Физика полупроводников и полупроводниковых приборов

А. Г. ГУРЕВИЧ

ФЕРРИТЫ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

ФИЗМАТГИЗ · 1960

А.Г. ГУРЕВИЧ

ФЕРРИТЫ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ
И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

А. Г. ГУРЕВИЧ

ФЕРРИТЫ НА СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

Развитие техники сверхвысоких частот, используемой в радиолокации, радиорелейной связи, радиоастрономии, потребовало применения новых магнитных материалов—ферромагнитных полупроводников, или ферритов. В настоящее время научно-исследовательские и прикладные работы с этими материалами в диапазоне с. в. ч. ведет большое число физиков, радиотехников, технологов и химиков.

Количество специалистов, занятых этими проблемами, непрерывно растет в связи с открывающимися возможностями решения важных задач в физике твердого тела, радиофизике, технике связи и многих других областях.

Однако до сих пор в мировой литературе нет книг, обобщающих богатый экспериментальный и теоретический материал, накопленный при разработке и применении ферритов в диапазоне с. в. ч. Этот пробел частично восполняет книга А. Г. Гуревича.

Книга рассчитана на широкие круги научных и инженерно-технических работников в области радиофизики и радиотехники, физики твердого тела и технологии магнитных материалов.

Книга может быть использована студентами старших курсов и аспирантами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 6

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРИТОВ В СЛАБЫХ ПОЛЯХ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

Глава 1. **Изотропный, намагниченный до насыщения феррит** 13
§ 1. Тензор магнитной восприимчивости. Ферромагнитный резонанс 13
§ 2. Ферромагнитный резонанс в нескомпенсированных антиферромагнетиках 26
§ 3. Спиновые волны 36
§ 4. Магнитные потери. Ширина резонансной кривой . . 41

Глава 2. **Малый эллипсоид** 52
§ 5. Однородная прецессия намагниченности 52
§ 6. Неоднородные типы прецессии 64

Глава 3. **Влияние кристаллографической анизотропии** . 75
§ 7. Ферромагнитный резонанс в монокристалле . . . 75
§ 8. Поликристаллические ферриты 90

Глава 4. **Влияние доменной структуры** 104
§ 9. Усреднение по доменам без учета размагничивающих полей на границах 104
§ 10. Магнитное взаимодействие доменов 117
§ 11. Колебания границ доменов 128

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ФЕРРИТЫ

Глава 5. **Основные положения электродинамики сред с тензорными параметрами** 136
§ 12. Уравнения Максвелла и граничные условия . . . 136
§ 13. Уравнения электродинамики для гиротропной среды 144

§ 14. Гиротропная среда при гармонической зависимости от координаты в направлении постоянного поля 154
§ 15. Квадратичные соотношения. Обобщение леммы Лоренца и теоремы Умова – Пойнтинга 159

Глава 6. **Метод возмущений** 167
§ 16. Основные формулы возмущений 167
§ 17. Квазистатическая аппроксимация внутреннего поля 174

Глава 7. **Однородные плоские волны** 181
§ 18. Однородные плоские волны в неограниченной гиротропной среде 181
§ 19. Плоские волны в продольно намагниченной среде. Эффект Фарадея 185
§ 20. Отражение и прохождение через плоские границы раздела при продольном намагничивании 194
§ 21. Плоские волны в поперечно намагниченной среде 203

Глава 8. **Волновод с продольно намагниченным ферритом** 211
§ 22. Волновод произвольного сечения, заполненный продольно намагниченной гиротропной средой . . 211
§ 23. Круглый волновод, заполненный ферритом 217
§ 24. Круглый волновод с ферритовым стержнем . . . 225

Глава 9. **Прямоугольный волновод с поперечно намагниченным ферритом** 236
§ 25. Волновод, заполненный поперечно намагниченным ферритом 236
§ 26. Волновод с поперечно намагниченными ферритовыми пластинами 244
§ 27. Волновод с диэлектрической пластиной 255
§ 28. Волновод с пластинами, прилегающими к узким стенкам 270

Глава 10. **Резонаторы с ферритом** 277
§ 29. Свободные колебания резонатора, содержащего среду с тензорными параметрами 277
§ 30. Вынужденные колебания 285
§ 31. Расчет резонаторов с ферритом 290

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Глава 11. **Стабильные однородные нелинейные процессы** 307
§ 32. Детектирование и удвоение частоты 307
§ 33. Преобразование частоты 316

Глава 12. **Генерирование и усиление** 32
§ 34. Ферритовый генератор 32
§ 35. Регенеративный усилитель 34
§ 36. Ферритовый усилитель с бегущей волной 35

Глава 13. **Нелинейный рост потерь при больших переменных полях** 360
§ 37. Порог нестабильности 360
§ 38. Стационарное состояние при полях больших, чем пороговое 373

Литература 378

ПРЕДИСЛОВИЕ

В современной физике и технике все возрастающую роль играют полупроводники. Наряду с полупроводниками с большой длиной свободного пробега носителей тока [4], таких, например, как германий и кремний, широкое применение нашли полупроводники с очень малой длиной свободного пробега и, следовательно, малой электропроводностью. Целый ряд таких полупроводников является ферромагнетиками.

Ферромагнитные полупроводники — ферриты [1]) [18—25] очень широко используются в технике и экспериментальной физике. Одной из наиболее важных областей их применения является радиотехника сверхвысоких частот. Использование ферритов открыло перед этой областью техники новые перспективы, позволило решить задачи, принципиально или практически неразрешимые другими методами.

Исследования ферромагнетиков в быстропеременных полях были начаты В. К. Аркадьевым еще в 1912 г. [8, 21] и интенсивно велись в 20-х и 30-х годах. Эти исследования проводились на ферромагнитных металлах и в основном в тех диапазонах частот, где практическое применение металлов еще возможно. Главное внимание при этом уделялось поверхностному эффекту, вихревым токам, т. е. явлениям, связанным с большой электропроводностью металлов.

[1]) Ферриты в узком смысле слова — это соединения состава $MeFe_2O_4$, где Me — двухвалентный металл. Однако в последнее время термин «ферриты» все чаще применяется в общем смысле ферромагнитных полупроводников или диэлектриков. В этом смысле термин «ферриты» и будет использован в данной книге.

Квазиклассическая теория непроводящего ферромагнитного кристалла была развита в работе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [66]. Эта работа послужила в дальнейшем основой для создания теории процессов, происходящих в ферритах в диапазоне сверхвысоких частот.

Неметаллические ферромагнитные вещества исследовались уже давно. Еще в древности был известен естественный феррит железа — магнетит. Искусственные ферриты были получены впервые в 1909 г. [39]. Однако интенсивное исследование ферритов началось лишь в 40-е годы. Стимулом к этому явилось развитие радиотехники. Потребовались ферромагнитные материалы более простые в производстве и более эффективные на высоких частотах, чем ранее применявшиеся тонколистовые или порошковые металлические материалы.

В результате исследований, проведенных в Голландии (Сноек [118]), в Советском Союзе (Г. А. Смоленский [40, 41]) и других странах, были разработаны ферриты, сочетающие очень малую электропроводность с хорошими и разнообразными магнитными свойствами. Они нашли широкое применение в различных областях электро- и радиотехники, в частности в телевидении и электронной вычислительной технике.

Одновременно с этим в 40-е годы происходило, как известно, бурное развитие техники сверхвысоких частот, достижения которой были использованы в радиолокации, технике радиорелейных линий связи, в радиоастрономии, радиоспектроскопии и других областях техники и физики. Развитие техники с. в. ч. в конце 40-х годов поставило на повестку дня две новые проблемы. Одна из них — создание в диапазоне сверхвысоких частот систем с быстроуправляемыми параметрами. Вторая — создание с. в. ч. систем, не удовлетворяющих принципу взаимности, т. е. имеющих существенно различные характеристики для разных направлений распространения энергии.

Эти проблемы, вообще говоря, могут быть решены целым рядом методов: первая — с помощью электронных и газоразрядных приборов, сегнетоэлектриков, вторая — с помощью газоразрядной плазмы и искусственного диэлектрика, находящихся во внешнем магнитном поле. И наконец, обе проблемы могут быть решены при помощи

ферромагнитных материалов. Только этот последний способ может одновременно обеспечить практически неограниченный срок службы, высокую стабильность во времени, удовлетворительную температурную стабильность и возможность управления большими мощностями с. в. ч. при помощи внешних источников сравнительно небольшой мощности и невысокого напряжения.

Применение ферромагнитных металлов не может быть эффективным в диапазоне с. в. ч. из-за сильного поверхностного эффекта. Ферромагнитные же полупроводники с малой электропроводностью — ферриты — могут быть весьма эффективно применены в этом диапазоне. При наличии внешнего управляющего магнитного поля они могут быть использованы для решения обеих упомянутых выше проблем.

Это и явилось стимулом для интенсивных исследований свойств ферритов в диапазоне сверхвысоких частот, которые были развернуты в начале 50-х годов во всех передовых в научном отношении странах мира.

Еще в конце 40-х годов ферромагнитный резонанс, предсказанный теоретически В. К. Аркадьевым [211], Я. Г. Дорфманом [92] и Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [66] и обнаруженный несколько ранее в металлах [22], был обнаружен также в ферритах [145]. Уточнение теории этого резонанса в направлении учета формы образца и более полного учета кристаллографической анизотропии было проведено Киттелем [74] и другими.

В 1951 г. Робертсом [306] был получен экспериментально предсказанный несколько ранее Полдером [75] эффект Фарадея в ферритах, который нашел в дальнейшем широкое практическое применение. В последующие несколько лет был обнаружен целый ряд других интересных эффектов в полых системах — волноводах и резонаторах с ферритами. Одновременно были разработаны основы электродинамики систем, содержащих такие материалы.

Особенно большое внимание было уделено использованию обнаруженных эффектов для создания ферритовых устройств диапазона сверхвысоких частот [24, 25]. Такие устройства созданы для всего диапазона с. в. ч. — от миллиметровых до дециметровых волн, и для всех уровней

мощности, применяемых в этом диапазоне. Эти устройства выполняют разнообразные функции, относящиеся к двум упомянутым выше проблемам. К первой проблеме (быстрое управление) относятся переключатели, амплитудные и фазовые модуляторы, устройства для автоматического регулирования этих параметров, устройства для управления частотой генераторов. Во вторую проблему входит создание вентилей, дуплексеров и других невзаимных устройств.

Ферритовые устройства прочно вошли в арсенал технических средств диапазона сверхвысоких частот. Современные успехи радиолокации, радиоастрономии, техники радиорелейных линий связи были бы невозможны без использования этих устройств.

Все упомянутые выше ферритовые устройства могут быть названы линейными в том смысле, что параметры феррита, а следовательно, и устройства в целом, являются в первом приближении линейными по отношению к электромагнитному полю с. в. ч. Однако обнаружен ряд нелинейных явлений в намагниченных ферритах, представляющих большой принципиальный и практический интерес. К числу таких явлений относятся, например, удвоение и преобразование частоты и параметрическое генерирование и усиление. Есть основания полагать, что ферритовые усилители с. в. ч. будут иметь, как и другие параметрические усилители, низкий фактор шума.

В результате длительных поисковых работ создано большое число ферритов, предназначенных для различных частей диапазона с. в. ч. Наряду с поликристаллическими материалами, которые широко применяются в технике, известные успехи достигнуты и в изготовлении монокристаллов с узкими резонансными кривыми. Эти монокристаллы находят применение в нелинейных устройствах.

Однако проблемы создания материалов с заданными свойствами остаются наиболее сложными проблемами физики и техники ферритов. Особую трудность представляет создание материалов для длинноволновой части диапазона с. в. ч. — дециметровых волн, а также для коротких миллиметровых волн.

Решение этих проблем, так же как и глубокое изучение нелинейных процессов, возможно лишь на основе

синтеза электродинамических (радиотехнических) методов исследования с методами физики твердого тела. С другой стороны, изучение ферритов: природы химической связи в них, природы их магнетизма наряду с явлениями, происходящими в них в быстропеременных полях, дает результаты, представляющие общий интерес для физики твердого тела. В частности, исследование процессов релаксации и нелинейных явлений в ферритах является эффективным средством изучения взаимодействия спиновых волн с кристаллической решеткой.

Вопросы поведения ферритов в полях сверхвысоких частот привлекают внимание большого круга инженеров и физиков, работающих как в области радиофизики, так и физики твердого тела. Несмотря на это, до настоящего времени отсутствовала монография, в которой бы последовательно излагались эти вопросы. В данной книге делается попытка в какой-то мере восполнить этот пробел.

Книга состоит из трех частей. В первой части рассматриваются магнитные свойства ферритов (в общем случае намагниченных постоянным или сравнительно медленно изменяющимся полем) в слабых полях диапазона с. в. ч.

Во второй части книги излагаются вопросы электродинамики сред с тензорными параметрами, к которым принадлежат намагниченные ферромагнитные полупроводники. Наряду с общими принципами электродинамики таких сред приводится теория некоторых явлений, представляющих интерес для техники сверхвысоких частот. Рассмотрено распространение волн в волноводах с ферритом и свойства полых резонаторов с ферритовыми образцами.

Тензорная магнитная проницаемость среды во второй части книги рассматривается как заданная величина (известная из первой части). Построение теории существенно упрощается таким разделением микроскопической и макроскопической задач. В большинстве случаев оно возможно в системах, содержащих ферриты, в отличие от ферромагнитных металлов, где сильный поверхностный эффект делает такое разделение недопустимым.

В третьей части книги рассматриваются нелинейные процессы в ферромагнитных полупроводниках, проявляющиеся при больших амплитудах переменного магнитного поля.

Настоящая книга не является обзором или, тем более, справочником. Задача ее—дать читателю понимание основных процессов, происходящих в ферритах в полях сверхвысоких частот, подготовить читателя к изучению весьма обширной периодической литературы и к практической работе в этой области. В связи с этим мы сочли целесообразным ограничиться рассмотрением небольшого числа характерных явлений, но разобрать их подробно, приводя, как правило, все промежуточные вычисления.

В книге используется гауссова система единиц.

Приведенный список литературы ни в какой степени не претендует на полноту. В нем даны лишь работы, на которые имеются ссылки в тексте, а также ряд других работ, ознакомление с которыми представляется нам полезным при изучении вопросов, рассмотренных в книге.

Автор понимает, что попытка дать последовательное изложение новой и бурно развивающейся отрасли физики, какой является физика ферритов в полях сверхвысоких частот, не может быть свободна от многих недостатков. Все замечания и пожелания будут приняты с признательностью.

Автор приносит благодарность доктору физико-математических наук Г. А. Смоленскому, кандидату технических наук В. В. Никольскому и кандидату физико-математических наук А. И. Ильяшкову за участие в обсуждении вопросов, затронутых в книге, и за ценные советы.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРИТОВ В СЛАБЫХ ПОЛЯХ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

ГЛАВА 1

ИЗОТРОПНЫЙ, НАМАГНИЧЕННЫЙ ДО НАСЫЩЕНИЯ ФЕРРИТ

§ 1. Тензор магнитной восприимчивости. Ферромагнитный резонанс

В диапазоне сверхвысоких частот ферромагнитные полупроводники — ферриты используются при одновременном воздействии на них переменного магнитного поля этого диапазона и постоянного (или сравнительно медленно изменяющегося) магнитного поля. Если переменное магнитное поле и переменная намагниченность достаточно малы, то между комплексными амплитудами их составляющих должны иметь место линейные соотношения:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \chi_{11}h_x + \chi_{12}h_y + \chi_{13}h_z, \\ m_y &= \chi_{21}h_x + \chi_{22}h_y + \chi_{23}h_z, \\ m_z &= \chi_{31}h_x + \chi_{32}h_y + \chi_{33}h_z. \end{aligned}\right\} \qquad (1,1)$$

Эти соотношения могут быть кратко записаны в виде

$$\boldsymbol{m} = \overleftrightarrow{\chi}\boldsymbol{h}, \qquad (1,1а)$$

где $\overleftrightarrow{\chi}$ — тензор магнитной восприимчивости вещества по отношению к переменному полю. Компоненты этого тензора зависят от частоты переменного поля ω и величины постоянного поля H_0.

В первой и второй частях мы будем рассматривать именно этот случай — достаточно малых переменных полей,

когда может быть введена магнитная восприимчивость вещества $\overleftrightarrow{\chi}$, не зависящая от амплитуды переменного поля.

В первой главе мы будем рассматривать идеализированную изотропную (в отсутствие постоянного поля H_0) непроводящую ферромагнитную среду. Для нее при $H_0 = 0$ магнитная восприимчивость является скалярной величиной. Наложение поля H_0 приводит к тому, что $\overleftrightarrow{\chi}$, как мы убедимся, становится тензором. Первой характерной особенностью этого тензора является его несимметрия. Она и приводит к возможности осуществления с. в. ч. устройств, не удовлетворяющих принципу взаимности.

Второй характерной особенностью тензора магнитной восприимчивости намагниченных ферромагнетиков является ферромагнитный резонанс. Он заключается в том, что некоторые компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ зависят от ω и H_0 по резонансному закону. При определенном ω (если $H_0 = \text{const}$) или H_0 (если $\omega = \text{const}$) имеют место максимумы мнимых частей этих компонентов, что соответствует максимуму магнитных потерь в веществе. Одновременно происходит дисперсия вещественных частей этих компонентов.

Задачей теории является в первую очередь объяснение этих особенностей тензора магнитной восприимчивости ферромагнетиков.

Явление ферромагнитного резонанса можно очень просто объяснить, исходя из квантовомеханических представлений. Как известно, ферромагнетизм обусловлен нескомпенсированными спиновыми магнитными моментами электронов, находящихся на «недостроенных» $3d$- или $4f$-оболочках атомов или ионов [7]. В силу обменного взаимодействия [5] между этими электронами энергетически выгодным оказывается состояние, когда все спиновые моменты электронов ориентированы параллельно друг другу.

Как известно [7], возможны лишь две ориентации спинов относительно некоторого преимущественного направления в пространстве, и частности, направления магнитного поля H_0: параллельная и антипараллельная. Различие их энергий

$$\Delta W = 2m_{\text{сп}} H_0,$$

где $m_{\text{сп}}$ — магнитный момент спина. Имеется, таким образом, два энергетических уровня, разделенных интервалом ΔW.

В отсутствие теплового движения (при температуре 0° К) все спины находятся на нижнем уровне, т. е. в случае однородного, изотропного, намагниченного до насыщения ферромагнетика — ориентированы по полю H_0. Для перехода на верхний уровень или «опрокидывания» спина необходима энергия ΔW. Эта энергия может быть передана тепловым движением или квантами электромагнитного поля. В последнем случае переходы будут происходить, когда энергия кванта составит ΔW, т. е. когда

$$\hbar\omega_0 = 2m_{\text{сп}} H_0 \qquad (1,2)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, а $h = 6{,}6238 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек* — постоянная Планка.

Отсюда следует, что интенсивное поглощение ферромагнетиком энергии электромагнитного поля, т. е. ферромагнитный резонанс, будет иметь место при выполнении условия (1.2).

Магнитный момент спина равен одному магнетону Бора:

$$m_{\text{сп}} = \mu_B = \frac{he}{2mc},$$

где $e = 4{,}8022 \cdot 10^{-10}$ эл.-ст. ед. — заряд электрона.

$m = 9{,}1072 \cdot 10^{-28}$ *г* — масса покоя электрона.

$c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость света.

С учетом этого из (1,2) следует:

$$\omega_0 = \gamma_{\text{сп}} H_0, \qquad (1,3)$$

где гиромагнитное отношение для электронного спина

$$\gamma_{\text{сп}} = \frac{e}{mc} = 1{,}7653 \cdot 10^7 \ \frac{1}{\text{э} \cdot \text{сек}}.$$

Механический момент спина равен $\frac{h}{2}$. Отсюда ясно, что $\gamma_{\text{сп}}$ имеет смысл отношения магнитного момента к механическому [1]. Заметим, что известную роль в ферромагне-

[1] Магнитный и механический моменты спина противоположны по направлению, поэтому их отношение является отрицательным. Мы под γ будем всегда понимать абсолютную величину этого отношения.

тизме играют и орбитальные магнитные моменты электронов. При этом резонансное условие (1,2) остается в силе, но $\gamma_{сп}$ заменяется величиной

$$\gamma = \frac{eg}{2mc}, \qquad (1,4)$$

где g—так называемый фактор спектроскопического расщепления, вообще говоря, отличный от 2. Как показал Киттель [94], при этом должно выполняться соотношение

$$g - 2 = 2 - g', \qquad (1,5)$$

где g'—магнетомеханический фактор, который получается из гиромагнитных опытов Эйнштейна—де Гааза или Барнетта [7].

Применение аппарата квантовой механики к рассмотренной выше модели дает возможность построить количественную теорию ферромагнитного резонанса [75, 93, 96]. В рамках этой теории удается учесть ряд не рассмотренных пока факторов: влияние кристаллографической анизотропии, влияние магнитного дипольного взаимодействия (т. е. размагничивающих полей) и др. Однако все эти факторы гораздо проще и полнее учитываются с помощью так называемого феноменологического или, точнее, квазиклассического метода.

Квазиклассический метод дает возможность получить с учетом этих факторов не только условие ферромагнитного резонанса, но и полные выражения для компонентов тензора магнитной восприимчивости в зависимости от ω и H_0. Этот метод, предложенный еще в 1935 г. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [66] и развитый впоследствии Киттелем [74] и Полдером [75], будет широко использован в первой и третьей частях книги. Необходимо, однако, заметить, что некоторые вопросы, например природа магнитных потерь (§ 4), не могут быть, по-видимому, проанализированы этим методом и требуют квантовой трактовки.

Перейдем к обоснованию квазиклассического метода. Будем рассматривать каждый участвующий в ферромагнетизме электронный спин как классическую частицу, обладающую механическим моментом (моментом количества движения) s_1 и магнитным моментом m_1. На такую

частицу в магнитном поле H будет действовать момент силы $m_1 \times H$. Не интересуясь поступательным движением частицы, запишем уравнение ее движения в виде:

$$\frac{ds_1}{dt} = m_1 \times H_{эф} \qquad (1,6)$$

Здесь $H_{эф}$—суммарное эффективное поле, действующее на магнитный момент частицы.

Примем во внимание квантовомеханическое соотношение

$$m_1 = -\gamma s_1, \qquad (1,7)$$

где γ определяется выражением (1,4). С учетом (1,7) уравнение (1,6) запишется:

$$\frac{dm_1}{dt} = -\gamma m_1 \times H_{эф}. \qquad (1,8)$$

Умножая обе части (1,8) на число рассматриваемых элементарных частиц в единице объема N, получим уравнение Ландау—Лифшица [66]:

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma M \times H_{эф}, \qquad (1,9)$$

где $M = N m_1$—макроскопическая намагниченность вещества, т. е. магнитный момент, отнесенный к единице объема.

В приведенном выводе мы исходили из неправильного представления о прецессионном движении отдельного электронного спина. Однако окончательное уравнение (1,9), которое связывает макроскопические величины, является правильным. К этому уравнению можно прийти и более строгим квантовомеханическим путем [3].

Входящее в (1,8) и (1,9) поле $H_{эф}$ включает в себя действительное магнитное поле и эффективные поля, которыми учитываются различные виды взаимодействия. Для намагниченной до насыщения изотропной среды

$$H_{эф} = H + H_{обм}, \qquad (1,10)$$

где H—внутреннее магнитное поле (для неограниченной среды, т. е. при отсутствии размагничивания оно совпадает с внешним полем), а $H_{обм}$—эффективное поле

обменного взаимодействия. Это поле в свою очередь содержит два члена:

$$\boldsymbol{H}_{\text{обм}} = \boldsymbol{H}_{\lambda} + \boldsymbol{H}_{q}. \tag{1,11}$$

Первый член

$$\boldsymbol{H}_{\lambda} = -\lambda \boldsymbol{M}_{0} \tag{1,12}$$

представляет собой так называемое «молекулярное» поле, или поле Вейсса. Константа λ для кристалла с кубической решеткой может быть приближенно записана [5]:

$$\lambda = \frac{2AN}{M_0^2}, \tag{1,13}$$

где A — так называемый обменный интеграл, т. е. отнесенная к одному спину энергия обменного взаимодействия, а M_0 — намагниченность насыщения. Заметим, что константа λ связана с температурой Кюри T_k следующим соотношением [5]:

$$\lambda = \frac{kT_k N}{M_0^2}, \tag{1,14}$$

где $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град* — постоянная Больцмана. Оценка по формуле (1,14) приводит для ферромагнетиков, представляющих практический интерес, и том числе и для ферритов, к очень большим значениям H_λ — порядка 10^7 э. Однако поле $\boldsymbol{H}_\lambda$, параллельное намагниченности $\boldsymbol{M}$, не входит в уравнение движения намагниченности (1,9).

Второй член эффективного поля (1,11) выражается следующим образом [5]:

$$\boldsymbol{H}_{q} = q\nabla^2 \boldsymbol{M}. \tag{1,15}$$

Множитель q для кристалла с кубической решеткой может быть записан в виде

$$q = \frac{2AVa^2}{M_0^2} = \lambda a^2, \tag{1,16}$$

где a — постоянная решетки.

Поле (1,15) учитывает добавочную обменную энергию, которая возникает в случае непараллельности соседних спинов, т. е. изменения $\boldsymbol{M}$ в пространстве. Множитель q имеет порядок величины 10^{-9}. Следовательно, это поле должно приниматься во внимание лишь при таких быстрых вариациях намагниченности в пространстве, когда она существенно изменяется на расстояниях порядка 10^{-5} *см* или менее. Такие резкие изменения намагниченности имеют место, например, на границах доменов (§ 9). Поле (1,15) необходимо учитывать также на границе хорошо проводящего металла [71], где быстрое изменение $\boldsymbol{M}$ в пространстве обусловлено сильным поверхностным эффектом. Как будет показано в § 3, в феррите могут существовать неоднородные типы прецессии намагниченности с такими малыми длинами волн, что член (1,15) должен приниматься во внимание. Мы пока будем рассматривать однородную прецессию намагниченности в феррите, намагниченном до насыщения. При этом член (1,15) можно не учитывать.

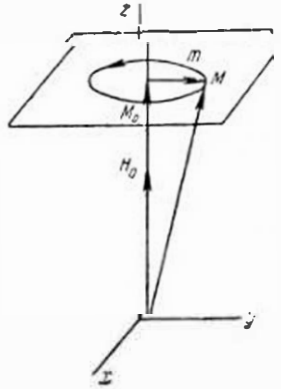


Рис. 1. Прецессия вектора намагниченности при малых амплитудах переменной намагниченности.

Тогда в уравнение (1,9) войдет только магнитное поле $\boldsymbol{H}$, и это уравнение запишется:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}. \tag{1,17}$$

Рассмотрим прежде всего собственные колебания намагниченности в отсутствие переменного магнитного поля. Направим оси декартовой системы координат (рис. 1) так, чтобы ось z совпала с постоянным внешним полем $\boldsymbol{H}_0$ и постоянной намагниченностью $\boldsymbol{M}_0$ (эти векторы параллельны, так как среда изотропна и намагничена до насыщения). Предполагая колебания гармоническими, запишем:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H_0, \tag{1,18}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{z}_0 M_0 + \boldsymbol{m}_0 e^{i\omega t}, \tag{1,19}$$

где $\boldsymbol{z}_0$ — единичный вектор в направлении оси z, а $\boldsymbol{m}_0$ — комплексная амплитуда переменной намагниченности, которая и подлежит определению.

Проектируя уравнение (1,17) на оси координат с учетом (1,18) и (1,19), получим:

$$\left.\begin{aligned} i\omega_0 m_x + \gamma H_0 m_y = 0, \\ -\gamma H_0 m_x + i\omega_0 m_y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1,20}$$

$$m_z = 0. \tag{1,21}$$

где m_x, m_y и m_z — проекции вектора $\boldsymbol{m}_0$.

Условие совместности системы (1,20) (равенство нулю ее определителя) дает выражение для собственной частоты колебаний:

$$\omega_0 = \omega_H \equiv \gamma H_0. \tag{1,22}$$

Эта частота совпадает с резонансной частотой ω_0, выражение для которой было получено выше из совершенно других — микроскопических, квантовых соображений.

Подставляя (1,22) в одно из уравнений (1,20), получим:

$$m_y = -im_x. \tag{1,23}$$

Из (1,21) и (1,23) следует, что собственные колебания вектора $\boldsymbol{M}$ представляют собой правое вращение[1]) (прецессию) конца этого вектора вокруг направления постоянной намагниченности $\boldsymbol{M}_0$. Конец вектора $\boldsymbol{M}$ движется при этом по круговой орбите в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{M}_0$ (рис. 1).

Перейдем теперь к рассмотрению малых вынужденных колебаний намагниченности. Магнитное поле запишется в виде

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}e^{i\omega t}, \tag{1,24}$$

где $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{z}_0 H_0$, а $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x}_0 h_x + \boldsymbol{y}_0 h_y + \boldsymbol{z}_0 h_z$ — переменное магнитное поле, которое мы рассматриваем как заданное. Намагниченность будем искать в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}e^{i\omega t}. \tag{1,25}$$

В отличие от собственных колебаний, при рассмотрении которых не делалось предположения о малости

[1]) См. сноску на стр. 25

переменной составляющей намагниченности, теперь мы предположим, что

$$m \ll M_0, \quad h \ll H_0.$$

Подставляя (1,24) и (1,25) в уравнение (1,17), отбрасывая малые члены второго порядка и принимая во внимание, что $\boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{H}_0 = 0$, получим уравнение для $\boldsymbol{m}$:

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} + \gamma \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0 = -\gamma \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h}. \tag{1,26}$$

Проектируя уравнение (1,26) на оси координат, получим с учетом обозначения (1,22):

$$\left.\begin{aligned} i\omega m_x + \omega_H m_y = \gamma M_0 h_y, \\ -\omega_H m_x + i\omega m_y = -\gamma M_0 h_x, \\ i\omega m_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1,27}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} m_x = \frac{M_0}{H_0}\frac{\omega_H^2}{\omega_H^2-\omega^2} h_x + \frac{M_0}{H_0}\frac{i\omega\omega_H}{\omega_H^2-\omega^2} h_y, \\ m_y = -\frac{M_0}{H_0}\frac{i\omega\omega_H}{\omega_H^2-\omega^2} h_x + \frac{M_0}{H_0}\frac{\omega_H^2}{\omega_H^2-\omega^2} h_y \\ m_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1,28}$$

Таким образом, продольная составляющая малого переменного поля h_z не вызывает переменной намагниченности. Поперечные же составляющие h_x и h_y вызывают поперечные составляющие переменной намагниченности не только параллельные, но и перпендикулярные соответствующим составляющим поля. Очевидно, что выражения (1,28) могут быть представлены в форме (1,1а), причем магнитная восприимчивость $\overleftrightarrow{\chi}$ представляет собой тензор следующего вида:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{vmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1,29}$$

Здесь

$$\chi = \frac{M_0}{H_0}\frac{\omega_H^2}{\omega_H^2-\omega^2}, \qquad \chi_a = \frac{M_0}{H_0}\frac{\omega\omega_H}{\omega_H^2-\omega^2}. \tag{1,30}$$

Переменная составляющая магнитной индукции

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h} + 4\pi\boldsymbol{m}$$

с учетом (1,1а) может быть записана следующим образом:

$$\boldsymbol{b} = \overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{h}, \tag{1,31}$$

где тензор магнитной проницаемости по отношению к переменному полю

$$\overleftrightarrow{\mu} = \overleftrightarrow{I} + 4\pi\overleftrightarrow{\chi}. \tag{1,32}$$

Здесь $\overleftrightarrow{I}$ – единичный тензор, т. е. тензор следующего вида:

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

С учетом (1,29) тензор (1,32) запишется следующим образом:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{vmatrix}, \tag{1,33}$$

где согласно (1,30)

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 1 + 4\pi\frac{M_0}{H_0}\frac{\omega_H^2}{\omega_H^2-\omega^2}, \\ \mu_a &= 4\pi\frac{M_0}{H_0}\frac{\omega\omega_H}{\omega_H^2-\omega^2}, \\ \mu_\parallel &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{1,34}$$

Из выражений (1,29) или (1,33) следует, что тензоры $\overleftrightarrow{\chi}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ для рассматриваемой среды представляют собой суммы диагональных и антисимметричных тензоров. Зависимости поперечных компонентов этих тензоров χ, χ_a, μ и μ_a от ω и H_0 носят резонансный характер.

Резонанс имеет место при совпадении ω с частотой собственной прецессии намагниченности ω_H. Итак, применение квазиклассического метода Ландау – Лифшица к простейшей модели: изотропному, намагниченному до насыщения, непроводящему ферромагнетику – позволило объяснить основные особенности тензоров $\overleftrightarrow{\chi}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ такой среды – несимметрию этих тензоров и явление ферромагнитного резонанса.

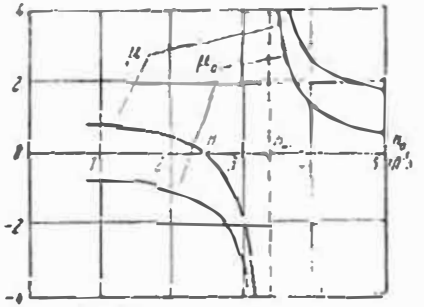


Рис. 2. Зависимость компонентов тензора μ от постоянного поля H_0 (без учета потерь).

Частота 9375 *Мгц*. $M_0 = 160$ *гс*

Заметим, что магнитная восприимчивость ферромагнитных монокристаллов имеет тензорный характер и в отсутствие постоянного магнитного поля. Однако этот тензор (точнее, его усредненное по доменам значение, § 9) является симметричным.

Рассмотрим более подробно зависимости компонентов тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ от постоянного магнитного поля H_0. Графики этих зависимостей, вычисленные по формулам (1,34), приведены на рис. 2. При вычислении было принято: $g = 2{,}0$; $M_0 = 160$ *гс* (что типично для применяемых в диапазоне с. в. ч. ферритов); частота $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 9375$ *Мгц* (длина волны 3,2 *см*). Для малых H_0 расчетные величины не приведены на графиках рис. 2, так как при этом не выполняется основное предположение, что среда намагничена до насыщения.

Как видно из (1,34) и рис. 2, при

$$H_0 = \frac{\omega}{\gamma} \tag{1,35}$$

μ и μ_a обращаются в бесконечность, что является следствием неучета потерь.

При полях, малых по сравнению с H_0 (однако достаточно больших, чтобы среда была намагничена до

насыщения), когда можно считать $\omega^2 \gg \omega_H^2$, получаются приближенные выражения:

$$\mu \cong 1 - 4\pi \frac{M_0 H_0}{H_\omega^2}, \tag{1,36}$$

$$\mu_a \cong -4\pi \frac{M_0}{H_\omega}. \tag{1,37}$$

Характерными точками кривых $\mu(H_0)$ и $\mu_a(H_0)$ (рис. 2) являются: точка $H_0 = H_1$, где $\mu = |\mu_a|$, и точка $H_0 = H_2$, в которой $\mu = 0$. Для первой точки из (1,34) получаем:

$$H_1 = H_\omega - 4\pi M_0, \tag{1,38}$$

а для второй —

$$H_2 = \sqrt{H_\omega^2 + (2\pi M_0)^2} - 2\pi M_0. \tag{1,39}$$

Тензоры $\overleftrightarrow{\chi}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ могут быть «диагонализированы», если вместо поперечных составляющих векторов $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{b}$ ввести их линейные комбинации:

$$h_+ = h_x + ih_y, \qquad h_- = h_x - ih_y,$$
$$m_+ = m_x + im_y, \qquad m_- = m_x - im_y,$$
$$b_+ = b_x + ib_y, \qquad b_- = b_x - ib_y.$$

Тогда, как легко показать с помощью (1,29) и (1,33), справедливы следующие соотношения:

$$m_\pm = (\chi \pm \chi_a) h_\pm, \tag{1,40}$$

$$b_\pm = (\mu \pm \mu_a) h_\pm. \tag{1,41}$$

Они и означают, что для новых переменных тензоры восприимчивости и проницаемости стали диагональными. Например, тензор восприимчивости для новых переменных имеет вид

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{vmatrix} \chi + \chi_a & 0 & 0 \\ 0 & \chi - \chi_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{1,42}$$

До сих пор мы не делали никаких предположений о характере переменного магнитного поля, кроме малости его составляющих. Теперь рассмотрим частный случай поперечного магнитного поля с круговой поляризацией

и правым вращением [1]), т. е. предположим

$$h_x = h; \quad h_y = -ih; \quad h_z = 0.$$

Для этого поля, как легко убедиться,

$$h_+ = 2h; \quad h_- = 0.$$

Тогда, согласно (1,40),

$$m_+ = (\chi + \chi_a)\, 2h; \quad m_- = 0; \quad m_z = 0.$$

Таким образом, переменная намагниченность будет также иметь круговую поляризацию с правым вращением. Восприимчивость в этом случае будет скалярной и равной

$$\chi_\text{п} = \chi + \chi_a. \tag{1,43}$$

Аналогично для поперечного поля с круговой поляризацией и левым вращением

$$\chi_\text{л} = \chi - \chi_a. \tag{1,44}$$

Подставляя (1,30) в (1,43) и (1,44), получим:

$$\chi_\text{п,л} = \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H}{\omega_H \mp \omega}. \tag{1,45}$$

Очевидно, что переменная магнитная индукция в этом случае будет также иметь круговую поляризацию с вращением, соответствующим направлению вращения переменного поля. Скалярная магнитная проницаемость

$$\mu_\text{п,л} = 1 + 4\pi \frac{M_0}{H_0} \frac{\omega_H}{\omega_H \mp \omega}. \tag{1,46}$$

Графики зависимостей величин $\mu_\text{п}$ и $\mu_\text{л}$ от H_0 приведены на рис. 3. При этом для g, M_0 и ω приняты те же значения,

[1]) Под правым вращением некоторого вектора, лежащего в плоскости xy и имеющего круговую поляризацию относительно заданного направления (которое мы совмещаем с положительным направлением оси z), мы будем понимать такое вращение, при котором вектор движется по кратчайшему пути от положительного направления оси x к положительному направлению оси y в правой системе координат. Иными словами, направление вращения этого вектора совпадает с вращением правого винта при поступательном перемещении его в заданном направлении. Противоположное направление вращения будем называть левым.

что и на графиках рис. 2. Как следует из (1,46) и рис. 3, только зависимость $\mu_д$ от H_0 имеет резонансный характер ($\mu_д$—проницаемость для поля с круговой поляризацией и направлением вращения, соответствующим направлению собственной прецессии намагниченности).

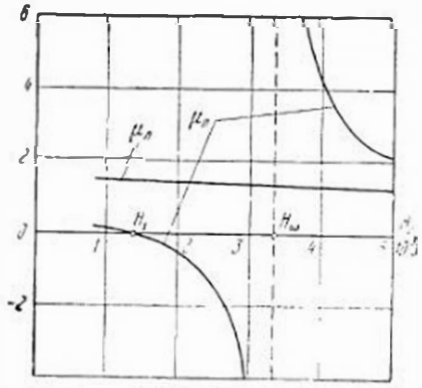


Рис. 3. Зависимость проницаемостей $\mu_н$ и $\mu_д$ от постоянного магнитного поля H_0 (без учета потерь).
Частота 9375 *Мгц*, M_0=160 *гс*.

§ 2. Ферромагнитный резонанс в нескомпенсированных антиферромагнетиках

В предыдущем параграфе рассматривалась идеализированная модель непроводящего ферромагнетика. Явления в реальных ферромагнитных металлах существенно усложняются вследствие наличия большой электропроводности. Электроны проводимости взаимодействуют с внутренними 3 d- или 4 f-электронами и играют, как показали С. В. Вонсовский и др. [6], значительную роль в ферромагнитных явлениях. Большая величина электропроводности приводит в быстропеременных полях, в особенности в диапазоне с. в. ч., к сильному поверхностному эффекту.

Ферромагнитные полупроводники (ферриты), представляющие интерес для техники с. в. ч., обладают настолько малой электропроводностью (10^{-7}—10^{-12} *ом*$^{-1}$·*см*$^{-1}$), что указанные выше процессы, свойственные металлам, для них могут не приниматься во внимание.

Но, с другой стороны, магнитные явления в ферритах осложняются рядом факторов, обусловленных структурой этих соединений [44]. Ферриты представляют собой ионные кристаллы, в которых сравнительно небольшие ионы металлов находятся в промежутках между значительно бо́льшими по размеру неметаллическими ионами. Во всех представляющих практический интерес ферритах такими

ионами являются ионы кислорода O^{2-}. В этих ионах нет неспарных электронных спинов, и они не обладают магнитным моментом.

Обменное взаимодействие между обладающими магнитными моментами ионами металлов может осуществляться только через ионы кислорода,—это взаимодействие носит, таким образом, косвенный характер. Оно может быть ферромагнитным или антиферромагнитным, т. е. приводить к параллельной или антипараллельной ориентации магнитных моментов ионов металлов. Так как различные ионы металлов имеют разные магнитные моменты, то в случае антиферромагнитного взаимодействия может иметь место неполная компенсация и результирующий «разностный» ферромагнетизм. Ферромагнитные полупроводники и принадлежат к этому классу веществ, которые можно назвать нескомпенсированными антиферромагнетиками или, по терминологии Неэля [27], ферримагнетиками.

Промежутки между ионами кислорода, в которых могут помещаться ионы металлов, различаются по числу ближайших соседей — ионов O^{2-}. Например, в ферритах со структурой шпинели [24] имеются два типа промежутков или узлов: тетраэдрические, для которых число ближайших ионов O^{2-} равно 4, и октаэдрические, для которых это число равно 6.

Неэль предположил [27], что ионы металлов, находящиеся в узлах каждого типа, можно рассматривать как образующие отдельную подрешетку. В случае ферритов со структурой шпинели имеется, таким образом, две подрешетки: тетраэдрическая (подрешетка A) и октаэдрическая (подрешетка B).

Ферромагнитные ферриты состава $MeFe_2O_4$ (где Me—двухвалентный металл) имеют [24] обращенную структуру шпинели. В них половина ионов Fe^{3+} образует подрешетку A, а остальные ионы Fe^{3+} и ионы Me^{2+} находятся в подрешетке B. Для того чтобы объяснить величины намагниченности насыщения ферритов, нужно предположить, что взаимодействие ионов подрешетки A является ферромагнитным, а взаимодействие ионов подрешетки B и взаимодействие между подрешетками (AB-взаимодействие)—антиферромагнитным. Тогда магнитный момент на

формульную единицу («молекулы») $MeFe_2O_4$ составляет:

$$m_{Fe} - (m_{Fe} - m_{Me}) = m_{Me},$$

где m_{Fe} и m_{Me} — моменты соответствующих ионов. Этот результат находится в хорошем согласии с экспериментом [44].

В ферритах со структурой типа граната $Me_3Fe_5O_{12}$ (где Me — иттрий Y или редкоземельный металл от самария Sm до лютеция Lu) имеются три типа узлов: с числом ближайших ионов кислорода четыре, шесть и восемь. В узлах первого типа находятся по три иона Fe^{3+} из пяти, входящих в формульную единицу, в узлах второго типа — остальные два иона железа, а в узлах третьего типа — ионы Y^{3+} или редкоземельные ионы. Таким образом, в этих ферритах имеются три подрешетки. В случае иттриевого или лютециевого феррита со структурой типа граната только в двух из этих подрешеток находятся магнитные ионы — ионы Fe^{3+} (ионы Y^{3+} и Lu^{3+} не имеют нескомпенсированных спинов на 3 d- или 4 f-орбитах). Взаимодействие между ионами Fe^{3+} в каждой подрешетке является ферромагнитным, а между подрешетками — антиферромагнитным. В результате магнитный момент на формульную единицу равен моменту одного иона Fe^{3+}, т. е. 5 магнетонам Бора [7], что находится в хорошем соответствии с экспериментальными результатами для иттриевого и лютециевого ферритов.

В настоящее время достигнуты определенные успехи в создании строгой, последовательно квантовой теории ферритов [28, 30—32, 34, 36]. Однако простая модель подрешеток Неэля не утрачивает своего значения, она находит некоторое обоснование в строгой теории [34] и прямое подтверждение в результатах нейтронографического исследования ферритов [43].

Наша задача заключается в том, чтобы выяснить основные особенности сверхвысокочастотных магнитных процессов в ферритах и в первую очередь установить, в какой мере к ним применимы фундаментальные результаты, полученные в предыдущем параграфе. Для этого мы, следуя Киттелю [166] и Вангнессу [168, 169], воспользуемся моделью, несколько более простой, чем модель Неэля для ферритов со структурой типа шпинели. Эта модель соответствует случаю иттриевого или лютециевого ферритов со структурой граната.

Рассмотрим две ферромагнитные подрешетки с антиферромагнитным взаимодействием между ними. Обозначим намагниченности этих подрешеток $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$. При отсутствии прецессии

$$\boldsymbol{M}_1 = z_0 M_{10}; \quad \boldsymbol{M}_2 = -z_0 M_{20},$$

где z_0, как и раньше, — единичный вектор по оси z, вдоль которой направлено постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. Результирующий вектор намагниченности $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2$ направлен при этом в сторону большего из векторов $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ и по величине равен $|M_{10} - M_{20}|$.

При наличии прецессии

$$\boldsymbol{M}_1 = z_0 M_{10} + \boldsymbol{m}_1 e^{i\omega t}; \quad \boldsymbol{M}_2 = -z_0 M_{20} + \boldsymbol{m}_2 e^{i\omega t}, \quad (2,1)$$

где векторы $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ подлежат определению.

Обменное взаимодействие мы учтем, следуя Неэлю, при помощи молекулярных полей, действующих на каждую подрешетку,

$$\boldsymbol{H}_{\lambda 1} = -\lambda_{11}\boldsymbol{M}_1 - \lambda_{12}\boldsymbol{M}_2, \quad \boldsymbol{H}_{\lambda 2} = -\lambda_{21}\boldsymbol{M}_1 - \lambda_{22}\boldsymbol{M}_2. \quad (2,2)$$

Величины $\lambda_{12}\boldsymbol{M}_2$ и $\lambda_{21}\boldsymbol{M}_1$ в отличие от $\lambda_{11}\boldsymbol{M}_1$ и $\lambda_{22}\boldsymbol{M}_2$ пойдут в уравнения (1,9) для намагниченностей подрешеток $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$, так как при наличии прецессии векторы $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$, вообще говоря, не будут параллельны. Принимая $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda$, запишем эти уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{M}_1}{dt} &= -\gamma_1 \boldsymbol{M}_1 \times (\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{M}_2), \\ \frac{d\boldsymbol{M}_2}{dt} &= -\gamma_2 \boldsymbol{M}_2 \times (\boldsymbol{H} - \lambda \boldsymbol{M}_1) \end{aligned}\right| \quad (2,3)$$

Здесь $\boldsymbol{H}$ — внешнее магнитное поле. Значения гиромагнитного отношения $\gamma_{1,2}$ приняты различными для двух подрешеток, так как причины, вызывающие отличие g-фактора от 2, в частности влияние орбитального момента, могут для них по-разному сказываться.

В каждое из уравнений системы (2,3) входят намагниченности обеих подрешеток; таким образом, прецессии

этих намагниченностей являются связанными. Связь в данном случае обусловлена обменным взаимодействием.

Как и в § 1, рассмотрим сначала свободную прецессию, т. е. примем

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H_0. \tag{2,4}$$

Подставляя (2,4) и (2,1) (при $\omega = \omega_0$) в уравнения (2,3) и проектируя эти уравнения на оси декартовой системы координат, получим:

$$\left.\begin{aligned}
i\omega_0 m_{1x} + \gamma_1 (H_0 + \lambda M_{20})\, m_{1y} - \gamma_1 \lambda M_{10} m_{2y} = 0,\\
\gamma_1 (H_0 + \lambda M_{20})\, m_{1x} - i\omega_0 m_{1y} + \gamma_1 \lambda M_{10} m_{2x} = 0,\\
i\omega_0 m_{2x} + \gamma_2 (H_0 - \lambda M_{10})\, m_{2y} - \gamma_2 \lambda M_{20} m_{1y} = 0,\\
\gamma_2 (H_0 - \lambda M_{10})\, m_{2x} - i\omega_0 m_{2y} - \gamma_2 \lambda M_{20} m_{1x} = 0,\\
m_{1z} = m_{2z} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

где m_1 и m_2 с индексами x, y и z — проекции векторов $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ на соответствующие оси.

Приравнивая нулю определитель системы (2,5), можно непосредственно получить частоты собственной прецессии. Однако они могут быть получены несколько проще, если ввести переменные:

$$m_{1\pm} = m_{1x} \pm i m_{1y}; \quad m_{2\pm} = m_{2x} \pm i m_{2y}. \tag{2,6}$$

Уравнения для этих переменных легко получаются из (2,5) и имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
[\gamma_1 (H_0 + \lambda M_{20}) \mp \omega_0]\, m_{1\pm} + \gamma_1 \lambda M_{10} m_{2\pm} = 0,\\
\gamma_2 \lambda M_{20} m_{1\pm} + [-\gamma_2 (H_0 - \lambda M_{10}) \pm \omega_0]\, m_{2\pm} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2,7}$$

Приравнивая нулю определитель системы (2,7), получим:

$$[\gamma_1 (H_0 + \lambda M_{20}) \mp \omega_0][\gamma_2 (H_0 - \lambda M_{10}) \mp \omega_0] + \gamma_1 \gamma_2 \lambda^2 M_1 M_2 = 0, \tag{2,8}$$

откуда

$$\omega_0 = \pm \frac{1}{2}[H_0 (\gamma_1 + \gamma_2) - \lambda (\gamma_2 M_{10} - \gamma_1 M_{20})] \pm \frac{1}{2}\sqrt{H_0^2 (\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 2 H_0 \lambda (\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_1 M_{20} + \gamma_2 M_{10}) + \lambda^2 (\gamma_2 M_{10} - \gamma_1 M_{20})^2}. \tag{2,8а}$$

Заметим, что знаки $\pm$ перед первым членом в правой части (2,8а) и перед радикалом независимы: первые определяются знаками в (2,6), а вторые соответствуют двум корням квадратного уравнения для ω_0.

Учтем теперь, что

$$\lambda (M_{10} - M_{20}) \gg H_0 \tag{2,9}$$

(«молекулярные поля» λM_{10} и λM_{20} имеют порядок величины 10^7 э). Тогда, пренебрегая первым членом под радикалом в (2,8а), разлагая радикал в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, получим после несложных преобразований два значения собственной частоты:

$$\omega_{01} = \gamma_{\text{эф}} H_0, \tag{2,10}$$

$$\omega_{02} = \lambda (\gamma_2 M_{10} - \gamma_1 M_{20}) = \lambda (M_{10} - M_{20}) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{\text{эф}}}, \tag{2,11}$$

где

$$\gamma_{\text{эф}} = \frac{M_{10} - M_{20}}{\frac{M_{10}}{\gamma_1} - \frac{M_{20}}{\gamma_2}}. \tag{2,12}$$

Заметим, что $\gamma_{\text{эф}}$ представляет собой отношение результирующего постоянного магнитного момента $M_0 = M_{10} - M_{20}$ к результирующему постоянному механическому моменту $S_0 = \frac{M_{10}}{\gamma_1} - \frac{M_{20}}{\gamma_2}$.

Таким образом, частота ω_{01} первого собственного типа прецессии отличается от частоты прецессии намагниченности в ферромагнитной среде без подрешеток лишь заменой γ на $\gamma_{\text{эф}}$. Эта частота не зависит от молекулярного поля. Вторая же частота ω_{02} зависит от молекулярного поля и значительно превышает (если $M_{10} \neq M_{20}$) частоту ω_{01}. При обычных величинах внешнего поля, при которых ω_{01} лежит в диапазоне с. в. ч., ω_{02} находится в инфракрасном диапазоне.

Переходя к исследованию характера собственной прецессии в нескомпенсированном антиферромагнетике, примем для простоты, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. При этом собственная частота первого типа прецессии $\omega_{01} = \gamma H_0$. Подставляя эту величину в уравнения (2,5), мы убеждаемся, что уравнения совместны, если

$$m_{1y} = -i m_{1x}, \quad m_{2y} = -i m_{2x} \tag{2,13}$$

Любое из уравнений (2,5) дает при этом

$$m_{2x,y} = -\frac{M_{20}}{M_{10}} m_{1x,y}. \qquad (2,14)$$

Из (2,13) следует, что векторы $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ прецессируют в правом направлении таким образом, что их концы описывают круговые орбиты в плоскостях $z = \text{const}$ (рис. 4, *а*). При этом, как следует из (2,14), вектор $\boldsymbol{M}_2$ всегда антипараллелен вектору $\boldsymbol{M}_1$. Именно это обстоятельство и приводит к независимости собственной частоты от молекулярного поля для этого типа прецессии.

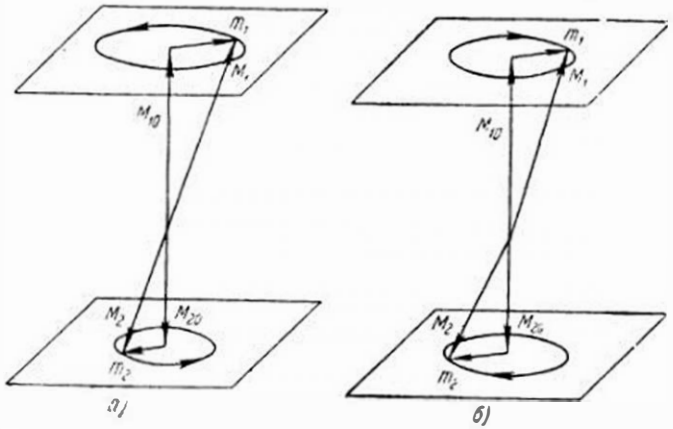


Рис. 4. Прецессия намагниченности в нескомпенсированном антиферромагнетике.
а—сверхвысокочастотный тип прецессии ($\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 = 0$). *б*—инфракрасный тип прецессии ($\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \neq 0$).

Для второго типа прецессии уравнения (2,5) оказываются совместными (при $\gamma_1 = \gamma_2$), если

$$m_{1y} = i m_{1x}, \quad m_{2y} = i m_{2x}, \qquad (2,15)$$

т. е. прецессия происходит в левом направлении. Вместо (2,14) при этом получается:

$$m_{2x,y} = -m_{1x,y}. \qquad (2,16)$$

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ во время прецессии не остаются антипараллельными (рис. 4, *б*). Это

приводит к влиянию обменных сил (т. е. «молекулярного поля») на собственную частоту ω_{02}.

Для того чтобы рассмотреть вынужденную прецессию намагниченности в нескомпенсированном антиферромагнетике, необходимо в уравнениях (2,3) принять:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H_0 + \boldsymbol{h} e^{i\omega t}.$$

Тогда, пренебрегая малыми членами второго порядка, получим для переменных намагниченностей подрешеток систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{m}_1}{dt} + \gamma_1 \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{z}_0 (H_0 + \lambda M_{20}) &= -\gamma_1 \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{h} M_{10}, \\ \frac{d\boldsymbol{m}_2}{dt} + \gamma_2 \boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{z}_0 (H_0 - \lambda M_{10}) &= \gamma_2 \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{h} M_{20}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,17)$$

Она отличается от системы для свободной прецессии только наличием правых частей.

Проектируя уравнения (2,17) на оси координат и решая полученную систему, можно определить величины m_{1x}, m_{1y}, m_{2x} и m_{2y} (при отсутствии потерь, как и для свободной прецессии, $m_{1z} = m_{2z} = 0$). Зная эти величины, нетрудно получить выражения и для компонентов тензора восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}$, который определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \overleftrightarrow{\chi} \boldsymbol{h}. \qquad (2,18)$$

Не приводя этих выражений, заметим лишь, что тензор $\overleftrightarrow{\chi}$ будет по-прежнему иметь вид (1,29). При изменении частоты переменного поля $\boldsymbol{h}$ будут иметь место два резонанса компонентов χ и χ_a, соответствующие двум собственным типам прецессии: при $\omega = \omega_{01}$ и при $\omega = \omega_{02}$. Вблизи $\omega = \omega_{01}$ резонансный характер будет иметь изменение $\chi + \chi_a$ (восприимчивости для поля с круговой поляризацией и правым вращением), а вблизи $\omega = \omega_{02}$ — изменение $\chi - \chi_a$ (восприимчивости для поля с левым вращением).

Вдали от частоты ω_{02}, например в диапазоне с. в. ч., выражения для компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ будут в первом приближении совпадать с выражениями, полученными в § 1, при замене:

$$M_0 \to M_{10} - M_{20}, \quad \gamma \to \gamma_{эф}. \qquad (2,19)$$

Любое из уравнений (2,5) дает при этом

$$m_{2\,x,y} = -\frac{M_{20}}{M_{10}} m_{1\,x,y}. \qquad (2,14)$$

Из (2,13) следует, что векторы $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ прецессируют в правом направлении таким образом, что их концы описывают круговые орбиты в плоскостях $z = \text{const}$ (рис. 4, *а*). При этом, как следует из (2,14), вектор $\boldsymbol{M}_2$ всегда антипараллелен вектору $\boldsymbol{M}_1$. Именно это обстоятельство и приводит к независимости собственной частоты от молекулярного поля для этого типа прецессии.

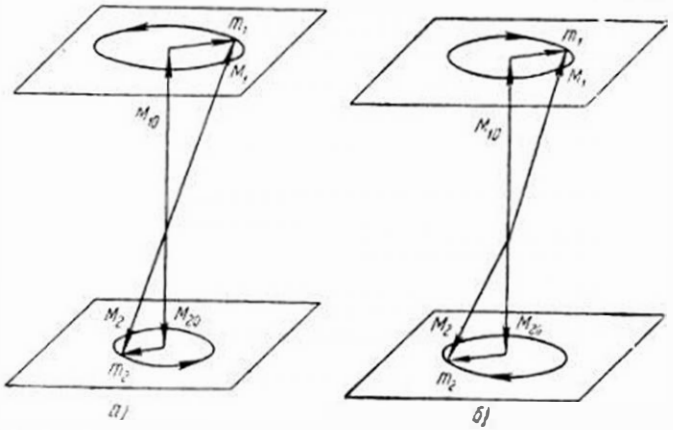


Рис. 4. Прецессия намагниченности в нескомпенсированном антиферромагнетике.

а—сверхвысокочастотный тип прецессии ($\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 = 0$). *б*—инфракрасный тип прецессии ($\boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{M}_2 \neq 0$).

Для второго типа прецессии уравнения (2,5) оказываются совместными (при $\gamma_1 = \gamma_2$), если

$$m_{1y} = i m_{1x}, \quad m_{2y} = i m_{2x}, \qquad (2,15)$$

т. е. прецессия происходит в левом направлении. Вместо (2,14) при этом получается:

$$m_{2\,x,y} = -m_{1\,x,y}. \qquad (2,16)$$

Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ во время прецессии не остаются антипараллельными (рис. 4, *б*). Это

приводит к влиянию обменных сил (т. е. «молекулярного поля») на собственную частоту ω_{02}.

Для того чтобы рассмотреть вынужденную прецессию намагниченности в нескомпенсированном антиферромагнетике, необходимо в уравнениях (2,3) принять:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H_0 + \boldsymbol{h} e^{i\omega t}.$$

Тогда, пренебрегая малыми членами второго порядка, получим для переменных намагниченностей подрешеток систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{m}_1}{dt} + \gamma_1 \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{z}_0 (H_0 + \lambda M_{20}) &= -\gamma_1 \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{h} M_{10}, \\ \frac{d\boldsymbol{m}_2}{dt} + \gamma_2 \boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{z}_0 (H_0 - \lambda M_{10}) &= \gamma_2 \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{h} M_{20}. \end{aligned}\right\} \qquad (2,17)$$

Она отличается от системы для свободной прецессии только наличием правых частей.

Проектируя уравнения (2,17) на оси координат и решая полученную систему, можно определить величины m_{1x}, m_{1y}, m_{2x} и m_{2y} (при отсутствии потерь, как и для свободной прецессии, $m_{1z} = m_{2z} = 0$). Зная эти величины, нетрудно получить выражения и для компонентов тензора восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}$, который определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 = \overleftrightarrow{\chi} \boldsymbol{h} \qquad (2,18)$$

Не приводя этих выражений, заметим лишь, что тензор $\overleftrightarrow{\chi}$ будет по-прежнему иметь вид (1,29). При изменении частоты переменного поля $\boldsymbol{h}$ будут иметь место два резонанса компонентов χ и χ_a, соответствующие двум собственным типам прецессии: при $\omega = \omega_{01}$ и при $\omega = \omega_{02}$. Вблизи $\omega = \omega_{01}$ резонансный характер будет иметь изменение $\chi + \chi_a$ (восприимчивости для поля с круговой поляризацией и правым вращением), а вблизи $\omega = \omega_{02}$— изменение $\chi - \chi_a$ (восприимчивости для поля с левым вращением).

Вдали от частоты ω_{02}, например в диапазоне с. в. ч., выражения для компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ будут в первом приближении совпадать с выражениями, полученными в § 1, при замене:

$$M_0 \to M_{10} - M_{20}, \quad \gamma \to \gamma_{эф}. \qquad (2,19)$$

Таким образом, в диапазоне с. в. ч. свойства ферритов, не обладающих точками компенсации [1]), практически не отличаются от свойств простых ферромагнетиков. Этот важный вывод подтверждается расчетами, проведенными для большего числа подрешеток с параллельными и антипараллельными постоянными намагниченностями [169], а также для трех подрешеток, постоянные намагниченности которых образуют между собой углы, не равные нулю или π [173]. Обширный экспериментальный материал по исследованию свойств намагниченных ферритов в диапазоне с. в. ч. также подтверждает справедливость этого вывода.

Величины γ для различных подрешеток обычно близки друг к другу. При этом, как видно из формулы (2,12), значение $\gamma_{эф}$ вдали от точек компенсации должно также мало отличаться от этих величин. Действительно, значения g-фактора для ферромагнитных полупроводников, не имеющих точек компенсации или вдали от них, лежат в пределах приблизительно 2,0 : 2,2.

Специфика нескомпенсированного антиферромагнетизма должна проявиться в наличии второго, «обменного» резонанса и в аномальном поведении g-фактора вблизи точек компенсации.

Обменный резонанс в инфракрасном диапазоне не удалось до настоящего времени наблюдать экспериментально. Это объясняется, по-видимому, как малой прозрачностью ферромагнитных полупроводников в этой области спектра, так и слабой интенсивностью этого резонанса: как показывает расчет [166], она должна быть пропорциональна $(\gamma_1-\gamma_2)^2$.

Согласно формуле (2,12) $\gamma_{эф}$ должно было бы обращаться в нуль в «магнитной» точке компенсации (где $|M_{10}|=|M_{20}|$) и в бесконечность — в «механической» точке

[1]) Точками компенсации называются такие точки, в которых результирующая намагниченность $M_{10}-M_{20}$ или результирующий механический момент $\frac{M_{10}}{\gamma_1}-\frac{M_{20}}{\gamma_2}$ обращается в нуль. Эти точки наблюдаются в некоторых ферромагнитных полупроводниках, например, в никелевых феррит-алюминатах [170], литий-хромовом феррите [172] и редкоземельных ферритах [176, 177] при изменении температуры или состава.

(где $\frac{|M_{10}|}{\gamma_1}=\frac{|M_{20}|}{\gamma_2}$). В действительности формулы (2,10)—(2,12) несправедливы вблизи точек компенсации, так как в этой области не выполняется условие (2,9). Если не делать этого допущения, то можно показать [180], что и области точек компенсации также имеются два собственных типа колебаний с различными направлениями прецессии. Однако в отличие от рассмотренного выше случая собственные частоты обоих этих типов прецессии существенно зависят от молекулярного поля, т. е. оба типа связаны с обменным взаимодействием. Оба резонанса в области точек компенсации могут лежать в диапазоне с. в. ч. Эффективные значения g-факторов для них, как показывает расчет [180], должны измениться в очень широких пределах.

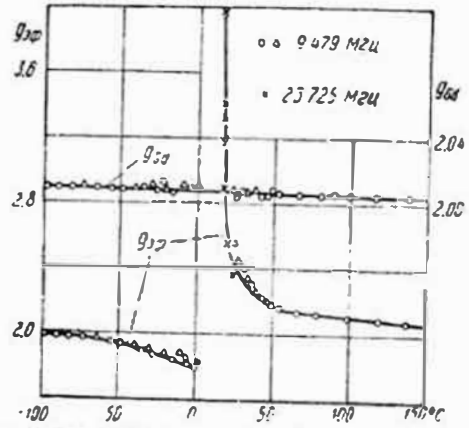


Рис. 5. Эффективный g-фактор гадолиниевого феррита со структурой граната и g-фактор подрешетки гадолиния в зависимости от температуры [177].
Точки компенсации лежат около 13° С.

Экспериментальные результаты по исследованию ферромагнитного резонанса в ферритах вблизи точек компенсации [170, 172, 176, 177] подтверждают правильность высказанных положений. Например, на рис. 5 приведены результаты измерения эффективного g-фактора феррита, имеющего точки компенсации.

Заметим в заключение, что наличие двух резонансов и «аномальное» изменение g-факторов вблизи точек компенсации является (наряду с результатами нейтронографических исследований [43]) одним из наиболее прямых подтверждений справедливости наших представлений о ферритах как о нескомпенсированных антиферромагнетиках. Измерение этих эффективных g-факторов дает возможность, в частности, определить отношения g-факторов отдельных подрешеток и величину «молекулярного» поля. Например, для гадолиниевого феррита $Gd_3Fe_5O_{12}$ со структурой типа граната было получено [180], что в точке компенсации ($\sim 13^\circ$ C) $\lambda M_{10} = \lambda M_{20} = 230\,000$ э, а $g_1/g_2 = 1{,}01$.

