных колебаниях решена полностью и известна полная система решений однородных уравнений (75.01).

Рассмотрим электромагнитное поле в волноводе, понимая под волноводом любую передающую линию, электромагнитное поле которой занимает в каждом поперечном сечении $z=\text{const}$ конечную площадь (ось z направлена вдоль линии передачи). Например, если волновод образован идеально проводящей стенкой, то на ее внутренней поверхности S_0 имеет место граничное условие

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}] = 0 \text{ на } S_0 \tag{75.03}$$

и все электромагнитное поле заключено внутри S_0. Если учитывать конечную проводимость стенки волновода, то на поверхности стенки S_0 нужно ставить граничное условие Леонтовича

$$[\mathbf{n}\mathbf{E}] = -\zeta[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{H}]] \text{ на } S_0, \tag{75.04}$$

и электромагнитное поле слегка просачивается за пределы поверхности S_0 на расстояния порядка толщины скин-слоя d. Здесь ζ есть комплексный волновой импеданс металлической стенки; $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S_0, направленная внутрь металла [см. формулу (25.04)].

В случае металлической стенки можно выбрать цилиндрическую поверхность S_0 иначе, а именно, проводя S_0 внутри стенки на глубине, значительно превышающей толщину скин-слоя, получим приближенное условие

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \text{ на } S_0, \tag{75.05}$$

выражающее тот факт, что все электромагнитное поле заключено внутри S_0. Таким образом, условия (75.03)—(75.05) фиксируют то обстоятельство, что рассматривается линия закрытого типа, например обычный волновод или коаксиальная линия.

Будем считать волновод бесконечным и однородным по оси z, так что проницаемости ε и μ суть функции x и y, не зависящие от z (это относится как к веществам, заполняющим волновод, так и к материалу стенок). Тогда частные решения уравнений (75.01) имеют зависимость от координаты z в виде e^{ihz}. Такие решения являются собственными волнами рассматриваемой системы. Предположим также, что подобно обычному волноводу рассматриваемый волновод (в более широком смысле этого слова) имеет дискретный спектр собственных волн. Иначе говоря, все волны в данном волноводе могут быть объединены в одну последовательность таким образом, что волна с номером s имеет поле E_s, H_s и волно-

вое число h_s, т. е. зависит от z посредством множителя $e^{ih_s z}$. Положительные индексы s ($s=1, 2, \ldots$) имеют волны, распространяющиеся в направлении положительной оси z, точнее, имеющие $\operatorname{Im} h_s > 0$. Во избежание сомнений будем считать (как при доказательстве теоремы единственности в § 10), что волновод имеет потери, так что незатухающие волны, для которых $\operatorname{Im} h_s = 0$, в нем существовать не могут. Отрицательным индексом $-s$ ($s>0$) обозначаем такую же волну, что и с номером s, но распространяющуюся в противоположном направлении; ее волновое число $h_{-s} = -h_s$.

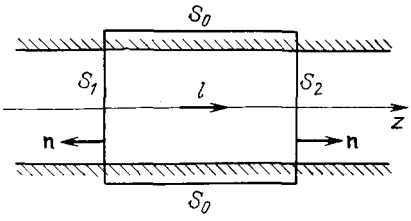


Рис. 100. Поверхность S в формуле (75.07)

Общее решение уравнений (75.01) по предположению имеет вид

$$\mathbf{E}' = \sum (C_s \mathbf{E}_s + C_{-s} \mathbf{E}_{-s}), \quad \mathbf{H}' = \sum (C_s \mathbf{H}_s + C_{-s} \mathbf{H}_{-s}), \tag{75.06}$$

где C_s и C_{-s} — произвольные постоянные, а суммирование производится по всем положительным индексам s.

Отметим, что индекс s можно рассматривать как краткую запись группы других индексов. Так, например, в волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением индекс s или $-s$ заменяет обычные символы E_{mn} или H_{mn} и указание направления распространения волны.

Собственные волны любой линии передачи обладают весьма важным свойством ортогональности, которое легче всего вывести из леммы Лоренца в ее общей формулировке (73.04). Для этого возьмем в качестве поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ поле какой-нибудь волны с индексом s, а в качестве поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ — поле другой волны с индексом s'. Эти поля не имеют источников, поэтому

$$\oint_S \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{n}\, dS = 0. \tag{75.07}$$

Если взять поверхность S в виде двух поперечных сечений волновода S_1 и S_2 и заключенной между ними части поверхности S_0 (рис. 100), то интеграл по S_0 обращается в нуль согласно условиям (75.03), (75.04) или (75.05), наложенных на поля обеих волн с индексами s и s'.

В самом деле,

$$\{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{n} = [\mathbf{n}\, \mathbf{E}_s]\, \mathbf{H}_{s'} - [\mathbf{n}\, \mathbf{E}_{s'}]\, \mathbf{H}_s,$$

так что при граничном условии (75.03) подынтегральная функция в формуле (75.07) обращается в нуль на S_0. То же будет и при граничном условии (75.04), поскольку

$$\{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\} \mathbf{n} = -\zeta \{[\mathbf{n}\, [\mathbf{n}\mathbf{H}_s]]\, \mathbf{H}_{s'} - [\mathbf{n}\, [\mathbf{n}\mathbf{H}_s]] \mathbf{H}_s\} =$$
$$= \zeta \{[\mathbf{n}\mathbf{H}_s]\, [\mathbf{n}\mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{n}\mathbf{H}_s]\, [\mathbf{n}\mathbf{H}_{s'}]\} = 0.$$

При граничном условии (75.05) подынтегральная функция (75.07) также равна нулю на поверхности S_0.

На поверхности S_2 имеем $\mathbf{n}=\mathbf{l}$, а на поверхности S_1 вектор $\mathbf{n}$ направлен в противоположную сторону и $\mathbf{n}=-\mathbf{l}$; через $\mathbf{l}$ обозначен единичный вектор в направлении оси z. Поэтому соотношение (75.07) приводит к выводу, что интеграл

$$J_{s,s'}=\int\limits_{S_\perp}\{[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}_s]\}\mathbf{l}\,dS, \tag{75.08}$$

взятый по любому поперечному сечению $S_\perp$ (при $z=\text{const}$), не зависит от z, так как этот интеграл для любых двух сечений S_1 и S_2 имеет одно и то же значение.

Однако поле $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ пропорционально $e^{ih_{s'}z}$, а поле $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$ пропорционально $e^{ih_{s'}z}$. Поэтому

$$J_{s,\,s'}(z)=J_{s,\,s'}(0)\,e^{i(h_s+h_{s'})z}, \tag{75.09}$$

откуда вытекает, что либо $J_{s,s'}=0$, либо $h_{s'}=-h_s$.

При отсутствии вырождения, когда каждому волновому числу h_s соответствует только одна волна, условие $h_{s'}=-h_s$ может иметь место только при $s'=-s$. Поэтому получается соотношение

$$J_{s,s'}=\int\limits_{S_\perp}\{[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}_s]\}\mathbf{l}\,dS=0\quad\text{при } s'\neq -s, \tag{75.10}$$

являющееся условием ортогональности собственных волн. Если есть вырождение, то кратные волны с одним и тем же волновым числом всегда могут быть подвергнуты дополнительной ортогонализации в смысле соотношения (75.10). Поэтому можно считать, что условие ортогональности (75.10), являющееся основой всего дальнейшего изложения, выполняется для всех волн волноводной системы.

Нормой s-й собственной волны будем называть величину

$$N_s=\frac{c}{4\pi}J_{s,-s}=\frac{c}{4\pi}\int\{[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{-s}]-[\mathbf{E}_{-s}\mathbf{H}_s]\}\mathbf{l}\,dS. \tag{75.11}$$

Норма имеет размерность мощности и в ряде случаев (см. ниже) отличается лишь простым численным множителем от комплексной мощности, переносимой s-й волной через поперечное сечение $z=0$.

Рассмотрим физический смысл полученных формул. Начнем с условия ортогональности (75.10). Если возьмем две волны с такими индексами s и s', что $s'\neq s$ и $s'\neq -s$, т. е. $|s'|\neq|s|$, то можем написать для них два соотношения ортогональности:

$$\int\{[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}_s]\}\mathbf{l}\,dS=0,\quad\int\{[\mathbf{E}_s\mathbf{H}_{-s'}]-[\mathbf{E}_{-s'}\mathbf{H}_s]\}\mathbf{l}\,dS=0 \tag{75.12}$$

или в координатной записи

$$\begin{aligned}&\int(E_{s,x}H_{s',y}-E_{s,y}H_{s',x}-E_{s',x}H_{s,y}+E_{s',y}H_{s,x})\,dS=0,\\&\int(E_{s,x}H_{-s',y}-E_{s,y}H_{-s',x}-E_{-s',x}H_{s,y}+E_{-s',y}H_{s,x})\,dS=0.\end{aligned} \tag{75.13}$$

Поля прямой волны (индекс s) и встречной волны (индекс $-s$) связаны соотношениями

$$E_{-s,x}(x, y, z) = \pm E_{s,x}(x, y, -z),\ H_{-s,x}(x, y, z) = \mp H_{s,x}(x, y, -z),$$
$$E_{-s,y}(x, y, z) = \pm E_{s,y}(x, y, -z),\ H_{-s,y}(x, y, z) = \mp H_{s,y}(x, y, -z),$$
$$E_{-s,z}(x, y, z) = \mp E_{s,z}(x, y, -z),\ H_{-s,z}(x, y, z) = \pm H_{s,z}(x, y, -z), \tag{75.14}$$

которые легко вывести из уравнений поля в координатной записи (11.01). Действительно, с помощью составляющих поля $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, зависящих от z по закону $e^{ih_s z}$ и удовлетворяющих уравнениям (11.01), образовать составляющие поля $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ по формулам (75.14), то, как легко проверить, получим новое решение уравнений поля, пропорциональное $e^{-ih_s z}$ и определяющее встречную волну с индексом $-s$.

Пользуясь соотношениями (75.14), легко приведем второе соотношение (75.12) к виду

$$\int \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] + [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\}\, \mathbf{l}\, dS = 0.$$

Комбинируя его с первым соотношением (75.12), получаем

$$\int [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}]\, \mathbf{l}\, dS = 0 \quad \text{при} \quad |s| \neq |s'|. \tag{75.15}$$

Физический смысл формулы (75.15) станет ясным, если вычислить колеблющуюся мощность, переносимую через поперечное сечение волновода $S_\perp$ полем

$$\mathbf{E} = \sum C_s \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \sum C_s \mathbf{H}_s \tag{75.16}$$

— суперпозицией (суммой) волн, распространяющихся в волноводе в положительном направлении оси z. Тогда

$$\frac{c}{8\pi} \int [\mathbf{E}\mathbf{H}]\, \mathbf{l}\, dS = \sum C_z^2 \frac{c}{8\pi} \int [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s]\, \mathbf{l}\, dS, \tag{75.17}$$

т. е. колеблющаяся мощность, переносимая суммой волн через поперечное сечение волновода, равна сумме колеблющихся мощностей, переносимых каждой волной в отдельности: взаимная колеблющаяся мощность волн с индексами s и s' равна нулю.

Рассмотрим теперь физический смысл нормы N_s, определяемой формулой (75.11). Учитывая соотношения (75.14), имеем

$$N_s = \mp \frac{c}{2\pi} \int [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s]\, \mathbf{l}\, dS, \tag{75.18}$$

где интегрирование производится по поперечному сечению $z=0$. Легко видеть, что она отличается лишь множителем ± 4 от колеблющейся мощности, переносимой s-й волной через поперечное сечение $z=0$.

Для волн в идеальном волноводе, рассмотренных в § 41 и 42, ортогональность можно сформулировать так же, как равенство нулю комплексных мощностей различных волн, а норма пропорциональна комплексной мощности, переносимой волной (задача 1).

Однако при переходе к более сложным системам интерпретация полученных соотношений требует привлечения теоремы о колеблющейся мощности (см. § 7).

В простых задачах математической физики, относящихся к одной скалярной функции ψ, условие ортогональности системы собственных функций ψ_s формулируется в виде

$$\int \psi_s(x)\,\psi_{s'}(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad s \neq s', \tag{75.19}$$

а нормой собственной функции $\psi_s(x)$ называется величина

$$N_s = \int \psi_s^2(x)\,dx, \tag{75.20}$$

где символом x обозначена совокупность переменных, от которых зависят функции ψ_s, а интегрирование производится по фиксированной области изменения этих переменных. В задаче об электромагнитных волнах в волноводе вместо одной функции ψ_s фигурируют векторы $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, заданные на каждом поперечном сечении $S_\perp$, поэтому вместо условия (75.19) получилось более сложное условие (75.10), а норма определяется формулой (75.11).

§ 76. Возбуждение волноводов

Предположим, что все источники поля (электрические и магнитные токи) находятся при $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$. Так как при $z < z_1$ и $z > z_2$ искомое электромагнитное поле удовлетворяет однородным уравнениям (75.01), то оно должно иметь вид (75.06). Однако поле, возбуждаемое данными источниками, должно при $z \to \pm\infty$ стремиться к нулю вследствие потерь в волноводе; только при этом дополнительном условии согласно § 10 получается единственное решение электродинамической задачи. Поэтому справа от источников

$$\mathbf{E} = \sum C_s \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \sum C_s \mathbf{H}_s \quad (\text{при } z > z_2), \tag{76.01}$$

а слева от источников

$$\mathbf{E} = \sum C_{-s} \mathbf{E}_{-s}, \quad \mathbf{H} = \sum C_{-s} \mathbf{H}_{-s} \quad (\text{при } z < z_1). \tag{76.02}$$

Таким образом, волны должны расходиться от области, занятой источниками. Комплексные амплитуды этих волн (коэффициенты C_s и C_{-s}) легко найти, если воспользоваться леммой Лоренца (73.04), в которой вместо поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ возьмем искомое поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, удовлетворяющее уравнениям (75.02), а в качестве поля $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ берется сначала поле $\mathbf{E}_{-s'}$, $\mathbf{H}_{-s'}$, а затем поле $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$ (считаем $s' > 0$). Поверхность S выберем так же, как и раньше (см. рис. 100), причем возьмем поперечное сечение S_1 левее всех источников, т. е. при $z < z_1$, а сечение S_2 — правее всех источников, при $z > z_2$. В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} \oint \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{-s'}] - [\mathbf{E}_{-s'}\mathbf{H}]\}\,\mathbf{n}\,dS &= \frac{4\pi}{c}\int (\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\mathbf{E}_{-s'} - \mathbf{j}^{\mathrm{m}}\mathbf{H}_{-s'})\,dV, \\ \oint \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}]\}\,\mathbf{n}\,dS &= \frac{4\pi}{c}\int (\mathbf{j}^{\mathrm{e}}\mathbf{E}_{s'} - \mathbf{j}^{\mathrm{m}}\mathbf{H}_{s'})\,dV. \end{aligned} \tag{76.03}$$

Интеграл по поверхности S_0 обращается в нуль по тем же причинам, что и раньше. На сечениях S_1 и S_2 векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ представляются в виде рядов (76.01) и (76.02). Из условия ортогональности (75.10) и формулы (75.11) вытекает, что

$$\int_{S_1} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{-s'}] - [\mathbf{E}_{-s'}\mathbf{H}]\}\,1\,dS = \sum_s C_{-s} J_{-s,\,-s'} = 0,$$

$$\int_{S_2} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{-s'}] - [\mathbf{E}_{-s'}\mathbf{H}]\}\,1\,dS = \sum_s C_s J_{s,\,-s'} = C_{s'}\frac{4\pi}{c} N_{s'},$$

$$\int_{S_1} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}]\}\,1\,dS = \sum_s C_{-s} J_{-s,\,s'} = C_{-s'} J_{-s',\,s} = -C_{-s'}\frac{4\pi}{c} N_{s'},$$

$$\int_{S_2} \{[\mathbf{E}\mathbf{H}_{s'}] - [\mathbf{E}_{s'}\mathbf{H}]\}\,1\,dS = \sum_s C_s J_{s,s'} = 0.$$

Окончательно получаем следующие формулы:

$$C_s = \frac{1}{N_s}\int_V (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_{-s})\,dV, \quad C_{-s} = \frac{1}{N_s}\int_V (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s)\,dV, \tag{76.04}$$

определяющие коэффициенты C_s и C_{-s} в виде интегралов по объему, занятому источниками. Заметим, что C_s и C_{-s} получились постоянными (не зависящими от z), как это и предполагалось при написании формул (76.01) и (76.02).

Выведенные выражения имеют простой и наглядный вид. Их недостаток заключается в том, что в области $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, занятой источниками, они неприменимы. Для определения электромагнитного поля при некотором z, лежащем между z_1 и z_2 (рис. 101,*а*), можно воспользоваться следующим приемом: мысленно удалим (рис. 101,*б*) источники из плоского слоя $(z-\delta,\ z+\delta)$ и обозначим получающееся в сечении z электромагнитное поле через $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$. Поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ есть, в сущности, поле в области, свободной от источников, поэтому его можно представить в виде (75.06). По соображениям, приведенным выше, электромагнитные волны, распространяющиеся направо $(\mathbf{E}_s,\ \mathbf{H}_s)$, создаются источниками, находящимися слева от данного сечения z, а волны, распространяющиеся налево $(\mathbf{E}_{-s},\ \mathbf{H}_{-s})$, — источниками, расположенными справа. Поэтому в пределе при $\delta \to 0$ получаем

$$C_s = \frac{1}{N_s}\int_{(z_1,\,z)} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_{-s})\,dV, \quad C_{-s} = \frac{1}{N_s}\int_{(z,\,z_2)} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s)\,dV, \tag{76.05}$$

где скобка $(z_1,\ z)$ означает, что интегрирование производится по всем источникам левее данного сечения z, а скобка $(z,\ z_2)$ — интегрирование по всем источникам правее сечения z.

Однако поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ отличается от поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, существующего в том же сечении до удаления источников: удаляя источники из слоя, тем самым обрываем продольные электрические и магнитные токи и создаем на поперечных сечениях $z-\delta$ и $z+\delta$ поверх-

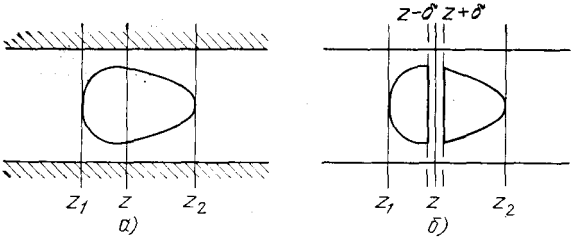


Рис. 101. Поле в области, занятой источниками:
а — основная задача; *б* — вспомогательная задача

ностные электрические и магнитные заряды. На сечении $z-\delta$ поверхностные плотности электрического заряда σ^e и магнитного заряда σ^m связаны с продольными составляющими $j^e{}_z$ и $j^m{}_z$ соотношениями

$$\partial\sigma^e/\partial t = \mathbf{j}^e_z, \quad \partial\sigma^m/\partial t = j^m_z, \tag{76.06}$$

так что при временно́й зависимости $e^{-i\omega t}$

$$-i\omega\sigma^e = j^e_z, \quad -i\omega\sigma^m = j^m_z. \tag{76.07}$$

В сечении $z+\delta$ плотности поверхностных зарядов равны соответственно $-\sigma^e$ и $-\sigma^m$. Поверхностные заряды создают в слое $(z-\delta,\ z+\delta)$ при $\delta\to 0$ дополнительное поле

$$\mathbf{E}'' = -\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon} j^e_z \mathbf{l}, \quad \mathbf{H}'' = -\frac{4\pi}{i\omega\mu} \mathbf{j}^m_z \mathbf{l}. \tag{76.08}$$

Так как поле $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, получаемое по формулам (75.06) и (76.05), есть поле в «препарированном» поперечном сечении (рис. 101,*б*), а поле $\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}''$ возникает в результате препарирования, то для определения поля, существующего в реальной системе (рис. 101,*а*), необходимо из первого поля *вычесть* второе. Таким образом, окончательные выражения для искомого электромагнитного поля имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \sum (C_s \mathbf{E}_s + C_{-s}\mathbf{E}_{-s}) + \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon} j^e_z \mathbf{l},\\ \mathbf{H} &= \sum (C_s \mathbf{H}_s + C_{-s}\mathbf{H}_{-s}) + \frac{4\pi}{i\omega\mu} j^m_z \mathbf{l},\end{aligned} \tag{76.09}$$

где коэффициенты C_s и C_{-s} даются формулами (76.05). При $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ эти коэффициенты являются функциями от z, так как при изменении z «левые» источники превращаются в «правые» (или наоборот) и вследствие этого амплитуды волн изменяются.

Вне области, занятой источниками, дополнительные слагаемые в формулах (76.09) пропадают, коэффициенты C_s и C_{-s} перестают зависеть от z, и формулы (76.09) переходят в формулы (76.01) и (76.02). Поэтому выражения (76.05) и (76.09) дают самую общую запись электромагнитного поля, возбужденного в волноводе заданными источниками.

В следующем параграфе будут подробно рассмотрены частные случаи возбуждения волноводов сторонними электрическими токами, т. е. вибраторами, электронными потоками и т. д. Что ка-

сается сторонних магнитных токов, то согласно § 74 они позволяют рассмотреть возбуждение электромагнитных волн рамочными антеннами, щелями и отверстиями. В частности, если волновод возбуждается с помощью отверстия в его идеально проводящей стенке S_0, то формулы (76.04) принимают вид

$$C_s = -\frac{1}{N_s}\int \mathbf{i}^m \mathbf{H}_{-s}\, dS, \quad C_{-s} = -\frac{1}{N_s}\int \mathbf{i}^m \mathbf{H}_s\, dS, \tag{76.10}$$

где вследствие поверхностного характера магнитного тока интегралы распространяются по площади отверстия (или щели). Пользуясь соотношением (74.13), преобразуем эти формулы к виду

$$C_s = -\frac{c}{4\pi N_s}\int [\mathbf{nE}]\,\mathbf{H}_{-s}\, dS, \quad C_{-s} = -\frac{c}{4\pi N_s}\int [\mathbf{nE}]\,\mathbf{H}_s\, dS, \tag{76.11}$$

где $\mathbf{E}$ есть электрическое поле на отверстии. Иначе можно написать

$$C_s = -\frac{1}{N_s}\int \mathbf{E}\,\mathbf{i}_{-s}\, dS, \quad C_{-s} = -\frac{1}{N_5}\int \mathbf{E}\,\mathbf{i}_s\, dS, \tag{76.12}$$

где

$$\mathbf{i}_s = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\,\mathbf{H}_s], \quad \mathbf{i}_{-s} = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_{-s}] \tag{76.13}$$

суть поверхностные токи, возбуждаемые s-й и $-s$-й волнами на (неразрезанной) стенке волновода S_0.

Данный выше вывод основных выражений (76.09) основан на физических соображениях, которые иногда вызывают недоверие; особенно это относится к слагаемым, пропорциональным $j^e{}_z$ и $j^m{}_z$. Нетрудно однако получить эти слагаемые аналитическим путем, т. е. показать, что они следуют из уравнений Максвелла, которые без них удовлетворяться не могут.

Представим любой вектор $\mathbf{A}$ с составляющими A_x, A_y, A_z в ввиде суммы $\mathbf{A}^t + \mathbf{A}^l$, где $\mathbf{A}^t$ (поперечная часть $\mathbf{A}$) имеет составляющие A_x, A_y, 0, а $\mathbf{A}^l$ (продольная часть $\mathbf{A}$) есть вектор с составляющими 0, 0, A_z. Как легко проверить непосредственным вычислением в декартовых координатах x, y, z, поперечная и продольная часть вектора rot $\mathbf{A}$ даются выражениями

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^t = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}^l + \left[\mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{A}^t}{\partial z}\right], \quad (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^l = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}^t - \left[\mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{A}^t}{\partial z}\right],$$

которые позволяют разбить комплексные уравнения поля (75.02) на поперечные уравнения

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathbf{E}^l + \left[\mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] &= \mathrm{i}k\mu\,\mathbf{H}^t - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{mt}, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}^l + \left[\mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] &= -\mathrm{i}k\varepsilon\,\mathbf{E}^t + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{et} \end{aligned} \tag{76.14}$$

и продольные уравнения

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathbf{E}^t - \left[\mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] &= \mathrm{i}k\mu\,\mathbf{H}^l - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{ml}, \\ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}^t - \left[\mathbf{l}\frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] &= -\mathrm{i}k\varepsilon\,\mathbf{E}^l + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{el}. \end{aligned} \tag{76.15}$$

В таком же виде, но при $\mathbf{j}^e=\mathbf{j}^m=0$, могут быть записаны однородные уравнения (75.01) для поля без источников, в частности уравнения для поля $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ или $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ любой собственной волны системы.

Если поперечную часть электромагнитного поля в волноводе, возбуждаемом источниками, искать в виде

$$\mathbf{E}^t=\Sigma\left(C_s\mathbf{E}_s^t+C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^t\right),\quad \mathbf{H}^t=\Sigma\left(C_s\mathbf{H}_s^t+C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^t\right), \tag{76.16}$$

где коэффициенты C_s и C_{-s}, вообще говоря, зависят от z, то почленным дифференцированием рядов (76.16) получим тождества

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E}^t-\left[\mathbf{l}\frac{\partial\mathbf{E}^t}{\partial z}\right]&=\mathrm{i}k\mu\Sigma\left(C_s\mathbf{H}_s^l+C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^l\right),\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}^t-\left[\mathbf{l}\frac{\partial\mathbf{H}^t}{\partial z}\right]&=-\mathrm{i}k\varepsilon\Sigma\left(C_s\mathbf{E}_s^l+C_{-s}\mathbf{H}_s^l\right)\end{aligned} \tag{76.17}$$

при выводе которых использовано то обстоятельство, что поля $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ удовлетворяют уравнениям (76.15) при $\mathbf{j}^e=\mathbf{j}^m=0$, а также применена известная формула векторного анализа

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{A})=[\operatorname{grad}f,\ \mathbf{A}]+f\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{76.18}$$

Подставляя тождества (76.17) в продольные уравнения (76.15), получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^l&=\Sigma\left(C_s\mathbf{E}_s^l+C_{-s}\mathbf{E}_{-s}^l\right)+\frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\mathbf{j}^{el},\\ \mathbf{H}^l&=\Sigma\left(C_s\mathbf{H}_s^l+C_{-s}\mathbf{H}_{-s}^l\right)+\frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega\mu}\mathbf{j}^{ml},\end{aligned} \tag{76.19}$$

которые свидетельствуют о необходимости учета слагаемых, пропорциональных $j^e{}_z$ и $j^m{}_z$, в точке, где вычисляется поле.

Чтобы найти функции C_s и C_{-s}, нужно обратиться к поперечным уравнениям (76.14). Соответствующие выкладки приведены в задаче 2, они приводят к выражениям (76.04) и (76.05), если предположить, что $j^e{}_z=j^m{}_z=0$ на поверхности S_0.

§ 77. Возбуждение волноводов: примеры и дополнения

Если электромагнитное поле в волноводе возбуждается только сторонними электрическими токами, то формулы (76.04) принимают вид

$$C_s=\frac{1}{N_s}\int\mathbf{j}^e\mathbf{E}_{-s}\,dV,\quad C_{-s}=\frac{1}{N_s}\int\mathbf{j}^e\mathbf{E}_s\,dV. \tag{77.01}$$

Эти формулы показывают, что для наиболее эффективного возбуждения s-й волны (с наибольшим по абсолютной величине коэффициентом C_s) необходимо создать распределение плотности электрического тока по формуле $\mathbf{j}^e=A\mathbf{E}^*_{-s}$ или близкое к ней, где A — постоянная. В ряде случаев это распределение эквивалентно распределению по формуле $\mathbf{j}^e=B\mathbf{E}_s$. Такая эквивалентность име-

ет место, в частности, для распространяющихся волн в волноводах с идеальными стенками, что легко вывести из формул (39.05) и (40.02). Таким образом, плотность стороннего электрического тока должна воспроизводить электрическое поле волны, которую нужно возбудить, по направлению, амплитуде и фазе.

Разумеется, эти требования не следует понимать слишком буквально: как увидим дальше, для эффективного возбуждения s-й волны в волноводе нет необходимости создавать непрерывное распределение тока, поскольку даже элементарный диполь приводит к той же цели. Нужно, однако, иметь в виду, что элементы тока, перпендикулярные электрическому полю данной волны, вовсе ее не возбуждают и что при наличии нескольких элементов тока суммарное их действие будет наибольшим, если направления, амплитуды и фазы будут выбраны в соответствии с этими требованиями.

При конструировании излучающих устройств в волноводе обычно исходят из сформулированного выше принципа. Тот же принцип используется и при подборе фильтров, отражающих одни волноводные волны и пропускающих другие. Эти фильтры могут иметь, например, вид проволочных решеток, расположенных в поперечном сечении волновода. Так как отразить данную волну с индексом s — это значит возбудить волну с индексом $-s$, то и в этом случае необходимо, чтобы текущие по решетке токи воспроизводили структуру отражаемой волны. По тонким проводникам токи могут течь лишь в одном направлении — вдоль проводников, поэтому проводники должны быть направлены по электрическим силовым линиям данной волны. Так, например, решеткой из вертикальных (по оси y) проволок, расположенных достаточно часто, отражают волну H_{10} и пропускают волну H_{01} в прямоугольном волноводе. Заметим, что этот фильтр не отличается принципиально от решетки из параллельных проводов, с помощью которой можно отфильтровать в свободном пространстве плоскую электромагнитную волну определенной поляризации (см. § 68).

В лампе с бегущей волной и в подобных ей электронных приборах эффективное возбуждение электромагнитного поля осуществляется с помощью электронного потока, пронизывающего волновод (замедляющую систему) в направлении оси z. Так как все возмущения в электронном потоке перемещаются вдоль оси z со скоростью электронов v, то плотность переменного конвекционного тока $\mathbf{j}^e$ в электронном пучке имеет вид волны, распространяющейся вдоль оси z со скоростью v. Высказанные выше соображения показывают, что наиболее эффективное возбуждение имеет место при скорости электронов, близкой к фазовой скорости одной из волн в волноводе (см. § 58). Поэтому в лампе с бегущей волной применяются волноводы с медленными волнами, например, диафрагмированные (§ 67) или спиральные (§ 68). Заметим, что развитая выше теория возбуждения волноводов применима и к таким волноводам.

Предположим теперь, что возбуждение производится с помощью элементарного диполя, находящегося в точке 1 и имеюще-

го векторную длину $\mathbf{l}$ и электрический ток J. Тогда первая формула (77.01) дает

$$C_s = \frac{1}{N_s} J\,\mathbf{l}\,\mathbf{E}_{-s}(1) = \frac{1}{N_s} J\,l\,E^{(s)}, \tag{77.02}$$

где через $E^{(s)}$ обозначено действующее поле s-й волны в волноводе — проекция вектора $\mathbf{E}_{-s}(1)$ на направление диполя $\mathbf{l}$.

Согласно задаче 1 абсолютная величина нормы N_s равна (для волны, распространяющейся в идеальном волноводе) учетверенной активной мощности, переносимой s-й волной через поперечное сечение волновода. Возбуждаемая диполем s-я волна переносит через каждое поперечное сечение активную мощность

$$\overline{\Sigma}_s = |C_s^2 N_s|/4 = |E^{(s)}|^2\,|J|^2\,l^2/4N_s, \tag{77.03}$$

которую можно переписать в виде

$$\overline{\Sigma}_s = \frac{1}{2} R_s\,|J|^2, \quad R_s = l^2\,|E^{(s)}|^2/2\,|N_s|, \tag{77.04}$$

где величину R_s можно назвать сопротивлением излучения диполя, обусловленным возбуждением s-й волны. Напомним, что сопротивление излучения диполя в свободном пространстве

$$R_0 = (2/3c)\,k^2 l^2 \tag{77.05}$$

и соотношение этих сопротивлений

$$R_s/R_0 = 3c\,|E^{(s)}|^2/4k^2\,|N_s|. \tag{77.06}$$

Рассмотрим для примера возбуждение волны H_{10} в прямоугольном волноводе вертикальным диполем (направленным по оси y). Присвоим этой волне индекс $s=1$ или $s=-1$ и будем считать, что диполь находится в точке x_0, y_0, 0. Тогда отношение (77.06)

$$R_1/R_0 = (3\pi/khab)\sin^2 gx_0, \quad g=\pi/a, \quad h=\sqrt{k^2-g^2} \tag{77.07}$$

(см. задачу 3). Аналогичное выражение получается для отношения R_{-1}/R_0, определяющего мощность, уносимую волной, которая бежит в отрицательном направлении оси z. Поэтому полное сопротивление излучения $R=2R_1$ (при условии, что кроме волны H_{10} других распространяющихся волн нет).

На практике в волноводе обычно создается одностороннее излучение, поскольку с другой стороны волновод ограничен, например, поперечной перегородкой; пусть она находится при $z=-L$ (рис. 102). В этом случае нужно учесть, что волны, распространяющиеся от диполя налево, отражаются от перегородки $z=-L$, так что при $-L<z<0$ поле имеет вид

$$\mathbf{E} = C_{-1}(\mathbf{E}_{-1} - e^{2ihL}\,\mathbf{E}_1), \quad \mathbf{H} = C_{-1}(\mathbf{H}_{-1} - e^{2ihL}\,\mathbf{H}_1). \tag{77.08}$$

Коэффициент $-e^{2ihL}$ при отраженной волне $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ определяется из граничного условия $E_y=0$ при $z=-L$. Эта отраженная волна возникает из-за наличия перегородки и будет присутствовать так-

же при $z>0$. Поэтому полное поле справа от диполя (при $z>0$) имеет вид

$$\mathbf{E}=(C_1-C_{-1}e^{2ihL})\,\mathbf{E}_1,\quad \mathbf{H}=(C_1-C_{-1}e^{2ihL})\,\mathbf{H}_1. \tag{77.09}$$

Учитывая, что $C_{-1}=C$, можно представить мощность излучения $\overline{\Sigma}_L$ в виде

$$\overline{\Sigma}_L=\frac{1}{2}\,|1-e^{2ihL}|^2\,\overline{\Sigma}=2\overline{\Sigma}\sin^2 hL, \tag{77.10}$$

где $\overline{\Sigma}$ — мощность излучения в бесконечном волноводе. Соответствующее сопротивление излучения

$$R_L=2R\sin^2 hL. \tag{77.11}$$

Задачу о возбуждении полубесконечного волновода можно решить также методом изображений. Из электростатики известно, что поле заряда над проводящей плоскостью эквивалентно полю заряда и его зеркального изображения в свободном пространстве (рис. 103,*а*). Отсюда вытекают законы отражения для электростатических диполей — нормального к плоскости (рис. 103,*б*) и параллельного ей (рис. 103,*в*). Если плоскость обладает идеальной проводимостью, то эти законы отражения применимы и в электродинамике. Они также обобщаются на случай, когда идеально проводящая плоскость перегораживает волновод, как на рис. 102. Поэтому электромагнитное поле в волноводе, показанном на рис. 102, совпадает при $z>-L$ с электромагнитним полем, возбуждаемым в бесконечном волноводе двумя диполями: в точке $x=x_0$, $y=y_0$, $z=0$ и в точке $x=x_0$, $y=y_0$, $z=-2L$, причем второй диполь является зеркальным изображением реального диполя (первого) в плоскости $z=-L$.

Развитая выше теория возбуждения волн заданными источниками может быть применена для решения большого числа электродинамических задач. В частности, с ее помощью может быть развита теория лампы с бегущей волной и родственных ей электронных приборов. Существенным параметром этой теории является величина $\dot{E}^{(s)2}/N_s$, равная отношению квадрата действующего на электроны поля s-й волны, синхронизированной с электронным пучком, к норме этой волны. Из формулы (77.03) видно, что эта величина определяет взаимодействие электронного пучка и волны, в частности мощность, сообщаемую волне электронным пучком.

Развитая выше теория возбуждения волноводов легко обобщается на другие, более сложные, системы. Так, например, соответствующие соотношения лишь с незначительными изменениями переносятся на передающие линии, имеющие периодическую структуру. К открытым передающим линиям — однопроводной или двухпроводной линии, гребенке, ребристому или диэлектрическому стержню (см. гл. XI и XII), спиральному волноводу (см. гл. XIII) и т. п. — развитую теорию непосредственно применить нельзя,

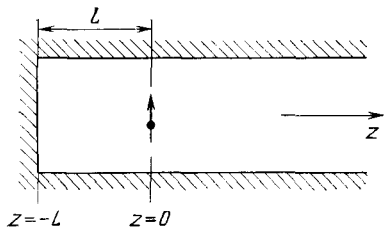


Рис. 102. Возбуждение полубесконечного волновода

поскольку электромагнитное поле таких систем в плоскости поперечного сечения $z=\text{const}$ занимает бесконечную площадь.

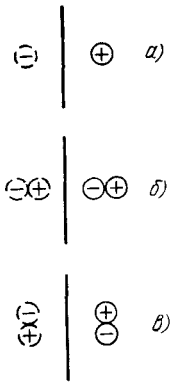


Рис. 103. Отражение электрических зарядов и диполей в плоскости

В случае открытой системы развитая теория нуждается в некотором дополнении. Представим себе, что, например, однопроводная линия (или диэлектрический цилиндр) возбуждается источниками, находящимися на конечном расстоянии от линии. Если считать (в духе § 10), что окружающее пространство обладает потерями, так что при своем распространении волны затухают, то при мысленном заключении данной линии в коаксиальную идеально проводящую трубу достаточно большого, но конечного радиуса R^0 возбуждаемое поле заметного искажения не претерпевает. Но к такой системе уже применима теория возбуждения волноводов, развитая выше, и для расчета поля необходимо знать лишь собственные волны в системе. Последние разбиваются на два класса.

1. Поверхностные волны, исследованные выше (см. § 58). Вследствие того что их поля экспоненциально затухают в радиальном направлении, наличие трубы не оказывает влияния на их структуру и на их возбуждение — даже при отсутствии потерь в среде.

2. Волноводные волны, несколько искаженные действием центрального провода — металлического или диэлектрического. Эти волны образуют дискретную последовательность, которая при $R^0\to\infty$ переходит в непрерывный спектр.

Если после предельного перехода $R^0\to\infty$ положить потери в среде равными нулю (например, считать $\varepsilon=\mu=1$), то получается решение поставленной выше задачи о возбуждении открытой линии. Из предыдущего ясно, что решение состоит из суммы волн, соответствующей дискретному спектру поверхностных волн, и из интеграла, соответствующего непрерывному спектру волноводных (или пространственных) волн. Первую часть решения — сумму поверхностных волн — можно вычислить по формулам, выведенным выше.

В § 66 показано, что гребенчатая структура (см. рис. 77) может поддерживать распространение поверхностной волны, поле которой зависит лишь от двух координат x и z. Обозначим индексом 1 поверхностную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z, индексом -1 такую же волну, но бегущую в отрицательном направлении. Поскольку над гребенкой (при $x>0$) поле определяется формулами (60.03), то при $-ikpA=1$ будем иметь

$$E_{1,x}=\frac{h}{k}e^{-px+ihz},\quad E_{1,z}=-\frac{ip}{k}e^{-px+ihz},\quad H_{1,y}=e^{-px+ihz},$$

$$E_{-1,x}=-\frac{h}{k}e^{-px+ihz},\quad E_{-1,z}=-\frac{ip}{k}e^{-px+ihz},\quad H_{-1,y}=e^{-rx+ihz}. \tag{77.12}$$

Эти волны можно, например, возбудить с помощью светящейся нити — прямолинейного магнитного тока, перпендикулярного плоскости x, z и проходящего через точку $x=x_0$, $z=0$. Такой источник имеет по оси y неограниченную протяженность, поскольку сила магнитного тока J^m не зависит от y и поле возбуждаемых им волн (77.12) также не зависит от y. Чтобы избежать в формулах § 75 и 76 бесконечных выражений, достаточно в данной двухмерной задаче интегрирования по поперечному сечению $z=\text{const}$ производить по x от 0 до ∞, а по y — в пределах единичного интервала, например, от $y=0$ до $y=1$. Тогда норма

$$N_1=\frac{c}{2\pi}\int_0^\infty E_{1,x}H_{-1,y}\,dx=\frac{c}{4\pi}\frac{h}{kp} \tag{77.13}$$

будет связана со средней мощностью, переносимой волной 1 в z-м направлении (на единицу оси y), соотношением

$$\frac{c}{8\pi}\int_0^\infty E_{1,x}H_{1,y}\,dx=\frac{c}{16\pi}\frac{h}{kp}=\frac{N_1}{4}. \tag{77.14}$$

Коэффициенты C_1 и C_{-1} — комплексные амплитуды волн (77.12) — будут равны

$$C_1=C_{-1}=-J^m e^{-px_0}/N_1. \tag{77.15}$$

Средняя (за период колебания) мощность, переносимая 1-й волной, возбужденной магнитным током (на единицу оси y),

$$\overline{\Sigma}_1=|C_1|^2N_1/4=|J^m|^2e^{-2px_0}/4N_1 \tag{77.16}$$

или

$$\overline{\Sigma}_1=\overline{\Sigma}_{-1}=(\pi kp/ch)\,|J^m|^2e^{-2px_0}, \tag{77.17}$$

поскольку такая же мощность сообщается и волне -1.

Для того чтобы физически понять полученные формулы, необходимо сравнить мощность, сообщаемую поверхностным вол-

нам, с полной мощностью излучения нити в свободном пространстве; последняя равна (см. задачу 4):

$$\overline{\Sigma_0} = (\pi k/2c)|J^m|^2. \tag{77.18}$$

Эффективность возбуждения поверхностной волны магнитным током можно приближенно характеризовать отношением

$$\overline{\Sigma_1}/\overline{\Sigma_0} = (4p/h)\,e^{-2px_0} = 4\sqrt{1-(k/h)^2}\,e^{-2px_0}. \tag{77.19}$$

Формула (77.19) показывает, что значительная часть мощности, излучаемой источником, сообщается поверхностной волне. Исключение составляет, во-первых, случай высоко расположенного источника (когда множитель e^{-2px_0} мал); создаваемая светящейся нитью цилиндрическая волна вблизи плоскости $x=0$ мало отличается от плоской волны, которая отражается от гребенки в виде плоской же волны, не возбуждая при этом волны поверхностной. Во-вторых, если скорость поверхностной волны близка к c, т. е. $h \approx k$, то отношение (77.19) также получается малым. Иначе говоря, если поверхностный характер волны выражен слабо, $p \ll k \approx h$, то такая волна плохо возбуждается источником, и в создаваемом им электромагнитном поле имеет лишь незначительный удельный вес. Физически этот вывод совершенно естествен: при условии $h \approx k$ поверхностные волны (77.12) по структуре своего поля и скорости распространения мало отличаются от обычных плоских волн, и светящаяся нить таких волн излучать не способна.

В § 60 рассмотрена поверхностная волна Ценнека, распространяющаяся над проводящей плоскостью. Ее поле также определяется формулами (77.12), однако в силу соотношения (60.01) параметры p и h этой волны комплексны. Как уже было отмечено в § 60, поверхностный характер волны Ценнека выражен весьма слабо, в силу чего обычные антенны ее не возбуждают. Поэтому распространение радиоволн вдоль земной поверхности нельзя объяснить, исходя из представления о поверхностной волне Ценнека.

Можно поставить вопрос: какие же источники способны эффективно возбуждать поверхностную волну Ценнека? Ответ дают соображения в начале этого параграфа: такой источник должен иметь протяженность по высоте, примерно соответствующую вертикальной протяженности волны Ценнека, и надлежащее распределение фаз.

В § 71 отмечалось, что волны A_1 и B_1 (см. рис. 93) в спиральном волноводе не наблюдаются экспериментально. Это обстоятельство также связано с тем, что их поверхностный характер выражен слабо ($x \operatorname{ctg} \vartheta = pa \ll 1$) и они весьма близки к циркулярно поляризованным плоским волнам (см. конец § 70). Согласно сказанному выше, такие волны должны плохо возбуждаться обычными источниками. Заметим, что количественное исследование возбуждения этих волн можно сделать на основании формулы (77.06).

По изложенной схеме можно рассчитать возбуждение поверхностных волн в диэлектрических структурах; при этом надо учитывать также поля в диэлектрике. В § 61, 62, 64 и 68 были рассмотрены вытекающие волны, затухающие при своем распространении из-за излучения в стороны. Возникает вопрос: применимы ли полученные выше соотношения к возбуждению вытекающих волн? На первый взгляд кажется, что о применимости не может быть и речи, поскольку поле вытекающих волн экспоненциально возрастает при удалении от данной структуры (см., в частности, рис. 71). Между тем опыт показывает, что быстрые волны в диэлектрических трубках (см. § 64) возбуждаются так же легко, как в обычных волноводах.

Противоречие разрешается, если принять во внимание, что вытекающие волны в полную систему собственных волн (поверхностных и пространственных, см. выше) не входят. Они возникают в результате аналитического продолжения спектра пространственных волн. Не вдаваясь в математические детали, укажем лишь, что выведенные выше соотношения годятся и для вытекающих волн, если они возбуждаются источниками, расположенными в самой структуре (в диэлектрике, трубке и т. п.). Часть поля, соответствующая волне, отходящей в стороны, вклада в норму практически не дает. Например, чтобы вычислить норму волны в диэлектрической трубке, достаточно интегрировать только при $r<a$.

§ 78*. Возбуждение волн в рупоре и родственные задачи

Теория возбуждения волноводов, изложенная выше в § 75—77, может быть распространена на более сложные системы, в которых известна полная система собственных волн. В этом параграфе будут решены задачи о возбуждении волн в рупорах — секториальном и коническом, а также родственные задачи о дифракции на цилиндре и сфере. Более подробно в следующем параграфе будет рассмотрена классическая задача о дифракции на клине, которая, по существу, совпадает с задачей о возбуждении секториального рупора. Все эти задачи объединены потому, что они решаются однотипным методом, а именно методом разделения переменных в цилиндрической или сферической системе координат, позволившим построить систему собственных волн в рупорах (см. гл. X) с привлечением идей, использованных в теории возбуждения волноводов.

Для определенности начнем с секториального рупора. В § 55 построена система волн в таком рупоре; эти волны расходятся от вершины рупора, поле каждой волны определяется функцией $H_\nu^{(1)}(hr)$ и ее производной. Поле такой волны, распространяющейся в направлении возрастания r, будем обозначать, как в § 75, через $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$. Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, дойдя до вершины рупора ($r=0$), отразится от нее, т. е. будет стоячей цилиндрической волной, поле которой остается конечным при $r\to 0$. Поле такой волны обозначим через $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$, оно получается путем замены функции $H_\nu^{(1)}(hr)$ функцией $J_\nu(hr)$.

Применим теперь лемму Лоренца, точнее, формулу (73.04) к двум рупорным волнам с индексами s и s'; поверхность S изображена на рис. 104: она состоит из двух цилиндрических «попереч-

ных сечений» S_1 ($r=r^{(1)}$) и S_2 ($r=r^{(2)}$) и заключенных между ними стенок S_0. Полученное соотношение

$$\oint \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\}\, \mathbf{n} dS = 0, \tag{78.01}$$

формально эквивалентное соотношению (75.07), приводит к выводу, что интеграл

$$J_{s,s'} = \int \{[\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}]-[\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s]\}\, \mathbf{l}\, dS, \tag{78.02}$$

взятый по части поверхности $r=\text{const}$, ограниченной стенками, не зависит от r; здесь $\mathbf{l}$ — единичный вектор в радиальном направлении. Отсюда следует, как в § 75, условие ортогональности $J_{s,s'}=0$ при $s' \neq -s$; величина $J_{s,-s}$ определяет норму $N_s = (c/4\pi) J_{s,-s}$ рупорной волны с индексом s. Нетрудно показать, что $J_{s,-s}$ не зависит от r, это вытекает из соотношения

$$J_\nu(x)\, H_\nu^{(1)\prime}(x) - J_\nu'(x)\, H_\nu^{(1)}(x) = 2\,\mathrm{i}/\pi x \tag{78.03}$$

и того обстоятельства, что в интеграле (78.02) $dS = r d\varphi dz$.

Если источники — электрические и магнитные токи — расположены при $r_1 < r < r_2$, то построение возбуждаемого ими поля производится так же, как в § 76, и окончательные формулы почти не отличаются от формул § 76. Они имеют вид

$$\mathbf{E} = \sum (C_s \mathbf{E}_s + C_{-s} \mathbf{E}_{-s}) + \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega} j_r^e \mathbf{l},$$

$$\mathbf{H} = \sum (C_s \mathbf{H}_s + C_{-s} \mathbf{H}_{-s}) + \frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega} j_r^m \mathbf{l}, \tag{78.04}$$

где

$$C_s = \frac{1}{N_s} \int\limits_{(r_1, r)} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_{-s} - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_{-s})\, dV,$$

$$C_{-s} = \frac{1}{N_s} \int\limits_{(r, r_2)} (\mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s)\, dV, \tag{78.05}$$

причем $C_s=\text{const}$, $C_{-s}=0$ при $r>r_2$, а $C_s=0$, $C_{-s}=\text{const}$ при $r<r_1$.

Полученные формулы без каких-либо принципиальных изменений переносятся на рупоры, рассмотренные в § 57: конический, биконический, пирамидальный. При этом под $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ надо понимать поле сферической волны, расходящейся в радиальном направлении и определяемой функцией $\zeta_\nu(kr)$ и ее производной, а под $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ поле стоячей сферической волны, в котором вместо $\zeta_\nu(kr)$ используется функция $\psi(kr)$, введенная в § 23.

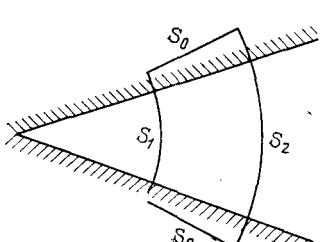


Рис. 104. Поверхность S в формуле (78.01)

В задаче 5 рассчитан таким путем простейший случай возбуждения конического рупора.

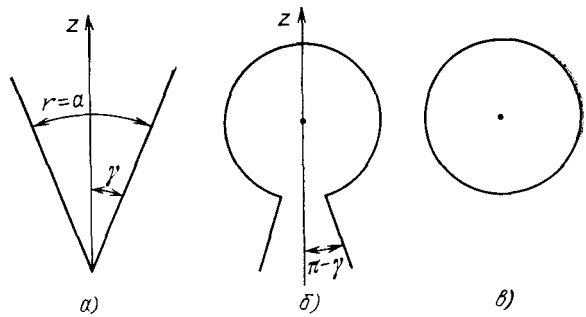


Рис. 105. Задачи, решаемые в сферической системе координат:
а — рупор со сферической перегородкой; *б* — конус со сферическим закруглением; *в* — сфера

Удаляя источники от вершины конуса, у которого $\gamma > \pi/2$, нетрудно получить решение задачи о дифракции плоской волны на идеально проводящем конусе. Выведенные выше формулы могут быть также обобщены на системы, изображенные на рис. 105. Пусть внутри конического рупора при $r=a$ имеется идеально проводящая сферическая перегородка (рис. 105,*а*), на которой должны выполняться граничные условия

$$E_\vartheta = E_\varphi = 0 \text{ при } r = a \tag{78.06}$$

или

$$\partial U/\partial r = 0,\ V = 0 \text{ при } r = a. \tag{78.07}$$

Если электромагнитное поле занимает область $a < r < \infty$, то выведенные выше формулы остаются в силе при замене

$$\psi_\nu(kr) \to \psi_\nu(kr) - \frac{\psi'_\nu(ka)}{\zeta'_\nu(ka)}\,\zeta_\nu(kr) \text{ для } U,$$

$$\psi_\nu(kr) \to \psi_\nu(kr) - \frac{\psi_\nu(ka)}{\zeta_\nu(ka)}\,\zeta_\nu(kr) \text{ для } V,$$

поскольку условия (78.07) удовлетворяются. Получаемые таким путем выражения при $\gamma > \pi/2$ определяют диффракционное поле от конуса со сферическим закруглением (рис. 105,*б*). Если же в этих ряда индексы ν и μ считать целыми (см. § 23), то они дадут диффракционное поле от сферы радиуса a (рис. 105,*в*).

Если электромагнитное поле занимает область $0 < r < a$, то выведенные выше формулы остаются в силе при замене

$$\zeta_\nu(kr) \to \zeta_\nu(kr) - \frac{\zeta'_\nu(ka)}{\psi'_\nu(ka)}\,\psi_\nu(kr) \text{ для } U,$$

$$\zeta_\nu(kr) \to \zeta_\nu(kr) - \frac{\zeta_\nu(ka)}{\psi_\nu(ka)}\,\varphi_\nu(kr) \text{ для } V.$$

Таким путем получаются выражения для поля, возбуждаемого диполем в коническом объемном резонаторе с идеально проводящими стенками, а при целых ν и μ — для поля внутри сферического

резонатора. К этим задачам можно подойти иначе (см. гл. XVI).