§ 3. Спиновые волны

До сих пор мы рассматривали однородную прецессию намагниченности, имеющую в различных точках пространства одинаковые амплитуды и фазы. Одной из причин неоднородности прецессии является распространение в феррите электромагнитных волн. При этом переменная намагниченность по-прежнему может быть принята однородной в объеме, малом по сравнению с длиной электромагнитных волн в среде. Распределение же электромагнитного поля и намагниченности во всей системе с размерами, сравнимыми с длиной волны, во многих случаях может быть найдено путем решения уравнений Максвелла для среды, параметры которой определяются однородной прецессией. Такие задачи будут рассмотрены во второй части книги.

Неоднородная прецессия намагниченности может возникать и в намагниченных ферритовых образцах с размерами значительно меньшими, чем длина электромагнитной волны. Она связана при этом с существованием неоднородных решений граничной магнитостатической задачи для таких образцов. Такие типы прецессии будут рассмотрены в § 6.

Может, однако, существовать неоднородная прецессия намагниченности, зависимость которой от координат характеризуется длинами волн значительно меньшими, чем длина электромагнитной волны или размеры образца.

Условия на границах образца не оказывают вследствие малости длины волны сколько-нибудь существенного влияния на эту прецессию. Поэтому рассмотрение ее возможно в рамках данной главы, т. е. для неограниченной изотропной среды.

Такой вид прецессии намагниченности носит название спиновых волн. Эти волны являются классическим аналогом квантовомеханических спиновых волн (магнонов) [6], которые, согласно современным представлениям, играют большую роль во многих магнитных явлениях. Однородной прецессии намагниченности соответствуют магноны с бесконечной длиной волны (с волновым числом k, равным нулю). Неоднородным типам прецессии, связанным с граничными условиями, которые будут рассматриваться в § 6, соответствуют магноны с конечными, но малыми k.

Анализ спиновых волн с квазиклассической точки зрения на основании уравнения Ландау — Лифшица был произведен Херрингом и Киттелем [129]. Следуя им, представим намагниченность в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t), \tag{3,1}$$

где $\boldsymbol{M}_0$ — постоянная намагниченность, а

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \tag{3,2}$$

что соответствует бегущей волне с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, т. е. с длиной волны $\lambda_k = \frac{2\pi}{k}$.

Малость длины волны спиновых волн требует учета «неоднородного» члена $\boldsymbol{H}_\delta$ в эффективном поле обменного взаимодействия (1,11) (молекулярное поле $\boldsymbol{H}_\lambda$ в уравнение Ландау — Лифшица не войдет), а также размагничивающего поля $\boldsymbol{H}_M$, связанного с изменением намагниченности в пространстве. Таким образом, эффективное поле запишется:

$$\boldsymbol{H}_{эф} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_\delta + \boldsymbol{H}_M \tag{3,3}$$

где $\boldsymbol{H}$ — внешнее магнитное поле.

Ограничимся рассмотрением собственной прецессии. Тогда внешнее магнитное поле будет постоянно,

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0. \tag{3,4}$$

Эффективное поле $\boldsymbol{H}_q$ определится выражением (1,15). Подставляя в него (3,1) и учитывая (3,2), получим:

$$\boldsymbol{H}_q = q\boldsymbol{m}_0 \nabla^2 \{\exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})]\}. \qquad (3,5)$$

Легко убедиться, что

$$\nabla^2 \{\exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})]\} = -k^2 \exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})]. \qquad (3,6)$$

С учетом (3,6) выражение (3,5) запишется:

$$\boldsymbol{H}_q = -k^2 q \boldsymbol{m}_0 \exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})]. \qquad (3,7)$$

Размагничивающее поле $\boldsymbol{H}_M$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (12,16) и (12,17), приведенным ниже. Уравнение (12,16) в данном случае запишется:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}_M = -4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{m}. \qquad (3,8)$$

В уравнении (12,17) можно, во-первых, пренебречь членом $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, учитывающим запаздывание при распространении электромагнитных волн. Так как длина спиновых волн значительно меньше, чем электромагнитных, этот член значительно меньше, чем первый член в уравнении (12,17). Во-вторых, в этом уравнении можно пренебречь членом $\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$, так как нас интересуют ферромагнитные полупроводники с малой проводимостью. Тогда уравнение (12,17) перейдет в уравнение магнитостатики для непроводящей среды:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_M = 0. \qquad (3,9)$$

Из уравнений (3,8) и (3,9) нетрудно выразить $\boldsymbol{H}_M$ через $\boldsymbol{m}$. Взяв rot от (3,9), получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{H}_M - \nabla^2 \boldsymbol{H}_M = 0.$$

Отсюда с учетом (3,8) следует:

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}_M = -4\pi \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{m}. \qquad (3,10)$$

Будем искать $\boldsymbol{H}_M$ в форме

$$\boldsymbol{H}_M = \boldsymbol{H}_{M_0} \exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})].$$

Тогда, принимая во внимание (3,2), (3,6) и соотношение

$$\operatorname{grad}[\exp\{i(\omega t - \boldsymbol{kr})\}] = -i\boldsymbol{k} \exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})],$$

из (3,10) легко получить окончательное выражение для размагничивающего поля:

$$\boldsymbol{H}_M = -\frac{4\pi}{k^2}\boldsymbol{k}(\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{k}) \exp[i(\omega t - \boldsymbol{kr})] \qquad (3,11)$$

Подставим намагниченность (3,1) с учетом (3,2) и эффективное поле (3,3) с учетом (3,4), (3,7) и (3,11) в уравнение Ландау — Лифшица (1,9). Учитывая, что векторы $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ параллельны, и пренебрегая малыми членами второго порядка, получим уравнение для амплитуды спиновой волны

$$i\omega \boldsymbol{m}_0 + \gamma\left[\boldsymbol{m}_0 \times \boldsymbol{H}_0 - qk^2 \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{m}_0 - \frac{4\pi}{k^2}(\boldsymbol{m}_0\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{k}\right] = 0. \qquad (3,12)$$

Спроектируем это уравнение на оси координат, приняв, как обычно, что $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{M}_0$ направлены по оси z. Из проекции на ось z следует, что в первом приближении $m_{0z} = 0$. Учитывая это, проекции на оси x и y запишутся следующим образом:

$$\left(-i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) m_{0x} + \left(\omega_H + \omega_{обм} + \omega_M \frac{k_y^2}{k^2}\right) m_{0y} = 0,$$
$$\left(\omega_H + \omega_{обм} + \omega_M \frac{k_x^2}{k^2}\right) m_{0x} + \left(i\omega + \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2}\right) m_{0y} = 0. \qquad (3,13)$$

При этом учтено обозначение (1,22) и введены обозначения:

$$\omega_{обм} = \gamma q k^2 M_0. \qquad (3,14)$$

$$\omega_M = 4\pi\gamma M_0. \qquad (3,15)$$

Равенство нулю определителя системы (3,13) дает выражение для собственной частоты спиновой волны:

$$\omega_k^2 = (\omega_H + \omega_{обм})(\omega_H + \omega_{обм} + \omega_M \sin^2\theta_k) \qquad (3,16)$$

где $\vartheta_k = \arcsin \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{k}$ — угол между направлением распространения волны (направлением вектора $\boldsymbol{k}$) и направлением постоянного намагничивания (осью z).

На рис. 6 показана зависимость частоты ω_k от волнового числа k, определяемая выражением (3,16), или так

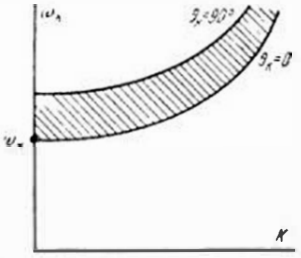


Рис. 6. Спектр спиновых волн в неограниченной среде.

волн. В предельном случае при $\vartheta_k = 0$ собственная частота спиновых волн совпадает с собственной частотой ω_H однородной прецессии в неограниченной среде. Частоты всех других спиновых волн превышают эту частоту. Однако при малых k рассмотрение неоднородной прецессии возможно лишь с учетом граничных условий для данной формы образца. Спектр такой прецессии, как будет показано в § 6, является уже не сплошным, как рассмотренный спектр плоских спиновых волн, а дискретным.

При достаточно больших k (т. е. при $\lambda_k = \frac{2\pi}{k}$, значительно меньших, чем размеры образца) формула (3,16) может быть приближенно применена и для ограниченных образцов. При этом необходимо лишь под ω_H понимать величину γH_{i0}, где H_{i0} — внутреннее постоянное магнитное поле в образце (с учетом размагничивания). Тогда в отличие от неограниченной среды будет иметь место вырождение — совпадение частот однородной прецессии и целой группы спиновых волн с различными k и ϑ_k.

Взаимодействие спиновых волн (с квантовой точки зрения — магнонов) с тепловыми колебаниями кристаллической решетки (фононами) приводит к тому, что в ферромагнетике всегда имеется некоторое статистическое распределение спиновых волн с различными значениями k и ϑ_k. Амплитуды этих волн, возбуждаемых тепловым движением, являются, конечно, очень малыми.

Как показал теоретически Киттель [137], спиновые волны в ограниченных образцах могут возбуждаться

однородным высокочастотным полем. Это было подтверждено экспериментально [138] для случая очень тонкой металлической пленки. В случае ферритов возбуждение спиновых волн под воздействием однородного поля может происходить при наличии различных магнитных неоднородностей. К числу таких неоднородностей относятся: 1) микроскопические неоднородности, обусловленные беспорядочным распределением магнитных ионов в узлах кристаллической решетки; 2) макроскопические неоднородности на границах кристалликов в поликристаллических материалах; 3) макроскопические неоднородности, обусловленные шероховатостью поверхности образцов. Возбуждающиеся в этих случаях спиновые волны имеют длины волн, соответствующие размерам неоднородностей.

Связь между однородной прецессией и спиновыми волнами возникает также при больших амплитудах однородной прецессии вследствие нелинейности уравнения Ландау — Лифшица. Эта связь является причиной ряда интересных нелинейных явлений. Некоторые из них будут рассмотрены в третьей части книги.

§ 4. Магнитные потери. Ширина резонансной кривой

В реальных ферромагнитных средах всегда имеют место магнитные потери, обусловленные взаимодействием спинов с окружающей средой. Наличие магнитных потерь приводит к тому, что свободная прецессия намагниченности в реальных средах является затухающей, и при отсутствии внешнего переменного поля очень скоро устанавливается равновесное состояние, соответствующее статической намагниченности $\boldsymbol{M}_{0\,0}$. В случае вынужденной прецессии наличие магнитных потерь приведет к тому, что компоненты тензоров $\overleftrightarrow{\chi}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ будут комплексными, а значения вещественных и мнимых частей этих компонентов будут оставаться конечными при ферромагнитном резонансе.

Отвлекаясь пока от микроскопических процессов, вызывающих магнитные потери, обобщим теорию, рассмотренную в § 1, в направлении феноменологического учета потерь. Для этого нужно преобразовать исходное уравнение (1,9) так, чтобы оно учитывало потери. Одним из

путей такого преобразования может явиться предположение, что на намагниченность, кроме поля $\boldsymbol{H}_{эф}$, действует некоторое эффективное поле «сил трения», антипараллельное и пропорциональное по величине скорости изменения намагниченности. Тогда уравнение (1,9) заменится уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}_{эф} + \frac{\alpha}{M} \boldsymbol{M} \times \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}, \qquad (4,1)$$

где α—безразмерный параметр, характеризующий потери.

Если потери малы, т. е. второй член в (4,1) мал по сравнению с первым, то $\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}$ во втором члене можно приближенно заменить на $-\gamma \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}_{эф}$. Тогда уравнение (4,1) перейдет в следующее[1]):

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} - \frac{\eta}{M^2} \boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}), \qquad (4,2)$$

где

$$\eta = \alpha \gamma M. \qquad (4,3)$$

Это уравнение, которое может быть также записано в виде

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} + \eta \left[\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{M})}{M^2}\right], \qquad (4,2а)$$

и было предложено в 1935 г. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [66].

Из уравнения (4,1) или (4,2) следует, что

$$\boldsymbol{M} \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = 0,$$

т. е.

$$M^2 = \text{const}. \qquad (4,4)$$

Согласно этим уравнениям прецессия намагниченности и при наличии потерь происходит таким образом, что длина вектора $\boldsymbol{M}$ не изменяется.

Уравнение прецессии намагниченности, не удовлетворяющее этому условию, может быть записано, например,

[1]) Индекс «эф» мы будем в дальнейшем опускать.

в виде

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} + \omega_r [\chi_0 \boldsymbol{H} - \boldsymbol{M}], \qquad (4,5)$$

где $\chi_0 = \frac{M_0}{H_0}$ — статическая восприимчивость, а ω_r — частота релаксации. Обратная величина

$$\tau_r = \frac{1}{\omega_r} \qquad (4,6)$$

может быть названа временем релаксации.

В уравнении (4,5)—так называемом модифицированном уравнении Блоха [77]—связанная с потерями часть $\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}$ пропорциональна отклонению $\boldsymbol{M}$ от того значения намагниченности $\chi_0 \boldsymbol{H}$, которое установилось бы, если бы магнитное поле перестало изменяться, сохраняя свое мгновенное значение $\boldsymbol{H}$.

Во всех приведенных уравнениях потери характеризуются одним каким-либо параметром: α, η или ω_r. Делались попытки применить к ферромагнетикам уравнения с бо́льшим числом параметров, характеризующих потери, например уравнения Блоха с двумя временами релаксации[1]) или уравнение, отличающееся от (4,2) наличием дополнительного члена, пропорционального $\boldsymbol{M}$ [87]. Однако имеющийся в настоящее время экспериментальный материал и теоретические соображения [101], по-видимому, не требуют для случая ферромагнетика введения в уравнение прецессии более одного параметра, характеризующего потери.

Если переменные составляющие намагниченности и поля малы по сравнению с постоянными составляющими, то множитель $\frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}}{M^2}$ в последнем члене (4,2а) может быть заменен на $\frac{H_0}{M_0} = \frac{1}{\chi_0}$. Тогда уравнение (4,2) совпадает приближенно с уравнением (4,5) при

$$\omega_r = \frac{1}{\chi_0} \eta. \qquad (4,7)$$

[1]) См. статью Бломбергена в сборнике [22].

При малых потерях уравнение (4,5) будет эквивалентно и уравнению (4,1). Принимая во внимание (4,3) и заменяя M на M_0, приходим к соотношению

$$\omega_r = \alpha\gamma H_0. \tag{4,8}$$

Итак, для малых потерь, т. е. при $\alpha \ll 1$ (что всегда имеет место для представляющих практический интерес ферритов) и малых амплитуд прецессии (которые мы рассматриваем в первой части книги) уравнения (4,1), (4,2) и (4,5) эквивалентны.

Рассмотрим свободную прецессию намагниченности в неограниченной среде так же, как и в § 1, но исходя теперь из уравнения (4,5). При этом $H = H_0$ будет внешнее постоянное поле. Мы найдем в этом случае, что собственная частота прецессии будет комплексной и равной

$$\omega_0 = \omega_H + i\omega_r. \tag{4,9}$$

Отсюда очевидно, что время релаксации τ_r имеет смысл времени, за которое амплитуда свободной прецессии убывает в e раз.

Рассматривая вынужденную прецессию с учетом потерь, получим из (4,5), если пренебречь малыми величинами второго порядка, следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (i\omega + \omega_r)\, m_x + \omega_H m_y &= \gamma M_0 h_y + \omega_r \chi_0 h_x, \\ -\omega_H m_x + (i\omega + \omega_r)\, m_y &= -\gamma M_0 h_x + \omega_r \chi_0 h_y, \\ (i\omega + \omega_r)\, m_z &= \omega_r \chi_0 h_z. \end{aligned}\right\} \tag{4,10}$$

Решая эту систему, найдем для компонентов тензора восприимчивости выражения

$$\chi = \chi_0 \frac{\omega_{\text{рез}}^2 + i\omega\omega_r}{\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r}, \tag{4,11}$$

$$\chi_a = \chi_0 \frac{\omega\omega_H}{\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_r}, \tag{4,12}$$

$$\chi_\parallel = \chi_0 \frac{\omega_r}{i\omega + \omega_r}, \tag{4,13}$$

где резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_r^2}. \tag{4,14}$$

Заметим, что к комплексным выражениям, близким к (4,11) и (4,12) (но не совпадающим с ними), можно прийти и результате замены ω_H на комплексную собственную частоту (4,9) и выражениях (1,30), полученных без учета потерь.

Для реальных ферритов в диапазоне с. в. ч. можно считать, что $\omega_r \ll \omega_H$ и $\omega_r \ll \omega$. Тогда резонансная частота практически не отличается от ω_H, а величиной $\chi_\parallel$ можно пренебречь.

Разделяя вещественные и мнимые части (4,11), (4,12) и (4,13), получим:

$$\chi = \chi' - i\chi'' = \chi_0 \frac{\omega_{\text{рез}}^2(\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2) + 2\omega^2\omega_r^2}{(\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2} - i\chi_0 \frac{\omega\omega_r(\omega_{\text{рез}}^2 + \omega^2)}{(\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}, \tag{4,11a}$$

$$\chi_a = \chi_a' - i\chi_a'' = \chi_0 \frac{\omega\omega_H(\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2)}{(\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2} - i\chi_0 \frac{2\omega^2\omega_H\omega_r}{(\omega_{\text{рез}}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}, \tag{4,12a}$$

$$\chi_\parallel = \chi_\parallel' - i\chi_\parallel'' = \chi_0 \frac{\omega_r^2}{\omega^2 + \omega_r^2} - i\chi_0 \frac{\omega\omega_r}{\omega^2 + \omega_r^2}. \tag{4,13a}$$

Компоненты тензора магнитной проницаемости могут быть, согласно (1,32), определены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \mu' &= 1 + 4\pi\chi', \quad & \mu_a' &= 4\pi\chi_a', \quad & \mu_\parallel' &= 1 + 4\pi\chi_\parallel', \\ \mu'' &= 4\pi\chi'', & \mu_a'' &= 4\pi\chi_a'', & \mu_\parallel'' &= 4\pi\chi_\parallel''. \end{aligned}\right\} \tag{4,15}$$

Графики зависимостей μ', μ_a', μ'' и μ_a'' от H_0 представлены на рис. 7. При этом для ω_r принято значение $3 \cdot 10^9$, а для остальных величин — те же значения, что и на рис. 2 и 3[1]).

В точке резонанса ($\omega = \omega_{\text{рез}}$)

$$\left.\begin{aligned} \mu'_{\text{рез}} &= 1 + 2\pi\chi_0, \quad & \mu''_{\text{рез}} &= 2\pi\chi_0 \frac{\omega_{\text{рез}}}{\omega_r}, \\ \mu'_{a\,\text{рез}} &= 0, & \mu''_{a\,\text{рез}} &= 2\pi\chi_0 \frac{\omega_H}{\omega_r}, \end{aligned}\right\} \tag{4,16}$$

[1]) Результаты расчета приведены на рис. 7 (как и на рис. 2 и 3) лишь при больших полях, достаточных для насыщения. Для малых полей на рис. 7 представлены типичные экспериментальные зависимости, которые будут обсуждаться в главе 4.

и если $\omega_r \ll \omega_H$, то

$$\mu''_{\text{рез}} \cong \mu''_{a\,\text{рез}} = 2\pi \frac{\gamma M_0}{\omega_r}. \qquad (4,17)$$

Определим ширину резонансной кривой $2\Delta H$ как разность полей $H_{1/2}$, при которых

$$\mu'' = \frac{1}{2}\mu''_{\text{рез}}.$$

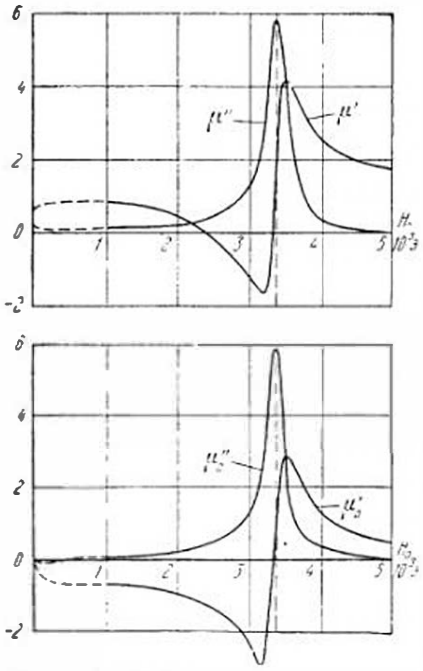


Рис. 7. Зависимость вещественных и мнимых частей компонентов тензора μ от постоянного магнитного поля.
Сплошные линии—расчет по формулам (4,15), (4,11) и (4,12) при $M_0 = 160$ эс, $\omega = 2\pi \cdot 9375$ Мгц, $\omega_r = 3 \cdot 10^9$. Пунктир—экспериментальные зависимости, показанные подробно на рис. 28.

Подставляя в это условие μ'' из (4,15) и $\mu''_{\text{рез}}$ из (4,16) и решая полученное уравнение относительно H_0, найдем в первом приближении (при $\omega_r \ll \omega_H$)

$$H_{1/2} = H_\omega \left(1 \pm \frac{\omega_r}{\omega}\right),$$

где $H_\omega = \frac{\omega}{\gamma}$. Отсюда полуширина резонансной кривой

$$\Delta H = \frac{\omega_r}{\gamma}. \qquad (4,18)$$

Для полуширины резонансной кривой μ''_a получается в первом приближении такое же выражение.

Из (4,16) и (4,18) видно, что высота резонансных максимумов μ'' или μ''_a обратно пропорциональна, а ширина их прямо пропорциональна частоте релаксации ω_r. Произведение максимума и ширины резонансных кривых

$$\mu''_{\text{рез}} \cdot 2\Delta H = 4\pi M_0. \qquad (4,19)$$

Вдали от резонанса при вычислении вещественных частей компонентов тензоров $\overleftrightarrow{\chi}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ можно, пренебрегая потерями, пользоваться выражениями, полученными в § 1. Формулы же для χ'' и χ''_a вдали от резонанса могут быть записаны:

$$\chi'' = \chi_0 \frac{\omega\omega_r(\omega_H^2 + \omega^2)}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2}, \qquad \chi''_a = 2\chi_0 \frac{\omega_H \omega^2 \omega_r}{(\omega_H^2 - \omega^2)^2}. \qquad (4,20)$$

В частности, в области малых полей ($\omega_H^2 \ll \omega^2$), но достаточных для насыщения,

$$\chi'' = \chi_0 \frac{\omega_r}{\omega}, \qquad \chi''_a = 2\frac{\gamma M_0 \omega_r}{\omega^2}. \qquad (4,21)$$

В § 1 было показано, что для поперечного поля с круговой поляризацией магнитная проницаемость является скалярной величиной, равной $\mu_{\text{п}} = \mu + \mu_a$ для правого и $\mu_{\text{л}} = \mu - \mu_a$ для левого направления вращения. Этот результат остается в силе и при наличии потерь, в чем легко убедиться, повторяя для этого случая рассуждения, которые были приведены в § 1. Для вещественных и мнимых частей $\mu_{\text{п}}$ и $\mu_{\text{л}}$ из (4,11а), (4,12а) и (4,15) следует:

$$\left.\begin{aligned} \mu'_{\text{п, л}} &= 1 + 4\pi\chi_0 \frac{(\omega^2_{\text{рез}} - \omega^2)\cdot(\omega^2_{\text{рез}} \pm \omega\omega_H) + 2\omega^2\omega_r^2}{(\omega^2_{\text{рез}} - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}, \\ \mu''_{\text{п, л}} &= 4\pi\chi_0\omega\omega_r \frac{(\omega_H \pm \omega))^2 + \omega_r^2}{(\omega^2_{\text{рез}} - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}. \end{aligned}\right| \qquad (4,22)$$

Графики зависимостей $\mu'_{\text{п}}$, $\mu'_{\text{л}}$, $\mu''_{\text{п}}$ и $\mu''_{\text{л}}$ от H_0 приведены на рис. 8. Из этих графиков видно, что изменение $\mu'_{\text{п}}$ и $\mu''_{\text{п}}$ является резонансным, зависимость же $\mu'_{\text{л}}$ и $\mu''_{\text{л}}$ от H_0 не носит резонансного характера: $\mu'_{\text{л}}$ изменяется монотонно, а $\mu''_{\text{л}}$ остается везде малым. В точке ферромагнитного резонанса ($\omega = \omega_{\text{рез}}$) $\mu''_{\text{п}}$ достигает большой величины:

$$\mu''_{\text{п. рез}} = \gamma \frac{4\pi M_0}{\omega_r}, \qquad (4,23)$$

в то время как

$$\mu''_{\text{л. рез}} = \pi\chi_0 \frac{\omega_r}{\omega}. \qquad (4,24)$$

Вдали от резонанса

$$\mu_н'' = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_r}{\omega_H^2 - \omega^2}; \qquad (4,25)$$

$$\mu_д'' = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_r}{\omega_H^2 + \omega^2}. \qquad (4,26)$$

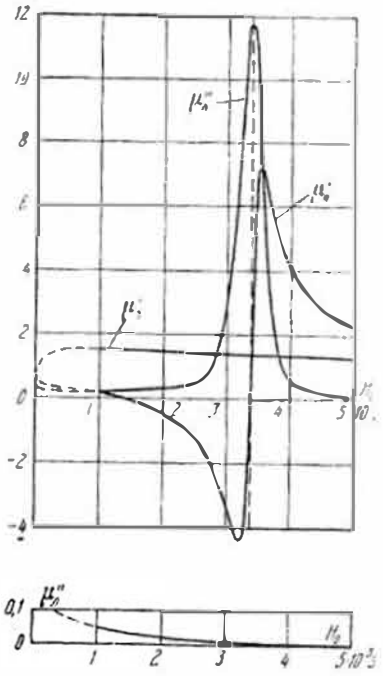


Рис. 8. Зависимость вещественных и мнимых частей проницаемостей $\mu_н$ и $\mu_д$ от постоянного магнитного поля.

Сплошные линии—расчет по формулам (4,22) при тех же значениях величин, что и на рис. 7. Пунктир—экспериментальные зависимости (на основе данных рис. 28).

Сравнивая результаты рассмотренной феноменологической теории с экспериментом, необходимо учитывать влияние анизотропии: в первую очередь кристаллографической, а при малых M_0 — также влияние доменной структуры. Для правильного истолкования результатов экспериментов необходимо также принимать во внимание форму образцов. Все эти вопросы будут рассмотрены в следующих главах. Здесь отметим лишь, что рассмотренная теория не противоречит имеющимся экспериментальным результатам. Однако эти результаты не дают пока возможности ответить на вопрос, какой из коэффициентов: ω_r, η или α—в большей степени независим от M_0 и H_0, т. е. какой форме уравнений: (4,1), (4,2) или (4,5)—следует отдать предпочтение.

Остановимся теперь кратко на физических процессах, которыми обусловлены магнитные потери в ферритах. Электромагнитная энергия, связанная с прецессией намагниченности, передается в конечном счете кристаллической решетке ферромагнетика, превращаясь в энергию ее тепловых колебаний. Эта передача может происходить, вообще говоря, или непосредственно при взаимодействии с фононами спинов электронов, участвующих в ферромагнетизме, или же в результате более сложных процессов. Очевидно, что рассмотрение всех этих процессов возможно лишь на основе квантовомеханических представлений.

Непосредственное взаимодействие прецессии намагниченности с кристаллической решеткой сводится к элементарным процессам, при которых происходит уничтожение магнона с очень малым k (например, с $k = 0$) и возникновение фонона. Эти процессы, как показывают расчеты [99], имеют очень малую вероятность. Они могут дать величину магнитных потерь лишь в 10^7—10^8 раз меньшую, чем та, которая имеет место в действительности. Таким образом, магнитные потери в ферромагнетиках могут быть обусловлены лишь более сложными процессами. В них должны участвовать электроны проводимости или спиновые волны с большими k. В ферромагнитных полупроводниках с малой электропроводностью электроны проводимости не могут играть сколько-нибудь существенной роли. Здесь передача энергии от прецессии намагниченности (магнонов с $k \cong 0$) кристаллической решетке может происходить, вообще говоря, либо в результате процессов рассеяния с одновременным образованием фонона и магнона с $k > 0$, либо в результате протекания двух процессов: а) $M_{k\cong 0} \rightarrow M_{k>0}$ (уничтожение магнона с $k \cong 0$ и возникновение магнона с $k > 0$), б) $M_{k>0} \rightarrow \Phi$ (уничтожение магнона с $k > 0$ и образование фонона) [87].

Вероятность процессов рассеяния весьма мала. Таким образом, механизмом, объясняющим магнитные потери в ферромагнитных полупроводниках, является совместное протекание процессов, обозначенных выше а) и б). При этом, как всегда при двухступенчатой релаксации, результирующее время релаксации, от которого зависят потери, определяется в основном тем процессом, который происходит с меньшей вероятностью, т. е. имеет большее время релаксации.

Как показал А. И. Ахиезер [99], передача энергии коротковолновыми спиновыми волнами кристаллической решетке в результате процессов $M_{k>0} \rightarrow \Phi$ происходит

весьма эффективно. Можно поэтому предположить, что результирующее время релаксации определяется в основном процессами $M_{k=0} \rightarrow M_{k>0}$. Эти процессы имеют большую вероятность при выполнении двух условий [107]:

1) равенство энергий магнонов с $k=0$ и с $k>0$, т. е. с классической точки зрения совпадение собственных частот (вырождение) соответствующих типов прецессии;

2) наличие магнитных неоднородностей, обусловленных, например, беспорядком в распределении магнитных ионов в кристаллической решетке.

Как указывалось в § 3, вырождение однородной прецессии и спиновых волн с $k>0$ всегда имеет место в ограниченных телах. Что же касается магнитного «беспорядка», то он всегда свойствен реальным средам. В особенности резко он выражен в ферритах с обращенной структурой шпинели, в которых распределение двух- и трехвалентных ионов по октаэдрическим узлам решетки является беспорядочным [44].

Вычисление магнитных потерь (определяющих ширину резонансной кривой) на основе рассмотренного механизма было произведено Клогстоном и др. [107] для случая эллипсоида вращения. Ими было получено время релаксации порядка 10^{-9} *сек*, что соответствует экспериментальным результатам для монокристаллов ферритов со структурой типа шпинели.

Согласно теории Клогстона и др. величина потерь оказалась пропорциональной $\sqrt{M_0}$. Это приводит к медленному уменьшению потерь с ростом температуры, что также подтверждается экспериментально для ряда ферритов [115]. Подтверждением правильности представления о роли неоднородностей в механизме магнитных потерь служит также тот факт, что для иттриевого феррита со структурой граната [46], в котором отсутствует беспорядок в распределении магнитных ионов по узлам решетки, кривые ферромагнитного резонанса оказываются более узкими, чем для ферритов со структурой шпинели. Наиболее узкие резонансные кривые ферритов со структурой шпинели составляют 10—20 *э* (для марганцевого и марганец-магниевого ферритов). Для иттриевого же феррита со структурой граната была получена кривая шириной менее 0,5 *э* [122, 467].

Как уже отмечалось в § 3, макроскопические неоднородности на поверхности ферритовых образцов и внутри их (например, в поликристаллах—на границах между кристалликами) приводят так же, как и рассмотренные выше микроскопические неоднородности, к возбуждению спиновых волн. В случае вырождения этих волн с однородной прецессией намагниченности будут иметь место потери, обусловленные переходом энергии от однородной прецессии к спиновым волнам и от них—к кристаллической решетке феррита. Некоторые данные, характеризующие такие потери, будут приведены в § 5—для случая поверхностных неоднородностей и в § 8—для случая поликристалла.

ГЛАВА 2

МАЛЫЙ ЭЛЛИПСОИД

§ 5. Однородная прецессия намагниченности

Магнитные явления в ферромагнетиках, в том числе и происходящие на сверхвысоких частотах, существенно зависят от формы образцов. Эта зависимость при квантовом подходе определяется дипольным магнитным взаимодействием, а при квазиклассическом подходе — размагничивающими полями. Результирующее магнитное поле, которое является суммой внешнего и размагничивающего полей, и намагниченность подчиняются уравнениям Максвелла. При исследовании электромагнитных процессов в системах, содержащих ферромагнитные образцы, эти уравнения и граничные условия на поверхностях раздела различных сред должны учитываться наряду с уравнениями, определяющими магнитные свойства вещества, например с уравнением Ландау — Лифшица. Ряд таких задач будет рассмотрен во второй части книги.

В данной главе мы остановимся на одной простой задаче — об эллипсоиде, размеры которого малы по сравнению с длиной электромагнитной волны в веществе. Предельными случаями этой задачи явятся тонкая пластинка и тонкий цилиндр, а частным случаем — малая сфера. Эту задачу целесообразно рассмотреть ранее детального изучения сверхвысокочастотных магнитных свойств ферритов. Это даст возможность при рассмотрении таких свойств (в главах 3 и 4) производить сравнение теоретических результатов с данными эксперимента, при котором используются, как правило, малые образцы, являющиеся частными или предельными случаями эллипсоида.

Малость размеров эллипсоида дает возможность пренебречь запаздыванием при распространении электромагнитных волн в нем, т. е. вместо интегрирования полных уравнений Максвелла использовать уравнения или результаты магнитостатики.

Как известно из магнитостатики [12], поле $\boldsymbol{H}_i$ внутри магнитного эллипсоида, расположенного в немагнитной среде в однородном (не зависящем от координат) постоянном внешнем поле $\boldsymbol{H}_e$, является также однородным и выражается следующим образом:

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{H}_e - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{M}. \tag{5,1}$$

Здесь $\boldsymbol{M}$ — намагниченность образца, которая является в этом случае тоже однородной, а $\overleftrightarrow{N}$ — тензор размагничивания. Величина $(-\overleftrightarrow{N}\boldsymbol{M})$ представляет собой размагничивающее поле.

Если оси координат совпадают с осями эллипсоида, то тензор $\overleftrightarrow{N}$ становится диагональным и его компоненты N_x, N_y и N_z носят название размагничивающих факторов. Как известно, сумма их

$$N_x + N_y + N_z = 4\pi.$$

Заметим, что статическое внутреннее поле и намагниченность являются однородными и формула (5,1) справедлива только для эллипсоида и его предельных случаев.

Предположим теперь, что и в случае прецессии намагниченности внутреннее переменное поле и переменная намагниченность являются однородными. Как мы увидим в следующем разделе, это выполняется для одного из бесконечного множества возможных типов прецессии. Для этого типа соотношение (5,1) остается справедливым. В силу его линейности оно справедливо как для постоянных, так и для переменных величин:

$$\boldsymbol{H}_{i0} = \boldsymbol{H}_{e0} - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{M}_0, \tag{5,2}$$

$$\boldsymbol{h}_i = \boldsymbol{h}_e - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{m}. \tag{5,3}$$

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением только такого — однородного типа прецессии. Остановимся.

прежде всего, на свободной прецессии, т. е. примем $\boldsymbol{h}_e = 0$, тогда

$$\boldsymbol{h}_i = -\overleftrightarrow{N}\boldsymbol{m}. \tag{5,4}$$

Поле $\boldsymbol{H}_{e0}$ задано. Намагниченность $\boldsymbol{M}_0$ будем также рассматривать как заданную, т. е. будем полагать, что соответствующая статическая задача решена. Рассматривая свободную прецессию без потерь, будем исходить из уравнения (1,17). Подставим в это уравнение (1,25), (5,2) и (5,4). Считая прецессию малой и пренебрегая малыми членами второго порядка, получим:

$$i\omega_0 \boldsymbol{m} e^{i\omega_0 t} = -\gamma \boldsymbol{M}_0 \times (\boldsymbol{H}_0 - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{M}_0) + \gamma [\boldsymbol{M}_0 \times \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{m} + (\boldsymbol{H}_0 - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{M}_0) \times \boldsymbol{m}] e^{i\omega_0 t}, \tag{5,5}$$

где для сокращения $\boldsymbol{H}_{e0}$ заменено на $\boldsymbol{H}_0$.

Первый, статический член в правой части (5,5) должен обращаться в нуль, так как вектор $\boldsymbol{M}_0$ параллелен вектору внутреннего статического поля $\boldsymbol{H}_{i0}$. Равенство переменных членов в левой и правой частях (5,5) после простых преобразований приводит к уравнению

$$i\omega_0 \boldsymbol{m} = \gamma \boldsymbol{H}_{i0} \times [(\overleftrightarrow{I} + \chi_0 \overleftrightarrow{N})\boldsymbol{m}_i], \tag{5,6}$$

где $\overleftrightarrow{I}$ — единичный тензор, а χ_0 — статическая восприимчивость, определяемая соотношением

$$\boldsymbol{M}_0 = \chi_0 \boldsymbol{H}_{i0}. \tag{5,7}$$

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы векторы $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_{i0}$ были направлены по оси z.

Тензор $\overleftrightarrow{N}$ является симметричным, так как поворотом системы координат до совпадения ее осей с осями эллипсоида он приводится к диагональному. Предположим, что в нашей системе координат этот тензор запишется следующим образом:

$$\overleftrightarrow{N} = \begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{12} & N_{22} & N_{23} \\ N_{13} & N_{23} & N_{33} \end{vmatrix}.$$

Тогда, проектируя уравнение (5,6) на оси этой системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} (i\omega_0 + \gamma\chi_0 H_{i0} N_{12})\, m_x + \gamma H_{i0}(1 + \chi_0 N_{22})\, m_y = 0, \\ -\gamma H_{i0}(1 + \chi_0 N_{11})\, m_x + (-i\omega_0 + \gamma\chi_0 H_{i0} N_{12})\, m_y = 0, \\ m_z = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5,8}$$

Равенство нулю определителя системы (5,8) дает выражение для собственной частоты прецессии

$$\omega_0 = \gamma H_{i0} [(1 + \chi_0 N_{11})(1 + \chi_0 N_{22}) - \chi_0^2 N_{12}^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{5,9}$$

Оно может быть также записано в виде

$$\omega_0 = \gamma [(H_{i0} + N_{11} M_0)(H_{i0} + N_{22} M_0) - N_{12}^2 M_0^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{5,9а}$$

Собственная прецессия намагниченности является и в этом случае поперечной по отношению к постоянной намагниченности ($m_z = 0$). Но, как легко убедиться, подставляя (5,9) в (5,8), конец прецессирующего вектора $\boldsymbol{M}$ описывает не круговую, как в неограниченной среде, а эллиптическую орбиту.

Наиболее простым является рассмотренный Киттелем [74] случай, когда направление внешнего поля $\boldsymbol{H}_0$ совпадает с одной из осей эллипсоида. При этом постоянная намагниченность и постоянное внутреннее поле $\boldsymbol{H}_{i0}$ будут совпадать по направлению с $\boldsymbol{H}_0$. Оси координат, в которых мы решаем задачу, совпадают при этом с осями эллипсоида. Тогда

$$N_{12} = 0; \quad N_{11} = N_x; \quad N_{22} = N_y; \quad H_{i0} = H_0 - N_z M_0.$$

Выражение (5,9) перейдет в этом случае в известную формулу Киттеля:

$$\omega_0 = \gamma \{[H_0 + (N_x - N_z) M_0][H_0 + (N_y - N_z) M_0]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5,10}$$

Рассмотрим частные случаи этой формулы. Для очень тонкой пластины, намагниченной касательно к ее плоскости (рис. 9, *а*), $N_x = N_z = 0$, $N_y = 4\pi$, и

$$\omega_{0\parallel} = \gamma [H_0 (H_0 + 4\pi M_0)]^{\frac{1}{2}} = \gamma (H_0 B_0)^{\frac{1}{2}}. \tag{5,11}$$

Для пластины, намагниченной нормально к ее плоскости (рис. 9, *б*), $N_x = N_y = 0$, а $N_z = 4\pi$; тогда

$$\omega_{0\perp} = \gamma (H_0 - 4\pi M_0). \tag{5,12}$$

Для продольно намагниченного круглого цилиндра (рис. 9, *в*) $N_x = N_y = 2\pi$, $N_z = 0$ и

$$\omega_{u\parallel} = \gamma (H_0 + 2\pi M_0). \qquad (5,13)$$

Для поперечно намагниченного цилиндра (рис. 9, *г*)

$$\omega_{u\perp} = \gamma [H_0 (H_0 - 2\pi M_0)]^{\frac{1}{2}}. \qquad (5,14)$$

И, наконец, для сферы (рис. 9, *д*) $N_x = N_y = N_z = \frac{4}{3}\pi$ и собственная частота

$$\omega_{c\phi} = \gamma H_0, \qquad (5,15)$$

что совпадает с частотой прецессии намагниченности в неограниченной среде ω_H.

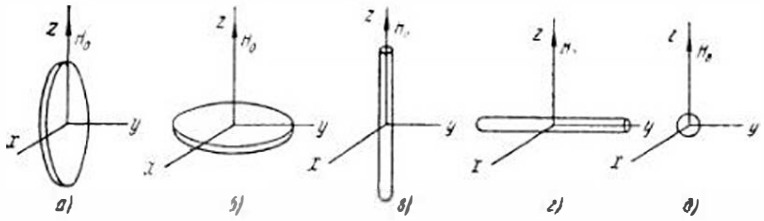


Рис. 9. Предельные случаи эллипсоида.

Зависимости ω от H_0, вычисленные по формулам (5,11)—(5,15), приведены на рис. 10. Заметим, что для продольно намагниченного тонкого цилиндра, касательно намагниченной тонкой пластины и сферы направления $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ всегда совпадают (если не принимать во внимание кристаллографической анизотропии), и приведенные формулы и графики точны при любых значениях H_0, достаточных для исчезновения доменной структуры. Для поперечно намагниченных цилиндра и пластины направления $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ совпадают и формулы (12) и (14) точны лишь при значениях H_0, больших по сравнению с $4\pi M_0$. Однако ход графиков рис. 10, *б* и *г* качественно соответствует действительности и при меньших полях (но достаточных для исчезновения доменной структуры).

Приведем в качестве примера резонансные значения внешнего постоянного магнитного поля $H_{0\,рез}$, вычисленные по формулам (5,11)—(5,15) при постоянной частоте, соответствующей длине волны в свободном пространстве 3,2 *см*. При этом, как и при построении кривых рис. 2, 3, 7 и 8, примем: $g = 2$ и $M_0 = 160$ *гс*. Для сферы резонансное поле составит 3330 *э*. Для касательно намагниченной пластины $H_{0\,рез} = 2470$ *э*; заметим, что эта величина совпадает с полем H_2 (рис. 2), при котором $\mu' = 0$.

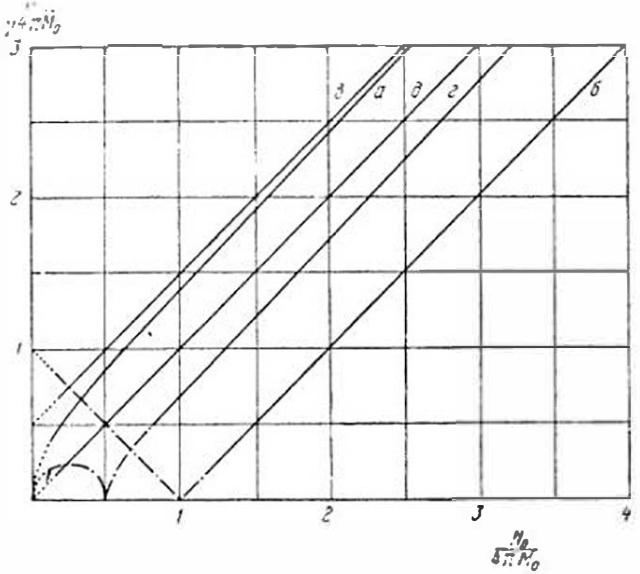


Рис. 10. Зависимость резонансной частоты ω от постоянного магнитного поля H_0 для предельных случаев эллипсоида.

Буквы у кривых соответствуют рис. 9. Пунктир—расчет неправилен из-за доменной структуры. Штрих-пунктир—расчет неточен из-за непараллельности $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$.

Для нормально намагниченной пластины $H_{0\,рез} = 5340$ *э*. Для продольно намагниченного цилиндра $H_{0\,рез} = 2330$ *э*, а для поперечно намагниченного цилиндра $H_{0\,рез} = 3860$ *э*. Таким образом, даже при сравнительно небольшой намагниченности, которая была принята в этом примере, анизотропия формы образца оказывает очень большое влияние на условие ферромагнитного резонанса.

Перейдем теперь к рассмотрению вынужденной однородной прецессии намагниченности малого эллипсоида под действием заданного внешнего (однородного) поля $\boldsymbol{h}_e$. Задача заключается в нахождении связи переменной намагниченности $\boldsymbol{m}$ с этим полем при известных $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{M}_0$. При решении этой задачи можно идти по двум путям. Первый путь заключается в совместном решении (5,3) и соотношения, выражающего связь $\boldsymbol{m}$ с $\boldsymbol{h}_i$. Это соотношение может быть записано в виде

$$\boldsymbol{m} = \overleftarrow{\chi^i}\boldsymbol{h}_i. \tag{5,16}$$

Исключая $\boldsymbol{h}_i$ из (5,3) и (5,16), получим:

$$\boldsymbol{m} = \overleftarrow{\chi^e}\boldsymbol{h}_e, \tag{5,17}$$

где

$$\overleftarrow{\chi^e} = [(\overleftarrow{\chi^i})^{-1} + \overleftarrow{N}]^{-1}. \tag{5,18}$$

Тензор $\overleftarrow{\chi^i}$, входящий в (5,16) и (5,18), отличается от рассмотренного выше тензора $\overleftarrow{\chi}$ только заменой поля $\boldsymbol{H}_0$, которое входит в выражения для его компонентов, на внутреннее постоянное поле $\boldsymbol{H}_{i_0}$. Тензор же $\overleftarrow{\chi^e}$ представляет собой восприимчивость эллипсоида по отношению к внешнему полю $\boldsymbol{h}_e$. Компоненты этого тензора могут быть получены из соотношения (5,18) по обычным правилам тензорной алгебры [2].

Второй путь получения компонентов тензора $\overleftarrow{\chi^e}$ заключается в решении уравнения Ландау — Лифшица (в которое входит внутреннее поле $\boldsymbol{h}_i$) с учетом (5,2) и (5,3). Принимая во внимание потери, будем исходить теперь из уравнения (4,5). Подставляя в него (5,2), (5,3) и (1,25) и пренебрегая малыми членами второго порядка, получим уравнение

$$i\omega \boldsymbol{m} e^{i\omega t} = -\gamma \boldsymbol{M}_0 \times (\boldsymbol{H}_0 - \overleftarrow{N}\boldsymbol{M}_0) + \omega_r[\chi_0 (\boldsymbol{H}_0 - \overleftarrow{N}\boldsymbol{M}_0) - \boldsymbol{M}_0] + \{-\gamma[\boldsymbol{M}_0 \times (\boldsymbol{h}_e - \overleftarrow{N}\boldsymbol{m}) + \boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{H}_0 - \overleftarrow{N}\boldsymbol{M}_0)] + \omega_r[\chi_0 (\boldsymbol{h}_e - \overleftarrow{N}\boldsymbol{m}) - \boldsymbol{m}]\} e^{i\omega t}. \tag{5,19}$$

Каждый из первых двух, постоянных, членов этого уравнения обращается в нуль, а для переменных членов получается уравнение

$$i\omega \boldsymbol{m} - \gamma \boldsymbol{H}_{i0} \times (\overleftarrow{I} + \chi_0 \overleftarrow{N})\boldsymbol{m} + \omega_r (\overleftarrow{I} + \chi_0 \overleftarrow{N})\boldsymbol{m} = -\gamma \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h}_e + \omega_r \chi_0 \boldsymbol{h}_e. \tag{5,20}$$

Проектируя уравнение (5,20) на оси координат и решая полученную систему относительно проекций $\boldsymbol{m}$, найдем компоненты тензора $\overleftarrow{\chi^e}$. Оба рассмотренные пути приводят, конечно, к одинаковым выражениям для этих компонентов. Опуская промежуточные выкладки, запишем их для частного случая, когда $\boldsymbol{H}_0$, а следовательно, и $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_{i0}$ параллельны одной из осей эллипсоида. Тогда

$$\overleftarrow{\chi^e} = \begin{vmatrix} \chi_x^e & i\chi_a^e & 0 \\ -i\chi_a^e & \chi_y^e & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{||}^e \end{vmatrix}, \tag{5,21}$$

где

$$\chi_x^e = \frac{1}{D}\{\gamma^2 M_0 [H_0 + (N_y - N_z) M_0] + \chi_0 \omega_r^2 (1 + \chi_0 N_y) + i\chi_0 \omega \omega_r\}, \tag{5,22}$$

$$\chi_y^e = \frac{1}{D}\{\gamma^2 M_0 [H_0 + (N_x - N_z) M_0] + \chi_0 \omega_r^2 (1 + \chi_0 N_x) + i\chi_0 \omega \omega_r\}, \tag{5,23}$$

$$\chi_a^e = \frac{\gamma \omega M_0}{D}, \tag{5,24}$$

$$\chi_{||}^e = \frac{\chi_0 \omega_r}{i\omega + \omega_r (1 + \chi_0 N_z)}, \tag{5,25}$$

причем

$$D = \omega_{рез}^2 - \omega^2 + i\omega\omega_r [2 + \chi_0 (N_x + N_y)]. \tag{5,26}$$

Резонансная частота

$$\omega_{рез} = [\omega_0^2 + \omega_r^2 (1 + \chi_0 N_x)(1 + \chi_0 N_y)]^{\frac{1}{2}}, \tag{5,27}$$

где ω_0 — «киттелевская» частота свободной прецессии (5,10) без учета потерь.

Заметим, что при $N_x = N_y = N_z = 0$ выражения (5,20) и (5,22) — (5,27) переходят в соответствующие выражения, полученные в § 4.

Если пренебречь потерями, то

$$\left.\begin{aligned} \chi_x^e &= \frac{1}{D}\,\gamma^2 M_0 [H_0 + (N_y - N_z) M_0], \\ \chi_y^e &= \frac{1}{D}\,\gamma^2 M_0 [H_0 + (N_x - N_z) M_0], \\ \chi_a^e &= \frac{\gamma\omega M_0}{D}, \quad \chi_1^e = 0, \end{aligned}\right| \qquad (5,28)$$

где

$$D = \omega_0^2 - \omega^2.$$

В частном случае сферы ($N_x = N_y = N_z$) все компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$ оказываются такими же, как и компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi^i}$. Это имеет место только, если пренебречь потерями.

Для ферритов, представляющих практический интерес, $\omega_r^2 \ll \omega_0^2$ и можно считать, что резонансная частота $\omega_{рез}$ совпадает с частотой ω_0.

Отметим теперь для рассмотренного частного случая, когда H_0 направлено по одной из осей эллипсоида, наиболее существенные различия тензоров $\overleftrightarrow{\chi^e}$ и $\overleftrightarrow{\chi^i}$.

1) Диагональные поперечные компоненты χ_x^e и χ_y^e тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$ не равны, в то время как такие компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi^i}$ равны друг другу.

2) Компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$ в отличие от компонентов $\overleftrightarrow{\chi^i}$ зависят от поперечных размагничивающих факторов N_x и N_y.

3) Резонансной частотой компонентов $\overleftrightarrow{\chi^i}$ является (если пренебречь потерями) частота

$$\omega_z = \gamma (H_0 - N_z M_0), \qquad (5,29)$$

а резонансной частотой компонентов $\overleftrightarrow{\chi^e}$ — частота $\omega_{рез}$, которая определяется выражениями (5,27) и (5,10) и при отсутствии потерь совпадает с собственной частотой прецессии намагниченности в данном эллипсоиде.

Рассмотрим теперь вопрос о ширине резонансной кривой малого ферритового эллипсоида. Определим эту

величину $(2\Delta H)_{эл}$ аналогично § 4 как разность постоянных полей, при которых $(\chi^e)'' = \frac{1}{2}(\chi^e)''_{рез}$. Тогда из выражения (5,22) или (5,23) можно получить в первом приближении

$$(\Delta H)_{эл} = \frac{\omega_r}{\gamma} \frac{\frac{\omega}{\gamma}}{H_{рез} - N_z M_0}, \qquad (5,30)$$

где $\frac{\omega_r}{\gamma} = \Delta H$ — ширина резонансной кривой компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi^i}$, а $H_{рез}$ — резонансное поле, которое при $\omega = \text{const}$ зависит от размагничивающих факторов. Выражение (5,30) дает, таким образом, зависимость $(2\Delta H)_{эл}$ от формы образца при $\omega_r = \text{const}$. Эта зависимость, как следует из (5,30), является слабой. Ширина кривой оказывается минимальной для поперечно намагниченного тонкого диска ($N_z = 4\pi$) и максимальной — для продольно намагниченного цилиндра.

Если в формуле (5,30) выразить ω_r через параметр потерь в соответствии с соотношением (4,7), то получится

$$(\Delta H)_{эл} = \frac{\eta}{\gamma M_0} \frac{\omega}{\gamma}. \qquad (5,31)$$

Отсюда следует, что при $\eta = \text{const}$ ширина кривой не зависит от формы образца.

Предположим, что имеет место механизм потерь, связанный с возбуждением спиновых волн, вырожденных с однородной прецессией, на каких-либо неоднородностях. Тогда как ω_r, так и η могут существенно зависеть от формы образца вследствие различной степени вырождения однородной прецессии со спиновыми волнами. Как будет показано в § 6, степень вырождения коротковолновых спиновых волн возрастает с уменьшением N_z. Следовательно, и ширина кривой в тех случаях, когда играют роль эти волны, будет увеличиваться с уменьшением N_z; наиболее узкая кривая будет наблюдаться у поперечно намагниченного диска. Это, по-видимому, подтверждается экспериментально [107]. Интересно отметить, что такой механизм потерь и феноменологическая формула (5,30) (при $\omega_r = \text{const}$) дают одинаковый характер зависимости $(\Delta H)_{эл}$ от N_z — уменьшение $(\Delta H)_{эл}$ с ростом N_z.

Однако в случае учета механизма потерь зависимость может быть значительно более резкой.

Соотношение (5,1), которое лежит в основе всех вычислений в этом параграфе, является результатом решения магнитостатической задачи. Следовательно, все результаты этого параграфа справедливы лишь в том случае, когда размеры образца много меньше длины волны (точнее—четверти длины волны). Учет эффекта распространения электромагнитной энергии [82, 88, 89] приводит к смещению резонансной частоты (или при $\omega = \text{const}$ — резонансного поля) на величину, пропорциональную квадрату отношения размеров к длине волны. В частности, для сферы получается [88, 89]:

$$H_{\text{рез}} = (H_{\text{рез}})_0 + \frac{1}{90} 4\pi M_0 (\varepsilon + 5) (k_{\text{э.м}} d)^2, \qquad (5,32)$$

где $(H_{\text{рез}})_0 = \frac{\omega}{\gamma}$ — резонансное поле для малой сферы (или для неограниченной среды), ε — электрическая проницаемость феррита, $k_{\text{э.м}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{э.м}}}$, $\lambda_{\text{э.м}}$ — длина волны (в свободном пространстве), а d—диаметр сферы. Заметные смещения резонанса—порядка 10 *э* — согласно (5,32) имеют место для обычных феррятов ($\varepsilon = 10$, $4\pi M = 2000$ *гс*) при $\frac{d}{\lambda_{\text{э.м}}} \geqslant 0{,}025$, т. е. в трехсантиметровом диапазоне—при $d \geqslant 0{,}8$ *мм*. Выражение (5,32) удовлетворительно подтверждается экспериментально [82, 150].

На опыте наблюдалось также [147] расширение резонансных кривых при увеличении диаметра сфер. Это расширение может, вообще говоря, объясняться не только эффектом распространения электромагнитной энергии, но и возбуждением неоднородных магнитостатических типов прецессии (§ 6).

При малых диаметрах образцов наблюдается обратная зависимость ширины резонансной кривой от размеров, обусловленная шероховатостью поверхности образцов [122, 128]. Эта зависимость становится особенно заметной в монокристаллах с весьма узкой резонансной кривой (рис. 11). Как уже отмечалось в § 3 и 4, поверхностные неоднородности так же как и объемные, приводят к возбуждению спиновых волн, в том числе и вырожденных с однородной прецессией. Эти волны получают энергию от однородной прецессии и отдают ее кристаллической решетке, что и приводит к росту потерь, т. е.

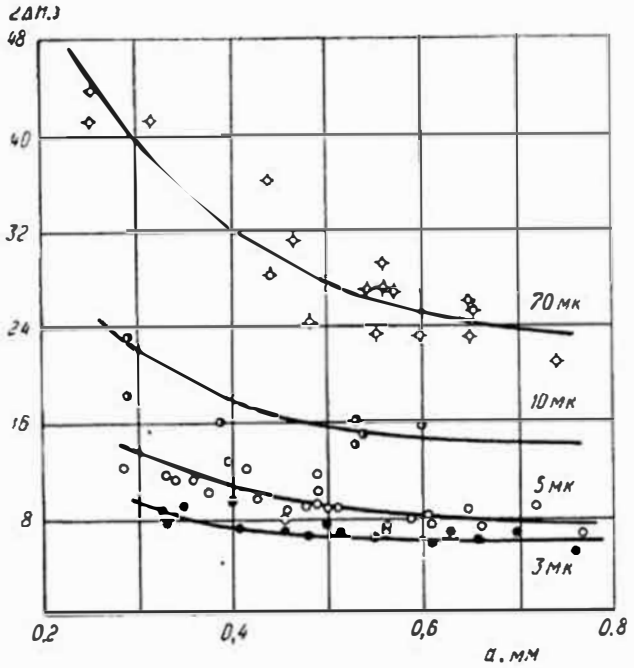


Рис. 11. Зависимость ширины резонансной кривой для сфер из монокристалла иттриевого феррита со структурой граната от диаметра сфер d и состояния поверхности [128].

Цифры у кривых—размер зерна абразива или шлиф-шкурки, на которых производилась обработка сфер.

к расширению резонансных кривых. Упомянутые в § 4 значения $2\Delta H$ для иттриевого феррита со структурой типа граната менее 0,5 *э* были получены после шлифовки сфер на шлиф-шкурке с максимальными размерами зерна 0,5 микрона. Увеличение зерна шкурки до 30 микрон приводило к расширению кривой до 10 *э* [122]. Очевидно, что этот эффект сказывается тем сильнее, чем больше

отношение поверхности к объему, т. е. чем меньше диаметр сферы (рис. 11).

В заключение заметим, что Вангснессом [169] была рассмотрена малая однородная прецессия намагниченности с учетом как наличия подрешеток, так и анизотропии формы. Полученные им результаты сводятся к следующему: если интересоваться диапазоном с. в. ч. и не рассматривать точек компенсации, то для компонентов $\overleftrightarrow{\chi}^e$ справедливы те же выражения, что и без учета подрешеток. При этом под M_0 следует понимать $M_{10}-M_{20}$, а под γ—величину $\gamma_{эф}$. Эти же результаты были получены в § 2 для тензора $\overleftrightarrow{\chi}$. В свете того, что переход от тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ к тензору $\overleftrightarrow{\chi}^e$ является просто магнитостатической задачей (решение которой дается формулой (5,18)), упомянутые результаты Вангснесса представляются совершенно очевидными.

§ 6. Неоднородные типы прецессии

Выражения для частоты ферромагнитного резонанса, полученные в § 5 в предположении однородной прецессии, были подтверждены большим числом опытов по исследованию ферромагнитного резонанса в ферритах. В этих опытах образцы достаточно малых, по сравнению с длиной волны, размеров помещались в полые электромагнитные резонаторы в такие положения, где переменное магнитное поле резонатора в объеме образца можно было считать однородным. Для больших образцов наблюдались аномалии: расширение резонансной кривой, появление дополнительных максимумов поглощения [147, 195].

Как показали Уайт и Солт [130] и Диллон [139] для случая сфер и Диллон [133] для дисков, появлению нескольких максимумов резонансного поглощения имеет место и в образцах малых размеров, но расположенных в точках резко неоднородного переменного магнитного поля. На рис. 12 приведена в качестве примера одна из кривых резонансного поглощения [130], на которой отчетливо видно четыре максимума. В некоторых случаях число таких максимумов достигало 20 [133] и даже 65 [142]. Возникновение тех или иных максимумов и их

амплитуды определялись размерами образца и структурой переменного магнитного поля в месте его расположения. Но положения (по частоте или постоянному полю) одних и тех же максимумов при достаточно малых размерах образцов от этих величин не зависели. Уменьшение намагниченности насыщения, например, при повышении

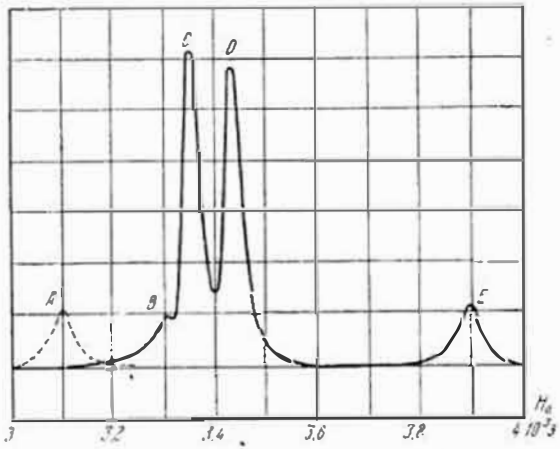


Рис. 12. Максимумы резонансного поглощения, соответствующие однородному (*C*) и неоднородным (*A*, *B*, *D*, *E*) типам прецессии в сфере из марганцевого феррита [130].

Максимум *A* наблюдался при другой конфигурации переменного поля.

температуры приводило к сближению максимумов, как это видно из рис. 13.

Все перечисленные экспериментальные факты могут быть объяснены, если предположить [130, 131], что существует множество различных типов прецессии намагниченности в малом ферромагнитном образце; этим типам и соответствуют различные максимумы поглощения. Однородная прецессия, рассмотренная в § 5, является одним из этих типов прецессии. Для всех остальных типов прецессия является неоднородной, т. е. амплитуды и фазы переменной намагниченности в образце зависят от координат. Характер этой зависимости и определяет тип прецессии.

Для построения теории прецессии намагниченности в ферритном образце необходимо совместно интегрировать уравнение Ландау — Лифшица, определяющее характер изменения намагниченности в веществе образца, и уравнения Максвелла с учетом граничных условий на поверхности образца. Это было выполнено Уокером [132] при следующих ограничениях, которые дали возможность довести решение до количественных результатов.

1) Рассматривались малые колебания, что дало возможность, как и в предыдущих параграфах, линеаризировать уравнения Ландау — Лифшица и ввести тензор магнитной восприимчивости для переменных полей.

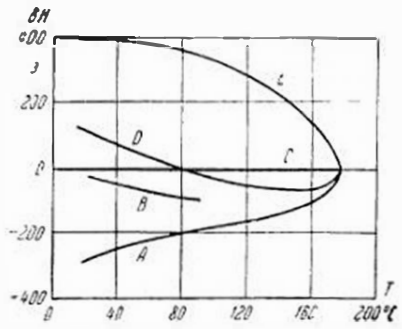


Рис. 13. Зависимость резонансных значений постоянного поля для максимумов, соответствующих различным типам прецессии, от температуры [130].

Буквы у кривых соответствуют максимумам на рис. 12.

2) Материал образца предполагался изотропным (в отсутствие постоянного магнитного поля).

3) Величина постоянного магнитного поля была достаточна, чтобы намагнитить образец до насыщения.

3) Электропроводность материала образца предполагалась равной нулю.

5) Размеры образца были достаточно велики, чтобы для простейших типов прецессии (с небольшим числом вариаций намагниченности в образце) можно было пренебречь «неоднородным» обменным членом (1,15) эффективного поля.

6) Размеры образца были в то же время достаточно малы, чтобы эффектами запаздывания при распространении электромагнитных волн в образце можно было пренебречь. Это давало возможность вместо полных уравнений Максвелла использовать уравнения магнитостатики.

7) Решалась задача о свободной прецессии при отсутствии внешнего переменного поля.

8) Не учитывались потери в веществе.

9) Рассматривался частный случай эллипсоида вращения (сфероида), намагниченного постоянным полем вдоль оси вращения.

Заметим, что все перечисленные предположения, кроме последних трех ограничений, были сделаны и в § 5. Единственным отличием рассматриваемой теории Уокера (кроме этих непринципиальных ограничений) является то, что здесь не делается дополнительного предположения об однородности прецессии.

В соответствии с перечисленными предположениями математическая формулировка задачи будет заключаться в следующем: найти комплексные амплитуды переменной намагниченности $\boldsymbol{m}$ и переменного магнитного поля $\boldsymbol{h}$, удовлетворяющие уравнениям магнитостатики для непроводящей среды:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = 0, \tag{6,1}$$

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{h} + 4\pi \boldsymbol{m}) = 0 \tag{6,2}$$

и граничным условиям на поверхности сфероида. Эти условия заключаются в непрерывности касательной составляющей магнитного поля

$$\boldsymbol{h} \times \boldsymbol{n}_0 = \text{const} \tag{6,3}$$

и нормальной составляющей магнитной индукции

$$(\boldsymbol{h} + 4\pi \boldsymbol{m})\, \boldsymbol{n}_0 = \text{const} \tag{6,4}$$

на поверхности образца ($\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор нормали к этой поверхности). При этом внутри сфероида $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{h}$ связаны соотношением (5,16). Тензор $\overleftrightarrow{\chi^i}$ имеет вид (1,29), и его компоненты определяются выражениями (1,30), в которых H_0 следует заменить на внутреннее постоянное поле $H_{i0} = H_0 - N_z M_0$ (где N_z — размагничивающий фактор сфероида в направлении оси z). Вне сфероида $\boldsymbol{m} = 0$, а на больших расстояниях от него и $\boldsymbol{h} = 0$; последнее является следствием ограничения 7.

Не останавливаясь на деталях расчета [132], отметим лишь, что согласно (6,1) может быть введен скалярный магнитный потенциал ψ, так что

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{grad} \psi. \tag{6,5}$$

Учет (6,2) и (5,16) приводит к следующему уравнению для этого потенциала внутри сфероида:

$$(1+4\pi\chi)\nabla_{\perp}^2\psi+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0, \qquad (6,6)$$

где $\nabla_{\perp}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Интересно, что в это уравнение входит только диагональный компонент χ тензора восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}$. Однако антисимметричный компонент χ_a, который входит в граничные условия, войдет, как мы увидим ниже, и в окончательное уравнение для резонансных частот.

Снаружи сфероида $\chi=0$ и (6,6) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2\psi=0. \qquad (6,7)$$

Учет граничных условий требует введения сфероидальных координат ξ, η и φ, связанных с прямоугольными координатами x, y и z соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos\varphi,\\ y&=\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}\sin\varphi,\\ z&=\sqrt{a^2-b^2}\,\xi\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (6,8)$$

В этих координатах поверхность сфероида является координатной поверхностью $\xi=\xi_0$; здесь

$$\xi_0=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

а $\alpha=b/a$, где a и b — полуоси сфероида.

Частное решение уравнения Лапласа (6,7) записывается в виде

$$\psi_e=Q_n^{|m|}(i\xi)\,P_n^{|m|}(\eta)\,e^{-im\varphi}, \qquad (6,9)$$

где $P_n^{|m|}$ и $Q_n^{|m|}$ — присоединенные полиномы Лежандра [1] соответственно 1-го и 2-го рода [1]). Целые числа n и m принимают значения: $n=1, 2, 3, \ldots$; $m=0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm n$.

[1]) В дальнейшем вместо $P_n^{|m|}$ и $Q_n^{|m|}$ мы будем писать P_n^m и Q_n^m.

Далее необходимо записать решение уравнения (6,6) для внутреннего объема сфероида, удовлетворяющее совместно с решением (6,9) для наружного объема условию (6,3). Не приводя здесь этого решения, укажем сразу, что учет второго граничного условия (6,4) приведет к уравнению

$$i\xi_0\frac{(Q_n^m)'(i\xi_0)}{Q_n^m(i\xi_0)}-i\bar{\xi}_0\frac{(P_n^m)'(i\bar{\xi}_0)}{P_n^m(i\bar{\xi}_0)}=-4\pi m\chi_a\alpha^2, \qquad (6,10)$$

где

$$\bar{\xi}_0=\frac{\alpha\sqrt{1+4\pi\chi}}{\sqrt{1-(1+4\pi\chi)\alpha^2}}.$$

Величины χ и χ_a определяются в нашем случае выражениями (1,30) с заменой H_0 на H_{i0} и являются функциями формы сфероида, частоты ω, постоянного поля H_0 и намагниченности насыщения M_0. Таким образом, выражение (6,10) является трансцендентным уравнением, определяющим собственные частоты различных типов прецессии (если H_0 и M_0 заданы) или собственные значения H_0 (если заданы ω и M_0).

Анализ уравнения (6,10) показывает [132], что оно при данных n и $|m|$ имеет $1+p$ корней, если $m>0$, и p корней, если $m\leqslant 0$. Здесь p — наибольшее целое число, меньшее или равное $\frac{1}{2}(n-|m|)$. Если порядковый номер корня обозначить $1+r$ при $m>0$ и r — при $m<0$, то целые числа n, m и r будут являться индексами, характеризующими тип прецессии. Если $p=0$, т. е. $n=|m|$ или $n=|m|+1$, то корней при $m<0$ не существует, а при $m>0$ имеется один корень ($r=0$).

Зависимость намагниченности и поля от угла φ, как видно, например, из (6,9), носит характер волны, бегущей по азимуту. Число полуволн, укладывающихся в азимутальном направлении, составляет $2|m|$. Следовательно, мгновенное распределение намагниченности и поля, для которого ось z является осью симметрии $|m|$-го порядка, будет вращаться вокруг этой оси с угловой скоростью $\frac{\omega}{|m|}$. Положительным m соответствует при данной записи решений (знак минус в показателе степени

в (6,9)) правое, а отрицательным m — левое направление вращения (см. примечание на стр. 25).

Зависимость намагниченности и поля от z носит характер стоячих волн. В частном случае $m = n$ эта зависимость отсутствует.

Если $n = m = 1$ (при этом, как уже отмечалось, $r = 0$), то при отсутствии зависимости от координаты z вращение вокруг оси z происходит с угловой скоростью ω. Таким

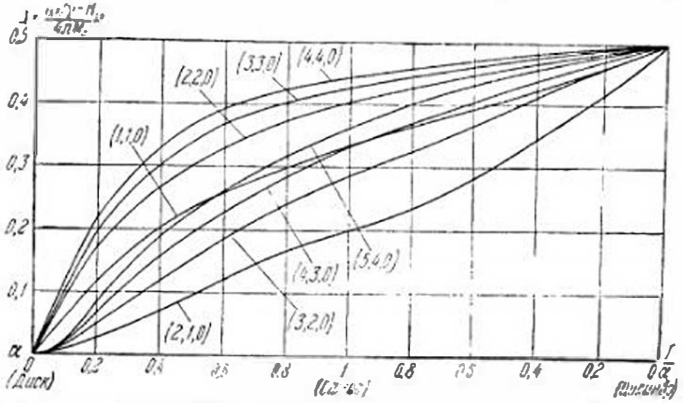


Рис. 14. Зависимость величины Δ, характеризующей собственную частоту неоднородных типов прецессии, от отношения полуосей сфероида α [132].

Цифры в скобках показывают тип прецессии.

образом, этот тип прецессии (110) представляет собой однородную прецессию намагниченности, которая подробно рассматривалась в предыдущем разделе.

Заметим, что индексы n, m и r определяют лишь характер (топологию) пространственного распределения намагниченности и поля, детальная же их структура, вообще говоря, зависит от частоты и H_0. Исключение представляют лишь простейшие типы прецессии, для которых $p = 0$, т. е. $n = |m|$ или $n = |m| + 1$.

При исследовании спектров различных типов прецессии, т. е. их собственных частот или собственных значений H_0, удобно согласно [132] ввести в рассмотрение величину

$$\Delta = \Omega - \Omega_H,$$

где $\Omega = \frac{\omega}{\gamma 4\pi M_0}$ — безразмерная приведенная частота, а $\Omega_H = \frac{H_{i0}}{4\pi M_0}$ — безразмерное приведенное внутреннее поле ($H_{i0} = H_0 - N_z M_0$).

Величина Δ зависит от индексов, характеризующих тип прецессии, от формы сфероида (т. е. от α), а также, вообще говоря, от ω или H_0. Зависимость от ω или H_0 отсутствует для типов прецессии с $p = 0$. Зависимость Δ от формы сфероида для этих типов приведена на рис. 14. Как видно из этого рисунка, значения Δ для всех типов прецессии растут с увеличением α, причем различие величин Δ для разных типов прецессии стремится к нулю при $\alpha \to 0$ (тонкий диск) и $\alpha \to \infty$ (тонкий цилиндр). Для диска $\Delta = 0$, а для цилиндра $\Delta = 0{,}5$ в соответствии с формулами (5,12) и (5,13) для однородного типа прецессии.

Для сферы [1]) ($\alpha = 1$) при $p = 0$ получаются следующие простые формулы:

$$\text{при } n = m \qquad \Delta = \frac{m}{2m+1}, \tag{6,11}$$

$$\text{при } n = m+1 \qquad \Delta = \frac{m}{2m+3}. \tag{6,12}$$

В частности, для однородной прецессии ($n = m = 1$) из (6,11) следует $\Delta = \frac{1}{3}$, что, как легко убедиться, совпадает с формулой (5,15).

Величины Δ не выходят из пределов $0 \div 0{,}5$ и для других типов прецессии. Отсюда следует, что весь спектр собственных частот прецессии малого сфероида лежит в интервале

$$\gamma(H_0 - N_z M_0) < \omega < \gamma[H_0 + (2\pi - N_z) M_0]. \tag{6,13}$$

Если же $\omega = \text{const}$, то собственные значения внешнего постоянного магнитного поля для всех типов прецессии

[1]) Непосредственное решение задачи о магнитостатических типах прецессии для случая сферы и подробный расчет структуры намагниченности и резонансных значений постоянного поля для большого числа простейших типов прецессии приведены в работе [141].

находятся в пределах:

$$\frac{\omega}{\gamma}+(N_z-2\pi)M_0<H_0<\frac{\omega}{\gamma}+N_zM_0, \qquad (6,14)$$

а ширина области полей составляет $2\pi M_0$.

Спектру прецессии намагниченного сфероида свойственны вырождения двух видов. Во-первых, имеет место ряд «случайных» пересечений кривых, соответствующих собственным частотам различных типов, в частности, пересечений кривой однородной прецессии с кривыми некоторых неоднородных типов. Во-вторых, имеет место полное совпадение частот некоторых типов прецессии. Например, для сферы совпадают частоты типов $(m, m, 0)$ и $(3m+1, 3m+1, 0)$, как это следует из формулы (6,11).

Не рассматривая количественно задачи о вынужденной прецессии намагниченности сфероида, можно сделать следующие качественные выводы. Переменная намагниченность при вынужденной прецессии может быть представлена в виде бесконечного ряда по собственным типам прецессии, которые были рассмотрены выше. Однако, если ширины резонансных кривых этих типов достаточно малы (как это имеет место, например, для монокристаллов марганцевого или иттриевого ферритов), то практически можно говорить о поочередном возбуждении различных собственных типов, прецессии при изменении ω или H_0. Это и имело место в упомянутых опытах Уайта и Солта и Диллона.

Интенсивность возбуждения различных типов прецессии будет тем больше, чем ближе структура внешнего переменного поля к структуре намагниченности для данного типа. Этим обстоятельством и объясняется появление различных пиков поглощения при расположении образца в разных точках резонатора, а также различие интенсивностей этих пиков [130, 139, 140, 142].

По мере увеличения индексов n и m влияние граничных условий на спектр неоднородных типов прецессии становится все меньшим. Тогда границы этого дискретного спектра могут быть приближенно определены как границы непрерывного спектра плоских спиновых волн, рассмотренных в § 3. Эти границы могут быть вычислены

по формуле

$$\omega_k=\gamma\{(H_0-N_zM_0+qk^2M_0)\times$$
$$\times(H_0-N_zM_0+qk^2M_0+4\pi M_0\sin^2\theta_k)\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (6,15)$$

которая получается из (3,16) в результате замены H_0 на $H_{i0}=H_0-N_zM_0$. При этом представляется возможным

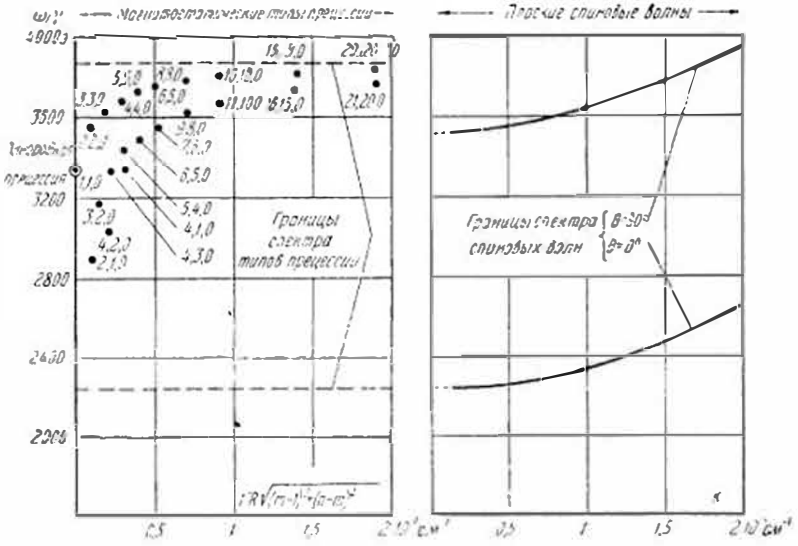


Рис. 15. Спектр типов прецессии ферритовой сферы.
$H_0=3330$ э, $M_0=260$ гс, радиус сферы $=0.01$ см. Цифры у точек обозначают индексы n, m и r типов прецессии.

учесть и обменное взаимодействие, что в рамках теории, принимающей во внимание граничные условия, встретило бы очень большие трудности. Однако обменное взаимодействие существенно лишь при весьма малых длинах спиновых волн. Им для реальных размеров образцов соответствуют такие большие индексы типов прецессии, при которых в учете граничных условий уже нет необходимости.

На рис. 15 для случая сферы показаны границы спектра плоских спиновых волн, а также границы

уокеровского спектра неоднородных типов прецессии и точки, соответствующие частотам некоторых из этих типов. Как видно из этого рисунка, для случая сферы действительно имеет место вырождение однородной прецессии с неоднородными типами прецессии и плоскими спиновыми волнами. Вычисляя границы уокеровского спектра и спектра плоских спиновых волн для других частных случаев сфероида, нетрудно убедиться, что в случае тонкого продольно намагниченного цилиндра рассмотренное вырождение будет наиболее интенсивным, а в случае тонкого поперечно намагниченного диска вырождения не будет. Для эллипсоида без осевой симметрии задача, аналогичная задаче Уокера, не решена. В отношении же плоских спиновых волн может быть сделан общий вывод, что вырождение их с однородной прецессией тем больше, чем меньше размагничивающий фактор образца в направлении постоянного намагничивания.

Если размеры образца становятся настолько большими, что запаздыванием при распространении электромагнитных волн в нем уже нельзя пренебрегать, то уравнения магнитостатики не могут быть использованы. Полные уравнения электродинамики, которые необходимо использовать при решении задач об электромагнитных колебаниях и волнах в намагниченных ферритовых образцах произвольных размеров, а также решения некоторых задач для случая однородной прецессии [1]) будут рассмотрены во второй части. Решение таких задач для случая неоднородной прецессии представило бы, по-видимому, большой интерес.

[1]) Имеется в виду однородность прецессии в объемах, размеры которых малы по сравнению с длиной электромагнитных волн.

ГЛАВА 3

ВЛИЯНИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

§ 7. Ферромагнитный резонанс в монокристалле

Анизотропия — это зависимость физических свойств от углов между приложенными полями и некоторыми фиксированными направлениями. Нас будет интересовать анизотропия сверхвысокочастотных магнитных свойств феррита, т. е. зависимость компонентов его тензора магнитной восприимчивости от ориентации осей координат, в которых эти компоненты выражены, по отношению к некоторым выделенным направлениям в веществе.

Среда, свойства которой рассматривались в предыдущих главах, была в отсутствие постоянного магнитного поля (и постоянного остаточного намагничивания) изотропной. Анизотропия ее высокочастотных свойств была обусловлена постоянной намагниченностью, и фиксированным направлением было направление этой намагниченности. Свойства малого эллипсоида из такой изотропной среды, как мы убедились в главе 2, зависели от ориентации полей по отношению к осям эллипсоида. Эту зависимость можно назвать анизотропией формы.

Реальным ферритам и при отсутствии постоянного намагничивания свойственна анизотропия не только формы, но и вещества. Видами такой анизотропии являются кристаллографическая анизотропия и анизотропия, обусловленная внешними механическими напряжениями.

Магнитной кристаллографической анизотропией называется зависимость магнитных свойств ферромагнетика от направления его намагничивания относительно осей кристаллической решетки. Источником этой анизотропии

является [5] магнитное взаимодействие между спиновыми и орбитальными моментами участвующих в ферромагнетизме электронов (спин-орбитальное взаимодействие). Оно благодаря связи орбитального движения с кристаллической решеткой и обусловливает появление в свободной энергии ферромагнетика члена, зависящего от направления намагниченности по отношению к осям решетки. К этой энергии, которую называют энергией естественной кристаллографической анизотропии, добавляется свободная энергия внутренних магнитострикционных напряжений [5], которая также зависит от направления намагниченности относительно осей кристаллической решетки. Их сумма носит название результирующей или суммарной свободной энергии кристаллографической анизотропии. Мы в дальнейшем для сокращения будем называть ее просто энергией кристаллографической анизотропии.

В этом параграфе мы рассмотрим влияние кристаллографической анизотропии на тензор магнитной восприимчивости и в первую очередь на условие ферромагнитного резонанса в монокристаллах ферритов. Монокристаллы ферритов [58, 60] широко используются при исследованиях ферромагнитного резонанса и находят практическое применение [435]. Изучение влияния анизотропии в монокристаллах обязательно должно предшествовать рассмотрению более сложных процессов и поликристаллических материалах.

Один из методов учета анизотропии в ферромагнетике, впервые примененный Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [66], заключается в использовании понятия эффективного поля анизотропии. Под этим полем следует понимать некоторое гипотетическое магнитное поле, воздействие которого на намагниченность эквивалентно воздействию реальных сил взаимодействия, обусловливающих анизотропию.

Если нам удастся найти такое поле $\boldsymbol{H}_{\text{ан}}$, то уравнение движения, решение которого даст тензор восприимчивости, запишется согласно (4,5) следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{\text{ан}}) + \omega_r [\chi_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{\text{ан}}) - \boldsymbol{M}], \quad (7,1)$$

где $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h} e^{i\omega t}$ — заданное внешнее поле.

Для того чтобы решить это уравнение, необходимо знать зависимость эффективного поля анизотропии $\boldsymbol{H}_{\text{ан}}$ от намагниченности $\boldsymbol{M}$. Предположим, что эта зависимость имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{H}_{\text{ан}} = -\hat{N}^{\text{ан}} \boldsymbol{M}, \quad (7,2)$$

где $\hat{N}^{\text{ан}}$ — некоторый тензор, который по аналогии с тензором размагничивания или размагничивающих факторов формы (§ 5) можно назвать тензором размагничивающих факторов кристаллографической анизотропии. Если это предположение справедливо, то для учета кристаллографической анизотропии могут быть использованы полученные в § 5 выражения с заменой в них компонентов тензора $\hat{N}$ на соответствующие компоненты тензора $\hat{N}^{\text{ан}}$.

Задача заключается, таким образом, в доказательстве того, что эффективное поле кристаллографической анизотропии действительно может быть записано в форме (7,2), и в вычислении компонентов тензора $\hat{N}^{\text{ан}}$ для определенных типов кристаллических решеток.

Чтобы получить общее выражение для эффективного поля анизотропии, запишем, следуя Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицу [66], свободную энергию единицы объема феррита. Если учесть только магнитное взаимодействие с внешним полем $\boldsymbol{H}$ и магнитную кристаллографическую анизотропию, то выражение для этой энергии запишется следующим образом:

$$U = -\boldsymbol{H}\boldsymbol{M} + U_{\text{ан}}, \quad (7,3)$$

где $U_{\text{ан}}$ — плотность энергии анизотропии.

Рассмотрим равновесное состояние, при котором свободная энергия U минимальна, т. е. ее вариация

$$\delta U = 0. \quad (7,4)$$

Поле $\boldsymbol{H}$ является заданным и не варьируется. Энергия анизотропии зависит от направления намагниченности и поэтому является функцией $\boldsymbol{M}$. Тогда условие (7,4) запишется:

$$\left(-\boldsymbol{H} + \frac{dU_{\text{ан}}}{d\boldsymbol{M}}\right) \delta\boldsymbol{M} = 0. \quad (7,5)$$

Величины $\boldsymbol{H}$ и U_a совершенно независимы, поэтому

$$\boldsymbol{H} - \frac{dU_{ан}}{d\boldsymbol{M}} \neq 0,$$

и для того, чтобы выполнялось (7,5), вектор $\boldsymbol{H} - \frac{dU_{ан}}{d\boldsymbol{M}}$ должен быть перпендикулярен вектору $\delta\boldsymbol{M}$. Но, с другой стороны, уравнением прецессии намагниченности (§ 4) допускаются только такие изменения $\boldsymbol{M}$, при которых

$$\boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{M} = 0, \tag{7,6}$$

т. е. $\delta\boldsymbol{M}$ лежит в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{M}$. Так как вектор $\delta\boldsymbol{M}$ в остальном является произвольным, то (7,5) и (7,6) могут одновременно выполняться только в том случае, если векторы $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H} - \frac{dU_{ан}}{d\boldsymbol{M}}$ параллельны, т. е.

$$\boldsymbol{M} \times \left(\boldsymbol{H} - \frac{dU_{ан}}{d\boldsymbol{M}} \right) = 0. \tag{7,7}$$

В равновесном состоянии, которое мы сейчас рассматриваем, вектор $\boldsymbol{M}$ должен совпадать по направлению с суммарным эффективным полем $\boldsymbol{H}_{эф} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{ан}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{ан}) = 0. \tag{7,8}$$

Сравнивая (7,7) с (7,8), мы видим, что эффективное поле кристаллографической анизотропии [1])

$$\boldsymbol{H}_{ан} = -\frac{dU_{ан}}{d\boldsymbol{M}}. \tag{7,9}$$

Рассмотрим случай кубической решетки [2]), в которой кристаллизуются все ферриты, практически используемые в диапазоне с. в. ч. Для кубической решетки энергия кристаллографической анизотропии записывается обычно

[1]) Выражение (7.9) справедливо с точностью до слагаемого, параллельного $\boldsymbol{M}$, которое все равно не войдет в уравнение Ландау—Лифшица.

[2]) Законы симметрии кристаллических решеток и смысл обозначений, которые будут использованы ниже, см., например, в [15].

в виде [5]:

$$U_{ан} = U_{ан0} + K_1 (\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2, \tag{7,10}$$

где α_1, α_2 и α_3 — направляющие косинусы намагниченности относительно осей [100], [010] и [001] решетки (рис. 16); $U_{ан0}$ — член, не зависящий от направления намагниченности; K_1 и K_2 — первая и вторая константы анизотропии.

Учитывая, что направляющие косинусы связаны соотношением

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$

мы можем выражение (7,10) переписать следующим образом, отбрасывая члены, которые не зависят от направления $\boldsymbol{M}$:

$$U_{ан} = -\frac{K_1}{2}(\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2. \tag{7,10а}$$

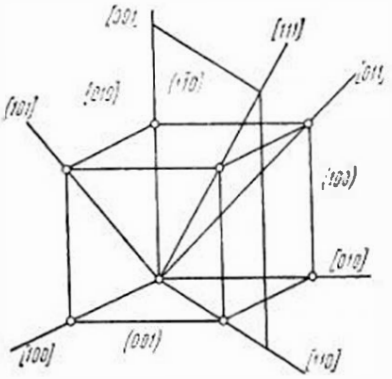


Рис. 16. Кубическая решетка.

Заметим, далее, что

$$\alpha_k = \frac{\boldsymbol{x}_{0k}\boldsymbol{M}}{M} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{7,11}$$

где $\boldsymbol{x}_{0k}$ — единичные векторы, направленные по осям [100], [010] и [001].

Вычисляя $\boldsymbol{H}_{ан}$ по формуле (7,9) с учетом (7,10а) и (7,11), получим для составляющих этого вектора следующее выражение:

$$H_{ан\,k} = \frac{2K_1}{M^4} M_k^3 - \frac{2K_2}{M^6} M_k M_l^2 M_m^2, \tag{7,12}$$

где M_k — проекция $\boldsymbol{M}$ на ось x_k, а M_l и M_m — проекции $\boldsymbol{M}$ на две другие оси.

Для того чтобы не решать снова уравнений прецессии, а воспользоваться полученными в предыдущем разделе соотношениями, необходимо, как уже указывалось,

представить $\boldsymbol{H}_{ан}$ в виде (7,2), т. е. проекции этого вектора в виде

$$H_{ан\,k} = -\sum_{j=1}^{3} N_{kj}^{ан} M_j, \qquad (7,13)$$

причем это должно быть сделано в такой системе координат, в которой одна из осей совпала бы с направлением постоянной намагниченности $\boldsymbol{M}_0$, потому что именно в такой системе было решено в предыдущем разделе уравнение прецессии.

Оси этой системы будем обозначать x_1', x_2', x_3' и предположим, что $\boldsymbol{M}_0$ совпадает с осью x_3'. Обозначим через $\beta_{kl'}$ косинусы углов между осью x_k старой системы и осью $x_{l'}$ новой системы координат ($k, l' = 1, 2, 3$). Тогда

$$H_{ан\,l'} = \sum_{k=1}^{3} \beta_{kl'} H_k, \qquad (7,14)$$

$$M_k = \sum_{l'=1}^{3} \beta_{kl'} M_{l'}. \qquad (7,15)$$

Подставляя (7,15) в (7,12), а полученные соотношения в (7,14), мы придем к выражениям составляющих $\boldsymbol{H}_{ан}$ через составляющие $\boldsymbol{M}$ в новой системе координат. Очевидно, что вследствие нелинейности соотношений (7,12) полученные выражения не смогут быть, вообще говоря, представлены в виде линейных соотношений вида (7,13). Однако такое представление, как мы убедимся, станет возможным в первом приближении, если учесть, что в новой системе координат

$$\left.\begin{aligned} M_{3'} &\cong M_0, \\ M_{1'} &\ll M_0, \\ M_{2'} &\ll M_0. \end{aligned}\right\} \qquad (7,16)$$

Для большинства ферритов вторая константа анизотропии мала по сравнению с первой; поэтому мы учтем только первый член в (7,12). Тогда в результате упомянутых подстановок и принимая во внимание (7,16), получим после несложных преобразований приближенные

соотношения вида (7,13), в которых

$$\left.\begin{aligned} N_{k'l'}^{ан} &= \frac{6K_1}{M_0^2} \sum_{j=1}^{3} \beta_{jk'} \beta_{jl'} \beta_{j3'}^2 \qquad (k', l' = 1, 2), \\ N_{3'3'}^{ан} &= \frac{2K_1}{M_0^2} \sum_{j=1}^{3} \beta_{j3'}^4. \end{aligned}\right\} \qquad (7,17)$$

Здесь записаны только те компоненты $N^{ан}$, которые входят в выражения для компонентов тензора восприимчивости. Подставляя $N_{k'l'}^{ан}$ и $N_{3'3'}^{ан}$ в эти выражения, получим для случая кубической решетки решение задачи об учете влияния кристаллографической анизотропии на тензор магнитной восприимчивости монокристалла.

Для других решеток, например для магнитно-одноосной (с одним направлением легкого намагничивания) гексагональной решетки решение задачи может быть произведено аналогичным образом.

Следует заметить, что расчет компонентов тензора восприимчивости требует предварительного решения статической задачи об определении направления вектора $\boldsymbol{M}_0$ по заданным величине и направлению постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. Эта задача решается с использованием условия минимума выражения (7,3). Не останавливаясь на ее решении [5], заметим лишь, что влияние кристаллографической анизотропии, так же как и анизотропии формы, приводит к несовпадению направлений $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ в кристалле. Эти направления при произвольных значениях H_0 совпадают лишь для осей легкого намагничивания (соответствующих минимумам энергии кристаллографической анизотропии). При наложении поля в направлениях осей симметрии кристалла это совпадение имеет место при H_0, превышающих некоторые критические значения порядка эффективного поля кристаллографической анизотропии, т. е. порядка $\frac{2K_1}{M_0}$. Для произвольных же ориентаций $\boldsymbol{H}_0$ направление вектора $\boldsymbol{M}_0$ стремится к направлению $\boldsymbol{H}_0$ лишь асимптотически по мере возрастания H_0.

Итак, вектор $\boldsymbol{M}_0$ можно считать приближенно совпадающим по направлению с $\boldsymbol{H}_0$ при любой ориентации

последнего, если величина H_0 достаточно велика по сравнению с $\frac{2K_1}{M_0}$. Для области полей вблизи ферромагнитного резонанса это имеет место при

$$\omega \gg \gamma \frac{|K_1|}{M_0}. \qquad (7,18)$$

Если направления $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ можно считать совпадающими, то, как было показано в § 5, общее условие резонанса переходит в формулу Киттеля (5,10), а для компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ оказываются справедливыми выражения (5,22) — (5,26). Во всех этих выражениях необходимо лишь заменить компоненты тензора $\overleftrightarrow{N}$ на компоненты тензора $\overleftrightarrow{N}^{\text{ан}}$.

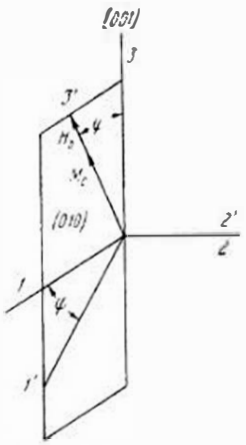


Рис. 17. Оси координат для случая, когда H_0 лежит в плоскости (010).

Остановимся теперь на двух частных случаях, которые были исследованы экспериментально для многих материалов. При этом будем интересоваться только условием резонанса.

Рассмотрим прежде всего случай, когда H_0 и M_0 лежат в плоскости (010) (рис. 17) и образуют с осью [001] угол φ. Тогда, направив оси новой системы координат так, как показано на рис. 17, получим для не обращающихся в нуль косинусов углов между осями:

$$\beta_{11'} = \beta_{33'} = \cos\varphi; \quad \beta_{22'} = 1;$$
$$\beta_{13'} = -\beta_{31'} = \sin\varphi.$$

С учетом этого из (7,17) следует:

$$N^{\text{ан}}_{1'1'} = \frac{K_1}{M_0^2} \cdot 3\sin^2 2\varphi; \quad N^{\text{ан}}_{2'2'} = 0; \quad N^{\text{ан}}_{3'3'} = \frac{K_1}{M_0^2}(2 - \sin^2 2\varphi).$$

Подставляя эти величины в резонансную формулу (5,10), получим:

$$\omega = \gamma \left\{ \left[H_0 + \frac{K_1}{2M_0}(3 + \cos 4\varphi) \right] \left[H_0 + \frac{2K_1}{M_0}\cos 4\varphi \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (7,19)$$

Подчеркнем, что формула (7,19) является точной, если H_0 направлено по одной из осей симметрии кристаллической решетки, т. е. при $\varphi = 0$ (ось [001]), $\varphi = 90°$ (ось [100]) и $\varphi = 45°$ (ось [101]), и по величине превышает некоторое значение порядка $\frac{K_1}{M_0}$. При $K_1 > 0$ оси [001], [010] и [100] являются осями легкого намагничивания, и этом случае при $\varphi = 0$ и $\varphi = 90°$ формула (7,19) точна

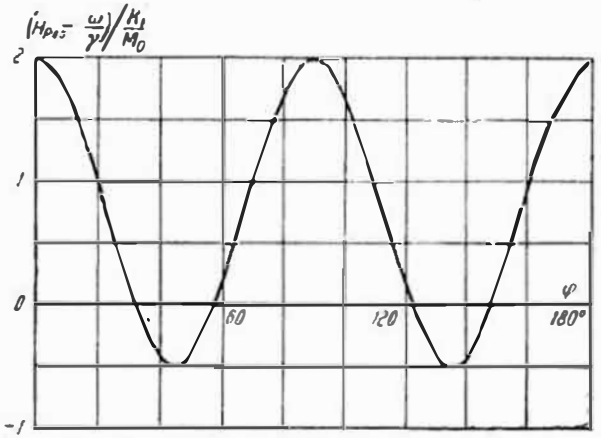


Рис. 18. Зависимость резонансного поля от угла φ между H_0 и осью [001] в плоскости (010).

при любых значениях H_0. Для произвольных φ эта формула приближенно справедлива при условии $H_0 \gg \frac{K_1}{M_0}$. В последнем случае из (7,19) приближенно следует:

$$H_{\text{рез}} = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{K_1}{2M_0}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos 4\varphi\right). \qquad (7,20)$$

Зависимость $H_{\text{рез}}$ от φ, рассчитанная по формуле (7,20) при отрицательной величине K_1 (что характерно для большинства ферритов), приведена на рис. 18. Заметим, что для направления [001], которое является при $K_1 < 0$ осью трудного намагничивания, значение $H_{\text{рез}}$ является максимальным и составляет:

$$H_{\text{рез. макс}} = \frac{\omega}{\gamma} + 2\frac{|K_1|}{M_0}. \qquad (7,21)$$

Максимальное значение $H_{рез}$ для этого направления объясняется тем, что $H_{ан}$ противоположно H_0.

Зависимость $H_{рез}$ от φ в плоскости (010) экспериментально исследовалась Бикфордом [114]. При высоких частотах, когда условие (7,18) выполняется, экспериментальные результаты хорошо совпадают с теоретическими.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда H_0 и M_0 лежат в плоскости (110) (рис. 19) и образуют угол θ с осью [001]. Тогда, если направить оси координат так, как показано на рисунке,

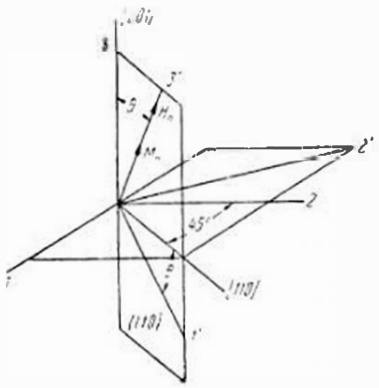


Рис. 19. Оси координат для случая, когда H_0 лежит в плоскости (110).

$$\beta_{11'} = \beta_{21'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta;$$

$$\beta_{13'} = \beta_{23'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta;$$

$$\beta_{22'} = -\beta_{12'} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\beta_{31'} = -\sin\theta;$$

$$\beta_{32'} = 0; \quad \beta_{33'} = \cos\theta.$$

В этом случае, поступая аналогично предыдущему примеру, получим для резонансной частоты формулу:

$$\omega = \gamma\left\{\left[H_0 + \frac{K_1}{M_0}(2 - \sin^2\theta - 3\sin^2 2\theta)\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[H_0 + \frac{K_1}{M_0}\left(2 - 4\sin^2\theta - \frac{3}{4}\sin^2 2\theta\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7,22)$$

Эта формула справедлива для любых H_0, несколько превышающих $\frac{|K_1|}{M_0}$, при $\theta = 0$ (направление [001]), $\theta = 54°44'$ (направление [111]) и $\theta = 90°$ (направление [110]). Для направлений легкого намагничивания, т. е. для $\theta = 0$ при $K_1 > 0$ или для $\theta = 54°44'$ при $K_1 < 0$, формула (7,22) справедлива для любых H_0. При произвольных θ она справедлива приближенно при $H_0 \gg \frac{|K_1|}{M_0}$. В последнем случае из (7,22) следует:

$$H_{рез} = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{K_1}{M_0}\left(-\frac{3}{16} + \frac{5}{4}\cos 2\theta + \frac{15}{16}\cos 4\theta\right). \quad (7,23)$$

При $K_1 < 0$ минимум $H_{рез}$ имеет место для направления [111], которое является в этом случае осью легкого намагничивания, и

$$H_{рез.\,мин} = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{4}{3}\frac{|K_1|}{M_0}. \quad (7,24)$$

График зависимости $H_{рез}$ от θ, рассчитанный по формуле (7,23) при $K_1 < 0$, представлен на рис. 20.

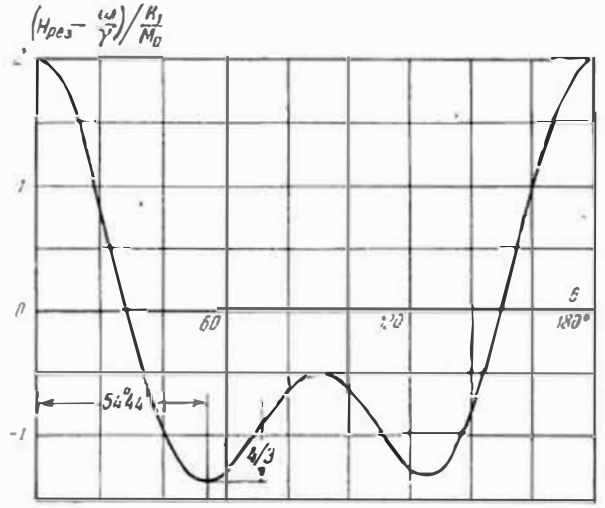


Рис. 20. Зависимость резонансного поля от угла θ между H_0 и осью [001] в плоскости (110).

Экспериментально обычно осуществляется именно этот случай, когда H_0 лежит в плоскости (110), так как в этой плоскости находятся все оси симметрии кристалла и, в частности, направления трудного и легкого намагничивания. Результаты экспериментов при достаточно высоких частотах или малых значениях $|K_1|$ [113, 128] хорошо совпадают с графиком рис. 20.

При низких частотах и для ферритов с большой анизотропией, когда условие (7,18) больше не выполняется, совпадение результатов расчета по формулам (7,19) и (7,22) с экспериментом при произвольных значениях углов φ и ϑ становится плохим. В этих случаях расчет должен производиться с учетом различия направлений $\boldsymbol{M}_0$

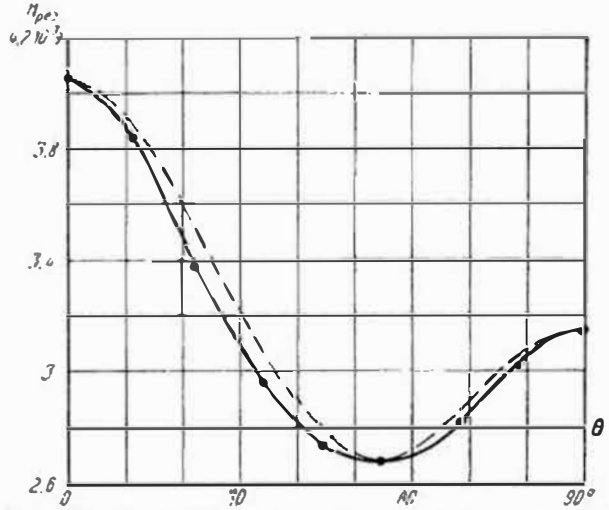


Рис. 21. Зависимость резонансного поля от угла θ между $\boldsymbol{H}_0$ и осью [001] в плоскости (110) для монокристалла марганец-цинкового феррита [81].
Частота 9198 *Мгц*, температура 77°К. Пунктир—расчет по приближенной формуле (7,23); сплошная линия—точный расчет с учетом несовпадения направлений $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$; точки—экспериментальные данные.

и $\boldsymbol{H}_0$. Такие вычисления были проведены для магнитноодноосного (гексагонального) кристалла Смитом и Белъерсом [78], а для кубического кристалла Артманом [81]. Они дали очень хорошее совпадение с экспериментом (см., например, рис. 21).

На рис. 22 приведены графики зависимости резонансной частоты $\omega_{рез}$ от H_0, рассчитанные для различных значений угла θ [81]. Из этих графиков видно, в частности, что для некоторых направлений, в том числе для осей трудного намагничивания, $\omega_{рез}$ обращается в нуль при конечных значениях H_0. Для этих направлений при дан-

ной частоте могут иметь место два резонансных значения магнитного поля.

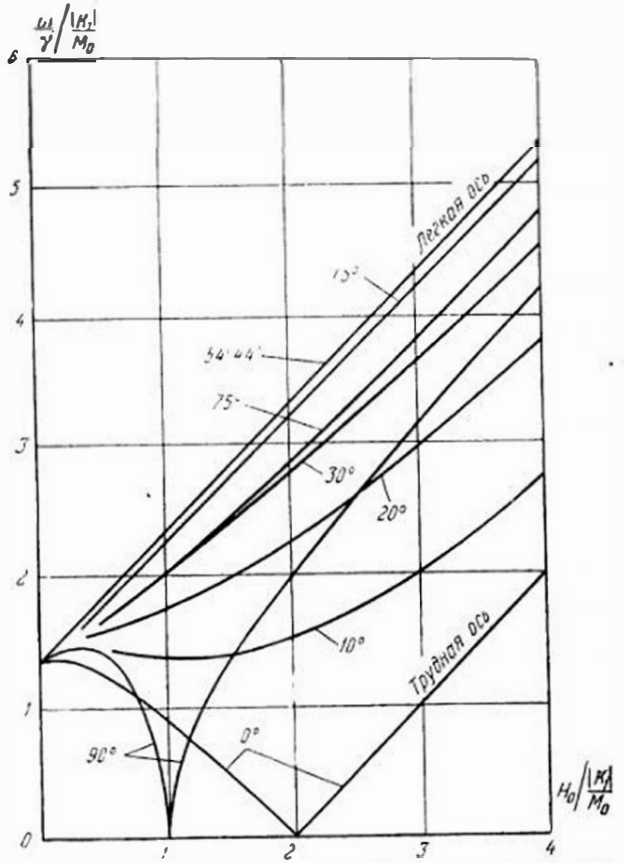


Рис. 22. Зависимость резонансной частоты от постоянного магнитного поля H_0, лежащего в плоскости (110) при отрицательной анизотропии [81].
Цифры у кривых—значения угла θ между $\boldsymbol{H}_0$ и осью [001].

До сих пор при учете кристаллографической анизотропии мы интересовались тензором проницаемости вещества $\overleftrightarrow{\chi}$. Однако может быть поставлена задача об определении

тензора восприимчивости эллипсоида $\overleftrightarrow{\chi^e}$ с учетом кристаллографической анизотропии, т. е. о совместном учете кристаллографической анизотропии и анизотропии формы. Эффективное поле в этом случае

$$\boldsymbol{H}_{эф} = \boldsymbol{H} - (\overleftrightarrow{N} + \overleftrightarrow{N}^{ан})\,\boldsymbol{M}, \qquad (7,25)$$

где $\overleftrightarrow{N}$ — тензор размагничивания (§ 5). Для получения компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$ можно использовать формулы, приведенные в § 5, если входящие в них компоненты тензора $\overleftrightarrow{N}$ заменить компонентами тензора $\overleftrightarrow{N}+\overleftrightarrow{N}^{ан}$.

В частности, условие резонанса поперечных компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$ при совпадении направлений $\boldsymbol{M}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ запишется:

$$\omega = \gamma \{[H_0 + (N_{11}^{ан} + N_x - N_{33}^{ан} - N_z) M_0] \times$$
$$\times [H_0 + (N_{22}^{ан} + N_y - N_{33}^{ан} - N_z) M_0]\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (7,26)$$

Большинство опытов по ферромагнитному резонансу, в том числе и упомянутые выше эксперименты производились с образцами в виде сфер. При этом $N_x = N_y = N_z$ и размагничивающие факторы формы в выражение (7,26) не входят. Таким образом, приведенные выше формулы (7,19)—(7,24) будут давать условия ферромагнитного резонанса, которые непосредственно получаются экспериментально для случая сферических образцов.

На рис. 23 приведены в качестве примера резонансные кривые (зависимости поглощения от H_0 при постоянной частоте), полученные Таннепвальдом [118] для сфер из монокристалла марганец-цинкового феррита при различных ориентациях $\boldsymbol{H}_0$ в плоскости $(1\bar{1}0)$. Как видно из этого рисунка, ширина резонансных кривых зависит от ориентации, а именно, она является минимальной для направления трудного намагничивания.

Качественно такой же результат был получен Г. В. Скроцким и Л. В. Курбатовым [86] путем интегрирования уравнения Ландау—Лифшица с учетом кристаллографической анизотропии и потерь. Параметр, характеризующий потери, при этом предполагался изотропным — не зависящим от ориентации $\boldsymbol{H}_0$ относительно осей кристалла, аналогично тому, как при расчете зависимости $2\Delta H$ от формы образца (§ 5) частота релаксации предполагалась не зависящей от формы. Однако количественного соответствия между феноменологическим расче-

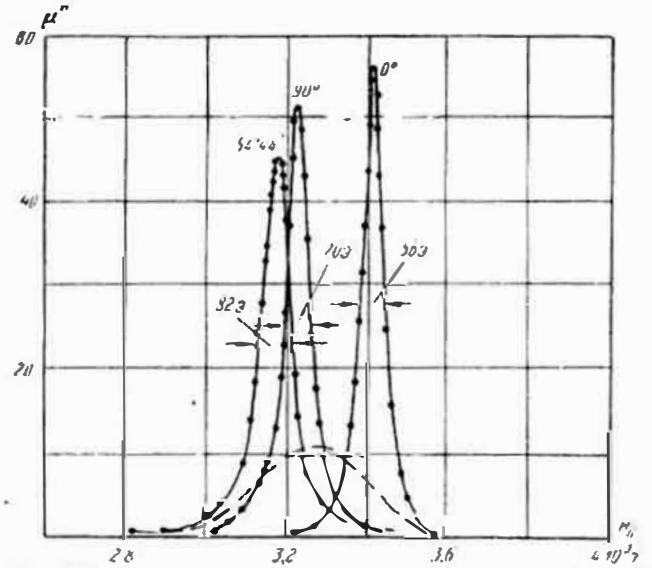


Рис. 23. Кривые резонансного поглощения для сферы из монокристалла марганец-цинкового феррита при различных ориентациях $\boldsymbol{H}$ в плоскости (110) [118].

Частота 9100 *Мгц*. $\boldsymbol{H}_0$ лежит в плоскости (110) и составляет с осью [001] углы θ, приведенные у соответствующих кривых. Пунктиром показана резонансная кривая поликристаллического феррита того же состава.

том [86] и экспериментом [118] нет: фактическая анизотропия величины $2\Delta H$ значительно превышает расчетную. Такое несоответствие, которое наблюдалось и для других ферритов [128], может быть связано с анизотропией параметра потерь, например частоты релаксации.

В заключение заметим, что анализ экспериментальных кривых зависимости $H_{рез}$ от углов между постоянным полем и осями монокристалла дает возможность точного определения фактора спектроскопического расщепления g и

констант анизотропии, в частности первой константы K_1 (константы более высоких порядков в большинстве случаев могут не приниматься во внимание для ферритов). Значения этих величин для некоторых ферритов со структурой типа шпинели, а также иттриевого феррита со структурой типа граната приведены в следующей таблице:

Материал	ϱ	K_1 эрг/см³
Fe_3O_4 [114]	2,12	$-1,1\cdot10^5$
$NiFe_2O_4$ [113]	2,19	$-6,3\cdot10^4$
$MgFe_2O_4$ [126]	2,00	$-4,0\cdot10^4$
$MnFe_2O_4$ [128]	2,00	$-2,8\cdot10^4$
$Y_3Fe_5O_{12}$ [128]	2,00	$-5,1\cdot10^3$

§ 8. Поликристаллические ферриты

В технике, в том числе и в технике с. в. ч., применяются в основном поликристаллические ферриты. Они представляют собой конгломераты кристалликов с размерами порядка 10^{-4}—10^{-3} см, произвольно ориентированных друг относительно друга. Рассмотрим свойства таких поликристаллов в полях с. в. ч. При этом мы будем пока предполагать, что каждый кристаллик является однодоменным. Это выполняется при достаточно больших постоянных магнитных полях, а также, вообще говоря, при достаточно малых размерах кристалликов. Последний случай, однако, не реализуется для большинства ферритов.

Для того чтобы получить магнитную восприимчивость каждого кристаллика, необходимо учесть ориентацию его кристаллографических осей относительно направления постоянного поля, а также принять во внимание внутренние размагничивающие поля. Эти поля определяются неостоянством намагниченности при переходе от одного кристаллика к другому, а также наличием пустот (пор) между кристалликами, которые неизбежно имеются в реальных материалах.

Произведя затем усреднение по большому числу произвольно ориентированных кристалликов, мы получим тензор восприимчивости поликристаллической среды. Этот тензор при решении электродинамических задач можно будет рассматривать как макроскопический параметр среды. Очевидно, что это имеет смысл только в том случае, когда размеры кристалликов малы по сравнению с четвертью длины волны в среде с полученными в результате усреднения параметрами. Принимая во внимание приведенные выше размеры кристалликов, мы видим, что это условие хорошо выполняется в диапазоне с. в. ч.

Сформулированная задача об определении усредненных параметров поликристаллического феррита является чрезвычайно сложной и вряд ли может быть решена строго. Ниже мы рассмотрим пути ее приближенного решения.

Установим прежде всего, какой вид должны иметь тензорные параметры поликристаллической среды при наличии постоянного магнитного поля. Для этого достаточно воспользоваться тем обстоятельством, что в такой среде существует только одна выделенная ось — направление внешнего постоянного поля. При любом повороте системы координат вокруг этой оси компоненты тензора должны быть инвариантными.

Рассмотрим любой тензорный параметр среды

$$\overleftrightarrow{\varrho} = \begin{vmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \varrho_{13} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} & \varrho_{23} \\ \varrho_{31} & \varrho_{32} & \varrho_{33} \end{vmatrix}. \tag{8,1}$$

Формула преобразования компонентов тензора $\overleftrightarrow{\varrho}$ при произвольном повороте системы координат имеет вид

$$\varrho_{k'l'} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} a_{k'r}a_{l's}\varrho_{rs}, \tag{8,2}$$

где индексы k' и l' соответствуют новым, а r и s — старым осям; $a_{k'r}$ и $a_{l's}$ — косинусы углов между соответствующими осями. При повороте на угол θ вокруг третьей оси, которую мы совмещаем с направлением постоянного магнитного поля,

$$a_{1'1} = a_{2'2} = \cos\theta; \quad a_{3'3} = 1; \quad a_{1'2} = -a_{2'1} = \sin\theta;$$
$$a_{1'3} = a_{2'3} = a_{3'1} = a_{3'2} = 0. \tag{8,3}$$

Для того чтобы определить вид тензора $\overleftrightarrow{\varrho}$, достаточно учесть инвариантность трех компонентов тензора, например следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{1'1'} &= \varrho_{11}, \\ \varrho_{1'3'} &= \varrho_{13}, \\ \varrho_{3'1'} &= \varrho_{31}. \end{aligned}\right\} \tag{8,4}$$

Выражая в (8,4) компоненты в новой (штрихованной) системе координат через компоненты в старой системе согласно (8,2) и учитывая (8,3), приходим к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\theta\,(\varrho_{22}-\varrho_{11})+\sin\theta\cos\theta\,(\varrho_{12}+\varrho_{21}) &= 0, \\ (\cos\theta-1)\,\varrho_{13}+\sin\theta\,\varrho_{23} &= 0, \\ (\cos\theta-1)\,\varrho_{31}-\sin\theta\,\varrho_{32} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8,5}$$

При произвольном значении угла θ из (8,5) следует:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{11} &= \varrho_{22}, \\ \varrho_{21} &= -\varrho_{12}, \\ \varrho_{13} &= \varrho_{23} = \varrho_{31} = \varrho_{32} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8,6}$$

Под $\overleftrightarrow{\varrho}$ можно понимать любой тензорный параметр намагниченной в направлении третьей оси поликристаллической среды. Например, тензор магнитной восприимчивости такой среды запишется следующим образом:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{vmatrix} \chi & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi_\parallel \end{vmatrix}. \tag{8,7}$$

Этот тензор отличается от тензора восприимчивости монокристалла тем, что для него выполняются условия: $\chi_{11}=\chi_{22}$ и $\chi_{12}=-\chi_{21}$ [1]). Сравнивая же (8,7) с выражением (1,29), справедливым для изотропной, намагниченной до насыщения среды, мы видим, что они формально отличаются лишь наличием в (8,7) не равного нулю компонента $\chi_\parallel$.

Однако, если рассматривать намагниченный до насыщения феррит и пренебрегать потерями, то величина χ_a, равная нулю для каждого кристаллика, будет равна нулю и после усреднения. Выражения же χ и χ_a для поликристалла будут, конечно, существенно отличаться от выражений (4,11) и (4,12), справедливых для изотропной среды. Как уже указывалось, получить строго χ и χ_a для поликристалла очень трудно.

Приближенное рассмотрение процессов в намагниченных поликристаллических ферритах возможно в двух крайних случаях: $H_{ан} \gg M_0$ и $H_{ан} \ll M_0$. Здесь $H_{ан}$ — максимальное значение эффективного поля анизотропии, для кубической решетки равное в первом приближении $\frac{2|K_1|}{M_0}$, где K_1 — первая константа анизотропии, а M_0 — намагниченность насыщения.

В первом случае ($H_{ан} \gg M_0$) можно пренебречь магнитным взаимодействием между кристалликами (зернами), т. е. считать, что компоненты тензора восприимчивости каждого кристаллика определяются только ориентацией его кристаллографических осей по отношению к постоянному полю без учета формы зерна и влияния соседних зерен. Эта задача рассматривалась в § 7. Но теперь, в отличие от § 7, нельзя ограничиться рассмотрением отдельных кристаллографических плоскостей, а нужно иметь полную зависимость компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ от углов θ и φ, определяющих ориентацию кристаллика.

Следующий этап должен заключаться в усреднении компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ по произвольно ориентированным зернам. Это усреднение и должно дать тензор вида (8,7). Однако практическое осуществление такого усреднения даже в рассматриваемом приближении «независимых зерен» встречает большие трудности. Поэтому, следуя Шлёману [160], сформулируем более простую задачу: определим форму кривой резонансного поглощения $\chi''(H_0)$ в случае, когда собственными потерями

[1]) Если пренебречь потерями, то условие $\chi_{12}=-\chi_{21}$ выполняется и для монокристалла.

можно пренебречь, т. е. когда резонансная кривая каждого кристаллика является бесконечно узкой — представляет собой дельта-функцию $\delta[H_0 - H_{рез}(\theta\varphi)]$. Форма резонансной кривой поликристалла в этом случае совпадает с функцией распределения кристалликов по значениям резонансного поля, которая определяется следующим образом:

$$\omega(H_0) = \int\int \delta[H_0 - H_{рез}(\theta, \varphi)]\, d\theta\, d\varphi \qquad (8,8)$$

(интегрирование производится по всем возможным значениям углов).

Рассмотрим прежде всего характер функции $\omega(H_0)$, основываясь на результатах, полученных в § 7 для кубической решетки с учетом только первой константы анизотропии. При этом будем считать, что $K_1 < 0$. Функция $\omega(H_0)$ в этом случае не равна нулю в интервале полей от $H_{рез.\,мин}$ (формула (7,24)), которое соответствует направлению легкого намагничивания, до $H_{рез.\,макс}$ (формула (7,21)), которое имеет место в направлении трудного намагничивания. Ширина этого интервала составляет $\frac{10}{3}\frac{|K_1|}{M_0}$. Наличие экстремумов $H_{рез}(\theta, \varphi)$ на границах этого интервала должно привести к тому, что $\omega(H_0)$ будет иметь в этих точках значения, не равные нулю.

Из кривых рис. 18 и рис. 20 видно, что направление [110] ($\varphi = 45°$ на рис. 18 и $\theta = 90°$ на рис. 20), при котором $H_{рез} = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{1}{2}\frac{|K_1|}{M_0}$, соответствует седлу на поверхности $H_{рез}(\theta, \varphi)$. Вблизи этого направления имеется «сгущение» кристалликов, которое должно привести к пику функции $\omega(H_0)$.

Математический анализ задачи [160] подтверждает эти предположения: максимумам и минимумам $H_{рез}(\theta, \varphi)$ соответствуют разрывы $\omega(H_0)$, а седлу $H_{рез}(\theta, \varphi)$ — логарифмическая особенность $\omega(H_0)$.

Основываясь на указанных свойствах функции $\omega(H_0)$, Шлёман [160] рассчитал ее ход как для случая $\frac{|K_1|}{M_0} \ll \frac{\omega}{\gamma}$

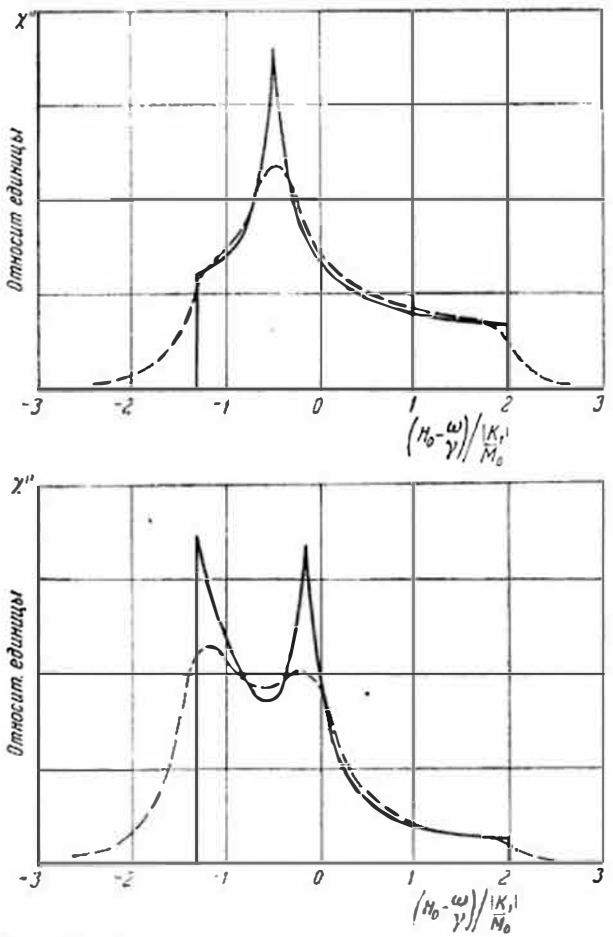


Рис. 24. Резонансные кривые поликристаллического феррита в случае $H_{ан} \gg M_0$.

Сплошные линии—функции распределения $\omega(H_0)$ [161]; пунктир—с учетом конечной ширины кривой монокристалла. Верхний график $\alpha = \frac{|K_1|}{M_0}\Big/\frac{\omega}{\gamma} = 0$; нижний график $\alpha = 0{,}35$.

(который был подробно рассмотрен в § 7 и которому соответствуют кривые рис. 18 и рис. 20), так и при больших значениях параметра $\alpha = \frac{|K_1|}{M_0} / \frac{\omega}{\gamma}$. Результаты расчета приведены на рис. 24.

Из рис. 24 видно прежде всего, что полученная кривая резонансного поглощения поликристалла резко отличается по форме от обычной (лоренцовой) резонансной кривой. Пик полученной кривой для $\alpha = 0$ лежит при $H_{рез} = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{1}{2}\frac{|K_1|}{M_0}$, а с ростом α несколько смещается в сторону больших полей. Ширина этого пика при $\alpha = 0$ составляет приблизительно $\frac{1}{2}\frac{|K_1|}{M_0}$. На границах $\omega(H_0)$ имеют место «ступеньки», а при больших значениях α на нижней границе (в направлении легкого намагничивания) появляется второй пик.

Наличие собственных потерь, т. е. конечная ширина резонансной кривой монокристалла, приведет к размазыванию кривых $\chi''(H_0)$ для поликристалла, как это показано на рис. 24 пунктиром. Однако форма кривой $\chi''(H_0)$ по-прежнему будет сильно отличаться от лоренцовой. Смещение максимума этой кривой относительно «изотропной» точки $\frac{\omega}{\gamma}$ будет порядка $\frac{1}{2}\frac{|K_1|}{M_0}$, а расширение, обусловленное анизотропией, — порядка $\frac{|K_1|}{M_0}$.

Условие $H_{эф} \gg M_0$, лежащее в основе рассмотренного метода «независимых зерен», хорошо выполняется вблизи точек компенсации (§ 2). При этом резонансные кривые, близкие по форме к кривой, показанной на рис. 24 пунктиром, наблюдались экспериментально [159]. Подобные кривые наблюдались и для магнитно-одноосных ферритов [164], для которых расчет методом «независимых зерен» дает результаты, аналогичные приведенным выше для случая кубической решетки.

Несимметрия резонансных кривых, предсказываемая рассмотренной теорией, часто подтверждается экспериментально даже в тех случаях, когда условие $H_{эф} \gg M_0$ выполняется плохо и когда другие особенности кривых, вытекающие из этой теории, не могут быть обнаружены. Это иллюстрируется рис. 25, на котором приведены

кривые резонансного поглощения для поликристаллических ферритов с $K_1 < 0$, $K_1 \cong 0$ и $K_1 > 0$. Из этого рисунка видно, что при $K_1 < 0$ в соответствии с рис. 24 более крутым оказывается склон кривой, обращенный в сторону малых полей. При $K_1 \cong 0$ кривая является симметричной и узкой, а при $K_1 > 0$ несимметрия имеет противоположный знак.

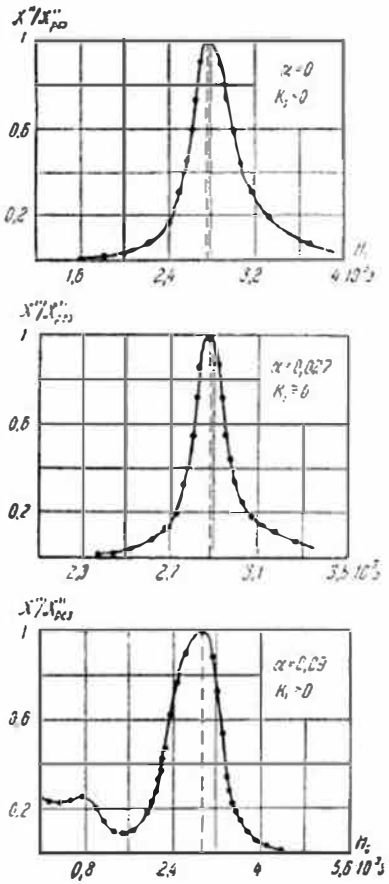


Рис. 25. Резонансные кривые ферритов состава $Ni_{1-\alpha}Co_\alpha Mn_{0,02}Fe_{1,9}O_4$ с различным знаком первой константы анизотропии [155].

Перейдем теперь к учету сил магнитного (дипольного) взаимодействия между кристалликами. Эти силы приведут, во-первых, к появлению постоянных размагничивающих полей, связанных со скачками постоянной намагниченности на границах кристалликов. Очевидно, что эти поля будут убывать по мере увеличения постоянного поля, так как направления намагниченностей всех кристалликов будут приближаться к направлению поля. Во-вторых, и это наиболее существенно, наличие магнитного взаимодействия между кристалликами приведет к связи их переменных намагниченностей подобно тому, как обменное взаимодействие между подрешетками (§ 2) приводило к связи переменных намагниченностей подрешеток. Различие заключается лишь в том, что в случае поликристалла связанные

системы занимают отдельные области макроскопических размеров, в то время как в случае подрешеток они были (с макроскопической точки зрения) «перемешаны». Магнитные силы, действующие на бо́льших расстояниях, чем обменные, обеспечивают при этом эффективную связь.

Если связь достаточно велика (условием этого как раз является $H_{эф} \ll M_0$), то правильнее исходить не из представления об отдельных зернах, связь между которыми рассматривается как возмущение, а из представления об однородной среде, рассматривая в качестве возмущения неоднородное эффективное поле анизотропии. Размагничивающие поля, возникающие вследствие непостоянства намагниченности на границах кристалликов, могут быть также включены в это поле. Расширение резонансной кривой поликристалла по сравнению с монокристаллом появляется вследствие дополнительного механизма потерь, связанного с неоднородным возмущающим полем.

Расширение резонансной кривой, обусловленное магнитными неоднородностями, было впервые рассмотрено Клогстоном и др. [107] (§ 4). Было показано, что при наличии неоднородностей возбуждаются вырожденные с однородной прецессией спиновые волны, которые, отбирая энергию от однородной прецессии, передают ее кристаллической решетке. Это и приводит к росту потерь, т. е. к расширению резонансной кривой. В работе [107] рассматривались неоднородности с размерами порядка междуатомных расстояний, и спиновые волны, которые при этом возбуждались, имели длины волн того же порядка.

Другой предельный случай был теоретически и экспериментально рассмотрен Гепвидом и Клогстоном [97]. В этом случае неоднородности внутреннего магнитного поля были вызваны тем, что форма образца (монокристалла) отличалась от эллипсоида; размеры этих неоднородностей были одного порядка с размерами образца. При этом возбуждались неоднородные (уокеровские) типы прецессии (§ 6). Некоторые из них проявлялись в виде дискретных максимумов, другие приводили к некоторому расширению основной резонансной кривой. Однако это расширение оказывалось небольшим, во всяком случае—значительно меньшим, чем то, которое происходило бы, если бы не было магнитного взаимодействия,

и происходила независимая прецессия намагниченности в участках образца с различными внутренними полями.

В поликристаллических ферритах имеет место промежуточный случай—неоднородности эффективного поля по своим размерам порядка размеров кристалликов. Тот же порядок величины имеют и длины волн возбуждаемых на них неоднородных типов прецессии. Так как эти величины значительно меньше размеров образца, то можно считать, что возбуждаемые типы прецессии представляют собой плоские спиновые волны. С другой стороны, эти размеры значительно больше, чем величины порядка 10^{-6}—10^{-5} *см*, при которых становится существенным обменное взаимодействие. Поэтому в формуле дисперсии спиновых волн в эллипсоиде (6,15) можно в данном случае пренебречь обменным членом qk^2M_0. Это соответствует начальному участку спектра спиновых волн (рис. 6), ограниченному двумя горизонтальными линиями. Из (6,15) следует, что нижняя граница спектра

$$\omega_{мин} = \gamma (H_0 - N_z M_0), \tag{8,9}$$

а верхняя граница

$$\omega_{макс} = \gamma [(H_0 - N_z M_0)(H_0 - N_z M_0 + 4\pi M_0)]^{1/2}. \tag{8,10}$$

Заметим, что плотность спектра возрастает с увеличением ω, так как число направлений увеличивается как $\sin^2 \theta_k$ с ростом θ_k от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Остановимся кратко на основных результатах теории ширины резонансной кривой в поликристалле (в случае $H_{эф} \ll M_0$) [160], основанной на рассмотренных выше представлениях. Расширение резонансной кривой, обусловленное поликристаллической структурой,

$$(2\Delta H)_{эф} = \frac{\overline{(H_{эф})^2}}{\sqrt{M_0}} F(\omega, H_0, M_0), \tag{8,11}$$

где $\overline{(H_{эф})^2}$ — средний квадрат неоднородного поля, а функция F учитывает степень вырождения однородной прецессии со спиновыми волнами. В частности, эта функция возрастает, если частота однородной прецессии ω_0, находясь внутри спектра спиновых волн, приближается к его верхней границе. Эта функция обращается в нуль,

если ω_0 выходит за пределы спектра спиновых волн. Легко убедиться, сравнивая выражения (5,10) и (8,10), что для сфероида с размагничивающими факторами N_z и $N_\perp$ частота однородной прецессии лежит вне спектра спиновых волн при

$$H_0 < N_\perp \left(1 + \frac{N_\perp}{N_z}\right) M_0. \qquad (8,12)$$

В частности, для сферы условие (8,12) переходит в следующее:

$$H_0 < \frac{2}{3} 4\pi M_0. \qquad (8,13)$$

Как видно из (8,11), расширение кривой в случае поликристалла в первом приближении пропорционально $\frac{1}{\sqrt{M}}$, в то время как в случае, рассмотренном в работе [107] (монокристалл со статистическим распределением магнитных ионов по узлам решетки), оно было пропорционально $\sqrt{M}$ (§ 4). Это различие становится понятным, если учесть, что в данном случае, в отличие от [107], связь, приводящая к сужению резонансной кривой, обусловлена магнитным взаимодействием, которое пропорционально M.