Заметим, что приведенные выше ряды не всегда позволяют производить расчеты: эти ряды иногда сходятся медленно, а их преобразование к выражениям, пригодным для вычислений, представляет собой самостоятельную задачу. Одна из таких задач будет решена в следующем параграфе.

§ 79*. Дифракция на клине

Решим следующую двухмерную задачу. Пусть в свободном пространстве (в пустоте) находится идеально проводящий клин и параллельный его ребру источник P_0 цилиндрической волны (рис. 106). Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось z совпадала с ребром клина, а угол φ отсчитывался от первой грани и содержится в интервале $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, уравнение $\varphi = \alpha$ определяет вторую грань. Координаты источника P_0 обозначим через r_0, φ_0.

Рассмотрим возбуждение электромагнитного поля как нитью электрического тока J^e, так и нитью магнитного тока J^m. В первом случае поле определяется составляющей $A^e{}_z$ электрического векторного потенциала (см. § 17), удовлетворяющей уравнению

$$\Delta A^e_z + k^2 A^e_z = -\frac{4\pi}{c} j^e_z \tag{79.01}$$

и граничному условию

$$A^e{}_z = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha, \tag{79.02}$$

поскольку $E_z = ikA^e{}_z$. Во втором случае поле определяется составляющей $A^m{}_z$ магнитного векторного потенциала, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta A^m_z + k^2 A^m_z = -\frac{4\pi}{c} j^m_z \tag{79.03}$$

и граничному условию

$$\partial A^m_z / \partial \varphi = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } \varphi = \alpha, \tag{79.04}$$

так как $E_r = -\partial A^m_z / r \partial \varphi$, $H_z = ik A^m_z$. (79.04)

Пользуясь обозначениями § 78 и задачи 5, введем функции

$$U_s = H^{(1)}_{\nu_s}(kr) \sin \nu_s \varphi,\ U_{-s} = J_{\nu_s}(kr) \sin \nu_s \varphi \ (s = 1, 2, \ldots),$$

$$V_s = H^{(1)}_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \varphi,\ V_{-s} = J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \varphi \ (s = 0, 1, 2, \ldots), \tag{79.05}$$

где $\nu_s = s\pi/\alpha$. Функции (79.05) удовлетворяют однородным уравнениям (79.01) и (79.03), функции U_s и U_{-s} — условию (79.02), функции V_s и V_{-s} — условию (79.04). Они являются цилиндрическими волнами: U_s и V_s — бегущие (расходящиеся) волны; U_{-s} и V_{-s} — стоячие волны, конечные при $r = 0$.

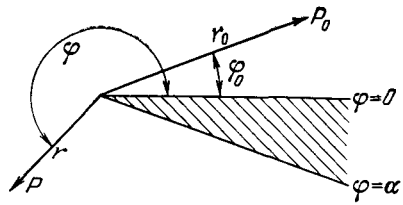


Рис. 106. Возбуждение области $0<\varphi<\alpha$ вне клина линейным источником (P_0 — источник, P — точка наблюдения)

Решение неоднородных уравнений (79.01) и (79.03) естественно искать в виде (см. § 78)

$$A_z^e = \sum C_s U_s \text{ при } r > r_0,\ A_z^e = \sum C_{-s} U_s \text{ при } r < r_0 \tag{79.06}$$

и

$$A_z^m = \sum C_s V_s \text{ при } r > r_0,\ A_z^m = \sum C_{-s} V_{-s} \text{ при } r < r_0. \tag{79.07}$$

Коэффициенты C_s и C_{-s} находятся из теоремы Грина

$$\int\limits_S (f \Delta g - g \Delta f)\, dS = \oint\limits_C \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds, \tag{79.08}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к контуру C, ограничивающему площадку S. Полагая $f = A^e{}_z$, $g = U_{-s}$ и $g = U_s$, беря в качестве S область $0<r<R$ $(R>r_0)$, $0<\varphi<\alpha$ и учитывая соотношение ортогональности

$$\int\limits_0^\alpha \sin \nu_s \varphi \sin \nu_{s'} \varphi\, d\varphi = \int\limits_0^\alpha \cos \nu_s \varphi \cos \nu_{s'} \varphi\, d\varphi = \frac{\alpha}{2} \delta_{s,s'} (s,s' = 1, 2, \ldots)$$

и соотношение (78.03), получаем коэффициенты в разложениях (79.06)

$$C_s = i \frac{4\pi^2}{c\alpha} J^e U^0_{-s},\ C_{-s} = i \frac{4\pi^2}{c\alpha} J^e U^0_s. \tag{79.09}$$

Если же положить $f = A^m{}_z$, $g = V_s$ и $g = V_{-s}$, то коэффициенты C_s и C_{-s} в разложениях (79.07) получатся в виде

$$C_s = i \varepsilon_s \frac{4\pi^2}{c\alpha} J^m V^0_{-s},\ C_{-s} = i \varepsilon_s \frac{4\pi^2}{c\alpha} J^m V^0_s, \tag{79.10}$$

где $\varepsilon_0 = 1/2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 1$, а $U^0{}_s$, $V^0{}_s$ и т. д. означают, что соответствующая функция берется в точке P_0 (при $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$). При выводе формул (79.09) и (79.10) существенно, что левая часть (79.08) сводится к интегралу по окрестности точки P_0, а правая часть — по дуге $r = R$, $0<\varphi<\alpha$.

Таким образом, нить электрического тока возбуждает в пространстве вне клина электрическое поле с единственной составляющей

$$E_z = -\frac{4\pi^2 k}{c\alpha} J^e \sum_{r=1}^{\infty} H^{(1)}_{\nu_s}(kr_0) J_{\nu_s}(kr) \sin \nu_s \varphi_0 \sin \nu_s \varphi, \tag{79.11}$$

а нить магнитного тока — магнитное поле с единственной составляющей

$$H_z = -\frac{4\pi^2 k}{c\alpha} J^m \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s H_{\nu_s}^{(1)}(kr_0) J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \varphi_0 \cos \nu_s \varphi. \qquad (79.12)$$

Формулы (79.11) и (79.12) применимы при $r<r_0$; при $r>r_0$ надо переменить местами функции $H_\nu^{(1)}$ и J_ν. Все эти формулы аналогичны тем, которые получаются в теории возбуждения секториального рупора (см. § 78, в частности теорема Грина (79.08) есть двухмерный скалярный вариант леммы Лоренца.

Однако при больших значениях kr и kr_0 ряды (79.11) и (79.12) сходятся медленно и не позволяют проанализировать диффракционные поля. Преобразуем эти ряды, положив сначала $kr_0 \to \infty$ и воспользовавшись асимптотической формулой (22.12), которую перепишем в виде

$$H_\nu^{(1)}(kr_0) = H_0^{(1)}(kr_0)\, e^{-i\nu\pi/2}.$$

Тогда выражения (79.11) и (79.12) принимают вид

$$E_z = E_0 [u(r, \varphi-\varphi_0) - u(r, \varphi+\varphi_0)],$$
$$H_z = H_0 [u(r, \varphi-\varphi_0) + u(r, \varphi+\varphi_0)], \qquad (79.13)$$

где

$$E_0 = -(\pi k/c) J^e H_0^{(1)}(kr_0), \quad H_0 = -(\pi k/c) J^m H_0^{(1)}(kr_0), \qquad (79.14)$$

а

$$u(r, \chi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s e^{-i\nu_s\pi/2} J_{\nu_s}(kr) \cos \nu_s \chi. \qquad (79.15)$$

Согласно § 59 и задаче 4 формула (79.14) определяет поле цилиндрической волны, создаваемой нитью тока, на расстоянии r_0 от нити. При $kr_0 \to \infty$ эта волна, создаваемая нитью P_0 (рис. 106), при конечных kr становится плоской и принимает вид

$$E_z^0 = E_0 e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, \quad H_z^0 = H_0 e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)}, \qquad (79.16)$$

так что выражения (79.13) дают решение задачи о диффракции плоской волны на клине. При небольших kr ряд (79.15) для функции $u(r, \chi)$ сходится быстро и позволяет вычислить поле вблизи ребра клина. По мере увеличения kr сходимость ряда ухудшается и при больших kr он становится непригодным для расчетов. Преобразуем ряд (79.15) к виду, позволяющему исследовать поле при $kr \gg 1$.

Для этого воспользуемся интегральным представлением (44.15) и переменим местами суммирование по s и интегрирование по ψ; получаем

$$u(r, \chi) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\pi-i\infty}^{\pi-i\infty} e^{ikr\sin\psi} \left[1 + \sum_{s=1}^{\infty} e^{-i\nu_s(\psi-\chi+\pi/2)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{\infty} e^{-i\nu_s(\psi+\chi+\pi/2)}\right] d\psi .$$

Смещая путь интегрирования немного вниз (так, чтобы на нем было $\operatorname{Im}\psi<0$), суммируя геометрические прогрессии и вводя новую переменную интегрирования $\eta=-(\psi+\pi/2)$, приходим к выражению

$$u(r,\chi)=\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_{-3\pi/2+i\infty}^{\pi/2+i\infty} e^{-ikr\cos\eta}\left[\frac{1}{1-e^{i\nu(\eta+\chi)}}-\frac{1}{1-e^{i\nu(-\eta+\chi)}}\right]d\eta,$$

или

$$u(r,\chi)=\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_{C_\eta}\frac{e^{-ikr\cos\eta}}{1-e^{i\nu(\eta+\chi)}}\,d\eta,\quad \nu=\nu_1=\frac{\pi}{\alpha}\,, \tag{79.17}$$

где путь интегрирования C_η, состоящий из двух бесконечных ветвей, изображен на рис. 107,*а*; там же изображен путь D_η, который также состоит из двух бесконечных ветвей, проходящих через точки $\eta=\pm\pi$. Такой же интеграл, но по пути D_η обозначим через $v(r,\chi)$. Полагая $\eta=\pm\pi+\zeta$ и объединяя интегралы по обеим ветвям D_η, получаем интеграл

$$v(r,\chi)=\frac{i\nu}{2\pi}\sin\nu\pi\int\limits_{D_0}\frac{e^{ikr\cos\zeta}}{\cos\nu\pi-\cos\nu(\zeta+\chi)}\,d\zeta, \tag{79.18}$$

где путь D_0 дан на рис. 107,*б*.

Поскольку $C_\eta=D_\eta+d_\eta$, где контур d_η охватывает отрезок $-\pi<\eta<\pi$ вещественной оси η и пробегается в отрицательном направлении (по часовой стрелке), функции $u(r,\chi)$ и $v(r,\chi)$ могут отличаться только на вычеты в полюсах $\eta_m=2m\alpha-\chi$ ($m=0,\pm1,\pm2,\ldots$), попавших на этот отрезок. Поэтому

$$\begin{aligned}
&u(r,\chi)=v(r,\chi)+e^{-ikr\cos\chi} && \text{при } -\pi<\chi<\pi,\\
&u(r,\chi)=v(r,\chi) && \text{при } \pi<\chi<2\alpha-\pi,\\
&u(r,\chi)=v(r,\chi)+e^{-ikr\cos(2\alpha-\chi)} && \text{при } 2\alpha-\pi<\chi\leqslant 2\alpha;
\end{aligned} \tag{79.19}$$

других значений χ при $0<\varphi_0<\pi$ и $\pi<\alpha\leqslant 2\pi$ не будет.

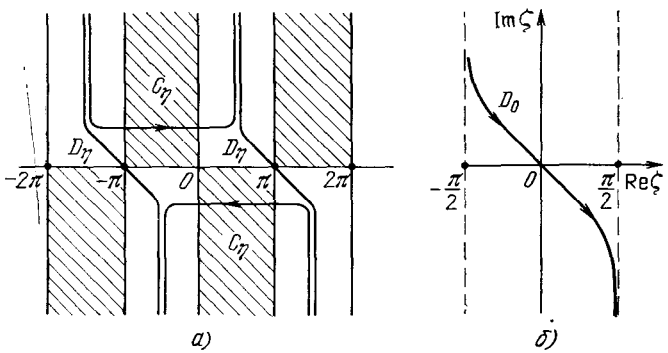


Рис. 107. Пути интегрирования C_η D_η и D_0 (области, где экспоненты под интегралами по абсолютной величине больше единицы, заштрихованы)

Интеграл (79.18), введенный Зоммерфельдом, удается свести к интегралу

$$V(s)=\frac{1}{i\,2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}\,dt}{t-e^{i\pi/4}s}=\frac{e^{-i\pi/4}s}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t^2-i\,s^2}\,dt \qquad (79.20)$$

(для полуплоскости при $\alpha=2\pi$ и $\nu=1/2$ — точно, для клина с произвольным углом α — приближенно при $kr\gg 1$). Интеграл (79.20) сводится к комплексному интегралу Френеля

$$V(s)=e^{-is^2/2}\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{s}^{s\infty}e^{i\tau^2/2}\,d\tau, \qquad (79.21)$$

верхний предел которого равен ∞ при $s>0$ и $-\infty$ при $s<0$ (см. задачу 6).

При $\nu=1/2$ интеграл (79.18) принимает вид

$$v(r,\chi)=-\frac{i}{4\pi}\int\limits_{D_0}\frac{e^{ikr\cos\zeta}}{\cos\dfrac{\zeta+\chi}{2}}\,d\zeta=$$

$$=\frac{i}{\pi}\cos\frac{\chi}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2-i\infty}\frac{e^{ikr\cos\zeta\cos\dfrac{\zeta}{2}}}{\cos\zeta+\cos\chi}\,d\zeta; \qquad (79.22)$$

полагая

$$t=2\sqrt{kr}\,e^{i\pi/4}\sin\frac{\zeta}{2},\quad s=2\sqrt{kr}\cos\frac{\chi}{2};\quad \cos\zeta=1+i\,t^2/2\,kr,$$

$$\cos\chi=s^2/2\,kr-1,$$

приходим ко второму интегралу (79.20), т. е. получаем формулу

$$v(r,\chi)=V(s)\,e^{ikr},\quad s=2\sqrt{kr}\cos\frac{\chi}{2}. \qquad (79.23)$$

Таким образом, при диффракции плоской волны на полуплоскости поле в любой точке, первоначально заданное в виде ряда (79.15), согласно формулам (79.13), (79.19) и (79.23) выражается через комплексный интеграл Френеля (79.21). При произвольном угле α интеграл (79.18) можно записать в виде

$$v(r,\chi)=\frac{i\nu}{2\pi}\sin\nu\pi\int\limits_{D_0}F(\zeta+\chi)\frac{e^{ikr\cos\zeta}}{\cos\dfrac{\zeta+\chi}{2}}\,d\zeta,\quad F(\xi)=\frac{\cos\dfrac{\xi}{2}}{\cos\nu\pi-\cos\nu\xi}, \qquad (79.24)$$

где функция $F(\xi)$ остается конечной при $\xi=\pi$. Если мы интересуемся функцией $v(r,\chi)$ при $kr\gg 1$, то надо учесть, что в интеграле (79.24) существенна окрестность точки $\zeta=0$ (это видно, если от переменной ζ перейти к переменной t, введенной выше), а тогда

$F(\zeta+\chi)$ можно заменить на $F(\chi)$, в результате чего приходим к асимптотическому выражению

$$v(r, \chi) = 2\nu \sin \nu\pi \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\nu\chi - \cos\nu\pi} V(s)\, e^{ikr}, \qquad (79.25)$$

принадлежащему Паули и при $\nu=1/2$ переходящему в точную формулу (79.23).

Полученные формулы применимы и при $\alpha\leqslant\pi$ (т. е. при $\nu\geqslant 1$), однако при уменьшении α число полюсов η_m на отрезке $-\pi<\eta<\pi$ увеличивается и появляются новые плоские волны, не учитываемые формулами (79.19). Интересно отметить, что при целочисленных ν функция v тождественно обращается в нуль и точное решение сводится к сумме конечного числа плоских волн: двух при $\alpha=\pi$, четырех при $\alpha=\pi/2$, шести при $\alpha=\pi/3$ и т. д. Если возвратиться к светящейся нити, то при $\alpha=\pi$ в результате отражения возникает еще одна нить (см. § 77 и рис. 103), при $\alpha=\pi/2$ — три новые нити, при $\alpha=\pi/3$ — пять и т. д. Таким образом, в этой двухмерной задаче о возбуждении секториального рупора точечным источником ряд по рупорным волнам при $\nu=1, 2, 3, \ldots$ тождественно равен сумме конечного числа цилиндрических волн, определяемых функцией $H^{(1)}_0(kR)$.

Подведем итоги. Ряды (79.11), (79.12) и (79.15) представляют поле в виде суперпозиции цилиндрических волн. Интегралы (79.17), (79.18) и (79.22) дают представление того же самого поля в виде суперпозиции плоских волн, причем эти интегралы сводятся к интегралам Френеля, изученным в классической теории дифракции и хорошо табулированным. В результате проведенных преобразований получены формулы (79.13), (79.19) и (79.25), имеющие следующий физический смысл:

1. Если в формулах (79.19) пренебречь функцией $v(r, \chi)$ и подставить разрывные функции $u(r, \varphi\pm\varphi_0)$ в выражения (79.13), то получается геометрооптическое решение данной задачи — падающая волна (79.16) частично затеняется клином (при $\varphi_0<\alpha-\pi$) и, кроме того, возникает полубесконечная волна, отраженная от грани $\varphi=0$ (рис. 108,*а*), при $\alpha-\pi<\varphi_0<\pi$ обе грани освещены падающей волной, тени нет, но зато имеются две отраженные плоские волны (рис. 108,*б*). Различные знаки перед $u(r, \varphi+\varphi_0)$ в выражениях (79.13) объясняются тем, что $R=-1$ для E_z и $R=1$ для H_z (см. § 24).

2. Функция $v(r, \chi)$ обеспечивает непрерывность полного поля. Например, если $0<\varphi_0<\alpha-\pi$, как на рис. 106,*а*, то геометрооптическое поле терпит скачок при $\varphi=\pi+\varphi_0$, который компенсируется скачком функции $v(r, \chi)$ при $\chi=\pi$. Таким образом, функция v, выражающаяся через комплексный интеграл Френеля, определяет поправки к геометрической оптике, обусловленные дифракцией.

3. Вдали от направлений, где функция $v(r, \chi)$ терпит скачок, она имеет (при $kr\gg 1$) характер цилиндрической волны, расходящейся от ребра клина; это видно из формулы (с) задачи 6. Цилиндрическая волна проникает в область геометрической тени (об-

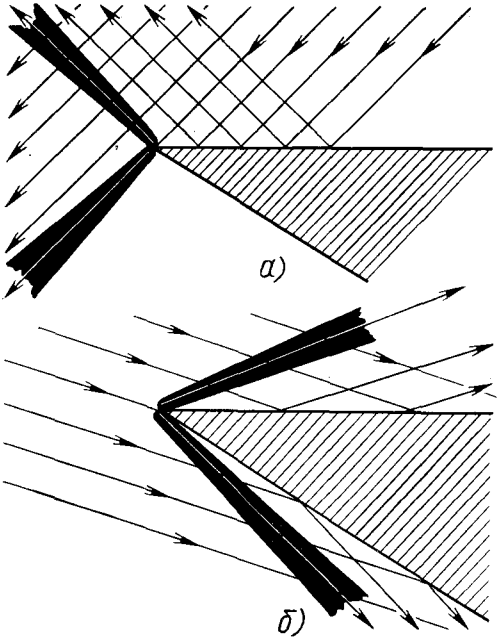


Рис. 108. Поля, возникающие при падении плоской волны на клин, согласно геометрической оптике:

а — волна освещает только грань $\varphi=0$; *б* — волна освещает обе грани; затушеваны переходные зоны, где функция v не является цилиндрической волной (т. е. где $|s| \lesssim 1$ и $|v| \sim 1$ при $kr \gg 1$)

ласть $\varphi > \pi + \varphi_0$ на рис. 106,*а*), а там, где имеются плоские волны, — накладывается на них.

Способ, примененный выше, позволяет также решить задачи о клине с цилиндрической насадкой и о круговом цилиндре в свободном пространстве (ср. конец § 78 и рис. 105), решение строится в виде разложения по цилиндрическим волнам, как в формулах (79.11) и (79.12). Такие разложения пригодны для расчетов при умеренных значениях ka (a — радиус цилиндра), при $ka \gg 1$ их приходится преобразовывать, однако на этом вопросе мы здесь останавливаться не можем.

Задачи к гл. XIV

1. Показать, что для волн, исследованных в гл. VII, условие ортогональности и норму можно сформулировать в терминах комплексной мощности.

Решение. Поскольку функции $\Pi^e(x, y)$ и $\Pi^m(x, y)$ либо вещественны, либо отличаются от вещественной функции x и y только постоянным комплексным множителем, поперечные составляющие магнитного поля удовлетворяют соотношениям

$$H_{s,x} = f_s H^*_{s,x}, \quad H_{s,y} = f_s H^*_{s,y},$$

где для затухающих волн f_s есть постоянная, абсолютная величина которой равна единице, а для распространяющихся волн f_s содержит еще множитель $e^{2ih_s z}$. В обоих случаях соотношение (75.15) можно переписать в виде

$$\int [\mathbf{E}_s \mathbf{H}^*_{s'}]_z \, dS = 0 \quad \text{при} \quad |s'| \neq |s|,$$

в соотношение (75.18) в виде

$$N_s = \mp \frac{c}{2\pi} f_s \int [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s^*] \mathbf{l}\, dS.$$

В этом случае N_s отличается множителем $\mp 4f_s$ от комплексной мощности, переносимой s-й волной через сечение $z=0$.

2. Подставляя выражения (76.16) и (76.19) в поперечные уравнения (76.14), вывести выражения для производных dC_s/dz и dC_{-s}/dz. Найти $C_s(z)$ и $C_{-s}(z)$ из начальных условий $C_s=0$ при $z<z_1$, $C_{-s}=0$ при $z>z_2$ ($s>0$).

Решение. Почленное дифференцирование рядов (76.16) и (76.19) дает тождества

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^t + \left[\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{E}^t}{\partial z}\right] = ik\mu \mathbf{H}^t + \sum \left\{ \frac{dC_s}{dz} [\mathbf{l}\, \mathbf{E}_s^t] + \frac{dC_{-s}}{dz} [\mathbf{l}\, \mathbf{E}_{-s}^t] \right\} + \frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{j}^{mt},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^t + \left[\mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{H}^t}{\partial z}\right] = -ik\varepsilon \mathbf{E}^t + \sum \left\{ \frac{dC_s}{dz} [\mathbf{l}\mathbf{H}_s^t] + \frac{dC_{-s}}{dz} [\mathbf{l}\mathbf{H}_s^t] \right\} + \frac{4\pi}{i\omega} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}^{et},$$

подстановка которых в уравнения (76.14) приводит к соотношениям

$$\Sigma \left\{ \frac{dC_s}{dz} [\mathbf{l}\, \mathbf{E}_s^t] + \frac{dC_{-s}}{dz} [\mathbf{l}\, \mathbf{E}_{-s}^t] \right\} = -\frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}^{mt} + \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}^{et} \right),$$

$$\Sigma \left\{ \frac{dC_s}{dz} [\mathbf{l}\, \mathbf{H}_s^t] + \frac{dC_{-s}}{dz} [\mathbf{l}\, \mathbf{H}_{-s}^t] \right\} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j}^{et} \quad \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{j}^{mt} \right).$$

Производные dC_s/dz и dC_{-s}/dz легко определяются из этих соотношений, если воспользоваться условием ортогональности (75.10). Для этого умножаем первое соотношение скалярно на $\mathbf{H}_{s'}$, второе — на $\mathbf{E}_{s'}$ и интегрируем по всему поперечному сечению $z=\text{const}$. В результате получаем

$$\sum_s \left\{ \frac{dC_s}{dz} \int [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_{s'}] \mathbf{l}\, dS + \frac{dC_{-s}}{dz} \int [\mathbf{E}_{-s} \mathbf{H}_{s'}] \mathbf{l}\, dS \right\} = -\frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j}^{mt} + \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}^{et} \right) \mathbf{H}_{s'}\, dS,$$

$$\sum_s \left\{ \frac{dC_s}{dz} \int [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s] \mathbf{l}\, dS + \frac{dC_{-s}}{dz} \int [\mathbf{E}_{s'} \mathbf{H}_s] \mathbf{l}\, dS \right\} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j}^{et} - \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{j}^{mt} \right) \mathbf{E}_{s'}\, dS.$$

Складывая правые и левые части, пользуясь соотношениями (75.10) и (75.11) и полагая поочередно $s'>0$ и $s'<0$, приходим к выражениям

$$N_s \frac{dC_s}{dz} = \int \left\{ \left(\mathbf{j}^{et} - \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{j}^{mt} \right) \mathbf{E}_{-s} - \left(\mathbf{j}^{mt} + \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}^{et} \right) \mathbf{H}_{-s} \right\} dS,$$

$$-N_s \frac{dC_{-s}}{dz} = \int \left\{ \left(\mathbf{j}^{et} - \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{j}^{mt} \right) \mathbf{E}_s - \left(\mathbf{j}^{mt} + \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}^{et} \right) \mathbf{H}_s \right\} dS. \quad (a)$$

Полученные интегралы можно упростить, пользуясь теоремой Стокса и тождеством (76.18), например

$$\int\left(\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\,\mathbf{j}^{m_l}\right)\mathbf{E}_s\,dS=\int\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\,j_z^m,\ \mathbf{l}\right]\mathbf{E}_s\,dS=$$

$$=-\int\left[\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}\,j_z^m,\ \mathbf{E}_s\right]\mathbf{l}\,dS=-\int\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,j_z^m\,\mathbf{E}_s\right)\mathbf{l}\,dS+$$

$$+\int\frac{1}{\mu}\,j_z^m\,\mathbf{l}\operatorname{rot}\mathbf{E}_s\,dS=-\oint\limits_C\frac{1}{\mu}\,j_z^m\,\mathbf{E}_s\,ds+ik\int j_z^m\,\mathbf{l}\,\mathbf{H}_s\,dS.$$

Если выполняются условия (при $s\gtrless 0$)

$$\oint\limits_C\frac{1}{\mu}\,j_z^m\,\mathbf{E}_s\,d\mathbf{s}=0,\quad\oint\limits_C\frac{1}{\varepsilon}\,j_z^e\,\mathbf{H}_s\,d\mathbf{s}=0,$$

где C — контур, являющийся пересечением цилиндрической поверхности S_0, ограничивающей поле (см. § 75), и поперечного сечения $z=\text{const}$, то приходим к соотношениям

$$\int\left(\operatorname{rot}\frac{1}{\mu}\,\mathbf{j}^{m_l}\right)\mathbf{E}_s\,dS=ik\int\mathbf{j}^{m_l}\,\mathbf{H}_s\,dS,$$

$$\int\left(\operatorname{rot}\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbf{j}^{e_l}\right)\mathbf{H}_s\,dS=-ik\int\mathbf{j}^{e_l}\,\mathbf{E}_s\,dS,$$

позволяющим переписать формулы (a) в более компактном виде

$$\frac{dC_s}{dz}=\frac{1}{N_s}\int\limits_{S_\perp}\left(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}_{-s}-\mathbf{j}^m\,\mathbf{H}_{-s}\right)dS,$$

$$\frac{dC_{-s}}{dz}=-\frac{1}{N_s}\int\limits_{S_\perp}\left(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}_s-\mathbf{j}^m\,\mathbf{H}_s\right)dS.$$

Интегрируя при учете начальных условий, получаем окончательно

$$C_s=\frac{1}{N_s}\int\limits_{z_1}^{z}dz\int\limits_{S_\perp}\left(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}_{-s}-\mathbf{j}^m\,\mathbf{H}_{-s}\right)dS,$$

$$C_{-s}=\frac{1}{N_s}\int\limits_{z}^{z_2}dz\int\limits_{S_\perp}\left(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}_s-\mathbf{j}^m\,\mathbf{H}_s\right)dS.$$

Эти выражения являются более подробной записью формул (76.05).

3. Вывести формулу (77.07).

Решение. Полагая в формулах (41.17) $ikgC^m=1$, получим

$$E_{1,y}=\sin gx\,e^{ihz},\qquad H_{1,x}=-\frac{h}{k}\sin gx\,e^{ihz},$$

$$E_{-1,y}=\sin gx\,e^{-ihz},\qquad H_{-1,x}=\frac{h}{k}\sin gx\,e^{-ihz},$$

где $g=\pi/a$, $h=\sqrt{k^2-g^2}$. Составляющие встречной волны ($s=-1$) получаются заменой h на $-h$. Норма

$$N_1=-\frac{c}{2\pi}\int E_{1,y}\,H_{-1,x}\,dS=-\frac{c}{2\pi}\,\frac{h}{k}\int\limits_0^a\int\limits_0^b\sin^2 gx\,dxdy=-\frac{c}{4\pi}\,\frac{hab}{k}.$$

Это выражение дает (с точностью до знака) учетверенное значение мощности, переносимое данным полем через сечение волновода.

Если элементарный диполь находится внутри прямоугольного волновода в точке $x=x_0$, $y=y_0$, $z=0$, то формулы (76.01) и (76.02) принимают вид

$$\mathbf{E}=C_1\mathbf{E}_1+\ldots,\ \mathbf{H}=C_1\mathbf{H}_1+\ldots \text{ при } z>0,$$

$$\mathbf{E}=C_{-1}\mathbf{E}_{-1}+\ldots,\ \mathbf{H}=C_{-1}\mathbf{H}_{-1}+\ldots \text{ при } z<0,$$

где индексом ± 1 обозначена распространяющаяся волна H_{10}, а многоточия соответствуют всем другим волнам.

Пользуясь формулой (77.02), получим

$$C_1=C_{-1}=-(4\pi/c)\,(k/hab)\,Jl\sin gx_0.$$

Активная мощность излучения в каждую сторону

$$\overline{\Sigma}_1=\overline{\Sigma}_{-1}=|C_1|^2\,\frac{c}{16\pi}\,\frac{hab}{k}=\frac{\pi}{c}\,\frac{k\sin^2 gx_0}{hab}\,|J|^2\,l^2.$$

Мощность $\overline{\Sigma}_0$, излучаемая диполем в свободное пространство, может быть представлена в виде

$$\overline{\Sigma}_0=\frac{1}{2}\,R_0\,|J|^2,$$

где R_0 есть сопротивление излучения диполя, определяемое формулой (77.05). Мощность $\overline{\Sigma}_1$ может быть также записана в виде

$$\overline{\Sigma}_1=\frac{1}{2}\,R_1\,|J|^2,\ R_1=(2\pi/c)\,(kl\sin gx_0)^2/khab.$$

Отсюда получается формула (77.07) для отношения R_1/R_0. В обычных условиях отношение $R/R_0=2R_1/R_0$ немного превышает единицу, если взять $x_0=a/2$. Таким образом, диполь в волноводе излучает электромагнитную энергию примерно с той же эффективностью, что и диполь в свободном пространстве.

4. Показать, что магнитный вектор Герца, соответствующий прямолинейному магнитному току J^{m} (нити), имеет единственную составляющую

$$\Pi_z^{\mathrm{m}}=-(\pi/ck)\,J^{\mathrm{m}}\,H_0^{(1)}(kr),$$

где r — расстояние от нити (параллельной оси z). Для этого вычислить составляющую E_φ вблизи нити (при $kr\ll 1$) и показать, что

$$E_\varphi=-2J^{\mathrm{m}}/cr \qquad (a)$$

в соответствии с формулой (32.07). Вывести формулу (77.18).

Решение. По формлам (18.08)

$$E_\varphi=-(\mathrm{i}\pi k/c)\,J^{\mathrm{m}}\,H_1^{(1)}(kr),\ H_z=-(\pi k/c)\,J^{\mathrm{m}}\,H_0^{(1)}(kr).$$

Поскольку согласно формулам (22.05), (22.08) и (22.11)

$$H_1^{(1)}(kr)\approx \mathrm{i}\,N_1(kr)\approx -2\,\mathrm{i}/\pi kr \text{ при } kr\ll 1$$

справедливо соотношение (a). Вместе с тем согласно формулам (22.12)

$$E_\varphi=H_z=-(\pi k/c)\,J^{\mathrm{m}}\sqrt{2/\pi kr}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\pi/4)} \text{ при } kr\gg 1,$$

так что комплексный вектор Умова — Пойнтинга имеет в дальней зоне единственную составляющую

$$\hat{\mathfrak{S}}_r = (c/8\pi)\, E_\varphi\, H_z^* = k|J^m|^2/4cr$$

и мощность излучения на единицу длины нити

$$\overline{\Sigma}_0 = \hat{\mathfrak{S}}_r\, 2\pi r = (\pi k/2c)|J^m|^2.$$

5. Пусть на оси конического рупора ($r=r_0$, $\vartheta=0$) расположен радиальный электрический диполь с моментом p. Очевидно, что он возбуждает только симметричные электрические волны, которые согласно § 55 будут определяться функцией

$$U = \sum C_s U_s \qquad \text{при } r > r_0,\ U_s = \zeta_{\nu_{0,n}}(kr)\, P_{\nu_{0,n}}(\cos\vartheta),$$

$$U = \sum C_{-s} U_{-s} \quad \text{при } r < r_0,\ U_{-s} = \psi_{\nu_{0,n}}(kr)\, P_{\nu_{0,n}}(\cos\vartheta).$$

Пользуясь формулами § 78, найти коэффициенты C_s и C_{-s}. Рассмотреть частные случаи $\gamma=\pi/2$ и $\gamma=\pi$ при $r_0\to 0$.

Р е ш е н и е. Радиальная составляющая электрического поля s-й волны в силу формул (20.16) и (23.04) равна $\nu(\nu+1)U_s/r^2$ ($\nu=\nu_{0,n}$), поэтому формулы (78.05) дают

$$C_s = -\,i\omega p\nu(\nu+1)\,\psi_\nu(kr_0)/N_s r_0^2,\quad C_{-s} = -i\omega p\nu(\nu+1)\,\zeta_\nu(kr_0)/N_s r_0^2,$$

где использовано условие $P_\nu(1)=1$ для функций Лежандра; плотность стороннего тока j^e согласно § 73 имеет единственную составляющую

$$j^e{}_r = -i\omega p\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Остается только вычислить N_s. Согласно формулам (20.16) поле s-й волны имеет поперечные составляющие

$$E_\vartheta = \frac{ik}{r}\,\zeta_\nu'(kr)\,\frac{d}{d\vartheta}\,P_\nu(\cos\vartheta),\quad H_\varphi = \frac{ik}{r}\,\zeta_\nu(kr)\,\frac{d}{d\vartheta}\,P_\nu(\cos\vartheta),$$

а при замене s на $-s$ надо вместо ζ_ν взять ψ_ν. Из формул (23.06), (23.07) и (78.03) следует, что

$$\psi_\nu(x)\,\zeta_\nu'(x) - \psi_\nu'(x)\,\zeta_\nu(x) = i,$$

а в формуле (78.02) надо положить $dS = r^2\sin\vartheta\, dr d\vartheta d\varphi$, тогда получаем

$$N_s = ck^2\int_0^\gamma \left(\frac{dP_\nu}{d\vartheta}\right)^2 \sin\vartheta\, d\vartheta,\quad \nu=\nu_{0,n}.$$

Пользуясь уравнением (23.12) и условием (57.08), путем интегрирования по частям можно представить N_s в более простом виде

$$N_s = ck^2\nu(\nu+1)N_{0,n},\quad N_{0,n} = \int_0^\gamma [P_\nu(\cos\vartheta)]^2\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

и тогда

$$C_s = \frac{2ip}{kr_0^2}\,\frac{\psi_\nu(kr_0)}{N_{0,n}},\quad C_{-s} = \frac{2ip}{kr_0^2}\,\frac{\zeta_\nu(kr_0)}{N_{0,n}}.$$

При $\gamma=\pi/2$ условие (57.08) принимает вид $P_\nu'(0)=0$ и его решениями становятся полиномы Лежандра нечетных степеней, т. е. числа $\nu_{0,n}$ образуют последовательность нечетных чисел 1, 3, 5, ... При $kr_0\to 0$ в ряде остается только первый член ($n=1$), для которого

$$\nu_{0,1}=1,\ P_1(\cos\vartheta)=\cos\vartheta,\ \psi_1(kr_0)=\sqrt{\pi kr_0/2}\,J_{3/2}(kr_0),$$

Действительно, при малых kr_0 имеем

$$J_{3/2}(kr_0)=(kr_0/2)^{3/2}\Big/\left(\frac{3}{2}!\right)=(4/3\sqrt{\pi})(kr_0/2)^{3/2},\ \psi_1(kr_0)=(kr_0)^2/3$$

и

$$\lim_{kr_0\to 0}\psi_1(kr_0)/(kr_0)^2=1/3,$$

в то время как все другие члены в пределе дают нули. Так как

$$N_{0,1}=\int_0^{\pi/2}[P_1(\cos\vartheta)]^2\sin\vartheta\,d\vartheta=\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{3},$$

то окончательно можно написать

$$U=2ikp\,\zeta_1(kr)\cos\vartheta,\ \zeta_1(kr)=-(1+i/kr)e^{ikr},$$

так что

$$E_r=-4ikp\left(1+\frac{i}{kr}\right)\frac{e^{ikr}}{r^2}\cos\vartheta,$$

$$E_\vartheta=-2k^2p\left(1+\frac{i}{kr}-\frac{1}{k^2r^2}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\sin\vartheta,$$

$$H_\varphi=-2k^2p\left(1+\frac{i}{kr}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\sin\vartheta,\ E_\varphi=H_r=H_\vartheta=0, \qquad (a)$$

что дает поле элементарного диполя с моментом $2p$, находящегося в начале координат. Удвоение момента происходит за счет отражения в плоскости (см. рис. 103,*б*). При $\gamma=\pi$ получаем поле диполя в свободном пространстве; в этом случае норма $N_{0,1}$ удваивается и в выражениях (*а*) вместо $2p$ будет просто p.

6. Исходя из формулы (79.20), найти значения $V(+0)$, $V(-0)$ и асимптотическое выражение для $V(s)$ при $s\gg 1$, используя тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}. \qquad (a)$$

Доказать эквивалентность формул (79.20) и (79.21), используя дефференциальное уравнение

$$V'(s)=-isV(s)-e^{-i\pi/4}\sqrt{2\pi}. \qquad (b)$$

Решение. Как видно из формулы (79.20), $V(s)$ есть нечетная функция s. При $s>0$ полюс подынтегральной функции в первом интеграле (79.20) расположен выше пути интегрирования, поэтому при $s=+0$, когда подынтегральная функция становится нечетной, интеграл сводится к половине вычета в точ-

ке $t=0$, следовательно, $V(+0)=\frac{1}{2}$, а $V(-0)=-\frac{1}{2}$. При $|s|\gg 1$ можно заменить $t-e^{i\pi/4}s$ на $-e^{i\pi/4}s$, и тогда приближенно

$$V(s)=e^{i\pi/4}/\sqrt{2\pi}s. \qquad (c)$$

Дифференциальное уравнение (b) для интеграла (79.20) выводится интегрированием по частям:

$$V'(s)=\frac{e^{i\pi/4}}{i\,2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}\,dt}{(t-e^{i\pi/4}s)^2}=$$

$$=-\frac{e^{i\pi/4}}{i\,2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{te^{-t^2/2}\,dt}{t-e^{i\pi/4}s}=-isV(s)-e^{-i\pi/4}/\sqrt{2\pi},$$

а для выражения (79.21) непосредственным дифференцированием. Полагая в интеграле (a) $t=e^{-i\pi/4}\tau$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau^2/2}\,d\tau=2\int_{0}^{\infty}e^{i\tau^2/2}\,d\tau=e^{i\pi/4}\sqrt{2\pi},$$

откуда видно, что выражения (79.20) и (79.21) при $s=\pm 0$ принимают одни и те же значения $\pm 1/2$ и, следовательно, тождественно равны.

Асимптотическое выражение (c) можно также получить из уравнения (b), полагая $V'(s)=0$; из уравнения (b) получаются также следующие члены *асимптотического разложения.*

Глава XV.
СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ 80. Стоячие волны в прямоугольной полости

Объемным резонатором называется часть пространства, ограниченная металлической стенкой. В таком объеме могут происходить электромагнитные колебания, поэтому на сверхвысоких частотах он имеет свойства колебательного контура с высокой добротностью. Наряду с термином «объемный резонатор» в том же смысле применяются термины: резонансная полость, резонансный объем, полый резонатор, эндовибратор и т. д. Термин «эндовибратор» введен М. С. Нейманом, которому принадлежат важные исследования этих систем.

Изучение свойств объемных резонаторов начнем с собственных (или, иначе, свободных) колебаний резонаторов простейшей формы: прямоугольных, цилиндрических и сферических. При этом предположим, что стенки резонатора обладают идеальной проводимостью, а пространство внутри резонатора имеет электромагнитные свойства пустоты ($\varepsilon=\mu=1$). В дальнейшем от этих предположений удается избавиться (см. § 84 и 85).

Собственные колебания прямоугольной полости были изучены еще в 1905 г. Джинсом в связи с теорией теплового излучения.

Полученные при этом результаты представляют интерес для современной радиотехники, поскольку прямоугольные объемные резонаторы находят широкое применение в диапазоне сантиметровых волн.

Исследуем одно из собственных колебаний полости (рис. 109), определяемой неравенствами

$$0<x<a,\ 0<y<b,\ 0<z<l, \qquad (80.01)$$

т. е. имеющей вид прямоугольного параллелепипеда в ребрами a, b, l. Электрическое поле на стенках полости должно удовлетворять граничным условиям:

$$\begin{aligned} &E_y=E_z=0 \text{ при } x=0,\ x=a;\\ &E_z=E_x=0 \text{ при } y=0,\ y=b;\\ &E_x=E_y=0 \text{ при } z=0,\ z=l. \end{aligned} \qquad (80.02)$$

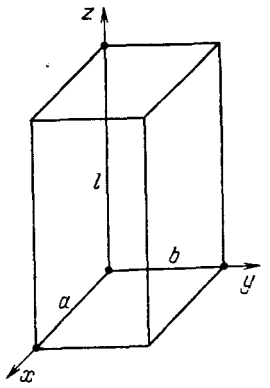


Рис. 109. Прямоугольный объемный резонатор

Потерь в полости нет, поэтому каждое из собственных колебаний будет незатухающим. Обозначим через ω круговую частоту одного из таких колебаний и через k — соответствующее ей волновое число в пустоте. Электромагнитное поле собственного колебания найдем, интегрируя комплексные уравнения поля для пустоты с учетом граничных условий (80.02). Вместо этих уравнений можно воспользоваться также уравнениями для электрического поля

$$\Delta\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{E}=0, \qquad (80.03)$$

выведенными в § 14. Первое из этих уравнений показывает, что декартовы составляющие E_x, E_y, E_z удовлетворяют скалярным волновым уравнениям; решая эти уравнения методом разделения переменных (см. § 41), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} E_x &= A\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi z}{l};\\ E_y &= B\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi z}{l}; \qquad (80.04)\\ E_z &= C\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{q\pi z}{l}, \end{aligned}$$

где A, B, C — комплексные постоянные; m, n, q — целые числа.

В выражениях (80.04) синусы обеспечивают выполнение граничных условий (80.02), а косинусы поставлены для того, чтобы можно было удовлетворить второму уравнению (80.03) с помощью надлежащего подбора постоянных A, B, C. В самом деле, из выражений (80.04) получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=-\pi\left(\frac{m}{a}A+\frac{n}{b}B+\frac{q}{l}C\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi z}{l}=0,$$

если постоянные удовлетворяют соотношению

$$\frac{m}{a}A+\frac{n}{b}B+\frac{q}{l}C=0. \tag{80.05}$$

Подставляя выражения (80.04) в волновое уравнение (80.03), находим соответствующее значение волнового числа

$$k=\pi\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2+(q/l)^2}, \tag{80.06}$$

а с помощью формулы $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{E}/ik$ получаем распределение магнитного поля

$$\begin{aligned}
H_x&=\frac{\pi}{ik}\left(\frac{n}{b}C-\frac{q}{l}B\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{q\pi z}{l};\\
H_y&=\frac{\pi}{ik}\left(\frac{q}{l}A-\frac{m}{a}C\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{q\pi z}{l};\\
H_z&=\frac{\pi}{ik}\left(\frac{m}{a}B-\frac{n}{b}A\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{q\pi z}{l}.
\end{aligned} \tag{80.07}$$

Таким образом, для каждой тройки чисел m, n, q получено решение уравнений поля, определяемое формулами (80.04) и (80.07), и имеющее волновое число (80.06). Это значит, что каждой тройке чисел соответствует собственное колебание, имеющее собственную частоту f и собственную длину волны λ:

$$f=(c/2)\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2+(q/l)^2},\ \lambda=2/\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2+(q/l)^2}. \tag{80.08}$$

Если среди чисел m, n, q нет нулей, то такой тройке чисел соответствуют два собственных колебания с одной и той же частотой, но с различной структурой поля. Действительно, в формулах для полей имеется две произвольные постоянные, скажем A и B, поскольку третья постоянная (C) выражается через A и B в силу соотношения (80.05). Полагая $A=1$, $B=0$, получаем одно электромагнитное колебание, а при $A=0$, $B=1$ — другое колебание с той же самой частотой, но иным распределением поля.

Если собственной частоте соответствует два или больше собственных колебания, то говорят о наличии вырождения, а данная собственная частота называется вырожденной или кратной. Таким образом, если индексы m, n, q все отличны от нуля, то соответствующая им собственная частота (80.08) оказывается, по крайней мере, двухкратно вырожденной. Если размеры полости a, b, l являются соизмеримыми, т. е. их отношения являются рациональными числами, то возможно вырождение более высокой кратности. Так, например, при $a=b$ и $m\neq n$ частота (80.08) имеет не менее чем четырехкратное вырождение, поскольку тройкам чисел m, n, q и n, m, q соответствует одна частота, но разные поля.

Если к синусам и косинусам в формулах (80.04) применить формулы Эйлера, то получим комбинацию слагаемых вида

$$e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)},\ \alpha=\pm m\pi/ka,\ \beta=\pm n\pi/kb,\ \gamma=\pm q\pi/kl,$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \tag{80.09}$$

т. е. согласно § 14 сумму плоских волн, распространяющихся в пустоте. Характерная особенность этих плоских волн заключается в том, что на каждом ребре параллелепипеда каждая из этих волн приобретает дополнительную фазу, кратную π; например, при переходе от $x=0$ до $x=a$ появляется фазовый множитель $e^{\pm im\pi}$ и т. д. В результате сложения этих бегущих плоских волн возникают стоячие плоские волны (80.04) с узлами тангенциального электрического поля на стенках.

Индексы m, n, q определяют направления распространения плоских волн, на которые разлагается поле собственных колебаний полости. Двухкратное вырождение собственных частот, о котором мы говорили выше, физически связано с тем, что при данном направлении распространения плоской волны ее поляризация может быть произвольной. При сложении плоских волн с одной поляризацией получается первое собственное колебание, при сложении волн с другой, перпендикулярной поляризацией приходим ко второму собственному колебанию, имеющему ту же частоту.

Собственные колебания, у которых один из индексов равен нулю, занимают особое положение. Так, например, тройке чисел m, n, 0 соответствует электромагнитное поле

$$E_z = C \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad H_x = \frac{n\pi}{ikb} C \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \qquad (80.10)$$

$$H_y = -\frac{m\pi}{ika} C \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad E_x = E_y = H_z = 0,$$

автоматически удовлетворяющее второму уравнению (80.03). Если в нуль обращаются два индекса, то поле тождественно исчезает и такие тройки индексов собственных колебаний не дают.

Электромагнитное поле (80.10) колеблется с собственной частотой

$$f = (c/2)\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \qquad (80.11)$$

Эта частота может быть невырожденной, поскольку тройке чисел m, n, 0 соответствует лишь одно собственное колебание (80.10), которое зависит от единственной постоянной C, определяющей его амплитуду.

Простейшее колебание в полости получим при $m=1$, $n=1$, $q=0$. Это колебание 110 имеет частоту

$$f = (c/2)\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}. \qquad (80.12)$$

Если выполняются условия $a>l$, $b>l$, то эта частота будет наименьшей среди всех частот (80.08), притом невырожденной.

Колебание резонатора называется основным колебанием, если оно имеет наинизшую собственную частоту. Колебание 110 является (при условиях $a>l$, $b>l$) основным колебанием прямоугольного резонатора и широко применяется на практике. Структура электромагнитного поля этого колебания изображена на рис. 110: электрические силовые линии образуют пучок прямых, параллель-

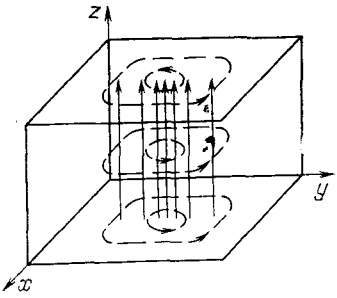


Рис. 110. Колебание 110 в прямоугольном резонаторе

ных оси z, наиболее густой при $x=a/2$, $y=b/2$, а магнитные силовые линии охватывают этот пучок замкнутыми кольцами неправильной формы. Легко показать, что форма магнитных силовых линий та же, что у волны E_{11} в прямоугольном волноводе (см. рис. 35), да и само колебание 110 можно назвать колебанием E_{110} (см. § 81).

В заключение отметим следующую особенность формул (20.10): в выражения для магнитного поля входит множитель $\pm i$, отсутствующий у электрического поля. Это значит, что магнитное поле находится в квадратуре с электрическим, т. е. сдвинуто по фазе на $\pm\pi/2$. Возвращаясь от комплексных амплитуд к мгновенным значениям полей с помощью формул (2.01), видим, что при некоторых t электрическое поле исчезает во всем объеме резонатора, а магнитное поле при этом принимает максимальные значения (по абсолютной величине); через четверть периода исчезает магнитное поле, а электрическое достигает максимума и т. д. Таким образом, при собственных колебаниях электромагнитная энергия дважды за период является чисто электрической и дважды чисто магнитной, причем происходит непрерывный переход энергии из электрической формы в магнитную и наоборот. Те же энергетические процессы происходят при свободных колебаниях обычных резонансных контуров L, C, а также других объемных резонаторов без потерь, рассмотренных ниже в § 81 и 82. При наличии потерь разность фаз $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ уже не равна $\pm\pi/2$ (см. § 84 и 85).

§ 81. Цилиндрические резонаторы

Цилиндрическим резонатором в общем случае называется отрезок волновода, ограниченный двумя металлическими поперечными стенками $z=\text{const}$. Рассмотренный выше прямоугольный объемный резонатор есть частный случай цилиндрического резонатора, поскольку его можно получить из прямоугольного волновода введением поперечных закорачивающих стенок при $z=0$ и $z=l$. Цилиндрический резонатор в узком смысле образован конечным отрезком круглого волновода, заключенным между двумя поперечными перегородками — основаниями кругового цилиндра (рис. 111).

Теорию собственных колебаний цилиндрического резонатора (при произвольной форме его поперечного сечения) можно развить, опираясь на теорию волн в волноводах с соответствующим поперечным сечением. Если основания цилиндрического объема имеют координаты $z=0$ и $z=l$, то следует рассматривать электро-

магнитное поле при $0<z<l$, причем оно должно удовлетворять граничным условиям

$$E_x=E_y=0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=l \qquad (81.01)$$

и соответствующим условиям на боковой поверхности резонатора. Последние условия удовлетворятся, если взять поле в виде электрической или магнитной волны в соответствующем волноводе, причем для выполнения условий (81.01) нужно, очевидно, брать стоячую волну, а не бегущую.

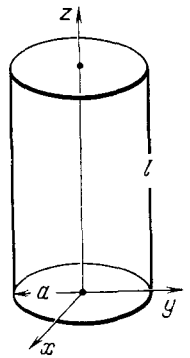


Рис. 111. Цилиндрический объемный резонатор (круглый цилиндр)

Стоячие электрические волны в цилиндрических резонаторах получаются с помощью электрического вектора Герца с единственной составляющей $\Pi^e_z=\Pi^e\cos hz$, где $\Pi^e=\Pi^e(x, y)$ — та же функция, что и в § 39, а h — соответствующее продольное волновое число. Электромагнитное поле таких волн определяется формулами

$$E_x=-h\frac{\partial\Pi^e}{\partial x}\sin hz,\ E_y=-h\frac{\partial\Pi^e}{\partial y}\sin hz,\ E_z=g^2\Pi^e\cos hz,$$

$$H_x=-ik\frac{\partial\Pi^e}{\partial y}\cos hz,\ H_y=ik\frac{\partial\Pi^e}{\partial x}\cos hz,\ H_z=0, \qquad (81.02)$$

заменяющими формулы (39.05).