Необходимо подчеркнуть, что рассмотренный механизм, в отличие от случая «независимых зерен», дает кривую резонансного поглощения в поликристаллическом феррите, не отличающуюся по форме от резонансной (лоренцовой) кривой.

В поликристаллических ферритах, которые используются в диапазоне с.в.ч., обычно $H_{ан}$ по порядку величины одинаково с M_0. При этом ни одна из рассмотренных двух приближенных теорий не оказывается полностью справедливой. По-видимому, теория, основанная на представлении о спиновых волнах, возбуждаемых на неоднородностях, в большинстве случаев дает более правильную физическую картину явлений. Об этом свидетельствует прежде всего тот факт, что форма кривых резонансного поглощения в поликристаллах с достаточно узкой кривой близка к лоренцовой. В пользу этого говорит также работа [163], в которой наблюдался максимум $(2\Delta H)_{ан}$ при

переходе частотой однородной прецессии верхней границы (8,10) спектра спиновых волн. Однако положение максимума кривой $\chi''(H_0)$ в поликристаллах, а в некоторых случаях (как уже отмечалось) и несимметрия этой кривой хорошо объясняются на основе теории «независимых зерен».

В реальных поликристаллах всегда имеются пустоты (поры). Мерой пористости может служить, например, относительная плотность $p = 1 - \frac{v}{V}$, где v — объем пор, а V — объем всего образца. Для ферритов значения p лежат обычно в пределах от 70—80% до 96—98%. Наличие пор приводит к существенному расширению и смещению резонансных кривых. Это расширение может трактоваться с точки зрения спиноволновой теории. Внутренние размагничивающие поля должны при этом рассматриваться как неоднородное силовое поле, приводящее наряду с неоднородным эффективным полем анизотропии к возбуждению спиновых волн.

Влияние пор может быть понято и с точки зрения представлений о независимой прецессии отдельных участков образца. При этом необходимо учесть, что размагничивающие поля, вызываемые порами, достигают величины $4\pi M_0$ и быстро убывают по мере удаления от пор. Можно принять, что эти поля будут сосредоточены в объеме одного порядка с объемом пор. Тогда обусловленное порами расширение резонансной кривой поликристалла может быть записано:

$$(2\Delta H)_{пор} = u\, 4\pi M_0 (1 - p), \qquad (8,14)$$

где u — коэффициент порядка единицы. Как видно из рис. 26, хорошее совпадение с экспериментом получается при $u = 1$.

Экстраполяция ширины резонансной кривой к 100% плотности (рис. 26) дает величину

$$(2\Delta H)_{100\%} = (2\Delta H)_0 + (2\Delta H)_{ан}, \qquad (8,15)$$

где $(2\Delta H)_0$ — ширина резонансной кривой монокристалла, а $(2\Delta H)_{ан}$ — расширение резонансной кривой, обусловленное анизотропией, которое подробно обсуждалось выше.

Величина обусловленного порами смещения максимума резонансной кривой $\delta H_{пор}$ также может быть оценена на основе представления о независимой прецессии от-

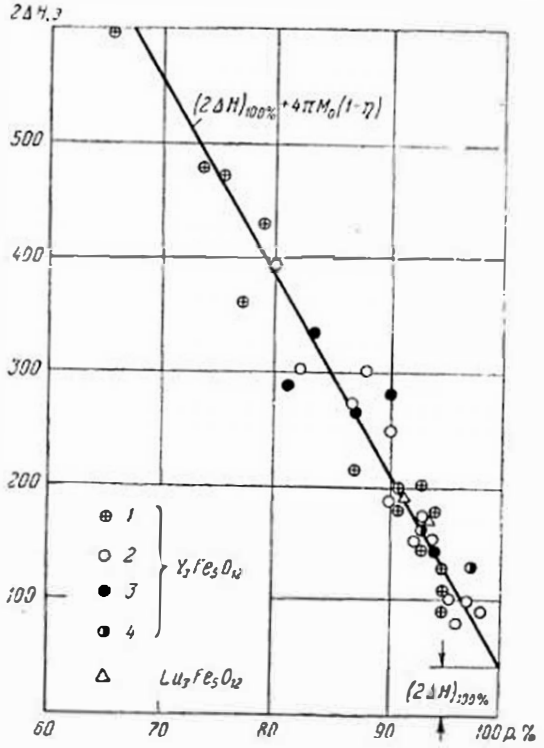


Рис. 26. Зависимость ширины резонансной кривой от относительной плотности p для поликристаллических ферритов со структурой граната [210].

Кружки соответствуют образцам иттриевого феррита, приготовленным различными способами: 1—методом совместного осаждения [59], 2—из окислов, 3—из окислов с добавкой 2% меди, 4—из окислов с добавкой 1% марганца. Треугольники соответствуют образцам лютециевого феррита.

дельных участков образца. Эта оценка приводит к величине [155]

$$\delta H_{пор} = 2\pi M_0 (1 - p). \qquad (8,16)$$

удовлетворительно совпадающей с экспериментом.

Из приведенных данных ясно, что расширение резонансных кривых, обусловленное порами, играет очень большую роль в реальных поликристаллических ферритах. Эта роль особенно велика в материалах с малой анизотропией и малой $(2\Delta H)_0$, например в иттриевом феррите со структурой типа граната (рис. 26). В поликристаллических образцах таких ферритов могут быть получены очень узкие резонансные кривые—менее 50 э [61], но только при условии высокой относительной плотности образца.

Заметим, что анизотропия в ферритах может быть обусловлена также механическими напряжениями: внешними или внутренними, появившимися при изготовлении материала. Эта анизотропия, вообще говоря, будет оказывать такое же влияние на сверхвысокочастотные свойства ферритов, как и кристаллографическая анизотропия. В поликристаллах она приведет к расширению и смещению резонансных кривых. Однако для ферритов, используемых в технике с. в. ч., влияние анизотропии механических напряжений обычно несущественно.

ГЛАВА 4

ВЛИЯНИЕ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

§ 9. Усреднение по доменам без учета размагничивающих полей на границах

До сих пор мы не принимали во внимание доменной структуры феррита. Поэтому все полученные в предыдущих главах соотношения для компонентов тензора восприимчивости непосредственно справедливы лишь при достаточно больших постоянных магнитных полях. В этой главе будут рассмотрены основные физические процессы, определяющие тензор магнитной восприимчивости ферритов при наличии доменной структуры. Это завершит изучение сверхвысокочастотных магнитных свойств таких материалов при произвольных значениях постоянного магнитного поля и лишь при одном ограничении — малости переменных составляющих магнитного поля[1]).

Причина образования в ферромагнетике областей самопроизвольного намагничивания — доменов[2]) заключается в том, что, хотя обменная энергия имеет минимум при одинаковой намагниченности всего тела, магнитная энергия приобретает в этом случае значительную величину. Равновесное состояние, соответствующее минимуму суммарной свободной энергии, достигается при разделении ферромагнитного тела на области — домены, самопроизвольно намагниченные до насыщения в различных направлениях. При этом в отсутствие внешнего магнитного поля

[1]) Это ограничение будет снято в третьей части книги.

[2]) Вопросы доменной структуры, представляющие одну из центральных проблем ферромагнетизма, подробно рассмотрены, например, в монографии С. В. Вонсовского и Я. С. Шура [5].

(и остаточной намагниченности) результирующая средняя намагниченность тела оказывается равной нулю.

В свободную энергию ферромагнетика, кроме обменной и магнитной энергии, входят энергия кристаллографической анизотропии и магнитоупругая энергия. Все эти виды энергии необходимо учитывать при определении размеров и формы доменов. Очевидно, прежде всего, что для большинства доменов направление намагниченности должно совпадать с осью легкого намагничивания, чтобы обеспечить достаточно малую величину энергии анизотропии. Магнитная же энергия будет иметь малую величину, если магнитные потоки доменов будут в основном замыкаться внутри тела.

Задача об определении формы и размеров доменов была решена впервые Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [66] для случая магнитно-одноосного кристалла. Если граница такого кристалла перпендикулярна оси легкого намагничивания (оси z на рис. 27), то домены представляют собой слои, параллельные этой оси, замыкаемые на границе кристалла треугольными призмами[1]). При этом магнитные потоки полностью замыкаются внутри тела и магнитная энергия равна нулю. Границы между слоями являются так называемыми 180°-границами, а границы между слоями и призмами — 90°-границами в соответствии с величиной угла, который образуют намагниченности двух соседних доменов.

Изменение намагниченности при переходе из одного домена в другой совершается путем постепенного поворота вектора $\boldsymbol{M}$ в некотором граничном слое, называемом границей или стенкой домена. В случае 180°-границы этот поворот совершается в плоскости границы, в общем случае направления $\boldsymbol{M}$ лежат на поверхности конуса, осью которого является нормаль к границе.

При определенной «скорости» поворота вектора $\boldsymbol{M}$ на границе доменов достигается минимум суммарной энергии, состоящей из энергии анизотропии (которая была бы минимальна при скачкообразном повороте) и обменной

[1]) Как показали дальнейшие исследования [5], доменная структура одноосного кристалла вблизи его границ является несколько более сложной. Однако при рассмотрении процессов, происходящих на с. в. ч., это усложнение несущественно.

энергии (которая тем меньше, чем более плавно совершается поворот). Толщину границы δ можно определить как расстояние, на котором совершается в основном поворот вектора $\boldsymbol{M}$. Для этой величины из условия минимума суммарной энергии получается следующее выражение:

$$\delta = \sqrt{\frac{Aa^2N}{K}}, \qquad (9,1)$$

где K—константа анизотропии, A—обменный интеграл, a—постоянная решетки, N—число элементарных магнитных моментов (нескомпенсированных спинов) в единице объема. Толщина границы δ не зависит, таким образом, от размеров и формы тела. Порядок ее величины оказывается 10^{-6} см.

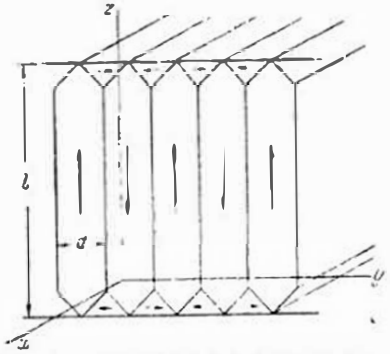


Рис. 27. Доменная структура в магнитно-одноосном кристалле.

Размер доменов d (рис. 27) определяется также минимумом суммы обменной энергии и энергии анизотропии. С ростом d обменная энергия уменьшается вследствие уменьшения числа границ, а энергия анизотропии растет из-за увеличения объема замыкающих призм. Размер доменов оказывается в результате порядка

$$d = 10^{-3}\sqrt{l}, \qquad (9,2)$$

где l—размер тела.

В кристаллах с более сложной структурой, имеющих несколько осей легкого намагничивания (например, три оси, как кубические кристаллы), и у тел сложной формы более сложной является и форма доменов [5]. Однако указанные выше причины, определяющие размеры доменов и толщину границ, а также приведенные оценки этих величин остаются при этом в силе.

Существует некоторый предельный размер частиц ферромагнитного вещества порядка 10^{-5} *см*, частицы меньших размеров уже не распадаются на домены [6]. Размеры кристалликов поликристаллических ферритов, как уже указывалось, обычно превышают эти предельные размеры в 10 и более раз. Таким образом, эти кристаллики состоят при отсутствии постоянного поля из многих доменов.

При наложении внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$ появляется новый член в свободной энергии—энергия магнитных моментов во внешнем поле

$$U_H = -\int_V \boldsymbol{M}\boldsymbol{H}\,dV.$$

Равновесное состояние наступит в этом случае уже при наличии некоторой средней намагниченности тела в направлении, близком к направлению внешнего поля. Это смещение равновесия достигается, как известно [5], двумя путями:

1) перемещением границ доменов, ведущим к росту тех из них, в которых $\boldsymbol{M}$ составляет острый угол с $\boldsymbol{H}$ (процессы смещения);

2) поворотом векторов $\boldsymbol{M}$ внутри доменов (процессы вращения).

Процессы смещения заканчиваются с исчезновением доменной структуры, а процессы вращения—лишь при полном насыщении материала. Как отмечалось в § 7, это насыщение достигается при конечных значениях поля лишь при намагничивании в направлении одной из осей симметрии кристалла.

При наложении переменного магнитного поля достаточно низкой частоты процессы перемагничивания происходят квазистатически. Это означает, что в каждый момент времени доменная структура и результирующая намагниченность определяются мгновенным значением внешнего поля с учетом, конечно, магнитной «предыстории»

данного образца. Однако при увеличении частоты такой квазистатический подход становится совершенно неприменимым. При небольших амплитудах высокочастотного магнитного поля колебания намагниченности можно рассматривать теперь как малые динамические колебания вокруг состояния равновесия, определяемого постоянной составляющей магнитного поля.

В предыдущих главах в качестве такого равновесного состояния принималось отсутствие доменной структуры и динамические колебания намагниченности, которые определяли тензор восприимчивости, сводились к прецессии (вращению) вектора намагниченности. В этой главе равновесным состоянием явится определенная доменная структура. Нам предстоит рассмотреть как процессы вращения, так и смещения границ, которые могут происходить в феррите с такой структурой под воздействием переменных полей с. в. ч. диапазона.

Наличие доменной структуры внесет следующие усложнения в теорию ферритов в переменных магнитных полях сверхвысокой частоты.

1) Рассматривая прецессию намагниченности внутри каждого домена, необходимо учитывать размагничивающие поля, связанные с непостоянством нормальной составляющей переменной намагниченности на границах доменов (нормальная составляющая постоянной намагниченности обычно непрерывна на границе доменов).

2) Полученные с учетом упомянутых размагничивающих полей значения компонентов тензора восприимчивости каждого типа доменов следует затем усреднить по различным доменам.

3) Должны быть рассмотрены процессы смещения границ доменов.

4) Следует учесть вклад самих границ доменов в результирующую намагниченность.

В диапазоне с. в. ч. в области малых постоянных полей наиболее существенным является второй из перечисленных факторов—усреднение восприимчивости, обусловленной процессами вращения, по доменам. Это усреднение будет рассмотрено в данном параграфе без учета остальных факторов.

Если не принимать во внимание размагничивающих полей, связанных с непостоянством намагниченности на границах доменов, то для каждого домена полностью справедлива теория, рассмотренная в предыдущих главах, и, в частности, имеет место уравнение (5,20). В этом уравнении тензор $\overleftrightarrow{N}$ включает тензор размагничивающих факторов анизотропии, а при наличии внешних механических напряжений—и тензор размагничивающих факторов, связанных с этими напряжениями. Если же под полем $\boldsymbol{h}_e$, входящим в (5,20), понимать внешнее переменное поле, действующее на малый эллипсоид, то в тензор $\overleftrightarrow{N}$ будет входить и тензор размагничивающих факторов формы.

Усреднение решений уравнения (5,20) по доменам с учетом тензора $\overleftrightarrow{N}$, компоненты которого для различных доменов будут выражаться по-разному, представляет собой очень сложную задачу. Поэтому, следуя Радо [183, 71], рассмотрим, прежде всего, простой предельный случай, когда

$$\gamma H_{i0} \ll \omega. \tag{9,3}$$

Это условие выполняется в коротковолновой части диапазона с. в. ч. для небольших внешних постоянных полей (которые нас сейчас и интересуют, так как при больших полях доменная структура исчезает) и для обычно применяемых в этом диапазоне ферритов с небольшой анизотропией и небольшой намагниченностью насыщения.

Выполнение условия (9,3) дает возможность пренебречь вторым членом в левой части уравнения (5,20). Если также не учитывать потерь, то (5,20) перейдет в следующее выражение:

$$\boldsymbol{m} = \frac{i\gamma}{\omega} \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h}. \tag{9,4}$$

В это выражение тензор $\overleftrightarrow{N}$ уже не входит, и поэтому его легко усреднить по доменам.

Пусть для каждого домена

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{u}_0 M_0, \tag{9,5}$$

где $\boldsymbol{u}_0$ — единичный вектор в направлении намагниченности

данного домена, а M_0 — намагниченность насыщения. Тогда в результате усреднения по некоторому объему, содержащему большое число доменов, получим:

$$\overline{\boldsymbol{m}} = \frac{i\gamma}{\omega} M_0 \overline{\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{h}_0} = \frac{i\gamma}{\omega} M_0 \overline{\boldsymbol{u}}_0 \times \boldsymbol{h}.$$

Очевидно, что

$$\overline{\boldsymbol{u}}_0 M_0 = \boldsymbol{M}_z, \tag{9,6}$$

где $\boldsymbol{M}_z$ — средняя (техническая) намагниченность. Таким образом,

$$\overline{\boldsymbol{m}} = \frac{i\gamma}{\omega} \boldsymbol{M}_z \times \boldsymbol{h}. \tag{9,7}$$

Сравнивая (9,7) с выражением (9,4), справедливым для каждого домена, мы видим, что они отличаются только заменой намагниченности домена на среднюю намагниченность.

Проектируя уравнение (9,7) на оси координат, легко убедиться, что тензор восприимчивости имеет в данном случае следующий вид:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{vmatrix} 0 & i\chi_a & 0 \\ -i\chi_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{9,8}$$

где антисимметричный компонент

$$\chi_a = \frac{\gamma M_z}{\omega}. \tag{9,9}$$

Тензор магнитной проницаемости в этом случае запишется:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} 1 & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{9,10}$$

где

$$\mu_a = 4\pi\chi_a = \frac{4\pi\gamma}{\omega} M_z. \tag{9,11}$$

Приведенный вывод и окончательные простые выражения (9,8) —(9,11) будут в пределах сделанных допущений справедливы как для монокристалла, так и для поликристаллического материала. Если этот вывод провести с учетом потерь, то величина χ_a окажется комплексной и появятся мнимые диагональные компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi}$.

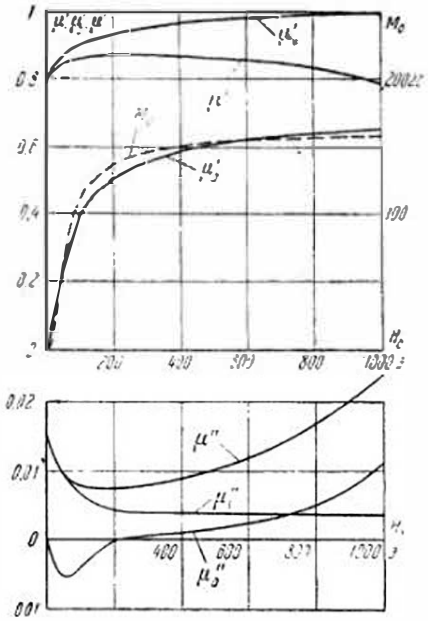


Рис. 28. Зависимость компонентов тензора магнитной проницаемости поликристаллического магний-марганцевого феррита от постоянного поля в трехсантиметровом диапазоне.

Пунктиром показана кривая намагничивания этого феррита.

Многочисленные эксперименты показывают, что соотношения (9,8)—(9,11) приближенно выполняются в коротковолновой части диапазона с. в. ч., где в области малых постоянных полей хорошо выполняются условия (9,3) и не играют большой роли процессы смещения границ.

На рис. 28 приведены экспериментальные зависимости компонентов тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ поликристаллического феррита в трехсантиметровом диапазоне от постоянного магнитного поля и области малых полей. Там же показана кривая намагничивания этого материала. Как следует из этого рисунка, выражения (9,10) и (9,11) передают в самом грубом приближении характер изменения вещественных частей компонентов тензора $\overleftrightarrow{\mu}$. Заметим, что на более высоких частотах это совпадение и соответствие с (9,3) было бы значительно лучшим.

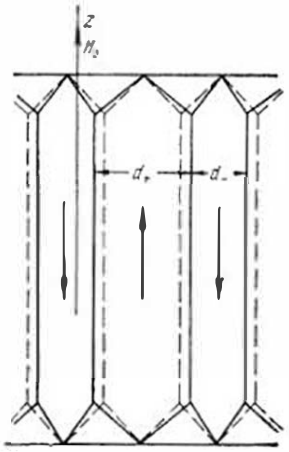


Рис. 29. Смещение границ доменов в магнитно-одноосном кристалле.

Если условия (9,3) не соблюдаются, то компоненты тензора восприимчивости окажутся, конечно, совершенно различными для монокристалла и поликристаллического материала. Для монокристалла они будут зависеть от ориентации постоянной намагниченности относительно осей кристаллической решетки. Для поликристалла тензор $\overleftrightarrow{\chi}$ и при наличии доменной структуры будет иметь вид (8,7).

Усреднение по доменам без учета внутренних размагничивающих полей можно провести очень просто в случае магнитно-одноосного монокристалла при постоянном поле, параллельном его оси. Условия (9,3) не являются при этом необходимыми. Доменная структура в таком кристалле при отсутствии внешнего поля была рассмотрена выше (рис. 27). При наложении поля в направлении оси границы доменов сместятся так, как показано на рис. 29. Вообще говоря, при этом может иметь место и поворот векторов $\boldsymbol{M}$ в доменах с «неблагоприятным» намагничиванием. Однако этот процесс вращения играет в данном случае менее существенную роль, и мы им пренебрежем. Не будем также принимать во внимание замыкающих доменов—призм на границе тела.

Определим для рассматриваемой модели усредненные компоненты тензора восприимчивости, пренебрегая для простоты потерями.

Намагниченность в каждом домене удовлетворяет уравнению Ландау—Лифшица

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{\text{ан}}). \tag{9,12}$$

где внешнее поле

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H_0 + \boldsymbol{h} e^{i\omega t}, \tag{9,13}$$

а эффективное поле кристаллографической анизотропии $\boldsymbol{H}_{\text{ан}}$ определяется формулой (7,9).

В рассматриваемом случае одноосного кристалла можно принять в первом приближении [5], что

$$U_{\text{ан}} = K \sin^2 \theta, \tag{9,14}$$

где K — константа анизотропии, а θ — угол между осью кристалла и вектором постоянной намагниченности $\boldsymbol{M}_0$.

Выражение (9,14) можно переписать и виде

$$U_{\text{ан}} = K\left[1 - \frac{(\boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{z}_0)^2}{M_0^2}\right]. \tag{9,14а}$$

Отсюда согласно (7,9) получим:

$$\boldsymbol{H}_{\text{ан}} = \frac{2K}{M_0^2} M_{z0} \boldsymbol{z}_0, \tag{9,15}$$

где $M_{z0} = \boldsymbol{M}_0 \boldsymbol{z}_0$ — проекция вектора $\boldsymbol{M}_0$ на ось z.

Подставим в уравнение (9,12) выражения (9,13), (9,15) и $\boldsymbol{M}$ и виде

$$\boldsymbol{M} = M_{z0} \boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{m} e^{i\omega t}.$$

Проектируя полученное уравнение на оси координат и пренебрегая малыми величинами второго порядка, найдем:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \chi h_x + i\chi_a h_y, \\ m_y &= -i\chi_a h_x + \chi h_y, \\ m_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9,16}$$

где

$$\chi = \frac{\gamma^2 M_{z0}\left(H_0 + \frac{2K}{M_0^2} M_{z0}\right)}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{9,17}$$

$$\chi_a = \frac{\omega\gamma M_{z0}}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{9,18}$$

а

$$\omega_0 = \gamma \left| H_0 + \frac{2KM_{z0}}{M_0^2} \right|. \tag{9,19}$$

В рассматриваемом случае

$$M_{z0} = \pm M_0,$$

где знак плюс относится к доменам, намагниченным по полю, а знак минус — к доменам с противоположной намагниченностью. Таким образом, выражения (9,17) и (9,18) и значения резонансной частоты (9,19) будут различными для двух групп доменов. Различными будут, как следует из (9,17) и (9,18), и направления прецессии намагниченности.

Усредненные значения компонентов тензора восприимчивости запишутся следующим образом:

$$\bar{\chi} = \chi_+ d_+ + \chi_- d_-, \tag{9,20}$$

$$\bar{\chi}_a = \chi_{a+} d_+ + \chi_{a-} d_-, \tag{9,21}$$

где индексы + и — относятся к доменам с намагниченностью, направленной соответственно по полю и против поля; d_+ и d_- — размеры этих доменов (рис. 29).

Если внешнее постоянное поле отсутствует, то

$$d_+ = d_- \quad \text{и} \quad \omega_{0+} = \omega_{0-} = \gamma \frac{2K}{M_0}.$$

Тогда, как легко видеть, $\bar{\chi}_a = 0$, а

$$\bar{\chi} = \frac{2\gamma^2 K}{\left(\frac{2\gamma K}{M_0}\right)^2 - \omega^2}, \tag{9,22}$$

что совпадает с результатами, полученными Л. Д. Ландау

и Е. М. Лифшицем [66]. Таким образом, при отсутствии внешнего поля антисимметричные компоненты в результате усреднения выпадают и тензор $\bar{\bar{\chi}}$ становится диагональным. Следует заметить, что этот тензор не обращается в скаляр, так как $\chi_\parallel = 0$. Как видно из (9,22), в случае отсутствия внешнего поля имеет место резонансное изменение $\bar{\chi}$, обусловленное кристаллографической анизотропией. Такой резонанс называют обычно «естественным» ферромагнитным резонансом в отличие от резонанса во внешнем постоянном поле.

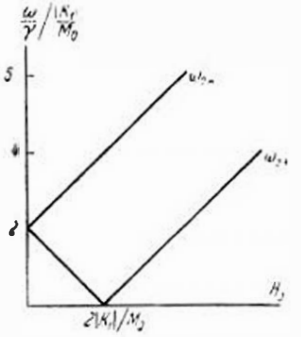


Рис. 30. Зависимость резонансных частот двух групп доменов от постоянного магнитного поля (при $K_1 < 0$).

При наличии внешнего постоянного поля выражения (9,20) и (9,21) запишутся следующим образом:

$$\bar{\chi} = \gamma^2 M_0 \left(\frac{1+p}{2} \frac{H_0 + \frac{2K}{M_0}}{\omega_{0+}^2 - \omega^2} + \frac{1-p}{2} \frac{H_0 - \frac{2K}{M_0}}{\omega_{0-}^2 - \omega^2} \right), \tag{9,23}$$

$$\bar{\chi}_a = \omega\gamma M_0 \left(\frac{1+p}{2} \frac{1}{\omega_{0+}^2 - \omega^2} - \frac{1-p}{2} \frac{1}{\omega_{0-}^2 - \omega^2} \right), \tag{9,24}$$

где

$$\omega_{0\pm} = \gamma \left| H_0 \pm \frac{2K}{M_0} \right|, \tag{9,25}$$

$$p = \frac{d_+ - d_-}{d_+ + d_-} = \frac{\bar{M}_{z0}}{M_0},$$

а $\bar{M}_{z0}$ — средняя (техническая) намагниченность. В этом случае $\omega_{0+} \neq \omega_{0-}$ и величины $\bar{\chi}$ и $\bar{\chi}_a$ являются суммами двух членов, изменяющихся по резонансному закону с разными резонансными частотами. Зависимость этих частот от H_0 показана на рис. 30.

Основными результатами проведенного выше простого расчета являются: наличие «естественного» резонанса $\bar{\chi}$ и равенство нулю $\bar{\chi}_a$ при $H_0 = 0$; наличие нескольких

резонансов $\bar{\chi}$ и $\bar{\chi}_{ан}$, соответствующих различным группам доменов, при $H_0 > 0$. Эти результаты останутся в силе и в более сложных случаях — при намагничивании одноосного монокристалла под углом к оси и для кристаллов с несколькими осями легкого намагничивания.

В поликристаллах в приближении «независимых зерен» (§ 8) компоненты тензора $\bar{\bar{\chi}}$ получатся в результате двойного усреднения: по доменам в каждом кристаллике и по кристалликам с различной ориентацией кристаллографических осей. При отсутствии внешнего постоянного поля это двойное усреднение приведет к появлению широкой полосы частот «естественного» ферромагнитного резонанса в эффективных полях кристаллографической анизотропии.

Очевидно, что максимум $\bar{\chi}''$ в случае $H_0 = 0$ будет лежать при

$$\frac{\omega}{\gamma} = rH_{ан.макс}, \qquad (9,26)$$

где $H_{ан.макс}$ — максимальная величина эффективного поля анизотропии, а r — коэффициент, несколько меньший единицы. Как показал нестрого Сноек [18], коэффициент r для кубического кристалла может быть принят равным $^2/_3$. Значение же $H_{ан.макс}$ для этого кристалла (§ 7) составляет $\frac{2|K_1|}{M_0}$, где K_1 — первая константа анизотропии. Тогда выражение (9,26) запишется:

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{4}{3}\frac{|K_1|}{M_0}. \qquad (9,27)$$

Зависимости вещественных и мнимых частей магнитной проницаемости от частоты в отсутствие постоянного магнитного поля носят название магнитных спектров. Один из таких спектров представлен в качестве примера на рис. 31. К объяснению характера магнитных спектров ферритов мы еще вернемся в § 11. Здесь отметим лишь, что во всех этих спектрах имеется резонанс (область дисперсии $\bar{\chi}'$ и максимум $\bar{\chi}''$), лежащий для ферритов с небольшой анизотропией при частотах порядка 500—2000 *Мгц*. На рис. 31 этот резонанс обозначен цифрой *II*. Он представляет собой рассмотренный выше «естественный» резонанс в эффективных полях кристаллографической анизотропии. Это подтверждается, в частности, оценкой по формуле (9,27). При $M_0 = 160$ *гс* и $|K_1| = 4 \cdot 10^4$ *эрг/см*^{3} (что типично для ферритов, применяемых в диапазоне с. в. ч.) частота «естественного» резонанса $\frac{\omega}{2\pi} = 1000$ *Мгц*. Как будет показано в следующем разделе, магнитное взаимодействие между доменами, обусловленное внутренними размагничивающими полями, приведет к расширению полосы этого резонанса и смещению ее границы в сторону более высоких частот.

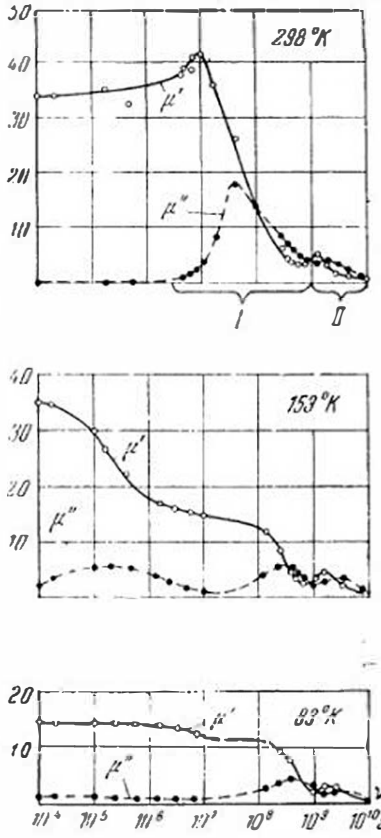


Рис. 31. Магнитные спектры никелевого феррита при различных температурах [195].

I — область дисперсии, обусловленная смещением границ доменов, *II* — область дисперсии, обусловленная «естественным» ферромагнитным резонансом.

§ 10. Магнитное взаимодействие доменов

Непостоянство намагниченности на границах доменов приводит к появлению размагничивающих полей, которые влияют на прецессию намагниченности внутри каждого домена и, следовательно, на усредненный тензор магнитной восприимчивости $\bar{\bar{\chi}}$.

Границы доменов, как и в предыдущем разделе, будем предполагать бесконечно тонкими. Тогда различие нормальных составляющих M_{1n} и M_{2n} намагниченностей соседних доменов приведет к появлению на границе поверхностной плотности

фиктивных магнитных зарядов

$$\sigma = M_{2n} - M_{1n}. \qquad (10,1)$$

Эту плотность можно считать источником внутренних размагничивающих полей.

Как указывалось в предыдущем параграфе, статическая доменная структура обычно такова, что нормальные составляющие постоянной намагниченности непрерывны на границах доменов. Следовательно, постоянные поверхностные магнитные заряды и связанные с ними постоянные размагничивающие поля возникать не будут. Однако при достаточно высокой частоте переменного магнитного поля, когда процессы уже не происходит квазистатически, нормальные составляющие переменной намагниченности не являются непрерывными и на границах доменов возникают переменные магнитные заряды.

Определим эти заряды в случае магнитно-одноосного кристалла. Предположим, что постоянное магнитное поле отсутствует, а переменное магнитное поле лежит в плоскости xy, перпендикулярной оси кристалла (рис. 27). Составляющие переменной намагниченности запишутся согласно (9,16), а выражения для χ и χ_a получатся из (9,17) и (9,18), если положить в них $H_0 = 0$. Так как границы доменов перпендикулярны оси y, то переменная плотность магнитных зарядов

$$\sigma = m_{y-} - m_{y+}, \qquad (10,2)$$

где индексы $+$ и $-$ соответствуют доменам с различным направлением намагниченности. Как следует из выражений (9,17) и (9,18), при $H_0 = 0$ для этих доменов величины χ равны по абсолютной величине и по знаку. Величины же χ_a равны по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. С учетом этого выражение для σ оказывается следующим:

$$\sigma = \frac{2\omega\gamma M_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x. \qquad (10,3)$$

Таким образом, переменная плотность магнитных зарядов на границе доменов вызывается составляющей переменного поля, параллельной этой границе. Полученный результат иллюстрируется рис. 32, *а*, на котором показана

прецессия намагниченности в соседних доменах под воздействием переменных магнитных полей: параллельного и перпендикулярного границе.

Простейший метод приближенного учета влияния внутренних размагничивающих полей на прецессию

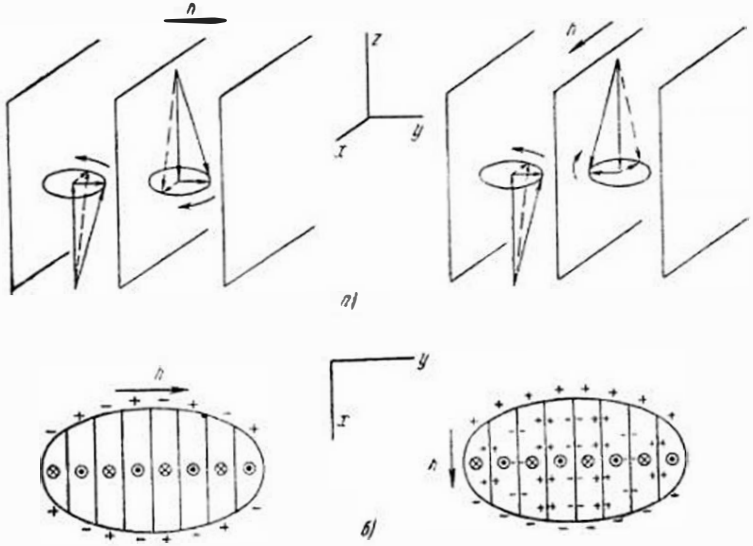


Рис. 32. Образование переменных магнитных зарядов на границах доменов.

а—прецессия намагниченности в соседних доменах; векторы намагниченности в некоторый момент времени показаны сплошной линией, а через 1/4 периода прецессии—пунктиром; *б*—мгновенное распределение переменных фиктивных магнитных зарядов на границах доменов и поверхности эллипсоида.

намагниченности заключается в введении эффективного размагничивающего фактора доменов N_θ в направлении, перпендикулярном их границам. В нашем случае это направление совпадает с осью y (рис. 32, *а*). Тогда для неограниченного одноосного монокристалла, в соответствии с формулой (7,16), резонансная частота запишется следующим образом:

$$\omega = \gamma \left[(H_0 + H_{an} + N_\theta M_0)(H_0 + H_{an}) \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (10,4)$$

где $H_{эк} = \frac{2K}{M_0}$ — эффективное поле кристаллографической анизотропии.

Если переменное магнитное поле параллельно границе доменов и последние представляют собой достаточно тонкие слои, то можно считать, что $N_\theta = 4\pi$. Тогда при $H_0 = 0$ резонансная частота будет равна

$$\omega = \gamma \left[\frac{2K}{M_0} \left(\frac{2K}{M_0} + 4\pi M_0 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (10.5)$$

Наличие доменной структуры приводит, таким образом, к увеличению частоты «естественного» ферромагнитного резонанса.

Рассмотренный метод учета внутренних размагничивающих полей в кристалле с доменной структурой является, конечно, очень грубым. В действительности эти поля, зависящие от намагниченностей обоих соседних доменов, приводят к тому, что прецессии этих намагниченностей оказываются связанными. Эта связь аналогична связи прецессий намагниченностей соседних кристалликов в поликристалле (§ 8). В обоих случаях связь осуществляется посредством размагничивающих полей, и в отличие от подрешеток (§ 2) связанные системы занимают отдельные области макроскопических размеров, граничащие друг с другом.

К ферриту с сохранившейся доменной структурой может быть, вообще говоря, применено представление о спиновых волнах, возбуждаемых на неоднородностях, которое было использовано в § 8 для случая поликристалла с однодоменными зернами. Однако метод расчета [160], основанный на этом представлении, который был упомянут в § 8, является методом возмущений: в качестве основного состояния принимается однородная среда. Такой метод применим лишь в случае малых вариаций возмущающего эффективного поля, т. е. в данном случае — малых вариаций намагниченности. Намагниченности же соседних доменов, как правило, очень сильно отличаются по направлению друг от друга.

Строгую теорию ферромагнитного резонанса в монокристалле с доменной структурой удалось развить для магнитно-одноосного (Смит и Бельзер [78]) и кубического

(Артман [81]) кристаллов для случая, когда постоянное магнитное поле H_0 приложено перпендикулярно доменам—слоям. При этом статическое намагничивание осуществляется в результате процессов вращения[1]) и доменная структура сохраняется вплоть до сравнительно больших значений магнитного поля. Это делает ее учет особенно важным, так как ферромагнитный резонанс может наблюдаться при сохранившейся доменной структуре и области сравнительно высоких частот.

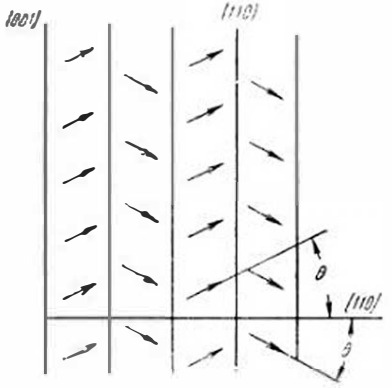


Рис. 33. Доменная структура при намагничивании в направлении [110] (сечение плоскостью (110)).

Для кубического кристалла с отрицательной анизотропией указанная доменная структура (домены—слои, перпендикулярные H_0) возникает [81] при наложении постоянного поля H_0 в направлении [110]. Намагниченности доменов в этом случае (рис. 33) лежат в плоскости (110) и составляют с направлением [110] углы $\pm\theta$. Угол $\theta = 35°16'$ при $H_0 = 0$ и уменьшается с ростом H_0, пока при

$$H_0 = \frac{4\pi}{3} M_0 + \frac{|K_1|}{M_0}$$

он не сделается равным нулю; при этом доменная структура исчезает.

Задача о малой прецессии намагниченностей этих групп доменов была решена Артманом [81] с учетом кристаллографической анизотропии и размагничивающих полей, вызванных скачками нормальной составляющей переменной намагниченности на границах доменов. Эти поля вызывают связь между прецессиями намагниченностей

[1]) В предыдущем параграфе при усреднении параметров монокристалла мы предполагали, наоборот, что постоянное поле приложено параллельно слоям, а статическое намагничивание происходит только в результате смещения границ.

двух групп доменов и приводят к появлению двух резонансных частот (частот связи): $\omega_\perp$ и $\omega_\parallel$. Эти частоты зависят от H_0 и M_0. Графики их зависимости от H_0 при некотором фиксированном значении M_0 приведены на рис. 34. На этом рисунке показана для сравнения зависимость резонансной частоты от H_0, рассчитанная для того же случая без учета доменной структуры.

Как показывает анализ задачи о вынужденных колебаниях [81], прецессия с резонансной частотой $\omega_\perp$ возбуждается переменным полем, перпендикулярным H_0, а прецессия с резонансной частотой $\omega_\parallel$ — полем, параллельным H_0. Поэтому компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ монокристалла

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{vmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_\parallel \end{vmatrix}$$

имеют в рассматриваемом случае следующий вид (без учета потерь):

$$\left.\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{F_1(\theta)}{\omega_\perp^2 - \omega^2}, \quad \chi_{22} = \frac{F_2(\theta)}{\omega_\perp^2 - \omega^2}, \\ \chi_{12} &= \frac{\omega\gamma M_0 \cos^2\theta}{\omega_\perp^2 - \omega^2}, \quad \chi_\parallel = \frac{F_3(\theta)}{\omega_\parallel^2 - \omega^2}, \end{aligned}\right| \qquad (10{,}6)$$

где $F_{1,2,3}(\theta)$ — некоторые функции угла θ, т. е., в конечном счете, функции H_0 и M_0.

Без учета доменной структуры резонансная частота $\omega_\parallel$ не имеет места и (при отсутствии потерь) $\chi_\parallel = 0$. Существенной особенностью резонанса при наличии доменной структуры является также то, что частота $\omega_\perp$ (рис. 34) не спадает до нуля, а минимум ее зависимости от H_0 смещается в сторону больших полей.

Характер зависимости $\omega_\perp$ от H_0, показанный на рис. 34, в основном подтверждается экспериментально [185]. Аналогичные расчеты для магнитно-одноосного кристалла, проведенные Смитом и Белъерсом [78], дали качественно такие же результаты. Экспериментальное исследование на гексагональных бариевых ферритах [78] дало хорошее подтверждение этих результатов. В частности, для этих ферритов был обнаружен экспериментально и резонанс с частотой $\omega_\parallel$.

Построение строгой теории ферромагнитного резонанса в поликристаллах с доменной структурой потребовало бы решения задач, аналогичных рассмотренной выше задаче, но для различных ориентаций постоянного магнитного поля относительно осей кристалликов с последующим усреднением по этим ориентациям. Осуществление этой программы встретило бы, конечно, очень большие трудности. Поэтому мы, следуя Полдеру и Смиту [182], учтем влияние внутренних размагничивающих полей в поликристалле с доменной структурой, исходя из уже использованного выше приближенного представления об эффективных размагничивающих факторах доменов.

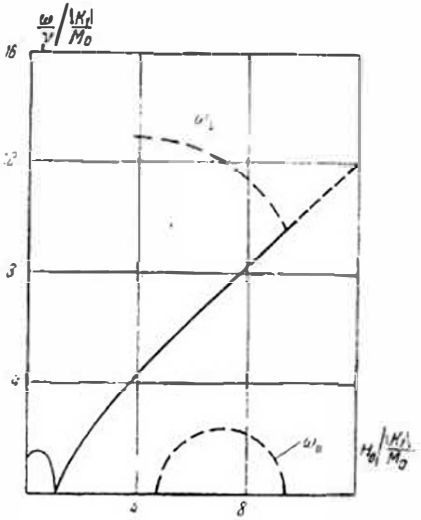


Рис. 34. Зависимость резонансных частот от постоянного магнитного поля при намагничивании в направлении [110] (при $K_1 < 0$) [81].
Пунктир — с учетом доменной структуры, сплошные линии — без ее учета.

Предположим, что кристаллики представляют собой эллипсоиды различной формы и ориентации, разделенные (рис. 32, *б*) на домены — слои. Будем рассматривать каждый эллипсоид изолированно от остальных, как если бы он находился в немагнитной среде. Ограничимся случаем, когда внешнее постоянное магнитное поле отсутствует.

Рассмотрим эллипсоид, для которого кристаллографическая ось и перпендикуляр к границам доменов совпадают с главными осями. Распределение переменных магнитных зарядов на поверхности такого эллипсоида показано на рис. 32, *б*. Если переменное магнитное поле h перпендикулярно границам доменов, то переменные магнитные заряды на поверхности будут иметь различные

знаки в соседних доменах. В этом нетрудно убедиться, рассматривая скачки намагниченности на поверхности таким же образом, как мы рассматривали выше скачки намагниченности на границах доменов. Размагничивающее поле будет при этом быстро убывать по мере удаления от поверхности и эффективный размагничивающий фактор в направлении оси x будет равен нулю. Как мы убедились выше, переменных магнитных зарядов на границах доменов в этом случае также не будет возникать. Проекции переменной намагниченности на ось y будут одинаковыми во всех доменах—такими же, как при отсутствии доменной структуры. Следовательно, размагничивающий фактор по оси y в этом случае будет равен размагничивающему фактору однородно намагниченного эллипсоида.

В другом крайнем случае, когда переменное магнитное поле параллельно границам доменов, переменные магнитные заряды на поверхности, связанные со скачком m_x, будут иметь во всех доменах одинаковый знак. Эффективный размагничивающий фактор по оси x будет в этом случае таким же, как размагничивающий фактор N_x однородно намагниченного эллипсоида. В этом случае, как мы убедились выше, будут возникать переменные магнитные заряды на границах доменов; эффективный размагничивающий фактор в направлении оси y будет определяться формой доменов и будет равен N_0. Постоянное размагничивающее поле в направлении оси z в обоих рассмотренных случаях (h перпендикулярно границам и h параллельно границам доменов) будет быстро убывать по мере удаления от поверхности эллипсоида, так как постоянные магнитные заряды на поверхности, связанные со скачками M_z, будут иметь различный знак в различных доменах. Таким образом, эффективный размагничивающий фактор в направлении оси z в обоих случаях можно принять равным нулю.

Итак, резонансная частота в первом случае (h перпендикулярно границам) согласно (10,4) запишется:

$$\omega = \gamma [H_{ан} (H_{ан} + N_y M_0)]^{1/2}. \qquad (10,7)$$

Во втором случае (h параллельно границам) резонансная

частота будет равна

$$\omega = \gamma [(H_{ан} + N_x M_0) (H_{ан} + N_0 M_0)]^{1/2}. \qquad (10,8)$$

Здесь $H_{ан} = \frac{2|K|}{M_0}$ — эффективное поле анизотропии.

Проведя усреднение по кристалликам с различной формой, различной ориентацией главных осей эллипсоида и кристаллографических осей и различными углами между переменным полем h и границами доменов, мы получим широкую полосу резонансных частот от

$$\omega_{мин} = \gamma H_{ан} \qquad (10,9)$$

до

$$\omega_{макс} = \gamma (H_{ан} + N_0 M_0). \qquad (10,10)$$

Обычно можно считать $N_0 = 4\pi$ и

$$\omega_{макс} = \gamma (H_{ан} + 4\pi M_0). \qquad (10,11)$$

Полученный результат качественно справедлив и для кубических кристаллов. $H_{ан}$ в этом случае имеет порядок $\frac{2|K_1|}{M_0}$, где K_1 — первая константа анизотропии.

Для большинства ферритов, применяемых в диапазоне с. в. ч., $\frac{2|K_1|}{M_0} \ll 4\pi M_0$ и выражение (10,11) может быть приближенно записано:

$$\omega_{макс} \cong \gamma 4\pi M_0. \qquad (10,12)$$

Если принять $M_0 = 160$ *гс* и $|K_1| = 10^4$ *эрг/см*^{3} (что типично для ферритов, применяемых в трехсантиметровом диапазоне, например магний-марганцевых), то $\omega_{макс}$ соответствует длине волны $\lambda_{мин} = 5$ *см*. Эта оценка хорошо подтверждается экспериментально: длинноволновая граница применимости таких ферритов в слабых постоянных полях действительно лежит в районе 5 *см*. При более длинных волнах потери при $H_0 = 0$ быстро растут.

Наложение постоянного магнитного поля H_0 ликвидирует доменную структуру, а также уменьшает размагничивающие поля, связанные со скачками намагниченности на границах кристалликов. Поэтому, несмотря на наличие небольшого внешнего поля, область резонанса сдвигается, по сравнению с «естественным» резонансом, в

сторону низких частот и потери резко уменьшаются (рис. 35). При дальнейшем увеличении H_0 начинается область ферромагнитного резонанса при отсутствии доменной структуры; в поликристаллах эта область может быть очень широкой вследствие влияния эффективных полей анизотропии и размагничивающих полей пор (§ 8).

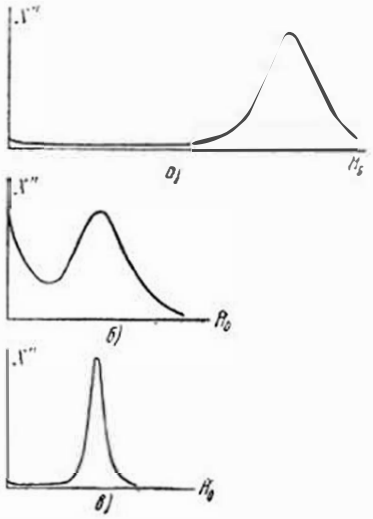


Рис. 35. Зависимость потерь χ'' от постоянного магнитного поля H_0.
а—в коротковолновой части диапазона с. в. ч.; б—в длинноволновой части диапазона с. в. ч. (тот же феррит); в—в длинноволновой части диапазона с. в. ч. (феррит с низкой намагниченностью и малой анизотропией).

Как видно из рис. 35, при достаточно низких частотах (практически это имеет место в дециметровом диапазоне) происходит перекрытие области «естественного» резонанса (точнее, резонанса в малых внешних полях при сохранившейся доменной структуре) и области резонанса в больших внешних полях при отсутствии доменов. При этом может отсутствовать интервал полей, в котором потери были бы малы. Отсюда следует, что ферромагнитные полупроводники для длинноволновой части диапазона с. в. ч. (дециметровых волн) должны обладать малой кристаллографической анизотропией и малой намагниченностью насыщения. Уменьшение анизотропии приводит к сужению области резонанса в больших полях, а уменьшение намагниченности насыщения сдвигает в сторону более низких частот границу «естественного» резонанса.

Необходимость сочетания малой кристаллографической анизотропии и низкой намагниченности с малыми магнитными и электрическими потерями и достаточно высокой точкой Кюри приводит к большим трудностям при разработке ферромагнитных полупроводников для

длинноволновой части диапазона с. в. ч. Эти трудности удалось в некоторой степени преодолеть при создании феррит-алюминатов [201, 202] и феррит-хромитов магния с добавками марганца и других элементов. Например, феррит-хромит магния состава $MgO(Fe_2O_3)_{2/3}(Cr_2O_3)_{1/3}$ с очень низкой намагниченностью насыщения (около 50 гс) [205, 206] успешно применяется в дециметровом диапазоне [1]).

Вследствие конечных размеров доменов размагничивающий фактор N_∂ в направлении, перпендикулярном их границам, будет несколько меньше 4 π. Это небольшое отличие, как отметили Ле Кроу и Спенсер [187], приводит к «аномальному» поглощению энергии поля с круговой поляризацией в области малых постоянных полей при частотах, несколько бо́льших граничной частоты $\omega_{макс}$. «Аномалия» заключается в том, что более сильное поглощение имеет место для переменного поля с левым направлением вращения относительно постоянного поля. Рассмотрим качественное объяснение этого эффекта [187].

При наложении небольшого постоянного поля, параллельного границе доменов (рис. 29), увеличится толщина доменов, намагниченных по полю. Их размагничивающий фактор N_{∂_+} вследствие этого уменьшится. Уменьшится согласно (10,8) и резонансная частота ω_+ этих доменов. Размагничивающий фактор доменов, намагниченных против поля N_{∂_-}, увеличится из-за уменьшения их толщины. Их резонансная частота ω_- увеличится и приблизится к частоте переменного поля ω.

Как было показано в § 4, для переменного поля с круговой поляризацией и правым вращением минимая часть

[1]) Заметим, что и ферриты с большой намагниченностью могут быть применены в дециметровом диапазоне. При этом постоянное поле должно быть равно резонансному или превышать его [289, 290]. Для того чтобы при таком поле (величина которого в дециметровом диапазоне будет невелика) исчезла доменная структура и, таким образом, отсутствовали связанные с ней потери, материал должен обладать малой анизотропией. Для уменьшения же потерь, обусловленных резонансом во внешнем поле, материал должен иметь узкую резонансную кривую. Этим требованиям хорошо удовлетворяет поликристаллический иттриевый феррит со структурой типа граната (§ 8), который начинает применяться и в длинноволновой части диапазона с. в. ч. [371, 375].

проницаемости $\mu_{\text{л}}'' = \mu'' + \mu_a''$ и, следовательно, потери имеют вблизи резонанса большую величину. Для поля с левым вращением мнимая часть проницаемости $\mu_{\text{л}}'' = \mu'' - \mu_a''$ везде, включая и резонансную область, мала. При этом определяющим является направление вращения относительно постоянной намагниченности $\boldsymbol{M}_0$.

Поле с левым вращением относительно $\boldsymbol{H}_0$ будет для доменов, намагниченных против поля, иметь правое вращение относительно $\boldsymbol{M}_0$. И по мере приближения резонансной частоты этих доменов ω_- к ω поглощение в них будет резко возрастать. Будут увеличиваться и общие потери в ферромагнетике, несмотря на уменьшение объема этих доменов. Для поля с противоположным направлением вращения (правым относительно $\boldsymbol{H}_0$) потери будут меньше, так как резонансная частота ω_+ доменов, намагниченных по полю, для которых мог бы иметь место ферромагнитный резонанс, будет значительно отличаться от ω. Таким образом, для малых H_0 поглощение энергии переменного поля с круговой поляризацией и левым относительно $\boldsymbol{H}_0$ вращением действительно оказывается бо́льшим, чем для поля с противоположным вращением.

Это означает, что для усредненных по доменам параметров материала будет справедливо неравенство

$$\bar{\mu}'' + \bar{\mu}_a'' < \bar{\mu}'' - \bar{\mu}_a''. \qquad (10{,}13)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемой области постоянных полей $\bar{\mu}_a'' < 0$ (см., например, рис. 28).

«Аномалия» прекратится, т. е. $\bar{\mu}_a''$ станет положительной при величине H_0 несколько меньшей, чем та, которая необходима для полной ликвидации доменной структуры. Это произойдет, когда толщина d_- доменов, намагниченных против поля, станет настолько малой, что рост потерь в них не сможет уже скомпенсировать уменьшения их объема.

§ 11. Колебания границ доменов

До сих пор мы интересовались только процессами вращения, происходящими под действием переменных магнитных полей с. в. ч. диапазона. В этом разделе будут рассмотрены колебания границ доменов, т. е. высокочастотные процессы смещения, которые могут быть вызваны этими полями.

Смещение границы между доменами происходит в результате поворотов векторов намагниченности в граничной области. Поэтому изучение высокочастотных процессов смещения должно быть основано на применении к граничной области уравнения Ландау—Лифшица. При этом так же, как и при рассмотрении спиновых волн (§ 3), необходимо учитывать эффективное поле обменного взаимодействия и размагничивающее поле, связанное с быстрым изменением намагниченности на границе доменов.

Высокочастотные колебания границ доменов были исследованы Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [66] для случая магнитно-одноосного кристалла. При этом предполагалось, что постоянное магнитное поле отсутствует, а переменное поле $\boldsymbol{h}$ параллельно оси кристалла—оси z на рис. 27. Остановимся кратко на основных этапах этого расчета.

В исходном уравнении (4,2) под $\boldsymbol{H}$ следует в данном случае понимать сумму переменного поля $\boldsymbol{h}$, эффективного поля обменного взаимодействия (1,15), эффективного поля кристаллографической анизотропии (7,9) и размагничивающего поля. Размагничивающее поле может быть получено из тех же соображений, что и в § 3. В данном случае, когда намагниченность зависит только от координаты x, это поле запишется следующим образом:

$$H_M = -4\pi m_x x_0. \qquad (11{,}1)$$

Предположим, что в результате поворотов векторов намагниченности в граничной области граница смещается, как одно целое, с некоторой скоростью v. Проекции уравнения (4,2), включающего все перечисленные выше члены эффективного поля, оказываются совместными при определенном значении v. Это значение и представляет собой действительную скорость смещения границы. Она оказывается пропорциональной магнитному полю h и может быть записана в виде

$$v = \frac{M_0}{\beta} h, \qquad (11{,}2)$$

где β—коэффициент, характеризующий «трение» при перемещении границы, а M_0—намагниченность насыщения.

Для коэффициента β получается следующее выражение:

$$\beta = \frac{\eta}{\gamma M_0}\sqrt{\frac{K}{q}}, \qquad (11,3)$$

где K — константа анизотропии, а q — коэффициент в (1,15), определяемый выражением (1,16). Таким образом, «коэффициент трения» β пропорционален параметру потерь η в уравнении Ландау—Лифшица.

Заметим, что выражение (11,2) может быть переписано следующим образом:

$$\beta v = M_0 h. \qquad (11,2а)$$

Левую часть этого равенства можно рассматривать как пропорциональную скорости силу «трения», а правую — как силу «давления», которая вызывает смещение границы.

Кроме этих сил, на границу доменов, как указал Беккер [190], действует упругая сила

$$f_{\text{упр}} = -\alpha x. \qquad (11,4)$$

Ее возникновение связано с тем, что в реальном кристалле при наличии неоднородностей и внутренних механических напряжений граница занимает некоторое равновесное положение, которое зависит от этих неоднородностей и напряжений. Ему соответствует минимум энергии, и при отклонении границы от этого положения на нее начинает действовать сила $f_{\text{упр}}$, стремящаяся вернуть ее в положение равновесия. Проведенный Дерингом [191] анализ задачи о движении границы доменов показал, что в энергии границы имеется дополнительный член, пропорциональный квадрату скорости движения. Он может быть записан следующим образом:

$$\Delta W_{\text{гр}} = \frac{m_{\text{гр}}}{2} v^2. \qquad (11,5)$$

Множитель $m_{\text{гр}}$ является эффективной массой движущейся границы, отнесенной, как и $\Delta W_{\text{гр}}$, к единице ее поверхности. Дополнительную энергию $\Delta W_{\text{гр}}$ можно трактовать как энергию магнитного поля, перпендикулярного поверхности границы. В этом поле и происходит прецессия намагниченности, в результате которой смещается граница.

Для эффективной массы границы Деринг [191] дает следующее выражение:

$$m_{\text{гр}} = \frac{1}{2\pi\gamma^2}\frac{W_{\text{гр}_0}}{Aa^2N\sin^2\theta}, \qquad (11,6)$$

где $W_{\text{гр}_0}$ — энергия неподвижной границы, θ — угол между намагниченностью и нормалью к границе (для рассматриваемого случая $\theta = 90°$), а остальные обозначения — такие же, как в (1,13) и (1,16).

В частном случае 90°-границы (когда намагниченности соседних доменов перпендикулярны) и при $\theta = 90°$ для $W_{\text{гр}_0}$ получается очень простое выражение [190]:

$$W_{\text{гр}_0} = K\delta, \qquad (11,7)$$

где δ — толщина границы, которая определяется формулой (9,1). Тогда из (11,6) следует:

$$m_{\text{гр}} = \frac{1}{2\pi\gamma^2\delta}. \qquad (11,8)$$

Учитывая, что $\delta \cong 10^{-6}$ *см*, находим $m_{\text{гр}} \cong 10^{-9}$ *г*. Эта оценка остается в силе и в тех случаях, когда (11,7) не соблюдается точно, например для 180°-границы.

Итак, уравнение движения границы доменов запишется:

$$m_{\text{гр}}\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \alpha x = M_0 h. \qquad (11,9)$$

Найдем теперь связь между смещением границы x и восприимчивостью $\chi_\parallel$, которая им вызвана. Соседние границы смещаются в противоположные стороны (рис. 29), и намагниченность

$$m = \frac{2xM_0}{d}, \qquad (11,10)$$

где d — средний размер доменов. Восприимчивость $\chi_\parallel$ определяется выражением

$$m = \chi_\parallel h$$

и будет, таким образом, равна

$$\chi_\parallel = \frac{2xM_0}{hd}. \qquad (11,11)$$

В статическом случае ($h = H_0$) из (11,9) следует:

$$x_0 = \frac{M_0 H_0}{a}. \qquad (11,12)$$

Отсюда, принимая во внимание (11,11), получим, что упругий коэффициент a связан со статической восприимчивостью

$$\chi_{\parallel 0} = \frac{M}{H_0},$$

соотношением

$$a = \frac{2M_0^2}{\chi_{\parallel 0} d}. \qquad (11,13)$$

Решая уравнение (11,9) при гармонической зависимости h от времени, переходя согласно (11,11) от смещения x к восприимчивости $\chi_\parallel$ и принимая во внимание (11,13), получим:

$$\chi_\parallel = \chi_{\parallel 0} \frac{\omega_{0гр}^2}{\omega_{0гр}^2 - \omega^2 + i\omega\omega_{rгр}}. \qquad (11,14)$$

Здесь

$$\omega_{0гр} = \sqrt{\frac{a}{m_{гр}}} \qquad (11,15)$$

—резонансная частота, а

$$\omega_{rгр} = \frac{\beta}{m_{гр}} \qquad (11,16)$$

—частота релаксации при смещении границ. Оценка $\omega_{0гр}$ дает для обычных ферритов величину порядка 100—1000 *Мгц*, оценка $\omega_{rгр}$ приводит к несколько меньшим значениям.

Как уже отмечалось, в магнитных спектрах ферритов имеется область дисперсии магнитной проницаемости, лежащая в диапазоне приблизительно 500—3000 *Мгц* и обусловленная «естественным» ферромагнитным резонансом в эффективных полях анизотропии и размагничивающих полях. На рис. 31, где в качестве примера приведен магнитный спектр одного из ферритов, эта область обозначена цифрой *II*. В магнитных спектрах ферритов содержится также более низкочастотная область

дисперсии, лежащая обычно в диапазоне 10—1000 *Мгц*,— область *I* на рис. 31.

Вопрос о том, какими процессами: вращения или смещения границ—определяется низкочастотная область дисперсии, усиленно дискутировался в литературе. В настоящее время можно считать установленным, что она связана с высокочастотными колебаниями границ, которые рассматривались в этом параграфе. Справедливость такой точки зрения подтверждается тем, что положение этой области лучше соответствует величинам $\omega_{0гр}$, чем частотам естественного резонанса процессов вращения. Она подтверждается также опытами Радо и др. [189] по исследованию спектров порошков и опытами Майлса, Вестфаля и Хиппеля [195] при больших амплитудах магнитного поля.

Магнитный спектр порошка с однодоменными частицами (в опытах Радо) не имел области дисперсии *I*, а такой же материал в виде сплошного поликристаллического образца содержал четко выраженные обе области. При этом положение и характер области *II* мало изменялись при переходе от порошка к сплошному образцу.

Увеличение амплитуды магнитного поля (в опытах Майлса, Вестфаля и Хиппеля) мало влияло на область дисперсии *II* и резко деформировало область *I*. Это также подтверждает точку зрения, что область *I* связана с процессами смещения границ, так как эти процессы более чувствительны к увеличению амплитуды поля.

Как следует из выражения (11,14) с учетом оценок величин $\omega_{0гр}$ и $\omega_{rгр}$, изменение μ' и μ'', определяемое процессами смещения границ, должно носить резонансный характер. Для некоторых материалов низкочастотная область дисперсии *I* действительно носит такой характер. Однако для большинства ферритов она представляет собой плавный спад μ' и широкий максимум μ'', как если бы в основе ее лежали не резонансные, а релаксационные процессы. Два обстоятельства влияют на характер этой области спектра.

Первое обстоятельство—это различие резонансных частот для разных границ. Оно приводит к «размазыванию» этой области. «Размазывание» может быть настолько сильным, что резонансный характер данной области спектра делается незаметным.

Второе обстоятельство—это наличие электронных процессов, которые сопутствуют смещению границ доменов. Инерционность этих процессов существенно влияет на область дисперсии I. Если эта инерционность мала, т. е. время релаксации таких процессов $\tau_э$ значительно меньше, чем период переменного поля τ_0, то перестройка электронной структуры следует без запаздывания за смещением границ доменов. Электронные процессы не оказывают при этом существенного влияния на характер данного участка магнитного спектра.

Если $\tau_э$ одного порядка с τ_0, то инерционность электронных процессов будет тормозить смещение границ и может придать участку спектра, где выполняется это условие, релаксационный характер.

Если же $\tau_э$ значительно больше, чем τ_0, то электронные процессы не будут «поспевать» за смещением границ. Границы будут колебаться в среде с неперестраивающейся электронной структурой. Участок спектра, где выполняется это условие, будет носить резонансный характер, но значения μ' и μ'' для него будут меньшими вследствие меньших амплитуд колебаний границ доменов.

Электронные процессы, о которых шла речь, представляют собой переходы, вызванные тепловым движением. Их время релаксации зависит от температуры по экспоненциальному закону:

$$\tau_э = \tau_{э\infty} e^{\frac{W_э}{kT}}, \qquad (11,17)$$

где $W_э$—энергия активации. При комнатных температурах $\tau_э$ оказывается порядка 10^{-8}—10^{-9} *сек*, что приблизительно соответствует собственному периоду колебаний границ доменов.

Таким образом, при этих температурах область дисперсии I определяется резонансными процессами колебаний стенок доменов и электронными процессами, тормозящими эти колебания.

При понижении температуры величины $\tau_э$ резко возрастают. Релаксационный участок спектра, где $\tau_э$ имеет одинаковый порядок величины с периодом переменного поля τ_0, смещается в сторону низких частот, «отрываясь» от резонанса, обусловленного собственной частотой

колебаний границ. Это отчетливо видно из экспериментальных кривых [195] (рис. 31).

Для многих ферритов две области дисперсии: обусловленная смещением границ и обусловленная процессами вращения—перекрываются. В магнитных спектрах таких веществ наблюдается одна очень широкая область спада μ' и соответствующий ей широкий максимум μ''.

Мы до сих пор рассматривали высокочастотные колебания границ доменов при отсутствии постоянного магнитного поля H_0. При наличии его границы доменов сместятся в новые равновесные положения. Но, если только поле H_0 не настолько велико, чтобы привести к исчезновению доменной структуры, колебания границ возле новых положений равновесия будут происходить качественно так же, как и при отсутствии H_0.