В выражении для Π^e_z был взят $\cos hz$ (а не $\sin hz$), чтобы удовлетворить условию (81.01) при $z=0$. Соответствующее условие при $z=l$ приводит к соотношению $\sin hl=0$, откуда

$$h=q\pi l,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (81.03)$$

При выполнении этих условий формулы (81.02) дают электромагнитное поле собственного колебания, имеющее в пустоте волновое число

$$k=\omega/c=\sqrt{g^2+(q\pi/l)^2},\ q=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (81.04)$$

где g — поперечное волновое число соответствующей электрической волны в волноводе.

Стоячие магнитные волны в цилиндрических резонаторах можно рассчитать с помощью магнитного вектора Герца, имеющего одну составляющую $\Pi^m_z=\Pi^m\sin hz$, где $\Pi^m=\Pi^m(x, y)$ — та же функция, что и в § 40, а h — продольное волновое число соответствующей волны в волноводе. Поле стоячей магнитной волны имеет составляющие

$$E_x=ik\frac{\partial\Pi^m}{\partial y}\sin hz,\ E_y=-ik\frac{\partial\Pi^m}{\partial x}\sin hz,\ E_z=0,$$

$$H_x=h\frac{\partial\Pi^m}{\partial x}\cos hz,\ H_y=h\frac{\partial\Pi^m}{\partial y}\cos hz,\ H_z=g^2\Pi^m\sin hz, \qquad (81.05)$$

автоматически удовлетворяющие условиям (81.01) при $z=0$. При $z=l$ составляющие E_x и E_y исчезают, если выполняется дополнительное условие $\sin hl=0$, которое приводит к соотношению

$$h=q\pi/l,\ q=1,\ 2,\ \ldots, \tag{81.06}$$

поскольку значение $q=0$ в данном случае недопустимо. Формулы (81.05) и (81.06) определяют колебание с волновым числом

$$k=\sqrt{g^2+(q\pi/l)^2},\ q=1,\ 2,\ \ldots \tag{81.07}$$

Волны в круглом и прямоугольном волноводах обозначаются обычно как E_{mn} и H_{mn} (см. § 41 и 42). Колебания соответствующего цилиндрического резонатора обозначаются аналогичным образом, но с добавлением третьего индекса q, входящего в формулы (81.03) и (81.06). Если g есть поперечное волновое число волны E_{mn}, то формула (81.04) определяет собственную частоту колебания E_{mnq} в цилиндрическом резонаторе, а формулы (81.02) — его поле. Если же g соответствует волне H_{mn} в волноводе, то по формуле (81.07) получаем частоту колебания H_{mnq} в резонаторе, а по формулам (81.05) — его поле.

Так определяются колебания E_{mnq} и H_{mnq} в цилиндрических резонаторах, причем колебания E_{mn0} существуют, а колебания H_{mn0} отсутствуют. Формула (81.04) показывает, что собственная частота колебания E_{mn0} совпадает с критической частотой волны E_{mn} в волноводе ($k=g$). Собственные частоты всех других колебаний E_{mnq} (или H_{mnq}) выше критических частот соответствующих волн E_{mn} (или H_{mn}) в волноводе.

Как уже отмечалось в § 80, основным колебанием резонатора называется колебание с наинизшей собственной частотой. Из формул (81.04) и (81.07) следует, что для длинных резонаторов (l велико) основным колебанием будет магнитная стоячая волна с индексом $q=1$; для коротких резонаторов (l мало) основным колебанием будет электрическая стоячая волна с индексом $q=0$, поскольку при $q\neq 0$ второе слагаемое под корнем в формулах (81.04) и (81.07) будет велико. Так, для кругового цилиндра основным колебанием может быть либо колебание E_{010} с волновым числом $k=2{,}405/a$, либо колебание H_{111} с волновым числом

$$k=\sqrt{(1{,}841/a)^2+(\pi/l)^2}. \tag{81.08}$$

Собственные частоты этих колебаний совпадают при $l/2a\approx 1{,}015$. При бо́льших отношениях $l/2a$ колебание H_{111} является основным, причем его частота является двухкратной (поляризационное вырождение, см. § 42). При меньших отношениях $l/2a$ основным будет колебание E_{010}, частоту которого нетрудно вычислить по формуле $k=2{,}405/a$. Эта частота не зависит от длины резонатора l и является невырожденной. Обычно в цилиндрических резонаторах применяется колебание E_{010}, причем $l<2a$. На рис. 112 и 113 изображено распределение электрических (сплошных) и магнитных (штриховых) силовых линий в цилиндрическом резонаторе при колебаниях E_{010} и H_{111}.

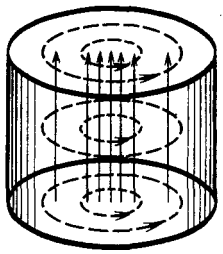


Рис. 112. Колебание E_{010} в цилиндрическом резонаторе

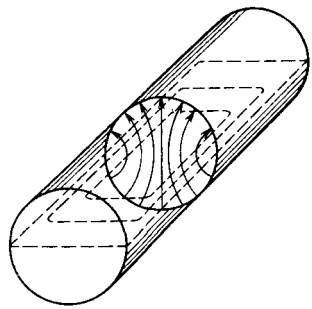


Рис. 113. Колебание H_{111} в цилиндрическом резонаторе

Выведенные выше соотношения можно применить к прямоугольной полости, рассматривая ее как отрезок прямоугольного волновода. Поскольку для волн E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$g^2=(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2, \tag{81.09}$$

то при подстановке этого выражения в формулы (81.04) и (81.07) приходим к соотношению (80.06), полученному в § 80 несколько иным способом. В обозначениях этого параграфа собственное колебание (80.10) прямоугольной полости можно назвать колебанием E_{mn0} (и в частности, колебание 110, изображенное на рис. 110, — колебанием E_{110}), поскольку поля (80.10) получаются из формул (81.02), если положить

$$\Pi^e=(C/g^2)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\quad h=0. \tag{81.10}$$

Отмеченное в § 80 двухкратное вырождение собственных частот объясняется с волноводной точки зрения тем, что волна E_{mn} и H_{mn} имеют одинаковое поперечное волновое число (81.09). Этого вырождения нет при $q=0$, поскольку колебания H_{mn0} в резонаторе отсутствуют, а также при $m=0$ или $n=0$, поскольку волн E_{0n} и E_{m0} в волноводе не бывает.

Следует, однако, признать, что волноводная трактовка прямоугольной полости является искусственной, поскольку ось z никак не отличается для этой полости от осей x и y; при выборе оси x в качестве оси волновода колебание 110 (см. рис. 110) придется назвать уже колебанием H_{101}. Поэтому изложение, данное в § 80, представляется более естественным.

В заключение рассмотрим собственные колебания отрезка коаксиальной линии, закороченной с обоих концов поперечными перегородками $z=0$ и $z=l$. Рассматривая коаксиальную линию как особый случай волновода (§ 45), получим колебания E_{mnq} и H_{mnq} в коаксиальном резонаторе. В коаксиальной линии существует также основная (поперечная) волна, поле которой вычисляется с помощью составляющей Π^e_z электрического вектора Герца (§ 29). Поэтому стоячую основную волну можно получить из формул

(81.02) и (81.03), полагая в них $g=0$ и $h=k$. С учетом формулы (29.10) получаем

$$E_r = (A/r)\sin kz,\quad H_\varphi = -\mathrm{i}\,(A/r)\cos kz, \tag{81.11}$$

причем

$$k=q\pi/l,\quad q=1,\ 2,\ \ldots \tag{81.12}$$

Если основную волну в коаксиальной линии назвать (условно) волной E_{00}, то соответствующие колебания в коаксиальном резонаторе будут обозначаться как E_{00q}. Собственная частота и собственная длина волны колебания E_{00q} равны $f=cq/2l$ и $\lambda=2l/q$ соответственно. Колебание E_{001} является основным лишь в достаточно длинном коаксиальном резонаторе (см. выше соображения о цилиндрических резонаторах).

§ 82*. Сферический резонатор

Собственные колебания сферической полости радиуса a могут быть исследованы с помощью функций U и V, введенных в § 20. Функция U определяет по формулам (20.16) поле электрических колебаний в сферической полости, а функция V дает по формулам (20.17) поле магнитных колебаний. Сами функции U и V должны удовлетворять уравнению (20.18), подробно исследованному в § 23. Частные решения этого уравнения имеют вид

$$U = A\,\psi_\nu(kr)\,P_\nu^m(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix} \tag{82.01}$$

и

$$V = B\,\psi_\mu(kr)\,P_\mu^m(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}, \tag{82.02}$$

причем функции $\zeta_\nu(kr)$ и $\zeta_\mu(kr)$, приводящие к бесконечно большим полям при $r=a$, исключаются. Индексы m должны быть целыми ($m=0,\ 1,\ 2,\ldots$) в силу однозначности полей в каждой точке пространства внутри сферы. Индексы ν и μ также должны быть целыми ($\nu,\ \mu=1,\ 2,\ldots$) в силу конечности полей при $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$ (см. § 23). Поскольку

$$P_0(\cos\vartheta)=1,\quad P_0^m(\cos\vartheta)=0\ \ (m=1,\ 2,\ldots), \tag{82.03}$$

то при обращении ν и μ в нуль электромагнитное поле по формулам (20.16) и (20.17) также равно нулю.

При $r=a$ на идеально проводящей стенке полости должны выполняться граничные условия (78.06) и (78.07). Поэтому собственные частоты электрических волн находятся из уравнения

$$\psi'_\nu(ka)=0,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots, \tag{82.04}$$

а собственные частоты магнитных волн — из уравнения

$$\psi_\mu(ka)=0,\quad \mu=1,\ 2,\ldots \tag{82.05}$$

Если целое число ν или μ обозначить через n, то q-й положительный корень уравнения (82.04) по определению дает собственную частоту колебания E_{mnq}, а q-й положительный корень уравнения (82.05) — частоту колебания H_{mnq} в сферическом резонаторе.

Собственные частоты сферического резонатора, получаемые из уравнений (82.04) и (82.05), не зависят от индекса m, а зависят лишь от индексов n и q. Поскольку при каждом n существует $2n+1$ различных угловых функций $P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi$ и $P_n^m(\cos\vartheta)\times\sin m\varphi$ (см. конец § 23), то каждая собственная частота имеет кратность $2n+1$. Это вырождение вызвано высокой степенью симметрии сферы. Выбор оси z ($\vartheta=0$) для сферы произволен, при ином выборе получаются новые колебания, являющиеся линейными комбинациями прежних колебаний с одной и той же собственной частотой.

Для грубой оценки корней уравнений (82.04) и (82.05) воспользуемся асимптотическими выражениями. В силу формулы (23.08) при больших значениях ka имеем

$$\psi'_\nu(ka)=-\sin[ka-(\nu+1)\pi/2],$$
$$\psi_\mu(ka)=\cos[ka-(\mu+1)\pi/2], \qquad (82.06)$$

поэтому корни уравнения (82.04) приближенно равны

$$ka=\nu\pi/2+(q-1/2)\pi \quad (q=1,\ 2,\ \ldots), \qquad (82.07)$$

а корни уравнения (82.05)

$$ka=\mu\pi/2+q\pi \quad (q=1,\ 2,\ldots). \qquad (82.08)$$

Формулы (82.07) и (82.08) дают тем лучшее приближение, чем меньше ν и μ и чем больше q. При небольших q ($q=1$ или 2) эти формулы дают погрешность, но не очень большую. Так, при $\nu=1$ наименьший корень уравнения (82.04) $ka=2{,}75$ ($\lambda=2{,}28a$), в то время как по формуле (82.07) при $q=1$ получаем $ka=\pi$. При $\mu=1$ наименьший корень уравнения (82.05) $ka=4{,}50$ ($\lambda=1{,}40a$), в то время как формула (82.08) дает $ka=3\pi/4$ при $q=1$.

Согласно введенной выше классификации значение $ka=2{,}75$ определяет частоту собственного колебания E_{011}, а значение $ka=4{,}50$ — частоту колебания H_{011}. Как видно из приближенных выражений (82.07) и (82.08), все остальные колебания имеют более высокие собственные частоты, так что колебание E_{011} является

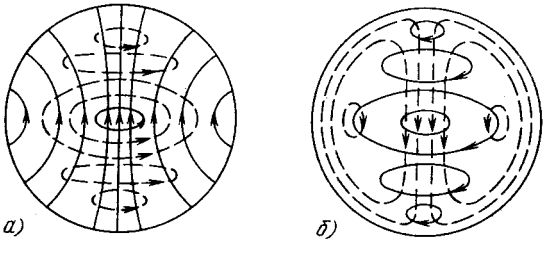


Рис. 114. Колебания E_{011} и H_{011} в сферическом резонаторе (ось z направлена вертикально)

основным. Его частота является трехкратно вырожденной, поскольку оба колебания E_{111} (функция U которых пропорциональна $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$) имеют ту же собственную частоту. Собственному значению $ka=4{,}50$ соответствуют также еще два колебания H_{111}. Вырождение этих значений ka трехкратное, поскольку $2n+1=3$ при $n=1$.

На рис. 114 изображены силовые линии колебаний E_{011} и H_{011} в сферической полости. Легко показать, что поля колебаний E_{111} и H_{111} получаются поворотом полей E_{011} и H_{011} на угол $\pi/2$ в плоскости x, z или y, z.

§ 83. Квазистатический расчет резонаторов сложной формы

Рассмотренные выше резонаторы простейшей формы имеют следующую особенность: длина волны основного колебания этих резонаторов равна (по порядку величины) их наибольшему размеру. Например, для кубической полости по формуле (80.12) получаем $\lambda=\sqrt{2}a$, где a — ребро куба.

Объемные резонаторы находят широкое применение в электронике сверхвысоких частот. Однако рассмотренное выше колебание не может эффективно взаимодействовать с электронным потоком ввиду того, что период колебания $T=\sqrt{2}a/c$ составляет малую часть времени пролета электронов через резонатор $T_e=a/v_e$, где v_e — средняя скорость электронов, которая обычно значительно меньше c. При своем движении через резонатор (например, в вертикальном направлении на рис. 110 — вдоль электрических силовых линий) электрон подвергается попеременно то ускорению в одном полупериоде колебания, то замедлению в другом полупериоде. В результате обмен энергией между ним и полем незначителен.

Время пролета можно уменьшить, взяв вместо куба квадратную призму с достаточно малой высотой l: время T_e соответственно уменьшается, а время T остается прежним (поскольку оно от l не зависит). Однако такие резонаторы имеют малую добротность (см. § 86). Для увеличения объема резонатора и его добротности необходимо, оставляя длину l пролетного промежутка малой, создавать дополнительные резервуары энергии. По такому принципу получаются тороидальные резонаторы для клистронов (рис. 115,*а* и *б*) и каждая камера в резонаторе магнетрона (рис. 115,*в*). Эти резонансные полости сложной формы отличаются от рассмотренных ранее объемов простой формы тем, что длина волны основного колебания значительно превышает их размеры, т. е. $kD\ll 1$, где D — наибольший размер резонатора; k — волновое число, соответствующее частоте основного колебания.

Условие $kD\ll 1$ (оно называется условием квазистатичности) показывает, что при частотах, меньших или примерно равных собственной частоте основного колебания, резонатор можно рассматривать как колебательный контур с сосредоточенными постоянными.

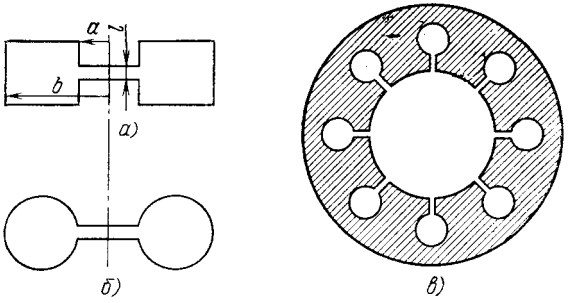


Рис. 115. Резонаторы сложной формы:
а — тороидальный (тор прямоугольного сечения); *б* — тороидальный (тор кругового сечения); *в* — многокамерный резонатор магнетрона

В тороидальных резонаторах, изображенных на рис. 115,*а* и *б*, можно выделить емкостной объем, заключенный между параллельными пластинами, и индуктивный объем, т. е. собственно тороидальную часть резонатора. Эквивалентная схема такого резонатора изображена на рис. 116,*а* (омические потери пока не учитываются), да и сам тороидальный резонатор можно себе представить как одновитковый резонансный контур (рис. 116,*б*), индуктивный виток которого превращен в тороидальную поверхность резонатора, защищающую электромагнитное поле от потерь на излучение.

Параметры C и L тороидального резонатора нетрудно вычислить. Емкость $C=e/U$ (e — заряд на пластине конденсатора, U — напряжение между пластинами) можно, очевидно, вычислить по элементарной формуле $C=S_0/4\pi l$, где $S_0=\pi a^2$ есть площадь пластин; a — их радиус; l — расстояние между ними. Как известно, эта формула не учитывает краевых эффектов и поэтому применима лишь при условии $a \gg l$. Индуктивность определяется формулой $L=\Psi/J$, где J — ток, обтекающий внутреннюю поверхность тора, а

$$\Psi = \frac{1}{c} \int B_n \, dS \qquad (83.01)$$

есть умноженный на $1/c$ магнитный поток через меридиональное сечение тора. При вычислении Ψ можно (из-за малости зазора l) считать тор замкнутым. Применяя известное соотношение

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c} J$$

к окружности радиуса r, получаем

$$H_\varphi = 2J/cr. \qquad (83.02)$$

Последнее выражение показывает, что магнитное поле непостоянно по сечению тора. В обычной катушке (соленоиде), изогнутой в виде тора, магнитное поле также неоднородно; лишь в прямой катушке осуществляется однородное магнитное поле.

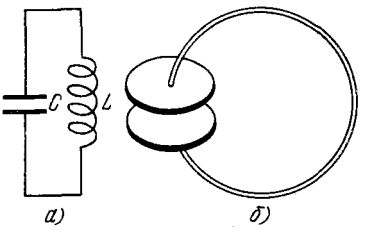


Рис. 116. К теории тороидальных резонаторов:
***а* — эквивалентная схема; *б* — одновитковый контур**

Рассматривая поле в пустоте, в формуле (83.01) полагаем $B_n = H_\varphi$. Если обозначить через $\bar{r}$ средний радиус кривизны тора, определяемой формулой

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{S_1} \int \frac{dS}{r}, \tag{83.03}$$

где S_1 — площадь меридионального сечения тора, по которому происходит интегрирование, то $\Psi = 2JS_1/c^2\bar{r}$, так что индуктивность тора $L = 2S_1/c^2\bar{r}$. Для прямоугольного тора высоты H имеем

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{H}{S_1} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{H}{S_1} \ln \frac{b}{a}$$

(радиусы a и b изображены на рис. 115,*а*) и

$$S_1 = H(b-a), \quad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{b-a} \ln \frac{b}{a}. \tag{83.04}$$

Собственная круговая частота данного объемного резонатора ω и соответствующая длина волны λ вычисляются по формулам

$$\omega = 1/\sqrt{LC}, \quad \lambda = 2\pi c \sqrt{LC}, \tag{83.05}$$

т. е.

$$\lambda = \sqrt{2\pi S_0 S_1/\bar{lr}}. \tag{83.06}$$

Это выражение справедливо, если выполняется условие

$$D\sqrt{2\pi \bar{lr}/S_0 S_1} \ll 1, \tag{83.07}$$

вытекающее из условия $kD \ll 1$.

Для прямоугольного тора можно записать условие (83.07) в виде

$$(D/a)\sqrt{2l/H \ln(b/a)} \ll 1, \tag{83.08}$$

причем оно должно выполняться при $D = 2b$ и при $D = H$. Отсюда видно, что данный расчет дает правильные результаты при $l \ll H$, т. е. при достаточно малом емкостном зазоре l. При $l = H$ и $D = 2b$ левая часть неравенства (83.08) становится больше единицы: в этом случае тороидальный резонатор приобретает правильную цилиндрическую форму, и его нужно рассчитывать электродинамическим методом (§ 81). При слишком больших H и при $D = H$ неравенство (83.08) начинает плохо выполняться: в этом случае собственно тороидальный объем резонатора вытягивается в отрезок коаксиальной линии, внутренний проводник которого имеет зазор l, и необходимо учитывать стоячую волну на отрезке H. При увеличении внешнего радиуса тора b необходимо принимать во внимание волны в радиальном направлении (стоячая цилиндрическая волна).

За исключением отмеченных выше особых случаев, в которых необходим иной теоретический подход, формула (83.06) дает в первом приближении длину волны основного колебания. Все дру-

гие (более высокие) собственные частоты тороидального резонатора вычислять данным методом нельзя.

При электродинамическом расчете собственных колебаний тороидального резонатора его объем мысленно разделяют на два объема простой формы. Например, прямоугольный тороидальный резонатор можно рассматривать как коаксиальный резонатор (длина H, радиусы a и b), связанный с цилиндрическим резонатором (длина l, радиус основания a) через боковую поверхность последнего. В результате электродинамического взаимодействия этих простых резонаторов получается новый резонатор со своим спектром собственных частот. Электромагнитное поле в таком резонаторе сложной формы обычно получают, взяв достаточно общие выражения для полей в каждой из частичных областей (в цилиндрическом и коаксиальном объеме) и сшивая их на границе областей (см. гл. XII).

Мы не будем здесь останавливаться на электродинамической теории резонаторов сложной формы, поскольку она ведет к весьма громоздким выражениям. Заметим лишь, что для основного колебания, представляющего наибольший практический интерес, электродинамическая теория дает поправки к изложенной выше простой теории. Во-первых, в формуле (83.06) появляются поправочные множители, зависящие лишь от геометрических параметров резонатора (l, H, a и b). Эти поправочные множители, по существу, учитывают емкость и индуктивность рассеяния, возникающие вследствие проникания электрического поля в тор и магнитного поля — в емкостной промежуток. Во-вторых, электродинамический расчет дает волновые поправки, которыми уже нельзя пренебрегать при нарушении условия (83.08).

Данный (квазистатический) метод позволяет рассчитать резонансную частоту каждой из камер магнетрона (см. рис. 115,*в*), имеющей ту же эквивалентную схему (см. рис. 116,*а*), этот расчет проведен в задаче 1. Взаимодействие между камерами приводит к расщеплению этой частоты.

§ 84. Свойства резонатора, заполненного однородным веществом

С помощью леммы § 21 можно перейти к резонаторам, заполненным однородным веществом с произвольными проницаемостями $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$ и $\mu=\mu(\omega)$. Для этого в качестве вспомогательного поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ нужно взять поле в пустом резонаторе, колеблющееся с собственной частотой $\tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega}$ — вещественное число). В заполненном резонаторе будем иметь поле $\mathbf{E}=\tilde{\mathbf{E}}/\sqrt{\varepsilon}$, $\mathbf{H}=\tilde{\mathbf{H}}/\sqrt{\mu}$, так что на стенке резонатора удовлетворяется граничное условие $E_t=0$, коль скоро вспомогательное поле ему удовлетворяет. Частота этого колебания

$$\omega=\tilde{\omega}/\sqrt{\varepsilon\mu}. \qquad (84.01)$$

При наличии потерь (комплексные ε и μ) частота ω получается комплексной, $\omega=\omega'-i\omega''$, $\omega''>0$, т. е. соответствует затухающим колебаниям. Это значит, что мгновенные значения полей, связан-

ные с комплексными амплитудами $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\omega)$ и $\mathbf{H}=\mathbf{H}(\omega)$ формулами (2.01), определяются выражениями

$$\mathbf{E}(t)=\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}e^{-i\omega' t})\,e^{-\omega'' t},\quad \mathbf{H}(t)=\mathrm{Re}\,(\mathbf{H}e^{-i\omega' t})\,e^{-\omega'' t}. \qquad (84.02)$$

С помощью формулы (84.01) вычисляется затухание колебаний, вызванное, например, проводимостью воздуха, заполняющего резонатор. Для этого комплексную диэлектрическую проницаемость ε воздуха достаточно взять при частоте $\tilde{\omega}$ собственных колебаний пустого резонатора, поскольку она мало отличается от ω, а магнитную проницаемость μ положить равной единице.

Величина ω'' называется коэффициентом затухания. Поскольку период колебания $T=2\pi/\omega'$, декремент затухания

$$\delta=\omega'' T=2\pi\omega''/\omega', \qquad (84.03)$$

а добротность колебания

$$Q=\pi/\delta=\omega'/2\omega''. \qquad (84.04)$$

Более тщательное исследование формулы (84.01) показывает, что она дает частоту ω лишь в неявной форме, точнее, в силу зависимостей $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$ и $\mu=\mu(\omega)$ является уравнением для ω. Так обстоит дело, если мы интересуемся свободными колебаниями в резонаторе, т. е. колебаниями, происходящими при отсутствии источников. В § 80 термины «собственные колебания» и «свободные колебания» рассматривались как синонимы, однако теперь при учете дисперсии и потерь их следует различать. Исследование *свободных* колебаний в резонаторе с поглощающей и диспергирующей средой связано с решением этого уравнения, для чего нужно знать функции $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в широком диапазоне частот, в том числе комплексных. Эта трудность не является отличительной особенностью объемных резонаторов: она имеется в теории обычных резонансных контуров (см. рис. 116,*а*), если там $C=\varepsilon\tilde{C}$ и $L=\mu\tilde{L}$, где ε — комплексная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего конденсатор; μ — комплексная магнитная проницаемость сердечника в катушке; $\tilde{C}$ — емкость пустого конденсатора; $\tilde{L}$ — индуктивность пустой катушки. Собственная частота такого контура также определяется формулой (84.01), где $\tilde{\omega}=1/\sqrt{\tilde{L}\tilde{C}}$.

Обычно уравнение (84.01) решать не приходится, поскольку свободные колебания объемных резонаторов и резонансных контуров имеют по большей части теоретический интерес, а практически важны лишь вынужденные колебания этих систем (см. § 88). При построении теории вынужденных колебаний резонаторов оказывается, что для получения решения нужны не свободные колебания резонатора, а его собственные колебания, точнее, собственные колебания некоторого вспомогательного резонатора, заполнение которого имеет при всех собственных частотах те же проницаемости ε и μ, которые данный резонатор имеет при частоте вынужденных колебаний (см. § 90). В такой постановке формула (84.01) дает явное выражение для ω.

В резонаторах без потерь поля **E** и **H** находятся в квадратуре (для невырожденного колебания; см. конец § 80). В данной задаче разность фаз между полями **E** и **H** составляет $\pm\pi/2+(\Delta-\delta)/2$, где δ и Δ — углы электрических и магнитных потерь (см. § 2).

§ 85. Влияние кнечной проводимости стенок на свободные колебания резонатора

Свободные колебания в пустых резонаторах затухают вследствие потерь в стенках. Поэтому частоты свободных колебаний являются слегка комплексными, как при наличии потерь в веществе, заполняющем резонатор (см. § 84). Это значит, что мгновенные значения полей затухают по экспоненциальному закону (пропорционально $e^{-\omega'' t}$), а энергия электромагнитного поля в резонаторе — по закону

$$\overline{W}(t)=\overline{W}(0)\,e^{-2\omega'' t},\quad d\overline{W}/dt=-2\omega''\,\overline{W}. \tag{85.01}$$

Приближенное значение коэффициента затухания ω'' можно найти, если использовать закон сохранения энергии (1.11), усреднив его по периоду колебания:

$$d\overline{W}/dt+\overline{P}+\overline{\Sigma}=0, \tag{85.02}$$

где усреднение обозначено чертой наверху. Этот закон удобно применить к объему резонатора V, ограниченному поверхностью стенки S. Токи в стенке расположены вне объема V, и потому $\overline{P}=0$. Сочетая формулы (85.01) и (85.02), получаем коэффициент затухания в виде

$$\omega''=\overline{\Sigma}/2\overline{W}. \tag{85.03}$$

Величину $\overline{\Sigma}$ — среднюю мощность, вытекающую из объема и поступающую в стенку резонатора, нетрудно вычислить с помощью теории сильного скин-эффекта. Согласно задаче 1 к гл. IV получаем

$$\overline{\Sigma}=-\operatorname{Re}\hat{\Sigma}=\frac{c}{8\pi}\oint \operatorname{Re}\zeta\,|H_t|^2\,dS,\quad |H_t|=|[\mathbf{nH}]| \tag{85.04}$$

и для однородной стенки, волновой импеданс которой постоянен, будем иметь

$$\overline{\Sigma}=\frac{c}{8\pi}\,\zeta'\oint |H_t|^2\,dS,\quad \zeta'=\operatorname{Re}\zeta. \tag{85.05}$$

Энергетическая формула (85.03) для резонаторов аналогична такой же формуле (51.11) для волноводов. Обе формулы применяются обычно для приближенных расчетов, исходя из тех полей, которые найдены в предположении об идеальной проводимости стенок (см. § 51). Применительно к резонаторам это означает, что H_t в формулах (85.04) и (85.05) отождествляется с тангенциаль-

ным магнитным полем на стенке идеального резонатора, а средняя энергия поля

$$\overline{W} = \frac{1}{16\pi} \int (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2)\, dV \tag{85.06}$$

также вычисляется для идеального резонатора. Если к колебанию в таком резонаторе применить теорему о реактивной мощности (6.26), то вследствие идеальности стенок и отсутствия сторонних токов в объеме V

$$\int |\mathbf{E}|^2\, dV = \int |\mathbf{H}|^2\, dV \tag{85.07}$$

и формулу (85.06) можно переписать в виде

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi} \int |\mathbf{H}|^2\, dV, \tag{85.08}$$

более удобном для расчетов. Согласно соотношению (85.07) среднее значение электрической энергии равно среднему значению магнитной энергии. Поэтому полная энергия (85.06) равна удвоенной средней магнитной энергии (85.08).

Окончательная формула для коэффициента затухания имеет вид

$$\omega'' = c\zeta'/2D, \quad D = \int |\mathbf{H}|^2\, dV / \oint |H_t|^2\, dS. \tag{85.09}$$

Смысл величины D, имеющей размерность длины, рассмотрен в § 86.

Выше был использован метод возмущений, использующий малость параметра в граничных условиях Леонтовича (25.04) и то обстоятельство, что при $\zeta = 0$ эти условия переходят в граничные условия для идеального проводника. При систематическом проведении метода возмущений следует поля представлять в виде ряда (см. § 53)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \zeta \mathbf{E}_1 + \ldots, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \zeta \mathbf{H}_1 + \ldots \tag{85.10}$$

и в таком же виде искать собственную частоту

$$\omega = \omega_0 + \zeta\omega_1 + \ldots \tag{85.11}$$

Величины $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ и ω_0 относятся к идеальному резонатору, вторые слагаемые дают поправку на конечную проводимость стенок. Эта поправка мала, поэтому можно брать значение волнового импеданса на частоте ω_0. Поправка к распределению поля — порядка $|\zeta|$, т. е. обычно порядка $1/Q$ (если $kD \sim 1$).

Взяв мнимую часть соотношения (85.11), получим

$$\omega'' = -\zeta' \operatorname{Im} \omega_1 - \zeta'' \operatorname{Re} \omega_1, \quad \zeta = \zeta' + i\zeta''.$$

В результате сравнения с формулой (85.09) находим $\operatorname{Re} \omega_1 = 0$ и $\omega_1 = -ic/2D$, так что формула (85.11) расшифровывается следующим образом:

$$\omega = \omega_0 - i\zeta c/2D, \tag{85.12}$$

где величина D зависит от распределения поля данного колебания в нулевом приближении, поскольку в формулу (85.09) входит поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$. Выражение (85.12) позволяет вычислить вещественную часть комплексной частоты

$$\omega' = \omega_0 + \zeta'' c/2D, \tag{85.13}$$

т. е. смещение частоты колебаний, вызванное прониканием поля в стенки резонатора. Согласно формуле (26.02) для металлических стенок резонатора (при $\mu=1$) $\zeta''=-\zeta'$, поэтому частота у реального резонатора меньше, чем у идеального; смещение частоты численно равно затуханию ($\omega_0-\omega'=\omega''$).

Формулу (85.12) можно получить (см. задачу 2) более коротким, но менее убедительным путем, используя теорему о колеблющейся мощности (§ 7); еще один вывод этой формулы дан в § 90.

Сравним полученные выше соотношения с теорией обычных резонансных контуров. В самом деле, если в резонансном контуре на рис. 115,*а* учесть конечную проводимость катушки, то появится, во-первых, последовательное сопротивление R и, во-вторых, индуктивность L, равная внешней индуктивности L_e для идеально проводящей катушки, заменится суммой L_e+L_i, где L_i—внутренняя индуктивность провода. Собственная частота такого контура ω (комплексная) определится из уравнения

$$(L_e+L_i)\omega^2+iR\omega-1/C=0, \tag{85.14}$$

которое можно переписать в виде

$$\omega^2+\Omega\omega-\omega_0^2=0,\ \Omega=(\omega L_i+iR)/L_e. \tag{85.15}$$

Поскольку L_i и R зависят от частоты (скин-эффект), это уравнение приходится решать приближенно, считая, что ω мало отличается от ω_0. Заменяя слагаемое $\Omega\omega$ его значением при $\omega=\omega_0$, получаем

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\Omega\omega_0}=\omega_0\sqrt{1-\Omega/\omega_0}$$

или в том же приближении

$$\omega=\omega_0[1-(\omega_0L_i+iR)/2\omega_0L_e], \tag{85.16}$$

где L_i и R взяты при частоте ω_0. При сильном скин-эффекте, как показано в § 26, $R=\omega_0L_i$, откуда сразу получается соотношение $\omega_0=\omega'-\omega''$. Подчеркнем еще раз, что это соотношение справедливо лишь при сильном скин-эффекте.

При отсутствии скин-эффекта внутренняя индуктивность L_i не зависит от частоты, поэтому ее можно объединить с внешней индуктивностью L_e и положить $L=L_e+L_i$. Так как сопротивление R тоже постоянно, то квадратное уравнение (85.14) можно решить точно

$$\omega=\sqrt{\tilde{\omega}_0^2-\alpha^2}-i\alpha,\ \tilde{\omega}_0=1/LC,\ \alpha=R/2L. \tag{85.17}$$

Второй корень квадратного уравнения отличается лишь знаком перед радикалом и ничего нового не дает. Сопротивление создает в первом приближении лишь затухание ($\omega''=\alpha$), а смещение частоты появляется лишь во втором приближении. Это — хорошо известный результат теории цепей, однако при скин-эффекте отвлекаться от связи между L_i и R нельзя. Поскольку объемные резонаторы применяются в диапазоне дециметровых и более коротких волн, в них имеет место сильный скин-эффект, и влияние омического сопротивления на их комплексную собственную частоту естественно учитывать по формуле (85.16). Разумеется, те же результаты можно получить из формулы (85.17); пренебрегая α^2, имеем

$$\omega=\tilde{\omega}_0-i\alpha=\frac{\omega_0}{\sqrt{1+L_i/L_e}}-\frac{iR}{2(L_e+L_i)} \tag{85.18}$$

или в том же приближении

$$\omega=\omega_0-(\omega_0 L_i+iR)/2L_e, \tag{85.19}$$

что совпадает с формулой (85.16).

Заметим, что из формулы (85.19) вытекает соотношение $\omega''=R/2L_e$, аналогичное соотношению (85.03). Действительно, $\frac{1}{2}R|J|^2$ есть активная мощность, поступающая в сопротивление из внешнего пространства (см. § 27), а $\frac{1}{2}L_e|J|^2$ — полная энергия электромагнитного поля во внешнем пространстве, т. е. удвоенная средняя магнитная энергия.

§ 86. Добротность некоторых колебаний

Добротность пустого резонатора согласно формулам (84.04) и (85.09)

$$Q=kD/\zeta', \quad (\zeta=\zeta'+i\zeta''), \tag{86.01}$$

где $k=\omega_0/c$ — волновое число, соответствующее собственной частоте идеального резонатора; волновой импеданс ζ взят при той же частоте. При этом в определении Q — в формуле (84.04) — произведена замена ω' на ω_0, что в первом приближении допустимо.

Для немагнитного металла ($\mu=1$) согласно формуле (26.02) имеем

$$\zeta'=1/2n'', \tag{86.02}$$

где n'' — мнимая часть комплексного показателя преломления. Из формул (11.06), (11.12) и (11.15) следует, что $kn''=K''=1/d$, так что выражение для добротности принимает вид

$$Q=2D/d, \tag{86.03}$$

где d — толщина скин-слоя. Величина D определяется формулой (85.09) и также имеет размерность длины. Для грубой оценки заменяем в числителе и знаменателе этой формулы $|\mathbf{H}|^2$ и $|\mathbf{H}_t|^2$ некоторым средним значением квадрата магнитного поля, тогда $D\sim V/S$, где V — объем резонатора; S — его поверхность. Если все размеры объемного резонатора имеют один и тот же порядок, то тот же порядок имеет и D: в этом случае добротность (86.03) по порядку величины равна размеру резонатора, деленному на толщину скин-слоя. Если резонатор имеет вид цилиндра с малой высотой l, то $V\sim Sl$ и $D\sim l$, поэтому D имеет порядок меньшего размера резонатора. Такие цилиндрические резонаторы имеют пониженную добротность [см. также формулы (86.04) и (86.06) ниже], о чем без доказательства сказано в начале § 83.

Вычислим параметр D и добротность Q рассмотренных выше резонаторов, причем ограничимся основным колебанием каждого резонатора.

1. Прямоугольная полость, колебание 110 (или E_{110}).

Магнитное поле определяется формулой (80.10) при $m=n=1$; положим для удобства вычислений $\pi C=ikab$; тогда

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV=\frac{1}{4}\,abl\,(a^2+b^2),\quad \oint |H_t|^2\,dS=(a^3+b^3)\,l+\frac{1}{2}\,ab(a^2+b^2)$$

и

$$2D=\frac{ab\,(a^2+b^2)\,l}{2\,(a^3+b^3)\,l+ab\,(a^2+b^2)}\;;\quad 2D=\frac{al}{a+2\,l}\ \text{при}\ a=b. \tag{86.04}$$

При вычислении интегралов использованы соотношения вида

$$\int_0^a \sin^2\frac{\pi x}{a}\,dx=\int_0^a \cos^2\frac{\pi x}{a}\,dx=\frac{a}{2}\,.$$

2. Цилиндрический резонатор, колебание E_{010} (высота цилиндра l, радиус основания a).

Полагая в формуле (81.02) $h=0$ и $\Pi^e=CJ_0(gr)$, $g=2{,}405/a$, получим магнитное поле колебания E_{010}, имеющее единственную составляющую

$$H_\varphi=i\,k\partial\,\Pi^e/\partial r=-ikg\,CJ_1\,(gr), \tag{86.05}$$

откуда при $-ikgC=1$ получаем

$$\int |H_\varphi|^2\,dV=\pi\,a^2\,l\,J_1^2\,(ga),\quad \oint |H_\varphi|^2\,dS=2\pi a\,(a+l)\,J_1^2\,(ga)$$

и

$$2D=\frac{al}{a+l}\,. \tag{86.06}$$

При вычислении интегралов использовано известное соотношение

$$\int_0^a J_1^2\,(gr)\,rdr=\frac{a^2}{2}\,[J_1^2\,(ga)-J_0\,(ga)\,J_2\,(ga)].$$

3. Тороидальный резонатор (см. рис. 114,*а*).

Магнитное поле в торе определяется формулой (83.02). Если в ней для удобства положить $2J=c$, то

$$\int |H_\varphi|^2\,dV=2\pi H\ln\frac{b}{a}\,,\quad \oint |H_\varphi|^2\,dS=2\pi\left(\frac{H}{a}+\frac{H}{b}+2\ln\frac{b}{a}\right),$$

откуда

$$D=\frac{H\ln(b/a)}{H\,(1/a+1/b)+2\ln(b/a)}\,. \tag{86.07}$$

4. Отдельный резонатор магнетрона (см. рис. 114,*в*).

В индуктивной части резонатора магнитное поле постоянно (как в соленоиде), поэтому оценочное соотношение $D\sim V/S$ превращается в точное равенство $D=V/S$, если пренебречь просачиванием магнитного поля в емкостной зазор. Отсюда получается $D=r_0/2$, где r_0 — радиус индуктивной части (см. задачу 3).

В заключение необходимо отметить, что все результаты § 85 и 86 относятся к невырожденным колебаниям. Если же данная соб-

ственная частота является вырожденной, то влияние конечной проводимости стенок на соответствующие ей колебания нужно в общем случае рассчитывать по более сложным формулам, поскольку сколь угодно малое возмущение может привести к радикальной перестройке системы колебаний.

§ 87*. Диэлектрические резонаторы

Наряду с объемными резонаторами иногда применяются диэлектрические резонаторы, представляющие собой небольшие тела, обладающие высокой диэлектрической проницаемостью ε (порядка нескольких десятков и более). Поскольку длина волны в диэлектрике короче в $\sqrt{\varepsilon}$ раз по сравнению с пустотой, такие тела, занимая сравнительно небольшой объем, обладают резонансными свойствами и позволяют конструировать сверхвысокочастотную аппаратуру, в том числе различные фильтры. Можно сказать так: если нужна только резонансная частотная характеристика, то объемный резонатор можно заменить диэлектрическим. Если же требуется резонансное поле в значительном объеме, то надо применять объемный резонатор, а на более коротких волнах — открытый резонатор с зеркалами (гл. XVII).

Теория диэлектрических резонаторов более сложна, чем теория объемных резонаторов, поскольку электромагнитное поле в диэлектрике связано с полем в окружающем пространстве. Поэтому колебания такого резонатора, помещенного в свободное пространство или в волновод, сопровождается излучением; в этом отношении он аналогичен открытым резонаторам, рассмотренным в гл. XVII. Однако диэлектрические и объемные резонаторы имеют ряд общих свойств, вследствие чего в этом параграфе будет дано краткое изложение теории диэлектрических резонаторов — сферических и цилиндрических.

Чтобы понять принцип действия диэлектрических резонаторов, необходимо прежде всего выяснить, как поле в диэлектрическом теле удерживается его границей. Для этого вернемся к задаче о падении плоской волны на плоскую границу диэлектрик — пустота со стороны диэлектрика. Согласно § 15 и 21

$$R_1=\frac{\cos\varphi-\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon\sin^2\varphi)}}{\cos\varphi+\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon\sin^2\varphi)}},\quad R_2=\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi-\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\varphi}}{\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi+\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\varphi}}, \tag{87.01}$$

где R_1 (R_2) — коэффициент отражения для 1-й (2-й) поляризации при $\mu=1$. Учитывая, что при отрицательности подкоренного выражения мнимая часть квадратного корня должна быть положительной, приходим к предельным соотношениям

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}R_1=-1,\quad \lim_{\varepsilon\to\infty}R_2=e^{-i2\varphi}\ (\varphi>0), \tag{87.02}$$

которые вместе с соотношениями для коэффициентов прохождения (задача 4) показывают, что при $\varepsilon\to\infty$ граница диэлектрик —

пустота для поля 1-й поляризации эквивалентна идеально отражающему зеркалу (поле во внешнее пространство не проникает), а для поля 2-й поляризации ситуация сложнее: хотя $\lim|R_2|=1$, но поле выходит из диэлектрика, затухая при удалении от границы экспоненциально (полное внутреннее отражение, см. § 16).

Таким образом, при $\varepsilon\gg 1$ граница диэлектрика наиболее эффективно удерживает волну, у которой магнитное поле не имеет нормальной составляющей. Это свойство сохраняется и в случае неплоской границы, как показывает расчет сферического диэлектрического резонатора. Важность условия $H_n=0$ в общем случае будет показана в конце параграфа.

Обозначим через a радиус диэлектрического шара и положим, в соответствии с § 82 и 84

$$U=A\psi_n(Kr)\Omega_n(\vartheta,\varphi) \text{ при } r<a,\quad U=B\zeta_n(kr)\Omega_n(\vartheta,\varphi) \text{ при } r>a, \tag{87.03}$$

где $K=k\sqrt{\varepsilon}$. Граничные условия приводят к характеристическому уравнению

$$\sqrt{\varepsilon}\,\zeta_n'(ka)\,\psi_n(Ka)=\zeta_n(ka)\,\psi_n'(Ka) \tag{87.04}$$

для электрических колебаний. Если взять в таком же виде функцию V, то получим характеристическое уравнение для магнитных колебаний

$$\sqrt{\varepsilon}\,\zeta_n(ka)\,\psi_n'(Ka)=\zeta_n'(ka)\,\psi_n(Ka). \tag{87.05}$$

При $\varepsilon\to\infty$ решения уравнений (87.04) и (87.05) ведут себя поразному, а именно величина $ka=Ka/\sqrt{\varepsilon}$ (для умеренных Ka) мала, поэтому в первом приближении можно положить

$$\zeta_n(ka)=\text{const}/(ka)^n,\ \zeta_n(ka)/\zeta_n'(ka)=-ka/n, \tag{87.06}$$

после чего уравнение (87.04) принимает вид

$$\psi_n(Ka)=-(Ka/\varepsilon)\,\psi_n'(Ka),\ \psi_n(Ka)\to 0 \text{ при } \varepsilon\to\infty. \tag{87.07}$$

Соотношение $\psi_n(Ka)=0$ (при $\varepsilon=\infty$) непосредственно следует из граничных условий $U=0$ или $E_\tau=0$ на границе $r=a$ (а также из условий $H_\varphi=0$ или $H_\upsilon=0$, однако эти условия для магнитных колебаний ставить нельзя, см. ниже).

Уравнение (87.05) после подстановки (87.06) также упрощается:

$$\psi_n'(Ka)=-(n/Ka)\,\psi_n(Ka), \tag{87.08}$$

однако здесь правой частью пренебречь уже нельзя, нельзя также ставить при $r=a$ граничное условие $H_t=0$ или подобное ему. Это значит, что поле магнитных колебаний, у которых $H_r\neq 0$, при $\varepsilon\gg 1$ сильнее просачивается через границу диэлектрика.

В теории диэлектрических резонаторов различают «запертые» и «незапертые» колебания. Электрические колебания диэлектрического шара являются запертыми, поскольку при фиксированном Ka и $\varepsilon\to\infty$ поле вне шара стремится к нулю. Магнитные колеба-

ния диэлектрического шара незапертые, при $\varepsilon\to\infty$ поле вне шара (как можно показать, магнитное) остается конечным.

Физически очевидно, что запертые колебания при конечном, но большом значении ε обладают большей добротностью. Это можно показать на примере простейших колебаний E_{mnq} и H_{mnq}, а именно при $n=1$, $m=0$, 1 (см. задачу 5). Для электрических колебаний E_{m1q}

$$Q_{1q}=\varepsilon^{5/2}/2\,\nu_{1q}^3(\nu_{11}=4{,}50), \tag{87.09}$$

а для магнитных колебаний H_{m1q}

$$Q_{1q}=\varepsilon^{3/2}/2\,\mu_{1q}\ (\mu_{11}=3{,}14), \tag{87.10}$$

где ν_{nq} есть q-й корень уравнения $\psi_n(\nu)=0$, а μ_{nq}—q-й корень уравнения (87.08), если положить $Ka=\mu$.

Как уже отмечалось, поле колебания E_{mnq} при $\varepsilon=\infty$ заключено в диэлектрике и наружу не проникает; оно удовлетворяет граничному условию $E_r=0$, которое получается из условия

$$\varepsilon E_r|_{r=a-0}=E_r|_{r=a+0}, \tag{87.11}$$

справедливого при конечном ε, и предположения о конечности E_r вне диэлектрика. Поле колебания E_{mnq} при $\varepsilon=\infty$ получается из поля колебания H_{mnq} в сферическом объемном резонаторе при замене $\mathbf{E}$ на $\mathbf{H}$ и наоборот; в частности, поле колебания E_{011} получается из поля колебания H_{011}, изображенного на рис. 114.

Заметим, что формулы (87.09) и (87.10) определяют радиационные добротности — затухание колебаний в диэлектрическом резонаторе обусловлено излучением (потери в диэлектрике не учтены). При колебаниях H_{m1q} диэлектрический шар излучает как магнитный диполь, при колебаниях E_{m1q} — как более слабый электрический диполь. Формулы (87.09) и (87.10) показывают, что радиационные добротности убывают с ростом индекса q, когда ν_{1q} и μ_{1q} увеличиваются; с ростом индекса q ухудшается точность самих этих формул.

Закончив рассмотрение диэлектрического шара, перейдем к произвольному диэлектрическому объему V, в котором $\varepsilon\gg1$ и $\mu=1$. Положим $\mathbf{E}=\mathbf{F}/\sqrt{\varepsilon}$, тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{F}=-i\mathit{K}\mathbf{H},\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=i\mathit{K}\mathbf{F}\text{ в объеме }V;\\&\operatorname{rot}\mathbf{F}=-i\mathit{K}\mathbf{H},\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=i\mathit{K}\mathbf{F}/\varepsilon\text{ вне объема }V,\end{aligned} \tag{87.12}$$

где $K=k\sqrt{\varepsilon}$. При $\varepsilon\gg1$ правую часть последнего уравнения можно заменить нулем; исключая $\mathbf{F}$, для $\mathbf{H}$ получаем уравнения

$$\Delta\mathbf{H}+K^2\mathbf{H}=0\text{ в объеме }V,\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=0\text{ вне }V \tag{87.13}$$

вместе с дополнительным соотношением $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$.

Уравнения (87.13) позволяют ответить на вопрос: при каких условиях реализуются *запертые* колебания, аналогичные колебаниям E_{mnq} в диэлектрическом шаре и имеющие такие же высокие добротности? Запертым колебаниям в пределе $\varepsilon=\infty$ соответствует нулевое поле $\mathbf{H}$ вне V, а для этого на границе S объема V должно выполняться граничное условие $\mathbf{H}=0$, т. е. должно быть

как $H_t=0$, так и $H_n=0$. Действительно, на поверхности S непрерывны *все* составляющие $\mathbf{H}$, и если вне объема V поля $\mathbf{H}$ нет, то на S должно быть $\mathbf{H}=0$.

Чтобы найти запертые колебания, будем рассуждать так. Для любой замкнутой поверхности S существует система собственных колебаний, которые внутри S удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\mathbf{H}+K^2\mathbf{H}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \tag{87.14}$$

а на поверхности S — граничному условию $H_t=0$. В качестве $\mathbf{H}$ можно взять вектор $\mathbf{E}$ для колебаний в объемном резонаторе с идеально проводящей границей (см. например § 80—83), заменив k на K. Однако при этом, вообще говоря, будет $H_n\neq 0$ на S. Лишь при определенных ограничительных условиях, наложенных на форму поверхности S и на распределение поля внутри S, существуют такие колебания, у которых не только $H_t=0$, но и $H_n=0$ на S. Это — симметричные колебания в диэлектрических телах, обладающих симметрией вращения, причем магнитное поле таких колебаний имеет единственную составляющую H_φ, не зависящую от φ.

Простейший пример такого тела (если отвлечься от рассмотренного выше шара) — диэлектрический цилиндр, который в цилиндрической системе координат r, φ, z определяется неравенствами $0<r<a$, $0<z<l$. Запертые колебания в цилиндре также обозначаются символом E_{0nq}; они получаются из электрического вектора Герца

$$\Pi^e_z = CJ_0(gr)\sin hz,\ g^2+h^2=K^2 \tag{87.15}$$

и имеют составляющие

$$E_r = gh\,CJ_1(gr)\cos hz,\ E_z = g^2\,CJ_0(gr)\sin hz, \tag{87.16}$$
$$H_\varphi = -\mathrm{i}kg\varepsilon\,CJ_1(gr)\sin hz,\ E_\varphi = H_r = H_z = 0.$$

Если g и h удовлетворяют условиям

$$J_1(ga)=0,\ \sin hl=0, \tag{87.17}$$

т. е.

$$g=\mu_{0n}/a,\ h=q\pi/l,\ K=k\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{(\mu_{0n}/a)^2+(q\pi/l)^2}\ (n, q=1, 2, \ldots), \tag{87.18}$$

то соответствующее колебание E_{0nq} в диэлектрическом цилиндре удовлетворяет всем условиям, сформулированным выше для запертых колебаний. Выражения (87.16) показывают, что на поверхности цилиндра $E_n=0$ и $E_t\neq 0$: тангенциальное электрическое поле просачивается наружу, однако оно примерно в ε раз слабее магнитного.

Вычислить радиационную добротность колебания E_{0nq}, равно как исследовать незапертые колебания, довольно трудно, поскольку при этом надо рассматривать также поля вне диэлектрического резонатора, что требует применения численных методов.

Задачи к гл. XV

1. Рассчитать длину волны собственного колебания каждой камеры магнетрона, применяя квазистатический метод. Электродинамическое взаимодействие между камерами не учитывать, задачу считать двухмерной.

Решение. Емкость конденсаторной части равна $C=ah/4\pi l$, где l — ширина зазора; a — его длина; h — высота камеры в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (предполагается, что в этом направлении поле не меняется). Магнитное поле в индуктивной части камеры такое же, как и в прямой катушке радиуса r_0. Рассуждая так же, как и при выводе формул (83.02) и следующих за нею, получаем

$$B_n=H_n=4\pi J/ch,\quad \Psi=(2\pi r_0)^2 J/c^2 h,\quad L_e=(2\pi r_0)^2/c^2 h.$$

Поэтому длина волны основного колебания $\lambda=2\pi r_0\sqrt{\pi a/l}$.

2. Исходя из соотношения

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}]=ik(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2) \qquad (a)$$

для поля свободного колебания в пустом резонаторе, вывести формулу (85.12); при этом выразить поле $\mathbf{E}$ через поле $\mathbf{H}$ всюду (в объеме и на границе) и отождествить последнее с полем $\mathbf{H}$ в идеальном резонаторе. Соотношение (a) является частным случаем соотношения (7.01).

Решение. Интегрируя соотношение (a) по объему резонатора, получаем формулу

$$\zeta\oint H_t^2\,dS=ik\int \mathbf{H}^2\,dV-(i/k)\int(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2\,dV,$$

откуда

$$k=\int(\operatorname{rot}\mathbf{H})^2\,dV/k\int\mathbf{H}^2\,dV-i\zeta/D,\quad D=\int\mathbf{H}^2\,dV/\oint H_t^2\,dS. \qquad (b)$$

Если распределение поля $\mathbf{H}$ взять таким же, как в идеальном резонаторе (при $\zeta=0$), для которого $k=k_0$, то соотношение (b) примет вид

$$k=k_0^2/k-i\zeta/D,\ \text{или}\ k^2=k_0^2-i\zeta k/D,$$

а это в первом приближении по ζ приводит к формуле $k=k_0-i\zeta/2D$, эквивалентной формуле (85.12). Выражение (b) для D и соответствующее выражение (85.09) несколько отличаются по форме, однако, по существу, совпадают, поскольку для невырожденных колебаний $\mathbf{H}^2$ и $|\mathbf{H}|^2$ отличаются лишь постоянным множителем, а к вырожденным все эти соотношения неприменимы (см. конец § 86).

3. Продолжая задачу 1, вычислить величину D для каждого отдельного резонатора (камеры) магнетрона, используя как выражение $D=V/S$, так и выражение $Q=\omega_0 L_e/R$ для добротности обычного колебательного контура.

Решение. В данном случае $V=\pi r^2_0 h$, а $S=2\pi r_0 h$, поэтому $D=V/S=r_0/2$. Если L_e взять из задачи 1, а R вычислить по теории сильного скин-эффекта, пользуясь формулой (86.02), то получим

$$R=\frac{2\pi r_0}{h}\,\frac{4\pi}{c}\,\zeta'=\frac{(2\pi)^2 r_0}{chn''}=\frac{(2\pi)^2 kr_0 d}{ch},$$

откуда $Q=r_0/d$ и $D=r_0/2$.

4. Пользуясь формулами (15.12) и (15.18) и результатами § 21, написать для коэффициентов прохождения T_1 и T_2 соотношения, аналогичные (87.01) и (87.02).

Решение. Полагая $\mu=1$ и заменяя ε на $1/\varepsilon$, получаем

$$T_1=\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon\sin^2\varphi)}},\quad T_2=\frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{(1-\varepsilon\sin^2\varphi)/\varepsilon}},$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}T_1=0,\quad \lim_{\varepsilon\to\infty}T_2=2\cos\varphi\,e^{-i\varphi}\ (\varphi>0).$$

5. Пользуясь выражениями

$\psi_1(x)=-\cos x+\sin x/x$, $\zeta_1(x)=-(1+i/x)e^{ix}$ ($\psi_1(x)=\operatorname{Re}\zeta_1(x)$ при вещественных x), вывести формулы (87.09) и (87.10). Показать, что $\mu_{1q}=q\pi$.

Решение. При $ka\ll 1$ можно положить

$$\zeta_1(ka)=-i\left[1+\frac{1}{2}(ka)^2+\frac{i}{3}(ka)^3\right]/ka,$$

$$\zeta_1(ka)/\zeta_1'(ka)=-[1+(ka)^2+i(ka)^3]\,ka.$$

Обозначим q-й корень уравнения $\psi_n(\nu)=0$ через ν_{nq} и будем искать корень уравнения (87.04) в виде $Ka=\nu_{nq}+\Delta\nu_{nq}$; полагая

$$\psi_n(Ka)=\psi_n'(\nu_{nq})\,\Delta\nu_{nq},\quad \psi_n'(Ka)=\psi_n'(\nu_{nq}),$$

получаем малую добавку $\Delta\nu_{nq}$ в явном виде

$$\Delta\nu_{nq}=\zeta_n(ka)/\sqrt{\varepsilon}\,\zeta_n'(ka),\quad ka=\nu_{nq}/\sqrt{\varepsilon},$$

причем при $n=1$ имеем

$$\Delta\nu_{1q}=-(\nu_{1q}/\varepsilon)(1+\nu_{1q}^2/\varepsilon+i\,\nu_{1q}^3/\varepsilon^{3/2}).$$

Произведение Ka пропорционально частоте, поэтому согласно формуле (84.04) получаем добротность

$$Q_{1q}=\nu_{1q}/(-2\operatorname{Im}\Delta\nu_{1q})=\varepsilon^{5/2}/2\nu_{1q}^3.$$

Уравнение (87.05) решается аналогичным образом. Полагая $Ka=\mu_{1q}+\Delta\mu_{1q}$ и используя соотношения

$$\psi_1'(\mu)+\psi_1(\mu)/\mu=\sin\mu,\quad \mu_{1q}=q\pi,\quad \psi_1(\mu_{1q})=(-1)^{q-1},\quad \cos\mu_{1q}=(-1)^q,$$

имеем

$$\Delta\mu_{1q}=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\frac{\zeta_1'(ka)}{\zeta_1(ka)}+\frac{1}{ka}\right]=-\frac{ka}{\sqrt{\varepsilon}}(1+i\,ka)=$$

$$=-\frac{\mu_{1q}}{\varepsilon}\left(1+i\frac{\mu_{1q}}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Для магнитных колебаний

$$Q_{1q}=\mu_{1q}/(-2\operatorname{Im}\Delta\mu_{1q})=\varepsilon^{3/2}/2\mu_{1q}.$$

и добротность получается существенно меньшей, чем для электрических.

Глава XVI.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

§ 88. Ортогональность собственных колебаний

Рассмотренные в гл. XV свободные колебания в замкнутых резонансных объемах являются некоторой идеализацией и имеют лишь теоретический интерес. На практике в резонансных системах обычно используют вынужденные колебания. Это значит, что объемный резонатор связан с каким-то источником электромагнитной энергии, возбуждающим колебания в резонаторе. Кроме того, резонатор может быть связан с системой, извлекающей из него электромагнитную энергию и потребляющей ее.

Колебания в объемном резонаторе можно возбудить, например, с помощью вибратора (штыря, зонда) или электронного потока; эти источники колебаний можно представить как сторонние электрические токи с объемной плотностью $\mathbf{j}^e$; если вибратор считать идеально проводящим, то сторонний ток в нем будет поверхностным. Петлю связи, возбуждающую объемный резонатор, можно согласно § 74 заменить сторонним электрическим током или же сторонним магнитным током. Объемный резонатор можно возбудить через отверстие или щель в его стенке; отверстие необходимо, чтобы ввести в резонатор вибратор или электронный поток или чтобы связать резонатор с линией передачи. Щель или отверстие в идеально проводящей стенке резонатора можно трактовать как сторонний поверхностный магнитный ток на сплошной (неразрезанной) стенке резонатора: такое рассмотрение удобно, если тангенциальное электрическое поле на щели или отверстии известно (см. § 74).

В измерительной практике часто применяют систему, изображенную на рис. 117, в которой электромагнитная энергия подводится в объемный резонатор через волновод. Связь между резонатором и волноводом осуществляется одним из способов, указанных выше (зонд, петля, отверстие, щель). Наиболее удобна связь, которую можно непрерывно варьировать, например, вдвигая зонд или петлю в резонатор. Расчет такой системы дан в § 90.

Отметим еще раз, что сторонние токи заменяют собой действие внешних устройств на данную часть системы — объемный резонатор (см. § 3), т. е. учитывают его незамкнутость. Поэтому, введя сторонние токи, следует считать резонатор изолированным — окруженным непроницаемой оболочкой, в которой уже нет отверстий и щелей и через которую поле не просачивается наружу. Переход к резонатору, связанно-

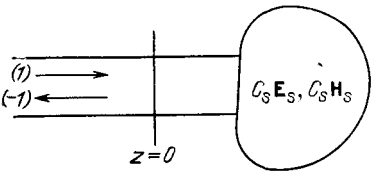


Рис. 117. Объемный резонатор, связанный с волноводом

му с волноводом (рис. 117) или свободным пространством, возможен, но будет рассмотрен позже (§ 90 и 91; см. также § 105).

Поскольку поверхностные токи можно рассматривать как предельный случай объемных токов, задача о возбуждении объемного резонатора заданными источниками сводится к интегрированию комплексных уравнений поля (см. конец § 3)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=ik\mu\,\mathbf{H}-\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{e},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=-ik\varepsilon\,\mathbf{E}+\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^{m}, \tag{88.01}$$

в которых $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$ заданы. Уравнения (88.01) написаны в предположении, что источники поля (сторонние токи $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$) являются монохроматическими и возбужденное поле — также монохроматическое (зависимость $e^{-i\omega t}$, $k=\omega/c$).

Если предположить, что объемный резонатор ограничен замкнутой идеально проводящей поверхностью S_0 произвольной формы (стенка резонатора), то решение уравнений (88.01) должно удовлетворять на S_0 граничному условию $E_t=0$. Иногда имеет смысл рассматривать граничное условие вида $H_t=0$ на части поверхности S_0, что соответствует поверхности с идеальной магнитной проводимостью (см., например, § 45).

Внутри поверхности S_0 комплексные проницаемости ε и μ, соответствующие частоте ω, могут изменяться от точки к точке по любому закону, так что рассматривается резонатор, заполненный произвольным неоднородным веществом. Проницаемости ε и μ могут, разумеется, терпеть скачок на некоторых поверхностях, тогда уравнения (88.01) должны быть дополнены граничными условиями (4.01); однако этот случай можно рассматривать как предел непрерывного распределения.

Если выполняются граничные условия $E_t=0$ или $H_t=0$, то электромагнитное поле резонатора занимает конечный объем с четкой границей — поверхностью стенки S_0. Вне этой поверхности электромагнитное поле отсутствует. Если провести поверхность S_0 так, чтобы она содержала предыдущую поверхность внутри себя и, следовательно, целиком проходила внутри идеального проводника (или идеального магнитного проводника в случае условия $H_t=0$), то на ней $\mathbf{E}=\mathbf{H}=0$. Это — выражение того факта, что внутри идеального проводника (или идеального магнитного проводника) электромагнитное поле отсутствует (см. § 24).

Если учесть конечную проводимость стенок объемного резонатора, то граница области, занятой электромагнитным полем, становится несколько неопределенной. Однако если провести поверхность S_0 внутри стенок резонатора на глубине Nd, то на ней с большой точностью можно считать $\mathbf{E}=\mathbf{H}=0$; здесь N — достаточно большое число; d — толщина скин-слоя при частоте ω и при низшей частоте собственных колебаний данного резонатора, определенных далее. На такой поверхности S_0 можно поставить и граничное условие $E_t=0$. Это граничное условие на электромагнитном поле в резонаторе заметно не отразится: внутри стенки, на

большой глубине, поле практически исчезает, так что, помещая туда идеально проводящую оболочку (резкую границу поля), мы почти не возмущаем поле.

При решении сформулированной выше задачи о вынужденных колебаниях объемного резонатора, т. е. при интегрировании уравнений (88.01) с учетом указанных выше граничных условий предполагается, что собственные колебания данного резонатора с тем же самым распределением электромагнитных параметров ε и μ *полностью исследованы.* Это значит, что известна полная система векторных функций $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и собственных частот ω_s ($s=1, 2, \ldots$) данного объемного резонатора; векторы $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ удовлетворяют однородным уравнениям поля

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_s = ik_s\mu\mathbf{H}_s,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_s = -ik_s\varepsilon\mathbf{E}_s. \tag{88.02}$$

Мгновенные значения полей $\mathbf{E}_s(t)$ и $\mathbf{H}_s(t)$ при s-м собственном колебании даются формулами

$$\mathbf{E}_s(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{E}_s e^{-i\omega_s t}),\quad \mathbf{H}_s(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{H}_s e^{-i\omega_s t}), \tag{88.03}$$

аналогичными формулам (84.02). Собственные частоты ω_s, вообще говоря, комплексны ($\omega_s = \omega'_s - i\omega''_s$), причем выполняется условие $\omega''_s > 0$, поскольку свободные колебания должны затухать. Для резонаторов без потерь $\omega''_s = 0$, и тогда считаем, что $\omega'_s > 0$. Для цилиндрических резонаторов с однородным заполнением (ср. § 81 и 84) индекс s заменяет символы E_{mnq} и H_{mnq}.

Заметим, что уравнения (88.03) относятся в общем случае не к свободным колебаниям реального резонатора, а к собственным колебаниям (см. конец § 84) или же к вспомогательному объемному резонатору, имеющему при всех собственных частотах ω_s в каждой точке те же параметры ε и μ, которые рассматриваемый резонатор имеет при частоте возбуждения ω. Для ряда веществ, в частности для металлических стенок резонатора, комплексная диэлектрическая проницаемость определяется формулой (2.09), где ε_0 (диэлектрическая постоянная) и σ (проводимость) от частоты не зависят. Чтобы получить $\varepsilon(\omega_s) = \varepsilon(\omega)$, надо считать $\sigma(\omega_s) = \omega_s\sigma/\omega$, т. е. взять проводимость вспомогательного резонатора для s-го колебания отличной от проводимости σ реального резонатора.

Докажем ортогональность векторных функций $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$. Из уравнений (88.02) для полей $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$ легко получаются тождества (см. начало § 73)

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\mathbf{E}_s\,\mathbf{H}_{s'}] &= ik_{s'}\varepsilon\,\mathbf{E}_s\,\mathbf{E}_{s'} + ik_s\mu\,\mathbf{H}_s\,\mathbf{H}_{s'},\\ \operatorname{div}[\mathbf{E}_{s'}\,\mathbf{H}_s] &= ik_s\varepsilon\,\mathbf{E}_s\,\mathbf{E}_{s'} + ik_{s'}\mu\,\mathbf{H}_s\,\mathbf{H}_{s'}.\end{aligned} \tag{88.04}$$

Интегрируя эти тождества по всему объему, занятому полем, и учитывая граничные условия на поверхности S_0 этого объема, получаем

$$\begin{aligned}\omega_{s'}\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s\,\mathbf{E}_{s'}\,dV + \omega_s\int\mu\,\mathbf{H}_s\,\mathbf{H}_{s'}\,dV &= 0,\\ \omega_s\int\varepsilon\,\mathbf{E}_s\,\mathbf{E}_{s'}\,dV + \omega_{s'}\int\mu\,\mathbf{H}_s\,\mathbf{H}_{s'}\,dV &= 0.\end{aligned} \tag{88.05}$$

Если определитель

$$\begin{vmatrix} \omega_{s'} & \omega_s \\ \omega_s & \omega_{s'} \end{vmatrix} = \omega_{s'}^2 - \omega_s^2 \tag{88.06}$$

отличен от нуля, то из формул (88.05) вытекают условия ортогональности собственных колебаний

$$\int \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}_{s'} \, dV = 0, \int \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}_{s'} \, dV = 0. \tag{88.07}$$

Условие $\omega^2{}_{s'} \neq \omega^2{}_s$ может нарушаться только при $\omega_s = \omega_{s'}$, равенство $\omega_s = -\omega_{s'}$ невозможно в силу неравенств $\omega''{}_s \geqslant 0$ и $\omega'{}_s > 0$. Поэтому условия ортогональности (88.07) справедливы при отсутствии вырождения. Если же данная собственная частота ω_s является кратной, то соответствующие ей векторные функции $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$; $\mathbf{E}_{s'}$, $\mathbf{H}_{s'}$, и другие всегда можно выбрать так, чтобы соотношения (88.07) для них удовлетворялись, т. е. произвести дополнительную ортогонализацию.

При $s' = s$ соотношения (88.05) дают

$$\int \varepsilon \mathbf{E}_s^2 \, dV + \int \mu \mathbf{H}_s^2 \, dV = 0. \tag{88.08}$$

Нормой s-го собственного колебания назовем величину

$$N_s = \frac{1}{4\pi} \int \varepsilon \mathbf{E}_s^2 \, dV = -\frac{1}{4\pi} \int \mu \mathbf{H}_s^2 \, dV. \tag{88.09}$$

Норма N_s имеет размерность энергии. Формула (85.08) показывает, что для пустого резонатора с идеально проводящими стенками норма N_s по абсолютной величине равна удвоенной энергии s-го колебания. В других случаях норму N_s можно связать с колеблющейся частью электрической и магнитной энергии и мощности потерь (см. § 7). При вычислении нормы учитывается поле в стенках резонатора.

Доказанная выше ортогональность собственных колебаний позволяет решить задачу о вынужденных колебаниях.

§ 89. Возбуждение колебаний в объемном резонаторе

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, возбуждаемое источниками и удовлетворяющее уравнениям (88.01), естественно искать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^l, \; \mathbf{H} = \mathbf{H}^t + \mathbf{H}^l. \tag{89.01}$$

Здесь $\mathbf{E}^t$ и $\mathbf{H}^t$ суть поперечные (или соленоидальные) части электрического и магнитного полей, удовлетворяющие условиям

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}^t) = 0, \; \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}^t) = 0, \tag{89.02}$$

а $\mathbf{E}^l$ и $\mathbf{H}^l$ суть продольные (или потенциальные) части электрического и магнитного полей, которые можно записать в виде

$$\mathbf{E}^l = -\operatorname{grad} \Phi^{\mathrm{e}}, \; \mathbf{H}^l = -\operatorname{grad} \Phi^{\mathrm{m}}. \tag{89.03}$$

Функции Φ^{e} и Φ^{m} можно назвать электрическим и магнитным потенциалом (скалярным). Заметим, что поперечные и продольные

части поля имеют здесь другой смысл, чем в теории возбуждения волноводов.

Так как векторные функции $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ удовлетворяют, как легко доказать из уравнений (88.02), соотношениям (89.02), то поперечные части электрического и магнитного полей вынужденного колебания естественно искать в виде рядов

$$\mathbf{E}^t = \sum A_s \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H}^t = \sum B_s \mathbf{H}_s, \tag{89.04}$$

где A_s и B_s — постоянные коэффициенты, которые будут определены в дальнейшем. Для электрического и магнитного полей нужно брать разложения с различными коэффициентами A_s и B_s; это вытекает, в частности, из сравнения с колебаниями в простом резонансном контуре (см. конец параграфа).

Почленно дифференцируя ряды (89.04) и пользуясь уравнениями (88.02), получаем

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathrm{i}\mu \sum k_s A_s \mathbf{H}_s, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathrm{i}\varepsilon \sum k_s B_s \mathbf{E}_s. \tag{89.05}$$

Подстановка этих тождеств в исходные уравнения (88.01) дает

$$\mathrm{i}\varepsilon \sum (k A_s - k_s B_s) \mathbf{E}_s = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\mathrm{e}} - \mathrm{i}k\varepsilon \mathbf{E}^l,$$

$$\mathrm{i}\mu \sum (k_s A_s - k B_s) \mathbf{H}_s = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\mathrm{m}} + \mathrm{i}k\mu \mathbf{H}^l. \tag{89.06}$$

Для выполнения последних соотношений прежде всего необходимо, чтобы их правые части были соленоидальными векторами, т. е. имели равную нулю расходимость (дивергенцию). Учитывая формулы (3.07) и (89.03), из требования соленоидальности получаем уравнения для электрического и магнитного потенциалов

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi^{\mathrm{e}}) = -4\pi\rho^{\mathrm{e}}, \quad \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \Phi^{\mathrm{m}}) = -4\pi\rho^{\mathrm{m}}. \tag{89.07}$$

Эти соотношения имеют статический характер и являются обобщением уравнения Пуассона на случай неоднородной среды. Уравнения (89.07) можно получить более просто, применяя соотношения (89.01) и (3.08). Уравнения (89.07) решаются методами электростатики и магнитостатики, в частности методом отражений или разложением в ряды (граничные условия для $\mathbf{E}^l$ и $\mathbf{H}^l$ те же, что и для $\mathbf{E}^t$ и $\mathbf{H}^t$). На этом останавливаться не будем, поскольку потенциалы Φ^{e} и Φ^{m} и связанная с ними продольная часть электромагнитного поля резонансными свойствами не обладают.

Перейдем к определению поперечной части поля. При соленоидальности правых частей соотношений (89.06) можно эти правые части разложить в ряды

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\mathrm{e}} - \mathrm{i}k\varepsilon \mathbf{E}^l = \frac{\varepsilon}{c} \sum a_s \mathbf{E}_s,$$

$$-\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\mathrm{m}} + \mathrm{i}k\mu \mathbf{H}^l = \frac{\mu}{c} \sum b_s \mathbf{H}_s, \tag{89.08}$$

если векторные функции $\varepsilon\mathbf{E}_s$ образуют полную систему (а также векторные функции $\mu\mathbf{H}_s$). Коэффициенты a_s и b_s этих разложений

можно найти, пользуясь формулами (88.07) и (88.09), а также добавочными условиями ортогональности

$$\int \varepsilon \mathbf{E}_s \mathbf{E}^l \, dV = 0, \int \mu \mathbf{H}_s \mathbf{H}^l \, dV = 0, \tag{89.09}$$

которые выводятся из соотношений

$$\int \mathbf{E}^l \operatorname{rot} \mathbf{H}_s \, dV = \oint [\mathbf{H}_s \mathbf{E}^l] \, \mathbf{n} dS,$$

$$\int \mathbf{H}^l \operatorname{rot} \mathbf{E}_s \, dV = \oint [\mathbf{E}_s \mathbf{H}^l] \, \mathbf{n} dS$$

и граничных условий, сформулированных в § 88.

Таким образом,

$$a_s = \frac{1}{N_s} \int \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s \, dV, \quad b_s = \frac{1}{N_s} \int \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s \, dV. \tag{89.10}$$

Подставляя разложения (89.08) в уравнения, видим, что последние выполняются, если коэффициенты A_s и B_s удовлетворяют системе линейных уравнений

$$i(\omega A_s - \omega_s B_s) = a_s, \; i(\omega_s A_s - \omega B_s) = b_s, \tag{89.11}$$

откуда находим

$$A_s = -i \frac{\omega a_s - \omega_s b_s}{\omega^2 - \omega_s^2}, \; B_s = -i \frac{\omega_s a_s - \omega b_s}{\omega^2 - \omega_s^2}. \tag{89.12}$$

Поперечная часть электромагнитного поля в резонаторе определяется формулами (89.04), (89.10) и (89.12).

Формулы (89.12) можно получить несколько иным способом. Воспользуемся тождествами

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}_s \mathbf{H}] = ik\varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}_s + ik_s \mu \mathbf{H}\mathbf{H}_s - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s,$$

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}_s] = ik_s \varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}_s + ik\mu \mathbf{H}\mathbf{H}_s - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s, \tag{89.13}$$

вытекающими из уравнений (88.01) и (88.02). Эти тождества аналогичны соотношениям (88.04). Интегрируя по всему объему, занятому полем, получим

$$\omega \int \varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}_s \, dV + \omega_s \int \mu \mathbf{H}\mathbf{H}_s \, dV = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s \, dV,$$

$$\omega_s \int \varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}_s \, dV + \omega \int \mu \mathbf{H}\mathbf{H}_s \, dV = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s \, dV. \tag{89.14}$$

Пользуясь соотношениями (88.07), (88.09), (89.01), (89.04) и (89.09), приходим к выражениям

$$A_s = -\frac{i}{(\omega^2 - \omega_s^2) N_s} \int (\omega \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \omega_s \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s) \, dV,$$

$$B_s = -\frac{i}{(\omega^2 - \omega_s^2) N_s} \int (\omega_s \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s - \omega \mathbf{j}^m \mathbf{H}_s) \, dV, \tag{89.15}$$

эквивалентным формулам (89.10) и (89.12). Заметим, что формулы (88.04) и

(89.13) и получающиеся из этих формул интегральные соотношения можно рассматривать как обобщение леммы Лоренца (§ 73) на случай двух полей, колеблющихся с разными частотами.

Формулы (89.12) и (89.15) указывают на наличие резонанса, наступающего всякий раз, когда частота возбуждения ω близка к частоте ω_s одного из собственных колебаний резонатора (определенного согласно § 88). Если резонатор не имеет потерь, то частота ω_s вещественна, и при $\omega=\omega_s$ коэффициенты A_s и B_s и определяемое ими поле обращаются в бесконечность. При учете потерь коэффициенты A_s и B_s остаются конечными, так как вещественная частота ω и комплексная частота ω_s не могут точно быть равными друг другу; однако при $\omega\approx\omega_s$ эти коэффициенты (и поля) принимают большие значения. Такие резонансные эффекты хорошо известны в теории колебательных контуров; в задаче 1 показано, что эта теория приводит к тем же соотношениям, что и полученные выше.

Из формул (89.12) видно, что при резонансе ($\omega\approx\omega_s$) коэффициенты A_s и B_s не только велики (значительно больше всех других, нерезонансных коэффициентов), но и равны друг другу:

$$A_s\approx B_s \text{ при } \omega\approx\omega_s. \tag{89.16}$$

Пренебрегая всеми нерезонансными членами и считая частоту ω_s невырожденной, можно приближенно написать

$$\mathbf{E}\approx A_s\mathbf{E}_s,\ \mathbf{H}\approx A_s\mathbf{H}_s \text{ (при } \omega\approx\omega_s). \tag{89.17}$$

Таким образом, при резонансе вынужденное колебание практически не отличается по распределению своего электромагнитного поля от соответствующего собственного колебания; в этом случае роль источников поля сводится лишь к поддержанию амплитуды A_s на постоянном уровне, т. е. к компенсации потерь.

Формулы (89.10) показывают, как наиболее эффективно (с наибольшей амплитудой A_s или B_s) возбуждать данное колебание с номером s. При возбуждении электрическими токами (вибратором или электронным потоком), когда $\mathbf{j}^e\neq 0$ и $\mathbf{j}^m=0$, необходимо сторонние электрические токи помещать в пучность электрического поля $\mathbf{E}_s$ параллельно ему. При возбуждении магнитными токами, когда $\mathbf{j}^e=0$ и $\mathbf{j}^m\neq 0$, необходимо сторонний магнитный ток помещать в пучность магнитного поля параллельно ему. Это значит, что петля связи должна охватывать наиболее густые пучки магнитных силовых линий и быть к ним перпендикулярной, а щель нужно прорезать в той части стенки, где течет наиболее сильный поверхностный ток, т. е. имеется пучность тангенциального магнитного поля. При этом узкие щели должны быть прорезаны поперек линий тока, поскольку узкие щели, параллельные линиям тока, мало возмущают электромагнитное поле (по сравнению со сплошной металлической поверхностью, см. § 68 или 74) и дают слабую связь с резонатором. Подобные выводы сделаны в теории возбуждения волноводов (см. § 77).

Заметим еще раз, что введенные выше собственные колебания с полями $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ и частотами ω_s в общем случае отличаются от изученных в гл. XV свободных колебаний резонаторов. Так, в формуле (84.01) для свободных колебаний реального резонатора ε и μ нужно брать при частоте ω_s, что весьма затрудняет исследование (см. § 84). Однако для получения комплексных частот ω_s собственных колебаний, введенных в § 88, нужно в формуле (84.01) взять ε и μ при частоте возбуждения ω, что дает явное выражение для ω_s.

Аналогичным образом надо применять формулу (85.11). Перепишем ее в виде

$$\omega_s = \omega^0{}_s + \zeta\omega^1{}_s + \ldots, \tag{89.18}$$

где $\omega^0{}_s$ — собственная частота резонатора с идеально проводящей оболочкой; ζ — волновой импеданс оболочки; $\omega^1{}_s$ зависит от распределения магнитного поля s-го собственного колебания идеального резонатора. При исследовании свободных колебаний данного резонатора нужно ζ брать при частоте ω_s; для собственных колебаний, по векторным функциям которых разлагается поле вынужденного колебания, следует брать ζ при частоте возбуждения ω.

Введенные в § 88 собственные колебания необходимы для расчета вынужденных колебаний. Очевидно, что поле вынужденных колебаний зависит лишь от проницаемостей ε и μ при частоте возбуждения ω, поэтому применяемые в разложении векторные функции должны определяться этими значениями проницаемостей. Если проницаемости ε и μ зависят от частоты, то разложений (89.04) с помощью полей $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, соответствующих свободным колебаниям данного резонатора, написать в общем случае нельзя, так как соотношения (89.02) и (89.05) удовлетворяться не будут. По этой причине задача о возбуждении резонатора решена с помощью векторных функций $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, определенных в § 88.

Рассмотрим следующий вопрос: почему в теории возбуждения волноводов (§ 76) коэффициенты разложения для электрического и магнитного полей одинаковые (C_s), а в теории возбуждения резонаторов — разные (A_s и B_s). Ответ заключается в том, что для волноводов были введены как прямые волны с полями $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, так и встречные волны с полями $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$; при этом волновые числа h_s и h_{-s} отличались знаком. В объемных резонаторах введены лишь затухающие колебания $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, комплексные частоты которых удовлетворяют неравенствам $\omega''_s \geqslant 0$ и $\omega'_s > 0$. Если формально ввести для симметрии нарастающие колебания с комплексными частотами $\omega_{-s} = -\omega_s$, то их комплексные амплитуды $\mathbf{E}_{-s}$ и $\mathbf{H}_{-s}$ можно согласно уравнениям (88.02) взять в виде

$$\mathbf{E}_{-s} = \pm\mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H}_{-s} = \mp\mathbf{H}_s, \tag{89.19}$$

тогда по формуле (88.09) получим $N_{-s} = N_s$.

Выражения (89.04) теперь примут вид

$$\mathbf{E}^i = \sum (C_s \mathbf{E}_s + C_{-s} \mathbf{E}_{-s}), \quad \mathbf{H}^i = \sum (C_s \mathbf{H}_s + C_{-s} \mathbf{H}_{-s}), \tag{89.20}$$

где

$$A_s = C_s \pm C_{-s}, \quad B_s = C_s \mp C_{-s},$$

$$C_s = \frac{1}{2}(A_s + B_s), \quad C_{-s} = \pm\frac{1}{2}(A_s - B_s). \tag{89.21}$$

Определяя коэффициенты a_{-s} и b_{-s} по формулам, аналогичным (89.10), будем иметь

$$a_{-s}=\pm a_s,\quad b_{-s}=\mp b_s, \tag{89.22}$$

так что согласно формулам (89.12)

$$C_s=-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{a_s-b_s}{\omega-\omega_s},\quad C_{-s}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{a_{-s}-b_{-s}}{\omega-\omega_{-s}}. \tag{89.23}$$

В этой форме записи резонансными могут быть только коэффициенты C_s, коэффициенты C_{-s} входят в нерезонансный фон. Если возбуждающие токи не являются строго монохроматическими, а их комплексные амплитуды (вместе с a_s и b_s) являются медленно изменяющимися функциями времени, то коэффициенты C_s подчиняются дифференциальному уравнению первого порядка.

$$\frac{dC_s}{dt}+\mathrm{i}(\omega-\omega_s)C_s=\frac{1}{2}(a_s-b_s), \tag{89.24}$$

а коэффициенты A_s и B_s — уравнению второго порядка. При переходе от классической электродинамики к квантовой коэффициенты C_s и C_{-s} превращаются в операторы рождения и уничтожения фотонов (при надлежащей нормировке).

Отметим, что условия ортогональности (88.07) и (89.09) ведут к интересному физическому следствию. Для полей (89.01) и (89.04), возбуждаемых в резонаторе, получаются соотношения

$$\int \varepsilon\,\mathbf{E}^2\,dV=\sum A_s^2\int \varepsilon\,\mathbf{E}_s^2\,dV+\int \varepsilon\,(\mathbf{E}^l)^2\,dV,$$

$$\int \mu\,\mathbf{H}^2\,dV=\sum B_s^2\int \mu\,\mathbf{H}_s^2\,dV+\int \mu\,(\mathbf{H}^l)^2\,dV, \tag{89.25}$$

так что колеблющаяся энергия и колеблющаяся мощность потерь (см. § 7) в резонансном объеме складываются из соответствующих величин для каждого собственного колебания и для продольного поля. В случае пустого резонатора с идеальной стенкой формулы (89.25) можно переписать в виде

$$\int |\mathbf{E}|^2\,dV=\sum |A_s|^2\int |\mathbf{E}_s|^2\,dV+\int |\mathbf{E}^l|^2\,dV,$$

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV=\sum |B_s|^2\int |\mathbf{H}_s|^2\,dV+\int |\mathbf{H}^l|^2\,dV, \tag{89.26}$$

так что средняя электрическая и магнитная энергия аддитивны.

Чтобы иллюстрировать полученные выше формулы, применим их к простому колебательному контуру. Для квазистатических полей выведенные формулы сохраняют свою силу, причем в качестве поверхности S_0 можно взять бесконечно удаленную сферу. На этой сфере удовлетворяются условия (10.06), и все интегралы по S_0 исчезают. Действительно, квазистационарное электрическое поле от ограниченной в пространстве цепи убывает не медленнее, чем $1/R^2$ (закон Кулона), квазистационарное магнитное поле — не медленнее, чем $1/R^2$ (закон Био — Савара). При наличии излучения сравнивать объемный резонатор с контуром уже нельзя.

В колебательном контуре L, C без потерь, обладающем единственной собственной частотой $\omega_0=1/\sqrt{LC}$, электрическое поле

определяется зарядом e в конденсаторе, магнитное поле — током J в катушке. Величины J и e связаны соотношением $J=de/dt$, или $J=-i\omega e$. При свободных колебаниях с частотой ω_0 и при вынужденных колебаниях с частотой $\omega\neq\omega_0$ отношения заряда к току различны. Поэтому отношение амплитуд электрического и магнитного полей для вынужденных колебаний иное, чем для свободных. Этот пример показывает, что в общем случае поля электромагнитных колебательных систем следует искать в виде рядов (89.04) с различными коэффициентами A_s и B_s, которые согласно формуле (89.16) близки друг другу лишь при резонансе.

Возбуждение резонаторов и резонансных контуров происходит по одним и тем же законам; различие заключается лишь в числе степеней свободы или, что то же самое, в числе резонансных частот. Переходные процессы в этих системах также происходят одинаково. Напомним, однако, что согласно § 85 резонатор с конечной проводимостью стенок эквивалентен контуру, сопротивление R и внутренняя индуктивность L_i которого зависят от частоты (скин-эффект).

Согласно формулам (89.01), (89.03) и (89.07) при возбуждении резонатора наряду с поперечным полем возникает продольное поле. На языке теории цепей это обстоятельство легче всего уяснить, если рассмотреть возбуждение контура модулированным по плотности электронным потоком, проходящим через конденсатор (образованный, например, электродами электронной лампы). Такой поток индуцирует ток в цепи и в этом смысле эквивалентен сторонней электродвижущей силе или стороннему электрическому току. Однако электроны создают в конденсаторе дополнительное электрическое поле, которое выше названо продольным электрическим полем; оно может быть найдено с помощью первого уравнения (89.07) и обычно называется полем пространственного заряда.

В клистронах часто применяются резонаторы, расчет свободных колебаний которых может быть произведен квазистатическим методом (см. § 83). Возбуждение таких резонаторов электронными сгустками можно рассчитывать как по эквивалентной схеме, так и с помощью электродинамической теории.

§ 90. Возбуждение резонаторов: применения и дополнения

Теория возбуждения объемных резонаторов (§ 89) позволяет решить ряд задач, связанных со свободными и вынужденными колебаниями в резонаторах. Некоторые из этих задач будут рассмотрены ниже.

Будем сначала считать стенки (пустого) объемного резонатора идеально проводящими и обозначим через ω_s собственные частоты такого резонатора, а через $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ — соответствующие поля. Граничные условия Леонтовича (25.04) можно сформулировать

так: конечная проводимость стенок приводит к появлению на них поверхностного магнитного тока

$$\mathbf{i}^m = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{nE}] = -\frac{c}{4\pi}\zeta[\mathbf{n}[\mathbf{nH}]], \tag{90.01}$$

в первом приближении

$$\mathbf{i}^m = -\frac{c}{4\pi}\zeta[\mathbf{n}[\mathbf{nH}_s]]. \tag{90.02}$$

Этот магнитный ток является причиной того, что колебания будут происходить не с частотой ω_s, а с известной пока комплексной частотой ω. Подставляя i^m во вторую формулу (89.10), получаем

$$b_s = -\frac{c}{4\pi N_s}\oint \zeta[\mathbf{n}[\mathbf{nH}_s]]\,\mathbf{H}_s\,dS = \frac{c}{4\pi N_s}\oint \zeta[\mathbf{nH}_s]^2\,dS. \tag{90.03}$$

Предполагая, что $\zeta=\text{const}$ на поверхности стенок, и пользуясь формулой (88.09), получаем

$$a_s=0,\ b_s=-\zeta c/D, \tag{90.04}$$

где величина

$$D = \int \mathbf{H}_s^2\,dV/\oint[\mathbf{nH}]^2\,dS \tag{90.05}$$

совпадает с величиной (85.09). Подставляя выражения (90.04) в первую формулу (89.12), получаем

$$A_s = -i\omega_s\zeta c/D\,(\omega^2-\omega^2{}_s). \tag{90.06}$$

В этой формуле частота ω неизвестна, а коэффициент A_s обращается в единицу при $\zeta=0$, поскольку тогда $\mathbf{E}=\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}=\mathbf{H}_s$. Поэтому при малых ζ

$$A_s = 1+\zeta A^1{}_s+\ldots, \tag{90.07}$$

где величина $A^1{}_s$ от ζ не зависит, а многоточием указаны члены более высокого порядка относительно ζ, т. е. порядка ζ^2 и выше. Формулы (90.06) и (90.07) дают

$$\omega^2 = \omega^2{}_s - i\zeta c\omega_s/D \tag{90.08}$$

или, извлекая квадратный корень в том же приближении,

$$\omega = \omega_s - i\zeta c/2D, \tag{90.09}$$

что совпадает с полученной ранее формулой (85.12).

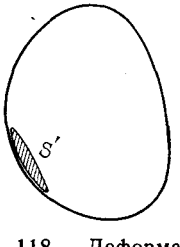


Рис. 118. Деформации объемного резонатора

Аналогичным образом можно рассчитать возмущение собственной частоты резонатора при деформации (прогибе) его оболочки (рис. 118). Эту деформацию можно рассматривать как внесение металлического тела в резонатор. Обозначая плотность электрического тока в этом теле через $\mathbf{j}^e$, будем иметь

$$a_s = \frac{1}{N_s}\int \mathbf{j}^e\,\mathbf{E}_s\,dV,\quad b_s=0, \tag{90.10}$$

где интегрирование производится по объему тела V'. Подставляя это выражение во вторую формулу (89.12) и учитывая, что $B_s \to 1$ при $V' \to 0$, получаем

$$\omega^2 - \omega_s^2 = -i(\omega_s/N_s)\int \mathbf{j}^e \mathbf{E}_s\, dV, \tag{90.11}$$

позволяющее рассчитывать возмущение частоты при достаточной малости возмущающего объема V'. Считая объем V' идеально проводящим, преобразуем формулу (90.11) к виду

$$\omega^2 - \omega_s^2 = -i(\omega_s/N_s)\oint_{S'} \mathbf{i}^e \mathbf{E}_s\, dS, \tag{90.12}$$

где S' — поверхность металлического тела; $\mathbf{i}^e$ — поверхностная плотность электрического тока на ней.

При небольшом прогибе магнитное поле у поверхности S' можно отождествить с невозмущенным магнитным полем $\mathbf{H}_s$ в силу того, что S' лежит близко к невозмущенной поверхности резонатора и лишь слегка наклонена к ней. Полагая

$$\mathbf{i}^e = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}_s], \tag{90.13}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль, направленная внутрь объема V', получаем

$$\oint_{S'} \mathbf{i}^e \mathbf{E}_s\, dS = -\frac{c}{4\pi}\oint_{S'} [\mathbf{n}\mathbf{H}_s]\mathbf{E}_s\, dS = \frac{c}{4\pi}\oint_{S'} [\mathbf{E}_s \mathbf{H}_s]\mathbf{n}\, dS =$$

$$= -\frac{i\omega_s}{4\pi}\int_{V'} (\mathbf{E}_s^2 + \mathbf{H}_s^2)\, dV, \tag{90.14}$$

где использовано тождество (88.04) при $s = s'$ и $\varepsilon = \mu = 1$. Подставляя выражение (88.09) для нормы N_s, приходим к формуле

$$(\omega^2 - \omega_s^2)/\omega_s^2 = \int_{V'} (\mathbf{H}_s^2 + \mathbf{E}_s^2)\, dV / \int_V \mathbf{H}_s^2\, dV, \tag{90.15}$$

где V — **объем** резонатора.

При **идеальной** проводимости стенок векторную функцию $\mathbf{H}_s$ можно всегда выбрать вещественной ($\mathbf{H}^2{}_s = |\mathbf{H}_s|^2$), тогда векторная функция E_s будет чисто мнимой ($\mathbf{E}^2{}_s = -|\mathbf{E}_s|^2$). Поэтому формулу (90.15) можно переписать в виде

$$(\omega^2 - \omega_s^2)/\omega_s^2 = \int_{V'} (|\mathbf{H}_s|^2 - |\mathbf{E}_s|^2)\, dV / \int_V |\mathbf{H}_s|^2\, dV. \tag{90.16}$$

Эта формула показывает, что собственная частота ω деформированного резонатора оказывается больше (или меньше) частоты невозмущенного резонатора, если в объеме V', занимаемом металлом при деформации, преобладает магнитная (или электрическая) энергия. В качестве иллюстрации можно привести резонаторы, рассмотренные в § 83. Уменьшая емкостный объем, увеличиваем C и снижаем собственную частоту; уменьшая индуктивный объем, уменьшаем L и увеличиваем частоту.

Из формул (90.15) и (90.16) видно, что относительное смещение $\Delta\omega/\omega_s$ резонансной частоты порядка V'/V. Отсюда следует,

что при добротностях порядка 1000 и больше, характерных для объемных резонаторов, сместить частоту на ширину резонансной кривой можно путем малой деформации резонатора.

Нетрудно вычислить также смещение частоты резонатора, вызванное малым диэлектрическим шариком. Из электростатики известно, что диэлектрический шар радиуса r_0, помещенный в однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, приобретает дипольный момент

$$\mathbf{p}=\gamma\mathbf{E},\ \gamma=(\varepsilon-1)r^3_0/(\varepsilon+2). \tag{90.17}$$

Такой же дипольный момент возникает у шарика, если его поместить в объемный резонатор не слишком близко к его стенке и если его радиус достаточно мал ($k\sqrt{\varepsilon}r_0\ll 1$. Рассматривая шарик как сосредоточенный сторонний ток (§ 73) и рассуждая как при выводе выражения (90.16), получаем

$$(\omega^2-\omega_s^2)/\omega_s^2=-\gamma|\mathbf{E}_s|^2/\int|\mathbf{E}_s|^2\,dV, \tag{90.18}$$

где числитель содержит $\mathbf{E}_s$ в точке, где расположен шарик. Измеряя смещение резонансной частоты при перемещении шарика в резонаторе, можно измерить распределение электрического поля в резонаторе, точнее, распределение плотности электрической энергии. Распределение отдельных составляющих электрического поля по смещению частоты можно найти, если вместо шарика взять тонкий металлический стерженек; пассивная петля или металлический диск позволяют измерить распределение различных составляющих магнитного поля в объеме резонатора. Действительно, тонкий стержень реагирует лишь на электрическое поле, направленное вдоль стержня, петля и диск — на магнитное поле, перпендикулярное плоскости петли или диска.

Без ухудшения точности левые части (90.16) и (90.18) допустимо замещать на $2(\omega-\omega_s)/\omega_s$. Такая замена равноценна переходу к формулам (89.20) и (89.23) и пренебрежению нерезонансным коэффициентом C_{-s}.

Возбуждение объемного резонатора, связанного с волноводом (см. рис. 117), можно исследовать следующим образом. Собственные колебания такого резонатора характеризуются комплексными частотами $\hat{\omega}_s$ и векторными функциями $\hat{\mathbf{E}}_s$, $\hat{\mathbf{H}}_s$. Если добротность резонатора достаточно велика, то в его объеме $\hat{\mathbf{E}}_s$, $\hat{\mathbf{H}}_s$ мало отличаются от векторных функций изолированного резонатора без потерь, и этим отличием можно пренебречь; однако отличием $\hat{\omega}_s$ от ω_s — комплексной частоты изолированного резонатора — пренебрегать нельзя.

Будем считать, что при данной частоте ω возбуждается только одно резонансное колебание с индексом s, и представим его собственную частоту в виде

$$\hat{\omega}_s=(1+\alpha)\,\omega_s'-i(1+\beta)\,\omega_s'', \tag{90.19}$$

где $\alpha\omega'_s$ — смещение частоты (положительное или отрицательное), вызванное связью резонатора с волноводом (волноводами), $\beta\omega''_s$ — дополнительное затухание, обусловленное связью. Потери в самом элементе связи обычно пренебрежимо малы, поэтому $\beta\omega''_s$ есть радиационное затухание данного колебания, т. е. затухание, обусловленное возбуждением волноводных волн. Для $\beta\omega''_s$ можно написать выражение

$$\beta\omega''_s = \overline{\Sigma}_s / 2\overline{W}_s, \tag{90.20}$$

аналогичное формуле (85.03). Здесь $\overline{\Sigma}_s$ — мощность излучения из резонатора; $\overline{W}_s$ — энергия в резонаторе (при s-м собственном колебании).

Если резонатор возбуждается источниками, расположенными внутри него, то знание частоты (90.19) позволяет по формулам § 89 рассчитать поле в резонаторе и энергию этого поля, а по формуле (90.20) — мощность, излучаемую наружу. В случае, когда резонатор связан с волноводом, по которому может распространяться только одна волна, таким путем находится амплитуда уходящей волны.

Большой практический интерес представляет другая задача: по волноводу бежит волна, мощность которой вводится в объемный резонатор и поглощается в нем (см. § 88, рис. 117). Оказывается, что поглощаемая мощность $\overline{P}$ связана с мощностью $\overline{\Sigma}$ набегающей волноводной волны простым соотношением

$$\overline{P} = \frac{4\beta}{(\xi^2+1)(\beta+1)^2}\overline{\Sigma}, \quad \xi = \frac{\omega - (1+\alpha)\omega'_s}{(1+\beta)\omega''_s}, \tag{90.21}$$

которое следует из теории возбуждения резонаторов (§89) и леммы Лоренца, примененной в системе волновод — резонатор (§ 73 и 75).

Выведем соотношение (90.21). Искомое поле в волноводе имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + R\mathbf{E}_{-1} + \ldots, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + R\mathbf{H}_{-1} + \ldots,$$

где индекс 1 соответствует набегающей волне; индекс — 1 — отраженной; R — коэффициент отражения от резонатора, многоточия — все другие (нераспространяющиеся) волны. Потери в волноводе предполагаются малыми, а норму N_1 считаем положительной; тогда $\overline{\Sigma} = N_1/4$ (см. конец § 75). Искомое поле в резонаторе можно представить в виде

$$\mathbf{E} = C_s\mathbf{E}_s + \ldots, \quad \mathbf{H} = C_s\mathbf{H}_s + \ldots,$$

где $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ соответствуют резонатору без потерь и без связи с волноводом, многоточия — нерезонансным полям; неизвестный коэффициент C_s позволяет вычислить мощность потерь в резонаторе

$$\overline{P} = 2\omega''_s\overline{W}_s = \omega''_s|C_s|^2N_s; \tag{90.22}$$

в последней формуле норма N_s предполагается положительной, т. е. векторная функция $\mathbf{E}_s$ — вещественной.

Чтобы вычислить C_s, введем вспомогательное поле $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$, возбуждаемое в резонаторе сторонним током с плотностью $\mathbf{j}^e = i\omega''_s \varepsilon \mathbf{E}_s/2\pi$; для этого поля $a^0_s = 2i\omega''_s$, $b^0_s = 0$, и в резонаторе

$$\mathbf{E}^0 = C^0_s \mathbf{E}_s + \dots, \quad \mathbf{H}^0 = C^0_s \mathbf{H}_s + \dots,$$

$$C^0_s = \omega''_s/(\omega - \tilde{\omega}_s) = 1/(\xi - i)(\beta + 1)$$

[см. формулу (89.23)], а в волноводе

$$\mathbf{E}^0 = C^0_{-1}\mathbf{E}_{-1} + \dots, \quad \mathbf{H}^0 = C^0_{-1}\mathbf{H}_{-1} + \dots,$$

причем излучаемая мощность

$$\overline{\Sigma}^0 = |C^0_1|^2 N_1/4 = \beta\omega''_s |C^0_s|^2 N_s. \tag{90.23}$$

Применим теперь соотношение (73.04) к полям $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ правее сечения $z=0$ волновода (рис. 117). С учетом формул (75.10) и (75.11) приходим к соотношению

$$C^0_{-1} N_1 = \int \mathbf{j}^e \mathbf{E}\, dV = 2i\omega''_s C_s N_s;$$

используя формулу (90.23), получаем

$$\overline{P} = \omega''_s |C_s|^2 N_s = |C^0_{-1}|^2 N_1^2/4\omega''_s N_s = \beta |C^0_s|^2 N_1 = 4\beta |C^0_s|^2 \overline{\Sigma},$$

т. е. соотношение (90.21). Оно имеет весьма общее значение и применимо тогда, когда малы потери в волноводе и резонаторе, а связь между ними слабая.

В соотношение (90.21) входят два множителя: $1/(\xi^2+1)$ и $4\beta/(\beta+1)^2$. Первый множитель определяет резонансные свойства данной системы: он максимален (равен единице) при $\xi = 0$, когда частота ω набегающей волны совпадает с частотой $(1+\alpha)\omega'_s$; при $\xi = \pm 1$ он равен 1/2, значение $\xi = 1$ определяет полуширину резонансной кривой. Второй множитель зависит только от параметра β, который называется коэффициентом связи. Второй множитель максимален (равен единице) при $\beta = 1$. Связь, для которой $\beta = 1$, называется критической, в этом случае радиационное затухание равно затуханию из-за потерь в резонаторе (т. е. добротность резонатора, связанного с волноводом, вдвое меньше, чем добротность изолированного резонатора). При критической связи и точном резонансе $\overline{P} = \overline{\Sigma}$, т. е. вся мощность, подводимая по волноводу, поглощается в резонаторе; при этом, естественно, $R = 0$.

Следует иметь в виду, что параметры α и β в общем случае плохо поддаются теоретическому расчету. Чтобы реализовать равенство $\overline{P} = \overline{\Sigma}$, обычно коэффициент связи подбирают на опыте, например непрерывно изменяя глубину погружения в резонатор петли связи или зонда; чтобы получить точный резонанс, наряду с этим плавно изменяют частоту ω'_s, например деформируя стенку резонатора.

В теории резонаторов, связанных с волноводом или свободным пространством, приходится иметь дело с полями, выходящими за пределы резонансного объема: резонатор превращается в открытую систему. Тем не менее норму каждого колебания (сопровождаемого излучением) можно вычислять, не учитывая излучаемые волны. Это будет показано на простом примере в § 91.

§ 91*. Возбуждение отрезка волновода

В § 81 показано, что собственные колебания цилиндрического резонатора можно рассматривать как стоячие волны в отрезке волновода. Эту точку зрения можно распространить на вынужденные колебания.