В поликристаллическом феррите при наличии небольшого постоянного поля высокочастотные колебания границ доменов повлияют приблизительно в одинаковой степени на все диагональные компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi}$ и не окажут влияния на антисимметричные компоненты. Тензор восприимчивости запишется при этом следующим образом:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \overleftrightarrow{\chi}_{вр} + \chi_{см}\overrightarrow{I}, \qquad (11,18)$$

где $\overleftrightarrow{\chi}_{вр}$—тензор, обусловленный процессами вращения намагниченности внутри доменов (этот тензор рассматривался во всех предыдущих параграфах), $\overrightarrow{I}$—единичный тензор, $\chi_{см}$—восприимчивость, обусловленная колебаниями границ доменов, для которой качественно справедлива формула (11,14) (эта восприимчивость исчезает с исчезновением доменной структуры).

К тензорам, входящим в (11,18), следует, вообще говоря, добавить некоторый тензор $\overleftrightarrow{\chi}_{гр}$, обусловленный вкладом самих граничных областей в переменную намагниченность. Вопрос этот не исследован, однако можно полагать, что компоненты $\overleftrightarrow{\chi}_{гр}$ весьма малы хотя бы уже потому, что толщина границ значительно меньше размеров доменов.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ФЕРРИТЫ

ГЛАВА 5

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ СРЕД С ТЕНЗОРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 12. Уравнения Максвелла и граничные условия

Макроскопическая электродинамика неподвижных сред основывается на уравнениях Максвелла [11, 12]:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\varrho, \end{aligned}\right\} \qquad (12,1)$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля [1]), $\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля, $\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция, $\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция, $\boldsymbol{j}$ — плотность свободного тока, ϱ — плотность свободного заряда.

Входящие в уравнения (12,1) величины являются макроскопическими — усредненными в пространстве и во времени значениями следующих микроскопических величин: вектор $\boldsymbol{E}$ — электрического поля $\boldsymbol{E}_м$, вектор $\boldsymbol{D}$ — величины $\boldsymbol{E}_м + 4\pi\boldsymbol{P}_м$ (где $\boldsymbol{P}_м$ — электрическая поляризация), вектор $\boldsymbol{B}$ — магнитного поля $\boldsymbol{H}_м$, а вектор $\boldsymbol{H}$ — величины $\boldsymbol{H}_м - 4\pi\boldsymbol{M}_м$ (где $\boldsymbol{M}_м$ — намагниченность).

[1]) В дальнейшем, так же как и в первой части, мы будем векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ называть просто электрическим и магнитным полями.

Вопрос о справедливости уравнений Максвелла (12,1) может быть либо сведен к вопросу о справедливости уравнений Максвелла—Лоренца для микроскопических полей $\boldsymbol{E}_м$ и $\boldsymbol{H}_м$ [10], либо решен путем сравнения с опытом следствий из уравнений (12,1). В первом случае справедливость уравнений Максвелла—Лоренца также доказывается сравнением их следствий с опытом. Оба пути не оставляют сомнения в справедливости уравнений (12,1) для любых сред.

Граничные условия, т. е. соотношения, которым удовлетворяют векторы $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ на границе раздела двух сред с различными свойствами, являются непосредственным следствием уравнений Максвелла. Если обозначить индексом 1 величины в одной из сред, а индексом 2 — в другой и ввести единичный вектор нормали к граничной поверхности $\boldsymbol{n}_0$ (направленный из первой среды во вторую), то эти условия запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{n}_0 &= 0, \\ \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{D}_2\boldsymbol{n}_0 &= 4\pi\eta, \\ \boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{n}_0 &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \\ \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{n}_0 - \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{n}_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (12,2)$$

где η и $\boldsymbol{i}$ — поверхностные плотности свободных заряда и тока. Они равны нулю для реальных сред, но часто вводятся при приближенном рассмотрении границы раздела диэлектрика с хорошо проводящим металлом. В этом идеализированном случае (если металлом является, например, вторая среда) из (12,2) следует:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n}_0 &= 0, \\ \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{n}_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12,3)$$

Заметим, что из последнего выражения в общем случае не следует, что $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{n}_0 = 0$, т. е. силовые линии магнитной индукции, но не магнитного поля, параллельны поверхности металла.

Уравнения Максвелла должны быть дополнены соотношениями, дающими связь ρ, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ с векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Так как ρ и $\boldsymbol{j}$ связаны между собой уравнением сохранения заряда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{12,4}$$

то достаточно рассмотреть соотношения, связывающие $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ с $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Эти соотношения являются результатом микроскопической теории (или эксперимента) и в макроскопической электродинамике должны рассматриваться как заданные.

Заметим, что разделение микроскопической задачи о нахождении указанной связи $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ с $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и макроскопической задачи об интегрировании уравнений Максвелла в некоторых случаях невозможно, и задачи эти должны решаться совместно. Такое положение имеет место, например, в случае ферромагнитных металлов при достаточно высоких частотах, когда глубина проникновения поля в металл становится сравнимой или меньшей, чем размеры доменов. В ферромагнитных полупроводниках, проводимость которых в 10^8-10^{13} раз меньше проводимости металлов, глубина проникновения поля в вещество значительно превышает размеры доменов, и разделение указанных задач обычно возможно.

При достаточно больших, но легко достижимых на практике величинах $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ соотношения, связывающие $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ с $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, становятся, вообще говоря, нелинейными, что приводит к нелинейности всей макроскопической задачи, несмотря на то, что уравнения (12,1) являются линейными. Нас, как это ясно из первой части книги, интересуют процессы, при которых магнитное поле является суммой постоянного (или сравнительно медленно изменяющегося) поля $\boldsymbol{H}_=$ и быстропеременного поля $\boldsymbol{H}_\sim$:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_=+\boldsymbol{H}_\sim. \tag{12,5}$$

Для общности положим, что и электрическое поле

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_=+\boldsymbol{E}_\sim. \tag{12,6}$$

Тогда остальные величины представятся в виде таких же сумм:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{D}_=+\boldsymbol{D}_\sim,\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{B}_=+\boldsymbol{B}_\sim,\\ \boldsymbol{j}&=\boldsymbol{j}_=+\boldsymbol{j}_\sim.\end{aligned}\right\} \tag{12,7}$$

И если переменные поля $\boldsymbol{H}_\sim$ и $\boldsymbol{E}_\sim$ будут достаточно малы, то связь $\boldsymbol{D}_\sim$, $\boldsymbol{B}_\sim$ и $\boldsymbol{j}_\sim$ с этими величинами может быть принята линейной при любых значениях $\boldsymbol{E}_=$ и $\boldsymbol{H}_=$. От $\boldsymbol{E}_=$ и $\boldsymbol{H}_=$ будут зависеть лишь коэффициенты в линейных соотношениях, выражающих указанную зависимость. Эти коэффициенты являются электродинамическими параметрами вещества для переменных полей в присутствии постоянных. Одним из таких параметров является тензор магнитной проницаемости $\overleftrightarrow{\mu}$, исследованный в первой части.

Как будет показано в третьей части книги, линейность задачи даже в таком смысле не всегда имеет место и в случае намагниченных ферритов. Существует целый ряд явлений, при которых нелинейность связи $\boldsymbol{B}_\sim$ и $\boldsymbol{H}_\sim$ является весьма существенной. Однако мы во второй части ограничимся рассмотрением только линейных (в указанном смысле) задач.

В этом случае быстропеременные составляющие всех рассматриваемых величин будут изменяться во времени по гармоническому закону, если по этому закону изменяются возбуждающие поля или токи. Последнее же всегда имеет место в диапазоне с. в. ч.

Подставим суммы (12,5), (12,6) и (12,7) в систему уравнений (12,1) и примем во внимание, что все быстропеременные составляющие зависят от времени по одинаковому, гармоническому закону. Тогда мы получим две независимые системы, одинаковые и совпадающие по форме с (12,1): одну систему для постоянных составляющих и другую систему для комплексных амплитуд быстропеременных составляющих. Первой системой мы интересоваться в дальнейшем не будем, предполагая, что решения ее известны. Заметим лишь, что при достаточно медленно изменяющихся полях $\boldsymbol{H}_=$ и $\boldsymbol{E}_=$ эта система распадается на две независимые системы: систему уравнений электростатики для $\boldsymbol{E}_=$ и $\boldsymbol{D}_=$ и систему уравнений магнитостатики для $\boldsymbol{H}_=$ и $\boldsymbol{B}_=$. При рассмотрении

процессов в ферритах представляет интерес лишь вторая из этих систем.

Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд быстропеременных составляющих запишется[1]):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B} = 0, \tag{12,8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{12,9}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{12,10}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\varrho. \tag{12,11}$$

Заметим, что уравнения (12,9) и (12,11) являются следствиями (12,8) и (12,10) с учетом уравнения сохранения электрического заряда (12,4). Граничные условия для комплексных амплитуд совпадают по форме с (12,2).

Остановимся теперь на форме соотношений, связывающих комплексные амплитуды $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ с комплексными амплитудами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Плотность тока может быть записана следующим образом:

$$\boldsymbol{j} = \overleftrightarrow{\sigma}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}_{\text{ст}}, \tag{12,12}$$

где $\overleftrightarrow{\sigma}$ — удельная электропроводность ($\boldsymbol{j} = \overleftrightarrow{\sigma}\boldsymbol{E}$ — закон Ома), $\boldsymbol{j}_{\text{ст}}$ — сторонний ток, вызванный различными факторами, как электромагнитными, так и другими; к этому току, рассматриваемому как заданный, может быть отнесена и омическая составляющая, вызванная полями, которые в данной задаче не рассматриваются.

Для всех известных в настоящее время сред электрическая индукция не зависит от $\boldsymbol{H}$, а магнитная — от $\boldsymbol{E}$. Тогда для таких амплитуд поля, при которых можно не принимать во внимание нелинейности по отношению к быстропеременным составляющим,

$$\boldsymbol{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon_1}\boldsymbol{E}, \tag{12,13}$$

$$\boldsymbol{B} = \overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}, \tag{12,14}$$

[1]) Мы опускаем индексы $\sim$ и не вводим специальных индексов для обозначения комплексных амплитуд. В дальнейшем величины без специальных индексов будут соответствовать всегда комплексным амплитудам переменных составляющих векторов поля, индукции и тока.

где тензор $\overleftrightarrow{\varepsilon_1}$ — диэлектрическая проницаемость, а тензор $\overleftrightarrow{\mu}$ — магнитная проницаемость.

Величины $\overleftrightarrow{\sigma}$, $\overleftrightarrow{\varepsilon_1}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ в общем случае являются тензорами второго ранга с комплексными компонентами. При этом составляющие векторов $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}$ выражаются через составляющие векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и эти компоненты согласно общим правилам скалярного умножения тензора на вектор [2]. Например, если компоненты тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ выражаются следующей таблицей[1]):

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{vmatrix},$$

то

$$B_x = \mu_{11}H_x + \mu_{12}H_y + \mu_{13}H_z,$$
$$B_y = \mu_{21}H_x + \mu_{22}H_y + \mu_{23}H_z,$$
$$B_z = \mu_{31}H_x + \mu_{32}H_y + \mu_{33}H_z.$$

Подставляя (12,12), (12,13) и (12,14) в уравнения (12,8)—(12,11) и принимая во внимание (12,4), получим:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{i\omega}{c}\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H} = 0, \tag{12,15}$$

$$\operatorname{div}\left(\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}\right) = 0, \tag{12,16}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{i\omega}{c}\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ст}}, \tag{12,17}$$

$$\operatorname{div}\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}\right) = 4\pi\varrho_{\text{ст}}, \tag{12,18}$$

где

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{\varepsilon_1} - i\frac{4\pi}{\omega}\overleftrightarrow{\sigma}, \tag{12,19}$$

$$\varrho_{\text{ст}} = \frac{i}{\omega}\operatorname{div}\boldsymbol{j}_{\text{ст}}.$$

Комплексный тензор $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ мы будем в дальнейшем называть электрической проницаемостью среды. Под электрической

[1]) Здесь, как и в дальнейшем, индексы 1, 2 и 3 соответствуют осям x, y и z декартовой системы координат.

индукцией мы будем понимать вектор $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$. Как уже указывалось выше, уравнения (12,16) и (12,18) являются следствиями уравнений (12,15) и (12,17).

Из уравнений (12,15) и (12,17) можно исключить $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$ и получить уравнения для оставшегося вектора. Например, из (12,15) следует:

$$\boldsymbol{H} = \frac{ic}{\omega} \overleftrightarrow{(\mu)}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}, \tag{12,20}$$

где $\overleftrightarrow{(\mu)}^{-1}$ — тензор, обратный тензору $\overleftrightarrow{\mu}$ [2]. Подставляя (12,20) в (12,17), получим:

$$\operatorname{rot}\left[\overleftrightarrow{(\mu)}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\right] - \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \boldsymbol{j}_{\text{ст}}. \tag{12,21}$$

Аналогичным образом можно получить:

$$\operatorname{rot}\left[\overleftrightarrow{(\varepsilon)}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\right] - \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\mu} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot}\left[\overleftrightarrow{(\varepsilon)}^{-1} \boldsymbol{j}_{\text{ст}}\right]. \tag{12,22}$$

Большое практическое значение имеет случай, когда в интересующем нас объеме $\boldsymbol{j}_{\text{ст}} = 0$. При этом уравнения (12,17) и (12,18) запишутся следующим образом:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{i\omega}{c} \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E} = 0, \tag{12,23}$$

$$\operatorname{div}\left(\overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}\right) = 0. \tag{12,24}$$

Уравнения (12,15) и (12,23), а также (12,16) и (12,24) переходят одно в другое при замене:

$$\boldsymbol{E} \rightleftarrows \boldsymbol{H}, \quad \overleftrightarrow{\varepsilon} \rightleftarrows -\overleftrightarrow{\mu}. \tag{12,25}$$

Отсюда вытекает, что и все следствия этих уравнений остаются справедливыми при указанной замене (при $\boldsymbol{j}_{\text{ст}} = 0$), если соответствующим образом заменяются граничные условия. Это положение, известное для сред со скалярными параметрами, как принцип перестановочной двойственности [13], обобщается, как мы сейчас убедились, и на случай тензорных параметров среды. Этому принципу удовлетворяют (при $\boldsymbol{j}_{\text{ст}} = 0$) и уравнения (12,21) и (12,22).

Рассмотрим некоторые свойства тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, которые нам потребуются в дальнейшем, и введем обозначения

их компонентов. Отметим прежде всего, что величины $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, как и любые тензоры [2], могут быть представлены в виде сумм симметричных и антисимметричных тензоров. Приписывая первым индексы «с», а вторым — «а», обозначим следующим образом их компоненты:

$$\left.\begin{aligned} (\mu_{\text{с}})_{kl} &= (\mu_{\text{с}})_{lk} = \mu_{kl} = \mu'_{kl} - i\mu''_{kl}, \\ (\varepsilon_{\text{с}})_{kl} &= (\varepsilon_{\text{с}})_{lk} = \varepsilon_{kl} = \varepsilon'_{kl} - i\varepsilon''_{kl}, \end{aligned}\right\} \tag{12,26}$$

где k и l принимают любые значения: 1, 2 и 3:

$$\left.\begin{aligned} (\mu_{\text{а}})_{kl} &= -(\mu_{\text{а}})_{lk} = i\mu_{\text{а}m} = i[\mu'_{\text{а}m} - i\mu''_{\text{а}m}], \\ (\varepsilon_{\text{а}})_{kl} &= -(\varepsilon_{\text{а}})_{kl} = i\varepsilon_{\text{а}m} = i[\varepsilon'_{\text{а}m} - i\varepsilon''_{\text{а}m}], \end{aligned}\right\} \tag{12,27}$$

где k, l и m принимают следующие значения: 1, 2, 3; 2, 3, 1 и 3, 1, 2.

Величины $(\mu_{\text{а}})_m$ и $(\varepsilon_{\text{а}})_m$ можно рассматривать как проекции на соответствующие оси векторов гирации: электрического $\boldsymbol{g}_\varepsilon$ [11] и магнитного $\boldsymbol{g}_\mu$. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$\boldsymbol{B} = \overleftrightarrow{\mu_{\text{с}}} \boldsymbol{H} + i\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{g}_\mu, \tag{12,28}$$

$$\boldsymbol{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon_{\text{с}}} \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g}_\varepsilon. \tag{12,29}$$

Тензоры μ и ε могут быть представлены также в виде сумм эрмитовых и антиэрмитовых тензоров[1]), которым будем приписывать соответственно индексы «э» и «аэ». По определению этих тензоров их компоненты с учетом (12,26) и (12,27) запишутся:

$$\left.\begin{aligned} (\mu_{\text{э}})_{kl} &= \mu'_{kl} + i\mu'_{\text{а}m}, & (\mu_{\text{аэ}})_{kl} &= \mu''_{\text{а}m} - i\mu''_{kl}, \\ (\varepsilon_{\text{э}})_{kl} &= \varepsilon'_{kl} + i\varepsilon'_{\text{а}m}, & (\varepsilon_{\text{аэ}})_{kl} &= \varepsilon''_{\text{а}m} - i\varepsilon''_{kl} \end{aligned}\right\} \tag{12,30}$$

(при $k = l$ компоненты $\mu'_{\text{а}m}$, $\mu''_{\text{а}m}$, $\varepsilon'_{\text{а}m}$ и $\varepsilon''_{\text{а}m}$ равны нулю).

[1]) Эрмитовым тензором называется комплексный тензор, вещественная часть которого является симметричным тензором, а мнимая — антисимметричным тензором. Если, наоборот, вещественная часть антисимметрична, а мнимая — симметрична, комплексный тензор называется антиэрмитовым.

§ 13. Уравнения электродинамики для гиротропной среды

Для поликристаллических ферритов ε является скалярной величиной. Тензор $\overleftrightarrow{\mu}$ для этих сред в присутствии постоянной намагниченности в системе координат, в которой третья ось (ось z) совпадает с направлением этой намагниченности, записывается следующим образом[1]):

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{vmatrix}. \qquad (13,1)$$

В этом случае не обращаются в нуль диагональные компоненты симметричного тензора $\overleftrightarrow{\mu}_c$:

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \mu; \quad \mu_{33} = \mu_\parallel,$$

и один компонент $i\mu_a$ антисимметричного тензора $\overleftrightarrow{\mu}_a$. Вектор гирации при этом совпадает по направлению с постоянной намагниченностью

$$g_\mu = z_0 \mu_a. \qquad (13,2)$$

Для ряда сред, изотропных в отсутствие постоянного магнитного поля, при наличии этого поля тензор $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ приобретает вид, аналогичный (13,1):

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{vmatrix}. \qquad (13,3)$$

К таким средам принадлежат электронная плазма и искусственный диэлектрик [235].

Вещества, магнитная проницаемость которых определяется выражением (13,1), называются магнитно-гиротропными, а вещества с электрической пропицаемостью вида (13,3)—электрически-гиротропными. Среду, которая

[1]) Строго говоря, магнитная проницаемость любого поликристаллического вещества имеет в присутствии постоянного магнитного поля вид (13,1). Но для всех веществ, кроме ферромагнетиков, $\mu - 1$, $\mu_{\mu-1}$ и μ_a имеют очень малые значения.

совмещает эти свойства, т. е. имеет магнитную проницаемость вида (13,1), а электрическую проницаемость вида (13,3) можно назвать [217] гиротропной средой. В этом параграфе мы запишем для такой среды основные уравнения электродинамики и остановимся на некоторых следствиях из них. Рассмотрение общего случая гиротропной среды является на этом этапе целесообразным в первую очередь потому, что дает возможность широко использовать при выводах формул принцип перестановочной двойственности (§ 12). В результате этого получение общих уравнений, из которых потом легко выводятся уравнения для магнитно-гиротропной среды (поликристаллического феррита) и электрически-гиротропной среды (плазмы), оказывается более простым, чем в каждом из этих частных случаев в отдельности.

Для монокристаллов всех веществ как тензор $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, так, вообще говоря, и тензор $\overleftrightarrow{\mu}$ в отсутствие внешнего постоянного магнитного поля представляют собой симметричные тензоры, характер которых обусловлен кристаллографической анизотропией вещества. Соответствующим поворотом координатных осей эти тензоры могут быть приведены к диагональным. Очевидно, что компоненты такого диагонального тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ будут заметно отличаться от единицы лишь для ферромагнитных кристаллов. Постоянное намагничивание ферромагнитных монокристаллов, как было показано в § 7, добавляет антисимметричные компоненты к тензору $\overleftrightarrow{\mu}$ и изменяет диагональные компоненты.

Вопросы электродинамики сред с магнитной проницаемостью, соответствующей проницаемости намагниченных ферромагнитных монокристаллов, почти не исследовались. С другой стороны, несмотря на известные успехи в выращивании [58,60] и использовании [435] монокристаллов ферритов, в технике с. в. ч. наиболее широко применяются поликристаллические материалы. Поэтому мы во второй части ограничимся рассмотрением электродинамики гиротропных, в частности магнитно-гиротропных сред, соответствующих поликристаллическим ферритам.

Первым этапом на пути практического решения задач электродинамики является получение уравнений для век-

торов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в отдельности или каких-нибудь функций — потенциалов, через которые могут быть выражены эти векторы. Один вариант таких уравнений был уже записан выше — уравнения (12,21) и (12,22). Входящие в эти уравнения обратные тензоры $(\overleftrightarrow{\mu})^{-1}$ и $(\overleftrightarrow{\varepsilon})^{-1}$ для случая гиротропной среды запишутся следующим образом:

$$(\overleftrightarrow{\varepsilon})^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{\varepsilon} & i\bar{\varepsilon}_a & 0 \\ -i\bar{\varepsilon}_a & \bar{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varepsilon}_{\parallel} \end{vmatrix}, \tag{13,4}$$

$$(\overleftrightarrow{\mu})^{-1} = \begin{vmatrix} \bar{\mu} & i\bar{\mu}_a & 0 \\ -i\bar{\mu}_a & \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_{\parallel} \end{vmatrix}, \tag{13,5}$$

где

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_\perp}, \qquad \bar{\mu} = \frac{1}{\mu_\perp},$$

$$\bar{\varepsilon}_a = -\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon\varepsilon_\perp}, \qquad \bar{\mu}_a = -\frac{\mu_a}{\mu\mu_\perp},$$

$$\bar{\varepsilon}_{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}}, \qquad \bar{\mu}_{\parallel} = \frac{1}{\mu_{\parallel}}.$$

Обозначения $\varepsilon_\perp$ и $\mu_\perp$, которые будут часто использоваться в дальнейшем, соответствуют следующим величинам:

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon - \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon}, \tag{13,6}$$

$$\mu_\perp = \mu - \frac{\mu_a^2}{\mu}. \tag{13,7}$$

Векторные уравнения (12,21) и (12,22) не могут быть непосредственно использованы при решении граничных задач, потому что при проектировании их на оси любой, в том числе и декартовой, системы координат получаются уравнения, в каждое из которых входит несколько проекций векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Для того чтобы получить уравнения, в которые входило бы только по одной проекции этих векторов, необходимо исключить две другие из полученных при проектировании (12,21) и (12,22) систем уравнений.

Это исключение проделано для случая магнитно-гиротропной среды Эпштейном [217] и оказывается даже в этом частном случае достаточно громоздким. Гораздо проще получить необходимые общие уравнения для гиротропной среды непосредственно из уравнений Максвелла (12,15) и (12,17), как это было проделано для частного случая плоской волны М. А. Гинцбургом [240].

Рассмотрим случай, когда сторонние токи отсутствуют. Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде (12,15), (12,16), (12,23) и (12,24). Спроектируем уравнения (12,15) и (12,23) на оси декартовой системы координат с учетом выражений (13,1) и (13,3). Запишем в этих же координатах уравнения (12,16) и (12,24). В результате, обозначив

$$k_0 = \frac{\omega}{c},$$

получим:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + ik_0\mu H_x - k_0\mu_a H_y = 0, \tag{13,8}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0\mu_a H_x + ik_0\mu H_y = 0, \tag{13,9}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + ik_0\mu_{\parallel} H_z = 0, \tag{13,10}$$

$$\mu\left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y}\right) + i\mu_a\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) + \mu_{\parallel}\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \tag{13,11}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - ik_0\varepsilon E_x + k_0\varepsilon_a E_y = 0, \tag{13,12}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_0\varepsilon_a E_x - ik_0\varepsilon E_y = 0, \tag{13,13}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - ik_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0, \tag{13,14}$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) + i\varepsilon_a\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) + \varepsilon_{\parallel}\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \tag{13,15}$$

Как уже отмечалось выше, уравнения (13,11) и (13,15) не независимы, а являются следствиями остальных уравнений приведенной системы.

Из системы (13,8) — (13,15) очень просто исключить все поперечные (относительно направления постоянного намагничивания — оси z) составляющие и получить два

уравнения для продольных составляющих E_z и H_z. Действительно, дифференцируя (13,8) по y, а (13,9) по x, вычитая полученные выражения и принимая во внимание (13,10), (13,11), (13,14) и (13,15), получим:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}E_z+ \\ +k_0\mu_{\parallel}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}+\frac{\mu_a}{\mu}\right)\frac{\partial H_z}{\partial z}=0. \quad (13,16)$$

Второе уравнение запишем сразу, используя принцип перестановочной двойственности:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\frac{\mu_{\parallel}}{\mu}\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}+k_0^2\mu_{\parallel}\varepsilon_{\perp}H_z- \\ -k_0\varepsilon_{\parallel}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}+\frac{\mu_a}{\mu}\right)\frac{\partial E_z}{\partial z}=0. \quad (13,17)$$

Уравнения (13,16) и (13,17) можно переписать следующим образом:

$$\left(\nabla_{\perp}^2+a_e\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_e\right)E_z+c_e\frac{\partial}{\partial z}H_z=0, \quad (13,16a)$$

$$\left(\nabla_{\perp}^2+a_m\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_m\right)H_z-c_m\frac{\partial}{\partial z}E_z=0, \quad (13,17a)$$

если ввести обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &a_e=\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon}, \quad b_e=k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}, \quad c_e=k_0\mu_{\parallel}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}+\frac{\mu_a}{\mu}\right),\\ &a_m=\frac{\mu_{\parallel}}{\mu}, \quad b_m=k_0^2\mu_{\parallel}\varepsilon_{\perp}, \quad c_m=k_0\varepsilon_{\parallel}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}+\frac{\mu_a}{\mu}\right),\end{aligned}\right\} \quad (13,18)$$

а под $\nabla_{\perp}$ понимать оператор Гамильтона «набла» в плоскости xy:

$$\nabla_{\perp}=\boldsymbol{x}_0\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{y}_0\frac{\partial}{\partial y}. \quad (13,19)$$

Из уравнений (13,16) и (13,17) следует важный вывод, что в гиротропной среде поля типов TE и TM относительно направления постоянного намагничивания (оси z) возможны только в частном случае отсутствия зависимости от z. Действительно, если $\frac{\partial}{\partial z}\neq 0$, а μ_a и ε_a не обращаются в нуль одновременно, то, как следует из (13,16), при $E_z=0$ (поле TE) и $H_z=0$. Таким же образом из (13,17) следует, что при $H_z=0$ (поле TM) и $E_z=0$. Вопрос о возможности существования поля TEM ($E_z=H_z=0$) остается пока открытым; как будет показано в следующей главе, это поле может существовать при $\frac{\partial}{\partial z}\neq 0$, в частности, для плоской волны с круговой поляризацией, распространяющейся в направлении оси z.

Получим теперь уравнения, которым удовлетворяют составляющие E_z и H_z по отдельности. Для того чтобы исключить H_z, применим к уравнению (13,16а) оператор $\nabla_{\perp}^2+a_m\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_m$, а уравнение (13,17а) умножим на c_e и продифференцируем по z. Сложив полученные таким образом выражения, придем к уравнению

$$\left[\nabla_{\perp}^4+a_ea_m\frac{\partial^4}{\partial z^4}+(a_e+a_m)\nabla_{\perp}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(b_e+b_m)\nabla_{\perp}^2+ \right. \\ \left. +(b_ea_m+a_eb_m+c_ec_m)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+b_eb_m\right]E_z=0. \quad (13,20)$$

Оно может быть кратко записано в виде

$$L(E_z)=0, \quad (13,20a)$$

где L — дифференциальный оператор, стоящий в квадратных скобках в (13,20). После подстановки значений коэффициентов из (13,18) этот оператор запишется следующим образом:

$$L\equiv\nabla_{\perp}^4+\frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^4}{\partial z^4}+\left(\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon}+\frac{\mu_{\parallel}}{\mu}\right)\nabla_{\perp}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+ \\ +k_0(\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}+\mu_{\parallel}\varepsilon_{\perp})\nabla_{\perp}^2+2k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\left(1+\frac{\mu_a\varepsilon_a}{\varepsilon\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+ \\ +k_0^4\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp}. \quad (13,21)$$

С помощью принципа двойственности можно убедиться, что H_z удовлетворяет такому же уравнению, как и E_z:

$$L(H_z)=0. \quad (13,22)$$

Выражения для поперечных составляющих векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ через продольные составляющие можно получить

в векторной форме, введя поперечные векторы:

$$\boldsymbol{E}_\perp = \boldsymbol{x}_0 E_x + \boldsymbol{y}_0 E_y, \quad \boldsymbol{H}_\perp = \boldsymbol{x}_0 E_x + \boldsymbol{y}_0 E_y.$$

Используя уравнения (12,15) и (12,23), можно показать, что $\boldsymbol{E}_\perp$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2r\frac{\partial^2}{\partial z^2} + t\right)\boldsymbol{E}_\perp = \left(r + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z} + ik_0(\mu_a \varepsilon + \varepsilon_a \mu)\,\boldsymbol{z}_0 \times \nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z} + k_0^2 \mu \left(k_0^2 \varepsilon_a \mu_\perp - \frac{\mu_a}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\nabla_\perp H_z + ik_0 \mu \left(k_0^2 \varepsilon \mu_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{z}_0 \times \nabla_\perp H_z, \quad (13,23)$$

где

$$r = k_0^2(\varepsilon\mu + \varepsilon_a\mu_a), \quad t = k_0^4 \varepsilon\varepsilon_\perp \mu\mu_\perp.$$

Аналогичное уравнение для $\boldsymbol{H}_\perp$ получается из (13,23) заменой (12,25) и соответствии с принципом двойственности.

Выражение (13,23) выполняется, если $\boldsymbol{E}_\perp$ удовлетворяет такому же уравнению, как E_z и H_z,

$$L(\boldsymbol{E}_\perp) = 0. \quad (13,24)$$

Аналогичный вывод может быть сделан и относительно $\boldsymbol{H}_\perp$. Таким образом, можно предполагать, что полные векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют уравнениям четвертого порядка [1]):

$$L(\boldsymbol{E}) = 0, \quad (13,25)$$
$$L(\boldsymbol{H}) = 0. \quad (13,26)$$

При проектировании этих уравнений на оси декартовой системы координат получаются в отличие от уравнений (12,21) и (12,22) независимые уравнения для проекций векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Во многих случаях представляется целесообразным, вместо того чтобы решать эти уравнения, решить аналогичное уравнение для некоторой скалярной функции, через которую все составляющие поля можно было бы потом выразить простыми операциями дифференцирования. Такой метод, как известно [14], широко применяется

[1]) Для частного случая магнитно-гиротропной среды это было строго доказано Эпштейном [217].

в электродинамике сред со скалярными параметрами, где эти функции вводятся отдельно для полей TE и TM. В средах с тензорными, в частности, гиротропными параметрами поля TE и TM, как мы убедились, вообще говоря, не могут существовать. В этом случае необходимо и, как мы увидим, возможно ввести такие скалярные потенциальные функции для поля, не являющегося полем TE или TM.

Требуемую функцию можно ввести, если удается получить соотношение вида

$$\frac{\partial}{\partial x}[F_1(E_x, E_y)] = \frac{\partial}{\partial y}[F_2(E_x, E_y)], \quad (13,27)$$

где F_1 и F_2 – линейные дифференциальные операторы. Тогда достаточно положить

$$F_1(E_x, E_y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

и

$$F_2(E_x, E_y) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Для получения соотношения вида (13,27) продифференцируем по z уравнение (13,16) и выразим в нем E_z и H_z через E_x и E_y с помощью уравнений (13,10) и (13,15). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(TE_x + iSE_y) = \frac{\partial}{\partial y}(iSE_x - TE_y), \quad (13,28)$$

где дифференциальные операторы T и S имеют следующий вид:

$$T = k_0^2 \varepsilon \mu_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\parallel}\nabla_\perp^2, \quad (13,29)$$

$$S = \varepsilon_a\left(k_0^2 \mu_\perp + \frac{1}{\varepsilon_\parallel}\nabla_\perp^2\right) - \frac{\mu_a}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (13,30)$$

Введем функцию Ψ таким образом, чтобы

$$TE_x + iSE_y = (T^2 - S^2)\frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

$$iSE_x - TE_y = (T^2 - S^2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Отсюда следует:

$$E_x = T\frac{\partial \Psi}{\partial y} + iS\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{13,31}$$

$$E_y = iS\frac{\partial \Psi}{\partial y} - T\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{13,32}$$

Из уравнений Максвелла нетрудно выразить через функцию Ψ и остальные составляющие поля. Так, из (13,15) после несложных преобразований получим:

$$E_z = i\frac{\partial}{\partial z}W\Psi, \tag{13,33}$$

где

$$W = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\parallel}}\left(\frac{\mu_a}{\mu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right)\nabla_{\perp}^2. \tag{13,34}$$

Из уравнения (13,10) следует:

$$H_z = iP\Psi, \tag{13,35}$$

где

$$P = -\frac{T}{k_0\mu_{\parallel}}\nabla_{\perp}^2. \tag{13,36}$$

Из (13,8) и (13,9) получим после некоторых преобразований:

$$H_x = iM\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial z} + N\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial z}, \tag{13,37}$$

$$H_y = -N\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial z} + iM\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial z}, \tag{13,38}$$

где

$$M = \frac{1}{\mu k_0}\left[k_0^2(\varepsilon\mu + \mu_a\varepsilon_a) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\parallel}}\nabla_{\perp}^2\right], \tag{13,39}$$

$$N = k_0\varepsilon\left(\frac{\mu_a}{\mu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right). \tag{13,40}$$

Применяя к любому из выражений (13,31), (13,32) и т. д. оператор L, мы убеждаемся, что функция Ψ удовлетворяет такому же уравнению четвертого порядка, как и составляющие поля:

$$L(\Psi) = 0. \tag{13,41}$$

Очень большой интерес представляет вопрос о том, нельзя ли представить дифференциальный оператор L в виде произведения двух операторов второго порядка, сведя тем самым уравнение четвертого порядка для функции Ψ или составляющих поля к дифференциальным уравнениям второго порядка. Так как в выражение (13,21) для оператора L входят только четные степени $\nabla_{\perp}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, то следует попытаться представить L в виде

$$L = \left(\nabla_{\perp}^2 + m_1\frac{\partial^2}{\partial z^2} + n_1\right)\left(\nabla_{\perp}^2 + m_2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + n_2\right). \tag{13,42}$$

Производя в (13,42) умножение и сравнивая коэффициенты при одинаковых производных в полученном выражении и (13,21), приходим к следующей системе пяти уравнений для четырех неизвестных m_1, m_2, n_1 и n_2:

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m_2 &= \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon} + \frac{\mu_{\parallel}}{\mu},\\ m_1m_2 &= \frac{\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}}{\varepsilon\mu},\\ n_1 + n_2 &= k_0^2(\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp} + \varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel}),\\ n_1n_2 &= k_0^4\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\varepsilon_{\perp}\mu_{\perp},\\ m_1n_2 + m_2n_1 &= 2k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_{\parallel}\left(1 + \frac{\mu_a\varepsilon_a}{\varepsilon\mu}\right). \end{aligned}\right| \tag{13,43}$$

Нетрудно убедиться, что эти уравнения несовместны, а именно, единственное решение первых четырех:

$$m_1 = \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon}, \quad m_2 = \frac{\mu_{\parallel}}{\mu}, \quad n_1 = k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_{\perp}, \quad n_2 = k_0^2\varepsilon_{\perp}\mu_{\parallel},$$

не удовлетворяет пятому. Таким образом, в общем случае представление оператора L в виде произведения двух операторов, т. е. сведение уравнения четвертого порядка к уравнениям второго порядка, для гиротропной среды невозможно. Это сведение становится возможным, если $\mu_a = \varepsilon_a = 0$. Тогда пятое уравнение (13,43) удовлетворяется решениями первых четырех. Функция Ψ при этом

удовлетворяет одному из следующих уравнений:

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\parallel}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_\parallel\mu\right)\Psi = 0, \qquad (13,44)$$

$$\left(\nabla_\perp^2 + \frac{\mu}{\mu_\parallel}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon\mu_\parallel\right)\Psi = 0. \qquad (13,45)$$

В случае изотропной среды, когда, кроме того, еще $\varepsilon_\parallel = \varepsilon$ и $\mu_\parallel = \mu$, уравнения эти, как и следовало ожидать, совпадают друг с другом и не отличаются от уравнения для скалярной функции, вводимой в этом случае для волн TE и TM [14].

§ 14. Гиротропная среда при гармонической зависимости от координаты в направлении постоянного поля

Остановимся на частном случае, когда функция Ψ и составляющие поля зависят от координаты z в направлении постоянного магнитного поля по гармоническому закону, т. е. содержат в качестве множителя одну из функций $e^{i\beta z}$, $e^{-i\beta z}$, $\sin\beta z$, $\cos\beta z$ или их линейную комбинацию. Например, функция Ψ в этом случае запишется:

$$\Psi(q_1, q_2, z) = Z(z)\,\psi(q_1, q_2), \qquad (14,1)$$

где $Z(z)$ — гармоническая функция, а q_1 и q_2 — координаты в плоскостях $z = \text{const}$.

Для любой гармонической зависимости от z выполняется условие

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\beta^2. \qquad (14,2)$$

Этому условию удовлетворяют плоские волны, стоячие или бегущие, распространяющиеся вдоль оси z, а также любые поля, вовсе не зависящие от z; в последнем случае $\beta = 0$. Оба эти случая представляют большой практический интерес и будут подробно рассмотрены в дальнейшем. В этом параграфе мы запишем для гармонической зависимости от z рассмотренные выше основные уравнения.

При гармонической зависимости от z уравнения четвертого порядка для составляющих поля и функции Ψ сводятся к уравнениям второго порядка. Действительно,

выражение (13,21) для оператора L запишется в этом случае следующим образом:

$$L = \nabla_\perp^4 + p\nabla_\perp^2 + q, \qquad (14,3)$$

где

$$p = k_0^2(\varepsilon_\parallel\mu_\perp + \varepsilon_\perp\mu_\parallel) - \beta^2\left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon} + \frac{\mu_\parallel}{\mu}\right),$$

$$q = \varepsilon_\parallel\mu_\parallel\left[k_0^4\varepsilon_\perp\mu_\perp - 2k_0^2\left(1 + \frac{\mu_a\varepsilon_a}{\mu\varepsilon}\right)\beta^2 + \frac{\beta^4}{\varepsilon\mu}\right].$$

Представляя L в виде

$$L = (\nabla_\perp^2 + \varkappa_1^2)(\nabla_\perp^2 + \varkappa_2^2), \qquad (14,4)$$

производя умножение и сравнивая с (14,3), получим два уравнения для неизвестных $\varkappa_1^2$ и $\varkappa_2^2$:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 &= p,\\ \varkappa_1^2\varkappa_2^2 &= q.\end{aligned}\right\} \qquad (14,5)$$

Решениями этой системы являются корни квадратного уравнения

$$\varkappa^4 - p\varkappa^2 + q = 0. \qquad (14,6)$$

Таким образом, оператор L действительно может быть представлен в виде (14,4).

Применяя оператор L (не зависящий теперь от z) к функции Ψ, мы убеждаемся, что «поперечная» функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\perp^2\psi + \varkappa_{1,2}^2\psi = 0, \qquad (14,7)$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — два корня (14,6). Очевидно, что такому же уравнению будет удовлетворять полная функция Ψ, а также составляющие поля.

Корни уравнения (14,6) после несложного преобразования запишутся следующим образом:

$$\varkappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[k_0^2(\varepsilon_\parallel\mu_\perp + \varepsilon_\perp\mu_\parallel) - \left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon} + \frac{\mu_\parallel}{\mu}\right)\beta^2\right] \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[k_0^2(\varepsilon_\parallel\mu_\perp - \varepsilon_\perp\mu_\parallel) - \left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon} - \frac{\mu_\parallel}{\mu}\right)\beta^2\right]^2 + \beta^2 k_0^2\varepsilon_\parallel\mu_\parallel\left(\frac{\mu_a}{\mu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right)^2}. \qquad (14,8)$$

Для негиротропной среды ($\mu_a = \varepsilon_a = 0$) из (14,8) следует:

$$\varkappa_1^2 = k_0^2 \varepsilon_{\|} \mu - \frac{\varepsilon_{\|}}{\varepsilon} \beta^2, \tag{14,9}$$

$$\varkappa_2^2 = k_0^2 \varepsilon \mu_{\|} - \frac{\mu_{\|}}{\mu} \beta^2. \tag{14,10}$$

Такой же результат получается и из (13,44) и (13,45), если принять во внимание условие (14,2).

В случае изотропной среды ($\mu_a = \varepsilon_a = 0$, $\mu_{\|} = \mu$ и $\varepsilon_{\|} = \varepsilon$) выражения (14,9) и (14,10) совпадают и имеет место известное соотношение:

$$\beta^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - \varkappa^2. \tag{14,11}$$

Подчеркнем, что для гиротропной среды это соотношение не выполняется, и постоянная распространения β в направлении оси z связана с величинами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (которые определяют изменение поля на поверхностях $z = \text{const}$) более сложными соотношениями (14,8).

Выражения (13,31) — (13,33), (13,35), (13,37) и (13,38) остаются в силе при гармонической зависимости от z. Дифференциальные операторы T, S, W, P, M и N превращаются при этом, если учесть уравнение (14,7), в численные множители:

$$T_{1,2} = k_0^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \beta^2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\|}} \varkappa_{1,2}^2, \tag{14,12}$$

$$S_{1,2} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \left(k_0^2 \varepsilon \mu_{\perp} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\|}} \varkappa_{1,2}^2 \right) + \frac{\mu_a}{\mu} \beta^2, \tag{14,13}$$

$$M_{1,2} = \frac{1}{\mu k_0} \left[k_0^2 (\varepsilon \mu + \mu_a \varepsilon_a) - \beta^2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\|}} \varkappa_{1,2}^2 \right], \tag{14,14}$$

$$N = k_0 \varepsilon \left(\frac{\mu_a}{\mu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \right), \tag{14,15}$$

$$W_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\|}} \left(\frac{\mu_a}{\mu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \right) \varkappa_{1,2}^2, \tag{14,16}$$

$$P_{1,2} = \frac{T \varkappa_{1,2}^2}{k_0 \mu_{\|}}. \tag{14,17}$$

Заметим, что во все выражения (14,12) — (14,17) β входит только в квадрате. Следовательно, эти выражения справедливы для любой гармонической зависимости

от z (т. е. $e^{i\beta z}$; $e^{-i\beta z}$; $\sin \beta z$; $\cos \beta z$), т. е. для любых стоячих и бегущих вдоль оси z волн. Выражению (14,17) может быть записано в виде

$$P = -\frac{T \varkappa_{1,2}^2}{k_0 \mu_{\|} \beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{14,17a}$$

что, так же как и (14,17), справедливо при любой гармонической зависимости от z.

Нетрудно убедиться, что выражения (13,31)—(13,33), (13,35), (13,37) и (13,38) с учетом (14,17а) могут быть записаны в векторной форме:

$$\boldsymbol{E} = \overleftrightarrow{u} \nabla \Psi, \tag{14,18}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\partial}{\partial z} \overleftrightarrow{v} \nabla \Psi, \tag{14,19}$$

где тензоры $\overleftrightarrow{u}$ и $\overleftrightarrow{v}$ имеют следующий вид:

$$\overleftrightarrow{u} = \begin{vmatrix} iS & T & 0 \\ -T & iS & 0 \\ 0 & 0 & iW \end{vmatrix}, \tag{14,20}$$

$$\overleftrightarrow{v} = \begin{vmatrix} iM & N & 0 \\ -N & iM & 0 \\ 0 & 0 & iR \end{vmatrix}. \tag{14,21}$$

Входящие сюда величины T, S, W, M и N определяются согласно выражениям (14,12) — (14,16), а

$$R = -\frac{iT \varkappa_{1,2}^2}{k_0 \mu_{\|} \beta^2}. \tag{14,22}$$

Преимуществом такой векторной записи является то, что она справедлива не только в декартовых координатах, в которых был произведен ее вывод, но и в любых ортогональных криволинейных координатах, для которых выполняются следующие условия: 1) зависимость от координаты z является гармонической (или, в частности, совсем отсутствует), 2) направление постоянного намагничивания везде совпадает с направлением координатных линий z. Эта запись справедлива, в частности, в обобщенно-цилиндрических координатах.

На полученных выше соотношениях основывается простой и сравнительно общий метод решения граничных электродинамических задач для гиротропных сред, например ферритов и электронной плазмы. Этот метод, применимый в тех случаях, когда выполняются приведенные выше условия, заключается в следующем. В системе координат, соответствующей граничным условиям задачи, записываются частные решения уравнения (14,7) для скалярной функции Ψ. Двум значениям величины $\varkappa^2$, которые определяются согласно (14,8), соответствуют две группы этих решений. Для каждой по формулам (14,18)—(14,21), записанным в проекциях на оси соответствующей системы координат, определяются составляющие поля.

Эти «элементарные решения» должны быть затем сгруппированы в удовлетворяющие граничным условиям задачи основные типы колебаний или волн. Учет граничных условий позволяет определить основные характеристики этих колебаний или волн, например собственные частоты полого резонатора или постоянную распространения в волноводе. При этом возникает, однако, целый ряд ограничений, которых мы коснемся ниже, при разборе конкретных задач.

Уравнение (13,23) в случае гармонической зависимости от z (при $Z = e^{-i\beta z}$) перейдет в следующее выражение:

$$G\boldsymbol{E}_\perp = -i\beta\left[k_0^2(\varepsilon\mu + \mu_a\varepsilon_a) - \beta^2\right]\nabla_\perp E_z + k_0^2\beta(\mu_a\varepsilon - \varepsilon_a\mu)\varepsilon_0\left\langle \nabla_\perp E_z + k_0\mu\left(k_0^2\varepsilon_a\mu_\perp + \frac{\mu_a}{\mu}\beta^2\right)\nabla_\perp H_z + ik_0\mu(k_0^2\varepsilon\mu_\perp - \beta^2)\varepsilon_0\right\rangle \nabla_\perp H_z, \quad (14,23)$$

где

$$G = k_0^4\varepsilon\varepsilon_\perp\mu\mu_\perp - 2\beta^2k_0^2(\varepsilon\mu + \mu_a\varepsilon_a) + \beta^4.$$

Выражение для $\boldsymbol{H}_\perp$ может быть получено из (14,23) на основании принципа двойственности.

В заключение этого параграфа отметим, что достаточно положить $\varepsilon_a = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_\parallel$ во всех приведенных выше выражениях, чтобы получить соотношения для случая магнитно-гиротропной среды, т. е. для поликристаллического феррита. В частности, выражение (14,8)

запишется при этом:

$$\varkappa_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[k_0^2\varepsilon(\mu_\perp + \mu_\parallel) - \left(1 + \frac{\mu_\perp}{\mu}\right)\beta^2\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[k_0^2\varepsilon(\mu_\perp - \mu_\parallel) - \left(1 - \frac{\mu_\perp}{\mu}\right)\beta^2\right]^2 + \beta^2k_0^2\varepsilon\mu_\parallel\frac{\mu_a^2}{\mu^2}}. \quad (14,24)$$

Компоненты тензоров (14,20) и (14,21) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} T_{1,2} &= k_0^2\varepsilon\mu_\perp - \beta^2 - \varkappa_{1,2}^2, \\ S &= \frac{\mu_a}{\mu}\beta^2, \\ W_{1,2} &= -\frac{\mu_a}{\mu}\varkappa_{1,2}^2, \\ M_{1,2} &= \frac{1}{\mu k_0}(k_0^2\varepsilon\mu - \beta^2 - \varkappa_{1,2}^2), \\ N &= k_0\varepsilon\frac{\mu_a}{\mu}, \\ R_{1,2} &= -\frac{T_{1,2}\varkappa_{1,2}^2}{k_0\mu_\parallel\beta^2}. \end{aligned}\right\} \quad (14,25)$$

Уравнения (13,16) и (13,17) в этом случае (при $Z = e^{-i\beta z}$) запишутся:

$$\nabla_\perp^2 E_z + (k_0^2\varepsilon\mu_\perp - \beta^2)E_z - i\beta k_0\frac{\mu_\perp\mu_a}{\mu}H_z = 0, \quad (14,26)$$

$$\nabla_\perp^2 H_z + (k_0^2\varepsilon\mu_\parallel - \beta^2)\frac{\mu_\parallel}{\mu}H_z + i\beta k_0\frac{\varepsilon\mu_a}{\mu}E_z = 0. \quad (14,27)$$

§ 15. Квадратичные соотношения. Обобщение леммы Лоренца и теоремы Умова—Пойнтинга

Квадратичными соотношениями в электродинамике называются выражения, которые являются следствиями уравнений Максвелла и содержат произведения векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Такие соотношения играют большую роль как в общей теории, так и при решении многих конкретных задач. К числу квадратичных соотношений принадлежат, например, энергетические соотношения, в частности

теорема Умова – Пойнтинга, а также лемма Лоренца. Обобщение этих важных соотношений на среды с тензорными параметрами будет произведено в этом параграфе. Поскольку мы интересуемся гармоническими колебаниями и пользуемся все время методом комплексных амплитуд, то и квадратичные соотношения мы рассмотрим для комплексных амплитуд.

Выведем прежде всего основные квадратичные леммы, из которых в дальнейшем будут получены все квадратичные соотношения. Для этого запишем уравнения Максвелла для двух электромагнитных процессов с различными сторонними токами, различными частотами колебаний и различными тензорными параметрами среды:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_1 + i\frac{\omega_1}{c}\overleftrightarrow{\mu}_1 \boldsymbol{H}_1 = 0, \tag{15,1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_1 - i\frac{\omega_1}{c}\overleftrightarrow{\varepsilon}_1 \boldsymbol{E}_1 = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ст}\,1}; \tag{15,2}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_2 + i\frac{\omega_2}{c}\overleftrightarrow{\mu}_2 \boldsymbol{H}_2 = 0, \tag{15,3}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_2 - i\frac{\omega_2}{c}\overleftrightarrow{\varepsilon}_2 \boldsymbol{E}_2 = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}. \tag{15,4}$$

Умножим скалярно уравнение (15,1) на $\boldsymbol{H}_2$, уравнение (15,2) на $(-\boldsymbol{E}_2)$, уравнение (15,3) на $\boldsymbol{H}_1$ и уравнение (15,4) на $(-\boldsymbol{E}_1)$. Сложив все эти равенства и использовав формулу для дивергенции векторного произведения [2], получим соотношение

$$\frac{c}{4\pi}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 + \operatorname{div} \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \\ + \frac{i}{4\pi}(\omega_1 \boldsymbol{H}_2 \overleftrightarrow{\mu}_1 \boldsymbol{H}_1 + \omega_2 \boldsymbol{H}_1 \overleftrightarrow{\mu}_2 \boldsymbol{H}_2 + \omega_1 \boldsymbol{E}_2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_1 \boldsymbol{E}_1 + \omega_2 \boldsymbol{E}_1 \overleftrightarrow{\varepsilon}_2 \boldsymbol{E}_2) + \\ + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0. \tag{15,5}$$

Таким же образом, но умножая уравнение (15,2) на $\boldsymbol{E}_2$, а уравнение (15,3) на $(-\boldsymbol{H}_1)$, получим:

$$\frac{c}{4\pi}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \operatorname{div} \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \\ + \frac{i}{4\pi}(\omega_1 \boldsymbol{H}_2 \overleftrightarrow{\mu}_1 \boldsymbol{H}_1 - \omega_2 \boldsymbol{H}_1 \overleftrightarrow{\mu}_2 \boldsymbol{H}_2 - \omega_1 \boldsymbol{E}_2 \overleftrightarrow{\varepsilon}_1 \boldsymbol{E}_1 + \omega_2 \boldsymbol{E}_1 \overleftrightarrow{\varepsilon}_2 \boldsymbol{E}_2) + \\ + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0. \tag{15,6}$$

Запишем теперь уравнения, комплексно сопряженные с уравнениями (15,3) и (15,4),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_2^* - i\frac{\omega_2}{c}\overleftrightarrow{\mu}_2^* \boldsymbol{H}_2^* = 0, \tag{15,7}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_2^* + i\frac{\omega_2}{c}\overleftrightarrow{\varepsilon}_2^* \boldsymbol{E}_2^* = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}^*. \tag{15,8}$$

Умножая скалярно уравнение (15,1) на $\boldsymbol{H}_2^*$, уравнение (15,2) на $(\mp \boldsymbol{E}_2^*)$, уравнение (15,7) на $(\pm \boldsymbol{H}_1)$, а уравнение (15,8) на $(-\boldsymbol{E}_1)$ и складывая полученные равенства, придем к соотношениям:

$$\frac{c}{4\pi}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^* + \operatorname{div} \boldsymbol{E}_2^* \times \boldsymbol{H}_1) + \\ + \frac{i}{4\pi}(\omega_1 \boldsymbol{H}_2^* \overleftrightarrow{\mu}_1 \boldsymbol{H}_1 - \omega_2 \boldsymbol{H}_1 \overleftrightarrow{\mu}_2^* \boldsymbol{H}_2^* + \omega_1 \boldsymbol{E}_2^* \overleftrightarrow{\varepsilon}_1 \boldsymbol{E}_1 - \omega_2 \boldsymbol{E}_1 \overleftrightarrow{\varepsilon}_2^* \boldsymbol{E}_2^*) + \\ + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}^* \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,1} \boldsymbol{E}_2^* = 0, \tag{15,9}$$

$$\frac{c}{4\pi}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2^* - \operatorname{div} \boldsymbol{E}_2^* \times \boldsymbol{H}_1) + \\ + \frac{i}{4\pi}(\omega_1 \boldsymbol{H}_2^* \overleftrightarrow{\mu}_1 \boldsymbol{H}_1 + \omega_2 \boldsymbol{H}_1 \overleftrightarrow{\mu}_2^* \boldsymbol{H}_2^* - \omega_1 \boldsymbol{E}_2^* \overleftrightarrow{\varepsilon}_1 \boldsymbol{E}_1 - \omega_2 \boldsymbol{E}_1 \overleftrightarrow{\varepsilon}_2^* \boldsymbol{E}_2^*) + \\ + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}^* \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,1} \boldsymbol{E}_2^* = 0. \tag{15,10}$$

Выражения (15,5), (15,6), (15,9) и (15,10) представляют собой основные квадратичные леммы для комплексных амплитуд[1]). Рассмотрим наиболее важные следствия этих лемм.

Предположим, что параметры среды и частоты для обоих процессов одинаковы ($\overleftrightarrow{\mu}_1 = \overleftrightarrow{\mu}_2 = \overleftrightarrow{\mu}$, $\overleftrightarrow{\varepsilon}_1 = \overleftrightarrow{\varepsilon}_2 = \overleftrightarrow{\varepsilon}$ и $\omega_1 = \omega_2 = \omega$). Лемма (15,6) перейдет тогда в следующее выражение:

$$\frac{c}{4\pi}(\operatorname{div} \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \operatorname{div} \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \frac{i\omega}{4\pi}[(\boldsymbol{H}_2 \overleftrightarrow{\mu} \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_1 \overleftrightarrow{\mu} \boldsymbol{H}_2) - \\ - (\boldsymbol{E}_2 \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_1 \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_2)] + \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{\text{ст}\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0. \tag{15,11}$$

Это важное соотношение является обобщением на случай сред с тензорными параметрами известной леммы Лоренца [13]. Рассмотрим его более подробно.

[1]) Эти выражения являются обобщением на случай сред с различными и тензорными параметрами квадратичных лемм, сформулированных Г. В. Кисунько [13].

Представим тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ в виде сумм симметричных ($\overleftrightarrow{\mu}_c$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}_c$) и антисимметричных ($\overleftrightarrow{\mu}_a$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}_a$) тензоров. Согласно общим свойствам таких тензоров [2]

$$\boldsymbol{H}_2\overleftrightarrow{\mu}_c\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_1\overleftrightarrow{\mu}_c\boldsymbol{H}_2, \quad \boldsymbol{H}_2\overleftrightarrow{\mu}_a\boldsymbol{H}_1 = -\boldsymbol{H}_1\overleftrightarrow{\mu}_a\boldsymbol{H}_2.$$

С учетом этих соотношений и аналогичных соотношений для электрического поля и тензора $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ выражение (15,11) запишется следующим образом:

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \frac{i\omega}{2\pi}(\boldsymbol{H}_2\overleftrightarrow{\mu}_a\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{E}_2\overleftrightarrow{\varepsilon}_a\boldsymbol{E}_1) + \\ + \boldsymbol{j}_{ст\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{ст\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0. \quad (15,11а)$$

Как было показано в § 12,

$$\overleftrightarrow{\mu}_a\boldsymbol{H} = i\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{g}_\mu, \quad \overleftrightarrow{\varepsilon}_a\boldsymbol{E} = i\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g}_\varepsilon,$$

где $\boldsymbol{g}_\mu$ и $\boldsymbol{g}_\varepsilon$ — соответственно магнитный и электрический векторы гирации. С учетом этого обобщенная лемма Лоренца (15,11а) может быть записана также следующим образом:

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \frac{\omega}{2\pi}[\boldsymbol{g}_\mu(\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2) - \\ - \boldsymbol{g}_\varepsilon(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2)] + \boldsymbol{j}_{ст\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{ст\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0. \quad (15,11б)$$

Если $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ являются симметричными тензорами, в частности скалярными величинами, то (15,11а) переходит в обычную лемму Лоренца:

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \boldsymbol{j}_{ст\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{ст\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0. \quad (15,12)$$

Эта лемма является дифференциальной формулировкой принципа взаимности. Как видно из (15,11б), условием справедливости леммы (15,12) является:

$$\boldsymbol{g}_\mu(\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2) - \boldsymbol{g}_\varepsilon(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2) = 0. \quad (15,13)$$

Таким образом, принцип взаимности в дифференциальной форме справедлив при произвольных полях только для сред, параметры которых являются симметричными тензорами (в частности, скалярами). В специальном случае,

когда $\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2 = 0$, т. е. поля $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ параллельны, этот принцип справедлив для произвольного $\overleftrightarrow{\mu}$, а в случае $\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2 = 0$ — для произвольного $\overleftrightarrow{\varepsilon}$.

Интегрирование (15,12) по некоторому объему V дает интегральную формулировку принципа взаимности:

$$\frac{c}{4\pi}\int_S (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1)\,\boldsymbol{n}_0\,dS + \\ + \int_V (\boldsymbol{j}_{ст\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{ст\,1}\boldsymbol{E}_2)\,dV = 0, \quad (15,14)$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V, а $\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор нормали к этой поверхности.

Интегрируя (15,13) по тому же объему V, мы получим условие справедливости интегрального принципа взаимности:

$$\int_V [\boldsymbol{g}_\mu(\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2) - \boldsymbol{g}_\varepsilon(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2)]\,dV = 0. \quad (15,15)$$

Системы, для которых выполняется это условие и, следовательно, справедливо выражение (15,14), можно назвать взаимными в интегральном смысле. В отличие от этого системы, в каждой точке которых выполняется соотношение (15,13), следует называть взаимными в дифференциальном смысле. Очевидно, что при определенной симметрии системы условие (15,15) может выполняться и при невыполнении условия (15,13). Таким образом, системы, невзаимные в дифференциальном смысле, могут быть взаимными в интегральном смысле.

Для гиротропной среды, намагниченной по оси z, для которой

$$\boldsymbol{g}_\mu = \boldsymbol{z}_0\mu_a, \quad \boldsymbol{g}_\varepsilon = \boldsymbol{z}_0\varepsilon_a,$$

выражение (15,11б) примет вид

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1) + \frac{\omega}{2\pi}[\mu_a(\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{z}_0 - \\ - \varepsilon_a(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{E}_2)\boldsymbol{z}_0] + \boldsymbol{j}_{ст\,2}\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{j}_{ст\,1}\boldsymbol{E}_2 = 0 \quad (15,16)$$

($\boldsymbol{z}_0$ — единичный вектор, направленный по оси z).

Из выражения (15,16) видно, что для гиротропной среды ($\mu_a \neq 0$ и $\varepsilon_a \neq 0$) условием справедливости диф-

ференциального принципа взаимности является:

$$\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_2)=0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2)=0. \qquad (15{,}17)$$

Таким образом, этот принцип для гиротропных сред справедлив не только в случае параллельности полей ($\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_2=0$ и $\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2=0$), но и в том случае, если одно из переменных полей $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ и одно из полей $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ параллельны направлению постоянного магнитного поля.

Интегральное условие (15,15) запишется для гиротропной среды следующим образом:

$$\int_V [\mu_a \boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{H}_1\times\boldsymbol{H}_2)-\varepsilon_a\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{E}_2)]\,dV=0. \qquad (15{,}18)$$

В качестве второго следствия основных квадратичных лемм рассмотрим обобщенную на среды с тензорными параметрами комплексную теорему Умова — Пойнтинга. Чтобы получить ее, сложим почленно (15,9) и (15,10), положив в них:

$$\overleftrightarrow{\mu}_1=\overleftrightarrow{\mu}_2=\overleftrightarrow{\mu}, \quad \overleftrightarrow{\varepsilon}_1=\overleftrightarrow{\varepsilon}_2=\overleftrightarrow{\varepsilon}, \quad \omega_1=\omega_2=\omega, \quad \boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H},$$
$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j}_{\text{ст}1}=\boldsymbol{j}_{\text{ст}\,2}=\boldsymbol{j}_{\text{ст}}.$$

Это и приведет к искомому соотношению

$$\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*+\frac{i\omega}{4\pi}(\boldsymbol{H}^*\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\overleftrightarrow{\varepsilon}^*\boldsymbol{E}^*)+\boldsymbol{j}^*_{\text{ст}}\boldsymbol{E}=0. \qquad (15{,}19)$$

Если μ и ε являются вещественными скалярными величинами, то (15,19) переходит в известное выражение комплексной теоремы Умова — Пойнтинга [14].

Равенство нулю вещественной части комплексного уравнения (15,19) может быть записано в виде

$$\operatorname{div}\bar{\Pi}+\bar{P}+\bar{N}=0, \qquad (15{,}20)$$

где

$$\bar{\Pi}=\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*), \quad \bar{N}=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\boldsymbol{j}^*_{\text{ст}}\boldsymbol{E}), \qquad (15{,}21)$$
$$\bar{P}=-\frac{\omega}{4\pi}\operatorname{Im}(\boldsymbol{H}^*\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\overleftrightarrow{\varepsilon}^*\boldsymbol{E}^*).$$

Как известно, $\bar{\Pi}$ представляет собой среднее во времени значение вектора потока электромагнитной энергии

(вектора Умова — Пойнтинга), а $\bar{N}$ — среднее во времени значение мощности сторонних токов в единице объема. Отсюда ясно, что выражение (15,20) является дифференциальной формулировкой закона сохранения электромагнитной энергии (для гармонических колебаний), а величина $\bar{P}$ представляет собой среднее во времени значение мощности потерь в единице объема среды с тензорными параметрами.

Выясним, с какими компонентами тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ связаны потери $\bar{P}$. Рассматривая совершенно произвольное электромагнитное поле с составляющими

$$H_x=H'_x+iH''_x, \quad E_x=E'_x+iE''_x,$$
$$H_y=H'_y+iH''_y, \quad E_y=E'_y+iE''_y,$$
$$H_z=H'_z+iH''_z, \quad E_z=E'_z+iE''_z$$

и произвольные тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, можно показать, что потери определяются антиэрмитовыми частями этих тензоров, т. е. мнимыми частями их симметричных компонентов и мнимыми частями составляющих векторов гирации. Для сокращения записи мы приведем здесь доказательство этого положения в наиболее интересующем нас случае гиротропной среды [1]). Тогда величина $\bar{P}$ запишется в виде

$$\bar{P}=-\frac{\omega}{4\pi}\operatorname{Im}[\mu(|H_x|^2+|H_y|^2)+\mu_\parallel|H_z|^2+2\mu_a(H'_yH''_x-$$
$$-H''_yH'_x)-\varepsilon^*(|E_x|^2+|E_y|^2)-\varepsilon^*_\parallel|E_z|^2-2\varepsilon^*_a(E'_yE''_x-E''_yE'_x)].$$

Подставляя в последнее выражение

$$\mu=\mu'-i\mu'', \quad \mu_\parallel=\mu'_\parallel-i\mu''_\parallel, \quad \mu_a=\mu'_a-i\mu''_a,$$
$$\varepsilon=\varepsilon'-i\varepsilon'', \quad \varepsilon_\parallel=\varepsilon'_\parallel-i\varepsilon''_\parallel, \quad \varepsilon_a=\varepsilon'_a-i\varepsilon''_a,$$

получим

$$\bar{P}=\frac{\omega}{4\pi}[\mu''(|H_x|^2+|H_y|^2)+\mu''_\parallel|H_z|^2+$$
$$+2\mu''_a(H'_yH''_x-H''_yH'_x)+\varepsilon''(|E_x|^2+|E_y|^2)+\varepsilon''_\parallel|E_z|^2+$$
$$+2\varepsilon''_a(E'_yE''_x+E''_yE'_x)]. \qquad (15{,}22)$$

---

[1]) Для случая электрически гиротропной среды это было показано Я. И. Френкелем [11].