Цилиндрическим резонатором будем в дальнейшем называть отрезок произвольного волновода, заключенный между двумя поперечными перегородками $z=0$ и $z=l$. При этом под волноводом понимаем (в духе § 75) любую однородную по оси z передающую линию, электромагнитное поле которой в каждом поперечном сечении $z=\text{const}$ занимает конечную площадь $S_\perp$. Таким образом, под определение цилиндрического резонатора подходят не только рассмотренные в § 81 полости с идеально проводящими стенками, но и резонаторы, боковая поверхность и основания $z=0$ и $z=l$ которых имеют конечную проводимость, отрезки однородных по длине волноводов, частично заполненных диэлектриком, и т. д.

Предположим, что возбуждение происходит на частоте ω электрическими и магнитными сторонними токами $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$. Предполагается также, что известна полная система собственных волн бесконечного волновода при частоте ω, причем через $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$ обозначается электромагнитное поле s-й собственной волны, распространяющейся в положительном направлении оси z (ось волновода) с волновым числом h_s, а через $\mathbf{E}_{-s}$, $\mathbf{H}_{-s}$ — поле такой же волны, но распространяющейся в отрицательном направлении с волновым числом $h_{-s}=-h_s$ (см. § 75). Обозначим через

$$\mathbf{E}^r{}_s=\mathbf{E}_s+R_s\mathbf{E}_{-s},\quad \mathbf{H}^r{}_s=\mathbf{H}_s+R_s\mathbf{H}_{-s} \tag{91.01}$$

электромагнитное поле s-й волны, набегающей на поперечную перегородку $z=l$ и отражающуюся от нее (с известным коэффициентом отражения R_s), а через

$$\mathbf{E}^r{}_{-s}=\mathbf{E}_{-s}+R_{-s}\mathbf{E}_s,\quad \mathbf{H}^r{}_{-s}=\mathbf{H}_{-s}+R_{-s}\mathbf{H}_s \tag{91.02}$$

поле s-й волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси z и отражающейся (с коэффициентом отражения R_{-s}) от поперечной перегородки $z=0$.

Электромагнитные поля (91.01) и (91.02) удовлетворяют уравнениям поля и граничным условиям на боковой поверхности резонатора и на одном из его оснований: поле (91.01) — при $z=l$, поле (91.02) — при $z=0$. Пусть источники поля расположены при $z_1<z<z_2$, где $z_1>0$, а $z_2<l$. Тогда при $z_2<z<l$ возбуждаемое ими поле естественно искать в виде

$$\mathbf{E}=\sum C_s\mathbf{E}^r_s,\quad \mathbf{H}=\sum C_s\mathbf{H}^r_s, \tag{91.03}$$

а при $0<z<z_1$ — в виде

$$\mathbf{E}=\sum C_{-s}\mathbf{E}^r_{-s},\quad \mathbf{H}=\sum C_{-s}\mathbf{E}^r_{-s}, \tag{91.04}$$

где C_s и C_{-s} — неизвестные пока (постоянные) коэффициенты. Их нетрудно определить, если воспользоваться условием ортогональности

$$\int\limits_{S_\perp}\{[\mathbf{E}^r_s\mathbf{H}^r_{s'}]-[\mathbf{E}^r_{s'}\mathbf{H}^r_s[\}\,\mathbf{l}\,dS=0\quad\text{при } s'\neq -s, \tag{91.05}$$

непосредственно вытекающим из формулы (75.10).

Повторяя все выкладки § 76, получим

$$C_s=\frac{1}{N^r_s}\int(\mathbf{j}^e\mathbf{E}^r_{-s}-\mathbf{j}^m\mathbf{H}^r_{-s})\,dV,\quad C_{-s}=\frac{1}{N^r_s}\int(\mathbf{j}^e\mathbf{E}^r_s-\mathbf{j}^m\mathbf{H}^r_s)\,dV, \tag{91.06}$$

где интегрирование производится по всему объему, занятому источниками, а через N^r_s обозначено выражение

$$N^r_s=\frac{c}{4\pi}\int\{[\mathbf{E}^r_s\mathbf{H}^r_{-s}]-[\mathbf{E}^r_{-s}\mathbf{H}^r_s]\}\,\mathbf{l}\,dS. \tag{91.07}$$

Пользуясь формулами (91.01) и (91.02), легко получаем соотношение

$$N^r_s=(1-R_sR_{-s})N_s, \tag{91.08}$$

в котором N_s означает норму бегущей волны в волноводе, определенную формулой (75.11).

Рассмотрим теперь резонанс в цилиндрическом объеме. Согласно формулам § 89 резонанс проявляется в том, что резонансный знаменатель $\omega^2-\omega^2_s$ или $\omega-\omega_s$ обращается в нуль или принимает малые значения, вследствие чего соответствующие коэффициенты A_s и B_s (или C_s) становятся большими. В новом варианте теории возбуждения резонаторов большие значения коэффициентов C_s и C_{-s} достигаются при резонансе за счет того, что норма N^r_s становится малой. В качестве примера рассмотрим идеальные резонаторы § 81; так как волны полностью отражаются от сечений $z=0$ и $z=l$, то

$$R_{-s}=1,\quad R_s=e^{i\,2h_s\,l} \tag{91.09}$$

и

$$1-R_sR_{-s}=1-e^{i\,2h_s\,l}=-2ie^{i\,h_s\,l}\sin h_s\,l. \tag{91.10}$$

На резонансной частоте имеем (см. § 81) $\sin h_s l=0$, и выражение (91.08) обращается в нуль.

Не следует удивляться тому, что вынужденные колебания объемных резонаторов допускают двоякую математическую трактовку. Еще на первом этапе развития математической физики оказалось, что решение задачи о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах, можно получить как в виде разложения в

ряд Фурье, т. е. в виде разложения по собственным функциям струны (решение Даниила Бернулли), так и путем анализа бегущих и отраженных волн (решение Даламбера). Решение задачи о вынужденных колебаниях струны также можно найти двумя различными способами, которые, разумеется, приводят к эквивалентным результатам.

Струна является простейшим примером системы с бесконечным дискретным спектром собственных частот — механическим резонатором. Решение задачи о вынужденных колебаниях электромагнитного резонатора, данное в § 89, аналогично решению Бернулли, а решение, полученное в этом параграфе, соответствует методу Даламбера.

Коэффициенты R_s и R_{-s} в формулах, полученных выше, могут по абсолютной величине быть меньше единицы (при вещественных значениях h_s) вследствие поглощения в сечениях $z=0$ и $z=l$, а также вследствие излучения через эти сечения. Например, при $z=l$ может быть слегка прозрачная стенка, отделяющая рассматриваемый резонатор от волновода; в последнем возбуждается уходящая волна, однако она в выражении для нормы $N^r{}_s$ и в других формулах не фигурирует. Этот пример показывает, что в открытых системах излучаемое поле не дает существенного вклада в норму (см. § 77 и конец § 90).

Задачи к гл. XVI

1. Рассчитать возбуждение колебательного контура из последовательно соединенных элементов L, C, R, не зависящих от частоты, сторонней электродвижущей силой $\mathscr{E}$; последнюю учесть как сторонний электрический ток с плотностью $\mathbf{j}^e=\sigma\mathbf{E}^e$ (см. § 3). Сравнить полученный результат с известной формулой для тока

$$J=i\omega\mathscr{E}/L(\omega^2-\omega^2{}_0+2i\alpha\omega), \qquad (a)$$

где ω_0 и α определяются выражениями (85.17).

Решение. Согласно формуле (89.10) получаем (при $s=1$)

$$a_1=\frac{1}{N_1}\int\sigma\,\mathbf{E}^e\,\mathbf{E}_1\,dV=\frac{\omega}{\omega_1 N_1}\int\mathbf{E}^e\,\sigma(\omega_1)\,\mathbf{E}_1\,dV=\frac{\omega}{\omega_1 N_1}\mathscr{E}J_1,\ b_1=0,$$

где J_1 — ток при собственных колебаниях контура; ω_1 — частота этих колебаний. Подставляя выражение для a_1 в формулу (89.12), получаем

$$B_1=-i\omega\mathscr{E}J_1/N_1(\omega^2-\omega^2{}_1),\ N_1=-(1/4\pi)\int\mu\mathbf{H}^2{}_1dV=-LJ^2{}_1.$$

При вынужденных колебаниях

$$J=B_1J_1=i\omega\mathscr{E}/L(\omega^2-\omega^2{}_1). \qquad (b)$$

Эта формула имеет несколько необычный вид и на первый взгляд отличается от формулы (a). Однако это отличие является лишь кажущимся, так как ω_1 не есть комплексная частота свободных колебаний данного контура, которая определяется выражением (85.17), а является собственной частотой, отно-

сящейся к вспомогательному контуру, имеющему согласно § 88 сопротивление $R(\omega_1)=\omega R/\omega_1$. Поскольку частота ω_1 определяется из уравнения

$$\omega^2_1+i\omega_1 R(\omega_1)/L-1/LC=0, \text{ то } \omega^2_1=\omega^2_0-2i\alpha\omega$$

и формула (*b*) переходит в формулу (*a*).

Частота ω_1 зависит от частоты возбуждения ω. В общих формулах § 89 частоты ω_s и соответствующие им векторные функции $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ также зависят от ω. Если исследуется поведение резонатора с высокой добротностью вблизи данной резонансной частоты, то эти зависимости обычно не сказываются.

2. Продолжая задачу, рассмотренную в § 91, написать выражения для полей в области $z_1<z<z_2$, где расположены источники.

Решение. Рассуждая как в § 76, приходим к выражениям

$$\mathbf{E}=\sum (C_s\,\mathbf{E}^r_s+C_{-s}\,\mathbf{E}^r_{-s})+\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon}\,j^e_z\,\mathbf{l},$$

$$\mathbf{H}=\sum (C_s\,\mathbf{H}^r_s+C_{-s}\,\mathbf{H}^r_{-s})+\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon}\,j^m_z\,\mathbf{l},$$

где C_s и C_{-s} суть функции координаты z, определяемые формулами

$$C_s=\frac{1}{N^r_s}\int\limits_{(z_1,z)}(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}^r_{-s}-\mathbf{j}^m\,\mathbf{H}^r_{-s})\,dV,\quad C_{-s}=\frac{1}{N^r_s}\int\limits_{(z,z_2)}(\mathbf{j}^e\,\mathbf{E}^r_s-\mathbf{j}^m\,\mathbf{H}^r_s)dV,$$

соответствующими выражениям (76.05) и применимыми при любых z.

Заметим, что при $R_s=R_{-s}=0$ выписанные выше формулы дают теорию возбуждения бесконечного волновода (§ 76), а при $R_s=0$, $R_{-s}\neq 0$ — теорию возбуждения полубесконечного волновода (см. § 77).

Глава XVII.
ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 92. Принцип Гюйгенса для электромагнитного поля

Для понимания волновых процессов и расчета диффракционных полей большое значение имеет принцип Гюйгенса, согласно которому распространение волн обусловлено действием вторичных источников. По принципу Гюйгенса распространение сферической волны, излученной источником Q (рис. 119,*a*), нужно рассматривать так: каждая точка сферической поверхности S, до которой в момент t дошла волна, является вторичным источником, излучающим элементарную сферическую волну. Огибающая этих сферических волн S' в данном случае также является сферой. Она определяет положение волновой поверхности в более поздний момент t'.

Принцип Гюйгенса выражает то обстоятельство, что волновые явления подчиняются законам близкодействия. Действительно, по принципу Гюйгенса положение волновой поверхности S' в момент t' полностью определяется ее состоянием в предшествующий мо-

мент t и не зависит от предыстории волнового процесса, от волн в других областях пространства и т. д.

Недостатком принципа Гюйгенса является его описательный, по преимуществу качественный характер. Определенным затруднением для принципа Гюйгенса явился также тот факт, что сферические волны от вторичных источников, кроме огибающей S', имеют вторую огибающую — волну, распространяющуюся назад к источнику Q. Фактически такая волна при распространении волн в однородном пространстве не наблюдается; она возникает лишь на границах раздела, где происходит отражение волн. Это затруднение устраняется только при более глубоком анализе волновых процессов.

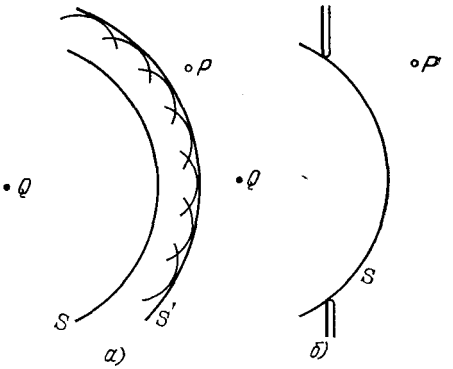


Рис. 119. К пояснению принципа Гюйгенса:

а — распространение волны в свободном пространстве; *б* — диффракция волны на отверстии

Френель уточнил принцип Гюйгенса, приняв во внимание интерференцию сферических волн, излученных вторичными источниками. Если характеризовать волновой процесс некоторой скалярной функцией Φ и ограничиться монохроматическими колебаниями, то этот уточненный принцип Гюйгенса, или принцип Гюйгенса — Френеля, можно сформулировать в виде

$$\Phi = K_0 \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} \Phi^0 \, dS, \qquad (92.01)$$

гдде Φ^0 суть значения функции Φ на замкнутой поверхности S (например, на волновой поверхности S рис. 119,*а*); R — расстояние между элементом dS этой поверхности и точкой наблюдения P, где вычисляется функция Φ. Согласно формуле (92.01) каждый элемент поверхности S является источником изотропной сферической волны e^{ikR}/R с амплитудой $K_0\Phi^0 dS$, пропорциональной значению функции Φ в данной точке поверхности S. Коэффициент пропорциональности K_0 можно найти, если вычислить интеграл (92.01) для сферической или плоской волны и сравнить его со значением этой волны в точке P_0. Этот коэффициент получается равным $K_0 = -i/\lambda$, т. е. фаза сферических волн, посылаемых каждой точкой поверхности S, опережает значение Φ в этой точке на четверть периода; $\lambda = 2\pi/k$.

Принцип Гюйгенса — Френеля можно несколько уточнить, предположив, что излучаемые вторичными источниками сферические волны обладают некоторой диаграммой направленности. Тогда вместо формулы (92.01) будем иметь

$$\Phi = \oint_S \frac{e^{ikR}}{R} K \Phi^0 \, dS, \qquad (92.02)$$

где функция K определяет зависимость амплитуды вторичных сферических волн от направления. Надлежащим подбором функции K можно, в частности,

добиться, чтобы вторичные источники излучали только в одну сторону, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$\oint_S \frac{e^{ikR}}{R} K \Phi^0 \, dS = 0 \text{ внутри } S. \qquad (92.03)$$

Френелю не удалось дать убедительного обоснования тому или иному выбору функции K и отсутствию волны, бегущей назад. К счастью, оказалось, что результаты вычислений по формуле (92.02) практически почти не зависят от конкретного вида функции K. Достаточно считать, что для излучения прямо вперед (в направлении распространения первичной волны) $K = K_0$, а при наклонном излучении $|K|$ уменьшается.

В элементарном изложении физической оптики анализ поля по формулам (92.01) или (92.02) производится с помощью зон Френеля или спирали Корню. Более точное вычисление требует применения специальных функций (интегралов Френеля, см. § 79), к которым приближенно сводятся выражения (92.01) и (92.02). Принцип Гюйгенса — Френеля позволяет дать расчет дифракционных явлений, возникающих при наличии экранов и других непрозрачных тел. Если, например, сферическая волна от источника Q проходит через отверстие в экране (см. рис. 119,*б*), то при элементарном изложении поле в точке вычисляют как результат действия зон Френеля (или их частей), не закрытых экраном. При более точном подходе интегралы (92.01) и (92.02) вычисляются для поверхности S, затягивающей отверстие в экране и далее продолжаемой по его теневой стороне, где приближенно принимают $\Phi^0 = 0$. Тем самым принцип Гюйгенса — Френеля позволяет свести задачи дифракции к расчету интерференции волн, испускаемых вторичными источниками и имеющих известную амплитуду и фазу.

Дальнейшее уточнение принципа Гюйгенса принадлежит Кирхгофу, который дал строгую формулировку принципа Гюйгенса, основываясь на волновом уравнении. Принцип Гюйгенса — Кирхгофа для монохроматических колебаний имеет вид

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \Phi^0 - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \Phi^0}{\partial n} \right] dS. \qquad (92.04)$$

Он выражает значение функции Φ в точке P через значения этой функции Φ и ее нормальной производной $\partial\Phi/\partial n$ на поверхности S. Формула (92.04) является следствием волнового уравнения для монохроматических колебаний (уравнения Гельмгольца)

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0. \qquad (92.05)$$

Принцип Гюйгенса в формулировке Кирхгофа представляет собой существенный шаг вперед. Если брать интеграл (92.04) по замкнутой поверхности S и подставлять в него истинные значения Φ и $\partial\Phi/\partial n$ на поверхности, то этот интеграл во всех случаях дает правильное поле вне поверхности S и нуль внутри нее. Кроме того, оказывается, что интеграл (92.04) можно приближенно преобразовать в интеграл (92.02), причем функция K определяется однозначно. В современной теоретической оптике приближенное решение дифракционных задач производится почти исключительно с помощью принципа Гюйгенса — Кирхгофа. Приближенный характер получаемых результатов связан

лишь с тем, что в интеграл (92.04) подставляются приближенные значения Φ^0 и $\partial\Phi^0/\partial n$.

Более подробное изложение данных вопросов можно найти в любой книге по физической (волновой) оптике. Сказанное выше является лишь историческим введением к электродинамическому принципу Гюйгенса, которому будет посвящено дальнейшее изложение.

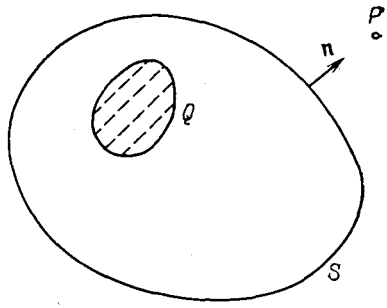


Рис. 120. Поверхность S, точка наблюдения P и источники поля Q в формулировке принципа Гюйгенса

При формулировке принципа Гюйгенса в электродинамике нужно иметь в виду, что электромагнитные волны в общем случае нельзя характеризовать скалярной функцией Φ: это возможно лишь для продольных (скалярных) волн, например для звуковых. Строго говоря, в оптике нельзя описывать световые волны скалярной функцией Φ. Однако поперечный (векторный) характер электромагнитных волн в большинстве оптических дифракционных задач не проявляется, и поэтому скалярная теория дифракции оказывается достаточной. Наоборот, поляризацию радиоволн игнорировать нельзя. Поэтому рассмотрим векторную электродинамическую формулировку принципа Гюйгенса.

Электродинамический принцип Гюйгенса формулируется для замкнутой поверхности S (рис. 120), охватывающей источники поля. Электромагнитное поле в точке наблюдения P, расположенной вне поверхности S, может быть выражено как результат сложения волн, излученных вторичными источниками, расположенными на поверхности S. Если же точка наблюдения P находится внутри поверхности S, то электромагнитное поле, порождаемое этими вторичными источниками, равно нулю: там поле определяется истинными (первичными), а не вторичными источниками.

Обозначим через $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ поле вторичных источников, расположенных на поверхности S. Это поле совпадает с истинным полем лишь вне S, а внутри S тождественно исчезает. Таким образом, поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ терпит скачок на поверхности S, что эквивалентно наличию на ней поверхностных электрических и магнитных токов с плотностями

$$\mathbf{i}^e = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{H}^0], \quad \mathbf{i}^m = -\frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}\mathbf{E}^0], \tag{92.06}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, направленная в сторону области, занятой полем (в § 25 и 74 нормаль $\mathbf{n}$ имела противоположное направление), $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ — фактические значения поля на поверхности S. Поверхностные токи (92.06) являются теми вторичными источниками, о которых говорится в принципе Гюйгенса.

Электродинамический принцип Гюйгенса получится в явной форме, если выразить поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в точке наблюдения P вне S через поверхностные токи (92.06). Если имеются не поверхностные,

а объемные токи с плотностями $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$, то электромагнитное поле, возбуждаемое ими в безграничном пустом пространстве, находится интегрированием уравнений (17.14). Это поле выражается через электрический и магнитный векторные потенциалы (17.16). Интересующее нас поле возбуждается поверхностными токами, поэтому введенные в § 17 векторные потенциалы $\mathbf{A}^e$ и $\mathbf{A}^m$ принимают вид

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{c}\oint_S \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathbf{i}^e\,dS,\quad \mathbf{A}^m = \frac{1}{c}\oint_S \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathbf{i}^m\,dS, \tag{92.07}$$

поскольку поверхностные токи можно рассматривать как предельный случай объемных. Здесь S означает поверхность, по которой текут поверхностные токи. Для поверхностных токов, определяемых формулами (92.06), векторные потенциалы

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{e^{ikR}}{R}\,[\mathbf{nH}^0]\,dS,\quad \mathbf{A}^m = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{e^{ikR}}{R}\,[\mathbf{nE}^0]\,dS \tag{92.08}$$

и полное электромагнитное поле дается выражениями (17.15):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik}\,(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^e + k^2\mathbf{A}^e) - \operatorname{rot}\mathbf{A}^m, \tag{92.09}$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}^e - \frac{1}{ik}\,(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}^m + k^2\mathbf{A}^m).$$

Это и есть искомое поле вторичных источников (92.06), распределенных по поверхности S. Вторичные источники на каждом элементе dS поверхности S являются элементарными диполями: электрическим диполем с моментом $(i/\omega)\mathbf{i}^e dS$ и магнитным диполем с моментом $(i/\omega)\mathbf{i}^m dS$. По теореме единственности (§ 10) эти источники возбуждают поле (92.09), которое при $R\to\infty$ имеет вид расходящихся волн и, следовательно, при наличии потерь достаточно быстро исчезает. Тем же свойством обладает искусственно образованное поле, равное истинному полю $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ вне S, имеющее граничные значения $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ на S и обращающееся в нуль внутри S. Согласно теореме единственности последнее поле должно совпадать с полем (92.09), которое, в частности, удовлетворяет условию $\mathbf{E}=\mathbf{H}=0$ внутри S, т. е. вторичные источники излучают только в одну сторону.

Предыдущий вывод был основан на том, что в формулы (92.06) и (92.08) подставлялись *точные* значения $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ истинного поля на поверхности S. Посмотрим теперь, что получится при произвольном (приближенном) задании тангенциальных полей $[\mathbf{nE}^0]$ и $[\mathbf{nH}^0]$ на поверхности S. Введем в этом случае (чисто формально) поверхностные токи по (92.06) и вычислим векторные потенциалы по (92.07) или (92.08). Тогда вычисленное по формулам (92.09) поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ будет тождественно удовлетворять однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H},\quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E}. \tag{92.10}$$

Действительно, в этом случае источники отсутствуют всюду, за исключением поверхности S, и уравнения (17.14) сводятся к уравнениям (92.10). На самой поверхности S распределены поверхностные токи, следовательно, имеют место граничные условия

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{H}^{(2)}-\mathbf{H}^{(1)}]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^{e},\quad [\mathbf{n},\ \mathbf{E}^{(2)}-\mathbf{E}^{(1)}]=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}^{m} \tag{92.11}$$

или, учитывая соотношения (92.06),

$$E_t^{(2)}-E_t^{(1)}=E_t^0,\quad H_t^{(2)}-H_t^{(1)}=H_t^0, \tag{92.12}$$

где индексом $^{(1)}$ обозначены поля с внутренней стороны S, а индексом $^{(2)}$ — с внешней.

Если бы $E^0{}_t$ и $H^0{}_t$ были точными значениями полей, то получили бы $E_t{}^{(1)}=H_t{}^{(1)}=0$ и $E_t{}^{(2)}=E_t{}^0$, $H_t{}^{(2)}=H_t{}^0$. В случае же произвольных или приближенных значений $E_t{}^0$, $H_t{}^0$ поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, вычисленное указанным выше способом, удовлетворяет лишь условиям (92.12). Это значит, что вычисленное поле на границе области отличается от данного, а поле внутри S не исчезает. Впрочем, эти нежелательные эффекты невелики, если заданное поле на поверхности S мало отличается от истинного.

Невыполнение условий $E_t{}^{(2)}=E_t{}^0$, $H_t{}^{(2)}=H_t{}^0$ для вычисленного по формулам (92.08) и (92.09) поля при произвольном задании $E_t{}^0$ и $H_t{}^0$ вполне естественно: эти условия являются в общем случае противоречивыми, так как, например, одно тангенциальное поле $E_t{}^0$ уже определяет все поле вне S единственным образом (если в формулировке внешней задачи учесть условия на бесконечности, см. § 10). Поэтому на поверхности S можно задать произвольно лишь, например, магнитный поверхностный ток $\mathbf{i}^m$ по формуле (92.06), а электрический поверхностный ток определяется по формуле $\mathbf{i}^e=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{nH}]$, после того, как будет найдено поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, единственность которого доказана в § 10. Таким образом, в формулах (92.06) нельзя задавать произвольно тангенциальные составляющие как электрического, так и магнитного полей, поскольку это может привести к противоречию и отсутствию решения у данной электродинамической задачи. По этой причине формулы (92.08) и (92.09) фактически приводят к вычисленному полю, отличному от заданного (на поверхности S).

Электродинамическая формулировка принципа Гюйгенса, эквивалентная формулам (92.08) и (92.09), была дана впервые Котлером. Интересно, что до Котлера данным вопросом занимался ряд авторов, которые, однако, не смогли получить выражений, пригодных для приближенного решения электродинамических дифракционных задач. В настоящее время принцип Гюйгенса — Котлера широко применяется для приближенного расчета электромагнитного излучения из волноводов, рупоров, отверстий и т. д. Ниже будут приведены примеры таких расчетов.

Во многих книгах (а ранее в работах Котлера и его последователей) вместо формул (92.08) и (92.09) приводятся формулы, связывающие непосред-

ственно поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ с составляющими $\mathbf{E}^0_t$, $\mathbf{H}^0_t$. Однако гораздо удобнее сначала вычислить $\mathbf{A}^e$ и $\mathbf{A}^m$, а потом дифференцированием находить $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Преимущество такого подхода особенно проявляется в задаче о дифракции на отверстии (см. ниже § 93). Если пользоваться формулами, непосредственно связывающими $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ с составляющими E^0_t, H^0_t, терпящими скачок на краю отверстия, то в этих формулах наряду с поверхностным интегралом (по площади отверстия) нужно учитывать еще линейный интеграл (по периметру отверстия). При использовании формул (92.08) и (92.09) линейный интеграл не нужен; это упрощает расчет и приводит к тем же результатам.

§ 93. Дифракция на отверстии произвольной формы

Рассмотрим излучение из отверстия, ограниченного плоской замкнутой кривой C (рис. 121), лежащей на плоскости $z=0$. Проведем поверхность S через плоскую площадку — часть плоскости $z=0$, ограниченную кривой C. Зададим на этой площадке S_0 тангенциальные поля E^0_x, E^0_y, H^0_x и H^0_y и будем считать, что на поверхности, дополняющей эту площадку до замкнутой поверхности, поля равны нулю. Если взять ось z в направлении нормали $\mathbf{n}$, то формулы (92.08) примут вид

$$A^e_x = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}H^0_y\,dS,\quad A^m_x = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}E^0_y\,dS,$$

$$A^e_y = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}H^0_x\,dS,\quad A^m_y = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_0}\frac{e^{ikR}}{R}E^0_x\,dS, \qquad (93.01)$$

а $A^e{}_z = A^m{}_z = 0$. Выберем начало координат ($x=y=z=0$) на площадке S_0. Обозначим временно через x, y, z координаты точки наблюдения P, через ξ, η, 0 — координаты точки на площадке S_0 (точки истока). Расстояние между этими точками

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2(x\xi+y\eta)+\xi^2+\eta}. \qquad (93.02)$$

Введем обозначения

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2},\ \cos\Omega = (x\xi+y\eta)/r\rho, \qquad (93.03)$$

где r и ρ суть радиусы-векторы точки наблюдения и точки истока соответственно, т. е. их расстояния от начала координат, а Ω — угол между этими радиусами-векторами.

Расстояние R можно записать в виде

$$R = \sqrt{r^2-2r\rho\cos\Omega+\rho^2}. \qquad (93.04)$$

Если нужно найти электромагнитное поле на больших расстояниях от излучающего отверстия, то, считая r достаточно большим, будем иметь

$$R = r\sqrt{1-\frac{2\rho\cos\Omega}{r}+\frac{\rho^2}{r^2}} = r-\rho\cos\Omega+\frac{\rho^2}{r}\left(\frac{1}{2}-\cos^2\Omega\right)+\ldots, \qquad (93.05)$$

где радикал разложен в ряд по степеням отношения ρ/r. Так как отверстие S_0 имеет конечные размеры, то радиус-вектор ρ не превышает некоторого максимального значения ρ_{max}. Если выполняется условие $r \gg \rho_{max}$, то в интегралах (93.01) можно заменить $1/R$ просто на $1/r$ и вынести $1/r$ за знак интеграла. Если далее выполняется условие

$$k\rho_{max}^2/r \ll 1, \tag{93.06}$$

то в экспоненту e^{ikR} можно подставить выражение

$$kR = kr - k\rho\cos\Omega, \tag{93.07}$$

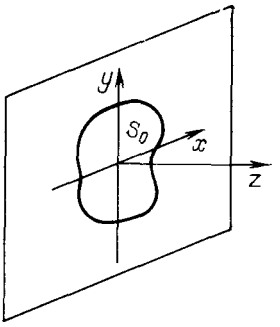


Рис. 121. Произвольное отверстие в плоском экране

после чего выражения (93.01) примут вид

$$A_x^e = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{-ik\rho\cos\Omega} H_y^0\, dS,\quad A_x^m = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{-ik\rho\cos\Omega} E_y^0\, dS,$$

$$A_y^e = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{-ik\rho\cos\Omega} H_x^0\, dS,\quad A_y^m = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int e^{-ik\rho\cos\Omega} E_x^0 dS. \tag{93.08}$$

Выражения (93.08) показывают, что отверстие S излучает сферическую волну, зависящую от r по закону e^{ikr}/r. Для вычисления диаграммы направленности этой волны удобно ввести сферическую систему координат r, ϑ, φ. Декартовы координаты точки наблюдения x, y, z выражаются через сферические координаты в виде

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\vartheta,$$

причем направление прямо вперед (вдоль оси z) соответствует значению $\vartheta = 0$.

Векторные потенциалы (93.08) имеют в сферической системе координат составляющие

$$A_r = A_x\sin\vartheta\cos\varphi + A_y\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$A_\vartheta = A_x\cos\vartheta\cos\varphi + A_y\cos\vartheta\sin\varphi,\ A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi. \tag{93.09}$$

Подставляя эти составляющие в формулы (93.08), приходится пользоваться представлением основных операций векторного анализа в сферической системе координат. Формулы § 19 дают

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}; \tag{93.10}$$

$$\operatorname{grad}_r\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r},\ \operatorname{rot}_r\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right];$$

$$\operatorname{grad}_\vartheta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta},\ \operatorname{rot}_\vartheta\mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\vartheta A_\varphi)\right];$$

$$\mathrm{grad}_\varphi \Phi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\,,\ \mathrm{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right], \qquad (93.11)$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор, Φ — произвольный скаляр.

При расчете электромагнитного излучения в дальней зоне, при $kr\to\infty$ эти операции упрощаются: а именно, если $\mathbf{A}$ и Φ зависят от r по закону e^{ikr}/r, то приближенно можно написать

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\,\mathbf{A} = ikA_r,\\ &\mathrm{grad}_r \Phi = ik\Phi,\ \mathrm{grad}_\vartheta \Phi = 0,\ \mathrm{grad}_\varphi \Phi = 0, \qquad (93.12)\\ &\mathrm{rot}_r \mathbf{A} = 0,\ \mathrm{rot}_\vartheta \mathbf{A} = -ikA_\varphi,\ \mathrm{rot}_\varphi \mathbf{A} = ikA_\vartheta, \end{aligned}$$

где выражения, пропорциональные $1/(kr)^2$, заменены нулями.

С помощью соотношений (93.12) формулы (92.09) преобразуются к виду

$$E_\vartheta = H_\varphi = ik(A^e_\vartheta + A^m_\varphi),\ E_\varphi = -H_\vartheta = ik(A^e_\varphi - A^m_\vartheta), \qquad (93.13)$$

а $E_r = H_r = 0$.

Полученные выражения являются, как уже отмечалось, приближенными и применимы к непрозрачным экранам любого вида (в оптике, например, рассматривают абсолютно черные экраны). Если же экран является идеально проводящей плоскостью, то излучение из отверстия в таком экране можно рассчитать — примерно в том же приближении — несколько иначе (см. § 96).

§ 94. Принцип двойственности

Принцип двойственности (или теорема двойственности) устанавливает связь между двумя следующими дифракционными задачами:

1. Дифракция на плоской пластинке, которую считаем бесконечно тонкой и идеально проводящей и обозначаем через s (рис. 122,*а*). Пластинка лежит в плоскости $z=0$, остальную часть плоскости обозначаем через S.

2. Дифракция на дополнительном плоском экране S, который также является бесконечно тонким и идеально проводящим и лежит в плоскости $z=0$. Дополнительный экран имеет отверстие s, точно воспроизводящее по форме и размерам пластинку в 1-й задаче (см. рис. 122,*б*).

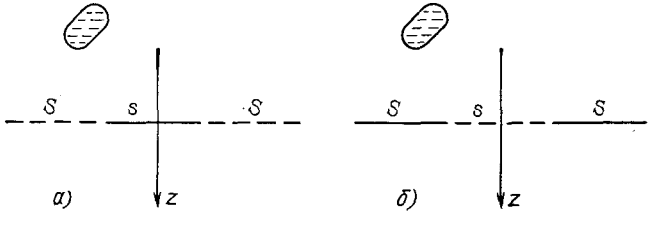


Рис. 122. К формулировке теоремы двойственности:
а — плоская пластинка; *б* — дополнительный экран

Будем считать, что источники электромагнитных полей — в полупространстве $z<0$ (верхнее полупространство). В качестве источников можно взять сторонние электрические и магнитные токи, однако в формулировку принципа двойственности входят не источники, а создаваемые ими первичные поля, т. е. поля, которые были бы при отсутствии пластинки и экрана, в безграничном пустом пространстве. Первичное поле в 1-й задаче мы обозначим через $\mathbf{E}^0_1$, $\mathbf{H}^0_1$, во 2-й задаче — через $\mathbf{E}^0_2$, $\mathbf{H}^0_2$.

Теорема двойственности утверждает, что если первичные поля удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{E}^0_2=-\mathbf{H}^0_1,\ \mathbf{H}^0_2=\mathbf{E}^0_1, \tag{94.01}$$

то полные поля $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ (в 1-й задаче) и $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$ (во 2-й задаче) связаны между собой в нижнем полупространстве $z>0$ следующим образом:

$$\mathbf{E}_2=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}^0_1,\ \mathbf{H}_2=-(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}^0_1). \tag{94.02}$$

Теорему двойственности проще всего доказать, опираясь на теорему единственности (§ 10) для нижнего полупространства $z>0$. В области $z>0$ источники отсутствуют, поэтому в 1-й и 2-й задачах поля определяются тангенциальными составляющими E_t или H_t при $z=0$ однозначно. Электромагнитное поле 1-й задачи в плоскости $z=0$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$E_{1,t}=0 \text{ на } s,\ H_{1,t}-H^0_{1,t} \text{ на } S, \tag{94.03}$$

а электромагнитное поле 2-й задачи — условиям

$$E_{2,t}=0 \text{ на } S,\ H_{2,t}=H^0_{2,t} \text{ на } s. \tag{94.04}$$

Условия для магнитных полей в формулах (94.03) и (94.04) следуют из соотношений

$$H_{1,t}-H^0_{1,t}=0 \text{ на } S,\ H_{2,t}-H^0_{2,t}=0 \text{ на } s. \tag{94.05}$$

Иначе говоря, поверхностные токи, текущие по плоскому экрану, создают на геометрическом продолжении экрана (где токов уже нет) магнитное поле, нормальное к плоскости экрана. Этот результат можно получить без всяких вычислений, если рассматривать магнитное поле на продолжении экрана как наложение полей элементарных электрических диполей, поскольку каждый элемент площади экрана, обтекаемого током, можно на конечном расстоянии от него считать элементарным диполем. Как известно, магнитное поле такого диполя перпендикулярно его оси и перпендикулярно радиусу-вектору, соединяющему диполь с точкой наблюдения, поэтому суммарное магнитное поле удовлетворяет соотношениям (94.05).

Пользуясь соотношениями (94.01), можно переписать условия (94.03) для поля 1-й диффракционной задачи в виде

$$-(E_{1,t}-E^0_{1,t})=H^0_{2,t} \text{ на } s,\ H_{1,t}-H^0_{1,t}=0 \text{ на } S, \tag{94.06}$$

откуда следует, что поле $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_2$, вычисленное по формулам (94.02), удовлетворяет граничным условиям (94.04). Согласно § 18 это

поле удовлетворяет в области $z>0$ уравнениям Максвелла. Поэтому формулы (94.02) дают (единственное) решение 2-й дифракционной задачи, если $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ есть поле в 1-й задаче. Тем самым теорема двойственности доказана.

Если в 1-й и 2-й задачах мы рассматриваем дифракцию плоских волн, то согласно формулам (94.01) эти волны должны иметь взаимно перпендикулярную поляризацию. Если же идет речь о дифракции волн, создаваемых токами $\mathbf{j}^e_1$ и $\mathbf{j}^m_1$ (в 1-й задаче) и $\mathbf{j}^e_2$ и $\mathbf{j}^m_2$ (во 2-й задаче), то эти последние должны быть связаны соотношениями

$$\mathbf{j}^e_2 = -\mathbf{j}^m_1, \quad \mathbf{j}^m_2 = \mathbf{j}^e_1. \tag{94.07}$$

Действительно, первичные поля $\mathbf{E}^0_s$, $\mathbf{H}^0_s$ ($s=1$ и 2) удовлетворяют во всем пространстве уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^0_s = ik\,\mathbf{H}^0_s - \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^m_s, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^0_s = -ik\,\mathbf{E}^0_s + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}^e_s. \tag{94.08}$$

В силу теоремы единственности для бесконечного пустого пространства при выполнении условий (94.07) соотношения (94.01) автоматически удовлетворяются.

Заметим, что принцип двойственности справедлив как для монохроматических, так и для произвольных электромагнитных процессов, поскольку в его формулировке зависимость от времени не фиксируется.

Формулы (94.02) показывают, что полное поле во 2-й задаче связано с вторичным полем 1-й задачи. Этот результат становится ясным, если в 1-й задаче взять дифракцию плоской волны на конечной пластинке, а во 2-й — на конечном отверстии. Поле, проникающее в нижнее полупространство $z>0$ во 2-й задаче, имеет характер сферической волны, расходящейся от отверстия; его можно сопоставить лишь со сферической волной, возбуждаемой пластинкой в 1-й задаче, т. е. с *вторичным* полем в нижнем полупространстве, куда проникает падающая плоская волна.

Если на 2-й дифракционной задаче в качестве отверстия s взять узкую щель (конечной длины), то 1-я задача будет соответствовать дифракции на узкой ленте. Можно показать, что в электродинамическом отношении лента ширины b (предполагается, что b мала по сравнению с длиной ленты l и длиной волны λ) эквивалентна отрезку цилиндрического провода диаметром $b/2$ (см. конец § 68). Таким образом, принцип двойственности устанавливает связь между теорией щелей в плоском экране и теорией вибраторов, кратко затронутой в § 36. Поэтому принцип двойственности послужил исходным пунктом для развития теории щелевых антенн.

Из теоремы двойственности вытекает следующее элементарное следствие: электрическое поле на узкой щели направлено поперек нее. Действительно, ток может течь лишь вдоль тонкого ленточного проводника и, следовательно, вторичное магнитное поле на проводнике направлено поперек; поэтому на дополнительной щели

электрическое поле является поперечным, в соответствии со сказанным в конце § 74.

Впервые принцип двойственности был доказан А. А. Пистолькорсом в 1944 г. в форме, несколько отличающейся от принятой выше. Изложение принципа двойственности в этом параграфе базируется на статье Я. Н. Фельда (1948 г.). Заметим, что теорема двойственности является аналогом теоремы Бабине, известной в физической оптике. Эта теорема связывает диффракционные явления на взаимно дополняющих экранах в рамках скалярного принципа Гюйгенса с подстановкой приближенных граничных значений (§ 92).

§ 95. Диффракция на прямоугольном отверстии

Исследуем излучение электромагнитных волн из прямоугольного отверстия (рис. 123,*а*)

$$-a/2<x<a/2,\quad -b/2<y<b/2,\quad z=0, \tag{95.01}$$

на котором

$$E_y^0 = B\,e^{ikx\sin\vartheta_0},\ H_x^0 = -\cos\vartheta_0\,B\,e^{ikx\sin\vartheta_0},\ E_x^0 = H_y^0 = 0, \tag{95.02}$$

где B — постоянная; ϑ_0 — некоторый угол. Такое поле получается, если на плоскость $z=0$ падает плоская волна с углом падения ϑ_0 (§ 15). Полагая

$$E_y^0 = B\cos\frac{\pi x}{a},\ H_y^0 = -\cos\vartheta_0\,B\cos\frac{\pi x}{a},\ \sin\vartheta_0 = \frac{\pi}{a}, \tag{95.03}$$

получаем поле волны H_{10} на открытом конце прямоугольного волновода (рис. 123,*б*); в формулах § 41 надо положить $B=ikgC^m$ и заменить x на $x-a/2$.

Применим теперь формулы (93.08). С учетом соотношения

$$\rho\cos\Omega = \xi\sin\vartheta\cos\varphi + \eta\sin\vartheta\sin\varphi \tag{95.04}$$

составляющие (95.02) приводят к выражениям

$$A_y^e = -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0 F,\ A_x^m = abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}F, \tag{95.05}$$

где через F обозначен интеграл

$$F = \frac{1}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik(\xi\sin\vartheta\cos\varphi+\eta\sin\vartheta\sin\varphi)+ik\xi\sin\vartheta_0}\,d\xi\,d\eta, \tag{95.06}$$

к которому присоединен множитель $1/ab$, чтобы сделать его без-

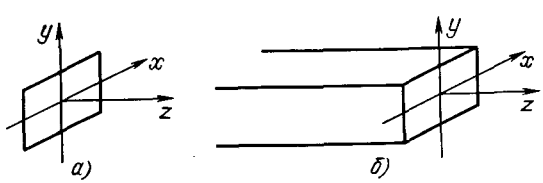


Рис. 123. Прямоугольное излучающее отверстие:
а — в плоском экране; *б* — открытый конец прямоугольного волновода

размерным. Интеграл F можно представить в виде произведения F_aF_b, где

$$F_a = \frac{1}{a}\int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{-ik\xi(\sin\vartheta\cos\varphi-\sin\vartheta_0)}\,d\xi = \frac{\sin X}{X},$$

$$X = \frac{ka}{2}(\sin\vartheta\cos\varphi-\sin\vartheta_0),$$

$$F_b = \frac{1}{b}\int\limits_{-b/2}^{b/2} e^{-ik\eta\sin\vartheta\sin\varphi}\,d\eta = \frac{\sin Y}{Y},\quad Y = \frac{kb}{2}\sin\vartheta\sin\varphi. \tag{95.07}$$

Заметим, что F_b получается из F_a, если заменить $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$, ϑ_0 на нуль, a на b. Максимальное значение $F=1$ достигается при $X=Y=0$, т. е. при $\varphi=0$ и $\vartheta=\vartheta_0$.

По формулам (93.09) и (95.05) получаем

$$A^e_\vartheta = -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0\cos\vartheta\,F\sin\varphi,\quad A^m_\vartheta = abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta\,F\cos\varphi,$$

$$A^e_\varphi = -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\cos\vartheta_0\,F\cos\varphi,\quad A^m_\varphi = -abB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}F\sin\varphi \tag{95.08}$$

и согласно формулам (93.13)

$$E_\vartheta = H_\varphi = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta_0\cos\vartheta)\,F\sin\varphi,$$

$$E_\varphi = -H_\vartheta = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\cos\vartheta_0+\cos\vartheta)\,F\cos\varphi. \tag{95.09}$$

Изучим более подробно электромагнитное поле в двух главных плоскостях: в магнитной (горизонтальной) плоскости — при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ и в электрической (вертикальной) плоскости — при $\varphi=\pm\pi/2$. Названия плоскостей связаны с поляризацией набегающей волны (95.02).

При $\varphi=0$ формулы (95.09) дают

$$E_\varphi = -H_\vartheta = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(\cos\vartheta_0+\cos\vartheta)\,F_a(\vartheta),\quad E_\vartheta = H_\varphi = 0, \tag{95.10}$$

где

$$F_a(\vartheta) = \frac{\sin X}{X},\quad X = \frac{ka}{2}(\sin\vartheta-\sin\vartheta_0), \tag{95.11}$$

а при $\varphi=\pi/2$

$$E_\vartheta = H_\varphi = -ikabB\frac{e^{ikr}}{4\pi r}(1+\cos\vartheta_0\cos\vartheta)\,F_b(\vartheta),\quad E_\varphi = -H_\vartheta = 0, \tag{95.12}$$

где

$$F_b(\vartheta) = \frac{\sin Y}{Y}\,,\quad Y = \frac{kb}{2}\sin\vartheta. \tag{95.13}$$

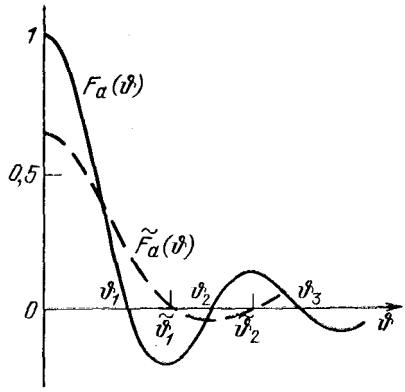


Рис. 124. Диаграмма направленности прямоугольного отверстия

Таким образом, функция $F_a(\vartheta)$ определяет направленность излучения в горизонтальной плоскости, функция $F_b(\vartheta)$ — в вертикальной. Ход функции $F_a(\vartheta)$ (при $\vartheta_0 = 0$) схематически изображен на рис. 124 сплошной кривой; такой же характер имеет функция $F_b(\vartheta)$. Функция $F_a(\vartheta)$ обращается в нуль при $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots$, где угол ϑ_n удовлетворяет уравнению $a\sin\vartheta = n\lambda$, которое можно вывести из элементарных соображений.

Перейдем к дифракции волны H_{10} на открытом конце прямоугольного волновода. Тангенциальные составляющие (95.03) приводят к тем же формулам (95.09), (95.10) и (95.12), однако вместо функции F_a получается более сложное выражение

$$\tilde{F}_a = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2\vartheta_0\cos\left(\dfrac{ka}{2}\sin\vartheta\cos\varphi\right)}{\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta\cos^2\varphi}\,, \tag{95.14}$$

а функция F_b остается той же самой.

Направленность излучения в магнитной плоскости, при $\varphi = 0$, определяется функцией

$$\tilde{F}_a(\vartheta) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2\vartheta_0\cos\left(\dfrac{ka}{2}\sin\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta}\,, \tag{95.15}$$

причем

$$\tilde{F}_a(0) = 2/\pi,\ \tilde{F}_a(\vartheta_0) = 1/2,\ \tilde{F}_a(\tilde{\vartheta}_n) = 0\ (n = 1, 2, \ldots), \tag{95.16}$$

где углы $\tilde{\vartheta}_n$ определяются уравнением $a\sin\vartheta = (n + \frac{1}{2})\lambda$.

Ход функции $\tilde{F}_a(\vartheta)$ изображен на рис. 124 штриховой линией. Из рисунка видно, что функция $\tilde{F}_a(\vartheta)$ дает излучение менее направленное, чем функция $F_a(\vartheta)$. Это вызвано тем, что функция $F_a(\vartheta)$ соответствует равномерному распределению поля по отверстию согласно формулам (95.02), а функция $\tilde{F}_a(\vartheta)$ соответствует неравномерному — косинусоидальному — распределению (95.03). Неравномерное распределение амплитуды (амплитудные искажения) всегда снижают направленность излучения.

Полученные выше формулы для поля излучения из открытого конца прямоугольного волновода могут быть непосредственно применены к пирамидаль-

ному или секториальному рупору, выходное отверстие которого имеет вид прямоугольника со сторонами a и b. При этом сферическая или цилиндрическая волна, распространяющаяся в рупоре, должна быть преобразована (с помощью рупорной линзы) в волну с плоским фазовым фронтом. Только тогда электромагнитное поле волны на открытом конце рупора можно уподобить полю волны H_{10} в прямоугольном волноводе.

Излучение из открытого конца рупора без линзы также можно исследовать с помощью электродинамического принципа Гюйгенса, однако вычисления значительно усложнятся. Не входя в детали этих вычислений, отметим лишь, что направленность излучения в этом случае будет меньше, чем при дифракции плоской волны на отверстии тех же размеров. В этом проявляется известное из теории антенн положение, согласно которому фазовые искажения (непостоянство фазы источников на излучающей площадке) приводят к снижению направленности.

§ 96. Метод зеркальных токов

Задачу о дифракции на пластинке можно свести к задаче о дифракции на отверстии, если воспользоваться принципом двойственности (§ 94) и результатами § 93, 95 и 97. Однако к задаче о пластинке возможен иной подход, а именно рассеянное пластинкой поле можно выразить через электрические токи, индуцированные падающей волной на пластинке, а для последних дать простое приближенное выражение. Этот подход позволяет приближенно решать другие задачи, поэтому на нем целесообразно остановиться.

Плотность поверхностного тока $\mathbf{i}^e$ на идеально проводящей плоской пластинке нулевой толщины выражается согласно § 4 через скачок тангенциального магнитного поля на пластинке. Когда волна падает на пластинку, одна ее сторона оказывается освещенной, другая — затененной. Если, как в § 94, источники поля расположены в полупространстве $z<0$, пластинка — в плоскости $z=0$, то на затененной стороне ($z=+0$) плотность тока можно считать равной нулю, а на освещенной ($z=-0$) — такой же, как в соответствующем месте бесконечной идеально проводящей плоскости. Иначе говоря, при построении приближенного решения токи на пластинке задаются согласно законам геометрической оптики, а это оправдано для пластинки, размеры которой (длина и ширина) велики по сравнению с длиной волны.

Высказанные выше соображения приводят к выражению

$$\mathbf{i}^e = -\frac{c}{2\pi}\,[\mathbf{n}\mathbf{H}^0], \tag{96.01}$$

где $\mathbf{H}^0$ — первичное магнитное поле (поле падающей волны); $\mathbf{n}$ — нормаль к пластинке, направленная по оси z (от освещенной стороны к теневой). Выражение (96.01) вытекает из того, что коэффициент отражения плоской волны идеально проводящей плоскости по тангенциальной составляющей магнитного поля равен единице (§ 24), вследствие чего эти составляющие при отражении

удваиваются; отражение волн от произвольных источников приводит к тому же результату (см. рис. 103). Метод, основанный на выражении (96.01), можно назвать методом зеркальных токов.

Вторичное поле, т. е. поле, рассеянное пластинкой, определяется электрическим векторным потенциалом с составляющими

$$A_x^e = \frac{1}{c}\int \frac{e^{ikR}}{R} i_x^e\, dS,\ A_y^e = \frac{1}{c}\int \frac{e^{ikR}}{R} i_y^e\, dS,\ A_z^e = 0. \qquad (96.02)$$

Применяя рассуждения § 93, можно вычислить векторный потенциал на достаточно больших расстояниях от пластинки по формулам

$$A_x^e = \frac{e^{ikr}}{2\pi r}\int e^{-ik\rho\cos\Omega} H_y^0\, dS,\ A_y^e = -\frac{e^{ikr}}{2\pi r}\int e^{-ik\rho\cos\Omega} H_x^0\, dS, \qquad (96.03)$$

заменяющим выражения (93.08). Составляющие поля вычисляются при этом по формулам

$$E_\vartheta = H_\varphi = ikA_\vartheta^e,\ E_\varphi = -H_\vartheta = ikA_\varphi^e. \qquad (96.04)$$

В качестве примера рассмотрим прямоугольную пластинку, определяемую условиями (95.01), и пусть на нее падает плоская волна с тангенциальными составляющими (95.02). Тогда

$$A_x^e = 0,\ A_y^e = abB\frac{e^{ikr}}{2\pi r}\cos\vartheta_0 F,$$

$$A_\vartheta^e = A_y^e\cos\vartheta\sin\varphi,\ A_\varphi^e = A_y^e\cos\varphi, \qquad (96.05)$$

где функция F по-прежнему определяется выражениями (95.06) и (95.07).

Электромагнитное поле, рассеянное прямоугольной пластинкой, имеет составляющие

$$E_\vartheta = H_\varphi = ikabB\frac{e^{ikr}}{2\pi r}\cos\vartheta_0\cos\vartheta F\sin\varphi,$$

$$E_\varphi = -H_\vartheta = ikabB\frac{e^{ikr}}{2\pi r}\cos\vartheta_0 F\cos\varphi, \qquad (96.06)$$

которые похожи на составляющие (95.09) диффракционного поля от прямоугольного отверстия, но отличаются от них неприятной особенностью: они не удовлетворяют принципу взаимности.

В самом деле, рассмотрим электромагнитное поле в плоскости $y=0$. Направление распространения падающей волны (95.02) также лежит в этой плоскости, образуя с осью z угол ϑ_0. При $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ по формуле (95.07) получаем

$$F = \frac{\sin[ka(\sin\vartheta \mp \sin\vartheta_0)/2]}{ka(\sin\vartheta \mp \sin\vartheta_0)/2}, \qquad (96.07)$$

так что при перемещении источника падающей плоской волны и точки наблюдения функция F не меняется. Таким же свойством обладает и поле (95.09), но не поле (96.06): в выражении для составляющих $E_\varphi = -H_\vartheta$ углы ϑ и ϑ_0 входят несимметрично, поэтому теорема взаимности (§ 73) не выполняется. Это противоречие характерно для целого ряда задач, в которых поверхностные токи задаются по формуле (96.01), и объясняется приближенностью получаемого решения. Практически это противоречие оказывается не очень серьезным, поскольку при условиях $ka \gg 1$, $kb \gg 1$ поля (96.06) удовлетворяют теореме взаимности приближенно (см. § 98), а при невыполнении этих условий сами формулы оказываются неприменимыми (см. § 98).

Отметим также, что составляющие $E_\vartheta = H_\varphi$ меняют свой знак при изменении ϑ на $\pi - \vartheta$, а составляющие $E_\varphi = -H_\vartheta$ при этом остаются прежними. Таким образом, создаваемое пластинкой поле симметрично относительно плоскости пластинки. Из свойств функции F видно (см. § 95), что максимумы этого поля лежат в плоскости $\varphi = 0$ при $\vartheta = \vartheta_0$ и $\vartheta = \pi - \vartheta_0$. Как легко видеть, $\vartheta = \vartheta_0$ есть направление распространения падающей плоской волны, а $\vartheta = \pi - \vartheta_0$ есть направление зеркального отражения этой волны от пластинки. В таких двух направлениях находятся максимумы дифракционного поля для пластинки любой формы.

Таким образом, при расчете дифракционного поля от пластинки не нужно вводить магнитных токов и магнитного векторного потенциала, а достаточно ограничиться электрическими поверхностными токами и соответствующим векторным потенциалом с составляющими (96.02). Принцип двойственности позволяет выразить дифракционное поле отверстия в идеально проводящей плоскости через поверхностные магнитные токи, т. е. через тангенциальные составляющие электрического поля. При этом в формулах (93.13) надо положить $A^e_\vartheta = A^e_\varphi = 0$, а составляющие A^m_ϑ и A^m_φ удвоить. Вычисляемое таким образом поле удовлетворяет граничному условию $E_t = 0$ на плоскости $z = 0$ вне отверстия. Рассмотрение этой задачи будет продолжено в § 99.

В теории зеркальных антенн широко применяется как апертурный метод, базирующийся на формулах § 92, так и токовый метод, использующий формулы этого параграфа; при практических расчетах вводятся, как правило, дополнительные аппроксимации. В данной книге рассмотрены лишь простейшие задачи, иллюстрирующие эти методы.

§ 97. Дифракция на круглом отверстии

Рассмотрим дифракцию плоской электромагнитной волны, падающей нормально на отверстие

$$0 < \rho < a,\ \theta \leqslant \psi < 2\pi,\ z = 0 \qquad (97.01)$$

в плоском экране, где ρ, ψ и z — цилиндрические координаты. В декартовой системе координат тангенциальные составляющие по-

ля по-прежнему определяются формулами (95.03) при $\vartheta_0=0$, поэтому приходим к следующим выражениям для поля излучения:

$$E_\vartheta = H_\varphi = -ika^2B\,\frac{e^{ikr}}{2r}\,(1+\cos\vartheta)\,F\sin\varphi,$$

$$E_\varphi = -H_\vartheta = -ika^2B\,\frac{e^{ikr}}{2r}\,(1+\cos\vartheta)\,F\cos\varphi, \qquad (97.02)$$

где

$$F=\frac{1}{\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi} e^{-ik\sin\vartheta\,(\xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi)}\,\rho d\rho d\psi. \qquad (97.03)$$

Эти выражения отличаются от формул (95.06) и (95.09) при $\vartheta_0=0$ лишь тем, что в определении функции F взят множитель $1/\pi a^2$, где πa^2 — площадь кругового отверстия, поэтому поле излучения приобрело другой множитель. Для вычисления интеграла (97.03) декартовы координаты ξ, η в плоскости отверстия следует выразить через полярные координаты ρ, ψ по формулам

$$\xi=\rho\cos\psi,\ \eta=\rho\sin\psi,\ \xi\cos\varphi+\eta\sin\varphi=\rho\cos(\psi-\varphi) \qquad (97.04)$$

и использовать формулу (22.16) при $m=0$ для вычисления интеграла по ψ; учитывая четность функции $J_0(x)$ и возможность смещения пределов в интеграле (22.16) на одну и ту же величину (из-за периодичности подынтегральной функции), получаем для функции F интеграл

$$F=\frac{2}{a^2}\int_0^a J_0(k\rho\sin\vartheta)\,\rho d\rho\ ,$$

который может быть вычислен тем же приемом, что и интеграл (27.11). В результате

$$F(\vartheta)=2J_1(ka\sin\vartheta)/ka\sin\vartheta. \qquad (97.05)$$

Функция $F(\vartheta)$ определяет характеристику излучения отверстия как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Если произведение ka велико, то при условии $ka\sin\vartheta\gg1$ можно функцию Бесселя $J_1(ka\sin\vartheta)$ заменить ее асимптотическим выражением (22.07); тогда

$$F(\vartheta)=\sqrt{2/\pi}\,[e^{-i(ka\sin\vartheta-3\pi/4)}+e^{i(ka\sin\vartheta-3\pi/4)}]/(ka\sin\vartheta)^{3/2}. \qquad (97.06)$$

Последнее выражение имеет простой физический смысл; поле излучения есть сумма сферических волн, расходящихся от двух точек на краю отверстия ($\rho=a$). Можно показать, что при невыполнении условия $ka\sin\vartheta\gg1$ поле излучения также представляется в виде наложения сферических волн, расходящихся от края отверстия, но в этом случае в данную точку наблюдения посылают свои волны все точки края.

§ 98. Пределы применимости принципа Гюйгенса

В § 95 было рассчитано излучение из отверстия в плоском экране и из открытого конца волновода. Этот расчет основан на строгой электродинамической формулировке принципа Гюйгенса — на выражениях (92.08) и (92.09). Замкнутую поверхность S в этом случае естественно провести так, чтобы она состояла из плоской площадки (излучающее отверстие) и далее продолжалась по теневой стороне экрана (не облучаемой падающей волной) или по внешней поверхности стенок волновода.

Принцип Гюйгенса дает вполне точное выражение для поля излучения, если на поверхности S взять точные значения тангенциальных полей. Однако они обычно неизвестны, поэтому при фактическом расчете по принципу Гюйгенса делают следующие допущения (см. § 92). Во-первых, считают, что поле в излучающем отверстии такое же, как у набегающей волны, т. е. пренебрегают возмущением поля на отверстии; в частности, не учитывают волны, отраженной от открытого конца волновода, и волн других номеров, всегда возбуждающихся в местах нарушения однородности волновода (см. § 44). Во-вторых, принимают, что поле на остальной части поверхности S равно нулю, т. е. пренебрегают поверхностной плотностью $\mathbf{i}^e$ электрического тока, затекающего на теневую часть экрана или внешнюю поверхность волновода (если считать экран или волновод идеально проводящими, то на этой части S имеем очевидно $\mathbf{i}^m=0$).

Влияние этих допущений на рассчитанное поле излучения оценить довольно трудно. Поэтому большое значение имеют строгие решения дифракционных задач. Сравнивая поле излучения, вычисленное строго, с полем излучения, приближенно рассчитанным по принципу Гюйгенса, можно выяснить надежность этого приближенного метода.

Для дифракции плоской волны на круговом отверстии радиуса a условие применяемости принципа Гюйгенса имеет вид $ka\gg 1$ — поперечные размеры отверстия должны быть достаточно велики по сравнению с длиной волны. Можно показать, что при малых значениях ka приближенный расчет по принципу Гюйгенса неправильно отображает дифракционное поле — его интенсивность, направленность и поляризацию.

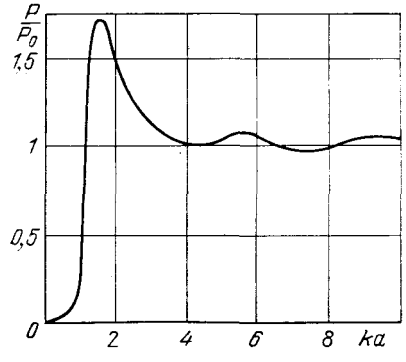


Рис. 125. Мощность, проходящая через круглое отверстие при нормальном падении плоской волны

Рассмотрим подробнее это расхождение. При падении плоской волны на отверстие на нем задается поле по формулам (95.02) в виде невозмущенного поля плоской волны. Это поле должно пе-

реносить через отверстие ту часть мощности падающей волны, которая геометрически соответствует площади отверстия πa^2. Обозначим эту мощность через P_0. Фактически же через отверстие проходит мощность P, которая рассеивается в виде сферической волны в правом полупространстве $z>0$. Величину P можно найти, строго решив дифракционную задачу; отличие P от P_0 связано, очевидно, с искажением поля на отверстии.

На рис. 125 изображена зависимость P/P_0 от параметра ka. При малых ka это отношение сильно отличается от единицы и, следовательно, поле на отверстии претерпевает весьма сильные искажения. Принцип Гюйгенса дает интенсивность излучения, близкую к истине, лишь при $ka \geqslant 3$.

Поле излучения из круглого отверстия можно представить в виде

$$E_\vartheta = H_\varphi = -\mathrm{i}ka^2 B \frac{e^{ikr}}{r} V^{(1)}(\vartheta) \sin\varphi,$$
$$E_\varphi = -H_\vartheta = -\mathrm{i}ka^2 B \frac{e^{ikr}}{r} V^{(2)}(\vartheta) \cos\varphi, \qquad (98.01)$$

где согласно приближенным формулам (97.02)

$$V^{(1)}(\vartheta) = V^{(2)}(\vartheta) = \frac{1}{2}(1+\cos\vartheta) F(\vartheta) =$$
$$= (1+\cos\vartheta) J_1(ka\sin\vartheta)/ka\sin\vartheta. \qquad (98.02)$$

На рис. 126 сплошными кривыми изображены точные функции $|V^{(1)}(\vartheta)|$ и $|V^{(2)}(\vartheta)|$, вычисленные для $ka=3$ и 5 М. Г. Белкиной, а штриховой линией — приближенные функции (98.02). Видно, что направленность и поляризация излучения из круглого отверстия при $ka \geqslant 3$ удовлетворительно передается приближенной теорией; при возрастании ka согласованность между точной и приближенной теориями улучшается.

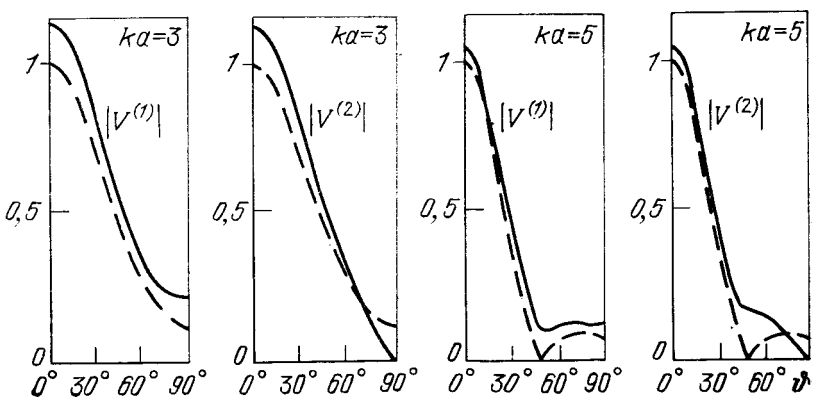


Рис. 126. Сравнение приближенных расчетов с точными для излучения из круглого отверстия

Таким образом, приближенный расчет по принципу Гюйгенса дает хорошие результаты лишь для отверстий, поперечные размеры которых велики по сравнению с длиной волны. Объясняется это тем, что сильное искажение поля на отверстии (по сравнению с полем падающей волны) происходит лишь вблизи краев отверстия и поле в отверстии на расстоянии порядка длины волны от края практически сводится к неискаженному полю падающей волны. Такой же характер имеет и затекание токов. Эти токи существенны лишь вблизи края отверстия и при удалении от него на несколько длин волн уже сходят на нет. Обозначим через S' ту часть поверхности S, где все эти дополнительные поля существенны; площадь S' по порядку величины равна произведению периметра отверстия на длину волны. При условии $ka \gg 1$ эта площадь мала по сравнению с площадью отверстия, и действием S' можно пренебречь, если основное поле создает не слишком слабое излучение.

Для прямоугольного отверстия эти соображения приводят к условиям $ka \gg 1$ и $kb \gg 1$. Если же прямоугольное отверстие является узкой щелью, то оно приобретает сильно выраженные резонансные свойства, подобные свойствам тонких вибраторов (см. § 94), и его излучение нельзя рассчитывать по формулам § 95.

Кроме условий, накладываемых на размеры отверстия, важны условия, связанные с положением точки наблюдения, а именно принцип Гюйгенса приводит к достаточно точному полю в направлениях, составляющих малые углы с направлением падающей волны. Короче: принцип Гюйгенса точен для больших отверстий и малых углов диффракции.

Это хорошо видно на рис. 126, где роль угла диффракции играет угол ϑ. При увеличении угла ϑ поле по принципу Гюйгенса становится слабым и влияние дополнительных полей выступает на передний план.

Поле излучения из прямоугольного отверстия (§ 95) пропорционально $\sin X/X$ и $\sin Y/Y$. Пока X и Y конечны, поле сравнимо с полем в максимуме (при $X=Y=0$); конечность X и Y при больших ka и kb согласно формуле (95.07) означает малость углов $|\vartheta-\vartheta_0|$ и $|\varphi|$, т. е. малость угла диффракции, поскольку падающая волна распространяется в направлении $\vartheta=\vartheta_0$, $\varphi=0$. При конечных углах диффракции X и Y велики, поле слабое и не передается принципом Гюйгенса. Это видно, в частности, из того, что для отверстия в идеально проводящем экране можно написать другое приближенное решение (см. § 96), удовлетворяющее граничным условиям на экране, но не удовлетворяющее принципу взаимности. Хотя функции $\sin X/X$ и $\sin Y/Y$ в новом решении те же, в множителях перед ними ϑ и ϑ_0 входят несимметрично. Однако в этих множителях при конечных X и Y отличие ϑ от ϑ_0 незначительно. Выполнение граничных условий при $\vartheta=\pi/2$ (на экране) при конечных углах диффракции не улучшает решения.

Для пластинки больших размеров метод зеркальных токов (см. § 96), который в идейном отношении близок к принципу Гюйген-

са, также применим лишь при малых углах дифракции, которые отсчитываются от падающих и отраженных лучей. Эти лучи в дифракционной теории соответствуют максимумам поля — направлениям, в которых поля от всех токов складываются синфазно.

Строгое решение задачи об излучении из открытого конца круглого волновода позволяет сделать аналогичные выводы. Пусть в волноводе по направлению к открытому концу распространяется волна H_{11}, обладающая наинизшей критической частотой и простейшей структурой электромагнитного поля (см. рис. 38). Эта волна аналогична волне H_{10} в прямоугольном волноводе и также дает максимальное излучение в направлении прямо вперед (при $\vartheta=0$). Обозначим через P угловую мощность излучения прямо вперед, вычисленную по строгой теории, через P_0 — такую же мощность, вычисленную приближенно по принципу Гюйгенса. Зависимость P/P_0 от ka изображена на рис. 127, который отличается от рис. 125 тем, что излучение волны H_{11} можно рассматривать лишь при $ka>1{,}841$ в соответствии с формулой (42.05).

Рисунок 127 показывает, что условие $ka\gg1$ существенно и для излучения из волновода. Сравнение диаграмм направленности волны H_{11} и других волн круглого волновода показывает, что принцип Гюйгенса хорошо передает лишь излучение, в основном направленное вперед. Иначе можно сказать, что если характеристика излучения по принципу Гюйгенса в основном направлена вперед и дает лишь небольшое излучение назад, то такая характеристика должна быть близка к истинной по крайней мере в переднем полупространстве (при $z>0$, т. е. при $0<\vartheta<\pi/2$). Если же принцип Гюйгенса приводит к сильному излучению назад, то в этом случае результатам по принципу Гюйгенса вообще нельзя верить — ни для переднего, ни для заднего полупространства, так как эти результаты противоречат исходному допущению о том, что полем вблизи внешней поверхности стенок волновода (излучением назад) можно пренебречь. Излучения в заднее полупространство $\pi/2<\vartheta<\pi$ принцип Гюйгенса не отображает.

Согласно принципу Гюйгенса поле излучения данного отверстия создается вторичными источниками, распределенными по его площади. Интересно отметить, что формулы для поля излучения допускают и другую интерпретацию, а именно дифракционное поле можно рассматривать как результат сложения волн от вторичных источников, находящихся на краю отверстия.

Если в формулах (95.09) функцию $F=F_aF_b$ представить как сумму четырех слагаемых, получающихся применением к $\sin X$ и $\sin Y$ формул Эйлера, то получается представление дифракционного поля в дальней зоне в виде суммы четырех сферических волн, расходящихся от

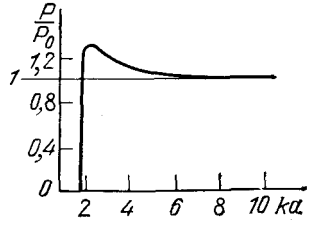


Рис. 127. Отношение P/P_0 как функция ka: излучение прямо вперед из круглого волновода

четырех вершин прямоугольника на рис. 123,*а*. Действительно, фазы этих четырех слагаемых как раз таковы, что они вместе с множителем e^{ikr}/r дают волны, расходящиеся от точек с координатами $x=\pm a/2$, $y=\pm b/2$. Для круглого отверстия аналогичный вывод сделан был в § 97. В § 79 была изложена строгая теория дифракции на полуплоскости и клине; оказалось, что поправки к геометрической оптике определяются функцией $v(r, \chi)$, которая почти всюду имеет характер цилиндрической волны, расходящейся от края.

Существенно, что принцип Гюйгенса и метод зеркальных токов приводят к краевым волнам, которые соответствуют истине лишь при небольших углах дифракции. Это следует очевидным образом из сказанного выше и может быть продемонстрировано на примере дифракции на полуплоскости и клине (см. задачу 2).

Отметим, что приближенные решения, полученные выше для отверстий в идеально проводящей плоскости и для плоских пластин, можно уточнить следующим образом: краевые волны модифицируются, а именно берутся из строгой теории дифракции на полуплоскости (§ 79); тогда получается решение, пригодное при конечных углах дифракции. Таким путем удается вычислить дифракционное поле в тех областях, где оно является сравнительно слабым.

Краевые волны возникают и в более сложных задачах. В зеркальных антеннах краевые волны определяют уровень боковых лепестков и часто имеет смысл снижать этот уровень за счет некоторого расширения диаграммы направленности в ее главной части; антенные задачи такого типа делают исследование слабого дифракционного поля в глубокой тени (т. е. дальних боковых лепестков) практически интересным. При дифракции на металлических телах с резкими изломами поверхности от каждой точки излома расходится краевая волна. Волна, возникшая на одном крае, рассеивается на другом (вторичная дифракция, третичная и т. д.). В задаче о тонком вибраторе (§ 36) приходится учитывать всю цепочку последовательных дифракций, вызванных отражением волн тока от концов вибратора, и просуммировать ее: она обусловливает резонансные свойства вибратора. В других случаях учет вторичной дифракции дает лишь малые поправки.

§ 99. Дифракция Френеля и параболическое уравнение

В § 93—98 было исследовано дифракционное поле на достаточно больших расстояниях от отверстия или пластинки, удовлетворяющих условиям $kr \gg 1$, $r \gg \rho_{max}$ и условию (93.06). Иначе говоря, рассматривалась дифракция Фраунгофера. На меньших расстояниях от излучающего отверстия имеет место дифракция Френеля. В то время как дифракция Фраунгофера относится к дальней зоне, где электромагнитная волна уже полностью сформировалась как волна сферическая, дифракция Френеля происходит в ближней или промежуточной зоне, где плоская волна начинает превращаться в сферическую.

Исследование дифракции Френеля производится обычно не с помощью общих формул § 92, а путем замены R (расстояние

между вторичным источником и точкой наблюдения) выписанными членами разложения (93.05), причем слагаемым $\cos^2\Omega$, как правило, пренебрегают, поскольку интересуются малыми углами дифракции, для которых принцип Гюйгенса только и дает надежные результаты (§ 98). Такая формулировка дифракционных законов может быть названа интегральной. Однако в электродинамике хорошо известно (гл. 1), что любой закон можно записать в двух эквивалентных формах: дифференциальной и интегральной. Дифференциальная формулировка дифракционных законов дается параболическим уравнением, предложенным М. А. Леонтовичем и В. А. Фоком применительно к распространению радиоволн. Затем метод параболического уравнения неоднократно использовался в теории дифракции для построения приближенных (асимптотических) решений — при условии, что длина волны мала по сравнению со всеми характерными размерами задачи, а угол дифракции мал (последнее условие иногда удается обойти).

В простейшем случае параболическое уравнение получается так. Пусть имеется скалярное волновое поле Φ, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (92.05) и представляющее собой волновой пучок с основным направлением распространения по оси z (такой пучок, в частности, возникает при дифракции плоской волны, распространяющейся по оси z, на широком отверстии). Положим $\Phi = W(x, y, z)e^{ikz}$, где W — медленно изменяющаяся функция z (по сравнению с выделенным быстро осциллирующим множителем e^{ikz}). Функция W удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial W}{\partial z} = 0. \qquad (99.01)$$

В этом уравнении отбрасывается производная $\partial^2 W/\partial z^2$, и оно превращается в параболическое уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \qquad (99.02)$$

подобное уравнению теплопроводности или диффузии, причем координата z играет роль времени, а мнимая величина $i/2k$ — роль коэффициента диффузии. Уравнение (99.02) решается значительно проще, чем исходное эллиптическое уравнение (99.01). Возможность перехода к уравнению (99.02) обусловлена тем, что W есть медленная функция z и поэтому удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \ll 2ik\frac{\partial W}{\partial z} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \ll \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right). \qquad (99.03)$$

Медленная зависимость W от z реализуется, как будет видно ниже, не при любых x, y, z, поэтому параболическое уравнение и полученные на основе его решения справедливы не всюду, но все же в большой и физически интересной области.

Второе условие (99.03) означает, что зависимость W от поперечных координат x, y предполагается более сильной, чем от

продольной координаты z. Иначе говоря, в параболическом уравнении (99.02) учтена только «поперечная диффузия» комплексной амплитуды W (диффузия поперек направления распространения плоской волны), а более слабая «продольная диффузия» (вдоль оси z) не учитывается.

Уравнение (99.02) показывает, что поперечная диффузия тем слабее, чем больше волновое число k (т. е. чем короче длина волны), и тем сильнее, чем быстрее изменяется W в поперечных направлениях. При затенении падающей волны краем экрана поперечная диффузия сразу размывает резкую границу света и тени, в результате чего переходная зона (зона полутени) расширяется с увеличением координаты z (рис. 108,*а*).

Рассмотрим простейшие *двухмерные* решения уравнения (99.02), считая W функцией x и z. Решение

$$W = \frac{1}{\sqrt{kz}} \exp\left(\mathrm{i}k\frac{x^2}{2z}\right) \tag{99.04}$$

определяет, как легко видеть, цилиндрическую волну, расходящуюся от начала координат: $1/\sqrt{kz}$ — ее амплитуда; $k(z+x^2/2z) \approx k\sqrt{z^2+x^2}$ — ее фаза. Поскольку точная цилиндрическая волна пропорциональна $H_0^{(1)}(k\sqrt{z^2+x^2})$, условия применимости решения (99.04) имеют вид

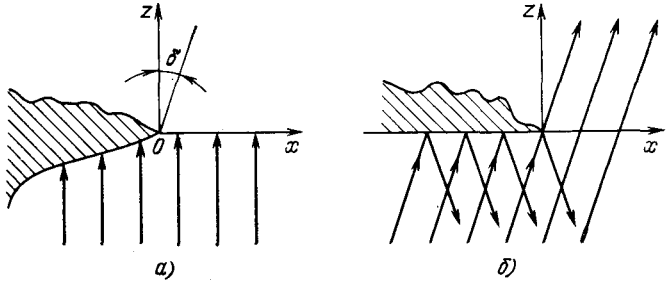
$$kz \gg 1,\ |x| \ll z,\ kx^4/z^3 \ll 1. \tag{99.05}$$

Функция Грина двухмерного параболического уравнения (99.02)

$$G(x-x', z) = \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} \exp \mathrm{i}\left[k\frac{(x-x')^2}{2z} - \frac{\pi}{4}\right] \tag{99.06}$$

является цилиндрической волной, исходящей из точки $x=x'$, $z=0$ и нормированной так, что

$$\lim_{z\to 0} G(x-x', z) = \delta(x-x'). \tag{99.07}$$



а) *б)*

Рис. 128. Дифракция плоской волны на полубесконечном экране (*а*) и отражение плоской волны от полубесконечного зеркала (*б*)

Функция G позволяет вычислить функцию W при $z>0$, если она известна при $z=0$, по формуле

$$W(x, z)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x', z)\, W(x', 0)\, dx', \qquad (99.08)$$

см. задачу 1.

Применим формулу (99.08) к задаче о диффракции плоской волны на полубесконечном непрозрачном экране, край которого совпадает с осью y (рис. 128,*а*). Задавая плоскую волну в виде $\Phi^0=e^{ikz}$ и полагая

$$W(x, 0)=0 \text{ при } x<0,\ W(x, 0)=1 \text{ при } x>0, \qquad (99.09)$$

получим

$$W(x, z)=F(\tau),\ \tau=\sqrt{k/z}\,x, \qquad (99.10)$$

где

$$F(\tau)=\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\tau} e^{it^2/2}\, dt \qquad (99.11)$$

есть комплексный интеграл Френеля. Условия применимости решения (99.10) совпадают (см. задачу 2) с условиями (99.05).

Проанализируем выражение (99.10). Поскольку W зависит только от $\tau=\sqrt{k/z}x$, линии $W=\text{const}$ совпадают с линиями $\tau=C=\text{const}$, т. е. с линиями $z=kx^2/C^2$ в плоскости x, z. Таким образом, линии $\tau=C$ суть параболы, проходящие через начало координат и касающиеся оси x (см. рис. 128,*а*). Линии $\tau=C>0$ являются параболами в освещенном четвертьпространстве, а линии $\tau=C<0$ являются параболами в четвертьпространстве, затененном экраном. Выберем постоянную C порядка нескольких единиц (например, $C=3\ldots5$) и исключим область внутри этой параболы. Как показывают расчеты, правее исключенной области можно считать $W=1$: туда падающая волна проникает практически целиком и без искажений. Левее области функция W оказывается практически равной нулю: туда электромагнитное поле не проникает. Это — область тени. В самой исключенной области, которую можно назвать зоной полутени, происходит переход от света к тени. В середине зоны, на оси z, имеем $W=\frac{1}{2}$.

Естественно, экран в рассматриваемом приближении может быть любым: полуплоскостью, клином (любых свойств, но непрозрачным) или иметь любую другую форму — лишь бы он затенял левое полупространство $x<0$, оставляя свободной только положительную часть оси x.

Если нужно исследовать отраженное поле, возникающее при падении плоской волны на идеально отражающее зеркало $z=0$, $x<0$ (рис. 128,*б*), то, очевидно, следует поступать следующим образом: поле прошедшей волны описывать в системе координат z', x', считая, что затеняющий экран расположен при $x'<0$, а поле

отраженной волны исследовать в системе координат z'', x'', где z'' — направление отраженных лучей. Если рассматривать только отраженную волну, точнее, только вторичное поле в нижнем полупространстве $z<0$, то применимы соотношения, аналогичные выведенным выше для прошедшей волны. Действительно, для отраженной волны источники расположены только на зеркале (при $x<0$), на его продолжении (при $x>0$) их нет, поэтому реализуются такие же диффракционные закономерности, в частности получается параболическая зона полутени.

Переходя к *трехмерным* задачам, следует прежде всего отметить, что уравнение (99.02) допускает своеобразное разделение переменных: если $W_1(x, z)$ и $W_2(y, z)$ — решения двухмерных параболических уравнений, то $W(x, y, z)=W_1(x, z)W_2(y, z)$ — решение трехмерного параболического уравнения (99.02). Поэтому сферическая волна, расходящаяся от начала координат, согласно параболическому уравнению (99.02) определяется произведением

$$\frac{1}{\sqrt{kz}}\exp\left(ik\frac{x^2}{2z}\right)\frac{1}{\sqrt{kz}}\exp\left(ik\frac{y^2}{2z}\right)=\frac{1}{kz}\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right),$$

а функция Грина есть просто произведение $G(x-x', z)G(y-y', z)$, где G определяется формулой (99.06).

Эта функция Грина позволяет, например, решить задачу о диффракции плоской волны на прямоугольном отверстии, рассмотренную в § 95. Ограничиваясь для простоты нормальным падением волны, полагаем $E^0{}_y=B$ при условиях (95.01) и выражаем диффракционное поле при $z>0$ через единственную составляющую магнитного векторного потенциала (см. конец § 96), которую записываем в виде

$$A^{\mathrm{m}}_x = W(x, y, z)\,e^{ikz}. \tag{99.12}$$

Используя выражения (92.09) и слабую зависимость W от z, получаем поперечные составляющие поля в виде

$$E_y = -H_x = -ikW(x, y, z)\,e^{ikz}. \tag{99.13}$$

Функция W должна удовлетворять уравнению (99.02) и при $z=0$ принимать постоянное значение iB/k на отверстии, а вне его обращаться при $z=0$ в нуль. Отсюда заключаем, что

$$W(x, y, z)=(iB/k)\int\limits_{-a/2}^{a/2}G(x-x', z)\,dx'\int\limits_{-b/2}^{b/2}G(y-y', z)\,dy'. \tag{99.14}$$

Вводя интеграл Френеля (99.11), приходим к выражению

$$W(x, y, z)=(iB/k)\,[F(\tau_a^+)-F(\tau_a^-)]\,[F(\tau_b^+)-F(\tau_b^-)], \tag{99.15}$$

$$\tau_a^+=\sqrt{k/z}\,(a/2-x),\ \tau_a^-=\sqrt{k/z}\,(-a/2-x),$$

$$\tau_b^+=\sqrt{k/z}\,(b/2-y),\ \tau_b^-=\sqrt{k/z}\,(-b/2-y).$$

Для того чтобы выяснить физический смысл выражения (99.15), образуем разности $\tau^+_a - \tau^-_a = \sqrt{f_a}$, $\tau^+_b - \tau^-_b = \sqrt{f_b}$, где параметры

$$f_a = ka^2/z,\ f_b = kb^2/z \tag{99.16}$$

называются числами Френеля. Пока числа Френеля велики (т. е. координата z достаточно мала), поле (99.13) представляет собой вышедший из отверстия прямоугольный кусок плоской волны, края которого размыты (узкие переходные зоны), подобно краю плоской волны на рис. 128,*а*. Действительно, в прямоугольнике $|x| < a/2$, $|y| < b/2$ при малых z параметры τ^+_a и τ^+_b велики и положительны, τ^-_a и τ^-_b — велики и отрицательны, поэтому разности в квадратных скобках близки к единице; вне прямоугольника хотя бы одна разность мала. По мере увеличения z переходные зоны расширяются и при $f_a \sim 1$ и $f_b \sim 1$ от первоначальной плоской волны не остается и следа.

Числа Френеля становятся малыми на больших расстояниях от отверстия. Тогда в интеграле

$$\int\limits_{-a/2}^{a/2} \exp\left[ik\frac{(x-x')^2}{2z}\right] dx' =$$

$$= \exp\left(ik\frac{x^2}{2z}\right) \int\limits_{-a/2}^{a/2} \exp\left(ik\frac{x'^2 - 2xx'}{2z}\right) dx'$$

можно пренебречь квадратичным слагаемым $ikx'^2/2z$ в экспоненте и то же сделать в интеграле по y'. Таким путем приходим к формуле

$$E_y = -H_x = -ikabB\,\frac{\exp\left[ik\left(z + \dfrac{x^2+y^2}{2z}\right)\right]}{2\pi z}\,\frac{\sin X}{X}\,\frac{\sin Y}{Y},$$

$$X = \frac{kax}{2z},\ Y = \frac{kby}{2z}, \tag{99.17}$$

которую поучительно сравнить с формулами (95.09) при $\vartheta_0 = 0$. Последние на первый взгляд кажутся более точными, но на самом деле они точны лишь при малых углах диффракции (при $\vartheta \ll 1$), а тогда они дают практически то же, что и формула (99.17).

Исследованное выше поле представляет собой параксиальный волновой пучок, а при $f_a \gg 1$ и $f_b \gg 1$ — квазиплоскую волну. Под параксиальным пучком понимают поле, характеризуемое малыми углами диффракции и, следовательно, подчиняющееся параболическому уравнению. Плоская волна, падающая на широкое отверстие ($ka \gg 1$, $kb \gg 1$), создает именно такое поле; при этом поле в дальней зоне (его диаграмма направленности имеет много боковых лепестков) не похоже на поле в ближней зоне (равномерное в пределах отверстия). Поставим вопрос: существуют ли автомодельные (в рамках параболического уравнения) пучки, которые в ближней, промежуточной и дальней зонах определяются одними и теми же функциями, причем в ближней зоне они имеют харак-

тер плоской волны, переносящей конечную мощность, а в дальней зоне, развернувшись, превращаются в сферическую волну? Положительным ответом на этот вопрос являются параксиальные гауссовы волновые пучки и их обобщения (пучки Гаусса — Эрмита и Гаусса — Лагерра), которые рассмотрены в следующем параграфе.

С точки зрения автомодельных пучков сложный характер дифракции Френеля обусловлен тем, что при $z=0$ задается поле, которое возбуждает сразу много пучков, распространяющихся с немного отличающимися скоростями. Именно такое поле возникает при дифракции плоской волны на отверстии или при рассеянии плоской волны на пластинке (§ 96).

§ 100. Гауссовы волновые пучки

Простое решение двухмерного параболического уравнения (99.02) нетрудно получить, заменяя в цилиндрической волне (99.04) z на $z-ika^2$ и умножая ее на $\sqrt{-ika^2}$. Функция

$$W_0(x, z)=\sqrt{\frac{-ika^2}{z-ika^2}}\exp\left[ik\frac{x^2}{2(z-ika^2)}\right] \tag{100.01}$$

при $z=0$ сводится к гауссовой функции

$$W_0(x, 0)=\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \tag{100.02}$$

а при $z\to\infty$ превращается в цилиндрическую волну

$$W_0(x, z)=\sqrt{\frac{-ika^2}{z}}\exp\left(ik\frac{x^2}{2z}-\frac{k^2a^2}{2}\frac{x^2}{z^2}\right) \tag{100.03}$$

с гауссовой диаграммой направленности $\exp(-k^2a^2x^2/2z^2)$. Это точное решение параболического уравнения является приближенным решением волнового уравнения при $ka\gg 1$, т. е. когда диаграмма направленности достаточно узкая (§ 99).

Волновой пучок, определяемый функцией W_0, называется двухмерным гауссовым пучком. Гауссов пучок, равно как и его обобщение — пучки Гаусса — Эрмита, более удобно записать в безразмерных координатах ξ и σ_a, где

$$\xi=x/a,\ \operatorname{ctg}\sigma_a=ka^2/z\ (0\leqslant\sigma_a<\pi/2). \tag{100.04}$$

Можно показать (см. задачу 3), что функция

$$W_m(x, z)=\sqrt{\cos\sigma_a}\,H_m(\xi\cos\sigma_a)\exp\left[-i\left(m+\frac{1}{2}\right)\sigma_a-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\xi^2\cos\sigma_a\,e^{-i\sigma_a}\right] \tag{100.05}$$

удовлетворяет двухмерному параболическому уравнению, если $H_m(t)$ — полиномы Эрмита степени m, удовлетворяющие уравнению

$$H''(t)=2tH'(t)-2mH(t); \tag{100.06}$$

обычно полиномы Эрмита нормируют так, что

$$H_0(t)=1,\ H_1(t)=2t,\ H_2(t)=4t^2-2,$$
$$H_{m+1}(t)=2t\,H_m(t)-2m\,H_{m-1}(t). \qquad (100.07)$$

При $m=0$ формула (100.05) переходит в формулу (100.01). Выражение (100.02) применимо при $\sigma_a \approx 0$, выражение (100.03) — при $\sigma_a \approx \pi/2$; $\operatorname{ctg}\sigma_a$ аналогичен числу Френеля f_a (§ 99).

Функция (100.05) по определению дает двухмерный пучок Гаусса — Эрмита. Вводя безразмерные координаты η и σ_b, где

$$\eta = y/b,\ \operatorname{ctg}\sigma_b = kb^2/z\ (0 \leqslant \sigma_b < \pi/2), \qquad (100.08)$$

можно ввести пучок Гаусса — Эрмита в плоскости y, z формулой

$$W_n(y,z)=\sqrt{\cos\sigma_b}\,H_n(\eta\cos\sigma_b)\exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\sigma_b-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\,\eta^2\cos\sigma_b\,e^{-i\sigma_b}\right], \qquad (100.09)$$

аналогичной формуле (100.05). Трехмерный пучок Гаусса — Эрмита определяется произведением

$$W_{mn}(x,y,z)=W_m(x,z)\,W_n(y,z), \qquad (100.10)$$

удовлетворяющим уравнению (99.02). Функция W_{00} дает трехмерный гауссов пучок.

Если $a=b$, то функция W_{00} зависит только от $r^2=x^2+y^2$ и z. Такой гауссов пучок обладает симметрией вращения, но высшие пучки Гаусса — Эрмита имеют прямоугольную симметрию. Последнее обстоятельство делает пучки Гаусса — Эрмита неудобными в системах, обладающих симметрией вращения, и заставляет переходить к пучкам Гаусса — Лагерра, имеющим такую же симметрию и удовлетворяющим параболическому уравнению

$$\frac{\partial W^{(m)}}{\partial z}=\frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2 W^{(m)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial W^{(m)}}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\,W^{(m)}\right), \qquad (100.11)$$

вытекающему из уравнения (99.02), если положить

$$W=W^{(m)}(r,z)\cos(m\varphi+\varphi_0) \qquad (100.12)$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты. Вводя безразмерные координаты

$$\rho=r/a,\ \sigma=\sigma_a=\sigma_b=\operatorname{arc\,ctg}(ka^2/z)\ (0\leqslant\sigma<\pi/2), \qquad (100.13)$$

нетрудно показать, что уравнение (100.11) имеет частные решения (см. задачу 3)

$$W_n^{(m)}(r,z)=\cos\sigma\,K_n^{(m)}(\rho\cos\sigma)\exp\left[-i\,(m+2n+1)\,\sigma-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\,\rho^2\cos\sigma\,e^{-i\sigma}\right], \qquad (100.14)$$

где $K_n^{(m)}(t)$ — полином степени $m+2n$, связанный с полиномом Лагерра $L_n^{(m)}$ соотношением

$$K_n^{(m)}(t) = t^m L_n^{(m)}(t^2) \tag{100.15}$$

и удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$t^2 K''(t) = (2t^3 - t) K'(t) + [m^2 - (2m + 4n) t^2] K(t). \tag{100.16}$$

Одна из возможных нормировок полиномов $L_n^{(m)}$ приводит к выражениям

$$\begin{aligned} &K_0^{(m)}(t) = t^m, \; K_1^{(m)}(t) = t^m [t^2 - (m+1)], \\ &K_2^{(m)}(t) = t^m [t^4 - 2(m+2) t^2 + (m+1)(m+2)], \\ &K_{n+1}^{(m)}(t) = [t^2 - (m+2n+1)] K_n^{(m)}(t) - n(m+n) K_{n-1}^m(t). \end{aligned} \tag{100.17}$$

Таким образом, при $a=b$ в декартовых координатах построены пучки Гаусса — Эрмита, а в цилиндрических — пучки Гаусса — Лагерра, определяемые формулой (100.14). В частных случаях нетрудно показать, что одни пучки выражаются через другие (см. задачу 4). Это объясняется тем, что при $\sigma_a = \sigma_b = \sigma$ функция W_{mn} пропорциональна $\exp[-i(m+n+1)\sigma]$ и все пучки Гаусса — Эрмита, имеющие одну и ту же сумму индексов $m+n$ и отличающиеся только распределением полей в поперечном сечении $\sigma = \text{const}$ ($z = \text{const}$), можно заменить своими линейными комбинациями, причем постоянные коэффициенты в этих комбинациях подобрать так, что получаются пучки Гаусса — Лагерра, имеющие ту же экспоненциальную зависимость от продольной координаты σ.

Абсолютные величины экспонент в формулах (100.05) и (100.14) равны соответственно

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2 \cos^2\sigma_a\right) \text{ и } \exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2\cos^2\sigma\right).$$

Образуя функции

$$\begin{aligned} &\psi_m(t) = H_m(t) e^{-t^2/2}, \; t = \xi\cos\sigma_a, \\ &\psi_n^{(m)}(t) = K_n^{(m)}(t) e^{-t^2/2}, \; t = \rho\cos\sigma, \end{aligned} \tag{100.18}$$

нетрудно показать, что они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\psi_m}{dt^2} + (2m + 1 - t^2)\psi_m = 0, \\ &t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\psi_n^{(m)}}{dt}\right) + [2(m+2n+1)t^2 - t^4 - m^2/t^2]\psi_n^{(m)} = 0. \end{aligned} \tag{100.19}$$

вытекающим из уравнений (100.06) и (100.16). Из теории дифференциальных уравнений известно, что решения уравнения

$$d^2\psi/dt^2 + q(t)\psi = 0 \tag{100.20}$$

в интервале, где $q(t) > 0$, имеют осциллирующий характер, а там,

где $q(t)<0$ — экспоненциально затухают или возрастают (иначе говоря, решения ведут себя так же, как при $q=\text{const}$).

Функции (100.18) из-за наличия экспоненты убывают при $|t|\to\infty$ экспоненциально. Функция $\psi_m(t)$ осциллирует в интервале $|t|<\sqrt{2m+1}$, поэтому функция W_{mn} в поперечном сечении $z=\text{const}$ имеет осциллирующий характер в пределах прямоугольника

$$|x|<\sqrt{2m+1}\,a/\cos\sigma_a,\ |y|<\sqrt{2n+1}\,b/\cos\sigma_b, \tag{100.21}$$

а вне его экспоненциально затухает при удалении от его границы. Второе уравнение (100.19) приводится к виду (100.20), если перейти к новой переменной $\tilde{t}=\ln t$ ($t>0$ для функции $\psi_n^{(m)}$). Поэтому функция $W_n^{(m)}$ осциллирует в интервале

$$t^-_{mn}\,a/\cos\sigma<r<t^+_{mn}\,a/\cos\sigma,$$

$$t^{\pm}_{mn}=\sqrt{m+2n+1\pm\sqrt{(2m+2n+1)(2n+1)}}, \tag{100.22}$$

а вне его экспоненциально затухает при удалении от границ этого интервала. Условие (100.22) дает кольцевую (при $m=0$ — круговую) область, где в основном сосредоточена функция $W_n^{(m)}(r, z)$ при $z=\text{const}$.

Неравенства (100.21) и (100.22) имеют следующий физический смысл (см. также § 103): в этих областях волновые пучки можно представить в виде параксиальных лучевых потоков, вне этих областей лучей нет. Лучи, соответствующие функции $W_n^{(0)}$, пересекают ось z ($t^-_{0,n}=0$). Лучи, соответствующие $W_n^{(m)}$ при $m=1, 2, \ldots$, не пересекают оси z, и ее окрестность оказывается свободной от лучей; «темная» область вблизи оси z тем больше, чем больше азимутальный индекс m. Границы областей — это каустические поверхности, значение которых будет подробно разъяснено в дальнейших параграфах. Пучки Гаусса — Эрмита имеют только внешние каустические поверхности, несимметричные пучки Гаусса — Лагерра ($m\neq0$) — также и внутренние ($r=t^-_{mn}a/\cos\sigma$).

Для пучков Гаусса — Лагерра справедливы соотношения

$$\sigma/kz=\sigma/k^2a^2\operatorname{tg}\sigma,\ d\sigma/d(kz)=\cos^2\sigma/k^2a^2, \tag{100.23}$$

показывающие, что при $ka\gg1$ к ним действительно применимо параболическое уравнение. Фаза таких пучков, если пренебречь слагаемым $(m+2n+1)\sigma$ по сравнению с kz, получается в виде

$$kz+\frac{1}{2}\rho^2\cos\sigma\sin\sigma=k\left(z+\frac{r^2}{4ka^2}\sin2\sigma\right)=k\left[z+\frac{r^2}{2\mathcal{R}(z)}\right], \tag{100.24}$$

где

$$\mathcal{R}(z)=2ka^2/\sin2\sigma=(z^2+k^2a^4)/z \tag{100.25}$$

есть радиус кривизны поверхности равной фазы, причем $\mathcal{R}(0)=\infty$ и $\mathcal{R}(z)\approx z$ при $z\gg ka^2$: фазовый фронт, плоский при $z=0$, стано-

вится при $z\to\infty$ сферическим с центром в начале координат. Пучки можно рассматривать и при $z<0$, когда они сходятся (а не расходятся, как при $z>0$) и имеют $\mathscr{R}(z)<0$. Фазовые фронты пучков Гаусса — Эрмита — поверхности двоякой кривизны (при $a\neq b$): в плоскости x, z радиус кривизны $\mathscr{R}_a(z)$, а в плоскости y, z — другой радиус $\mathscr{R}_b(z)$.

Переход к векторным электромагнитным полям в теории гауссовых пучков производится так же, как в § 99 [формула (99.12) и следующие за ней]: параболическое уравнение (99.02) применяется к поперечным составляющим (по осям x и y) векторного потенциала — электрического или магнитного — или же, что равноценно (§ 18), к поперечным составляющим вектора Герца. Целесообразно ввести следующие наименования электромагнитных пучков. Будем считать, что составляющие $A^{e}{}_x$, $\Pi^{e}{}_x$, $A^{m}{}_y$, $\Pi^{m}{}_y$ определяют пучки $E^{(x)}{}_{mn}$ Гаусса — Эрмита или Гаусса — Лагерра в зависимости от того, берется ли функция (100.10) или функция (100.14); пучок $E^{(x)}{}_{mn}$ можно также назвать пучком $H^{(y)}{}_{mn}$, выделяя в названии преобладающие составляющие E_x и H_y. Составляющие $A^{e}{}_y$, $\Pi^{e}{}_y$, $A^{m}{}_x$, $\Pi^{m}{}_x$ определяют пучки $E^{(y)}{}_{mn}$ или, что то же, пучки $H^{(x)}{}_{mn}$ с преобладанием E_y и H_x. В теории секториального рупора (§ 55) волны также определяются поперечной составляющей вектора $\mathbf{\Pi}^{e}$ или $\mathbf{\Pi}^{m}$.

Может возникнуть вопрос: почему вместо поперечных составляющих нельзя взять продольные составляющие $\Pi^{e}{}_z$ и $\Pi^{m}{}_z$ и пользоваться пучками E_{mn} и H_{mn}, аналогичными волнам E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном и круглом волноводах? Ответ заключается в том, что пучки E_{mn} и H_{mn} построить можно, но, во-первых, они не образуют полной системы, и, во-вторых, они выражаются через пучки $E^{(x)}{}_{mn}$ и $H^{(x)}{}_{mn}$, введенные выше.

Сказанное обосновывается следующими физическими соображениями. Волна E_{mn} (или H_{mn}) в идеальном волноводе возбуждается с помощью непрерывного распределения продольных электрических (или магнитных) диполей в плоскости $z=0$; это распределение должно быть пропорционально распределению составляющей E_z (или H_z) соответствующей волны, тогда возбуждается только она одна и других волн нет. Пучок E_{mn} (или H_{mn}) также может быть возбужден надлежащим распределением диполей в плоскости $z=0$, направленных по оси z, поэтому в дальней зоне такой пучок в направлении оси z не излучает; отсюда видно, что система пучков E_{mn} и H_{mn} не является полной. К тому же продольный магнитный диполь эквивалентен поперечному электрическому току (§ 74), а продольный электрический диполь — поперечному магнитному току. Такие токи учитываются составляющими $A^{e}{}_x$, $A^{e}{}_y$, $A^{m}{}_x$, $A^{m}{}_y$, которые приводят к пучкам $E^{(x)}{}_{mn}$ и $H^{(x)}{}_{mn}$, введенным выше.

В теории антенн было давно известно, что гауссово распределение поля в плоскости приводит к гауссовой диаграмме направленности, лишенной боковых лепестков и весьма ценной для многих применений. Но только с пришествием квазиоптики гауссовы пучки стали изучаться в полном объеме. Вместе с тем квазиоптические устройства позволили легко формировать пучки Гаусса — Эрмита и Гаусса — Лагерра.

§ 101. Квазиоптика: открытые резонаторы и открытые волноводы

Обычные волноводы и объемные резонаторы, теория которых изложена в гл. VII, XI и XV, становятся малопригодными в миллиметровом и более коротковолновых диапазонах, поскольку на основной волне или на основном колебании эти устройства слишком миниатюрны и имеют слишком большие потери; кроме того, по миниатюрным волноводам нельзя передать большую мощность, а в таком же объемном резонаторе невозможно запасать значительную энергию. Если же взять устройства нормальных размеров, таких как в сантиметровом диапазоне, то в волноводе будет возбуждаться много распространяющихся волн с разными скоростями и разными распределениями полей, все они приходят на приемный конец, но извлекать из них информацию затруднительно. В объемном резонаторе, размеры которого велики по сравнению с длиной волны, возбуждается сразу много колебаний с высокими индексами, собственные частоты которых лежат слишком близко друг к другу; их резонансные кривые перекрываются, не позволяя возбуждать какое-либо одно колебание, так что резонансные свойства пропадают.

Указанные выше недостатки волноводов и резонаторов обусловлены тем, что многочисленные волны и колебания в них имеют примерно одинаковые потери. Многочисленность при размерах, значительно превышающих длину волны, устранить нельзя, однако оказывается возможным создать такие волноводы и резонаторы, в которых лишь сравнительно небольшое число собственных волн и собственных колебаний имеют малое затухание, а остальные из-за большого затухания не участвуют в передаче энергии по волноводу или не конкурируют с добротным колебанием в резонаторе. Были предложены волноводы и резонаторы, в которых затухание волн или колебаний отличалось значительной избирательностью, например круглые волноводы с волной H_{01} (§ 52) и резонаторы на этой волне. Однако для миллиметровых и более коротких волн наиболее эффективными оказались квазиоптические устройства — открытые волноводы и открытые резонаторы.

Открытыми они называются потому, что избирательность в них достигается за счет излучения в свободное пространство, а квазиоптическими — потому, что в них используются типичные оптические элементы: зеркала, линзы, полупрозрачные пластинки и т. п. Приставка «квази» подчеркивает, что в квазиоптике оперируют не просто с волновыми или лучевыми пучками (как в оптике), а с пучками, являющимися собственными волнами и собственными колебаниями, которые обладают радиационным затуханием. В квазиоптике размеры зеркал и линз существенно больше длины волны, поэтому многое можно понять на основе геометрической оптики, но далеко не все: излучение формируется в процессе дифракции, поэтому последняя играет более значительную роль, чем в обычной оптике, и делает квазиоптические расчеты более труд-

ными. Во многих случаях приходится, если не прибегать к большим вычислениям, оценивать дифракционные эффекты в квазиоптических устройствах приблизительно или даже только качественно, как будет видно ниже.