Отсюда видно, что потери определяются мнимыми частями величин μ, $\mu_\parallel$, μ_a, ε, $\varepsilon_\parallel$ и ε_a, т. е. антиэрмитовыми частями тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Из выражения (15,22) следует также, что положительные потери вносятся положительными значениями μ'', $\mu''_\parallel$, ε'' и $\varepsilon''_\parallel$. В отношении μ''_a и ε''_a этот вывод не может быть сделан, так как стоящие при этих величинах множители $(H'_y H''_x - H''_y H'_x)$ и $(E'_y E''_x - E''_y E'_x)$ могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Можно, в частности, показать, что для поля с круговой поляризацией эти множители являются положительными при правом направлении вращения (вокруг оси z) и отрицательными — при левом[1]). Таким образом, одни и те же положительные величины μ''_a и ε''_a вносят для поля с круговой поляризацией и правым вращением положительные потери, а для поля с левым вращением — отрицательные потери, которые приводят к уменьшению потерь, вносимых мнимыми частями других компонентов $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Для отрицательных величин μ''_a и ε''_a знаки потерь, вносимых ими для полей с круговой поляризацией, будут обратными.

[1]) См. сноску на стр. 25.

ГЛАВА 6

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 16. Основные формулы возмущений

Трудности, возникающие при решении граничных электродинамических задач, существенно возрастают при переходе от изотропных сред к гиротропным. Это заставляет в случае гиротропных сред обращать особо серьезное внимание на разработку приближенных методов решения таких задач.

Наиболее простым и универсальным из приближенных методов решения граничных задач является широко применяемый во всех областях математической физики метод возмущений. Согласно этому методу исследуемая система рассматривается как результат малого изменения («возмущения») другой, более простой системы, для которой решение интересующей нас задачи известно. В нашем случае начальной (невозмущенной) системой будет являться система, не содержащая гиротропных сред, а возмущение будет заключаться во введении в нее гиротропной среды.

При выводе расчетных формул метода возмущений будем исходить из основных квадратичных лемм, полученных в § 15. Будем считать, что электромагнитный процесс, характеризующийся индексами 2, соответствует начальному состоянию системы, а процесс с индексами 1 — возмущенному состоянию. Предположим, что в начальном состоянии параметры среды являются скалярными и вещественными:

$$\overleftrightarrow{\mu}_2 = \mu_0 \overleftrightarrow{I}; \quad \overleftrightarrow{\varepsilon}_2 = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{I}, \tag{16,1}$$

где $\overleftrightarrow{I}$ — единичный тензор. Предположим также, что сторонние токи отсутствуют как в начальном, так и в возмущенном состоянии. Тогда с учетом обозначений

$$\overleftrightarrow{\mu}_1 = \overleftrightarrow{\mu};\quad \overleftrightarrow{\varepsilon}_1 = \overleftrightarrow{\varepsilon};\quad \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E};\quad \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H};\quad \omega_1 = \omega;$$
$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_0;\quad \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0;\quad \omega_2 = \omega_0$$

из основных квадратичных лемм (15,6) и (15,9) следует:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{H}) + \frac{i}{c}[\omega\boldsymbol{H}_0\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H} - \omega_0\mu_0\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{H} - (\omega\boldsymbol{E}_0\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E} - \omega_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{E})] = 0, \quad (16,2)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^* + \boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H}) + \frac{i}{c}[\omega\boldsymbol{H}_0^*\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H} - \omega_0\mu_0\boldsymbol{H}_0^*\boldsymbol{H} + \omega\boldsymbol{E}_0^*\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E} - \omega_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{E}] = 0. \quad (16,3)$$

Формулы (16,2) и (16,3) можно назвать основными леммами возмущений. Рассмотрим применение этих лемм к трем фундаментальным граничным задачам: задаче об определении постоянной распространения регулярного волновода, задаче об определении коэффициента прохождения и коэффициента отражения от нерегулярности в волноводе и задаче о вычислении собственных частот полого резонатора. Во всех этих задачах металлические поверхности, ограничивающие соответствующие полые системы, будем считать идеально проводящими.

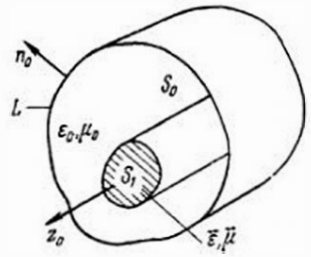


Рис. 36. Регулярное возмущение волновода.

Остановимся, прежде всего, на регулярном волноводе. Предположим, что в невозмущенном состоянии весь внутренний объем регулярного полого волновода с произвольным поперечным сечением S_0 (рис. 36) заполнен средой с параметрами μ_0 и ε_0. В этом волноводе имеет место поле

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 e^{-i\beta_0 z},\quad \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 e^{-i\beta_0 z}, \quad (16,4)$$

где β_0 — постоянная распространения невозмущенного волновода, а $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ — собственные функции этого волновода.

Возмущение будет заключаться во введении внутри волновода бесконечного цилиндра S_1 с параметрами $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ и осью, параллельной оси волновода. При этом поле в волноводе становится

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\mathcal{E}} e^{-i\beta z},\quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\mathcal{H}} e^{-i\beta z}, \quad (16,5)$$

где β — постоянная распространения возмущенного волновода, а $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ — его собственные функции.

Для вывода формулы, связывающей величины β и β_0 с параметрами среды и функциями $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, воспользуемся леммой (16,3). Подставляя в нее (16,4) и (16,5) и принимая во внимание, что в данном случае $\omega = \omega_0$, получим после несложных преобразований:

$$\operatorname{div}_\perp(\boldsymbol{\mathcal{E}}\times\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}_0^*\times\boldsymbol{\mathcal{H}}) - i(\beta-\beta_0)(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp\times\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0\perp}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{0\perp}^*\times\boldsymbol{\mathcal{H}}_\perp)z_0 + \frac{i\omega}{c}(\boldsymbol{\mathcal{H}}_n^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{\mathcal{H}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{E}}) = 0. \quad (16,6)$$

Здесь $\operatorname{div}_\perp$ — двумерная дивергенция в плоскости поперечного сечения волновода,

$$\left.\begin{aligned}\overleftrightarrow{\Delta\mu} &= \overleftrightarrow{\mu} - \mu_0\overleftrightarrow{I},\\ \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon} &= \overleftrightarrow{\varepsilon} - \varepsilon_0\overleftrightarrow{I},\end{aligned}\right\} \quad (16,7)$$

а индексом $\perp$ обозначены поперечные (перпендикулярные оси волновода) составляющие векторов.

Интегрируя (16,6) по сечению волновода, используя двумерную теорему Гаусса — Остроградского и принимая во внимание, что $\overleftrightarrow{\Delta\mu}$ и $\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}$ отличны от нуля только в области S_1 (рис. 36), получим после сокращения на $e^{-i(\beta-\beta_0)z}$:

$$\int_L(\boldsymbol{\mathcal{E}}\times\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}_0^*\times\boldsymbol{\mathcal{H}})\boldsymbol{n}_0\,dL - i(\beta-\beta_0)\int_{S_0}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_\perp\times\boldsymbol{\mathcal{H}}_{0\perp}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{0\perp}^*\times\boldsymbol{\mathcal{H}}_\perp)z_0\,dS + \frac{i\omega}{c}\int_{S_1}(\boldsymbol{\mathcal{H}}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{\mathcal{H}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{E}})\,dS = 0, \quad (16,8)$$

где n_0 — единичный вектор нормали к кривой L, лежащий в плоскости поперечного сечения волновода, а z_0 — единичный вектор в направлении оси волновода.

В силу граничных условий на стенках волновода, т. е. на кривой L,

$$\mathscr{E} \times n_0 = 0, \quad \mathscr{E}_0 \times n_0 = 0,$$

вследствие чего линейный интеграл в (16,8) обращается в нуль. Учитывая это, получим окончательно[1]):

$$\beta - \beta_0 = \frac{\omega}{c} \frac{\int\limits_{S_1} (\mathscr{H}_0^* \overleftrightarrow{\Delta\mu} \mathscr{H} + \mathscr{E}_0^* \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon} \mathscr{E})\, dS}{\int\limits_{S_0} (\mathscr{E}_\perp \times \mathscr{H}_{0\perp}^* + \mathscr{E}_{0\perp} \times \mathscr{H}_\perp^*)\, dS}. \qquad (16,9)$$

Перейдем теперь к рассмотрению волновода, заполненного в начальном состоянии средой с μ_0 и ε_0, возмущение которого заключается во введении в него гиротропной нерегулярности, т. е. некоторого тела конечных

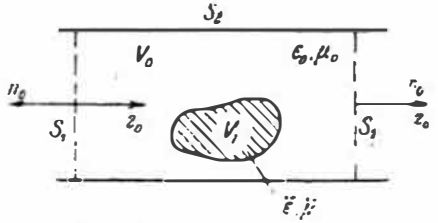


Рис. 37. Нерегулярное возмущение волновода.

размеров V_1 с параметрами $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ (рис. 37). Проинтегрируем выражение (16,2) по объему V_0, который ограничен боковой поверхностью волновода S_0 и двумя поперечными сечениями: $S_1(z=0)$ и $S_2(z=l)$, находящимися по разные стороны от объема V_1. Применяя теорему Гаусса — Остроградского и учитывая, что на S_1 внешняя нормаль n_0 противоположна вектору z_0, а на S_2 совпадает с ним, получим:

$$\int\limits_{S_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H})\, n_0\, dS - \int\limits_{S_1} (\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{H}_{0\perp} + \boldsymbol{E}_{0\perp} \times \boldsymbol{H}_\perp)\, z_0\, dS + \int\limits_{S_2} (\boldsymbol{E}_\perp \times \boldsymbol{H}_{0\perp} + \boldsymbol{E}_{0\perp} \times \boldsymbol{H}_\perp) z_0\, dS + \frac{i\omega}{c} \int\limits_{V_1} (\boldsymbol{H}_0 \overleftrightarrow{\Delta\mu} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}_0 \overleftrightarrow{\Delta\varepsilon} \boldsymbol{E})\, dV = 0, \qquad (16,10)$$

где величины $\overleftrightarrow{\Delta\mu}$ и $\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}$ определяются согласно (16,7), а индексом $\perp$, как и раньше, обозначены поперечные составляющие соответствующих векторов.

Предположим, что в волноводе (невозмущенном) может распространяться волна только одного типа, а сечения S_1 и S_2 находятся на таких больших расстояниях от V_1, что ближние поля, вызванные возмущением, имеют на S_1 и S_2 пренебрежимо малые амплитуды. Тогда возмущение приведет только к появлению отраженной волны в сечении S_1 и изменению комплексной амплитуды проходящей волны в сечении S_2. При этом в соответствии с основными свойствами волноводов [14] мы можем записать:

$$\text{в сечении } S_1 \begin{cases} \boldsymbol{E}_{0\perp} = \mathscr{E}_{0\perp}, & \boldsymbol{E}_\perp = \mathscr{E}_{0\perp}(1+\Gamma), \\ \boldsymbol{H}_{0\perp} = \dfrac{z_0 \times \mathscr{E}_{0\perp}}{\zeta_0}, & \boldsymbol{H}_\perp = \dfrac{z_0 \times \mathscr{E}_{0\perp}}{\zeta_0}(1-\Gamma), \end{cases} \qquad (16,11)$$

$$\text{в сечении } S_2 \begin{cases} \boldsymbol{E}_{0\perp} = \mathscr{E}_{0\perp} e^{-i\beta_0 l}, & \boldsymbol{E}_\perp = \mathscr{E}_{0\perp} D, \\ \boldsymbol{H}_{0\perp} = \dfrac{z_0 \times \mathscr{E}_{0\perp}}{\zeta_0} e^{-i\beta_0 l}, & \boldsymbol{H}_\perp = \dfrac{z_0 \times \mathscr{E}_{0\perp}}{\zeta_0} D, \end{cases} \qquad (16,12)$$

где $\mathscr{E}_{0\perp}$ — поперечная собственная функция невозмущенного волновода, β_0 и ζ_0 — постоянная распространения и волновое сопротивление невозмущенного волновода, Γ и D — коэффициенты отражения и прохождения, которые необходимо определить.

Интеграл по S_0 в выражении (16,10) равен нулю в силу граничных условий. Подставляя (16,11) и (16,12) в интегралы по S_1 и S_2 в этом выражении, мы замечаем,

[1]) Формула (16,9), а также формулы (16,15) и (16,17) были получены В. В. Никольским [223, 224, 277] несколько иным путем.

что члены с коэффициентом прохождения уничтожаются, а для коэффициента отражения получается следующая формула:

$$\Gamma = \frac{i\omega\zeta_0}{2cN_0}\int\limits_{V_1}(\boldsymbol{H}_0\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}_0\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{E})\,dV, \qquad (16,13)$$

где

$$N_0 = \int\limits_{S_0}|\mathscr{E}_{0\perp}|^2\,dS \qquad (16,14)$$

является константой нормировки собственных функций волновода.

Формула для коэффициента прохождения получается совершенно аналогичным путем, исходя из второй леммы возмущений (16,3):

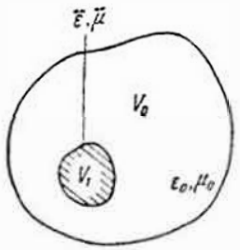


Рис. 38. Возмущение резонатора.

$$1 - De^{i\vartheta_0 l} = \frac{i\omega\zeta_0}{2cN_0}\int\limits_{V_1}(\boldsymbol{H}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{E})\,dV. \qquad (16,15)$$

Предположим теперь, что поле $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ в лемме (16,3) соответствует одному из типов собственных колебаний полого резонатора (рис. 38), заполненного средой с параметрами μ_0 и ε_0. Частота этого колебания пусть будет ω_0. Поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ соответствует одному из типов собственных колебаний того же резонатора, но возмущенного введением в него тела V_1 с параметрами $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Частота этого колебания ω и подлежит определению.

Интегрируя (16,3) по объему V_0 и применяя теорему Гаусса—Остроградского, получим:

$$\int\limits_{S_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0^* + \boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{H})\boldsymbol{n}_0\,dS + \frac{i}{c}\int\limits_{V_0}(\omega\boldsymbol{H}_0^*\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H} - \omega_0\mu_0\boldsymbol{H}_0^*\boldsymbol{H} + \omega\boldsymbol{E}_0^*\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E} - \omega_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{E})\,dV = 0. \qquad (16,16)$$

Поверхностный интеграл в этом выражении обратится

в нуль в силу граничных условий. Учитывая это и используя обозначения (16,7), придем к окончательной формуле:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega} = -\frac{\int\limits_{V_1}(\boldsymbol{H}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{E})\,dV}{\int\limits_{V_0}(\mu_0\boldsymbol{H}_0^*\boldsymbol{H} + \varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\boldsymbol{E})\,dV}. \qquad (16,17)$$

Для гиротропной среды $\overleftrightarrow{\Delta\mu}$ и $\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}$ являются тензорами следующего вида:

$$\overleftrightarrow{\Delta\mu} = \begin{vmatrix} \Delta\mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \Delta\mu & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\mu_\parallel \end{vmatrix}, \qquad (16,18)$$

$$\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon} = \begin{vmatrix} \Delta\varepsilon & i\varepsilon_a & 0 \\ -i\varepsilon_a & \Delta\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\varepsilon_\parallel \end{vmatrix}, \qquad (16,19)$$

где $\Delta\mu = \mu - \mu_0$, $\Delta\mu_\parallel = \mu_\parallel - \mu_0$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$ и $\Delta\varepsilon_\parallel = \varepsilon_\parallel - \varepsilon_0$. С учетом этого входящая в (16,15) и (16,17) величина $\boldsymbol{H}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{H}$ запишется для гиротропной среды следующим образом:

$$\boldsymbol{H}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{H} = \Delta\mu\,\boldsymbol{H}_{0\perp}^*\boldsymbol{H}_\perp + i\mu_a\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{H}_{0\perp}^*\times\boldsymbol{H}_\perp) + \Delta\mu_\parallel H_{z0}^* H_z. \qquad (16,20)$$

Аналогичным образом запишутся величина $\boldsymbol{E}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{E}$, а также величины $\mathscr{H}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\mu}\mathscr{H}$, $\mathscr{E}_0^*\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\mathscr{E}$, $\boldsymbol{H}_0\overleftrightarrow{\Delta\mu}\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}_0\overleftrightarrow{\Delta\varepsilon}\boldsymbol{E}$, входящие в (16,9) и (16,13).

Формулы (16,9), (16,13), (16,15) и (16,17), как и леммы (16,2) и (16,3), из которых они получены, являются строгими. Однако входящее в них возмущенное поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ неизвестно, и при практическом использовании этих формул приходится подставлять вместо него некоторые другие поля. Это делает результаты расчета по формулам возмущений приближенными. Заметим, прежде всего, что в знаменателях формул (16,9) и (16,17) можно заменить возмущенное поле известным невозмущенным, если $S_1 \ll S_0$ (для волновода) или $V_1 \ll V_0$ (для резонатора). Тогда эти

формулы запишутся следующим образом:

$$\beta - \beta_0 = \frac{\omega_0}{2cN_0} \int_{S_1} (\mathcal{H}_0^* \vec{\Delta\mu} \mathcal{H} + \mathcal{E}_0^* \vec{\Delta\varepsilon} \mathcal{E})\, dS, \quad (16,21)$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{1}{2W_0} \int_{V_1} (\boldsymbol{H}_0^* \vec{\Delta\mu} \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}_0^* \vec{\Delta\varepsilon} \boldsymbol{E})\, dV, \quad (16,22)$$

где N_0 определяется согласно (16,14), а

$$W_0 = \int_{V_0} \varepsilon_0 |E_0|^2 dV = \int_{V_0} \mu_0 |H_0|^2 dV \quad (16,23)$$

есть умноженная на 8π полная энергия невозмущенного полого резонатора.

В интегралах, находящихся в числителях формул (16,9), (16,13), (16,15) и (16,17), замена возмущенных полей на невозмущенные недопустима, так как эти поля могут очень сильно отличаться друг от друга.

§ 17. Квазистатическая аппроксимация внутреннего поля

Наиболее простой аппроксимацией возмущенного поля в формулах возмущений (§ 16) является квазистатическая аппроксимация. Она заключается в использовании решений статических задач о намагничивании и электризации гиротропных тел для установления связи между возмущенным и невозмущенным полями. Остановимся, прежде всего, на этих статических задачах.

В статическом случае электрическое и магнитное поля могут быть определены независимо в результате решения соответственно электростатической и магнитостатической задач. Эти задачи могут быть строго решены для случаев бесконечной плоской пластины, бесконечного круглого цилиндра и эллипсоида, находящихся в однородных внешних полях. Электростатическая и магнитостатическая задачи оказываются при этом совершенно аналогичными.

Остановимся, например, на магнитостатической задаче[1]). Рассмотрим эллипсоид с тензорной магнитной проницаемостью $\vec{\mu}$, находящийся в однородном (при отсутствии эллипсоида) постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$ в среде со скалярной магнитной проницаемостью μ_0. Задача заключается в определении поля внутри эллипсоида.

[1]) Эта задача уже рассматривалась в § 5. Здесь в отличие от § 5 внимание будет уделено определению внутреннего поля.

Как следует из уравнений и граничных условий магнитостатики, результат решения этой задачи не изменится, если проницаемости обеих сред разделить на одинаковую величину, например на μ_0. Используя это, перейдем к задаче о намагничивании эллипсоида с тензорной проницаемостью $\frac{\vec{\mu}}{\mu_0}$, находящегося в немагнитной среде (с $\mu = 1$) в таком же внешнем поле $\boldsymbol{H}_0$.

Для случая скалярной проницаемости эллипсоида решение этой последней задачи хорошо известно (см., например, [12]). Основным его результатом является то, что внутреннее поле в эллипсоиде однородно и связано с внешним полем и намагниченностью $\boldsymbol{M}$ соотношением (5,1).

Входящий в это соотношение тензор $\vec{N}$ есть симметричный тензор размагничивающих факторов. Его главными осями служат оси эллипсоида. В координатных осях, совпадающих с этими осями, тензор $\vec{N}$ является диагональным, его компоненты N_x, N_y и N_z, как уже указывалось в § 5, носят название размагничивающих факторов эллипсоида. В выражения для этих размагничивающих факторов [12] проницаемость эллипсоида не входит. Эти выражения, так же как соотношения (5,1), остаются в силе и в том случае, когда проницаемость эллипсоида является тензорной величиной. Связь между внутренним полем и намагниченностью определяется в рассматриваемом случае очевидным выражением

$$\boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M} = \frac{\vec{\mu}}{\mu_0} \boldsymbol{H}. \quad (17,1)$$

Исключая $\boldsymbol{M}$ из (5,1) и (17,1), получим искомое соотношение между внутренним полем $\boldsymbol{H}$ и невозмущенным внешним полем $\boldsymbol{H}_0$:

$$\boldsymbol{H} = \vec{s} \boldsymbol{H}_0, \quad (17,2)$$

причем тензор $\overleftrightarrow{s}$ выражается следующим образом:

$$\overleftrightarrow{s}=\left(\overleftrightarrow{I}+\frac{1}{4\pi\mu_0}\overleftrightarrow{N}\overleftrightarrow{\Delta\mu}\right)^{-1}. \qquad (17,3)$$

где $\overleftrightarrow{I}$ — единичный тензор, а $\overleftrightarrow{\Delta\mu}$ определяется выражением (16,7).

Рассмотрим теперь случай гиротропной среды, для которой тензор $\overleftrightarrow{\Delta\mu}$ записывается согласно (16,18). Предположим, что направление постоянного намагничивания, ось z, совпадают с одной из осей эллипсоида. Две другие оси мы можем совместить с осями эллипсоида без дальнейшего ограничения общности. В этих осях тензор $\overleftrightarrow{N}$ будет диагональным с компонентами N_x, N_y, N_z. Тогда нетрудно показать, исходя из (17,3) и пользуясь правилами тензорной алгебры [2], что компоненты тензора

$$\overleftrightarrow{s}=\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{vmatrix}$$

будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} &s_{11}=\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{N_y}{4\pi}\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\right), \quad s_{22}=\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{N_x}{4\pi}\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\right),\\ &s_{12}=-\frac{i\mu_a N_x}{4\pi\xi\mu_0}, \qquad\quad s_{21}=\frac{i\mu_a N_y}{4\pi\xi\mu_0},\\ &s_{33}=\left(1+\frac{N_z}{4\pi}\frac{\Delta\mu_\parallel}{\mu_0}\right)^{-1}, \quad s_{13}=s_{23}=s_{31}=s_{32}=0,\end{aligned}\right| \qquad (17,4)$$

где

$$\xi=\left(1+\frac{N_x}{4\pi}\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\right)\left(1+\frac{N_y}{4\pi}\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\right)-\frac{N_xN_y\mu_a^2}{16\pi^2\mu_0^2}.$$

Рассмотрим теперь предельные случаи. Если эллипсоид превращается в тонкий диск, намагниченный в его плоскости (рис. 9, *а*), то $N_x=N_z=0$, $N_y=4\pi$ и из (17,4) следует:

$$s_{11}=s_{33}=1, \quad s_{22}=\frac{\mu_0}{\mu}, \quad s_{12}=0, \quad s_{21}=\frac{i\mu_a}{\mu}.$$

С учетом этого, проектируя (17,2) на оси координат, получаем:

$$H_x=H_{0x}, \quad H_y=\frac{i\mu_a}{\mu}H_{0x}+\frac{\mu_0}{\mu}H_{0y}, \quad H_z=H_{0z}. \qquad (17,5)$$

Для диска, намагниченного перпендикулярно его плоскости (рис. 9, *б*), когда $N_x=N_y=0$, а $N_z=4\pi$, таким же образом получим:

$$H_x=H_{0x}, \quad H_y=H_{0y}, \quad H_z=\frac{\mu_0}{\mu_\parallel}H_{0z} \qquad (17,6)$$

или

$$\boldsymbol{H}_\perp=\boldsymbol{H}_{0\perp}, \quad \boldsymbol{H}_z=\frac{\mu_0}{\mu_\parallel}\boldsymbol{H}_{0z} \qquad (17,6а)$$

где $\boldsymbol{H}_\perp=\boldsymbol{x}_0H_x+\boldsymbol{y}_0H_y$, $\boldsymbol{H}_z=\boldsymbol{z}_0H_z$, а $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ и $\boldsymbol{z}_0$ — единичные векторы в направлении соответствующих осей.

Заметим, что соотношения (17,5) и (17,6) могут быть получены независимо для бесконечной плоско-параллельной пластины. Приближенно они справедливы для пластины любой формы, толщина которой мала по сравнению с остальными размерами.

Для другого предельного случая — тонкого цилиндра, намагниченного вдоль его оси (рис. 9, *в*), $N_x=N_y=2\pi$, $N_z=0$ и из (17,4) следует:

$$s_{11}=s_{22}=\frac{2\mu_0(\mu+\mu_0)}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2},$$

$$s_{21}=-s_{12}=\frac{2i\mu_0\mu_a}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}, \quad s_{33}=1.$$

Подставляя эти выражения в проекции (17,2), приходим к соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_\perp&=\frac{2\mu_0(\mu+\mu_0)}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}\boldsymbol{H}_{0\perp}+\frac{2i\mu_0\mu_a}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{H}_{0\perp},\\ H_z&=H_{0z}.\end{aligned}\right\} \qquad (17,7)$$

Для тонкого цилиндра, намагниченного перпендикулярно его оси (рис. 10, *г*), $N_x=N_z=2\pi$, $N_y=0$, при этом из (17,2) и (17,4) получаем:

$$\left.\begin{aligned} H_x&=\frac{2\mu_0}{\mu+\mu_0}H_{0x}-\frac{i\mu_a}{\mu+\mu_0}H_{0y},\\ H_y&=H_{0y},\\ H_z&=\frac{2\mu_0}{\mu_\parallel+\mu_0}H_{0z}.\end{aligned}\right\} \qquad (17,8)$$

Выражения (17,7) и (17,8) также могут быть получены независимо [216] в результате рассмотрения задачи о намагничивании бесконечного цилиндра. Эти выражения приближенно справедливы для цилиндра конечной длины, если эта длина будет много больше диаметра цилиндра.

Для сферы $N_x = N_y = N_z = \frac{4\pi}{3}$, и таким же образом, как в предыдущих случаях, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}_\perp &= \frac{3\mu_0(\mu+2\mu_0)}{(\mu+2\mu_0)^2-\mu_a^2}\boldsymbol{H}_{0\perp} + \frac{3i\mu_0\mu_a}{(\mu+2\mu_0)^2-\mu_a^2}\boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{H}_{0\perp}, \\ H_z &= \frac{3\mu_0}{\mu+2\mu_0}H_{0z}. \end{aligned}\right\} \quad (17,9)$$

Если магнитная проницаемость эллипсоида является скалярной величиной, то во всех приведенных выше выражениях достаточно принять $\mu_a = 0$ и $\mu_\parallel = \mu$.

Как уже указывалось, задача об электризации эллипсоида в однородном электрическом поле совершенно аналогична рассмотренной магнитостатической задаче. Соотношения, связывающие внутреннее и невозмущенное внешнее электрические поля, получаются из приведенных выше выражений, если заменить в них составляющие магнитного поля составляющими электрического, а компоненты тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ — соответствующими компонентами тензора $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Для ферритов представляет интерес случай скалярной электрической проницаемости. В этом случае выражения для внутреннего поля получатся из приведенных выше соотношений, если заменить в них μ и $\mu_\parallel$ на ε, а μ_a положить равным нулю.

Например, для пластины, поляризованной касательно к ее плоскости,

$$E_x = E_{0x}, \quad E_y = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}E_{0y}, \quad E_z = E_{0z}. \quad (17,10)$$

Для цилиндра, поляризованного вдоль его оси,

$$\boldsymbol{E}_\perp = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_{0\perp}, \quad E_z = E_{0z}. \quad (17,11)$$

Для сферы

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0. \quad (17,12)$$

Рассмотрим теперь условия применимости квазистатической аппроксимации, т. е. условия, при которых приведенные выше выражения могут быть использованы в качестве соотношений между возмущенным и невозмущенным переменными полями.

Для того чтобы эти выражения были применимы в случае переменных полей, должно соблюдаться основное предположение, сделанное при их выводе,—предположение об однородности невозмущенного поля в непосредственной близости от образца. Отсюда ясно, что необходимым условием применимости рассмотренного метода аппроксимации является малость размеров эллипсоида, толщины пластины или радиуса цилиндра по сравнению с длиной электромагнитной волны в среде с параметрами данного образца. Для феррита, когда ε скалярно, а $|\mu_a|$ и $|\mu_\parallel|$ меньше или по крайней мере одного порядка с $|\mu|$, в качестве критерия справедливости квазистатического приближения можно принять, например, следующее условие:

$$\frac{\omega}{c}\sqrt{|\varepsilon||\mu|}\,h < \frac{\pi}{6}, \quad (17,13)$$

где h—размер эллипсоида, толщина пластины или радиус цилиндра.

При использовании формулы (17,13) следует иметь в виду, что величина $|\mu|$, достигающая в материалах с узкой резонансной кривой очень больших значений вблизи резонанса компонентов внутреннего тензора восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}^i$, будет порядка единицы в области резонанса компонентов внешнего тензора $\overleftrightarrow{\chi}^e$ (кроме случая поперечно намагниченного диска, где эти резонансы совпадают).

Заметим, что размеры пластины (кроме толщины) и длина цилиндра не должны быть малыми; наоборот, чем больше они будут по сравнению с h, тем лучше будут соблюдаться формулы (17,5)—(17,8), которые строго справедливы для бесконечных (или бесконечно тонких) пластины и цилиндра. При этом, конечно, внутреннее переменное поле будет приблизительно однородно только по толщине пластины или в поперечном сечении цилиндра.

В плоскости пластины и по длине цилиндра это поле будет изменяться по такому же закону, как и невозмущенное поле, и связывающие их формулы (17,5)—(17,8) останутся справедливыми.

Условие малости размеров образца по сравнению с длиной волны в среде не является, однако, достаточным. Если образец помещен вблизи узловых поверхностей переменного поля, это поле будет в области даже малого образца существенно неоднородным. Квазистатическая аппроксимация при этом неприменима. В этом случае будут возбуждаться неоднородные типы прецессии намагниченности, рассмотренные в § 6. Если условие ферромагнитного резонанса (равенство частоты переменного поля собственной частоте прецессии) выполняется для одного из таких неоднородных типов, то он может интенсивно возбуждаться даже при небольшой неоднородности невозмущенного поля. Рассмотренный метод аппроксимации, предполагающий однородность как невозмущенного поля, так и намагниченности, будет при этом неприменим. Таким образом, в качестве второго условия применимости этого метода может быть принято отсутствие неоднородных типов прецессии.

ГЛАВА 7

ОДНОРОДНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

§ 18. Однородные плоские волны в неограниченной гиротропной среде

Переходя к рассмотрению задач макроскопической электродинамики для сред с тензорными параметрами, остановимся прежде всего на наиболее простой задаче о распространении однородной плоской волны в неограниченной среде. Эта задача представляет интерес не только как простейший пример использования общих уравнений «тензорной» электродинамики, но и как простейшая модель более сложных, волноводных систем, которые имеют уже непосредственное практическое значение.

Итак, рассмотрим неограниченную гиротропную среду, параметры которой $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ будут иметь вид (13,1) и (13,3). При этом предполагается, что постоянное магнитное поле и постоянная намагниченность, которыми обусловлен гиротропный характер среды, направлены по оси z—третьей оси в выражениях (13,1) и (13,3).

Наша задача будет в первую очередь заключаться в определении постоянной распространения β однородной плоской волны в такой среде в зависимости от угла между направлением распространения и осью z, т. е. направлением постоянного намагничивания. Не ограничивая общности, можно оси координат направить таким образом, чтобы направление распространения лежало в плоскости yz (рис. 39). Тогда единичный вектор в направлении распространения запишется:

$$n_0 = y_0 \sin\theta + z_0 \cos\theta, \qquad (18,1)$$

где y_0 и z_0 — единичные векторы в направлениях осей y

и z, а θ — угол между направлением распространения и осью z.

Комплексные амплитуды поля плоской волны, распространяющейся в направлении вектора $\boldsymbol{n}_0$, запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 e^{-ik\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{r}},\\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_0 e^{-ik\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{r}},\end{aligned}\right\} \qquad (18,2)$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор ($\boldsymbol{r} = x_0 x + y_0 y + z_0 z$).

В нашем случае однородной плоской волны векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ являются постоянными и могут быть названы комплексными амплитудами волны. Заметим, что в случае неоднородных плоских волн, например волн в волноводах, эти векторы зависели бы от координат в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{n}_0$.

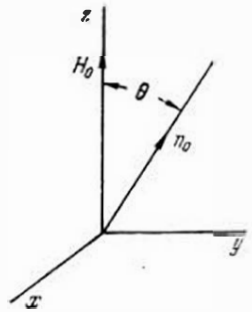


Рис. 39. Оси координат для плоской волны в среде с тензорными параметрами.

Подставляя выражения (18,2) в уравнения Максвелла (12,15) и (12,17) при $\boldsymbol{j}_{ст} = 0$ и учитывая, что векторы $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ являются постоянными, получим для этих векторов следующие уравнения:

$$\xi \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{E}_0 + \overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}_0 = 0, \qquad (18,3)$$

$$\xi \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{H}_0 - \overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0 = 0, \qquad (18,4)$$

где $\xi = \frac{\beta c}{\omega}$ — относительная постоянная распространения, которая и подлежит определению.

Спроектируем уравнения (18,3) и (18,4) на оси координат. Опуская индексы «0» у составляющих векторов, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\xi \sin\theta\, E_z - \xi\cos\theta\, E_y + \mu H_x + i\mu_a H_y &= 0,\\
\xi\cos\theta\, E_x - i\mu_a H_x + \mu H_y &= 0,\\
\xi\sin\theta\, E_x - \mu_\parallel H_z &= 0,\\
\xi\sin\theta\, H_x - \xi\cos\theta\, H_y - \varepsilon E_x - i\varepsilon_a E_y &= 0,\\
\xi\cos\theta\, H_x + i\varepsilon_a E_x - \varepsilon E_y &= 0,\\
\xi\sin\theta\, H_x + \varepsilon_\parallel E_z &= 0.
\end{aligned}\right| \qquad (18,5)$$

Условие обращения в нуль определителя однородной системы линейных уравнений (18,5) и явится уравнением для ξ. Как нетрудно убедиться, это условие запишется:

$$\xi^4\left(\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu_\parallel}+\frac{\cos^2\theta}{\mu}\right) -$$
$$-\xi^2\left[\sin^2\theta\left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}+\frac{\mu_\perp}{\mu_\parallel}\right)+2\cos^2\theta\left(1+\frac{\mu_a\varepsilon_a}{\mu\varepsilon}\right)\right]+$$
$$+\mu_\perp\varepsilon_\perp = 0, \qquad (18,6)$$

где использованы введенные в § 13 обозначения:

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon - \frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon}; \quad \mu_\perp = \mu - \frac{\mu_a^2}{\mu}.$$

Квадратное относительно ξ^2 уравнение (18,6) имеет два решения. Таким образом, в среде с тензорными параметрами в каждом направлении могут распространяться две однородные плоские волны с различными постоянными распространениями.

Подставляя найденные значения ξ в систему (18,5), можно для каждой из двух волн получить соотношения между составляющими поля, которые определяют характер поляризации этой волны. Очевидно, что эти соотношения будут различными для двух волн, которые возможны для каждого направления распространения.

Как известно из оптики, в монокристаллах диэлектриков, т. е. в средах с симметричным тензором $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, также имеют место две волны с различной поляризацией для каждого направления распространения. Рассмотренный нами случай является более общим в том отношении, что как $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, так и $\overleftrightarrow{\mu}$ являются тензорами, тензоры эти — комплексные и имеют антисимметричные компоненты. Однако, исключая из рассмотрения монокристаллы, мы приняли, что тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ имеют специальный вид (13,1) и (13,3). Приведенный вывод постоянной распространения может быть обобщен на случай более общего вида тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Заключение о наличии для каждого направления распространения двух волн с различной поляризацией и различными постоянными распространения будет справедливо и в этом случае.

Для поликристаллического феррита $\overleftrightarrow{\mu}$ выражается согласно (13,1), а ε является скалярной величиной ($\varepsilon_{\parallel}=\varepsilon$; $\varepsilon_a=0$). В этом случае решение уравнения (18,6) запишется следующим образом[1]):

$$\xi^2=\varepsilon\frac{2+\sin^2\theta\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_\parallel}-1\right)\pm\sqrt{\sin^4\theta\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_\parallel}-1\right)^2+4\cos^2\theta\frac{\mu_a^2}{\mu^2}}}{2\left(\frac{\sin^2\theta}{\mu_\parallel}+\frac{\cos^2\theta}{\mu}\right)}. \tag{18,7}$$

Существенно отметить, что для произвольного направления распространения и произвольных параметров среды решение уравнения (18,6) не может быть представлено в виде

$$\xi^2=\varepsilon_{эф}\mu_{эф}, \tag{18,8}$$

где $\varepsilon_{эф}$ зависело бы только от компонентов тензора $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, а $\mu_{эф}$ — только от компонентов тензора $\overleftrightarrow{\mu}$. Если же одна из величин, μ или ε, является скалярной, то, как видно, например, из (18,7), такое представление возможно. Как будет показано в § 19 и 21, оно возможно и для произвольных параметров среды, но определенных значений угла θ, а именно, $\theta=0$ и $\theta=90°$.

Если запись (18,8) возможна, то для вычисления вещественной и мнимой частей постоянной распространения

$$\beta=\beta'-i\beta''=\frac{\omega}{c}\sqrt{\xi^2}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{эф}\mu_{эф}}$$

могут быть использованы полученные еще В. К. Аркадьевым [211] формулы

$$\beta'=\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\varepsilon_{эф}||\mu_{эф}|+\varepsilon'_{эф}\mu'_{эф}-\varepsilon''_{эф}\mu''_{эф}}. \tag{18,9}$$

$$\beta''=\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\varepsilon_{эф}||\mu_{эф}|-\varepsilon'_{эф}\mu'_{эф}+\varepsilon''_{эф}\mu''_{эф}}. \tag{18,10}$$

[1]) Для частного случая $\mu_\parallel=1$, т. е. для среды, намагниченной до насыщения, эта формула была получена Полдером [75].

§ 19. Плоские волны в продольно намагниченной среде. Эффект Фарадея

Остановимся подробно на представляющем большой практический интерес частном случае, когда $\theta=0$, т. е. направление распространения волн совпадает с направлением постоянного намагничивания. Этот случай мы будем называть случаем продольного намагничивания.

При $\theta=0$ решения уравнения (18,6) запишутся:

$$\xi^2=(\varepsilon\pm\varepsilon_a)(\mu\pm\mu_a), \tag{19,1}$$

где верхние знаки в обеих скобках соответствуют одной волне, а нижние — другой. Подставляя (19,1) и $\theta=0$ в систему (18,5), получим:

$$E_z=H_z=0, \tag{19,2}$$

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{H_y}{H_x}=\mp i, \tag{19,3}$$

$$\frac{E_x}{H_x}=\frac{E_y}{H_y}=\pm i\sqrt{\frac{\mu\pm\mu_a}{\varepsilon\pm\varepsilon_a}}. \tag{19,4}$$

При этом верхние знаки в (19,3) и (19,4) соответствуют верхним знакам в (19,1), а нижние — нижним.

Из (19,2) и (19,3) следует, что в рассматриваемом частном случае волны являются поперечными и имеют круговую поляризацию. Для волны, которой соответствуют верхние знаки в (19,1), (19,3) и (19,4), направление вращения векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ будет правым, а для волны, которой соответствуют нижние знаки в этих выражениях, — левым. Мы будем в дальнейшем первую волну называть правой волной, а вторую — левой и обозначать все относящиеся к этим волнам величины соответственно индексами «п» и «л».

Таким образом, постоянная распространения в случае продольного намагничивания запишется:

$$\beta_{п,\,л}=k_0\sqrt{(\mu\pm\mu_a)(\varepsilon\pm\varepsilon_a)}, \tag{19,5}$$

где $k_0=\frac{\omega}{c}$.

Величина

$$\zeta_{п,\,л}=\pm i\sqrt{\frac{\mu\pm\mu_a}{\varepsilon\pm\varepsilon_a}} \tag{19,6}$$

может быть названа волновым сопротивлением продольно намагниченной среды для правой и левой волн с круговой поляризацией.

Из выражений (19,5) и (19,6) следует, что для волн с круговой поляризацией, распространяющихся в продольно намагниченной гиротропной среде, могут быть введены эффективные скалярные параметры среды:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{п,\,л} &= \varepsilon \pm \varepsilon_a, \\ \mu_{п,\,л} &= \mu \pm \mu_a. \end{aligned}\right\} \qquad (19,7)$$

Заметим, что это находится в соответствии с результатом, полученным в § 1 для поперечного поля с круговой поляризацией (выражение (1.41)).

При рассмотрении поперечных волн, в частности, волн в продольно намагниченной среде, очень удобно использовать метод «двух комплексных плоскостей». Сущность этого метода заключается в том, что вместо векторов поля, которые лежат в поперечной (перпендикулярной направлению распространения) плоскости xy, вводятся комплексные числа. Их вещественные части являются проекциями соответствующих векторов, например на ось x, а мнимые — на ось y. Эта «пространственная» комплексная плоскость рассматривается независимо от «временной» комплексной плоскости, введенной в связи с использованием комплексных амплитуд. Мнимую единицу в пространственной плоскости будем обозначать j в отличие от мнимой единицы во временной плоскости i.

Рассмотрим поперечное поле с линейной поляризацией, составляющее с осью x угол α. В векторной форме это поле записывается:

$$\boldsymbol{E}_1 = E_1(\boldsymbol{x}_0 \cos\alpha + \boldsymbol{y}_0 \sin\alpha).$$

Согласно методу двух комплексных плоскостей оно будет представлено следующим образом:

$$\dot{E}_1 = E_1(\cos\alpha + j\sin\alpha) = E_1 e^{j\alpha},$$

где $E_1 = |E_1| e^{i\varphi_1}$ — комплексная амплитуда этого поля.

Поле с круговой поляризацией

$$\boldsymbol{E}_{п,\,л} = E_{п,\,л}(\boldsymbol{x}_0 \mp i\boldsymbol{y}_0)$$

согласно этому методу запишется следующим образом:

$$\dot{E}_{п,\,л} = E_{п,\,л}(1 \mp ij),$$

где $E_{п,\,л} = |E_{п,\,л}| e^{i\varphi_{п,\,л}}$ — комплексная амплитуда поля с круговой поляризацией. Заметим, что введенное выше волновое сопротивление $\zeta_{п,\,л}$ может быть также определено как отношение комплексных амплитуд электрического и магнитного полей с круговой поляризацией.

Произвольно (эллиптически) поляризованное поперечное поле является суммой двух полей с круговой поляризацией с различными направлениями вращения:

$$\dot{E} = |E_п| e^{i\varphi_п}(1 - ij) + |E_л| e^{i\varphi_л}(1 + ij). \qquad (19,8)$$

Пользуясь методом двух комплексных плоскостей, мы получим сейчас некоторые важные для дальнейшего соотношения, характеризующие это поле.

Выражение (19,8) можно привести к виду

$$\dot{E} = 2|E_п| e^{j\frac{\varphi_п - \varphi_л}{2}} e^{i\frac{\varphi_п + \varphi_л}{2}} + (|E_л| - |E_п|)(1 + ij) e^{i\varphi_л} \qquad (19,8а)$$

или к виду

$$\dot{E} = 2|E_л| e^{j\frac{\varphi_п - \varphi_л}{2}} e^{i\frac{\varphi_п + \varphi_л}{2}} + (|E_п| - |E_л|)(1 - ij) e^{i\varphi_п}. \qquad (19,8б)$$

Первые члены в (19,8а) и (19,8б) представляют собой поля с линейной, а вторые — с круговой поляризацией. В частном случае, когда $|E_п| = |E_л|$, вторые члены обращаются в нуль. Мы получаем тогда, что сумма двух полей с круговой поляризацией и противоположными направлениями вращения с равными амплитудами и произвольными фазами $\varphi_п$ и $\varphi_л$ дает линейно поляризованное поле, составляющее с осью x угол

$$\vartheta = \frac{\varphi_п - \varphi_л}{2}. \qquad (19,9)$$

Выражение (19,8) может быть также преобразовано к виду

$$\dot{E} = [(|E_п| + |E_л|) e^{j\vartheta} + ij(|E_п| - |E_л|) e^{i\vartheta}] e^{i\frac{\varphi_п + \varphi_л}{2}}, \qquad (19,8в)$$

где ϑ по-прежнему определяется выражением (19,9). Отсюда видно, что рассматриваемое произвольным образом поляризованное поле может быть представлено в виде суммы двух линейно поляризованных полей, повернутых друг относительно друга в пространстве на 90° и сдвинутых по фазе во времени также на 90°. Амплитуды этих двух полей соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} |E_+| &= |E_п| + |E_л|, \\ |E_-| &= |E_п| - |E_л|. \end{aligned}\right\} \qquad (19,10)$$

Переходя от (19,8в) к выражениям для мгновенных значений составляющих $\boldsymbol{E}$ по осям x и y, мы получим, как легко убедиться, параметрическое уравнение эллипса с полуосями $|E_+|$ и $|E_-|$. Таким образом, рассматриваемое поле действительно будет эллиптически поляризованным. Угол ϑ между большой полуосью эллипса поляризации и осью x, который определяется выражением (19,9), мы будем называть углом поляризации поля. Величину

$$\mathcal{Э} = 20 \lg_{10} \frac{|E_+|}{|E_-|} = 20 \lg_{10} \frac{|E_п| + |E_л|}{|E_п| - |E_л|} \qquad (19,11)$$

назовем эллиптичностью поля.

Волна в продольно намагниченной гиротропной среде является в общем случае суммой правой и левой поперечных волн с круговой поляризацией и имеет, таким образом, эллиптическую поляризацию. Угол поляризации и эллиптичность такой волны будут изменяться по мере ее распространения, так как две волны с круговой поляризацией будут иметь различные постоянные распространения в гиротропной среде. Рассмотрим это изменение, используя полученные выше общие соотношения.

Пока мы имеем дело с неограниченной средой, мы можем рассматривать независимо волны, распространяющиеся в различных направлениях. Поэтому ограничимся волной, распространяющейся в положительном направлении оси z. Пусть при $z=0$ комплексные амплитуды нормальных волн с круговой поляризацией в рассматриваемой эллиптически поляризованной волне составляют:

$$E_{п0} = |E_{п0}| e^{i\varphi_{п0}}, \quad E_{л0} = |E_{л0}| e^{i\varphi_{л0}}.$$

Постоянные распространения для этих волн запишутся соответственно:

$$\beta_п = k_0 \sqrt{(\mu + \mu_a)(\varepsilon + \varepsilon_a)} = \beta'_п - i\beta''_п,$$
$$\beta_л = k_0 \sqrt{(\mu - \mu_a)(\varepsilon - \varepsilon_a)} = \beta'_л - i\beta''_л.$$

При $z=l$ комплексные амплитуды нормальных волн будут следующими:

$$\left.\begin{aligned} E_п &= |E_{п0}| e^{-\beta''_п l} e^{i(\varphi_{п0} - \beta'_п l)}, \\ E_л &= |E_{л0}| e^{-\beta''_л l} e^{i(\varphi_{л0} - \beta'_л l)}, \end{aligned}\right\} \qquad (19,12)$$

Используя (19,9), получим, что угол поляризации при $z=l$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta, \qquad (19,13)$$

где начальный угол (при $z=0$)

$$\vartheta_0 = \frac{\varphi_{п0} - \varphi_{л0}}{2},$$

а угол поворота поляризации

$$\Delta\vartheta = \frac{\beta'_л - \beta'_п}{2} l. \qquad (19,14)$$

Эллиптичность при $z=l$ согласно (19,11) выразится следующим образом:

$$\mathcal{Э} = 20 \lg_{10} \operatorname{cth}\left(\frac{\psi_п - \psi_л}{2} - \frac{\beta''_п - \beta''_л}{2} l\right), \qquad (19,15)$$

где углы $\psi_п$ и $\psi_л$ определяются выражениями

$$|E_{п0}| = e^{\psi_п}, \quad |E_{л0}| = e^{\psi_л}.$$

Нужно подчеркнуть, что направление вращения (правое или левое) волн с круговой поляризацией определяется относительно оси z, которая всегда совмещается с направлением постоянного намагничивания, независимо от того, в каком направлении происходит распространение волны. Для волны, распространяющейся от плоскости $z=0$ в отрицательном направлении оси z, при $z=-l$ будут справедливы те же выражения (19,12), что и для волны, распространяющейся в положительном направлении,

при $z=l$. Поэтому угол поворота поляризации и изменение эллиптичности на некотором отрезке l не зависят от направления распространения волны. Например, при прохождении волной отрезка l в прямом и обратном направлениях угол поворота поляризации удвоится. Если же угол поворота поляризации отсчитывать относительно направления распространения, то он (при неизменном направлении постоянного намагничивания) изменит свой знак при изменении направления распространения. Эти свойства поворота поляризации в продольно намагниченной гиротропной среде являются следствием невзаимности этой среды, т. е. наличия антисимметричных компонентов тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, знак которых определяется направлением постоянного намагничивания и, конечно, не зависит от направления распространения волны.

Большой интерес представляет частный случай, когда при $z=0$ волна является линейно поляризованной, т. е. когда $|\boldsymbol{E}_{\text{п}0}| = |\boldsymbol{E}_{\text{л}0}|$. В этом случае при $z=l$

$$\Theta = 20 \lg_{10} \operatorname{cth} \frac{\beta''_{\text{л}} - \beta''_{\text{п}}}{2} l. \qquad (19,16)$$

Для угла поворота при этом остается в силе общая формула (19,14).

Итак, распространение эллиптически поляризованных волн в продольно намагниченной гиротропной среде происходит с преобразованием поляризации волны. Только волны с круговой поляризацией распространяются в такой среде, не изменяя своей поляризации. Поэтому именно эти волны были получены в случае продольного намагничивания в результате решения уравнений Максвелла при условии неизменной поляризации (т. е. постоянства векторов $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ в выражениях (18,2)). Эти волны и являются нормальными волнами для данной задачи.

Выше мы рассматривали эллиптически поляризованную волну как сумму двух волн с круговой поляризацией или двух линейно поляризованных по большой и малой осям эллипса поляризации. Но очевидно, что, разделив при каждом z вещественную и мнимую части (в пространственной плоскости) выражения (19,8), мы получим разложение эллиптически поляризованной волны на две волны, линейно поляризованные по фиксированным осям x и y. Однако принципиальное отличие этого разложения от разложения на две волны с круговой поляризацией заключается в том, что линейно поляризованные волны в случае гиротропной среды являются «связанными». По мере их распространения происходит передача энергии от одной волны к другой вследствие поворота поляризации суммарной волны. Очевидно, что для среды со скалярными параметрами связь между этими волнами отсутствует, и они, так же как и волны с круговой поляризацией, являются нормальными волнами в такой среде.

В заключение этого параграфа рассмотрим распространение электромагнитных волн в продольно намагниченном феррите с учетом результатов, полученных в первой части. Для $\mu_{\text{п}}$ и $\mu_{\text{л}}$ в области постоянных магнитных полей, достаточных для насыщения, примем расчетные значения, полученные в § 4 (рис. 7). При малых постоянных магнитных полях для μ и μ_a примем экспериментальные зависимости, типичные для применяемых в диапазоне с. в. ч. ферритов. Эти зависимости показаны на рис. 28.

Вещественная и мнимая части постоянной распространения для правой и левой волн с круговой поляризацией определяются в этом случае из выражения

$$\beta'_{\text{п, л}} - i\beta''_{\text{п, л}} = k_0 \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\mu \pm \mu_a}. \qquad (19,17)$$

При этом могут быть использованы формулы Аркадьева (18,9) и (18,10). Угол поворота поляризации и эллиптичность определятся затем с помощью выражений (19,14) и (19,16).

На рис. 40 приведены полученные таким образом величины $\beta'_{\text{п}}$, $\beta''_{\text{п}}$, $\beta'_{\text{л}}$ и $\beta''_{\text{л}}$, а также угол поворота поляризации на единицу длины

$$\Delta\vartheta_1 = \frac{\beta'_{\text{л}} - \beta'_{\text{п}}}{2} \qquad (19,18)$$

и эллиптичность

$$\Theta_1 = 20 \lg_{10} \operatorname{cth} \frac{\beta''_{\text{л}} - \beta''_{\text{п}}}{2}. \qquad (19,19)$$

Такую эллиптичность имеет в конце пути, равного единице длины, волна, линейно поляризованная в начале.

При вычислении приведенных на рис. 40 величин электрическая проницаемость ε была принята вещественной.

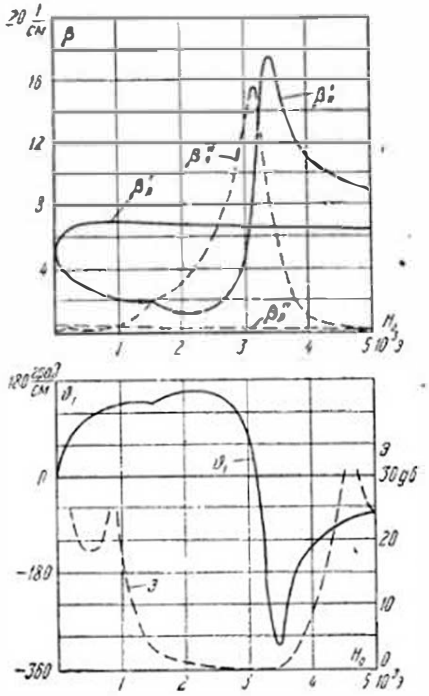


Рис. 40. Вещественные и мнимые части постоянных распространения правой и левой волны, угол поворота поляризации на единицу длины ϑ_1 и эллиптичность ϑ_1 в зависимости от H_0.

При $H_0>1000$ э принимались значения $\mu_{\text{п}}$ и $\mu_{\text{л}}$, рассчитанные по формулам (4.22) при $M_0=160$ гс, $\omega_r=3\cdot10^9$ и $\omega=2\pi\cdot9375$ Мгц. При $H_0<1000$ э расчет проводился на основании экспериментальных зависимостей, показанных на рис. 28. При расчете было принято $\varepsilon=9$.

Как следует из графиков рис. 40, в области ферромагнитного резонанса (т. е. при $|\omega-\omega_0|\ll\omega_0$) изменение всех параметров правой волны носит резонансный характер. В частности, в этой области имеет место интенсивный максимум поглощения этой волны, а угол поворота поляризации изменяет знак. Изменение параметров левой волны не является резонансным.

Остановимся на частном случае полей H_0, малых по сравнению с резонансным полем $H_{\text{рез}}=\frac{\omega}{\gamma}$, однако достаточно больших, чтобы материал можно было считать насыщенным и использовать результаты теории, рассмотренной в главе 1. Очевидно, что этот случай может иметь место лишь при достаточно больших $H_{\text{рез}}$, т. е. в коротковолновой части диапазона с. в. ч. Учитывая, что $\omega_0\ll\omega$ и пренебрегая потерями (что допустимо, так как мы находимся вдали от резонанса), мы получим, в частности,

$$\Delta\vartheta_1=\frac{4\pi}{c}\sqrt{\varepsilon}\,\gamma M_0. \qquad (19{,}20)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае малых постоянных полей угол поворота поляризации не зависит от магнитного поля и частоты, а определяется только намагниченностью. Учитывая результаты, полученные в § 9, этой формулой можно пользоваться и при полях H_0, недостаточных для насыщения, если под M_0 понимать не намагниченность насыщения, а техническую намагниченность материала при данном поле.

Сделаем некоторые общие выводы относительно тех явлений, связанных с распространением волн в продольно намагниченном феррите, которые могут представлять практический интерес для техники сверхвысоких частот. Наиболее важное из этих явлений — это поворот поляризации (эффект Фарадея). Как следует из формулы (19,20) и из рис. 40, поворот поляризации может иметь значительную величину уже при небольших постоянных полях и сопровождается при этом малыми потерями и незначительным снижением эллиптичности. Второе интересное явление—почти полное поглощение правой волны при резонансном значении постоянного поля. Представляет известный интерес и может быть практически использован также переход через нуль вещественной части эффективной магнитной проницаемости для правой волны (рис. 8) [320, 359].

Как мы увидим ниже, все эти эффекты проявляются и в волноводах, содержащих продольно намагниченные ферриты, и используются для создания различных волноводных ферритовых устройств [24—26]. Несмотря на некоторые успехи строгой теории таких устройств (см. главу 8), для объяснения их работы очень часто приходится использовать простые представления, развитые в этом параграфе.

§ 20. Отражение и прохождение через плоские границы раздела при продольном намагничивании

Рассмотрим теперь распространение однородных плоских волн в продольно намагниченных гиротропных средах при наличии перпендикулярных направлению распространения бесконечных плоских поверхностей раздела различных сред. Простейшей задачей такого типа, на которой мы прежде всего остановимся, будет задача о прохождении и отражении однородной плоской волны при наличии одной поверхности раздела двух гиротропных сред.

Предположим, что падающая волна распространяется из первой среды, а во второй среде удовлетворяется условие излучения [13], т. е. отсутствуют волны, распространяющиеся по направлению к границе раздела. Как было показано в § 19, нормальными волнами в случае продольного намагничивания являются поперечные волны с круговой поляризацией. Поэтому в качестве падающей волны в первой среде примем сначала волну с круговой поляризацией—с правым или левым вращением.

Направляя оси координат так, как показано на рис. 41, и используя метод двух комплексных плоскостей (§ 19), запишем комплексные амплитуды электрического и магнитного поля падающей волны в первой среде в виде

$$\left.\begin{aligned} E^{+}_{1\text{п, л}} &= A(1 \mp ij)\, e^{-i\beta_{1\text{п, л}} z}, \\ H^{+}_{1\text{п, л}} &= \frac{A}{\zeta_{1\text{п, л}}}(1 \mp ij)\, e^{-i\beta_{1\text{п, л}} z}, \end{aligned}\right\} \qquad (20{,}1)$$

где $\beta_{1\text{п, л}}$ и $\zeta_{1\text{п, л}}$—постоянная распространения и волновое сопротивление первой среды, которые выражаются через параметры этой среды формулами (19,5) и (19,6); A—заданная амплитуда падающей волны.

Предположим, что отраженная волна в первой среде и проходящая—во второй будут также волнами с круговой поляризацией и тем же направлением вращения (относительно фиксированного направления—оси z), что и падающая волна. Тогда комплексные амплитуды этих волн запишутся: отраженной волны—

$$\left.\begin{aligned} E^{-}_{1\text{п, л}} &= B(1 \mp ij)\, e^{i\beta_{1\text{п, л}} z}, \\ H^{-}_{1\text{п, л}} &= -\frac{B}{\zeta_{1\text{п, л}}}(1 \mp ij)\, e^{i\beta_{1\text{п, л}} z} \end{aligned}\right\} \qquad (20{,}2)$$

и проходящей волны во второй среде—

$$\left.\begin{aligned} E^{+}_{2\text{п, л}} &= C(1 \mp ij)\, e^{-i\beta_{2\text{п, л}} z}, \\ H^{+}_{2\text{п, л}} &= \frac{C}{\zeta_{2\text{п, л}}}(1 \mp ij)\, e^{-i\beta_{2\text{п, л}} z}, \end{aligned}\right\} \qquad (20{,}3)$$

где $\beta_{2\text{п, л}}$ и $\zeta_{2\text{п, л}}$—постоянная распространения и волновое сопротивление второй среды, а B и C—амплитуды, которые подлежат определению. Знак минус перед выражением для $H^{-}_{1\text{п, л}}$ взят потому, что волновое сопротивление, как и для сред со скалярными параметрами, будет иметь обратный знак для волны, распространяющейся в отрицательном направлении. В этом легко убедиться и непосредственно, рассматривая систему (18,5) при $\theta = 180°$.

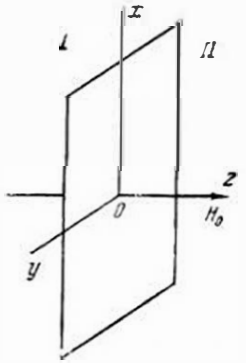


Рис. 41. Прохождение однородной плоской волны через поверхность раздела двух продольно намагниченных сред.

Граничные условия на поверхности раздела, заключающиеся в непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного поля, в данном случае запишутся:

$$\left.\begin{aligned} E^{+}_{1\text{п, л}} + E^{-}_{1\text{п, л}} &= E^{+}_{2\text{п, л}}, \\ H^{+}_{1\text{п, л}} + H^{-}_{1\text{п, л}} &= H^{+}_{2\text{п, л}} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } z = 0. \qquad (20{,}4)$$

Подставляя (20,1), (20,2) и (20,3) в (20,4), мы видим, что скобки $(1\mp ij)$ сокращаются и амплитуды B и C могут быть однозначно выражены через амплитуду A:

$$B = \Gamma_{п,л} A, \tag{20,5}$$

$$C = D_{п,л} A, \tag{20,6}$$

где коэффициент отражения

$$\Gamma_{п,л} = \frac{\zeta_{2_{п,л}} - \zeta_{1_{п,л}}}{\zeta_{2_{п,л}} + \zeta_{1_{п,л}}}, \tag{20,7}$$

а коэффициент прохождения

$$D_{п,л} = \frac{2\zeta_{2_{п,л}}}{\zeta_{2_{п,л}} + \zeta_{1_{п,л}}}. \tag{20,8}$$

Таким образом, граничные условия на поверхности раздела удовлетворяются при наличии падающей, отраженной и проходящей волн с круговой поляризацией и одинаковым направлением вращения, амплитуды которых связаны соотношениями (20,5)—(20,8). В силу однозначности решения рассматриваемой задачи других волн, кроме перечисленных, при падении на границу раздела волны с круговой поляризацией возникать не будет.

К этим результатам можно прийти еще более простым путем, если учесть, что комплексные амплитуды $E_{п,л}$ и $H_{п,л}$ волн с круговой поляризацией удовлетворяют всем условиям [14], которые предъявляются к основным переменным теории линий передачи, а величины $\beta_{п,л}$ и $\zeta_{п,л}$ являются основными параметрами линии в этой теории. И так как граничные условия при $z=0$ совпадают с обычными граничными условиями в точке перехода от одной линии к другой, то выражения (20,7) и (20,8) могут быть записаны непосредственно на основании известных результатов теории линий передачи. В дальнейшем мы будем использовать это обстоятельство, непосредственно применяя аппарат теории линий передачи к волнам с круговой поляризацией в продольно намагниченных гиротропных средах, как это было предложено К. М. Поливановым [239].

Рассмотрим теперь случай, когда падающая волна имеет произвольную эллиптическую (в частном случае—

линейную) поляризацию. Эту волну можно разложить на две волны с круговой поляризацией:

$$E_1^+ = E_{1_п}^+ (1 - ij) + E_{1_л}^+ (1 + ij), \tag{20,9}$$

где

$$E_{1_п}^+ = |E_{1_п}^+| e^{i\varphi_п}, \quad E_{1_л}^+ = |E_{1_л}^+| e^{i\varphi_л}.$$

Рассматривая прохождение и отражение каждой из этих волн так, как указывалось выше, мы должны затем сложить амплитуды отраженных и проходящих волн. Таким образом,

$$E_1^- = E_{1_п}^+ \Gamma_п (1 - ij) + E_{1_л}^+ \Gamma_л (1 + ij), \tag{20,10}$$

$$E_2^+ = E_{1_п}^+ D_п (1 - ij) + E_{1_л}^+ D_л (1 + ij), \tag{20,11}$$

Выражения для эллиптичностей и углов поляризации суммарных волн могут быть легко получены с использованием формул (19,11) и (19,9). В случае линейно поляризованной падающей волны, когда $|E_{1_п}^+| = |E_{1_л}^+|$ и $\varphi_п = \varphi_л$, эти выражения запишутся следующим образом:

$$\mathcal{Э}_{отр} = 20 \lg_{10} \frac{|\Gamma_п| + |\Gamma_л|}{|\Gamma_п| - |\Gamma_л|}, \tag{20,12}$$

$$\mathcal{Э}_{прох} = 20 \lg_{10} \frac{|D_п| + |D_л|}{|D_п| - |D_л|}, \tag{20,13}$$

$$\vartheta_{отр} = \frac{1}{2} [\arg(\Gamma_п) - \arg(\Gamma_л)], \tag{20,14}$$

$$\vartheta_{прох} = \frac{1}{2} [\arg(D_п) - \arg(D_л)]. \tag{20,15}$$

Рассмотрим теперь частный случай падения линейно поляризованной волны из свободного пространства в феррит, т. е. будем считать, что ε скалярно, а $\overleftrightarrow{\mu}$ определяется выражением (13,1). Тогда из (20,7) и (20,8) с учетом (19,5) и (19,6) получим для коэффициентов отражения и прохождения волны с круговой поляризацией следующие выражения:

$$\Gamma_{п,л} = \frac{\sqrt{\mu \pm \mu_a} - \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu \pm \mu_a} + \sqrt{\varepsilon}}, \tag{20,16}$$

$$D_{п,л} = \frac{2\sqrt{\mu \pm \mu_a}}{\sqrt{\mu \pm \mu_a} + \sqrt{\varepsilon}}. \tag{20,17}$$

Подставляя их в формулы (20,12)—(20,15), можем получить параметры отраженной и проходящей волн.

Как отраженная, так и проходящая волна оказываются при этом эллиптически поляризованными, причем эллиптичности их различны. Углы поляризации этих волн также, вообще говоря, различны и не равны углу поляризации падающей волны. Но при вещественных параметрах

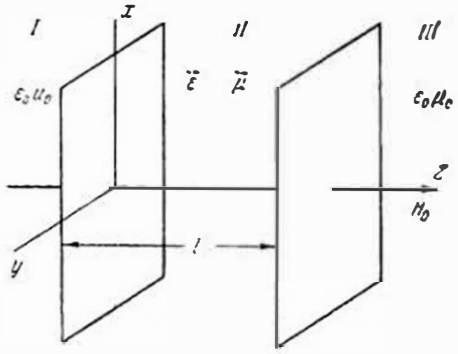


Рис. 42. Прохождение однородной плоской волны через слой продольно намагниченной среды.

среды μ, μ_a и ε величины Γ и D вещественны и $\vartheta_{отр} = \vartheta_{прох} = 0$. Углы поляризации отраженной и проходящей волн совпадают при этом с углом поляризации падающей волны. В области постоянных полей, далеких от ферромагнитного резонанса, когда мнимые части μ и μ_a малы по сравнению с вещественными, углы $\vartheta_{отр}$ и $\vartheta_{прох}$ оказываются также весьма малыми.

Следует подчеркнуть, что все полученные таким образом параметры проходящей и отраженной волн относятся к границе раздела сред—плоскости $z=0$. При дальнейшем распространении в феррите эллиптичность и угол поляризации этих волн будут изменяться так, как было показано в § 19.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложной задачи о прохождении однородной плоской волны через слой продольно намагниченной гиротропной среды. Предположим, что параметры этой среды (область *II* на рис. 42) опреде-

ляются выражениями (13,1) и (13,3), а параметры остального пространства (области *I* и *III*) скалярны и равны ε_0 и μ_0.

Падающую волну в области *I* мы будем считать заданной. Ее комплексную амплитуду можем записать в виде

$$\dot{E}_1 = [\dot{E}_{1п}(1-ij) + \dot{E}_{1л}(1+ij)]e^{-i\beta_0 z}, \qquad (20,18)$$

где $\dot{E}_{1п}$ и $\dot{E}_{1л}$ — заданные комплексные числа, а β_0 — постоянная распространения в областях *I* и *III*. Примем, что в области *III* имеет место только проходящая волна, распространяющаяся от слоя *II*. Задача заключается в определении амплитуды этой волны и отраженной волны в области *I*.

Как уже указывалось (§ 19), для решения подобных задач можно использовать аппарат теории линий передачи, применяя его к волнам с круговой поляризацией и суммируя затем полученные амплитуды этих волн.

Не останавливаясь на решении задачи теории линий для данного случая, приведем лишь его окончательные результаты. Амплитуда отраженной волны (при $z=0$)

$$\dot{E}_{1п,л} = \Gamma_{п,л}\dot{E}_{1п,л}, \qquad (20,19)$$

где коэффициент отражения

$$\Gamma_{п,л} = \frac{u_{п,л}}{v_{п,л} - i\operatorname{ctg}\psi_{п,л}}. \qquad (20,20)$$

Амплитуда проходящей волны (при $z=l$)

$$\dot{E}_{3п,л} = D_{п,л}\dot{E}_{1п,л}, \qquad (20,21)$$

где коэффициент прохождения

$$D_{п,л} = \frac{1}{\cos\psi_{п,л} + iv_{п,л}\sin\psi_{п,л}}. \qquad (20,22)$$

В выражениях (20,20) и (20,22) использованы следующие обозначения:

$$\psi_{п,л} = \beta_{п,л} l,$$

где $\beta_{п,л} = k_0\sqrt{(\mu \pm \mu_a)(\varepsilon \pm \varepsilon_a)}$ — постоянная распростране-

ния в области *II* — гиротропном слое,

$$u_{п,\,л} = \frac{1}{2}\left(\varrho_{п,\,л} - \frac{1}{\varrho_{п,\,л}}\right),$$

$$v_{п,\,л} = \frac{1}{2}\left(\varrho_{п,\,л} + \frac{1}{\varrho_{п,\,л}}\right).$$

В свою очередь

$$\varrho_{п,\,л} = \frac{\zeta_{п,\,л}}{\zeta_{0п,\,л}},$$

где $\zeta_{п,\,л} = \pm i\sqrt{\frac{\mu \pm \mu_a}{\varepsilon \pm \varepsilon_a}}$ — волновое сопротивление области *II* для волн с круговой поляризацией, $\zeta_{0п,\,л} = \pm i\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ — волновое сопротивление областей *I* и *III* для этих же волн.

Окончательное решение задачи получим, суммируя амплитуды отраженных и проходящих волн с правым и левым вращением:

$$E\dot{1} = [\Gamma_п(1-ij)\dot{E}_{1п} + \Gamma_л(1+ij)\dot{E}_{1л}]\,e^{i\beta_0 z}, \quad (20{,}23)$$

$$E\dot{3} = [D_п(1-ij)\dot{E}_{1п} + D_л(1+ij)\dot{E}_{1л}]\,e^{-i\beta_0(z-l)}. \quad (20{,}24)$$

Углы поляризации и эллиптичности этих волн могут быть определены по формулам (20,12) — (20,15), полученным при решении предыдущей задачи. При этом $\varphi_п$ и $\varphi_л$ имеют тот же смысл, что и ранее, а $\Gamma_{п,л}$ и $D_{п,л}$ определяются в данном случае формулами (20,20) и (20,22).

Значительный интерес представляет случай линейной поляризации падающей волны. Тогда $\dot{E}_{1п} = \dot{E}_{1л} = E_0$, и выражения (20,18), (20,23) и (20,24) запишутся:

$$\dot{E}_1 = 2E_0 e^{-i\beta_0 z}, \quad (20{,}18а)$$

$$\dot{E}\dot{1} = [\Gamma_п(1-ij) + \Gamma_л(1+ij)]\,E_0 e^{i\beta_0 z}, \quad (20{,}23а)$$

$$\dot{E}_3 = [D_п(1-ij) + D_л(1+ij)]\,E_0 e^{-i\beta_0(z-l)}. \quad (20{,}24а)$$

Этот случай [1]) был рассмотрен другим способом М. А. Гинзбургом [240] и Сулом и Уокером [216]. Значение его заключается в том, что он может служить простейшей моделью продольно намагниченного ферритового образца конечной длины в волноводе. Такие образцы используются в поляризационных ферритовых устройствах [24].

[1]) Аналогичная задача, но с металлической плоскостью (коротким замыканием) в области *III* была решена К. М. Поливановым и др. [239].

В данном случае целесообразно рассмотреть не только эллиптичности и углы поворота поляризации при прохождении и отражении, но и коэффициенты прохождения и отражения по мощности, которыми характеризуются потери в системе. Эти коэффициенты мы определим как отношения мощностей определенным образом поляризованных составляющих проходящей и отраженной волн к мощности падающей волны. Поскольку параметры областей *I* и *III* одинаковы, эти коэффициенты равны отношениям квадратов модулей соответствующих комплексных амплитуд. Для составляющей, поляризованной так же, как и падающая волна, коэффициент прохождения по мощности согласно (20,18а) и (20,24а) составит:

$$T_x = \frac{|D_п + D_л|^2}{4}. \quad (20{,}25)$$

Для составляющей, поляризованной по оси y,

$$T_y = \frac{|D_п - D_л|^2}{4}. \quad (20{,}26)$$

Для составляющих, поляризованных по большой и малой осям эллипса поляризации, получим соответственно:

$$T_{макс} = \frac{(|D_п| + |D_л|)^2}{4}, \quad (20{,}27)$$

$$T_{мин} = \frac{(|D_п| - |D_л|)^2}{4}. \quad (20{,}28)$$

Отношение полной мощности проходящей волны к мощности падающей, которое можно назвать полным коэффициентом прохождения,

$$T = T_x + T_y = T_{макс} + T_{мин} = \frac{|D_п|^2 + |D_л|^2}{2}. \quad (20{,}29)$$

Аналогичным образом могут быть определены и коэффициенты отражения по мощности:

$$R_x = \frac{|\Gamma_п - \Gamma_л|^2}{4}, \qquad (20,30)$$

$$R_y = \frac{|\Gamma_п - \Gamma_л|^2}{4}, \qquad (20,31)$$

$$R_{макс} = \frac{(|\Gamma_п| + |\Gamma_л|)^2}{4}, \qquad (20,32)$$

$$R_{мин} = \frac{(|\Gamma_п| - |\Gamma_л|)^2}{4}, \qquad (20,33)$$

$$R = \frac{|\Gamma_п|^2 + |\Gamma_л|^2}{2}. \qquad (20,34)$$

Заметим, что если рассматривать данную задачу как модель волноводного ферритового узла, то наибольший практический интерес будут представлять величины $D_{макс}$ и R_x. Определенное значение имеет также величина

$$N = 1 - R - T, \qquad (20,35)$$

которая характеризует потери энергии в самом слое *II*.

Остановимся на некоторых предельных случаях. Если на границах слоя отсутствует отражение ($\varrho_п = \varrho_л = 1$), то, естественно, $\Gamma_п = \Gamma_л = 0$. Для $D_п$ и $D_л$ и, следовательно, всех параметров проходящей волны получатся такие же выражения, как для участка неограниченной среды, длиной l (§ 19, в частности, формулы (19,14) и (19,15)). Заметим, что для неограниченного слоя этот случай является весьма специальным, для феррита он осуществим только при $\mu_a = 0$. Для волноводного же ферритового узла, моделью которого является рассматриваемая задача, он представляет собой предельный случай хорошо согласованного ферритового образца.

Следующим предельным случаем, на котором мы остановимся, является малая электрическая толщина слоя, т. е. $|\psi_{п,л}| \ll 1$. Примем, что параметры слоя

$$\mu = \mu' - i\mu'', \quad \mu_a = \mu_a' - i\mu_a''; \quad \varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \varepsilon_a = 0,$$

а параметры остального пространства $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$. Тогда

из (20,20) и (20,21) получим в первом приближении:

$$\Gamma_{п,л} = \frac{\psi_0}{2}[\mu'' - \varepsilon'' \pm \mu_a'' + i(\mu' - \varepsilon' \pm \mu_a')], \qquad (20,36)$$

$$D_{п,л} = 1 - \frac{\psi_0}{2}[\mu'' + \varepsilon'' \pm \mu_a'' + i(\mu' + \varepsilon' \pm \mu_a')], \qquad (20,37)$$

где $\psi_0 = k_0 l$. Отсюда для параметров, характеризующих проходящую волну, следуют выражения

$$\vartheta = \frac{\psi_0 \mu_a'}{2}, \qquad (20,38)$$

$$Э = -20 \lg_{10}\left(\frac{1}{2}\psi_0 \mu_a''\right), \qquad (20,39)$$

$$T_{макс} = 1 - \psi_0(\mu'' + \varepsilon''). \qquad (20,40)$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что ϑ в этом предельном случае зависит только от μ_a', а $Э$ — только от μ_a''. Не приводя выражений для параметров отраженной волны, заметим лишь, что при уменьшении толщины слоя $\vartheta_{отр}$ не стремится к нулю, а $Э$ — к бесконечности.

Рассмотрим теперь случай, когда тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ слоя являются эрмитовыми, т. е. потери в слое отсутствуют. Тогда величины $\psi_{п,л}$, $u_{п,л}$ и $v_{п,л}$ будут вещественными и все вычисления по приведенным выше формулам существенно упрощаются. В частности, для углов поворота поляризации получаются следующие простые выражения:

$$\vartheta_{отр} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{v_п}\operatorname{ctg}\psi_п\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{v_л}\operatorname{ctg}\psi_л\right)\right], \qquad (20,41)$$

$$\vartheta = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{v_п}\operatorname{tg}\psi_п\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{v_л}\operatorname{tg}\psi_л\right)\right]. \qquad (20,42)$$

§ 21. Плоские волны в поперечно намагниченной среде

Рассмотрим случай, когда направление распространения однородных плоских волн в гиротропной среде перпендикулярно направлению постоянного намагничивания. Этот случай мы будем называть случаем поперечного намагничивания. При этом во всех соотношениях § 18 следует положить $\theta = 90°$. Направление распространения совпадет тогда с осью y.

При $\theta = 90°$ уравнение (18,8) имеет два решения:

$$\xi_1 = \sqrt{\varepsilon_\parallel \mu_\perp} \tag{21,1}$$

и

$$\xi_2 = \sqrt{\varepsilon_\perp \mu_\parallel}. \tag{21,2}$$

Система (18,7) распадается при этом на две независимые системы:

$$\left.\begin{aligned} \xi E_z + \mu H_x - i\mu_a H_y &= 0, \\ i\mu_a H_x - \mu H_y &= 0, \\ \varepsilon_\parallel E_z + \xi H_x &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{21,3}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi H_z - \varepsilon E_x - i\varepsilon_a E_y &= 0, \\ i\varepsilon_a E_x - \varepsilon E_y &= 0, \\ \mu_\parallel H_z - \xi E_x &= 0. \end{aligned}\right\}. \tag{21,4}$$

При этом, как легко убедиться, (21,1) является условием совместности системы (21,3), а (21,2) — условием совместности системы (21,4).

Волна, которой соответствует система (21,3) и условие (21,1), т. е. постоянная распространения

$$\beta_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_\parallel \mu_\perp}, \tag{21,5}$$

может быть названа поперечно-электрической (TE). Для нее электрическое поле является поперечным (относительно направления распространения) и линейно поляризовано в направлении постоянного намагничивания. Магнитная индукция также является поперечной (в том же смысле) и линейно поляризована в направлении оси x, перпендикулярной электрическому полю и направлению распространения. Таким образом, поляризация электрического поля и магнитной индукции для этой волны совпадает с поляризацией этих векторов для однородной плоской волны в среде со скалярными параметрами. Однако магнитное поле волны TE в поперечно намагниченной гиротропной среде лежит в плоскости xy, перпендикулярной направлению постоянного намагничивания, и является эллиптически поляризованным (рис. 43, *а*). Эллиптичность его

$$\mathcal{Э}_1 = 20 \lg \frac{\mu}{\mu_a}. \tag{21,6}$$

Вторая волна, которой соответствует система (21,4) и постоянная распространения

$$\beta_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_\perp \mu_\parallel}, \tag{21,7}$$

может быть названа поперечно-магнитной (TM). Для нее поперечными (относительно направления распространения) и линейно поляризованными будут магнитное поле и электрическая индукция (рис. 43, *б*). Их поляризация для этой волны будет такой же, как для среды со скалярными параметрами. Электрическое поле, лежащее в плоскости xy, будет иметь эллиптичность

$$\mathcal{Э}_2 = 20 \lg \frac{\varepsilon}{\varepsilon_a}. \tag{21,8}$$

Заметим, что все соотношения, характеризующие две рассматриваемые волны, переходят друг в друга при замене (12,25) в соответствии с принципом перестановочной двойственности.

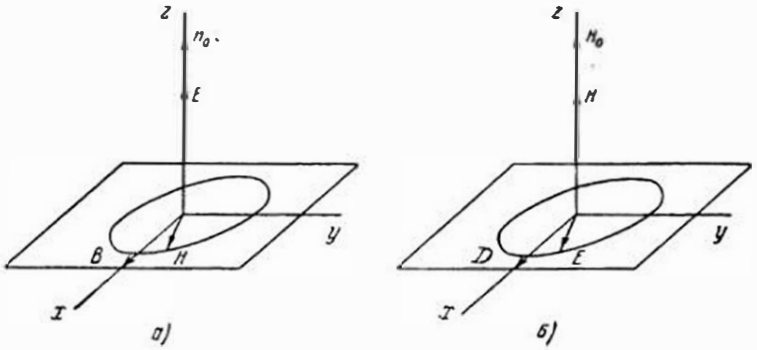


Рис. 43. Векторы поля и индукции при поперечном намагничивании.

а — волна TE, *б* — волна TM. Направление распространения — ось y.

Если магнитная проницаемость скалярна, т. е. $\mu_a = 0$ и $\mu = \mu_\parallel$ (случай, обычно рассматриваемый в оптике), то поперечно-электрическая волна превращается в обычную поперечно-электромагнитную (TEM) волну. Если же, как в случае феррита, ε является скалярной величиной, то поперечно-магнитная волна превращается в волну TEM

с постоянной распространения

$$\beta_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu_{\text{п}}}. \qquad (21,9)$$

Поперечно-электрическая волна будет иметь в этом случае постоянную распространения

$$\beta_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu_\perp} = k_0 \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\frac{\mu^2-\mu_a^2}{\mu}}. \qquad (21,10)$$

Остановимся на последнем случае несколько подробнее с учетом результатов, полученных в первой части.

Постоянная распространения β_2 волны *TEM* не испытывает резонансного изменения в зависимости от H_0 или ω, так как $\mu_\parallel$ для ферритов не проходит через резонанс и вообще изменяется мало. При полях H_0, достаточных для насыщения, когда не сказываются процессы смещения границ (см. главу 4), $\mu_\parallel = 1$ и $\beta_2 = k_0\sqrt{\varepsilon}$. Это дает основание по аналогии с оптикой называть данную волну в поперечно намагниченном феррите обыкновенной волной.

Волна *TE* может быть в случае феррита названа необыкновенной волной. Ее постоянная распространения будет определяться величиной $\mu_\perp$. Очевидно, прежде всего, что точка, где μ' обращается в нуль, должна быть точкой резонанса $\mu_\perp$, а следовательно, и β_1. Для того чтобы ответить на вопрос, является ли этот резонанс единственным или $\mu_\perp$ имеет резонанс также и в точке «обычного» ферромагнитного резонанса, когда μ и μ_a (при отсутствии потерь) обращаются в бесконечность, необходимо учесть конкретные значения μ и μ_a. Для этого воспользуемся результатами главы 1 сначала без учета потерь (§ 1).

Подставляя μ и μ_a из (1,34) в выражение для $\mu_\perp$, получим:

$$\mu_\perp = \frac{\omega_H^2\left(1+4\pi\frac{M_0}{H_0}\right)^2-\omega^2}{\omega_H^2\left(1+4\pi\frac{M_0}{H_0}\right)-\omega^2}. \qquad (21,11)$$

Отсюда следует, что $\mu_\perp$ обращается в бесконечность только при частоте

$$\omega_\perp = \gamma H_0\sqrt{1+4\pi\frac{M_0}{H_0}} \qquad (21,12)$$

или, если частота фиксирована, при поле H_2, которое определяется выражением (1,39). Очевидно, что эти значения поля или частоты являются условиями обращения μ в нуль. Частоту $\omega_\perp$, которая определяется формулой (21,12), называют иногда частотой поперечного ферромагнитного резонанса.

Величина $\mu_\perp$ обращается в нуль при частоте

$$\omega_1 = \gamma(H_0 + 4\pi M_0) \qquad (21,13)$$

или при постоянном поле H_1, которое определяется выражением (1,38), что соответствует условию: $\mu = |\mu_a|$. Интересно отметить, что $\mu_\perp$ и скалярная проницаемость $\mu_{\text{п}}$ для правой волны с круговой поляризацией в продольно намагниченной среде обращаются в нуль одновременно, хотя их резонансные частоты существенно различаются.

Подставим теперь в выражение для $\mu_\perp$ формулы для μ и μ_a, полученные в § 4 с учетом потерь, и предположим, что $\omega_r \ll \omega_0$. Как уже отмечалось, это неравенство очень хорошо выполняется для применяемых в диапазоне с. в. ч. ферритов. В результате получим:

$$\mu_\perp \cong \frac{\omega_H^2\left(1+4\pi\frac{M_0}{H_0}\right)^2-\omega^2+2i\omega\omega_r\left(1+4\pi\frac{M_0}{H_0}\right)}{\omega_H^2\left(1+4\pi\frac{M_0}{H_0}\right)-\omega^2+2i\omega\omega_r\left(1+2\pi\frac{M_0}{H_0}\right)}. \qquad (21,14)$$

На рис. 44 показаны зависимости вещественной и мнимой частей $\mu_\perp$ от постоянного магнитного поля. Для больших полей эти зависимости были рассчитаны по формуле (21,14) при тех же значениях входящих в нее величин, которые были приняты ранее при расчете μ и μ_a (рис. 7) и $\mu_{\text{п. л}}$ (рис. 8). При малых полях расчет проводился на основании типичных экспериментальных значений компонентов тензора проницаемости ферритов, показанных на рис. 28; эти участки кривых $\mu'_\perp$ и $\mu''_\perp$ показаны на рис. 44 пунктиром.

Обращаясь к формуле (21,10), мы видим, что резонанс постоянной распространения β_1 будет совпадать с резонансом $\mu_\perp$. На рис. 45 приведены вещественная и мнимая части β_1, рассчитанные на основании данных рис. 44 при вещественном ε.

Из того обстоятельства, что система уравнений Максвелла (18,5) распалась в случае поперечного намагничивания на две независимые системы (21,3) и (21,4), следует, что произвольная однородная плоская волна может быть представлена в этом случае в виде суммы рассмотренных

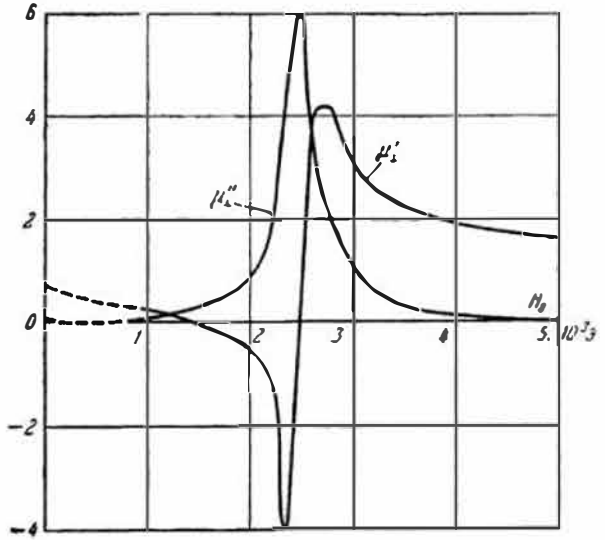


Рис. 44. Зависимость вещественной и мнимой частей $\mu_\perp$ от постоянного магнитного поля.

При $H_0>1000$ э расчет проводился по формуле (21.14) при тех же значениях постоянных величин, что и на рис. 40. При $H_0<1000$ э в основу расчета были положены экспериментальные зависимости, показанные на рис. 28.

волн TE и TM. Эти волны можно считать, таким образом, нормальными волнами в поперечно намагниченной гиротропной среде. Различие постоянных распространения этих волн приведет к тому, что поляризация любой волны, не совпадающей с одной из нормальных, будет изменяться по мере распространения.

Рассмотрим, например, случай феррита и предположим, что при $y=0$ вектор $\boldsymbol{E}$ суммарной волны линейно поляризован, лежит в плоскости xz (рис. 46) и составляет угол 45° с осью x. Эта волна может быть разложена на

нормальные волны, в данном случае — TEM (обыкновенную) и TE (необыкновенную) с равными амплитудами и фазами электрического поля в плоскости $y=0$. Если значение постоянного магнитного поля далеко от резонансного для волны TE, то коэффициенты затухания (β_1'' и β_2'') обеих волн будут невелики. Различие же их фазовых скоростей (β_1' и β_2') приведет к преобразованию поляриза-

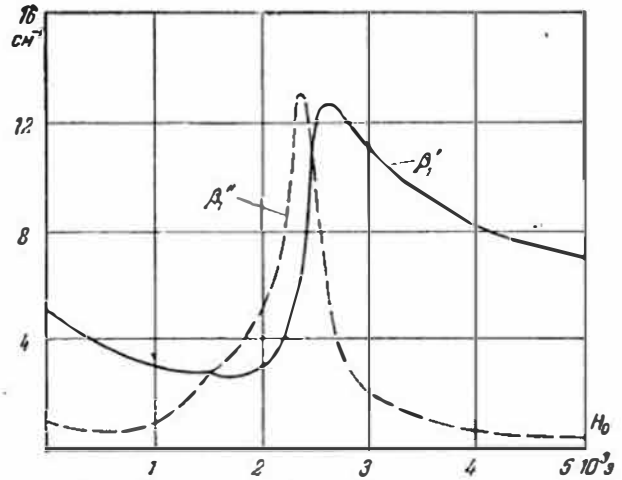


Рис. 45. Вещественная и мнимая части постоянной распространения волны ТЕ в поперечно намагниченной среде.

Расчет на основании величин, приведенных на рис. 44 ($s=9$).

ции суммарной волны, которая при $y\neq 0$ будет являться, вообще говоря, эллиптической. В частности, при

$$y = l_1 = \frac{\pi}{2(\beta_1' - \beta_2')}$$

электрическое поле суммарной волны (если пренебречь различием β_1'' и β_2'') будет иметь круговую поляризацию. При $y=2l_1$ поляризация электрического поля этой волны будет линейной, а направление ее будет составлять угол 90° с направлением поляризации вектора $\boldsymbol{E}$ при $y=0$.

Следует подчеркнуть, что такое преобразование поляризации волны в поперечно намагниченной среде является

взаимным, т. е. не зависит от направления постоянного намагничивания. Это связано с тем, что в выражение для β_1 величина μ_a входит только во второй степени. При изменении направления распространения на обратное такое преобразование поляризации пойдет также в «обратном направлении»; в частности, угол поворота поляризации на пути $2l_1$ изменит знак. Заметим, что

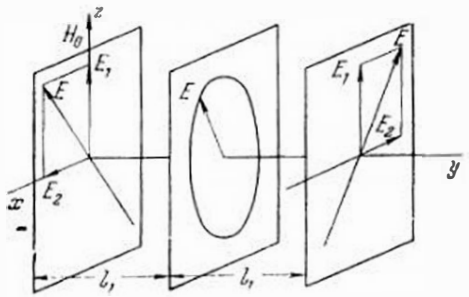


Рис. 46. Преобразование поляризации при поперечном намагничивании.

в отличие от случая продольно намагниченной среды (§ 19), где нормальными волнами были волны с круговой поляризацией, в поперечно намагниченной среде преобразование поляризации связано с различием фазовых скоростей двух линейно поляризованных нормальных волн.

Рассмотренные эффекты, в частности, резонансная зависимость β' и β'' поперечно-электрической волны от частоты и постоянного магнитного поля, будут проявляться и в волноводе при поперечном (относительно оси волновода) намагничивании расположенного в нем ферритового образца. Однако при этом, как мы увидим в главе 9, будут возникать и новые, невзаимные явления, существенно связанные с граничными условиями в волноводе, например зависимость β' и β'' от направления постоянного намагничивания или направления распространения энергии

ГЛАВА 8

ВОЛНОВОД С ПРОДОЛЬНО НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

§ 22. Волновод произвольного сечения, заполненный продольно намагниченной гиротропной средой

Большинство применяемых в технике сверхвысоких частот ферритовых устройств представляет собой волноводные устройства. Поэтому вопросам распространения электромагнитных волн в волноводах, содержащих намагниченные ферриты, следует уделить наибольшее внимание. В этой главе будет рассмотрен волновод, содержащий продольно намагниченный, т. е. намагниченный в направлении оси волновода, феррит. Прежде всего мы остановимся на случае регулярного цилиндрического полого волновода с произвольным поперечным сечением, целиком заполненного продольно намагниченной гиротропной средой.

Рассмотрим полую цилиндрическую трубу произвольного сечения (рис. 47) с идеально проводящими металлическими стенками. Внутренний объем трубы заполнен гиротропной средой, параметры которой определяются выражениями (13,1) и (13,3). Наша задача, вообще говоря, заключается в определении конфигурации электромагнитного поля и постоянной распространения для волн, которые могут существовать в таком регулярном волноводе. Очевидно, что в этом параграфе, не задавая конкретно формы поперечного сечения волновода, мы сможем исследовать лишь некоторые общие свойства этих волн.

Зависимость комплексных амплитуд составляющих поля от координаты в направлении оси волновода мы примем в виде $e^{-i\beta z}$, считая, что $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ соответствует волнам,

распространяющимся в положительном, а $\mathrm{Re}(\beta) < 0$ – в отрицательном направлении оси z. Эта зависимость является частным случаем гармонической зависимости от z, и в качестве уравнений для комплексных амплитуд составляющих поля могут быть приняты уравнения, приведенные в § 14.

Граничные условия заключаются в равенстве нулю касательных составляющих электрического поля на стенках волновода. Эти условия можно записать следующим образом:

$$E_z = 0 \quad \text{на} \quad L, \qquad (22,1)$$

$$E_\perp \times n_0 = 0 \quad \text{на} \quad L, \qquad (22,2)$$

где L – контур, ограничивающий поперечное сечение волновода, а n_0 – единичный вектор нормали к этому контуру и к поверхности волновода (рис. 47).

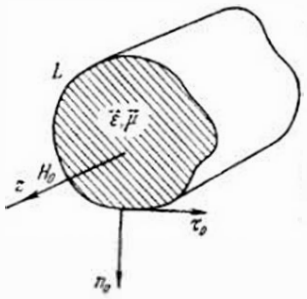


Рис. 47. Регулярный волновод, заполненный продольно намагниченной гиротропной средой.

Для того чтобы выразить условие (22,2) через продольные составляющие поля E_z и H_z, воспользуемся выражением (14,23). Введем в каждой точке контура L местные декартовы координаты с осями, направленными по n_0 и τ_0, где τ_0 – единичный вектор касательной к контуру L (рис. 47). Тогда

$$\nabla_\perp = n_0 \frac{\partial}{\partial n} + \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

С учетом этого в результате подстановки (14,23) в (22,2) получим после несложных преобразований:

$$\omega^2 \beta \frac{\partial E_z}{\partial n} + i k_0 \mu \varkappa_m^2 \frac{\partial H_z}{\partial n} + i\beta \left(\varkappa_m^2 + \omega^2 \frac{\mu_a}{\mu} \right) \frac{\partial E_z}{\partial \tau} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \left(\varkappa_m^2 k_0 \mu \varepsilon_a + \frac{\omega^2 \beta^2}{k_0} \right) \frac{\partial H_z}{\partial \tau} = 0, \qquad (22,3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\varkappa_m^2 = k_0^2 \varepsilon \mu_\perp - \beta^2,$$

$$\omega^2 = k_0^2 (\varepsilon \mu_a + \mu \varepsilon_a).$$

Как было показано в § 13, поля TE и TM относительно направления намагничивания, т. е. оси z, возможны в гиротропной среде только при отсутствии зависимости от z, т. е. при $\beta = 0$. Таким образом, в волноводе с продольно намагниченной средой, где нас интересуют волны, распространяющиеся вдоль оси z, волны TE и TM невозможны, независимо от граничных условий. Все типы поля и ближних полей, которые могут существовать в таком волноводе, будут иметь $E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$.

Однако в предельном случае (граничном между распространяющейся волной и ближним полем), когда $\beta \to 0$, волны в рассматриваемом волноводе превращаются в поля TE и TM. Действительно, при $\beta = 0$ уравнение (13,16) превращается в

$$(\nabla_\perp^2 + k_0^2 \varepsilon_\parallel \mu_\perp) E_z = 0, \qquad (22,4)$$

а уравнение (13,17) – в

$$(\nabla_\perp^2 + k_0^2 \varepsilon_\perp \mu_\parallel) H_z = 0. \qquad (22,5)$$

Для E_z и H_z получаются, таким образом, независимые уравнения, откуда и следует возможность существования и этом предельном случае полей TE и TM. Составляющая E_z поля TM определяется уравнением (22,4), а составляющая H_z поля TE – уравнением (22,6).

Граничным условием для поля TM является условие (22,1). Граничное условие для поля TE получится из (22,3), если положить в нем $H_z = 0$ и $\beta = 0$:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} - i \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \tau} = 0. \qquad (22,6)$$

Уравнение (22,4) и граничное условие (22,1) для поля TM совпадают с уравнением и граничным условием для поля TM в волноводе с изотропной средой [14]. Следовательно, конфигурация продольного электрического поля E_z для всех возможных типов полей TM (при $\beta = 0$) в волноводе с гиротропной средой будет совпадать с конфигурацией E_z для соответствующих типов полей в волноводе с изотропной средой. Заметим, что для других

составляющих поля этого совпадения не будет. Собственные значения уравнения (22,4) будут совпадать с собственными значениями $\varkappa_0$ аналогичного уравнения в случае изотропной среды. Отсюда получим:

$$k_0^2 \varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp} = \varkappa_0^2. \qquad (22,7)$$

Принимая во внимание, что [14]

$$\varkappa_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{пр}\,0}},$$

где $\lambda_{\text{пр}\,0}$ — предельная длина волны пустого волновода, выражение (22,7) можно записать в виде

$$\lambda_{\text{пр}\,TM} = \lambda_{\text{пр}\,0} \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\perp}}. \qquad (22,8)$$

Уравнение (22,5) также совпадает с уравнением, определяющим H_z для волны TE в волноводе с изотропной средой. Граничное же условие (22,6) в общем случае гиротропной среды не совпадает с граничным условием для изотропной среды, которое, как известно [14], записывается:

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0.$$

Однако это совпадение будет иметь место для феррита, когда $\varepsilon_a = 0$. Тогда аналогично предыдущему случаю получим:

$$\lambda_{\text{пр}\,TE} = \lambda_{\text{пр}\,0} \sqrt{\varepsilon \mu_{\parallel}}. \qquad (22,9)$$

Итак, при $\beta \to 0$ поля в волноводе с продольно намагниченным ферритом переходят в поля TE и TM, для которых конфигурация соответственно H_z или E_z является такой же, как для полей TE и TM в волноводе с изотропной средой. Такой же переход, но с полным совпадением конфигурации поля и для произвольной гиротропной среды имеет место, естественно, и при $\mu_a \to 0$ и $\varepsilon_a \to 0$. Это дает основание именовать типы волн и полей в волноводе с продольно намагниченной гиротропной средой в соответствии с теми типами волн или полей TE и TM, в которые они переходят, прибавляя

при этом, как предложил М. А. Гинцбург [240], индекс «гир». Например, $TE_{11\,\text{гир}}$ будет обозначать такую волну в волноводе с продольно намагниченной гиротропной средой (отнюдь не являющуюся волной TE), которая при $\mu_a \to 0$ и $\varepsilon_a \to 0$ перейдет в волну TE_{11}.

В связи с формулами (22,8) и (22,9) для предельных длин волн полей $TM_{\text{гир}}$ и $TE_{\text{гир}}$ необходимо сделать два замечания. Во-первых, при наличии потерь в среде или в стенках волновода β, как и в случае изотропной среды, не может обращаться в нуль. Таким образом, поля TE и TM в волноводе с продольно намагниченной гиротропной средой, строго говоря, не имеют места даже в предельном случае. Поэтому формулы (22,8) и (22,9) следует рассматривать как приближенные и пользоваться ими только в случае малых потерь. При этом в них можно подставлять вещественные части соответствующих компонентов тензоров $\vec{\vec{\varepsilon}}$ и $\vec{\vec{\mu}}$. Во-вторых, следует подчеркнуть, что знание предельных длин волн для волновода с гиротропной средой отнюдь не дает возможности определить по известным простым формулам длину волны в волноводе (т. е. вещественную часть постоянной распространения), как это можно сделать для волновода с изотропной средой.

Для определения постоянной распространения и структуры поля в волноводе, заполненном продольно намагниченной гиротропной средой, целесообразно использовать метод скалярных функций, описанный в § 13 и 14. Согласно этому методу все составляющие поля выражаются по формулам (14,12) — (14,22) через функции Ψ_1 и Ψ_2. Эти функции являются решениями уравнения (14,7), в котором $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются формулой (14,8). Функциям Ψ_1 и Ψ_2 соответствуют два поля, которые до наложения граничных условий независимы.

Граничные условия (22,1) и (22,2) с учетом выражений (14,18) и (14,20) запишутся для функций Ψ_1 и Ψ_2 следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} \Psi_{1,\,2} = 0, \\ (\vec{\vec{u}}_{1,\,2} \nabla_{\perp} \Psi_{1,\,2}) \times \boldsymbol{n}_0 = 0 \end{array}\right\} \text{ на } L, \qquad (22,10)$$

где тензор $\vec{\vec{u}}_{1,\,2}$ определяется согласно (14,20).

Условия (22,10) несовместны. Таким образом, поля, определяемые функциями Ψ_1 и Ψ_2 по отдельности, не удовлетворяют граничным условиям на стенках волновода. Поэтому примем в качестве функции Ψ линейную комбинацию вида

$$\Psi = A_1\Psi_1 + A_2\Psi_2. \qquad (22,11)$$

Тогда граничные условия (22,1) и (22,2) приведут к следующим соотношениям:

$$A_1\varkappa_1^2\Psi_1 + A_2\varkappa_2^2\Psi_2 = 0 \quad \text{на} \quad L, \qquad (22,12)$$

$$A_1(\overleftrightarrow{u_1}\nabla_\perp\Psi_1)\times\boldsymbol{n}_0 + A_2(\overleftrightarrow{u_2}\nabla_\perp\Psi_2)\times\boldsymbol{n}_0 = 0 \text{ на } L. \qquad (22,13)$$

При соответствующем выборе системы координат (см. ниже) условия (22,12) и (22,13) могут дать два однородных линейных уравнения для коэффициентов A_1 и A_2. Равенство нулю определителя этой системы даст трансцендентное уравнение, которое совместно с двумя уравнениями (14,8) позволит определить $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и β. После этого из одного из уравнений (22,12) или (22,13) может быть определено и отношение коэффициентов A_1 и A_2, что даст возможность найти по формулам (14,12) — (14,22) все составляющие поля.

Однако выбор систем координат q_1q_2 в плоскости поперечного сечения волновода, в которых практически возможно осуществление этой программы, значительно ограничивает класс задач, поддающихся строгому решению. Во-первых (это относится и к случаю изотропных сред), контур L, ограничивающий поперечное сечение волновода, должен состоять из линий $q_1 = \text{const}$ и $q_2 = \text{const}$. Во-вторых (это также относится и к случаю изотропных сред), переменные q_1 и q_2 должны разделяться в уравнении (14,7). И, наконец, специфическое ограничение имеет место для гиротропной среды. Оно заключается в том, что при рассмотрении граничного условия на линии $q_1 = \text{const}$ зависимость Ψ от q_2 должна быть экспоненциальной, а при $q_2 = \text{const}$ экспоненциальной должна быть зависимость Ψ от q_1 [217].

Поясним последнее ограничение. Составляющие вектора $\boldsymbol{E}_\perp$ в ортогональных координатах q_1 и q_2 запишутся

согласно (14,18) и (14,1) следующим образом (без множителя $Z(z)$):

$$E_1 = iS\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + T\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2},$$

$$E_2 = -T\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + iS\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2},$$

где h_1 и h_2 — коэффициенты Ламэ [2]. Предположим, что переменные разделяются, и подставим в эти выражения $\psi = Q_1(q_1)\,Q_2(q_2)$. Тогда получим:

$$E_1 = iS\frac{1}{h_1}\frac{dQ_1}{dq_1}Q_2 + T\frac{1}{h_2}\frac{dQ_2}{dq_2}Q_1, \qquad (22,14)$$

$$E_2 = -T\frac{1}{h_1}\frac{dQ_1}{dq_1}Q_2 + iS\frac{1}{h_2}\frac{dQ_2}{dq_2}Q_1. \qquad (22,15)$$

Рассмотрим, например, случай, когда контур L совпадает с линией $q_1 = \text{const}$. Тогда граничным условием будет:

$$E_1 = 0 \quad \text{при} \quad q_1 = \text{const}. \qquad (22,16)$$

Алгебраическое уравнение для коэффициентов A_1 и A_2 может быть получено из условия (22,16) только в том случае, если член, зависящий от q_2, вынесется в (22,14) за скобку. А это возможно только в случае экспоненциальной (а не любой гармонической) зависимости ψ от q_2.

Указанные ограничения приводят к тому, что задача о волноводе, заполненном продольно намагниченной гиротропной средой, решается строго только для случая круглого волновода. Этот случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

§ 23. Круглый волновод, заполненный ферритом

Рассмотрим круглый волновод радиуса a (рис. 48) с идеально проводящими стенками, заполненный продольно намагниченной гиротропной средой. В полярной системе координат, в которой необходимо решать эту задачу, уравнение (14,7) для функции ψ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \varkappa_{1,2}^2\psi = 0, \qquad (23,1)$$

где величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ определяются выражением (14,8) или в частном случае феррита — выражением (14,24). Будем считать, например, что $\varkappa_1$ соответствует знаку плюс в этих выражениях, а $\varkappa_2$ — знаку минус.

Частным решением уравнения (23,1) является:

$$\psi = R(r)\,\Phi(\varphi), \tag{23,2}$$

где $R(r)$ — цилиндрическая функция, удовлетворяющая уравнению Бесселя

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\varkappa_{1,2}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) = 0, \tag{23,3}$$

а $\Phi(\varphi)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0. \tag{23,4}$$

Так как составляющие поля, а следовательно, и функция $R(r)$ должны быть конечны при $r = 0$, в качестве этой функции следует принять функцию Бесселя $J_m(\varkappa_{1,2} r)$. В качестве частных решений уравнения (23,4) могут быть, вообще говоря, приняты как

$$\Phi = e^{\pm im\varphi}, \tag{23,5}$$

так и

$$\Phi = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi. \tag{23,6}$$

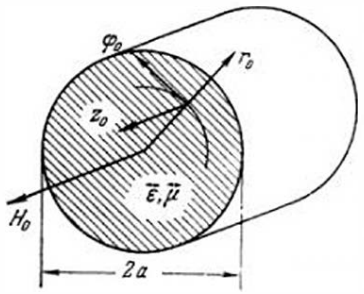


Рис. 48. Круглый волновод, заполненный продольно намагниченной гиротропной средой.

Из соображений периодичности, т. е. сохранения значения функции Φ при изменении угла φ на 2π, m в обоих случаях должно быть целым числом.

Волны, для которых зависимость от азимутального угла φ определяется выражением (23,5), можно назвать волнами с круговой поляризацией или волнами, бегущими по азимуту [1]). Зависимость $e^{-im\varphi}$ соответствует волне с правым вращением — правой волне, а зависимость $e^{im\varphi}$ — левой волне. Выражения (23,6) соответствуют волнам, стоячим по азимуту, или волнам с линейной поляризацией. Для круглого волновода, заполненного изотропной средой, каждая из четырех волн, определяемых выражениями (23,5) и (23,6), удовлетворяет граничным условиям и может быть принята в качестве нормального типа волны.

Для гиротропной среды только волны с зависимостью от φ в виде $e^{im\varphi}$ или $e^{-im\varphi}$, т. е. волны с круговой поляризацией, могут обеспечить — каждая в отдельности — выполнение граничных условий при $r = a$. Это является следствием третьего ограничения, рассмотренного в конце § 22. Учитывая это и принимая зависимость от z такой же, как и в § 22, запишем функцию $\Psi = \psi(r, \varphi) Z(z)$ следующим образом:

$$\Psi = J_m(\varkappa_{1,2} r)\, e^{im\varphi} e^{-i\gamma z}, \tag{23,7}$$

где $m = \pm |m|$, а $|m| = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Для получения составляющих поля мы должны воспользоваться выражениями (14,18) и (14,19). При этом в качестве координатных осей следует принять направления единичных векторов в круговой цилиндрической системе координат: r_0, φ_0 и z_0 (рис. 48). Оператор ∇ в этом случае запишется следующим образом:

$$\nabla = r_0 \frac{\partial}{\partial r} + \varphi_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + z_0 \frac{\partial}{\partial z}. \tag{23,8}$$

Получим, прежде всего, общие выражения составляющих поля в гиротропной среде в круговой цилиндрической системе координат. Для этого спроектируем (14,18) и (14,19) на указанные координатные оси с учетом (23,8).

---

[1]) Не следует путать поляризацию волны, определяемую видом функции $\Phi(\varphi)$, с поляризацией поля этой волны, которая будет различной в разных точках волновода. Термин «волны, бегущие или стоячие по азимуту», предложенный М. С. Нейманом, устраняет возможность такой путаницы.

В результате получим:

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= iS\frac{\partial\Psi}{\partial r} + T\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\\
E_\varphi &= -T\frac{\partial\Psi}{\partial r} + iS\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\\
E_z &= iW\frac{\partial\Psi}{\partial z},\\
H_r &= iM\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\,\partial z} + N\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\,\partial z},\\
H_\varphi &= -N\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\,\partial z} + iM\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\,\partial z},\\
H_z &= iR\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (23,9)$$

Входящие сюда коэффициенты определяются выражениями (14,12) — (14,17), а в случае феррита выражениями — (14,25).

Подставив в формулы (23,9) выражение (23,7) для функции Ψ, получим составляющие поля в круглом волноводе с продольно намагниченной гиротропной средой:

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= i\left[S\varkappa_{1,2}J'_m(\varkappa_{1,2}r) + T_{1,2}\frac{m}{r}J_m(\varkappa_{1,2}r)\right]e^{i(m\varphi-\beta z)},\\
E_\varphi &= -\left[T_{1,2}\varkappa_{1,2}J'_m(\varkappa_{1,2}r) + S\frac{m}{r}J_m(\varkappa_{1,2}r)\right]e^{i(m\varphi-\beta z)},\\
E_z &= W_{1,2}\beta J_m(\varkappa_{1,2}r)\,e^{i(m\varphi-\beta z)},\\
H_r &= \beta\left[M_{1,2}\varkappa_{1,2}J'_m(\varkappa_{1,2}r) + N\frac{m}{r}J_m(\varkappa_{1,2}r)\right]e^{i(m\varphi-\beta z)},\\
H_\varphi &= i\beta\left[N_{1,2}\varkappa_{1,2}J'_m(\varkappa_{1,2}r) + M\frac{m}{r}J_m(\varkappa_{1,2}r)\right]e^{i(m\varphi-\beta z)},\\
H_z &= -iR\beta^2 J_m(\varkappa_{1,2}r)\,e^{i(m\varphi-\beta z)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (23,10)$$

Заметим, что выражения (23,7) и (23,10) при данном $|m|$ и при данном индексе, определяющем зависимость от r, содержат (при $m \neq 0$) четыре «парциальные» волны[1]): с $\varkappa_1$ и $e^{+i|m|\varphi}$, с $\varkappa_1$ и $e^{-i|m|\varphi}$, с $\varkappa_2$ и $e^{+i|m|\varphi}$ и, наконец, с $\varkappa_2$ и $e^{-i|m|\varphi}$. До наложения граничных условий эти волны независимы.

[1]) Мы для краткости говорим о волнах, но это могут быть как распространяющиеся волны, так и ближние поля, в зависимости от знака $\mathrm{Re}(\beta^2)$.

Приступим теперь к учету граничных условий, которые в данном случае запишутся:

$$\left.\begin{aligned}
E_z &= 0,\\
E_\varphi &= 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{при } r = a. \qquad (23,11)$$

Подставляя E_z и E_φ из (23,10) в условия (22,11), мы убеждаемся в соответствии с общими соображениями, приведенными в § 22, что эти условия не могут быть удовлетворены для какой-либо парциальной волны в отдельности. Сумма же двух парциальных волн с различными $\varkappa$, но одинаковым знаком m, как мы сейчас убедимся, будет удовлетворять граничным условиям. Этой сумме соответствует функция

$$\Psi = [A_1 J_m(\varkappa_1 r) + A_2 J_m(\varkappa_2 r)]\,e^{i(m\varphi-\beta z)} \qquad (23,12)$$

и составляющие поля:

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= i\left\{A_1\left[S\varkappa_1 J'_m(\varkappa_1 r) + T_1\frac{m}{r}J_m(\varkappa_1 r)\right] + \right.\\
&\quad \left. + A_2\left[S\varkappa_2 J'_m(\varkappa_2 r) + T_2\frac{m}{r}J_m(\varkappa_2 r)\right]\right\},\\
E_\varphi &= -\left\{A_1\left[T_1\varkappa_1 J'_m(\varkappa_1 r) + S\frac{m}{r}J_m(\varkappa_1 r)\right] + \right.\\
&\quad \left. + A_2\left[T_2\varkappa_2 J'_m(\varkappa_2 r) + S\frac{m}{r}J_m(\varkappa_2 r)\right]\right\},\\
E_z &= \beta\left[A_1 W_1 J_m(\varkappa_1 r) + A_2 W_2 J_m(\varkappa_2 r)\right],\\
H_r &= \beta\left\{A_1\left[M_1\varkappa_1 J'_m(\varkappa_1 r) + N\frac{m}{r}J_m(\varkappa_1 r)\right] + \right.\\
&\quad \left. + A_2\left[M_2\varkappa_2 J'_m(\varkappa_2 r) + N\frac{m}{r}J_m(\varkappa_2 r)\right]\right\},\\
H_\varphi &= i\beta\left\{A_1\left[N\varkappa_1 J'_m(\varkappa_1 r) + M_1\frac{m}{r}J_m(\varkappa_1 r)\right] + \right.\\
&\quad \left. + A_2\left[N\varkappa_2 J'_m(\varkappa_2 r) + M_2\frac{m}{r}J_m(\varkappa_2 r)\right]\right\},\\
H_z &= -i\beta^2\left[A_1 R_1 J_m(\varkappa_1 r) + A_2 R_2 J_m(\varkappa_2 r)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (23,13)$$

(Во всех выражениях (23,13) опущен множитель $e^{i(m\varphi-\beta z)}$.)

Подставляя E_z и E_φ из (23,13) в условия (23,11), мы придем к системе однородных линейных уравнений для коэффициентов A_1 и A_2:

$$\left.\begin{aligned} A_1 W_1 J_m(\varkappa_1 a) + A_2 W_2 J_m(\varkappa_2 a) = 0, \\ A_1\left[T_1 \varkappa_1 J'_m(\varkappa_1 a) + S\frac{m}{a} J_m(\varkappa_1 a)\right] + \\ + A_2\left[T_2 \varkappa_2 J'_m(\varkappa_2 a) + S\frac{m}{a} J_m(\varkappa_2 a)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23,14)$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим трансцендентное уравнение, которое совместно с двумя уравнениями (14,8) составит систему, определяющую величины β, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. После того как эти величины определены, отношение коэффициентов A_1 и A_2 может быть найдено из любого уравнения (23,14), например из более простого первого уравнения. Тогда все составляющие поля с точностью до общего произвольного множителя определятся из выражений (23,13).

Рассмотрим случай феррита. Тогда равенство нулю определителя системы (23,14) с учетом (14,25) даст следующее трансцендентное уравнение:

$$\left(\frac{k_0^2\varepsilon\mu_\perp - \beta^2}{\varkappa_1} - \varkappa_1\right)\frac{J'_m(\varkappa_1 a)}{J_m(\varkappa_1 a)} - \left(\frac{k_0^2\varepsilon\mu_\perp - \beta^2}{\varkappa_2} - \varkappa_2\right)\frac{J'_m(\varkappa_2 a)}{J_m(\varkappa_2 a)} - \\ - \frac{\mu_a}{\mu}\frac{m}{a}\beta^2\left(\frac{1}{\varkappa_1^2} - \frac{1}{\varkappa_2^2}\right) = 0. \qquad (23,15)$$

Это уравнение было независимо и почти одновременно получено М. А. Гинцбургом [240], Кейлзом [237], Сулом и Уокером [216] и Гамо [236].

Остановимся несколько подробнее на уравнении (23,15). Мы видим прежде всего, что β входит в это уравнение, как и в уравнения (14,24), только в квадрате. Поэтому знак β, т. е. направление распространения волны, не оказывает влияния на значения β, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Как следует из (23,13), изменение знака β не приводит к изменению и конфигурации поля. Изменение знака E_z и $H_\perp$, которое происходит при этом, имеет место и в случае изотропной среды и, как нетрудно убедиться, не оказывает влияния на форму силовых линий поля.

Величины μ_a и m входят в уравнение (23,15) и в первых степенях. Таким образом, направление постоянного намагничивания, определяющее знак μ_a, и направление вращения поляризации волны (направление «распространения» бегущей по азимуту волны), которое соответствует знаку m, оказывают влияние на величины $|\beta|$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Поскольку μ_a и m входят в первых степенях в (23,15) только в виде произведения $\mu_a m$, то определяющим является, так же как и в случае однородных плоских волн в неограниченной среде (§ 19), направление вращения волны относительно направления постоянного намагничивания. Волны с правым и левым вращением относительно этого направления имеют различные постоянные распространения, а ближние поля с правым и левым вращением—различные коэффициенты ослабления. Исключение представляет лишь случай $m=0$, т. е. волн и полей с осевой симметрией. Для них направление постоянного намагничивания не влияет на величину $|\beta|$.

Рассматривая распространение волн в неограниченной продольно намагниченной гиротропной среде (§ 19), мы показали, что различие постоянных распространения $\beta_п$ и $\beta_л$ для волн с круговой поляризацией поля и различными направлениями вращения приводит к преобразованию поляризации любой эллиптически поляризованной волны, распространяющейся в такой среде. В частности, при этом имеет место поворот осей эллипса поляризации—эффект Фарадея. Аналогичные явления имеют место и в круглом волноводе, заполненном продольно намагниченной гиротропной средой для волн с $m \neq 0$. Все полученные в § 19 формулы, связывающие параметры эллиптически поляризованной волны с величинами $\beta_п$ и $\beta_л$, будут справедливы и в случае регулярного волновода при $|m| = 1$. Для $|m| > 1$ формулы для эллиптичности останутся в силе, а угол поворота осей эллипса поляризации будет составлять (ср. с (19,14))

$$\Delta\vartheta = \frac{\beta_п - \beta_л}{2|m|} l. \qquad (23,16)$$

Роль вектора поля, поляризация которого рассматривалась в § 19, в случае волновода играет некоторый вектор, лежащий в плоскости поперечного сечения волновода

и жестко связанный с мгновенной структурой поля. Этот вектор можно назвать вектором поляризации волны. Поляризацией же самого поля мы при этом не интересуемся, она будет, конечно, различной в различных точках сечения волновода.

Введение вектора поляризации волны, разумеется, возможно и для круглого волновода, заполненного изотропной средой, в частности, для пустого волновода. Гиротропность среды проявляется в том, что постоянные распространения оказываются различными для двух бегущих по азимуту волн, для которых векторы поляризации волны имеют круговую поляризацию с противоположными направлениями вращения.

Уравнение (23,15) имеет при данном m бесконечное количество корней. Номера этих корней можно считать индексами типов полей, определяющими радиальную структуру поля. Однако, как уже указывалось выше, удобнее именовать различные типы полей в волноводе с продольно намагниченной гиротропной средой в соответствии с теми типами полей TE и TM, в которые они переходят при $\mu_a \to 0$ (и при $\varepsilon_a \to 0$, если рассматривается произвольная гиротропная среда). Предельные длины волн этих типов полей могут быть определены по общим формулам (23,10) и (23,11), причем последняя формула справедлива только в случае феррита.

Уравнение (23,15), совместно с (14,24), может быть решено лишь численными методами. Мы не останавливаемся здесь на результатах графоаналитического исследования корней этого уравнения [216], а также на результатах приближенного его решения при малых значениях μ_a [238, 240] (так называемое слабогиротропное приближение), так как круглый волновод, целиком заполненный ферритом, не находит в настоящее время практического применения. Причина этого заключается в том, что даже при правильно выбранных размерах такого волновода, когда в нем невозможно существование высших типов волн, «добротность» его (отношение угла поворота поляризации к потерям) оказывается ниже, чем для волновода, частично заполненного ферритом. При этом возникают дополнительные трудности, связанные с уменьшением сечения волновода в месте расположения феррита. Если

же размеры волновода с ферритом оставить такими же, как и пустого волновода, то в нем будет возможно существование нескольких высших типов волн. Возникновение этих волн приведет к узкополосности параметров устройства и большим потерям.

§ 24. Круглый волновод с ферритовым стержнем

Недостатки, свойственные круглому волноводу, целиком заполненному ферритом, могут быть в значительной степени устранены при частичном заполнении волновода. При этом целесообразно, во-первых, сохранить осевую симметрию системы, а во-вторых, разместить феррит в той области, где при круговой поляризации волны поляризация поля также будет приближаться к круговой. Этим требованиям удовлетворяет круглый волновод с расположенным по его оси круглым ферритовым стержнем. Такая конструкция находит очень широкое применение в технике сверхвысоких частот [24, 25].

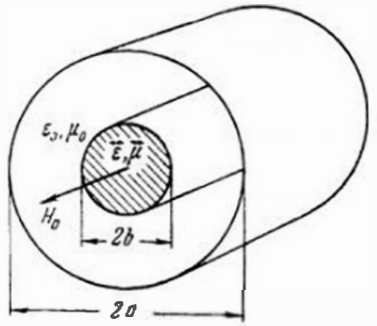


Рис. 49. Круглый волновод со стержнем из продольно намагниченной гиротропной среды.

Рассмотрим регулярный круглый волновод (рис. 49) с коаксиально расположенным в нем стержнем из продольно намагниченной гиротропной среды. Остальной объем волновода ($b < r < a$) заполнен изотропной средой с параметрами ε_0 и μ_0. (Все величины в изотропной среде мы будем писать с индексами «0», а в гиротропной среде—без индексов.) Задача заключается в определении постоянной распространения в таком волноводе.

Для строгого решения этой задачи необходимо записать выражения для составляющих поля в обеих областях и из граничных условий получить уравнение для постоянной распространения. Граничными условиями в данном случае будут: равенство нулю касательных составляющих

электрического поля на стенках волновода

$$\left.\begin{aligned} E_{z0} &= 0, \\ E_{\varphi 0} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } r = a \tag{24,1}$$

и непрерывность касательных составляющих электрического и магнитного поля на границе раздела сред

$$\left.\begin{aligned} E_z &= E_{z0}, \quad E_z = E_{\varphi 0}, \\ H_z &= H_{z0}, \quad H_z = H_{z0} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } r = b. \tag{24,2}$$

В гиротропной среде ($r < b$) будут справедливы те же выражения для функции Ψ (23,12) и составляющих поля (23,13), что и в целиком заполненном волноводе.

Поле в изотропной среде ($b < r < a$) является суммой полей TE и TM, составляющие которых могут быть выражены по известным формулам [14] через скалярные функции Ψ_{0TE} и Ψ_{0TM}. В данном случае, когда зависимость от z имеет вид $e^{-i\beta z}$, эти формулы запишутся следующим образом ($\Psi_0 = \psi_0 e^{-i\beta z}$):

поле TE

$$\left.\begin{aligned} &E_1 = 0, \; E_2 = -\frac{i\mu_0 k_0}{h_3}\frac{\partial \Psi_{0TM}}{\partial q_3}, \quad E_3 = \frac{i\mu_0 k_0}{h^2}\frac{\partial \Psi_{0TE}}{\partial q_2}, \\ &H_1 = \varkappa^2 \psi_{0TE}, \; H_2 = -\frac{i\beta}{h_2}\frac{\partial \Psi_{0TE}}{\partial q_2}, \; H_3 = -\frac{i\beta}{h_3}\frac{\partial \Psi_{0TE}}{\partial q_3}, \end{aligned}\right\} \tag{24,3}$$

поле TM

$$\left.\begin{aligned} &E_1 = \varkappa_0^2 \psi_{0TM}, \; E_2 = -\frac{i\beta}{h_2}\frac{\partial \Psi_{0TM}}{\partial q_2}, \quad E_3 = -\frac{i\beta}{h_3}\frac{\partial \Psi_{0TM}}{\partial q_3}, \\ &H_1 = 0, \; H_2 = \frac{i\varepsilon_0 k_0}{h_3}\frac{\partial \Psi_{0TM}}{\partial q_3}, \quad H_3 = -\frac{i\varepsilon_0 k_0}{h_2}\frac{\partial \Psi_{0TM}}{\partial q_2}, \end{aligned}\right\} \tag{24,4}$$

где q_2 и q_3 — ортогональные координаты в плоскости $z = \text{const}$, а h_2 и h_3 — коэффициенты Ламэ [2].

Функции ψ_{0TE} и ψ_{0TM} удовлетворяют уравнению

$$\nabla_\perp^2 \psi_0 + \varkappa_0^2 \psi_0 = 0, \tag{24,5}$$

которое отличается от уравнения (14,7) для функции ψ в гиротропной среде заменой $\varkappa_{1,2}^2$ на

$$\varkappa_0^2 = k_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2. \tag{24,6}$$

Решение уравнения (24,5) в полярных координатах запишется аналогично (23,2) в виде

$$\psi_0 = R_0(r)\,\Phi_0(\varphi). \tag{24,7}$$

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям при $r = b$, функция $\Phi_0(\varphi)$ должна иметь такой же вид, как и $\Phi(\varphi)$ для гиротропной среды. Функция же $R_0(r)$ должна являться суммой функций Бесселя $J_m(\varkappa_0 r)$ и Неймана $N_m(\varkappa_0 r)$, так как точка $r = 0$, в которой $N_m(\varkappa_0 r)$ обращается в бесконечность, не принадлежит данной области. Итак,

$$\Psi_{0TE} = [B_1 J_m(\varkappa_0 r) + C_1 N_m(\varkappa_0 r)]\, e^{i(m\varphi - \beta z)}, \tag{24,8}$$

$$\Psi_{0TM} = [B_2 J_m(\varkappa_0 r) + C_2 N_m(\varkappa_0 r)]\, e^{i(m\varphi - \beta z)}. \tag{24,9}$$

Поле в гиротропной среде имеет $E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$. Поэтому граничные условия при $r = b$ могут быть удовлетворены только в том случае, если поле в изотропной среде будет суммой полей TE и TM. Учитывая это, запишем с помощью формул (24,3) и (24,4) те составляющие поля в изотропной среде, которые войдут в граничные условия (24,1) и (24,2) (при этом так же, как в выражениях (23,13), опускаем множители $e^{i(m\varphi - \beta z)}$):

$$\left.\begin{aligned} E_{z0} &= \varkappa_0^2 [B_2 J_m(\varkappa_0 r) + C_2 N_m(\varkappa_0 r)], \\ E_{\varphi 0} &= i\mu_0 k_0 \varkappa_0 [B_1 J_m'(\varkappa_0 r) + C_1 N_m'(\varkappa_0 r)] + \\ &\quad + \frac{\beta m}{r}[B_2 J_m(\varkappa_0 r) + C_2 N_m(\varkappa_0 r)], \\ H_{z0} &= \varkappa_0^2 [B_1 J_m(\varkappa_0 r) + C_1 N_m(\varkappa_0 r)], \\ H_{\varphi 0} &= \frac{\beta m}{r}[B_1 J_m(\varkappa_0 r) + C_1 N_m(\varkappa_0 r)] - \\ &\quad - i\varepsilon_0 k_0 \varkappa_0 [B_2 J_m'(\varkappa_0 r) + C_2 N_m'(\varkappa_0 r)]. \end{aligned}\right\} \tag{24,10}$$

Подставляя выражения для составляющих поля из (24,10) и (23,13) в граничные условия (24,1) и (24,2), мы получим систему шести однородных линейных уравнений для шести коэффициентов: A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2. Равенство нулю определителя этой системы даст трансцендентное уравнение, в которое войдут неизвестные величины

β, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и $\varkappa_0$. Решая это уравнение совместно с двумя уравнениями (14,8) и уравнением (24,6), можно определить все указанные величины.

Не выписывая этого трансцендентного уравнения, которое окажется весьма громоздким, отметим лишь, что в него, так же как и в уравнение (23,15), β войдет только в квадрате, а величины μ_a и m—в первых степенях в виде произведения $\mu_a m$. Следовательно, для волновода с продольно намагниченным гиротропным стержнем останется в силе вывод, сделанный в § 23, о зависимости β от направления намагничивания и направления вращения волны с круговой поляризацией. Так же как и для волновода, целиком заполненного гиротропной средой, $|\beta|$ в волноводе со стержнем не будет зависеть от направления распространения энергии.

Отсюда следует, что в круглом волноводе с продольно намагниченным гиротропным стержнем будет происходить такое же преобразование поляризации эллиптически поляризованной волны, как и в неограниченной среде или целиком заполненном волноводе. В частности, формулы (23,16) и (19,16), которые связывают угол поворота поляризации и эллиптичность с постоянными распространения $\beta_п$ и $\beta_л$, будут справедливы и для волновода со стержнем.

Отыскание корней трансцендентного уравнения, определяющего, совместно с уравнениями (14,8) и (24,6), постоянные распространения $\beta_п$ и $\beta_л$ в волноводе со стержнем, возможно лишь численными методами и практически может быть осуществлено лишь при помощи современных быстродействующих электронных счетных машин. Так как задача об определении постоянной распространения в круглом волноводе с ферритовым стержнем представляет большой практический интерес, то следует остановиться на приближенных методах ее решения.

Наиболее простым из приближенных методов решения граничных задач является рассмотренный в главе 6 метод возмущений с квазистатической аппроксимацией внутреннего поля. Рассмотрим применение этого метода к нашей задаче.

Будем исходить из формулы (16,21). В случае ферритового стержня эта формула с учетом выражения для $\mathcal{H}_0^* \Delta\hat{\mu}\mathcal{H}$, аналогичного (16,20), запишется следующим

образом:

$$\beta-\beta_0=\frac{k_0\zeta_0}{2N_0}\int\limits_{S_1}[(\mu-\mu_0)\,\mathcal{H}_{0\perp}^{*}\mathcal{H}_{\perp}+i\mu_a z_0(\mathcal{H}_{0\perp}^{*}\times\mathcal{H}_{\perp})+$$
$$+(\mu_{\parallel}-\mu_0)\,\mathcal{H}_{0z}^{*}\mathcal{H}_z+(\varepsilon-\varepsilon_0)\,\mathcal{E}_0^{*}\mathcal{E}]\,dS. \quad (24,11)$$

Здесь β_0 и ζ_0 — соответственно постоянная распространения и волновое сопротивление невозмущенного волновода, а N_0 — величина, определяемая выражением (16,14).

Воспользуемся выражениями (17,7) и (17,11) для составляющих внутреннего поля в продольно намагниченном бесконечном цилиндре. С учетом их выражение (24,11) запишется:

$$\beta-\beta_0=\frac{k_0\zeta_0}{2N_0}\int\limits_{S_1}\Big[2\mu_0\frac{\mu^2-\mu_0^2-\mu_a^2}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}\,\mathcal{H}_{0\perp}^{*}\mathcal{H}_{0\perp}+$$
$$+4\frac{i\mu_a\mu_0^2}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}\,z_0(\mathcal{H}_{0\perp}^{*}\times\mathcal{H}_{0\perp})+(\mu_{\parallel}-\mu_0)\,\mathcal{H}_{0z}^{*}\mathcal{H}_{0z}+$$
$$+2\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\,\mathcal{E}_{0\perp}^{*}\mathcal{E}_{0\perp}+(\varepsilon-\varepsilon_0)\,\mathcal{E}_{0z}^{*}\mathcal{E}_{0z}\Big]\,dS. \quad (24,12)$$

Рассмотрим случай, когда невозмущенная волна является волной TE. Тогда составляющие собственных векторных функций невозмущенного волновода, входящие в (24,11), можно представить следующим образом [14]:

$$\left.\begin{aligned}&\mathcal{H}_{0\perp}=\nabla\psi_0, \qquad \mathcal{H}_{0z}=i\frac{\varkappa_0^2}{\beta_0}\psi_0,\\ &\mathcal{E}_{0\perp}=\zeta_0\nabla\psi_0\times z_0, \quad \mathcal{E}_{0z}=0,\end{aligned}\right\} \quad (24,13)$$

где $\varkappa_0^2=k_0^2\varepsilon_0\mu_0-\beta_0^2$, а ψ_0 — скалярная собственная функция поперечного сечения невозмущенного волновода.