Если система открытая, то она обязательно излучает. Пока известны три физических явления, которые приводят к удержанию поля в открытой системе и слабому излучению. Колебания и волны с малым радиационным затуханием могут реализоваться благодаря следующим физическим явлениям: 1) удерживающему влиянию краев или аналогичных неоднородностей; 2) образованию каустических поверхностей; 3) сильному отражению от границы двух сред или от более сложных слоистых структур. Рассмотрим эти явления применительно к конкретным квазиоптическим приборам.

Первое явление имеет место в открытых резонаторах и волноводах с плоскими зеркалами (рис. 129,*а* и *г*), в диафрагменном волноводе (рис. 129,*в*) и в резонаторе с концентрическими зеркалами (рис. 129,*б*). На первый взгляд кажется, что основным колебанием резонатора с плоскими зеркалами (рис. 129,*а*) является плоская волна, распространяющаяся между зеркалами по нормали к ним и попеременно отражающаяся от них; такая стоячая волна реализуется в интерферометре Фабри — Перо, но в открытом резонаторе диффракция при каждом проходе от зеркала к зеркалу и при отражении от них (см. § 99) разрушает такую волну. Наиболее стабильным является колебание, у которого между прямоугольными зеркалами ($|x|<a/2$, $|y|<b/2$) поперечные составляющие поля пропорциональны

$$\cos(\pi x/\hat{a})\cos(\pi y/\hat{b}),\ \text{где}\ \hat{a}=a\,(1+\gamma/\sqrt{f_a}),\ \hat{b}=b\,(1+\gamma/\sqrt{f_b}), \tag{101.01}$$

γ — комплексный параметр ($\gamma=\beta(1+i)$, $\beta=0{,}824$), а

$$f_a=ka^2/l,\ f_b=kb^2/l \tag{101.02}$$

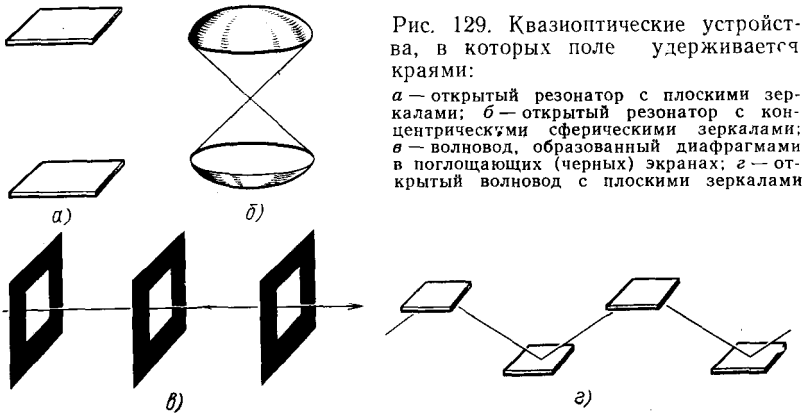


Рис. 129. Квазиоптические устройства, в которых поле удерживается краями:
а — открытый резонатор с плоскими зеркалами; *б* — открытый резонатор с концентрическими сферическими зеркалами; *в* — волновод, образованный диафрагмами в поглощающих (черных) экранах; *г* — открытый волновод с плоскими зеркалами

— числа Френеля, характеризующие данный резонатор [ср. с формулой (99.16)]; l — расстояние между зеркалами. При $f_a \gg 1$ и $f_b \gg 1$ поле при $|x| > a/2$ или $|y| > b/2$ — слабое, поэтому просачивание поля из пространства между зеркалами незначительно. Теория такого резонатора и подобных ему квазиоптических устройств изложена в § 102.

Второе явление происходит в открытых резонаторах и волноводах со сферическими зеркалами, в линзовых волноводах, в бочкообразных резонаторах с волной шепчущей галереи (рис. 130). Известно, что в результате отражения лучей от криволинейных зеркал или преломления их (например, в линзах) может образоваться поверхность, которой касаются лучи и за которую они не выходят. Такая поверхность называется каустической поверхностью или каустикой. В пространстве за каустикой, куда лучи не проникают, поле быстро (экспоненциально) убывает при удалении от каустики. Каустические поверхности являются своеобразными стенками, через которые поле почти не просачивается наружу, вследствие чего радиационные потери весьма малы, а потерь на джоулево тепло в таких стенках нет. Устройства подобного типа будут рассмотрены в § 103, в них формируются гауссовы пучки, изученные в § 100.

Третье явление характерно для диэлектрических структур, используемых как волноводы (гл. XI) или же как резонаторы, например, при ограничении их по длине металлическими плоскостями. В этих структурах возможно как полное, так и неполное отражение. Если оптически более плотная среда окружена средой менее плотной, то лучи, заключенные в более плотной среде, могут испытывать полное отражение и в окружающую среду не проникают. Это значит, что в последней поле экспоненциально убывает при удалении от границы сред (как при ограничении поля каустической поверхностью), поэтому поле в основном локализовано в оптически более плотной среде. Такая ситуация будет при распространении поверхностных волн в диэлектрической пластинке (§ 61) и диэлектрическом стержне (§ 63). Полное внутреннее от-

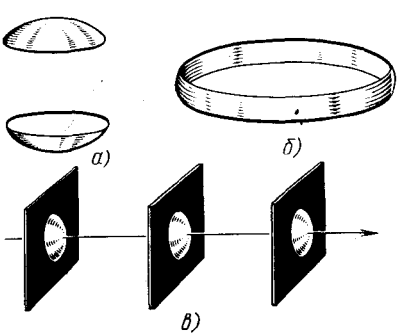


Рис. 130. Квазиоптические устройства, в которых образуются каустические поверхности:

а — открытый резонатор со сферическими зеркалами; *б* — бочкообразный открытый резонатор (боковая поверхность вогнута, основания отсутствуют); *в* — волновод, образованный линзами в поглощающих экранах; *г* — волновод, образованный сферическими зеркалами

ражение допускает (§ 61 и 62) одновременное существование слишком большого числа колебаний и волн, что нежелательно. Так, например, диэлектрические резонаторы, рассмотренные в § 87, обладают теми же недостатками, что и объемные резонаторы. Во многих приложениях целесообразно использовать неполное отражение от слоистых диэлектрических структур. Например, в диэлектрических трубках (§ 64) существуют волны того же типа, что и волны в квазиоптических системах: почти плоские, почти поперечные, с очень малым радиационным затуханием у одной из них (скажем, у волны EH_{11}, см. рис. 75). Поскольку в гл. XI соответствующие вопросы были обсуждены достаточно подробно, в дальнейшем на них останавливаться не имеет смысла. Надо только иметь в виду, что часто приходится иметь дело сразу с двумя или тремя перечисленными явлениями, но обычно одно из них является главным. Выделение главного явления позволяет составить физическую картину процессов в данной системе и дает основу для количественных расчетов.

Все три явления имеют избирательный характер: 1) края зеркал удерживают поля вполне определенной структуры и частоты, то же относится к другим неоднородностям; 2) каустики образуются далеко не всегда; 3) сильное отражение от границы пропадает при небольшом изменении угла падения (или частоты). Поэтому число колебаний и волн с малыми потерями на излучение относительно мало, что и приводит к избирательности. Может случиться, что в данном открытом резонаторе вообще нет добротных колебаний, в то время как в объемном резонаторе любой формы всегда имеется бесконечная последовательность собственных частот. Например, при перекосе плоских зеркал открытого резонатора, изображенного на рис. 129,*а*, его резонансные свойства вообще пропадают; чтобы получить резонатор, в миллиметровом диапазоне параллельность зеркал должна быть выдержана до долей минуты, а в оптическом диапазоне допуск на параллельность практически не выполним.

Предвосхищая результаты расчетов, проведенных в § 102—104, рассмотрим частотные спектры различных открытых резонаторов. Поскольку в открытых резонаторах радиационные потери неустранимы и принципиально важны, собственные частоты $\omega=\omega'-i\omega''$ надо изображать точками на плоскости комплексного переменного, что и сделано на рис. 131. Для открытого резонатора с плоскими зеркалами квадратной или круговой формы комплексные частоты расположены на прямых, выходящих из точек $\omega_q=q\pi c/l$ на вещественной оси и составляющих малый угол с осью (рис. 131,*а*; этот угол близок к $2/\sqrt{\overline{f}_a}$, см. § 102). Для открытого резонатора с каустиками комплексные собственные частоты расположены на кривых, начинающихся в тех же точках ω_a, но идущих сначала вблизи оси (это — собственные колебания с каустиками, у которых радиационное затухание экспоненциально мало), а потом отходящих от оси быстрее — примерно так, как для резона-

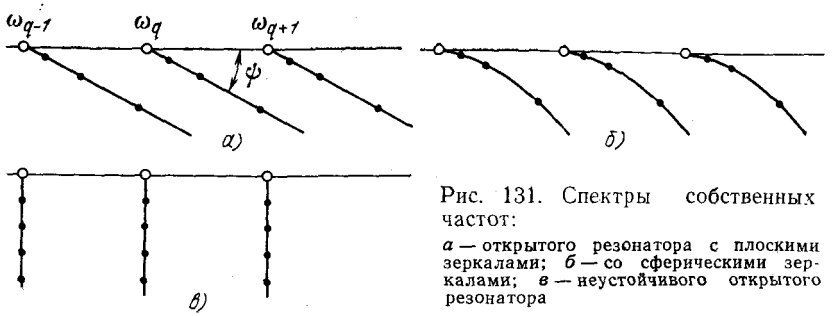


Рис. 131. Спектры собственных частот:

а — открытого резонатора с плоскими зеркалами; *б* — со сферическими зеркалами; *в* — неустойчивого открытого резонатора

тора с плоскими зеркалами, имеющего те же размеры (это — собственные колебания, у которых каустики не умещаются на зеркалах и которые удерживаются краями зеркал); эти кривые изображены на рис. 131,*б*. Наконец, на рис. 131,*в* дан типичный спектр неустойчивого резонатора, в котором каустики образоваться не могут, а удерживающее влияние краев незначительно; строго говоря, такую систему резонатором назвать нельзя, но при наличии активной среды возможно ее самовозбуждение (см. § 104).

Рисунок 131 позволяет разобраться в резонансных свойствах соответствующих резонаторов. Если расстояние между соседними точками (комплексными частотами) по вещественной оси существенно больше, чем их расстояние до этой оси, то их резонансные кривые не перекрываются и колебания можно возбудить по отдельности. В противном случае соседние колебания возбуждаются совместно и образуют *нерезонансный фон*. Спектры собственных частот, изображенные на рис. 131,*а* и *б*, приводят к резонансной кривой на рис. 132: в диапазоне $\omega_q < \omega < \omega_{q+1}$ первое колебание возбуждается с большой амплитудой, второе — с меньшей, все остальные — нерезонансный фон, на создание которого тратится определенная мощность (см. § 105). Если комплексные частоты лежат на прямых, образующих с вещественной осью конечный угол ψ (как на рис. 131,*в*), то резонансное возбуждение одного колебания сторонними источниками практически не осуществимо.

В дальнейшем основное внимание будет уделено открытым резонаторам. Это объясняется прежде всего тем, что открытые резонаторы имеют более широкое применение, чем открытые волноводы с линзами или зеркалами; по существу, на волнах порядка 1 мм и более коротких у открытых резонаторов среди колебательных систем нет конкурентов. Кроме того, расчет открытого волновода нетрудно свести к расчету соответствующего открытого резонатора и наоборот; это обстоя-

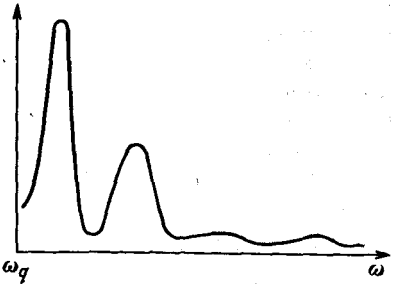


Рис. 132. Резонансная кривая открытого резонатора (схематически)

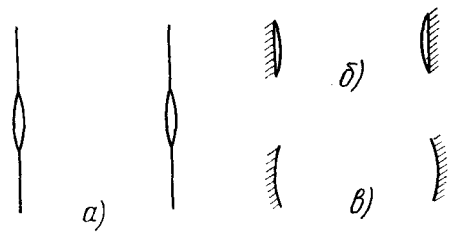


Рис. 133. Связь между теорией открытого волновода (*а*) и открытых резонаторов (*б*, *в*)

тельство для закрытых систем было отмечено в § 81 и 91.

Возьмем, например, линзовый волновод, один период которого (длиной l) дан на рис. 133,*а*. Поле собственной волны в таком периодическом волноводе на каждом периоде приобретает множитель e^{ihl} (см. § 65), если волна бежит в положительном направлении оси z, причем $\operatorname{Im} h > 0$ из-за потерь на излучение (потерями на отражение от линз и на поглощение в них пренебрегаем). Перейдем теперь к открытому резонатору, образованному половинками таких же линз на идеально отражающих плоских зеркалах (рис. 133,*б*; поглощающие экраны теперь роли не играют). В резонаторе волна, попавшая на правую полулинзу, отражается и распространяется к левой полулинзе по тем же законам, по которым в волноводе она распространяется к следующей полулинзе, т. е. ее поле приобретает еще один множитель e^{ihl}. Пройдя левую полулинзу, волна вместе с первоначальной волной должна удовлетворить граничному условию на зеркале, а это приводит к условиям

$$e^{i2hl} = 1, \sin hl = 0, hl = q\pi, \tag{101.03}$$

где q — целое число.

Квазиоптические устройства, как правило, вытянуты вдоль оси z, бо́льшую часть пути параксиальный волновой пучок проходит в пустоте, поэтому $h \approx k$ или, точнее, $hl = kl - \chi$, где $|\chi| \ll kl$ и $\operatorname{Im}\chi < 0$. Отсюда, если волновое число h известно, получаем соотношение

$$kl = q\pi + \chi, \tag{101.04}$$

позволяющее вычислить собственную частоту резонатора. Наоборот, если последняя найдена в виде (101.04), то нетрудно вычислить величину hl для волновода.

Открытый резонатор на рис. 133,*б* имеет лишь теоретическое значение. С практической точки зрения полулинзы следует заменить зеркалами, имеющими то же фокусное расстояние и обеспечивающими тот же фазовый набег по оси z (рис. 133,*в*).

При анализе открытого резонатора с идеальными зеркалами достаточно рассмотреть только волну, распространяющуюся вдоль оси z (без встречной волны), и наложить на нее условие $e^{ihl} = \pm 1$, эквивалентное условиям (101.03). Если же учитывать неидеальность зеркал, то это условие принимает вид

$$Re^{ihl} = \pm 1, \tag{101.05}$$

где R — коэффициент отражения от зеркала ($R \approx 1$, $|R| < 1$). Тогда формула (101.04) принимает вид

$$kl = q\pi + \chi - 2i\zeta \tag{101.06}$$

(см. задачу 5); здесь ζ — волновой импеданс зеркал, введенный в § 25. В дальнейшем зеркала будут предполагаться идеальными.

Из сказанного выше следует, что в теории квазиоптических устройств основное внимание сосредоточивается на сравнительно небольшом числе колебаний и волн, имеющих малое затухание; только они представляют практический интерес. Это обстоятельство выражают словами: вследствие потерь на излучение происходит разрежение спектра собственных колебаний и волн (или, кратко, селекция мод).

§ 102. Колебания между плоскопараллельными зеркалами

Рассмотрим колебания в открытом резонаторе с плоскими зеркалами прямоугольной формы (рис. 129,*а*), лежащими в плоскостях $z=0$ и $z=l$, при $|x|<a/2$ и $|y|<b/2$. Будем вести расчет в рамках параболического уравнения (99.02), допускающего разделение переменных x и y (§ 99), вследствие чего достаточно решить двухмерную задачу и найти сначала функцию $W(x, z)$. Зададим функцию $W(x, 0)$ в виде

$$W(x, 0) = e^{ik\alpha x} \pm e^{-ik\alpha x}, \quad |\alpha| \ll 1; \tag{102.01}$$

она дает распределение тока на одном из зеркал, пропорциональное $\cos k\alpha x$ или $\sin k\alpha x$. Найдем функцию $W(x, l)$ на втором зеркале с помощью формул (99.06) и (99.08). Используя интеграл Френеля (99.11) и безразмерные величины

$$\mu = \frac{1}{2}\sqrt{ka^2/l}, \quad \xi = \sqrt{k/l}\,x, \quad s = \sqrt{kl}\,\alpha, \quad s\xi = k\alpha x, \tag{102.02}$$

можно записать $W(x, l)$ в виде

$$W(x, l) = \{[F(\mu - \xi + s) - F(-\mu - \xi + s)]\, e^{is\xi} \pm$$
$$\pm [F(\mu - \xi - s) - F(-\mu - \xi - s)]\, e^{-is\xi}\}\, e^{-is^2/2}. \tag{102.03}$$

Ясно, что в силу симметрии данной системы четность функций $W(x, 0)$ и $W(x, l)$ одинакова — обе они либо четные, либо нечетные функции x. Кроме того, при собственных колебаниях функции $W(x, 0)$ и $W(x, l)$ при $|x|<a/2$ должны отличаться только постоянным множителем. Задавая $W(x, 0)$ в виде (102.01), *точно* добиться этого нельзя, однако в выражении (102.03) можно выделить слагаемое, пропорциональное $W(x, 0)$ и выбрать параметр s так, чтобы минимизировать дополнительное слагаемое (невязку). Для этого положим

$$F(\tau) = 1 - F_0(\tau), \quad F_0(\tau) = F(-\tau) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tau}^{\infty} e^{it^2/2}\, dt, \tag{102.04}$$

тогда

$$W(x, l) = [w(s\xi) - \Delta(\xi)]\, e^{-is^2/2}, \quad w(s\xi) = W(x, 0) = e^{is\xi} \pm e^{-is\xi},$$
$$\Delta(\xi) = [F_0(\mu - \xi + s) + F_0(\mu + \xi - s)]\, e^{is\xi} \pm$$
$$\pm [F_0(\mu - \xi - s) + F_0(\mu + \xi + s)]\, e^{-is\xi}. \tag{102.05}$$

Невязку $\Delta(\xi)$ удается сделать малой при двух условиях: при $\mu \gg 1$ и $s \ll 1$. Условие $s \ll 1$ позволяет использовать соотношение

$$F_0(\tau+s) = F_0(\tau) - i F_0'(\tau)\,(e^{is\tau}-1)/\tau,\ F_0'(\tau) = -e^{i(\tau^2/2-\pi/4)}/\sqrt{2\pi}, \tag{102.06}$$

а условие $\mu \gg 1$ — асимптотическое разложение

$$F_0(\tau) = -i F_0'(\tau)\left(\frac{1}{\tau} - \frac{i}{\tau^3} + \ldots\right),\ \tau \gg 1. \tag{102.07}$$

Их вывод дан в задаче 6.

Используя соотношение (102.06), получаем

$$\Delta(\xi) = [F_0(\mu-\xi) + F_0(\mu+\xi)]\, w(s\xi) - i F_0'(\mu-\xi)\,\frac{w(s\mu)-w(s\xi)}{\mu-\xi} -$$

$$- i F_0'(\mu+\xi)\,\frac{w(-s\mu)-w(s\xi)}{\mu+\xi}$$

и на краю зеркала

$$\Delta(\mu) = [F_0(0) + F_0(2\mu)]\, w(s\mu) -$$

$$- i F_0'(0)\, s w'(s\mu) - i F_0'(2\mu)\,\frac{w(-s\mu)-w(s\mu)}{2\mu}.$$

Если

$$w(s\mu) = -(\gamma/2)\, s w'(s\mu) \text{ или}$$

$$W = -(\gamma/2)\sqrt{l/k}\,\partial W/\partial x \text{ при } x = a,\quad z = 0, \tag{102.08}$$

где

$$\gamma = -2iF_0'(0)/F_0(0) = \beta(1+i),\ \beta = 2/\sqrt{\pi} = 1{,}13, \tag{102.09}$$

то невязка на краю зеркала порядка $w(s\mu)/\mu \sim s/\mu$. Невязка на середине зеркал (где $\mu-\xi$ и $\mu+\xi$ порядка μ) имеет тот же порядок и не зависит от параметра γ, который определяется, очевидно, дифракцией на краях зеркал. Невязку уменьшить *по порядку величины* не удается, но более аккуратное исследование поля у краев приводит к значению

$$\gamma = \beta(1+i),\ \beta = 0{,}824, \tag{102.10}$$

отличающемуся от (102.09).

Соотношения (102.08) определяют те значения s и $s\mu$, при которых с погрешностью порядка $s/\mu \sim 1/\mu^2 \sim 1/f_a$ справедливо равенство

$$W(x, l) = W(x, 0)\, e^{-is^2/2} \text{ при } |x| < a/2; \tag{102.11}$$

здесь $f_a = 4\mu^2 = ka^2/l$ — число Френеля для данного резонатора. Ввиду приближенности соотношений (102.08) достаточно найти нужные значения s приближенно, полагая $s\mu = m\pi/2 + \delta$, где $m = 1, 3, \ldots$ при знаке плюс и $m = 2, 4, \ldots$ при знаке минус в выраже-

нии (102.01); пренебрегая величинами порядка s^2 и выше, получаем $\delta=\gamma s/2$, откуда

$$s=m\pi/(2\mu+\gamma),\ s\mu=k\alpha a=m\pi/2\,(1+\gamma/\sqrt{f_a}) \tag{102.12}$$

и с точностью до постоянных множителей получаем

$$W(x,0)=\cos\frac{m\pi x}{a\,(1+\gamma/\sqrt{f_a})}\ (m=1,3,\ldots),$$

$$W(x,0)=\sin\frac{m\pi x}{a\,(1+\gamma/\sqrt{f_a})}\ (m=2,4,\ldots). \tag{102.13}$$

Заканчивая исследование двухмерного резонатора (зеркала при $|x|<a/2$, $z=0$ и l), видим, что волна, идущая в положительном направлении оси z, приобретает при проходе от одного зеркала к другому множитель $\exp i(kl-s^2/2)$, который (см. конец § 101) должен быть равен ±1. Собственные частоты резонатора определяются формулой

$$kl=q\pi+\frac{s^2}{2}=q\pi+\frac{m^2\pi^2}{2f_a^2\,(1+\gamma/\sqrt{f_a})^2} \tag{102.14}$$

или в том же приближении

$$kl=q\pi+\frac{m^2\pi^2}{2f_a}\left(1-\frac{2\gamma}{\sqrt{f_a}}\right), \tag{102.15}$$

q — большое целое число. Структура этой формулы указана ранее [см. формулу (101.04) и рис. 131,a]. Комплексные частоты, вычисляемые по формуле (102.15), лежат на полу прямой, составляющей малый угол $2\beta/\sqrt{f_a}$ с вещественной осью и начинающейся в точке $\omega_q=q\pi c/l$. Слагаемое в правой части (102.15), пропорциональное $1/f_a$, мало по сравнению с $q\pi$, еще меньше слагаемое, пропорциональное $\gamma/f_a^{3/2}$, ответственное за дифракционные потери. Полагая $\gamma=0$, получаем выражение

$$k=\frac{q\pi}{l}+\frac{m^2\pi^2 l}{2ka^2}\approx\sqrt{\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}\ \text{при}\ \frac{q}{l}\gg\frac{m}{a},$$

соответствующее собственным частотам закрытого двухмерного резонатора.

В трехмерном резонаторе с прямоугольными зеркалами $|x|<a/2$, $|y|<b/2$ вследствие разделимости переменных x и y начальное распределение на одном зеркале

$$W(x,y,0)=\cos\frac{m\pi x}{a\,(1+\gamma/\sqrt{f_a})}\cos\frac{n\pi y}{b\,(1+\gamma/\sqrt{f_b})}\ (m,n=1,3,\ldots) \tag{102.16}$$

будет приближенно воспроизводиться на другом зеркале (на расстоянии l), давая начало колебанию, у которого

$$kl=q\pi+\frac{m^2\pi^2}{2f_a}\left(1-\frac{2\gamma}{\sqrt{f_a}}\right)+\frac{n^2\pi^2}{2f_b}\left(1-\frac{2\gamma}{\sqrt{f_b}}\right). \tag{102.17}$$

При четном m или n косинус в формуле (102.16) заменяется синусом, а формула (102.17) остается без изменений; $f_b = kb^2/l$ — второе число Френеля.

Перейдем к резонатору с плоскими зеркалами круговой формы ($0 < r < a$, $z = 0$ и l). Естественно думать, что начальное распределение

$$W(r, \varphi, 0) = J_m(gr) \cos(m\varphi + \varphi_0) \quad (r < a) \tag{102.18}$$

будет приближенно воспроизводиться при $r < a$ и $z = l$, если поперечное волновое число g будет находиться из соотношения

$$W = -(\gamma/2)\sqrt{l/k}\,\partial W/\partial r \text{ при } r = a, \text{ или}$$

$$J_m(ga) = -(\gamma/2)\sqrt{l/k}\, g J'_m(ga), \tag{102.19}$$

аналогичного соотношению (102.08), в виде

$$g = \frac{\nu_{mn}}{a(1 + \gamma/\sqrt{f})}, \quad f = \frac{4ka^2}{l}, \tag{102.20}$$

причем

$$kl = q\pi + \frac{2\nu_{mn}^2}{f}\left(1 - \frac{2\gamma}{\sqrt{f}}\right), \tag{102.21}$$

где ν_{mn}—n-й положительный корень уравнения $J_m(\nu) = 0$ (§ 42). При $\gamma = 0$ формула (102.21) согласуется с формулой (81.03) для собственных частот колебаний E_{mnq} в цилиндрических резонаторах:

$$k = \sqrt{\left(\frac{q\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2} \approx \frac{q\pi}{l} + \frac{\nu_{mn}^2}{2ka^2}.$$

Если связать функцию W с составляющей $A^e{}_x$ или $A^e{}_y$ электрического векторного потенциала (см. § 100), то формулы (102.16) и (102.17) будут определять колебания $E^{(x)}{}_{mnq}$ или $E^{(y)}{}_{mnq}$ между прямоугольными зеркалами, а формулы (102.18) — (102.21) — колебания $E^{(x)}{}_{mnq}$ или $E^{(y)}{}_{mnq}$ между круглыми зеркалами; функции (102.16) и (102.18) дают распределение поверхностного тока на зеркалах (составляющей i_x или i_y). В литературе этим колебаниям часто дают малоинформативное название ТЕМ или квази-ТЕМ (с различными индексами).

Колебания между концентрическими зеркалами (см. рис. 129,*б*) подчиняются тем же закономерностям, в частности дифракционные потери такие же.

Соотношения, полученные выше, можно вывести иначе, переключив свое внимание с распространения волнового пучка вдоль оси z на процессы, происходящие в поперечных направлениях, т. е. на поперечную диффузию (§ 99). Удерживающее влияние краев зеркал на электромагнитное поле между ними проявляется уже в более простой двухмерной системе — в плоском волноводе, образованном двумя параллельными полуплоскостями ($x > 0$, $z = 0$ и l). Рассмотрим диффракцию одной из волноводных волн, бегущей по направлению к открытому концу ($x = 0$) волновода. Наибольший интерес представляет ко-

эффициент отражения волны от открытого конца: когда по абсолютной величине этот коэффициент близок к единице, излучение в свободное пространство мало.

Оказывается, что сильное отражение происходит тогда, когда частота набегающей волны близка к ее критической частоте, т. е. когда она разлагается (см. § 44) на две плоские волны, распространяющиеся в направлениях, образующих малый угол α с положительной или отрицательной осью z. Коэффициент отражения такой волны по току согласно строгой теории получается при $kl \gg 1$ в виде

$$R = -e^{i\gamma s}, \text{ где } s = \sqrt{kl}\,\alpha \quad (\alpha \approx \sin\alpha) \tag{102.22}$$

для любой поляризации; γ определяется формулой (102.10). Это выражение позволяет сразу рассчитать собственные колебания двухмерного резонатора (задача 7), т. е. получить формулы (102.12), а затем перейти к трехмерным задачам. Применение выражения (102.22) дает приближенное решение, поскольку при отражении возникают также волны других номеров (с малыми амплитудами), которые не учитываются и дают невязку $\Delta(\xi)$, введенную выше.

С сильным отражением вблизи критической частоты приходится иметь дело часто. Например, в § 56 было рассмотрено отражение волноводных волн от плавного перехода волновод — секториальный рупор. Рисунок 61 показывает, что при малых углах раствора коэффициент отражения, вообще говоря, очень мал — практически равен нулю. Однако при стремлении частоты к критической $|R| \to 1$, причем $R \to -1$, если R — коэффициент отражения по току.

Для линий первой группы критическая частота равна нулю, поэтому близость к критической частоте означает просто низкие частоты. В § 35 было отмечено, что коэффициент отражения от открытого конца двухпроводной линии близок к единице, если расстояние между проводами мало по сравнению с длиной волны (рис. 27). Пусть R — коэффициент отражения по току, тогда $R \approx -1$ для открытого (разомкнутого) конца, $R \approx 1$ для закороченного конца. Поэтому в § 45 для приближенной оценки критических частот в полосковой линии на краях зазора между полоской и подложкой ставилось граничное условие $H_t = 0$, противоположное условию $E_t = 0$ для идеально проводящей стенки.

Волноводные волны высоких номеров ($q \gg 1$), представляющие интерес для квазиоптики, подчиняются тем же закономерностям.

§ 103. Колебания, ограниченные каустиками

Зададим сферические зеркала круговой формы (рис. 130,*а*) соотношениями

$$0 < r < \bar{a},\ z = -l/2 + r^2/2\mathcal{R},\ z = l/2 - r^2/2\mathcal{R}, \tag{103.01}$$

справедливыми в параксиальном приближении; здесь $\bar{a}$ — радиус зеркал; $\mathcal{R}$ — радиус кривизны зеркал; l — расстояние между ними по оси z. Открытый резонатор с такими зеркалами обладает симметрией вращения. Поэтому естественно искать его собственные колебания в виде суперпозиции двух волновых пучков Гаусса — Лагерра, переходящих друг в друга при отражении от зеркал, а для этого прежде всего необходимо, чтобы поверхность

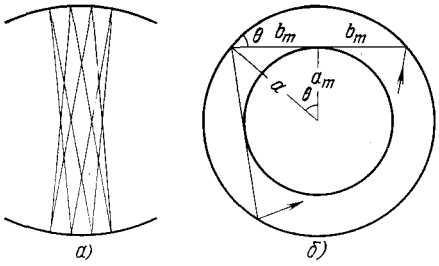


Рис. 134. Лучи и каустики между вогнутыми зеркалами (*а*) и в средней плоскости бочкообразного резонатора (*б*)

зеркала совпала с одной из поверхностей равной фазы: тогда пучок, распространяющийся в положительном направлении оси z и целиком укладывающийся (об этом ниже) на верхнем зеркале, преобразуется в точно такой же пучок, распространяющийся к нижнему зеркалу. С точки зрения геометрической оптики колебание в таком резонаторе — это два потока лучей, ограниченных каустической поверхностью (рис. 134). Формула (100.25) связывает радиус кривизны фазового фронта с параметром a гауссова пучка и расстоянием от плоскости $\sigma=0$, где фазовый фронт выпрямляется и диаметр пучка наименьший; плоскость $\sigma=0$ в данной системе соответствует средней плоскости $z=0$, и формула (100.25) связывает $\mathcal{R}$, $l/2$ и a так:

$$\mathcal{R}=(l^2/4+k^2a^4)/(l/2),\ ka^2=\sqrt{(l/2)(\mathcal{R}-l/2)}, \qquad (103.02)$$

тем самым определяется параметр a. Обозначая через $\bar{\sigma}$ значение переменной σ на верхнем зеркале, будем иметь

$$\operatorname{ctg}\bar{\sigma}=2ka^2/l=\sqrt{2\mathcal{R}/l-1},\ \sin\bar{\sigma}=\sqrt{l/2\mathcal{R}},\ \cos\bar{\sigma}=\sqrt{1-l/2\mathcal{R}}, \qquad (103.03)$$

поэтому гауссовы пучки будут воспроизводиться, отражаясь от зеркала, только при условии $\mathcal{R}>l/2$. Кроме того, надо учесть, что согласно формуле (100.22) поперечные размеры пучка тем больше, чем больше индексы m и n: радиус внешней каустики на зеркале

$$a_{mn}=t^+_{mn}\,a/\cos\bar{\sigma}=t^+_{mn}\sqrt{l/k\sin 2\bar{\sigma}}, \qquad (103.04)$$

и для того чтобы при отражении от зеркала пучок Гаусса — Лагерра с индексами m и n воспроизводился с малым искажением, нужно, чтобы радиус зеркала $\bar{a}$ был больше радиуса внешней каустики a_{mn}. Условие $\bar{a}>a_{mn}$ обеспечивает весьма малое (экспоненциально малое) радиационное затухание собственных колебаний, их собственные частоты определяются соотношением

$$kl=q\pi+2(m+2n+1)\bar{\sigma},\quad m,n=0,1,2,\ldots, \qquad (103.05)$$

аналогичным соотношениям (101.04) и (102.21). Однако здесь частоты получились вещественными вследствие того, что дифракция на краях зеркал не учтена, т. е. не рассмотрено «расплескивание» волнового пучка при его отражении от зеркала.

Но условие $\bar{a}>a_{mn}$ может выполняться лишь для конечного числа пучков; для остальных пучков $\bar{a}<a_{mn}$, они ограничены не

каустиками, а краями зеркал, не похожи на гауссовы пучки и имеют существенно большее радиационное затухание. Спектр, изображенный на рис. 131,*б*, соответствует случаю, когда при данном q только два колебания ограничены каустическими поверхностями.

Формула (103.04) показывает, что при $\bar{\sigma}\to 0$ и $\bar{\sigma}\to\pi/2$ радиус внешней каустики неограниченно увеличивается. Как видно из формулы (103.03), при $\bar{\sigma}=0$ имеем $\mathcal{R}=\infty$ (плоские зеркала), а при $\bar{\sigma}=\pi/2$ получаем $\mathcal{R}=l/2$ (концентрические зеркала); в таких открытых резонаторах каустики вообще образоваться не могут. Интересно отметить, что при замене $\bar{\sigma}$ на $\pi/2-\bar{\sigma}$ радиусы внешней и внутренней каустик не изменяются. Оказывается, что потери на излучение при этом тоже не изменяются.

При $\bar{\sigma}=\pi/4$ т. е. при $\mathcal{R}=l$, радиус каустики минимален (при данных l, m и n). Такие зеркала называются софокусными или конфокальными. Смысл этого термина в том, что согласно элементарной геометрической оптике фокус сферического зеркала отстоит от зеркала на расстоянии $\mathcal{R}/2$ (там фокусируются параллельные лучи, падающие на зеркало), а при $\mathcal{R}=l$ фокусы противоположных зеркал совпадают (они находятся в центре симметрии). Можно думать, что софокусные зеркала обеспечивают наименьшее радиационное затухание колебаний, поскольку при софокусных зеркалах каустическая поверхность, ограничивающая поле, всего дальше отстоит от краев зеркал. Фактически это не совсем так: при приближении к конфокальной геометрии радиационная добротность сначала возрастает, а потом резко падает. Большие радиационные потери, свойственные конфокальному резонатору, обусловлены многократным вырождением его собственных частот, так как соотношение (103.05) при $\bar{\sigma}=\pi/4$ принимает вид

$$kl=[q+n+(m+1)/2]\,\pi \qquad (103.06)$$

и одно и то же значение kl получается при самых разных q, n и m. Поэтому самое малое возмущение связывает добротное колебание с другими, имеющими ту же частоту и большие потери на излучение. Применяя открытые резонаторы, стараются не подходить к этой «опасной геометрии» слишком близко, а также к некоторым другим ($\bar{\sigma}=\pi/6$ и $\bar{\sigma}=\pi/3$), у которых наблюдались аналогичные явления, хотя и в ослабленной форме.

Если зеркала имеют двоякую кривизну, т. е. задаются соотношениями

$$z=-l/2+x^2/2\mathcal{R}_a+y^2/2\mathcal{R}_b,\ z=l/2-x^2/2\mathcal{R}_a-y^2/2\mathcal{R}_b, \qquad (103.07)$$

то колебания между такими зеркалами являются суперпозицией двух встречных пучков Гаусса — Эрмита, у которых

$$ka^2=\sqrt{(l/2)(\mathcal{R}_a-l/2)},\ kb^2=\sqrt{(l/2)(\mathcal{R}_b-l/2)}, \qquad (103.08)$$

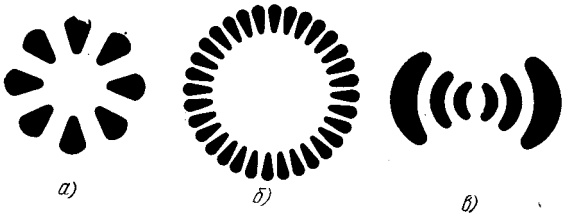


Рис. 135. Колебания с круглой симметрией:
а — $m=4$, $n=0$; *б* — $m=13$, $n=0$; *в* — $m=1$, $n=2$

а переменные σ_a и σ_b на втором зеркале (103.07) принимают значения

$$\bar{\sigma}_a = \arcsin \sqrt{l/2\mathcal{R}_a},\ \bar{\sigma}_b = \arcsin \sqrt{l/2\mathcal{R}_b}. \qquad (103.09)$$

Когда прямоугольная область (100.21) при $\sigma_a = \pm\bar{\sigma}_a$ и $\sigma_b = \pm\bar{\sigma}_b$ помещается на обоих зеркалах, собственные частоты резонатора определяются соотношением

$$kl = q\pi + (2m+1)\,\bar{\sigma}_a + (2n+1)\,\bar{\sigma}_b. \qquad (103.10)$$

Колебания с частотой (103.05) можно назвать колебаниями $E^{(x)}_{mnq}$ и $E^{(y)}_{mnq}$ с круговой симметрией, с частотой (103.10) — колебаниями $E^{(x)}_{mnq}$ и $E^{(y)}_{mnq}$ с прямоугольной симметрией.

На рис. 135 даны изображения колебаний в резонаторах с круглыми сферическими зеркалами: отчетливо видно, как при увеличении азимутального индекса m, определяющего число вариаций поля по азимуту φ, увеличивается радиус внутренней каустики в соответствии с формулой (100.22). Если сферические зеркала имеют небольшие отверстия вблизи оси z, то на распределение поля несимметричных колебаний они повлияют слабо (при радиусе отверстия, меньшем радиуса внутренней каустики), а симметричные колебания испытывают сильное возмущение и приобретают заметные потери на излучение. Неограниченно увеличивая индекс m и одновременно расширяя отверстия и наращивая периферийные части зеркал, в конце концов придем к полю, сосредоточенному вблизи плоскости $z=0$, т. е. к бочкообразному резонатору (см. рис. 130,*б*). При этом, разумеется, поле перестает быть параксиальным и гауссовым и превращается в стоячую или бегущую «волну шепчущей галереи» — в волновой пучок, распространяющийся в азимутальном направлении вблизи стенки резонатора, или в суперпозицию двух встречных пучков такого типа. Колебания в бочкообразном резонаторе ограничены тремя каустическими поверхно-

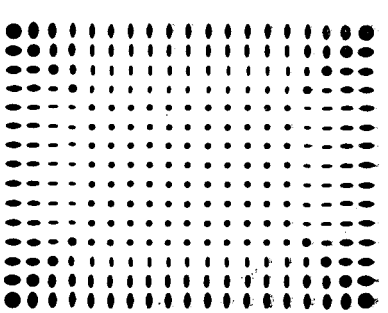


Рис. 136. Колебания с прямоугольной симметрией: $m=18$, $n=14$

стями: двумя внешними ($z=\text{const}$) и одной внутренней ($r=\text{const}$, см. рис. 134,*б*).

На рис. 136 приведена картина колебания, имеющего прямоугольную симметрию. Такие колебания могут возникать не только из-за астигматизма зеркал ($\mathcal{R}_a \neq \mathcal{R}_b$), но и при других нарушениях симметрии вращения.

Распространение волн в открытом волноводе, образованном периодически расположенными одинаковыми линзами, можно уподобить развитию во времени колебаний в открытом резонаторе. Математическая связь между собственными волнами в волноводе и собственными колебаниями в резонаторе была установлена в конце § 101, причем предполагалось, что линзы (в волноводе) и зеркала (в резонаторе) осуществляют одинаковую фазовую корректировку.

Что это значит? Линзы преломляют лучи, зеркала — отражают. Однако если отвлечься от направления лучей и волн, линза и зеркало одинаково преобразуют падающую волну (в параксиальном приближении), если их поперечные размеры и фокусные расстояния одинаковы. Как уже отмечалось, фокусное расстояние зеркала $f=\mathcal{R}/2$, а фокусное расстояние тонкой линзы

$$f=\frac{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2}{(\nu-1)(\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2)} \qquad (103.11)$$

($\mathcal{R}$ — радиус кривизны зеркала; $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ — радиусы кривизны линзы, ν — ее показатель преломления). При равенстве этих величин зеркало и линза одинаково преобразуют падающее поле, по крайней мере, при тождественности коэффициента отражения от зеркала и коэффициента прохождения через линзу (идеально отражающему зеркалу соответствует идеально просветленная линза). По заданной кривизне зеркал можно вычислить их фокусное расстояние, а по нему в соответствии с формулой (103.11) подобрать параметры эквивалентной линзы волновода, т. е. построить соответствующую пару резонатор — линзовый волновод. Можно делать и наоборот: по фокусному расстоянию линзы найти кривизну зеркал резонатора, затем вычислить характеристики волновода.

Следует заметить, что введенные выше обозначения для колебаний между плоскими и вогнутыми зеркалами не совсем согласованы. Например, колебание $E^{(x)}_{mnq}$ между сферическими зеркалами круговой формы при уменьшении кривизны зеркал переходит в колебание $E^{(x)}_{m,n+1,q}$ между плоскими зеркалами той же формы, а колебание $E^{(x)}_{mnq}$ с прямоугольной симметрией (рис. 136) — в колебание $E^{(x)}_{m+1,\,n+1,q}$ между плоскими прямоугольными зеркалами.

Волны шепчущей галереи, бегущие в азимутальном направлении по внутренней поверхности идеально проводящего кругового цилиндра $r=a$, определяются в цилиндрической системе координат составляющими электрического или магнитного вектора Герца

$$\Pi^e_z = J_m(kr)\,e^{\pm im\varphi},\quad \Pi^m_z = J_m(kr)\,e^{\pm im\varphi}, \qquad (103.12)$$

где $J_m(kr)$ — функция Бесселя (§ 22); стоячие волны шепчущей галереи получаются заменой экспоненты на $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$. Эти *двухмерные* волны должны удовлетворять соотношениям

$$J_m(ka)=0 \text{ или } J'_m(ka)=0, \tag{103.13}$$

т. е. $ka=\nu_{mn}$ для волн E_{mn} и $ka=\mu_{mn}$ для волн H_{mn} (см. § 42); с точки зрения теории волноводов соотношения (103.12) соответствуют полю волны E_{mn} или H_{mn} при критической частоте, когда $h=0$ и поле от координаты z не зависит.

Волны шепчущей галереи реализуются при больших значениях m ($m>ka\gg 1$) и небольших значениях n ($n=1, 2, \ldots$), их поле в основном расположено в кольце $m/k<r<a$ и при удалении от окружности радиуса $a_m=m/k$ по направлению к оси z экспоненциально убывает. Действительно, функция $J_m(kr)$ удовлетворяет уравнению (22.03) и имеет осциллирующий характер в указанном кольце, как это следует из сказанного после формулы (100.20), а при увеличении разности a_m-r монотонно убывает, так как $J_m(kr)\to 0$ при $kr\to 0$. В кольце $a_m<r<a$ поле волны представляется в виде потока лучей, отражающихся от окружности $r=a$ и касающихся окружности $r=a_m$ — внутренней каустики.

Переходя к *трехмерным* полям, следует отметить, что в цилиндре конечной длины, открытом с обоих концов, существуют колебания E_{mnq} и H_{mnq}, удерживаемые краями цилиндра. Более добротные колебания будут в бочкообразном резонаторе (см. рис. 130,*б*), который можно рассматривать как цилиндр, слегка сужающийся к концам по закону

$$a(z)=a-z^2/\mathscr{R}, \quad -l/2<z<l/2, \tag{103.14}$$

где $a(z)$ — радиус резонатора в поперечном сечении z; a — радиус при $z=0$; $\mathscr{R}$ — радиус кривизны меридионального сечения. Удерживающее влияние кривизны сказывается в том, что луч, составляющий малый угол с плоскостью $z=\text{const}$, при отражении от внутренней поверхности бочки возвращается к средней плоскости $z=0$, совершая колебания — такие же, какие между сферическими зеркалами совершают параксиальные лучи; образуются внешние каустические поверхности, препятствующие изучению из открытых концов $z=l/2$ и $z=-l/2$.

Более уместно сопоставление бочкообразного резонатора с двухмерным резонатором, цилиндрические зеркала которого имеют радиус кривизны $\mathscr{R}_*$ и отстоят на расстоянии l_* друг от друга. Согласно формулам (103.09) и (103.10) собственные частоты двухмерных (не зависящих от y) колебаний в такой системе определяются соотношением

$$kl_*=q\pi+(2m+1)\alpha \qquad (\sin\alpha=\sqrt{l_*/2\mathscr{R}_*}), \tag{103.15}$$

если расстояние между каустиками согласно формулам (100.21) и (103.08), равное

$$\Delta x=2\sqrt{(2m+1)\,l_*/k\sin 2\alpha}, \tag{103.16}$$

меньше ширины зеркал. В бочкообразном резонаторе роль l_* играет расстояние $2b_m$, проходимое лучом, лежащим в средней плоскости, между двумя отражениями, причем (см. рис. 134,*б*)

$$b_m=a\sin\theta, \quad a_m=m/k=a\cos\theta, \tag{103.17}$$

где θ — угол скольжения лучей ($\pi/2-\theta$ есть угол падения, равный углу отражения от поверхности $r=a$); $\cos\theta=m/\nu_{mn}$ для волн E_{mn}, $\cos\theta=m/\mu_{mn}$ для волн H_{mn}; для волн шепчущей галереи $\theta\ll 1$. Роль $\mathcal{R}_*$ играет величина $\mathcal{R}/\sin\theta$, поскольку при отражении от бочкообразной поверхности изменяется лишь радиальное направление луча, а азимутальное остается без изменений. Волновод со сферическими зеркалами (см. рис. 130,*г*) по этой причине эквивалентен резонатору с зеркалами двойной кривизны.

Учитывая эти обстоятельства, легко понять соотношение для собственных частот колебаний E_{mnq}:

$$ka=\nu_{mn}+\left(q+\frac{1}{2}\right)\alpha/\sin\theta\quad(n=1,2,\ldots;\ q=0,1,2,\ldots),\qquad(103.18)$$

$$\sin\alpha=\sqrt{a/\mathcal{R}}\sin\theta$$

и аналогичное для колебаний H_{mnq} (с заменой ν_{mn} на μ_{mn}; m — большое целое число). Соотношение (103.18) можно переписать в виде

$$2kb_m=\nu_{mn}\sin\theta+(2q+1)\alpha,\qquad(103.19)$$

откуда видно, что второе слагаемое в правой части (103.18) или (103.19) соответствует второму слагаемому в правой части (103.15), если учесть различие в обозначениях. Соотношения (103.18) и (103.19) применимы при условии, что расстояние между внешними каустиками

$$\Delta z=2\sqrt{(2q+1)\,2a\sin\theta/\sin 2\alpha}\qquad(103.20)$$

меньше высоты резонатора l. Для корней уравнений (103.13) имеются приближенные выражения

$$\nu_{mn}=m\left\{1+\frac{1}{2}\left[3\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)/m\right]^{2/3}\right\},$$

$$\mu_{mn}=m\left\{1+\frac{1}{2}\left[3\pi\left(n-\frac{3}{4}\right)/m\right]^{2/3}\right\},\qquad(103.21)$$

которые можно вывести из рис. 134,*б*, но мы не будем на этом останавливаться.

§ 104*. Открытые резонаторы с комплексными гауссовыми пучками

Частотным спектром, изображенным на рис. 131,*в*, обладают так называемые неустойчивые открытые резонаторы при пренебрежении дифракцией на краях зеркал. Резонаторы с вогнутыми зеркалами, рассмотренные в § 103, называются устойчивыми: параксиальный луч между такими зеркалами в результате последовательных отражений от зеркал не уходит далеко от оси, оставаясь в пределах области, ограниченной внешней каустикой. Если же взять выпуклые зеркала, то параксиальный луч в результате последовательных отражений неограниченно удаляется от оси. Такой резонатор называется неустойчивым (поскольку луч, совпадающий с его осью, находится в неустойчивом равновесии).

Собственные частоты открытого резонатора с одинаковыми выпуклыми зеркалами (рис. 137,*а*), как оказывается, можно вы-

числить по формуле (103.05), если учесть, что в данном случае $\mathcal{R}<0$ и величины a^2, $\operatorname{ctg}\bar{\sigma}$ и $\sin\bar{\sigma}$ получаются по формулам (103.02) и (103.03) чисто мнимыми, а $\cos\bar{\sigma}>1$. Полагая

$$a^2 = \mathrm{i}\,|a|^2,\ \bar{\sigma} = -\mathrm{i}|\bar{\sigma}|,\ \operatorname{sh}|\bar{\sigma}| = \sqrt{l/2|\mathcal{R}|}, \qquad (104.01)$$

получаем

$$kl = q\pi - \mathrm{i}\,2\,(m+2n+1)|\bar{\sigma}|. \qquad (104.02)$$

Это соотношение, равно как исходное соотношение (103.05), не учитывает дифракции на краях зеркал (зеркала предполагаются как бы бесконечными). Сильное затухание колебаний вызвано тем, что поле каждого колебания растекается в поперечных направлениях, т. е. лучи удаляются от оси. Это явление передается при $\sigma=0$ множителем $\exp(\mathrm{i}r^2/2|a|^2)$. Медленнее всех растекается простейшее колебание, у которого $m=n=0$, другие колебания растекаются быстрее и согласно соотношению (104.02) имеют большее затухание.

Если положить $a^2=-\mathrm{i}|a|^2$ и $\bar{\sigma}=\mathrm{i}|\bar{\sigma}|$, то получим решение, соответствующее стеканию поля к оси z со всех сторон и его нарастанию в каждой точке пространства. Это решение само по себе физического смысла не имеет, но при учете дифракции на краях зеркал должны, очевидно, образовываться отраженные волны такого типа, сходящиеся от периферии к оси z, благодаря чему затухание уменьшается, но все же остается значительным (точный расчет достаточно сложен).

Неустойчивый резонатор может быть образован не только выпуклыми зеркалами, но и вогнутыми зеркалами — при условии, что их фокусы F_1 и F_2 расположены так, как изображено на рис. 137,*б*: в этом случае вогнутые зеркала осуществляют слишком сильную фокусировку лучей, что также приводит к неустойчивости. На рис. 137,*б* фокусы F_1 и F_2 могут и совпадать — такой резонатор с софокусными зеркалами является неустойчивым, если радиусы кривизны зеркал различны. В § 103 был рассмотрен такой конфокальный резонатор, но с одинаковыми зеркалами, и было отмечено, что он неустойчив по отношению к самым слабым возмущениям. Оказывается, в частности, что при слегка различных кривизнах зеркал он уже пе-

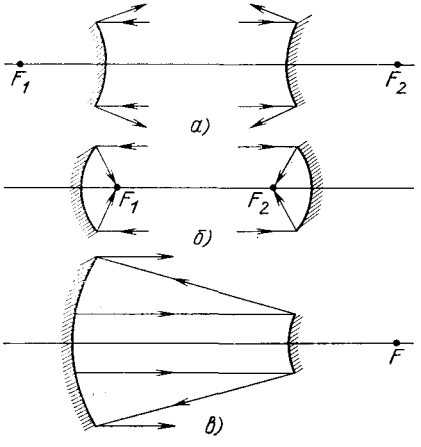


Рис. 137. Неустойчивые резонаторы:
а — с выпуклыми зеркалами; *б* — с вогнутыми зеркалами — перефокусировка; *в* — телескопический.
Для наглядности показано, как зеркала отражают параллельные лучи (F_1, F_2, F — фокусы)

рестает быть устойчивым резонатором и превращается в неустойчивый.

Неустойчивый резонатор может быть образован вогнутым и выпуклым зеркалом. Рисунок 137,*в* соответствует так называемому *телескопическому резонатору*, образованному двумя софокусными зеркалами — вогнутым и выпуклым. Пучок параллельных лучей, идущий слева направо, превращается выпуклым зеркалом в пучок лучей, расходящихся из мнимого фокуса F, которые при отражении от вогнутого зеркала превращаются опять в пучок параллельных лучей — более широкий, и поэтому лишь частично перехватываемый выпуклым зеркалом. Такой резонатор дает направленное излучение. Направленность обусловлена тем, что из всех колебаний самовозбуждается только колебание с индексами $m=n=0$, которое на выходе резонатора создает поле с плоским фазовым фронтом.

Следует отметить, что комплексные частоты резонаторов, изображенных на рис. 137,*б* и *в*, уже расположены (при пренебрежении диффракцией на крае) не на вертикальных прямых, а на прямых, образующих острый угол $\psi \sim 1$ с положительной вещественной осью. Так, в случае резонатора с перефокусировкой, т. е. при $\mathscr{R} < l/2$ (рис. 137,*б*), имеем

$$a^2 = \mathrm{i}|a|^2,\ \bar{\sigma} = \pi/2 - \mathrm{i}\,s,\ \mathrm{ch}\,s = \sqrt{l/2\mathscr{R}} \tag{104.03}$$

и

$$kl = (q + m + 2n + 1)\,\pi - \mathrm{i}\,2\,(m + 2n + 1)\,s. \tag{104.04}$$

При $\mathscr{R} = l/2$ возвращаемся к концентрическому резонатору, у которого $s=0$, но можно найти поправку к частоте, вызванную диффракцией на крае (в частности, затухание вследствие излучения, см. § 103).

Из предыдущего видно, что собственные колебания в неустойчивых резонаторах являются суперпозицией *комплексных* гауссовых пучков, а именно пучков с комплексным параметром a, т. е. с комплексной каустикой. Вопрос о практической применимости неустойчивых резонаторов на первый взгляд вызывает отрицательный ответ, поскольку резонансные кривые перекрываются и при обычном возбуждении (§ 101) резонансные свойства неустойчивого резонатора не проявляются. Тем не менее такой резонатор, заполненный активной средой или пронизываемый электронным пучком, способен к самовозбуждению. Генерация возникает на том колебании, у которого наименьшее затухание, с частотой, близкой к частоте этого колебания.

Предположим сначала, что зеркала расположены в однородной активной среде, у которой $\varepsilon'' = \mathrm{Im}\,\varepsilon < 0$ и $\mu = 1$. Тогда из леммы § 21 или формул (84.01) и (84.04) следует, что комплексная частота ω каждого колебания в данной системе связана с комп-

лексной частотой $\tilde{\omega}$ такого же колебания между зеркалами в пустоте соотношением

$$\omega = \tilde{\omega}/\sqrt{\varepsilon} = (\mathrm{Re}\,\tilde{\omega}/\sqrt{|\varepsilon|})\,(1 - i/2Q)\,e^{-i\delta/2}, \qquad (104.05)$$

так что

$$\mathrm{Im}\,\omega = -\frac{\mathrm{Re}\,\tilde{\omega}}{\sqrt{|\varepsilon|}}\left(\sin\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2Q}\right) \approx -\frac{\mathrm{Re}\,\tilde{\omega}}{2\sqrt{|\varepsilon|}}\left(\delta + \frac{1}{Q}\right) \text{ при } |\delta| \ll 1, \qquad (104.06)$$

где Q — добротность колебания в пустоте; δ — угол потерь (§ 9). Если $\delta < 0$, то активная среда уменьшает затухание, а если $\delta < -1/Q$, то затухание сменяется нарастанием во времени. Иначе говоря, точки, изображающие комплексные частоты на рис. 131, под влиянием активной среды как бы всплывают и, поднявшись над вещественной осью, обеспечивают мягкое самовозбуждение системы.

Аналогичные закономерности наблюдаются и тогда, когда активная среда заполняет лишь часть объема между зеркалами. Если в резонатор введен электронный пучок и обеспечено эффективное взаимодействие электронов с данным колебанием, то происходит то же самое. Во всех случаях, как это видно уже из рис. 131,*в*, неустойчивые открытые резонаторы обеспечивают наибольшую избирательность колебаний по радиационному затуханию. Но наибольшая избирательность достигается наиболее дорогой ценой: потери на излучение в процессе генерации велики. В телескопическом резонаторе (рис. 137,*в*) излучение используется, формируя выходной световой пучок.

Комплексные гауссовы пучки образуются также между зеркалами со сглаженным краем, а именно между зеркалами, коэффициент отражения от которых зависит от радиальной координаты r (расстояния от оси z) по закону Гаусса

$$R(r) = e^{-r^2/c^2}, \qquad (104.07)$$

где вещественный параметр c имеет смысл эффективного радиуса отражающих зеркал. Обычные зеркала с резким краем имеют $R = 1$ при $0 < r < \bar{a}$ и $R = 0$ при $r > \bar{a}$ и формируют обычные гауссовы пучки (при $\bar{a} > a_{mn}$, см. § 103); теперь же R есть плавно убывающая функция r, и поэтому гауссовы пучки получаются комплексными.

Нетрудно понять, почему выражение (104.07) для коэффициента отражения приводит к комплексным гауссовым пучкам, и вычислить параметры этих пучков. В § 103 и 104 рассмотрены зеркала, которые в параксиальном приближении задаются уравнениями $z = \mathrm{const} \mp \Delta(r)$, где $\Delta(r) = -r^2/2\mathcal{R}$ — прогиб зеркал, положительный для выпуклых зеркал ($\mathcal{R} < 0$) и отрицательный для вогнутых ($\mathcal{R} > 0$). Учитывая параксиальность волновых пучков в резонаторе, можно зеркала считать плоскими ($z = \mathrm{const}$), но коэффициент отражения от них задать в виде

$$R(r) = e^{2ik\Delta(r)}, \qquad (104.08)$$

поскольку, например, при $\mathcal{R}<0$ выпуклость зеркал приводит к тому, что луч дважды проходит дополнительный путь $\Delta(r)$, приобретая лишнюю фазу $2k\Delta(r)$. Если зеркала обладают как кривизной, так и коэффициентом отражения, распределенным по закону Гаусса, то эффективный коэффициент отражения приобретает вид

$$R_e(r)=e^{2ik\Delta(r)-r^2/c^2}=e^{-ikr^2/\mathcal{R}_e}, \tag{104.09}$$

где $\mathcal{R}_e$ — эффективный (комплексный) радиус кривизны,

$$1/\mathcal{R}_e=1/\mathcal{R}-i/kc^2,\ \mathcal{R}_e=\mathcal{R}/(1-i\mathcal{R}/kc^2). \tag{104.10}$$

Если к тому же радиус зеркал $\bar{a}\gg c$, то на краях зеркал практически $R=0$ и конечность зеркал не сказывается. Тогда применимы формулы (103.02) — (103.05) с заменой $\mathcal{R}$ на $\mathcal{R}_e$. В силу комплексности $\mathcal{R}_e$ гауссовы пучки получаются комплексными, собственные частоты учитывают неполное отражение от зеркал и потому комплексны.

Таким путем получаются следующие результаты.

1. Резонатор с плоскими зеркалами.

Полагая $\mathcal{R}=\infty$, получаем

$$\mathcal{R}_e=ikc^2,\ \sin\bar{\sigma}=e^{-i\pi/4}/\sqrt{f_c}, \tag{104.11}$$

где параметр $f_c=2kc^2/l$ естественно назвать числом Френеля для данного резонатора. Считая $f_c\gg1$ и $\bar{\sigma}\ll1$, получаем соотношение

$$kl=q\pi+(1-i)(m+2n+1)\sqrt{2/f_c}, \tag{104.12}$$

сравнение которого с соотношением (102.21) показывает, что при $f_c\sim f$ зеркала со сглаженными краями дают большее затухание. Это понятно: резкий край удерживает поле лучше.

2. Резонатор с концентрическими зеркалами.

При $\mathcal{R}=l/2$ имеем

$$\mathcal{R}_e=(l/2)/(1-il/2kc^2),\ \cos\bar{\sigma}=e^{i\pi/4}/\sqrt{f_c} \tag{104.13}$$

и при $f_c\gg1$

$$kl=(q+m+2n+1)\pi-(1+i)(m+2n+1)\sqrt{2/f_c}. \tag{104.14}$$

Сравнивая соотношения (104.12) и (104.14), видим, что затухание колебаний между плоскими и концентрическими зеркалами одинаково. Выше отмечалось (без доказательства), что в случае резких краев затухания также одно и то же.

3. Сопряженные устойчивые резонаторы.

Резонаторы называются сопряженными, если радиусы кривизны $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}_1$ их зеркал удовлетворяют соотношению

$$1/\mathcal{R}+1/\mathcal{R}_1=2/l, \tag{104.15}$$

а все остальные параметры одинаковы. Величины $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}_1$ для сопряженных резонаторов в силу формул (103.03) удовлетворяют соотношениям

$$\sin\bar{\sigma}=\sqrt{(l/2)(1/\mathcal{R}-i/kc^2)},\ \cos\bar{\sigma}_1=\sqrt{(l/2)(1/\mathcal{R}+i/kc^2)}=\sin\bar{\sigma}^*, \tag{104.16}$$

откуда видно, что

$$\bar{\sigma}_1=\pi/2-\bar{\sigma}^*,\ \mathrm{Re}\,\bar{\sigma}_1=\pi/2-\mathrm{Re}\,\bar{\sigma},\ \mathrm{Im}\,\bar{\sigma}_1=\mathrm{Im}\,\bar{\sigma}. \tag{104.17}$$

Резонатор с концентрическими зеркалами сопряжен резонатору с плоскими зеркалами, поэтому соотношения (104.12) и (104.14) согласуются с формулой (104.17). Затухание колебаний в сопряженных резонаторах одно и то же, а частоты несколько различаются, потому что поле занимает различные объемы. Конфокальный резонатор является самосопряженным, для него $\mathrm{Re}\,\bar{\sigma}=\pi/4$. Эти свойства распространяются на резонаторы с резким краем.

Если параметр $F=kc^2/\mathcal{R}$ велик, то

$$\bar{\sigma}=\arcsin\sqrt{l/2\mathcal{R}}-i/[F\sqrt{(2\mathcal{R}/l)-1}]. \qquad (104.18)$$

Неполное отражение приводит к малому затуханию и, как легко показать, к малому возмущению гауссовых пучков (при условии, что зеркала далеки от концентричности).

4. Неустойчивые резонаторы.

При больших значениях $|F|$ учет сглаженного края приводит к малому возмущению комплексных гауссовых пучков и комплексных частот, рассмотренных в начале параграфа. Учет резкого края ведет к более сложным закономерностям.

§ 105. Возбуждение открытых резонаторов и открытых волноводов

Как уже отмечалось в § 101 и далее, в открытых квазиоптических устройствах некоторые колебания и волны имеют малые потери на излучение, но в общем случае может оказаться так, что на возбуждение этих колебаний и волн идет лишь небольшая доля подводимой мощности, а остальная мощность пропадает впустую.

На первом этапе исследования открытых резонаторов было неясно, как с помощью сосредоточенного источника (диполя или же небольшого отверстия в зеркале, к которому присоединен волновод, переносящий мощность от генератора) можно возбудить колебание в открытом резонаторе. Казалось, что почти вся излучаемая мощность будет идти мимо зеркал (рис. 138), а небольшая доля мощности, попадающая на зеркала, после одного-двух отражений опять же будет рассеиваться в стороны, не возбуждая нужного колебания; по крайней мере, так получается из геометрооптических соображений.

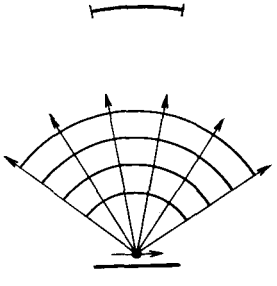


Рис. 138. Как возбуждается открытый резонатор?

В это время самовозбуждение колебаний в оптическом квантовом генераторе с открытым резонатором было уже общеизвестным опытным фактом. Однако в генераторе сами возбуждающие токи индуцируются колебанием резонатора и поэтому, в свою очередь, возбуждают только его (детально такой процесс самовозбуждения и его специфические особенности рассмотрены в § 104). Внешнее воз-

буждение с помощью сосредоточенного источника, очевидно, менее эффективно — но насколько?

Опыт не подтверждает опасений, вытекающих из геометрической оптики, и в согласии с волновой теорией показывает, что при сосредоточенном источнике на возбуждение добротного колебания тратится существенная часть мощности — как правило, больше половины. Как это объяснить?

Из теории возбуждения обычных металлических волноводов известно, что при частоте, лишь слегка превышающей критическую, диполь с заданным моментом отдает волноводной волне мощность существенно бо́льшую, чем в свободном пространстве или же в волноводе на более высоких частотах: это видно из формулы (77.07), согласно которой сопротивление излучения неограниченно возрастает при стремлении частоты к критической.

Почему это происходит? На частоте, немного превышающей критическую, волноводная волна является суперпозицией плоских волн (см. § 44 и 102), направления распространения которых составляют малый угол с осью резонатора. Волна, прежде чем отойти на заметное расстояние от диполя, многократно проходит мимо него, каждый раз выкачивая из него очередную порцию энергии. В результате оказывается, что при сосредоточенном возбуждении в многоволновом волноводе волна, критическая частота которой ближе всего к частоте генератора, возбуждается с аномально большой амплитудой. В открытых резонаторах получается подобный же результат, но в превосходной степени.

Действительно, резонатор с плоскими зеркалами можно трактовать как часть плоскопараллельного волновода, резонатор с вогнутыми зеркалами (при $\mathcal{R} \gg l$) и бочкообразный (при $\mathcal{R} \gg a$) — как часть неоднородного волновода; такой подход при достаточно больших радиусах кривизны дает результаты, правильные даже количественно. При возбуждении резонатора возникает с большой амплитудой волна, у которой критическая частота немного ниже частоты возбуждения, и, кроме того, эта волна отражается от краев или от каустики (которая соответствует критическому сечению неоднородного волновода) и опять, причем многократно, возвращается к источнику, отбирая у него энергию. Таким образом, резонансное колебание забирает у источника мощность, которая во много раз больше той, которую можно ожидать из геометрической оптики. Мощность, рассеянная в стороны, лучевыми соображениями передается более удовлетворительно — она того же порядка, что и мощность, излучаемая данным источником (например, диполем с тем же моментом) в свободное пространство.

Теория возбуждения открытых систем позволяет рассчитать полезную мощность, сообщаемую данному колебанию или данной волне с малыми потерями, но мощность, рассеиваемая в стороны, доступна только грубой оценке. Кроме того, математический аппарат теории достаточно сложен, а получаемые с его помощью результаты довольно очевидны с физической точки зрения. Поэтому ограничимся общими соображениями и расчетными формулами.

В предыдущих параграфах были рассмотрены решения однородных уравнений Максвелла (без источников поля), а именно собственные колебания в открытом резонаторе и собственные волны в бесконечном открытом волноводе. Собственными электромагнитными колебаниями, как обычно, называются колебания, у которых поля зависят от времени по закону $e^{-i\omega_s t}$, т. е.

$$\mathbf{E}_s(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_s(x, y, z)\, e^{-i\omega_s t}\},$$
$$\mathbf{H}_s(x, y, z, t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{H}_s(x, y, z)\, e^{-i\omega_s t}\}, \qquad (105.01)$$

где $\omega_s = \omega'_s - i\omega''_s$ — комплексная частота колебания с индексом s. Собственные векторные функции $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_s(x, y, z)$ и $\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_s(x, y, z)$ удовлетворяют комплексным уравнениям Максвелла (однородным), граничным условиям на поверхностях раздела и условию излучения на бесконечности (§ 10; предполагается, что открытый резонатор находится в пустоте). С условием на бесконечности имеется, однако, определенная трудность: условие излучения требует, чтобы $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ при $R \to \infty$ были пропорциональны $e^{ik_s R}/R$, где $k_s = \omega_s/c$, а вследствие неравенства $\omega''_s > 0$ (колебание затухает во времени) поле будет возрастать при $R \to \infty$ экспоненциально. Физически в этом ничего страшного нет: рассматриваемое поле зависит от t по закону $e^{-i\omega_s t}$ и поэтому затухает при $t \to \infty$ и возрастает при $t \to -\infty$. Поле, находящееся, скажем, в момент $t = 0$ при больших значениях R, было испущено резонатором при больших отрицательных t, когда колебание в самом резонаторе было гораздо сильнее, чем при $t = 0$.

Конечно, собственные колебания в резонаторе являются некоторой идеализацией полей, которые возбуждаются в реальной открытой системе. Такие колебания в чистом виде никогда не встречаются. На практике обычно реализуется режим вынужденных колебаний. Поэтому очень важно знать не только свойства тех свободных колебаний, которые могут существовать в системе, но и какое электромагнитное поле возникает в данной системе под воздействием источника поля — излучающей антенны, электронного пучка и т. д., какие возникают собственные колебания и с какими амплитудами, как создать оптимальную конструкцию системы возбуждения, которая давала бы в достаточно чистом виде какое-то одно собственное колебание и вносила бы минимальные потери на возбуждение других колебаний. Такой же важной является и обратная задача — отбор энергии из системы. Согласно принципу взаимности оптимальная система возбуждения будет эффективно работать и в режиме вывода энергии.

Источники поля зададим в виде сторонних электрических и магнитных токов с плотностями $\mathbf{j}^e$ и $\mathbf{j}^m$. Возникающее под действием сторонних электрических ($\mathbf{j}^e$) и магнитных ($\mathbf{j}^m$) токов поле должно удовлетворять неоднородным уравнениям Максвелла

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = i k\mu\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^m, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = -i k\varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^e, \qquad (105.02)$$

а также, как и свободные колебания, граничным условиям на поверхностях раздела сред и условиям излучения на бесконечности. Здесь частота ω и волновое число $k=\omega/c$ заданы, комплексные проницаемости ε и μ в каждой точке пространства те же, что и в однородных уравнениях; предполагается, что $\varepsilon=\mu=1$ на достаточно больших расстояниях от резонатора, скажем, при $R>R_0$ (R — расстояние от начала координат).

Теория возбуждения открытых резонаторов во многом аналогична теории возбуждения обычных (закрытых) объемных резонаторов, для которых теория строится в предположении, что поле занимает конечный объем и поэтому разлагается в ряд по собственным колебаниям этого объема (собственные колебания образуют дискретный спектр; см. § 88). Формальное применение разложений искомого поля в режиме вынужденных колебаний в ряд по дискретной системе собственных колебаний, изученных выше, приводит, однако, к неправильным результатам. Дело в том, что для открытых резонаторов существенно излучение на бесконечность, поле занимает бесконечную область и поэтому разлагается в интеграл по собственным функциям непрерывного спектра (так осуществляется переход от ряда Фурье к интегралу Фурье при неограниченном растяжении интервала). Это — не собственные колебания (105.01), затухающие из-за излучения; последние, чтобы избежать смешения терминов, часто называют квазисобственными колебаниями, а $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$ — квазисобственными векторными функциями. Невозможность разложения обусловлена тем, что квазисобственные функции не образуют полной системы. Поэтому в теории возбуждения сначала строят собственные функции непрерывного спектра для бесконечной области, а искомое поле находится в виде интегрального разложения по этим функциям. Затем интеграл преобразуется так, чтобы учесть наличие добротных квазисобственных колебаний. Опуская выкладки, приведем ниже лишь окончательные соотношения.

Если среди колебаний (105.01) в используемом частотном диапазоне имеются достаточно добротные колебания (с достаточно малым коэффициентом затухания ω''_s), то выражения для комплексных амплитуд полей можно преобразовать к виду

$$\mathbf{E}=\sum C_s\,\mathbf{E}_s+\hat{\mathbf{E}},\quad \mathbf{H}=\sum C_s\,\mathbf{H}_s+\hat{\mathbf{H}}, \tag{105.03}$$

где сумма распространена на указанные резонансные колебания, а слагаемые $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ дают нерезонансный фон. Для коэффициентов C_s получается выражение

$$C_s=-\frac{\mathrm{i}}{2(\omega-\omega_s)N_s}\int(\mathrm{j}^e\mathbf{E}_s-\mathrm{j}^m\mathbf{H}_s)\,dV, \tag{105.04}$$

формально совпадающие с первым выражением (89.23) для закрытых резонаторов.

Через N_s в правой части (105.04) обозначена норма колебания (105.01), представляющая собой интеграл по всему бесконечно-

му пространству. На первый взгляд кажется, что $N_s=\infty$, так как поле неограниченно возрастает при $R\to\infty$, в то время как в обычных резонаторах норма N_s конечна, так как поле занимает конечный объем. Детальный анализ показывает, однако, что норма N_s всегда конечна и что те участки пространства, где колебание имеет характер волны, уходящей в бесконечность, в значение нормы вклада практически не дают. Норма N_s определяется полем между зеркалами, в диэлектрике и т. д.; это разъяснено на частном примере в конце § 91.

Уже отмечалось, что выражения (105.03) и (105.04) в равной степени применимы к закрытым резонаторам, у которых нерезонансный фон является почти чисто реактивным — не потребляет мощности. В открытых резонаторах поля $\hat{\mathbf{E}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ часто уносят заметную долю подводимой мощности, особенно при сосредоточенном возбуждении.

Резонансные слагаемые в формулах (105.03) для поля не всегда являются определяющими. Если, например, вычисляется поле на больших расстояниях от зеркал, где поле собственных колебаний имеет вид расходящейся волны, экспоненциально нарастающей при увеличении R, то здесь, вообще говоря, резонансные свойства системы пропадают. То же происходит (это видно хотя бы из принципа взаимности), когда источники, возбуждающие поле, находятся вдали от открытого резонатора. Например, при возбуждении открытого резонатора падающей плоской волной его свойства могут быть совсем иными, чем при возбуждении его источником, расположенным между зеркалами, и наблюдении поля там же, когда представление поля с помощью формул (105.03) и (105.04) работает в полную силу.

Теория возбуждения открытых волноводов может быть развита аналогичным образом: она имеет много общего с теорией возбуждения закрытых волноводов — однородных и периодических (§ 76). В теории возбуждения фигурирует норма каждой волны, определенная в виде интеграла по поперечному сечению. В открытых волноводах этот интеграл берется по всей плоскости $z=\text{const}$, причем поле быстрых волн возрастает при удалении от волновода (см. § 61, 62 и 77). Возникающая трудность здесь является, как и в теории возбуждения открытых резонаторов, кажущейся: на самом деле часть пространства, где поле имеет характер уходящей от волновода волны, вклада в норму не дает.

Сосредоточенное возбуждение открытого волновода — линзового или зеркального—вследствие отсутствия резонанса гораздо менее эффективно, чем такое же возбуждение открытого резонатора. Поэтому для возбуждения волны в открытом волноводе нужно вводить в него волновой пучок, близкий по структуре поля к соответствующей волне, прибегая к специальным устройствам, формирующим такой волновой пучок. Это, как правило, рупоры, линзы, зеркала и их комбинации, в частности для фор-

мирования пучка можно использовать открытый резонатор со слегка прозрачным зеркалом.

В конце § 100 отмечено, что гауссовы волновые пучки представляют большой интерес для антенной техники: подбирая надлежащий гауссов пучок, получаем излучение с игольчатой или веерной диаграммой направленности, диаграмму с провалом посередине и т. п. Существенно, что такие пучки легко формируются открытыми резонаторами и передаются открытыми волноводами.

Задачи к гл. XVII

1. Доказать, что функция (99.06) удовлетворяет параболическому уравнению (99.02). Доказать справедливость формулы (99.08), предполагая, что $W(x, 0) \neq 0$ только при $x_1 < x < x_2$.

Р е ш е н и е. Дифференцируя функцию G, получаем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{ik(x-x')}{z} G, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \left[\frac{ik}{z} - \frac{k^2(x-x')^2}{z^2}\right] G = -2ik\frac{\partial G}{\partial z},$$

так что уравнение (99.02) удовлетворяется. С помощью замены переменных

$$t = \sqrt{k/z}\,(x' - x), \quad t_1 = \sqrt{k/z}\,(x_1 - x) < 0, \quad t_2 = \sqrt{k/z}\,(x_2 - x) > 0$$

интеграл (99.08) преобразуется к виду

$$W(x, z) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{it^2/2} W(x + t\sqrt{z/k}, 0)\, dt,$$

откуда видно, что функция $W(x, z)$ при $z \to 0$ действительно переходит в заданную функцию $W(x, 0)$, поскольку

$$t_1 \to -\infty, \quad t_2 \to \infty \quad \text{и} \quad \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2/2}\, dt = 1.$$

Этот переход оправдывает предельное соотношение (99.07).

2. Оценить применимость решения (99.10). Сравнить это решение со строгим решением, полученным в § 79, в области тени.

Р е ш е н и е. Дифференцируя $F(\tau)$, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -F'(\tau)\frac{\sqrt{k}\,x}{2z^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = F'(\tau)\frac{\sqrt{k}\,x}{4z^{3/2}}\left(i\frac{kx^2}{z^2} + \frac{3}{z}\right).$$

Для того чтобы выполнилось первое условие (99.03), должно быть

$$|(x/z)^2 - 3i/kz| \ll 4.$$

Таким образом, это условие выполняется тогда, когда, во-первых, $kz \gg 1$, т. е. при больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от начальной плоскости $z = 0$, и, во-вторых, когда $x/z \ll 1$, т. е. при малых углах дифракции. Угол дифракции δ определяется как $\operatorname{tg}\delta = x/z$ — это угол между прямой, соединяющей край экрана с точкой наблюдения, и направлением падающей волны.

В области тени согласно формулам (79.19) и (79.25) имеем

$$u(r, \varphi-\varphi_0) = v(r, \varphi-\varphi_0) = \frac{\nu \sin \nu\pi \sin(\delta/2)}{\sin \nu(\pi+\delta/2) \sin(\nu\delta/2)} \times$$
$$\times F\left(-2\sqrt{kr}\sin\frac{\delta}{2}\right) e^{ikz}, \qquad (a)$$

где F — интеграл Френеля (99.11) и введены обозначения

$$\varphi = \varphi_0 + \pi + \delta, \quad z = -r\cos(\varphi-\varphi_0),$$

причем δ — угол диффракции (положительный в области тени), а ось z совпадает с направлением падающей волны (79.16). Выражение (a) следует сравнить с выражением

$$W(x, z)\, e^{ikz} = F(\tau)\, e^{ikz}, \quad \tau = \sqrt{k/z}\, x = \sqrt{kz}\, x/z, \qquad (b)$$

в котором области тени соответствуют отрицательные значения x. При малых углах диффракции ($\delta \approx x/z \ll 1$) выражения (a) и (b) совпадают, в частности множитель перед F в правой части (a), учитывающий граничные условия при $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha=\pi/\nu$, обращается в единицу. При конечных углах диффракции выражения (a) и (b) дают разные результаты, но это — глубокая тень, в которой интеграл Френеля мал, поскольку его аргумент велик и отрицателен (при написании (a) и (b) предполагается, что $kr \gg 1$ и $kz \gg 1$). Кроме того, в строгом решении (79.13) имеется еще слагаемое $\mp u(r, \varphi+\varphi_0)$, но оно в тени тоже мало. Таким образом, сравнение со строгим решением подтверждает важность условий $kr \gg 1$ и $\delta \ll 1$ для параболического уравнения.

3. Показать, что выражение (100.05) удовлетворяет уравнению (99.02), а выражение (100.14) — уравнению (100.11), для чего в этих уравнениях перейти к переменным (100.04) и (100.13). Воспользоваться уравнениями (100.06) и (100.16) для полиномов H_m и $K_n^{(m)}$.

Р е ш е н и е. Уравнение (99.02) для функции $W(x, z)$ в переменных ξ и $\sigma = \sigma_a$ принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{i}{2\cos^2\sigma} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}. \qquad (a)$$

Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \sqrt{\cos\sigma}\left\{-\xi \sin\sigma H' + \left[-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\sigma - \right.\right.$$
$$\left.\left. - i\left(m+\frac{1}{2}\right) + i\frac{\xi^2}{2} e^{-2i\sigma}\right] H\right\} e,$$

и в таком же виде получается правая часть (a); аргументы полиномов $H = H_m$ и H' и экспоненты не выписаны.

Уравнение

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{i}{2\cos^2\sigma}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} W\right) \qquad (b)$$

эквивалентно уравнению (100.11). Оно удовлетворяется, поскольку

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \cos\sigma\left\{-\rho \sin\sigma K' + \left[-\operatorname{tg}\sigma - i(m+2n+1) + i\frac{\rho^2}{2} e^{-2i\sigma}\right] K\right\} e,$$

а правая часть (b) с учетом уравнения (100.16) получается такой же.

4. Установить связь между функциями W_{10}, W_{01} и $W_1^{(0)}$, а также между W_{11}, W_{20}, W_{02} и $W_0^{(2)}$, $W_1^{(0)}$ при $a=b$.

Решение. Функции W_{mn} и $W^{(m)}{}_n$, указанные выше, имеют одинаковые экспоненты и отличаются только полиномиальными множителями. Учитывая выражения (100.07) и (100.17), имеем

$$H_1(t\cos\varphi)=2t\cos\varphi=2K_0^{(1)}(t)\cos\varphi,\quad H_1(t\sin\varphi)=2K_0^{(1)}(t)\sin\varphi,$$

$$H_1(t\cos\varphi)\,H_1(t\sin\varphi)=2t^2\sin 2\varphi=2K_0^{(2)}(t)\sin 2\varphi,$$

$$H_2(t\cos\varphi)-H_2(t\sin\varphi)=4t^2\cos 2\varphi=4K_0^{(2)}(t)\cos 2\varphi,$$

$$H_2(t\cos\varphi)+H_2(t\sin\varphi)=4(t^2-1)=4K_1^{(0)}(t).$$

Эти тождества показывают, что пучки Гаусса — Эрмита с индексами 10, 01 и 11 совпадают с пучками Гаусса — Лагерра (с точностью до постоянного множителя), а сумма и разность пучков Гаусса — Эрмита с индексами 20 и 02 дают два других пучка Гаусса — Лагерра.

5. Показать, что при учете потерь в зеркалах формула (101.04) заменяется формулой (101.06). Найти добротность, обусловленную конечной проводимостью зеркал, и сравнить с выражением (86.03).

Решение. Поскольку волновой пучок параксиален, а параметр ζ для зеркал мал, в уравнение (101.05) надо подставить коэффициент отражения

$$R=(1-\zeta)/(1+\zeta)\approx e^{-2\zeta}$$

для нормального падения в соответствии с формулой (25.06). Тогда получается соотношение $hl=q\pi-i2\zeta$ и формула (101.06), из которой следует выражение $Q=kl/4\mathrm{Re}\zeta$ для омической добротности. С учетом соотношения $2\mathrm{Re}\zeta=kd$ (d — толщина скин-слоя, см. § 25 и 86) $Q=l/2d$. Для стоячей плоской волны между плоскими зеркалами по формуле (85.09) получаем $D=l/4$, а по формуле (86.03) $Q=l/2d$, т. е. то же самое.

6. Вывести соотношение (102.06) и разложение (102.07)

Решение. Образуем

$$F_0(\tau+s)-F_0(\tau)=-\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_\tau^{\tau+s}e^{it^2/2}\,dt=-\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^s e^{i(\tau+u)^2/2}\,du.$$

Заменяя $\exp(iu^2/2)$ единицей (что при $|s|\ll 1$ естественно), приходим к соотношению (102.06), которое при $s\tau$ принимает простую форму

$$F_0(\tau+s)=F_0(\tau)+F_0'(\tau)s.$$

Разложение (102.07) получается интегрированием по частям:

$$\int_\tau^\infty e^{it^2/2}dt=i\frac{e^{i\tau^2/2}}{\tau}+i\int_\tau^\infty\frac{e^{it^2/2}}{t^2}\,dt=ie^{i\tau^2/2}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{i}{\tau^3}+\ldots\right).$$

Ее можно получить также из формул (79.20) и (79.21), разлагая $(1+it^2/s^2)^{-1}$ по обратным степеням s^2.

7. Рассчитать двухмерный резонатор с плоскопараллельными зеркалами, базируясь на формулах (102.01) и (102.22). Использовать условие (101.05).

Решение. Применяя условие (101.05) к распространению волноводной волны на отрезке $-a/2<x<a/2$ с волновым числом $k\alpha$, получим соотношение

$$\mathrm{Re}\,e^{ik\alpha a}=\pm 1\quad\text{или}\quad e^{i(k\alpha a+\gamma s)}=\mp 1,$$

откуда в силу формулы (102.02) следуют выражения (102.12) и все остальные.

8. Иногда разрежение спектра в открытых резонаторах со сферическими зеркалами (§ 104) обеспечивается отверстием радиуса a^0 в поглощающем (черном) экране, лежащем в плоскости симметрии резонатора, а не конечными размерами зеркал. В такой системе малыми потерями обладают колебания, у которых $a^0{}_{mn} < a^0$, где $a^0{}_{mn}$ — радиус внешней каустики в плоскости симметрии ($\sigma = 0$). Вычислить $a^0{}_{mn}$; отдельно рассмотреть конфокальные и концентрические зеркала.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (100.22), (103.02) и (103.04)

$$a^0_{mn} = t^+_{mn}\, a = t^+_{mn} \sqrt[4]{(l/2k^2)\,(\mathcal{R} - l/2)},\quad a^0_{mn}/a_{mn} = \cos\bar{\sigma} = \sqrt{1 - l/2\mathcal{R}}.$$

Для конфокальных зеркал $a^0{}_{mn}/a_{mn} = 1/\sqrt{2}$, для концентрических $a^0{}_{mn}/a_{mn} = 0$, однако в последнем случае каустика не образуется и колебание удерживается краями зеркал.

Приложение. Переход от абсолютной системы единиц к единицам СИ

В единицах СИ уравнения Максвелла записываются в виде

$$\text{(II)}\quad \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{dt} = 0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \qquad \text{(I)}$$

$$\text{(IIa)}\quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \left\{ \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \right. \qquad \text{(Ia)}$$

не содержащем коэффициентов 4π и $1/c$. Выражение для вектора Умова — Пойнтинга $\mathfrak{S} = [\mathbf{EH}]$ также не содержит коэффициентов, а плотность электромагнитной энергии в случае простейших материальных уравнений (1.06) принимает вид

$$w = \frac{1}{2}\,\mathbf{DE} + \frac{1}{2}\,\mathbf{HB}.$$

Такая формулировка основных законов электромагнитного поля приводит к тому, что четыре вектора **E**, **D**, **H** и **B**, определяющие поле в данной точке, имеют разные размерности. В пустоте эти четыре вектора связаны попарно соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E},\quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H},$$

где коэффициенты ε_0 и μ_0 играют роль диэлектрической и магнитной проницаемостей, характеризующих электромагнитные свойства пустоты. Эти коэффициенты, лишенные смысловой нагрузки (подобно ятю и твердому знаку в старой русской орфографии), входят во все соотношения для полей, с чем трудно примириться.

В приведенной табл. 3 показано, как абсолютные единицы основных физических величин выражаются через единицы СИ.

Таблица 3

Физическая величина	Название единицы в абсолютной системе	1 абсолютная единица равна	Полное название единицы СИ
Ток	—	$3{,}335 \cdot 10^{-10}$ А	ампер
Заряд	—	$3{,}335 \cdot 10^{-10}$ Кл	кулон
Напряжение	—	299,8 В	вольт
E	—	$2{,}998 \cdot 10^{4}$ В/м	вольт на метр
D	—	$3{,}335 \cdot 10^{-6}$ Кл/м^2	кулон на квадратный метр
B	гаусс	10^{-4} Т	тесла
H	эрстед	79,58 А/м	ампер на метр
Электрическое сопротивление	—	$0{,}8988 \cdot 10^{12}$ Ом	ом
Электрическая проводимость	—	$1{,}1126 \cdot 10^{-12}$ См	сименс
Электрическая емкость	см	$1{,}1126 \cdot 10^{-12}$ Ф	фарад
Магнитный поток	максвелл	10^{-8} Вб	вебер
Магнитодвижущая сила	гильберт	0,7958 А	ампер
Индуктивность	—	10^{-9} Гн	генри
Удельная электрическая проводимость	($с^{-1}$)	$1{,}1126 \cdot 10^{-10}$ См/м	сименс на метр

Список литературы

К главам I—II

Сивухин Д. В. Общий курс физики, т. 3. Электричество. — М.: Наука, 1983. — 687 с.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 620 с.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 620 с.

Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. — 684 с.

Фельд Я. Н. О теореме единственности решений уравнений Максвелла для вынужденных гармонических колебаний//ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8, № 6. — С. 754—758.

К главе III

Левин М. Л. О геометрическом смысле условий существования поперечно электрических и поперечно-магнитных полей в криволинейных координатных системах//Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 79, № 4. — С. 589—590.

Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций: Пер. с англ. В. С. Бермана. Ч. I и II. — М.: ИЛ, 1949 (к § 22, а также к § 27, 42, 44, 52, 55, 57, 58, 63, 64, 67, 70, 78, 79, 82, 87, 97). — 798, 220 с.

К главе IV

Леонтович М. А. Избранные труды. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1985 (к § 25, а также к § 36, 94, 99).

Фок В. А. Законы отражения Френеля и законы диффракции//Успехи физ. наук. — 1948. — Т. 36, № 3. — С. 308—328 (к § 25).

Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 546 с.

К главам V—VI

Леонтович М. А., Левин М. Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн//ЖТФ. — 1944. — Т. 14, № 9. — С. 481—506.

Hallén E. Electromagnetic Theory. — London: Chapman & Hall, 1962 (p. 444—504). — 622 с.

Вайнштейн Л. А. Волны тока в тонком цилиндрическом проводнике//ЖТФ. — 1959. — Т. 29, № 6. — С. 673—699; ЖТФ. — 1961. — Т. 31, № 1. — С. 29—50.

Шамеева Н. И. Электродинамический расчет симметричного вибратора, возбуждаемого в разрез двухпроводной линией//Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 201, № 2. — С. 328—330.

Вайнштейн Л. А., Фиалковский А. Т. Волны в щелевом и полосковом волноводах: вариационный метод и простейшие результаты//Радиотехника и электроника. — 1976. — Т. 21, № 6. — С. 1137—1148.

Вайнштейн Л. А., Лесик Н. И., Кондратьев Б. В. Квазистатическая теория основной волны в щелевой линии//Радиотехника и электроника. — 1977. — Т. 22, № 9. — С. 1820—1828.

К главам VII—X

Самарский А. А., Тихонов А. Н. О представлении полей в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ//ЖТФ — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959—970 (к § 40).

Вайнштейн Л. А. О возбуждении волны E_0 в круглом волноводе с помощью коаксиальной линии//Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 59, № 8. — С. 1421—1424 (к § 44).

Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Полосковые линии передачи. — М.: Наука, 1980. — 312 с.

Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. — М.: Наука, 1983 (гл. 8 — к гл. VIII). — 288 с.

Вакман Д. Е. Эволюция параметров при распространении с дисперсией и затуханием//Радиотехника и электроника. — 1986. — Т. 31, № 3. — С. 531—536 (к гл. VIII).

Каценеленбаум Б. З. Волноводы с неидеальными стенками//Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 88, № 1. — С. 37—40 (к § 53).

Справочник по волноводам: Пер. с англ./Под ред. Я. Н. Фельда. — М.: Сов. радио, 1952. — 432 с.

Антенны сантиметровых волн: Пер. с англ./Под ред. Я. Н. Фельда. — М.: Сов. радио, 1950 (также к гл. XVII), т. I, 320 с., т. II, 258 с.

Вайнштейн Л. А. Метод приближенного разделения переменных и его применение к задачам электродинамики и акустики//ЖТФ. — 1957. — Т. 27. № 9. — С. 2109—2128 (к § 56).

К главе XI

Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики: Пер. с немец./Под ред. Л. Э. Гуревича. — М., Л.: ОНТИ, 1937 (к гл. XXII, к § 59, 60 и 63). — 1000 с.

Каценеленбаум Б. З. О распространении электромагнитных волн вдоль бесконечных диэлектрических цилиндров при низких частотах//Докл. АН СССР. — 1947. — Т. 63, № 7. — С. 1317—1320.

Симметричное возбуждение бесконечного диэлектрического цилиндра//ЖТФ. — 1949. — Т. 19, № 10. — С. 1168—1181. Несимметричные колебания бесконечного диэлектрического цилиндра//ЖТФ. — 1949. — Т. 19, № 10. — С. 1182—1191 (к § 63).

Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974. — 576 с.

Унгер Х. Г. Планарные и волоконные оптические световоды. — М.: Мир, 1980. — 656 с.

Мелехин В. Н., Маненков А. Б. Диэлектрические трубы — открытые волноводы с малыми потерями и редким спектром. В сб. 6 «Электроника больших мощностей». — М.: Наука, 1969 (с. 161—178).

Мелехин В. Н., Маненков А. Б. Расчет квазиодномодовых оптических волокон с селективно отражающим многослойным покрытием//Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24, № 7. — С. 1282—1290 (к § 64).
Белянцев А. М., Гапонов А. В. О волнах с комплексными постоянными распространения в связанных линиях передачи без диссипации энергии//Радиотехника и электроника. — 1964. — Т. 9, № 7. — С. 1188—1197 (к § 62).
Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — М.: Наука, 1969 (к § 62). Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами//Радиотехника и электроника. — 1969. — Т. 14, № 10. — С. 1768—1772.
Шевченко В. В. О поведении волновых чисел диэлектрических волноводов за критическим значением (среды с потерями)//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. — 1972. — Т. 15, № 2. — С. 257—265.

К главе XII

Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. — М.: Сов. радио, 1966 (к § 66, а также к § 68 и 98). — 432 с.
Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. — М.: Сов. радио, 1966. — 632 с.
Миллер М. А., Таланов В. И. Использование понятия поверхностного импеданса в теории поверхностных электромагнитных волн (обзор)//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. — 1961. — Т. 4, № 5. — С. 795—830.

К главе XIII

Вайнштейн Л. А. К электродинамической теории решеток. В сб. 2 «Электроника больших мощностей». — М.: Наука, 1963 (с. 26—74, к § 68).
Коган С. Х. Распространение волн вдоль бесконечной спирали//Докл. АН СССР. — 1949. — Т. 66, № 5. — С. 867—870.
Коган С. Х. Возбуждение спиральной линии//Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 74, № 3. — С. 489—492.
Смирнов Н. Н. Распространение волн вдоль бесконечно длинной спирали//Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, № 2. — С. 243—246.
Смирнов Н. Н. Дисперсионные свойства многозаходных спиралей//Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 110, № 2. — С. 212—215.

К главе XIV

Вайнштейн Л. А. Электронные волны в периодических структурах//ЖТФ. — 1957. — Т. 27, № 10. — С. 2340—2352 (к § 77).
Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962 (к § 79, а также к § 98). — 244 с.

К главам XV—XVI

Штейншлейгер В. Б. Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах. — М.: Оборонгиз, 1955 — 116 с.
Van Bladel J. О резонансах в диэлектрических резонаторах с весьма высокой восприимчивостью//IEEE Trans., 1975. — V. MTT-23, № 2. — P. 199—208.
Van Bladel J. Возбуждение диэлектрических резонаторов с весьма высокой восприимчивостью. — Ibid. — P. 208—215 (к § 87).
Косарев Е. Л., Ципенюк Ю. М. Вынужденные колебания открытого резонатора, связанного с волноводом малым отверстием. В сб. 5 «Электроника больших мощностей». — М.: Наука, 1968 (с. 105—116, к § 90, а также к § 105).

К главе XVII

Фельд Я. Н. Основы теории щелевых антенн. — М.: Сов. радио, 1948 (к § 94). — 158 с.
Белкина М. Г. Диффракция электромагнитных волн на диске. — В кн.: Диффракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения. — М.: Сов. радио, 1957 (к § 98) — С. 148—174.

Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции. — М.: Связь, 1978 (к § 98). — 248 с.
Кинбер Б. Е. Физическая теория зеркальных антенн. — Препринт. М., 1984 (ИРЭ АН СССР. № 35 (407)). — 54 с.
Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970 (к § 99). — 518 с.
Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966. — 476 с.
Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и проблемы расходимости лазерного излучения. — М.: Наука, 1979. — 328 с.
Маненков А. Б. Возбуждение открытых однородных волноводов//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. — 1970. — Т. 13, № 5. — С. 739—748. Возбуждение открытых периодических волноводов. — Ibid, 1976 г. — Т. 19, № 2. — С. 263—270.

К приложению

Обозначения, единицы измерения и терминология в физике (Документ U.I.P 20; 1978)//Успехи физ. наук. — 1979. — Т. 129, № 2. — С. 290—335.

Оглавление

Предисловие 3
Из предисловия к первому изданию 4

Глава I. Общие положения теории электромагнитного поля 6

§ 1. Основные законы электродинамики 6
§ 2. Уравнения электромагнитного поля в комплексной форме . . 10
§ 3. Сторонние токи 15
§ 4. Граничные условия 17
§ 5. Леммы о смысле квадратов и произведений комплексных амплитуд 18
§ 6. Теорема о комплексной мощности 22
§ 7. Теорема о колеблющейся мощности 26
§ 8. Энергия электромагнитного поля 28
§ 9. Энергетический смысл комплексных проницаемостей 32
§ 10. Теоремы единственности. Условия излучения 35
Задачи к гл. I 38

Глава II. Плоские волны 41

§ 11. Плоские волны в однородной изотропной среде 41
§ 12. Распространение электромагнитных волн в различных средах 45
§ 13. Нормальное падение волны на плоскую границу раздела . . 48
§ 14. Волновые уравнения. Обобщенные плоские волны 50
§ 15. Отражение плоской волны от плоской границы раздела . . 54
§ 16. Структура электромагнитного поля прошедшей волны . . . 59
Задачи к гл. II 62

Глава III. Потенциалы электромагнитного поля. Цилиндрические и сферические волны 63

§ 17. Векторные потенциалы 63
§ 18. Векторы Герца 65
§ 19. Криволинейные ортогональные координаты 68
§ 20. Поля и потенциалы в криволинейных ортогональных координатах 70
§ 21. Лемма о пропорциональном изменении проницаемостей ε и μ во всем пространстве 75
§ 22. Цилиндрические волны 78
§ 23. Сферические волны 81
Задачи к гл. III 83

Глава IV. Теория скин-эффекта 84

§ 24. Понятие идеального проводника и граничные условия на его поверхности 84

§ 25. Сильный скин-эффект. Граничные условия Леонтовича . . . 87
§ 26. Сопротивление проводников при сильном скин-эффекте . . . 90
§ 27. Скин-эффект в цилиндрическом проводе 95
Задачи к гл. IV 99
Глава V. Электродинамическая теория длинных линий 100
§ 28. Классификация линий передачи 100
§ 29. Электромагнитные волны в идеально проводящих линиях . . 103
Задачи к гл. V 108
Глава VI. Телеграфные уравнения 109
§ 30. Основные свойства телеграфных уравнений 109
§ 31. Электродинамический вывод телеграфных уравнений . . . 111
§ 32. Расчет параметров длинных линий 116
§ 33. Энергетический смысл параметров длинных линий 120
§ 34. Зависимость свойств длинных линий от частоты 122
§ 35. Пределы применимости телеграфных уравнений 125
§ 36. Однопроводная линия. Понятие об электродинамической теории вибраторов 127
§ 37. Полосковые и щелевые линии 130
Задачи к гл. VI 133
Глава VII. Волноводы 135
§ 38. Основные свойства электромагнитных волн в волноводах . . 135
§ 39. Электрические волны в волноводах 136
§ 40. Магнитные волны в волноводах 140
§ 41. Система волн в прямоугольном волноводе 142
§ 42. Система волн в круглом волноводе 149
§ 43. О волноводах сложной формы 153
§ 44. Распространяющиеся и затухающие волны в волноводах . . 155
§ 45. Волноводные свойства коаксиальных и полосковых линий . . 161
Задачи к гл. VII 165
Глава VIII. Скорость распространения 168
§ 46. Фазовая и групповая скорость 168
§ 47. Распространение модулированных волн в волноводе 171
§ 48. Скорость движения энергии 176
§ 49. Влияние затухания на распространение модулированных волн 179
Задачи к гл. VIII 181
Глава IX. Потери в волноводах 182
§ 50. Волноводы, заполненные веществом 182
§ 51. Волноводы с конечной проводимостью стенок 184
§ 52. Затухание важнейших волн в зависимости от частоты . . . 190
§ 53. Волны в волноводе и метод возмущений 192
Задачи к гл. IX 196
Глава X. Рупоры 197
§ 54. Электромагнитные волны в рупорах 197
§ 55. «Электрические» и «магнитные» волны в секториальном рупоре 198
§ 56. Сочленение волновода с рупором 204
§ 57. Электрические и магнитные волны в коническом рупоре . . 207
Задачи к гл. X 210
Глава XI. Замедление электромагнитных волн диэлектриками и проводниками 212
§ 58. Медленные электромагнитные волны 212
§ 59. Распространение поверхностной волны вдоль провода с конечной проводимостью 215
§ 60. Поверхностная волна Ценнека 219
§ 61. Замедление волн диэлектрической пластиной 220
§ 62. Волны в диэлектрических структурах (общий обзор) . . . 228
§ 63. Распространение волн вдоль диэлектрического стержня и родственные задачи 235
§ 64. Волны в диэлектрических трубках 241
Задачи к гл. XI 244
Глава XII. Волны в периодических структурах 249
§ 65. Пространственные гармоники 249

§ 66. Поверхностные волны над гребенчатой структурой 253
§ 67. Диафрагмированный волновод. Ребристый стержень 257
Задачи к гл. XII 262
Глава XIII. Спиральный волновод 266
§ 68. Спираль как замедляющая линия. Приближенные граничные условия 265
§ 69. Симметричная волна в спиральном волноводе 269
§ 70. Несимметричные волны в спиральном волноводе 273
§ 71. Система волн спирального волновода. Пространственный резонанс 278
§ 72. Бифилярная спираль 284
Задачи к гл. XIII 288
Глава XIV. Возбуждение электромагнитных волн заданными источниками 289
§ 73. Лемма Лоренца и теорема взаимности для электрических диполей 289
§ 74. Магнитные диполи и теоремы взаимности для них 293
§ 75. Ортогональность волн в волноводе 297
§ 76. Возбуждение волноводов 302
§ 77. Возбуждение волноводов: примеры и дополнения 306
§ 78. Возбуждение волн в рупоре и родственные задачи 313
§ 79. Дифракция на клине 316
Задачи к гл. XIV 322
Глава XV. Свободные колебания объемных резонаторов 328
§ 80. Стоячие волны в прямоугольной полости 328
§ 81. Цилиндрические резонаторы 332
§ 82. Сферический резонатор 336
§ 83. Квазистатический расчет резонаторов сложной формы . . . 338
§ 84. Свойства резонатора, заполненного однородным веществом . . 341
§ 85. Влияние конечной проводимости стенок на свободные колебания резонатора 343
§ 86. Добротность некоторых колебаний 346
§ 87. Диэлектрические резонаторы 348
Задачи к гл. XV 352
Глава XVI. Вынужденные колебания объемных резонаторов . . . 354
§ 88. Ортогональность собственных колебаний 354
§ 89. Возбуждение колебаний в объемном резонаторе 357
§ 90. Возбуждение резонаторов: применения и дополнения . . . 363
§ 91. Возбуждение отрезка волновода 369
Задачи к гл. XVI 371
Глава XVII. Дифракция электромагнитных волн 372
§ 92. Принцип Гюйгенса для электромагнитного поля 372
§ 93. Дифракция на отверстии произвольной формы 378
§ 94. Принцип двойственности 380
§ 95. Дифракция на прямоугольном отверстии 383
§ 96. Метод зеркальных токов 386
§ 97. Дифракция на круглом отверстии 388
§ 98. Пределы применимости принципа Гюйгенса 390
§ 99. Дифракция Френеля и параболическое уравнение 394
§ 100. Гауссовы волновые пучки 400
§ 101. Квазиоптика: открытые резонаторы и открытые волноводы . . 405
§ 102. Колебания между плоскопараллельными зеркалами . . . 411
§ 103. Колебания, ограниченные каустиками 415
§ 104. Открытые резонаторы с комплексными гауссовыми пучками 421
§ 105. Возбуждение открытых резонаторов и открытых волноводов 426
Задачи к гл. XVII 431
Приложение. Переход от абсолютной системы единиц к единицам СИ 434
Список литературы 435