Подставим (24,13) в (24,12) и заменим интеграл по поперечному сечению стержня S_1 произведением подынтегральной функции при $r=0$ на площадь поперечного сечения. Такая замена справедлива, если радиус стержня b много меньше длины волны в феррите, что совпадает с общим условием применимости квазистатического метода аппроксимации внутреннего поля, которым мы

пользуемся. В результате получим:

$$\beta-\beta_0=\frac{k_0\zeta_0^2\pi b^2}{2N_0}\left[2\mu_0\frac{\mu^2-\mu_0^2-\mu_a^2}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}\nabla\psi_0^*\nabla\psi_0+\right.$$
$$+4\frac{i\mu_a\mu_0^2}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}\varkappa_0(\nabla\psi_0^*\times\nabla\psi_0)+(\mu_{\parallel}-\mu_0)\frac{\varkappa^4}{\beta_0^2}|\psi_0|^2+$$
$$\left.+2\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\varepsilon+\varepsilon_0}\zeta_0^2\nabla\psi_0^*\nabla\psi_0\right]_{r=0}. \quad (24,14)$$

Для того чтобы вычислить величину N_0, подставим $\mathscr{E}_{0\perp}$ из (24,13) в выражение (16,14). Тогда с учетом известной формулы теории волноводов [14]

$$\int_{S_0}\nabla\psi^*\nabla\psi\,dS=\varkappa^2\int_{S_0}|\psi|^2\,dS$$

получим:

$$N_0=\zeta^2\varkappa_0^2\int_{S_0}|\psi_0|^2\,dS. \quad (24,15)$$

В качестве функции ψ_0 мы должны принять выражение

$$\psi_0=J_m(\varkappa_0 r)\,e^{im\varphi}, \quad (24,16)$$

соответствующее волнам с круговой поляризацией и правым или левым, в зависимости от знака m, вращением. Подставим это выражение в (24,16) и примем во внимание интегральную формулу [13]:

$$2\int_0^{x_1}xJ_m^2(x)\,dx=x_1^2J_m'^2(x_1)+(x_1^2-m^2)J_m^2(x_1).$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае волн TE

$$J_m'(\varkappa_0 a)=0$$

и обозначая корни этого уравнения $\varkappa_0 a=A_{mn}$, получим окончательное выражение для N_0:

$$N_0=\pi\zeta_0^2(A_{mn}^2-m^2)J_m^2(A_{mn}). \quad (24,17)$$

Вычислим теперь входящие в (24,14) величины $[\nabla\psi_0^*\nabla\psi_0]_{r=0}$ и $z_0\,[\nabla\psi_0^*\times\nabla\psi_0]_{r=0}$.

$$\nabla\psi_0=r_0\frac{\partial\psi_0}{\partial r}+\varphi_0\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi}=\left[r_0\varkappa_0J_m'(\varkappa_0 r)+\right.$$
$$\left.+\varphi_0\frac{im}{r}J_m(\varkappa_0 r)\right]e^{im\varphi}, \quad (24,18)$$

где r_0 и φ_0 — единичные векторы, касательные к координатным линиям r и φ. Из (24,18) следует:

$$\nabla\psi_0^*\nabla\psi_0=\varkappa_0^2J_m'^2(\varkappa_0 r)+\frac{m^2}{r^2}J_m^2(\varkappa_0 r),$$

$$\nabla\psi_0^*\times\nabla\psi_0=-2\frac{im}{r}\varkappa_0J_m(\varkappa_0 r)J_m'(\varkappa_0 r)z_0.$$

Отсюда при $r=0$ получим:

$$[\nabla\psi_0^*\nabla\psi_0]_{r=0}=\varkappa_0^2(1+m^2)J_m'^2(0), \quad (24,19)$$
$$z_0[\nabla\psi_0^*\times\nabla\psi_0]_{r=0}=-2i\varkappa_0^2mJ_m'^2(0). \quad (24,20)$$

Подставляя (24,19) и (24,20) в (24,14), придем к окончательной формуле для приращения постоянной распространения

$$\beta-\beta_0=\beta_0\frac{b^2}{a^2}\frac{A_{mn}^2}{(A_{mn}^2-m^2)J_m^2(A_{mn})}\left\{\left[\frac{\mu^2-\mu_0^2-\mu_a^2}{(\mu_0+\mu)^2-\mu_a^2}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{k_0^2\mu_0^2\varepsilon_0}{\beta_0^2}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right](1+m^2)J_m'^2(0)+\frac{4\mu_a\mu_0}{(\mu+\mu_0)^2-\mu_a^2}mJ_m'^2(0)+$$
$$\left.+\frac{\mu_{\parallel}-\mu_0}{2\mu_0}\frac{\varkappa_0^2}{\beta_0^2}J_m^2(0)\right\}. \quad (24,21)$$

Как видно из (24,21), приращение постоянной распространения в рассмотренном приближении пропорционально площади стержня и состоит из четырех членов. Первый член зависит от поперечных компонентов тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ и не изменяется при изменении направления намагничивания или направления вращения поляризации. Второй, «электрический» член зависит от ε стержня. Третий член, так же как и первый, зависит от поперечных компонентов $\overleftrightarrow{\mu}$, но в отличие от первого изменяет свой знак при изменении направления постоянного намагничивания или направления вращения поляризации

И, наконец, четвертый член определяется продольным компонентом тензора $\hat{\mu}$. Из свойств бесселевых функций [1] следует, что первые три члена не обращаются в нуль только при $|m|=1$, а четвертый член — только при $m=0$. Таким образом, в рассмотренном приближении не равное нулю приращение β получается только при $m=0$ и $m=\pm 1$.

При $m=\pm 1$ первый и третий члены (24,21) могут быть объединены, и выражение это запишется следующим образом:

$$\beta-\beta_0=\frac{1}{2}\beta_0\frac{b^2}{a^2}\frac{A_{1n}^2}{(A_{1n}^2-1)J_1^2(A_{1n})}\left[\frac{\mu\pm\mu_a-\mu_0}{\mu\pm\mu_a+\mu_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{k_0^2\mu_0\varepsilon_0}{\beta_0^2}\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\right], \quad (24,22)$$

где верхние знаки соответствуют правому, а нижние — левому вращению. В этом случае, как и для однородных плоских волн в продольно намагниченной среде, эффективной скалярной магнитной проницаемостью для волн с правым и левым вращением являются соответственно величины $\mu+\mu_a$ или $\mu-\mu_a$.

Определив $\beta_п$ и $\beta_л$ из выражения (24,22), мы можем затем по формулам (19,14) и (19,15) определить углы поворота поляризации и эллиптичность волны. Например, в наиболее важном случае $n=1$ (волна TE_{11}) угол поворота поляризации на участке регулярного волновода длиной l составит (при $\mu_0=1$):

$$\vartheta=4{,}2\,\beta_0\frac{b^2}{a^2}\frac{\mu_a}{(\mu+1)^2-\mu_a^2}l. \quad (24,23)$$

Как уже отмечалось выше, пределы применимости метода возмущений при квазистатической аппроксимации поля определяются тем требованием, чтобы размер возмущения h был много меньше, чем длина волны в неограниченной среде с параметрами области возмущения. Практически достаточно, чтобы выполнялось условие (17,13).

В нашем случае h представляет собой радиус стержня. Тогда, принимая, например, $\frac{a}{\lambda}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $|\varepsilon|=9$ и $|\mu|=1$, придем к следующему условию справедливости

полученных приближенных выражений:

$$\frac{b}{a}<0{,}04.$$

На практике в поляризационных ферритовых устройствах используются значительно бо́льшие отношения $\frac{b}{a}$, обычно порядка 0,2—0,4. При таких размерах стержня квазистатический метод совершенно неприменим для количественных расчетов. Однако полученные этим очень простым методом результаты, в частности, выражение (24,23), правильно отражают характер зависимости параметров волновода с ферритовым стержнем от параметров феррита. Например, приближенная пропорциональность угла ϑ величине μ_a, следующая из (24,23) при малых μ_a, хорошо подтверждается и при больших радиусах стержня.

Для более точного расчета постоянной распространения в круглом волноводе с ферритовым стержнем произвольного радиуса может быть использован другой вариант метода возмущений.

Невозмущенной системой при этом является волновод со стержнем того же радиуса, с теми же μ и ε, но ненамагниченным (с $\mu_a=0$). Разумеется, задача об определении постоянной распространения такого волновода должна быть предварительно решена. Строгое ее решение может быть проведено по той же схеме, что и строгое решение для намагниченного стержня, но является, конечно, менее громоздким. Возможно использование для ее решения и различных приближенных методов.

Возмущение заключается в намагничивании стержня, т. е. в появлении антисимметричного компонента тензора магнитной проницаемости. И если это возмущение считать малым, ограничиваясь случаем $\mu_a \ll \mu$, то могут быть получены сравнительно простые выражения для приращения постоянной распространения. Практически эти выражения справедливы при μ_a меньшем, приблизительно, чем 0,3. Этот метод был использован Сулом и Уокером [216] и подробно развит Я. А. Моносовым [246].

На рис. 50 показана полученная Я. А. Моносовым [247] зависимость угла поворота поляризации от отношения радиуса стержня к радиусу волновода. При малых

радиусах эта зависимость совпадает с квадратичной зависимостью, полученной квазистатическим методом, которая показана на том же рисунке пунктиром. Затем рост угла ϑ с увеличением радиуса стержня происходит гораздо быстрее, чем это следовало бы из квазистатического расчета, и при некотором $\frac{b}{a}$ достигается максимум. Такой характер зависимости ϑ от радиуса стержня подтверждается экспериментально.

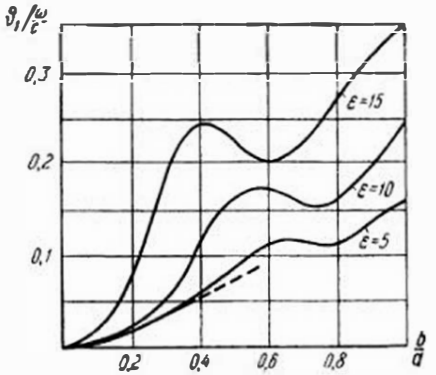


Рис. 50. Зависимость угла поворота поляризации в круглом волноводе с ферритовым стержнем от отношения радиуса стержня к радиусу волновода.
Пунктир—расчет методом возмущений с квазистатической аппроксимацией поля. Сплошные линии—более точный расчет [247]: $\mu=\mu_{\|}=1$; $\mu_a=0.2$.

Быстрое возрастание ϑ в некотором интервале значений $\frac{b}{a}$ может быть качественно объяснено концентрацией энергии [314] в ферритовом стержне, подобной той, которая имеет место в диэлектрическом волноводе. Эффект концентрации энергии (или «эффект диэлектрического волновода») хорошо объясняет увеличение крутизны кривой $\vartheta\left(\frac{b}{a}\right)$ и смещение этой кривой влево (рис. 50) при увеличении ε ферритового стержня.

Этим же эффектом объясняется в основном и частотная зависимость угла ϑ в волноводе с ферритовым стержнем. При увеличении частоты вследствие возрастания «электрической толщины» стержня кривая $\vartheta\left(\frac{b}{a}\right)$ претерпевает приблизительно такое же изменение, как и при увеличении ε. Это приводит к значительному росту ϑ с частотой при практически используемых радиусах стержней. Частотный коэффициент угла ϑ приблизительно пропорционален производной ϑ по $\frac{b}{a}$. Таким образом, выгодными с точки зрения широкополосности оказываются области очень малых или больших радиусов. Использование стержней с большими радиусами затрудняется, однако, возникновением высших типов волн.

Концентрация энергии в ферритовом стержне является лишь одним, правда наиболее существенным, из факторов, оказывающих влияние на ход кривых $\vartheta\left(\frac{b}{a}\right)$. Другим фактором является изменение структуры электромагнитного поля в стержне при изменении его радиуса. Заметим, что все эти факторы были бы учтены строгим расчетом, схема которого рассматривалась в начале этого параграфа.

ГЛАВА 9

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД С ПОПЕРЕЧНО НАМАГНИЧЕННЫМ ФЕРРИТОМ

§ 25. Волновод, заполненный поперечно намагниченным ферритом

В этой главе мы рассмотрим распространение электромагнитных волн в волноводах, содержащих поперечно намагниченный (по отношению к оси волновода) феррит. Решение этой задачи при произвольной форме сечения волновода невозможно, так как при этом остается неопределенным направление постоянного магнитного поля. Поэтому мы сразу остановимся на широко используемом в технике прямоугольном волноводе с постоянным полем, перпендикулярным его широкой стенке. В этом случае, как мы увидим ниже, будет возникать ряд важных невзаимных эффектов, а сравнительно небольшой магнитный зазор, равный размеру узкой стенки волновода, облегчит создание подмагничивающего поля.

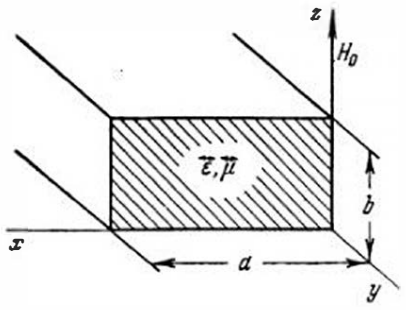


Рис. 51. Прямоугольный волновод, заполненный поперечно намагниченной гиротропной средой.

Остановимся прежде всего на наиболее простой задаче о регулярном прямоугольном волноводе, целиком заполненном поперечно намагниченной гиротропной средой. Направим оси координат так, как показано на рис. 51, и запишем комплексные амплитуды поля в виде

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_\nu(x,z)\, e^{-i\beta\nu}, \\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{H}_\nu(x,z)\, e^{-i\beta\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{25,1}$$

Подставим эти амплитуды в уравнения Максвелла (12,15) и (12,17) при $\boldsymbol{j}_{ст} = 0$ и спроектируем полученные уравнения на оси координат, предполагая, что параметры среды имеют вид (13,1) и (13,3). Тогда для составляющих комплексных амплитуд $\boldsymbol{E}_\nu$ и $\boldsymbol{H}_\nu$ получим (опуская индексы «ν») следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} i\beta E_z + \frac{\partial E_y}{\partial z} - ik_0\mu H_x + k_0\mu_a H_y &= 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0\mu_a H_x + ik_0\mu H_y &= 0, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} + i\beta E_x + ik_0\mu_{\parallel} H_z &= 0, \\ i\beta H_z + \frac{\partial H_y}{\partial z} + ik_0\varepsilon E_x - k_0\varepsilon_a E_y &= 0, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_0\varepsilon_a E_x - ik_0\varepsilon E_y &= 0, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} + i\beta H_x - ik_0\varepsilon_{\parallel} E_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25,2}$$

Граничное условие (при идеальной проводимости стенок)

$$\boldsymbol{E}_\nu \times \boldsymbol{n}_0 = 0 \quad \text{на стенках волновода}$$

в данном случае даст:

$$\left.\begin{aligned} E_y &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad z = 0, \quad z = b, \\ E_x &= 0 \quad \text{при} \quad\quad\quad\quad\quad z = 0, \quad z = b, \\ E_z &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a. \end{aligned}\right\} \tag{25,3}$$

Рассмотрим простейшие и наиболее важные с практической точки зрения типы полей, характеризующиеся независимостью поля от координаты z, т. е. примем $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. При этом система (25,2) распадается на

две независимые системы: одну — для составляющих E_z, H_x и H_y и другую — для составляющих E_x, E_y и H_z. Заметим, что такое же положение имело место и в случае однородных плоских волн в неограниченной поперечно намагниченной среде, когда $\frac{\partial}{\partial z}=0$ и $\frac{\partial}{\partial x}=0$. Так как граничные условия для всех составляющих поля независимы, то две системы, на которые распалась система (25,2), соответствуют двум независимым классам полей. Поля с составляющими E_z, H_x и H_y можно назвать TE_{n0}, а поля с составляющими E_x, E_y и H_z — TM_{n0}; индексы «n» и «0» обозначают, как обычно, число вариаций поля по осям соответственно x и z.

Поля TM_{n0} не удовлетворяют, однако, граничным условиям рассматриваемой задачи и не могут существовать. Действительно, из (25,3) следует, что все составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ этих полей обращаются в нуль при $z=0$ и $z=b$. Но так как $\frac{\partial}{\partial z}=0$, то вектор $\boldsymbol{E}$ для поля TM_{n0} везде равен нулю.

Система уравнений для составляющих полей TE_{n0} запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\beta E_z - k_0\mu H_x - ik_0\mu_a H_y = 0,\\ &\frac{\partial E_z}{\partial x} - k_0\mu_a H_x - ik_0\mu H_y = 0,\\ &\frac{\partial H_y}{\partial x} + i\beta H_x - ik_0\varepsilon_{\parallel} E_z = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (25,4)$$

Из этой системы легко выразить H_x и H_y через E_z:

$$H_x = \frac{1}{k_0\mu_\perp}\left(\beta E_z - \frac{\mu_a}{\mu}\frac{dE_z}{dx}\right), \qquad (25,5)$$

$$H_y = \frac{i}{k_0\mu_\perp}\left(\beta\frac{\mu_a}{\mu}E_z - \frac{dE_z}{dx}\right), \qquad (25,6)$$

а для E_z получить следующее уравнение:

$$\frac{d^2E_z}{dx^2} + \varkappa^2 E_z = 0. \qquad (25,7)$$

Здесь

$$\varkappa^2 = k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_\perp - \beta^2, \qquad (25,8)$$

а $\mu_\perp$, как и ранее, определяется выражением (13,7) и совпадает с эффективной магнитной проницаемостью для волн TE в неограниченной продольно намагниченной среде.

Решение уравнения (25,7), удовлетворяющее граничному условию при $x=0$, запишется:

$$E_z = A\sin\varkappa x. \qquad (25,9)$$

Из граничного условия при $x=a$ следует:

$$\varkappa = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{где} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (25,10)$$

С учетом этого соотношения из (25,8) получим окончательное выражение для постоянной распространения волн TE_{n0} в прямоугольном волноводе, заполненном поперечно намагниченной гиротропной средой:

$$\beta = \sqrt{k_0^2\varepsilon_{\parallel}\mu_\perp - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}. \qquad (25,11)$$

Если параметры $\varepsilon_{\parallel}$, μ и μ_a можно считать вещественными, то, полагая в (25,11) $\beta=0$, получим выражение для предельных длин волн

$$\lambda_{\text{пр}} = \frac{2a}{n}\sqrt{\varepsilon_{\parallel}\mu_\perp}. \qquad (25,12)$$

В этом случае длина волны в волноводе, фазовая и групповая скорости определятся по обычным формулам теории волноводов с изотропной средой [14], если в них заменить ε на $\varepsilon_{\parallel}$ и μ на $\mu_\perp$.

При комплексных параметрах среды вещественная и мнимая части постоянной распространения

$$\beta = \beta' - i\beta''$$

определятся из формулы (25,11). Эту формулу можно рассматривать как частный случай выражения

$$\beta = k_0\sqrt{\varepsilon_{\text{эф}}\mu_{\text{эф}} - r^2}, \qquad (25,13)$$

причем в нашем случае $r = \frac{\varkappa}{k_0}$. Из (25,13) нетрудно получить (отбрасывая индексы «эф»):

$$\beta' = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{|\varepsilon|^2|\mu|^2 - 2r^2(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'') + r^4} + \varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'' + r^2}, \tag{25,14}$$

$$\beta'' = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{|\varepsilon|^2|\mu|^2 - 2r^2(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'') + r^4} - \varepsilon'\mu' + \varepsilon''\mu'' + r^2}. \tag{25,15}$$

При $r=0$ эти формулы переходят в формулы Аркадьева (18,9) и (18,10).

Заметим, что распределение электрического поля в рассматриваемом волноводе, которое определяется выражением (25,9), не отличается от случая волновода, заполненного изотропной средой. Выражения же для магнитного поля (25,5) и (25,6) существенно отличаются от случая изотропной среды. Подставляя (25,9) в эти выражения, получим:

$$H_x = \frac{A}{k_0\mu_\perp}\left(\beta \sin \varkappa x - \frac{\mu_a \varkappa}{\mu}\cos \varkappa x\right), \tag{25,16}$$

$$H_y = i\frac{A}{k_0\mu_\perp}\left(\beta \frac{\mu_a}{\mu}\sin \varkappa x - \varkappa \cos \varkappa x\right). \tag{25,17}$$

Из выражений (25,16) и (25,17) можно сделать два важных вывода. Во-первых, отношение поперечных составляющих электрического и магнитного полей, которое для волновода с изотропной средой не зависит от координат и называется волновым сопротивлением [14], в случае гиротропной среды зависит от координат. Следовательно, понятие волнового сопротивления не может быть введено (по крайней мере так, как в случае изотропной среды) для прямоугольного волновода с поперечно намагниченной гиротропной средой.

Во-вторых, распределение магнитного поля изменяется при изменении знака β, т. е. направления распространения, и знака μ_a, т. е. направления постоянного намагничивания. В этом проявляется невзаимность данной системы. Эта невзаимность иллюстрируется рис. 52, на котором показаны силовые линии магнитного поля в прямоугольном

волноводе, заполненном ферритом, для волны TE_{10} и двух направлений распространения или двух направлений постоянного намагничивания. Очевидно, что одновременное изменение обоих этих направлений не изменит конфигурации силовых линий.

Остановимся теперь кратко на исследованных А. Л. Микаэляном [253] и др. [259, 220] волнах [1]), у которых

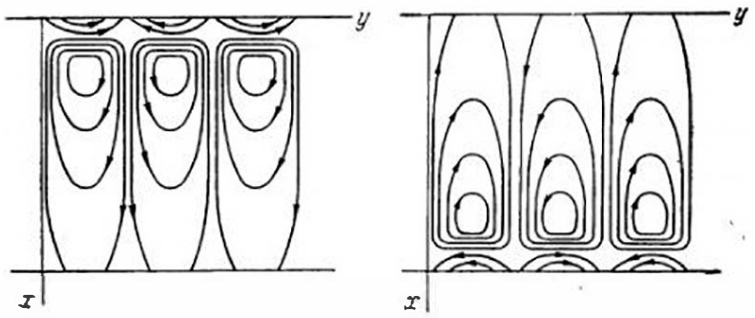


Рис. 52. Силовые линии магнитного поля в прямоугольном волноводе, заполненном ферритом, для двух направлений распространения энергии.

$\varepsilon=9$; $\mu=0{,}9$; $\mu_a=0{,}6$; $\lambda=3.2$ см; $a=2{,}3$ см.

составляющие поля зависят от обеих координат x и z и плоскости поперечного сечения прямоугольного волновода. Из системы (25,2) следует, что, как и в волноводе с продольно намагниченным ферритом (§ 22), волны в прямоугольном волноводе с поперечно намагниченным ферритом при $\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$ не будут волнами TE или TM. Зависимость составляющих поля этих волн от координаты z оказывается [253] такой же, как и для волновода с изотропной средой, а именно $\frac{\sin}{\cos} k_z z$. При этом из граничных условий (25,3) следует:

$$k_z = \frac{\pi m}{b}, \tag{25,18}$$

где b — высота волновода, а $m = 1, 2, 3 \ldots$

[1]) См. сноску на стр. 220.

Зависимость же от координаты x (в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному полю) оказывается более сложной. Это связано с тем, что в гиротропной среде могут распространяться две волны с различными волновыми векторами. Например, фиксируя направление распространения волны в неограниченной среде (§ 18), мы получили два значения волнового вектора k. В данном случае фиксированы значения k_z и $k_y \equiv \beta$; при этом мы получаем два возможных значения проекции волнового вектора на ось x, именно k_{x1} и k_{x2}. Парциальные волны, соответствующие каждому значению k_x, не удовлетворяют, однако, граничным условиям (25,3), подобно тому, как парциальные волны с различными $\varkappa_{1,2}$ (§ 23) не удовлетворяли граничным условиям на стенках круглого волновода. Сумма этих волн с определенными коэффициентами, как и в случае круглого волновода, удовлетворяет граничным условиям и дает, таким образом, нормальную волну прямоугольного волновода, заполненного ферритом.

Из граничных условий могут быть получены трансцендентные уравнения для k_{x1}, k_{x2}, β и отношения амплитуд парциальных волн. Не останавливаясь на этих уравнениях [253], отметим лишь, что в отличие от случая изотропной среды (или гиротропной, но при $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, когда имеет место одно значение k_x) граничные условия могут быть удовлетворены и при экспоненциальной зависимости от x, т. е. при $k_{x1,2}^2 < 0$. Отсюда следует [220] возможность существования положительных β^2 (распространяющихся волн) при сколь угодно больших k_z и $k_{x1,2}$, т. е. при сколь угодно малых поперечных размерах волновода. Как показывает анализ этой задачи, проведенный Сэйделом [220], такие волны, не имеющие отсечки, могут существовать при условии[1]):

$$|\mu| < |\mu_a|. \qquad (25,19)$$

[1]) Это интересное явление—отсутствие отсечки для некоторых типов волн—имеет место и в прямоугольном волноводе, частично заполненном поперечно намагниченным ферритом [269], а также в круглом волноводе с продольно намагниченным ферритом [216, 220].

Отличие структуры электромагнитного поля в волноводе, заполненном гиротропной средой, от структуры поля в пустом волноводе приводит к тому, что задача об отражении волны от плоской, перпендикулярной оси волновода границы раздела двух сред, из которых по крайней мере одна является гиротропной, не решается элементарно, как в случае изотропных сред [14]. Для решения такой задачи необходимо представить поля как в заполненном волноводе, так и в пустом в виде рядов, состоящих из конечного числа распространяющихся волн и бесконечного числа ближних полей. Коэффициенты этих рядов определятся из условий непрерывности касательных составляющих поля на границе раздела. При этом очевидно, что, если падающая волна в пустом волноводе является волной TE_{10}, то в рядах можно ограничиться волнами и полями рассмотренного в этом разделе класса TE_{n0}.

Практическая реализация этого пути оказывается весьма сложной [217]. Еще более сложной оказывается задача о прохождении волны в прямоугольном волноводе через участок конечной длины, заполненный гиротропной средой. Однако отражение волны TE_{n0} в прямоугольном волноводе, заполненном поперечно намагниченной гиротропной средой, от металлической поверхности, перпендикулярной оси волновода («короткого замыкания»), происходит без возникновения других типов волн и ближних полей. Это происходит потому, что граничные условия на металлической поверхности накладываются только на электрическое поле, а его распределение не зависит от направления распространения. Отсюда следует, что падающая и отраженная волны одного типа могут обеспечить выполнение граничных условий.

Отрезок прямоугольного волновода, целиком заполненный поперечно намагниченным ферритом, вообще говоря, может быть использован для управления прохождением энергии через него при помощи внешнего подмагничивающего поля. При полях, далеких от ферромагнитного резонанса, изменение поля приведет к изменению фазы волны на выходе, а в случае больших отражений—и амплитуды. В области ферромагнитного резонанса будет иметь место сильное поглощение энергии.

Однако ферритовые устройства, использующие такой целиком заполненный прямоугольный волновод, будут иметь большие потери; согласование их вследствие больших отражений на границе феррита будет сложным, а параметры окажутся весьма узкополосными. Одна из причин этого заключается в том, что в прямоугольном волноводе стандартных размеров при заполнении его поперечно намагниченным ферритом (как и в круглом волноводе в случае продольного намагничивания) может распространяться обычно несколько типов волн. Например, в случае, которому соответствует рис. 52, могут распространяться волны TE_{10}, TE_{20} и TE_{30}.

Поэтому прямоугольный волновод, целиком заполненный ферритом, не применяется в технике. Как и в случае круглого волновода с продольным намагничиванием, свойственные ему недостатки могут быть устранены при частичном заполнении волновода. При этом, как мы увидим ниже, управление параметрами распространяющейся волны сможет быть осуществлено очень эффективно. Кроме того, в этом случае появится весьма интересный и важный эффект невзаимности постоянной распространения, т. е. зависимости ее от направления распространения, который в целиком заполненном волноводе не имел места.

§ 26. Волновод с поперечно намагниченными ферритовыми пластинами

Большой практический интерес представляет такой случай частичного заполнения прямоугольного волновода ферритом, когда в волновод вводятся сравнительно тонкие пластины, параллельные узким стенкам волновода и намагниченные в направлении, перпендикулярном широким стенкам (см., например, рис. 53). Этот случай является выгодным и с точки зрения использования внешнего магнитного поля, так как размагничивающий фактор пластин мал, а магнитный зазор может быть почти целиком заполнен пластиной. Если высота пластин, как показано на рисунке, совпадает с высотой волновода и если мы ограничимся рассмотрением регулярного волновода, то этот случай сравнительно легко поддается теоретическому исследованию.

Рассмотрим прежде всего регулярный прямоугольный волновод с одной пластиной, произвольным образом расположенной в волноводе (рис. 53) [251, 252, 254—258]. Ограничиваясь случаем феррита, электрическую проницаемость пластины ε будем считать скалярной величиной. Для магнитной проницаемости пластины по-прежнему примем выражение (13,1), которое соответствует поликристаллическому ферриту. Параметры остального волновода ($x < g$ и $g + h < x < a$ на рис. 53) будем считать скалярными и равными ε_0 и μ_0.

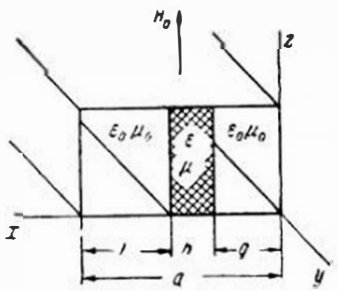


Рис. 53. Прямоугольный волновод с ферритовой пластиной.

Запишем комплексные амплитуды поля в виде (25,1) и будем, так же как и в предыдущем разделе, интересоваться составляющими векторов $\boldsymbol{E}_\nu(x, z)$ и $\boldsymbol{H}_\nu(x, z)$, опуская у них индексы «ν». Составляющие поля и другие величины, относящиеся к изотропной среде, будем писать с индексами «0», а величины, относящиеся к ферриту — без специальных индексов.

Как и в предыдущем параграфе, ограничимся рассмотрением волн, для которых $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, а электрическое поле имеет одну составляющую E_z. В феррите (при $g < x < g + h$) эта составляющая удовлетворяет уравнению (25,7), где

$$\varkappa^2 = k_0^2 \varepsilon \mu_\perp - \beta^2. \tag{26,1}$$

В изотропной среде для нее будет справедливо уравнение

$$\frac{d^2 E_{0z}}{dx^2} + \varkappa_0^2 E_{0z} = 0, \tag{26,2}$$

где

$$\varkappa_0^2 = k_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \beta^2. \tag{26,3}$$

Магнитное поле будет иметь составляющие H_x и H_y. В феррите они будут связаны с E_z выражениями (25,5)

и (25,6), а в изотропной среде — выражениями

$$H_{0x} = \frac{\beta}{k_0\mu_0} E_{0z}, \tag{26,4}$$

$$H_{0y} = -\frac{i}{k_0\mu_0}\frac{dE_{0z}}{dx}, \tag{26,5}$$

которые получаются из (25,5) и (25,6) при $\mu_a = 0$.

Граничные условия (при идеальной проводимости стенок волновода) будут следующими:

при $x = 0$
$$E_{0z} = 0, \tag{26,6}$$

при $x = g$
$$\begin{cases} E_{0z} = E_z, & (26,7) \\ H_{0y} = H_y, & (26,8) \end{cases}$$

при $x = g + h$
$$\begin{cases} E_z = E_{0z}, & (26,9) \\ H_y = H_{0y}, & (26,10) \end{cases}$$

при $x = a$
$$E_{0z} = 0. \tag{26,11}$$

Электрические поля в изотропных областях, которые удовлетворяют уравнению (26,2) и граничным условиям (26,6) и (26,11), могут быть записаны следующим образом:

при $x < g$

$$E_{0z} = A \sin \varkappa_0 x \tag{26,12}$$

и при $g + h < x < a$

$$E_{0z} = B \sin \varkappa_0 (a - x). \tag{26,13}$$

Электрическое поле в пластине, которое удовлетворяет уравнению (25,7), можно записать в виде

$$E_z = C \sin \varkappa (x - g) + D \cos \varkappa (x - g). \tag{26,14}$$

Подставим (26,12) и (26,14) в условие (26,7), а (26,13) и (26,14) — в условие (26,9). В условия (26,8) и (26,10) введем выражения для H_{0y} и H_y, которые получатся

в результате подстановки (26,12), (26,13) и (26,14) в формулы (26,5) и (25,6). В итоге мы придем к следующей системе однородных линейных уравнений для неизвестных коэффициентов A, B, C и D:

$$\left.\begin{aligned} & A \sin \varkappa_0 g - D = 0, \\ & A p_0 \cos \varkappa_0 g - Cp + Dq = 0, \\ & C \sin \varkappa h + D \cos \varkappa h - B \sin \varkappa_0 l = 0, \\ & C (q \sin \varkappa h - p \cos \varkappa h) + \\ & + D (q \cos \varkappa h + p \sin \varkappa h) - B p_0 \cos \varkappa_0 l = 0, \end{aligned}\right| \tag{26,15}$$

Здесь использованы обозначения

$$p = \frac{\varkappa}{\mu_\perp}, \quad q = \frac{\mu_a \beta}{\mu\mu_\perp}, \quad p_0 = \frac{\varkappa_0}{\mu_0}, \tag{26,16}$$

а $l = a - g - h$ (рис. 53).

Равенство нулю определителя системы (26,15) дает уравнение

$$pp_0 \operatorname{ctg} \varkappa h (\operatorname{tg} \varkappa_0 l + \operatorname{tg} \varkappa_0 g) - (p^2 + q^2) \operatorname{tg} \varkappa_0 l \operatorname{tg} \varkappa_0 g + \\ + p_0^2 + p_0 q (\operatorname{tg} \varkappa_0 g - \operatorname{tg} \varkappa_0 l) = 0. \tag{26,17}$$

Из этого уравнения с учетом выражений (26,1) и (26,3) может быть определена постоянная распространения β.

Уравнение (26,17) имеет бесконечное количество корней, соответствующих различным типам поля в рассматриваемом регулярном волноводе. Эти поля можно обозначать TE_{n0}, где n — номер корня уравнения (26,17). Если толщина пластины $h \to 0$, они переходят в обычные поля TE_{n0} в волноводе с однородной изотропной средой.

Те из полей, для которых корни уравнения (26,17) при вещественных параметрах сред окажутся вещественными, будут иметь характер распространяющихся волн, а остальные — ближних полей с экспоненциально убывающей амплитудой. Предельные длины волн, предельные размеры или предельные параметры среды, соответствующие переходу волны в ближнее поле, могут быть определены из уравнения, которое получится из (26,17), если положить в нем $\beta = 0$. Это уравнение запишется

следующим образом:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_\perp\mu_0}}\operatorname{ctg} k_0\sqrt{\varepsilon\mu_\perp}\,h\left(\operatorname{tg} k_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,l+\operatorname{tg} k_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,g\right)-$$

$$-\frac{\varepsilon}{\mu_\perp}\operatorname{tg} k_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,l\operatorname{tg} k_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,g+\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}=0. \quad (26{,}18)$$

В уравнение (26,18) величина μ_a входит только в квадрате. Таким образом, предельные длины волн, размеры или параметры среды не зависят от направления постоянного намагничивания, которым определяется знак μ_a.

Уравнение же (26,17) для постоянной распространения содержит последний член, в который μ_a, а также β входят в первой степени. Таким образом, корни этого уравнения, т. е. постоянные распространения волн или коэффициенты ослабления ближних полей, будут различными для разных направлений постоянного намагничивания и разных направлений распространения. При одновременном изменении этих направлений корни уравнения останутся прежними. Как видно из уравнения (26,17), замена $g \rightleftarrows l$, т. е. перенос пластины в симметричное относительно оси волновода положение, приведет к изменению знака последнего члена уравнения и, следовательно, вызовет такое же изменение корней уравнения, как изменение знака μ_a или β.

Корни уравнения (26,17), соответствующие различным знакам последнего члена этого уравнения, мы будем обозначать β_+ и β_-. Величину

$$\delta\beta=\beta_+-\beta_- \quad (26{,}19)$$

для распространяющихся волн можно назвать невзаимной разностью постоянных распространения. Ее вещественная часть $\delta\beta'$ представляет собой невзаимную разность фазовых постоянных, а мнимая часть $\delta\beta''$ — невзаимную разность коэффициентов поглощения.

Метод, аналогичный использованному при выводе уравнения (26,17), может быть применен для решения задач о прямоугольном волноводе, содержащем несколько пластин с различными гиротропными или изотропными

параметрами. Известный практический интерес представляет, например, задача о волноводе с ферритовой и прилегающей к ней диэлектрической пластинами

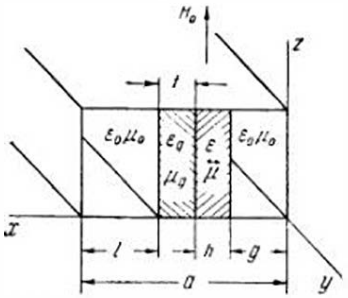


Рис. 54. Прямоугольный волновод с ферритовой и диэлектрической пластинами.

(рис. 54). Для нее уравнение, которому удовлетворяет постоянная распространения, оказывается следующим:

$$\begin{aligned}\mu_g\{&p p_0\operatorname{ctg}\varkappa h\left(\operatorname{tg}\varkappa_0 l+\operatorname{tg}\varkappa_0 g\right)-\left(p^2+q^2\right)\operatorname{tg}\varkappa_0 l\operatorname{tg}\varkappa_0 g+\\&+p_0^2+p_0 q\left(\operatorname{tg}\varkappa_0 g-\operatorname{tg}\varkappa_0 l\right)]+\\&+\operatorname{tg}\varkappa_g t\{p\operatorname{ctg}\varkappa h\left(p_0^2-p_0^2\operatorname{tg}\varkappa_0 l\operatorname{tg}\varkappa_0 g\right)-\\&-p_0\left(p^2+q^2\right)\operatorname{tg}\varkappa_0 g-p_0 p_0^2\operatorname{tg}\varkappa_0 l-\\&-q\left(p_0^2+p_0^2\operatorname{tg}\varkappa_0 l\operatorname{tg}\varkappa_0 g\right)\}=0, \quad (26{,}20)\end{aligned}$$

где

$$\varkappa_0^2=k_0^2\varepsilon_0\mu_g-\beta^2, \quad p_g=\frac{\varkappa_g}{\mu_g},$$

а ε_g и μ_g — параметры диэлектрической пластины ($\mu_g=1$). Легко видеть, что при $t=0$ уравнение (26,20) переходит в уравнение (26,17).

Не останавливаясь подробно на этом случае, заметим лишь, что наличие диэлектрической пластины с ε_g бо́льшим, чем ε_0, приводит при данной толщине ферритовой пластины к значительному увеличению $\delta\beta$. Это может быть качественно объяснено эффектом «диэлектрического волновода» (см. также § 24), т. е. концентрацией энергии в пластинах. Наличие диэлектрической

пластины резко увеличивает долю энергии, распространяющуюся в обеих пластинах. Эта энергия, конечно, делится между ферритовой и диэлектрической пластинами, но в итоге энергия, распространяющаяся в ферритовой пластине, возрастает.

Рассмотрим теперь очень интересный случай двух ферритовых пластин, симметрично расположенных в волноводе (рис. 55). Из уравнения (26,17) для одной пластины следует, что одновременное изменение направления

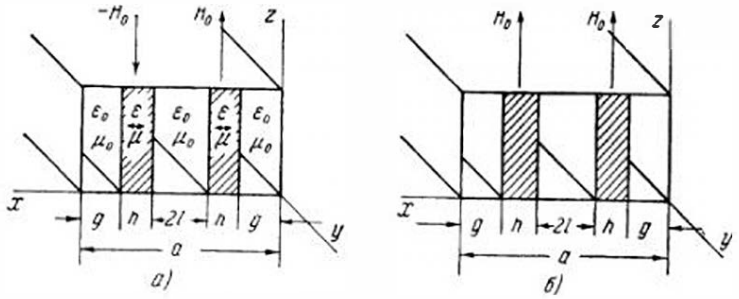


Рис. 55. Прямоугольный волновод с двумя симметрично расположенными ферритовыми пластинами.

постоянного намагничивания и перенос пластины в симметричное положение не изменяют постоянной распространения. Отсюда следует, что действие двух пластин, намагниченных в противоположных направлениях, является «согласным» и, по крайней мере в случае тонких пластин, надо ожидать увеличения $\delta\beta$ при введении второй пластины. Наоборот, в случае двух пластин, расположенных симметрично и намагниченных в одинаковом направлении, невзаимные эффекты, вызванные этими пластинами, уничтожаются, и результирующая величина $\delta\beta$ равна нулю.

После этого предварительного замечания приступим к выводу уравнения для постоянной распространения в случае двух пластин, намагниченных в противоположных направлениях (рис. 55, *а*).

Для первой пластины ($g < x < g + h$) будут справедливы уравнение (25,7) и выражение (25,6). Для изотропной среды ($x < g$, $g + h < x < a - g - h$ и $a - g < x < a$)

будут иметь место уравнение (26,2) и выражение (26,5). Параметры второй пластины ($a - g - h < x < a - g$) отличаются от параметров первой изменением знака μ_a. Уравнение (25,7), в которое μ_a входит только в квадрате, будет справедливо и для второй пластины. В выражении же (25,6) изменится знак перед первым членом, и это выражение для второй пластины запишется следующим образом:

$$H_{2y} = -\frac{i}{k_0\mu_\perp}\left(\frac{dE_{2z}}{dx} + \beta\frac{\mu_a}{\mu}E_{2z}\right). \qquad (26,21)$$

Величины, относящиеся ко второй пластине, мы обозначаем индексом «2». Индексом «1» будем обозначать величины в первой пластине, а индексом «0» — в изотропной среде.

Граничные условия заключаются в равенстве нулю E_{0z} на стенках волновода (при $x = 0$ и $x = a$) и в непрерывности E_z и H_y на границах раздела сред (при $x = g$, $x = g + h$, $x = a - g - h$ и $x = a - g$). Решения уравнения (26,2) для крайних изотропных областей, удовлетворяющие граничным условиям на стенках волновода, запишутся:

для области $x < g$

$$E_{0z} = A\sin\varkappa_0 x \qquad (26,22)$$

и для области $a - g < x < a$

$$E_{0z} = B\sin\varkappa_0(a - x). \qquad (26,23)$$

Решение уравнения (26,2) для средней изотропной области можно записать в виде

$$E_{0z} = C\sin\varkappa_0\left(\frac{a}{2} - x\right) + D\cos\varkappa_0\left(\frac{a}{2} - x\right), \qquad (26,24)$$

а решения уравнения (25,7) для пластин — в виде

$$E_{1z} = F\sin\varkappa(x - g) + G\cos\varkappa(x - g), \qquad (26,25)$$

$$E_{2z} = K\sin\varkappa(a - g - x) + M\cos\varkappa(a - g - x). \qquad (26,26)$$

Подставим (26,22) — (26,26), а также выражения для H_{0y}, H_{1y} и H_{2y}, полученные из них с помощью соотношений (26,5), (25,6) и (26,21), в граничные условия.

В результате получим следующую систему восьми (по числу граничных условий) линейных однородных уравнений для восьми коэффициентов, входящих в (26,22) — (26,26):

$$\left.\begin{aligned}
A\sin\varkappa_0 g &= G,\\
B\sin\varkappa_0 g &= M,\\
F\sin\varkappa h + G\cos\varkappa h &= C\sin\varkappa_0 l + D\cos\varkappa_0 l,\\
K\sin\varkappa h + M\cos\varkappa h &= -C\sin\varkappa_0 l + D\cos\varkappa_0 l,\\
Ap_0\cos\varkappa_0 g &= Fp - Gq,\\
Bp_0\cos\varkappa_0 g &= Kp - Mq,\\
F(q\sin\varkappa h - p\cos\varkappa h) + G(q\cos\varkappa h + p\sin\varkappa h) &= \\
&= Cp_0\cos\varkappa_0 l - Dp_0\sin\varkappa_0 l,\\
K(q\sin\varkappa h - p\cos\varkappa h) + M(q\cos\varkappa h - p\sin\varkappa h) &= \\
&= -Cp_0\cos\varkappa_0 l - Dp_0\sin\varkappa_0 l,
\end{aligned}\right\} \quad (26,27)$$

где $l=\frac{a}{2}-g-h$ (рис. 55), а величины p, q и p_0 по-прежнему определяются выражениями (26,16).

Нетрудно убедиться, что из системы (26,27) следует соотношение

$$CD=0.$$

Таким образом, эта система совместна в двух случаях:

1) $C=0$, откуда следует $A=B$, $F=K$ и $G=M$;

2) $D=0$, откуда следует $A=-B$, $F=-K$ и $G=-M$.

В обоих случаях независимыми являются четыре коэффициента, так же как в рассмотренной выше задаче о волноводе с одной пластиной.

Для того чтобы ответить на вопрос, каким типам полей соответствуют эти два случая, рассмотрим поле при $x=\frac{a}{2}$. В первом случае в этой точке $\frac{dE_{0z}}{dx}=0$ и, следовательно, $H_{0y}=0$, во втором случае $E_{0z}=0$ и $H_{0x}=0$. Отсюда ясно, что первый случай соответствует полям TE_{n0} при нечетных n (нечетным типам полей), а второй случай — четным типам полей.

В первом случае равенство нулю определителя системы уравнений для оставшихся независимыми коэффициентов A, F, G и D дает следующее уравнение:

$$pp_0\operatorname{ctg}\varkappa h(\operatorname{tg}\varkappa_0 g - \operatorname{ctg}\varkappa_0 l) + (p^2+q^2)\operatorname{tg}\varkappa_0 g\operatorname{ctg}\varkappa_0 l + p_0^2 + p_0 q(\operatorname{ctg}\varkappa_0 l + \operatorname{tg}\varkappa_0 g) = 0. \quad (26,28)$$

Оно отличается от уравнения (26,17) заменой $\operatorname{tg}\varkappa_0 l$ на $-\operatorname{ctg}\varkappa_0 l$.

Во втором случае равенство нулю определителя системы для оставшихся коэффициентов A, F, G и C дает уравнение, полностью совпадающее с уравнением (26,17). В этом нет ничего удивительного, так как распределение поля в половине волновода с двумя пластинами для четных типов полей совпадает с распределением поля во всем волноводе с одной пластиной.

Заметим, что для исследования условий возникновения высших типов волн в волноводе с двумя пластинами нужно рассмотреть второй случай, т. е. обратиться к уравнению (26,17), так как прежде всего будет возникать четная волна TE_{20}. Однако наибольший интерес представляет случай нечетных полей, к которому принадлежит основная волна TE_{10}.

Уравнение (26,28), так же как уравнение (26,17), содержит «невзаимный» член, в который входит произведение $\mu_a\beta$. Поэтому корни уравнения (26,28) также будут изменяться при изменении направления постоянного намагничивания обеих пластин или направления распространения и будут оставаться без изменения при одновременном изменении этих направлений.

Как следует из уравнений (26,17) и (26,28), невзаимный эффект, т. е. зависимость корней этих уравнений от знака β или μ_a, исчезает при тех положениях пластин в волноводе, при которых «невзаимный» член уравнений обращается в нуль. Для волновода с одной пластиной таким положением будет, в частности, симметричное положение, при котором $g=l$. Для основной волны TE_{10} оно является единственным. Для волновода с двумя противоположно намагниченными пластинами условием «взаимности», как следует из (26,28), является:

$$\varkappa_0(l-g)=\frac{\pi}{2}+m\pi \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Это условие не может быть выполнено для основной волны.

Взаимной, т. е. не зависящей от знака β или μ_a, является постоянная распространения показанного на рис. 55, *б* волновода, в котором две симметрично расположенные пластины намагничены в одинаковом направлении. При выводе уравнения для постоянной распространения в этом случае мы должны поступать так же, как и при рассмотрении противоположно намагниченных пластин. Единственное отличие будет заключаться в том, что здесь для обеих пластин выполняется соотношение (25,6). При этом определитель полученной из граничных условий системы уравнений не будет являться, как в случае противоположно намагниченных пластин, произведением двух множителей. Равенство нулю этого определителя дает уравнение

$$\operatorname{tg} 2\varkappa_0 l\Big(\operatorname{tg}^2\varkappa_0 g\{p_0^2p^2-[p^2(p^2+2q^2)+q^2(p_0^2+q^2)]\operatorname{tg}^2\varkappa h\}+2pp_0(p_0^2+p^2+q^2)\operatorname{tg}\varkappa_0 g\operatorname{tg}\varkappa h+[(p_0^2+q^2)\operatorname{tg}^2\varkappa h-p^2]p_0^2\Big)+2pp_0[(p^2+q^2)\operatorname{tg}\varkappa h\operatorname{tg}^2\varkappa_0 g+\operatorname{tg}\varkappa_0 g\cdot pp_0(\operatorname{tg}^2\varkappa h-1)-p_0^2\operatorname{tg}\varkappa h]=0. \quad (26,29)$$

В уравнение (26,29) величины β и μ_a входят только в квадратах, что и обусловливает взаимность постоянной распространения. Заметим, что, полагая в (26,29) $l=0$ и заменяя $2h$ на h, мы получим такое же уравнение, которое получится из (26,17) при $l=g$. В другом частном случае $g=0$, т. е. в случае пластин, прилегающих к узким стенкам, (26,29) переходит в уравнение

$$\operatorname{tg} 2\varkappa_0 l[(p_0^2+q^2)\operatorname{tg}^2\varkappa h-p^2]-2pp_0\operatorname{tg}\varkappa h=0. \quad (26,30)$$

Полученные в этом разделе уравнения для постоянных распространения являются трансцендентными и, кроме предельного случая очень тонких ферритовых пластин, допускают решение только численными или графическими методами. Трудности их решения особенно возрастают, когда необходимо учитывать потери.

Если потери невелики, т. е. мнимые части μ, μ_a и ε малы по сравнению с вещественными, то может быть применен приближенный метод учета потерь, не требующий отыскания корней уравнения с комплексными параметрами. В этом случае влиянием потерь на вещественную часть постоянной распространения, т. е. на фазовую постоянную можно пренебречь. Для определения мнимой части постоянной распространения достаточно разложить функцию $\beta(\mu, \mu_a, \varepsilon)$ в ряд, ограничиться первыми двумя членами этого ряда и предположить, что начальные значения всех величин являются их вещественными частями, а приращения—мнимыми частями. В результате получим приближенную формулу[1])

$$\beta''=\frac{\partial\beta''}{\partial\varepsilon'}\varepsilon''+\frac{\partial\beta'}{\partial\mu'}\mu''+\frac{\partial\beta'}{\partial\mu_a'}\mu_a''. \quad (26,31)$$

Для применяемых в технике с. в. ч. ферритов эта формула практически достаточно точна вдали от ферромагнитного резонанса. В области же резонанса, где мнимые части μ и μ_a сравнимы или даже превышают вещественные, расчет как β', так и β'' должен вестись путем отыскания комплексных корней соответствующих уравнений при комплексных значениях параметров. Даже для такой сравнительно несложной задачи, как определение постоянной распространения в регулярном прямоугольном волноводе с поперечно намагниченными ферритовыми пластинами, эти расчеты практически осуществимы только при помощи современных быстродействующих электронных вычислительных машин.

§ 27. Волновод с одной пластиной

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно случай прямоугольного волновода с одной поперечно намагниченной ферритовой пластиной (рис. 53). Вывод уравнения для постоянной распространения в таком волноводе был дан в § 26. Остановимся прежде всего на анализе

[1]) Эта формула применима к любым регулярным волноводам с ферритом, а рассмотренный приближенный метод может быть распространен на определение любых параметров полых систем, содержащих среды с малыми потерями.

этого уравнения в предельном случае весьма тонкой пластины.

Уравнение (26,17) для постоянной распространения в волноводе с одной пластиной может быть приведено к виду

$$pp_0 \operatorname{ctg} \varkappa h \sin \varkappa_0 (a-h) + \frac{1}{2}(p_0^2 + p^2 + q^2)\cos \varkappa_0 (a-h) + \\ + \frac{1}{2}(p_0^2 - p^2 - q^2)\cos \varkappa_0 (g-l) + p_0 q \sin \varkappa_0 (g-l) = 0. \quad (27,1)$$

При $h \to 0$ первый член этого уравнения представляет собой неопределенность типа $\infty 0$, а остальные члены стремятся к конечным величинам. Поэтому целесообразно ввести обозначение

$$F(\beta) = \frac{1}{2}(p_0^2 + p^2 + q^2)\cos \varkappa_0 (a-h) + \\ + \frac{1}{2}(p_0^2 - p^2 - q^2)\cos \varkappa_0 (g-l) + p_0 q \sin \varkappa_0 (g-l) \quad (27,2)$$

и переписать уравнение следующим образом:

$$\sin \varkappa_0 (a-h) + \frac{\mu_\perp \mu_0}{\varkappa \varkappa_0} F(\beta) \operatorname{tg} \varkappa h = 0. \quad (27,3)$$

Пренебрегая малыми величинами высших порядков, в выражении (27,3) можно ограничиться нулевым приближением для множителя $\frac{F(\beta)}{\varkappa_0}$, т. е. определять его при $h = 0$. В этом же приближении можно принять:

$$\operatorname{tg} \varkappa h \cong \varkappa h, \quad (27,4)$$

$$\sin \varkappa_0 (a-h) \cong m\pi - \varkappa_0 (a-h). \quad (27,5)$$

В последнем выражении $m = 1, 2, 3, \ldots$ в зависимости от типа поля. Интересуясь волной TE_{10}, мы примем $m = 1$. При этом в нулевом приближении

$$(\varkappa_0)_0 = \frac{\pi}{a}. \quad (27,6)$$

С учетом сделанных замечаний уравнение (27,3) в первом приближении запишется:

$$\pi - \varkappa_0 (a-h) + h \mu_\perp \mu_0 \frac{a}{\pi} F(\beta_0) = 0, \quad (27,7)$$

где

$$\beta_0 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad (27,8)$$

есть значение β в нулевом приближении.

В уравнение (27,7) следует подставить выражение $\varkappa_0$ в первом приближении, которое согласно (26,3) будет следующим:

$$(\varkappa_0)_1 = \frac{\pi}{a}\left(1 - \beta_0 \frac{a^2}{\pi^2} \Delta\beta\right). \quad (27,9)$$

Здесь $\Delta\beta = \beta - \beta_0$. Подставляя (27,9) в (27,7), получим простое выражение для приращения постоянной распространения при введении в волновод с волной TE_{10} тонкой ферритовой пластины

$$\Delta\beta = -\frac{h}{a}\frac{1}{\beta_0}\left[\mu_\perp \mu_0 F(\beta_0) + \frac{\pi^2}{a^2}\right]. \quad (27,10)$$

Входящая в это выражение функция $F(\beta_0)$ с учетом (27,2) и (27,6) запишется следующим образом:

$$F(\beta_0) = -\frac{1}{2}(p_0^2 + p^2 + q^2) + (-p_0^2 + p^2 + q^2)\cos 2\frac{\pi}{a} g - \\ - p_0 q \sin 2\frac{\pi}{a} g, \quad (27,11)$$

причем величины p_0, p и q вычисляются по формулам (26,16) при $\beta = \beta_0$.

Выражение (27,11) может быть также представлено в виде

$$F(\beta_0) = -p_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{a} g - (p^2 + q^2)\sin^2 \frac{\pi}{a} g - p_0 q \sin 2\frac{\pi}{a} g. \quad (27,11а)$$

Определяя p_0, p и q из (26,16) и подставляя затем (27,11а) в формулу (27,10), получим:

$$\Delta\beta = \frac{h}{a}\frac{1}{\beta_0}\left[\frac{\pi^2}{a^2}\left(\frac{\mu_\perp}{\mu_0} - 1\right)\cos^2 \frac{\pi}{a} g + k_0^2 \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)\sin^2 \frac{\pi}{a} g + \\ + \beta_0^2 \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right)\sin^2 \frac{\pi}{a} g - \frac{\pi}{a}\beta_0 \frac{\mu_a}{\mu} \sin 2\frac{\pi}{a} g\right]. \quad (27,12)$$

Заметим, что это выражение может быть получено [223] методом возмущений с использованием формулы (16,21)

при квазистатической аппроксимации внутреннего поля в пластине [1]).

Воспользуемся формулой (27,12) для определения невзаимной разности постоянных распространения (26,19). Учитывая, что для β_+ и β_- последние члены в (27,12)

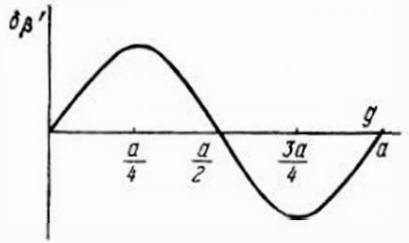


Рис. 56. Зависимость невзаимной разности фазовых постоянных $\delta\beta'$ от положения пластины при $h \to 0$.

различаются знаком, а остальные члены одинаковы, получим:

$$\delta\beta = 2\frac{h\pi\mu_a}{a^2\mu}\sin 2\frac{\pi}{a}g. \qquad (27,13)$$

График зависимости $\delta\beta'$ от g приведен на рис. 56. Как и следовало ожидать, $\delta\beta' = 0$ при $g = \frac{a}{2}$, что при $h \to 0$ соответствует симметричному расположению пластины в волноводе. В рассматриваемом предельном случае $\delta\beta' = 0$ также при расположении пластины у стенок волновода. Интересно отметить, что максимумы $|\delta\beta'|$ (при $h \to 0$) имеют место при $g = \frac{a}{4}$ и $g = \frac{3a}{4}$, а не в точках с круговой поляризацией магнитного поля.

[1]) Это подтверждает еще раз то важное обстоятельство, что метод возмущений при квазистатической аппроксимации внутреннего поля дает решение задачи в первом приближении, если считать параметром малости размер возмущения, в данном случае — толщину пластины. Другим подтверждением этого обстоятельства служит задача о круглом волноводе с продольно намагниченным стержнем. Решение ее, полученное методом возмущений в § 24, также совпадает с результатами, которые следуют в первом приближении из строгого решения [216, 244].

Определим теперь в качестве второго примера использования формулы (27,12) зависимость $\Delta\beta = \beta - \beta_0$ от μ_a. При этом ограничимся для простоты случаем $g = \frac{a}{4}$. Тогда из выражения (27,12) следует:

$$\Delta\beta = -\frac{h}{a}(A_0 + A_1\mu_a + A_2\mu_a^2), \qquad (27,14)$$

где

$$A_0 = \frac{\pi^2}{a^2\beta_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mu}{\mu_0} - \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{\mu}\right) + \frac{1}{2}\frac{k_0^2}{\beta_0}\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\mu_0}{\mu} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right),$$

$$A_1 = \frac{\pi}{a\mu},$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{a^2\mu\mu_0\beta_0}.$$

Зависимость $\Delta\beta$ от μ_a (без учета потерь) является в этом случае параболической, график ее представлен на рис. 57. Эта зависимость представляет интерес для области малых постоянных магнитных полей, где μ в отличие от μ_a мало зависит от поля. При этом (§ 9) μ_a в первом приближении пропорционально намагниченности M_z, и, следовательно, зависимость $\Delta\beta$ от M_z будет носить такой же характер, как зависимость, показанная на рисунке.

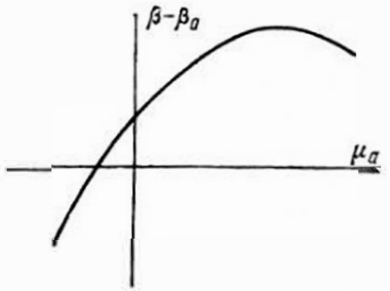


Рис. 57. Зависимость приращения фазовой постоянной от μ_a при $g = \frac{a}{4}$ и $h \to 0$.

В качестве критерия справедливости формулы (27,12) может быть принято соотношение (17,13), из которого для обычных ферритов вдали от ферромагнитного резонанса следует условие

$$\frac{h}{a} < 0,04.$$

Это условие часто не выполняется в применяемых на практике ферритовых устройствах. Поэтому рассмотренный

метод анализа не может дать количественных результатов, необходимых для расчета таких устройств. Эти результаты, как уже отмечалось, могут быть получены лишь путем численного определения корней уравнения (27,1). Некоторые данные, полученные в результате таких расчетов [263], будут приведены ниже (для случая $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$).

Для того чтобы результаты расчетов были непосредственно применимы к любым диапазонам частот, целесообразно в качестве единицы длины выбрать ширину волновода a. При этом корнями уравнения будут величины βa, их вещественные части $\beta' a$ дадут фазовые сдвиги на длине a.

Остановимся сначала на результатах расчета этих фазовых сдвигов. Исключая пока из рассмотрения область ферромагнитного резонанса, мы можем, как уже отмечалось выше, провести этот расчет без учета потерь.

На рис. 58 показана зависимость невзаимной разности фазовых сдвигов

$$\Phi = \delta\beta' a$$

от положения пластины в волноводе (т. е. от величины g) и от толщины пластины a. На рис. 59 оптимальные значения g, соответствующие максимумам Φ, и величины этих максимумов показаны в зависимости от h. Из рис. 58 и 59 видно, что максимумы Φ, которые при $h \to 0$ (рис. 56) были расположены при $\frac{g}{a} = \frac{1}{4}$ и $\frac{g}{a} = \frac{3}{4}$, с ростом h смещаются к стенкам волновода. Резкое увеличение $\Phi_{макс}$ с ростом h может быть объяснено концентрацией энергии в пластине (эффектом «диэлектрического волновода»).

Переходя к выяснению влияния параметров феррита, обратимся прежде всего к рис. 60, на котором представлены кривые зависимости фазовых сдвигов от μ_a для различных случаев расположения пластины в волноводе. При симметричном расположении пластины $\left(g = \frac{a-h}{2}\right)$ кривые эти являются «взаимными», т. е. не зависят от знака μ_a. При $g = 0$ в данном случае конечной толщины пластины, в отличие от предельного случая $h \to 0$, имеется некоторая зависимость фазовой постоянной от

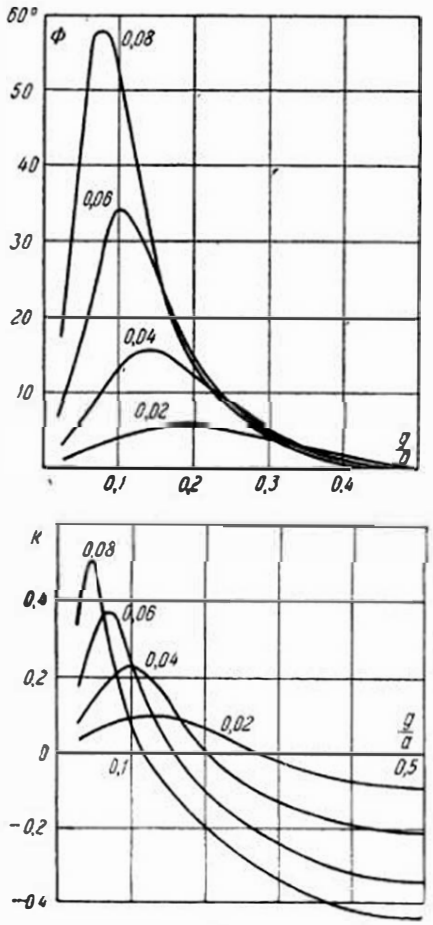


Рис. 58. Зависимость невзаимной разности фазовых сдвигов Φ и частотного коэффициента K от толщины и положения пластины [263].

$\varepsilon = 9$; $\mu = 0{,}9$; $\mu_a = 0{,}5$; $\lambda = 1{,}39\,a$. Цифры у кривых — значения $\frac{h}{a}$.

знака μ_a. В оптимальном, т. е. соответствующем максимуму $\Phi(g)$ положении пластины характер зависимости $\Phi(\mu_a)$ приближается к параболическому закону, справедливому для $h \to 0$ (рис. 57). Конечно, это совпадение носит лишь качественный характер.

Как показывает расчет [263], положения максимумов кривых $\Phi(g)$, т. е. оптимальные с точки зрения невзаим-

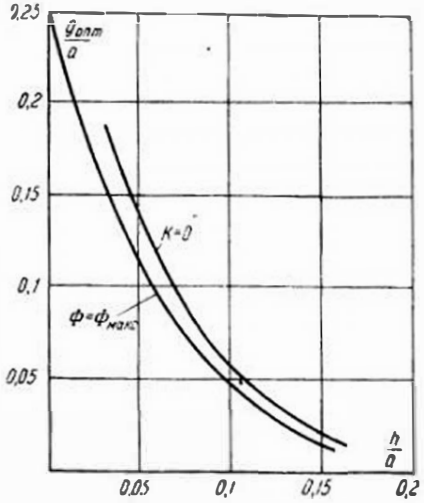


Рис. 59. Зависимость оптимальных положений пластины от ее толщины.
Параметры те же, что и на рис. 58.

ности положения пластины, практически не зависят от μ_a. Значения же этих максимумов оказываются в первом приближении пропорциональными μ_a, так же как и в предельном случае $h \to 0$.

Влияние диагонального компонента магнитной проницаемости определяется двумя факторами: величиной $\mu_\perp$, входящей в уравнения (27,1) в аргумент котангенса $\varkappa h$, и величинами μ и $\mu_\perp$, входящими в знаменатель последнего, невзаимного члена этого уравнения. На положении максимумов кривых $\Phi(g)$ сказывается первый фактор, и эти максимумы с ростом μ, так же как и с ростом h, смещаются к стенке волновода. Величина же Φ, как

показывает расчет, уменьшается с ростом μ, так как второй фактор преобладает при этом над первым.

Влияние ε феррита на кривые $\Phi(g)$ во многом аналогично влиянию толщины пластины h (рис. 58). С ростом ε максимумы кривых увеличиваются и смещаются к стен-

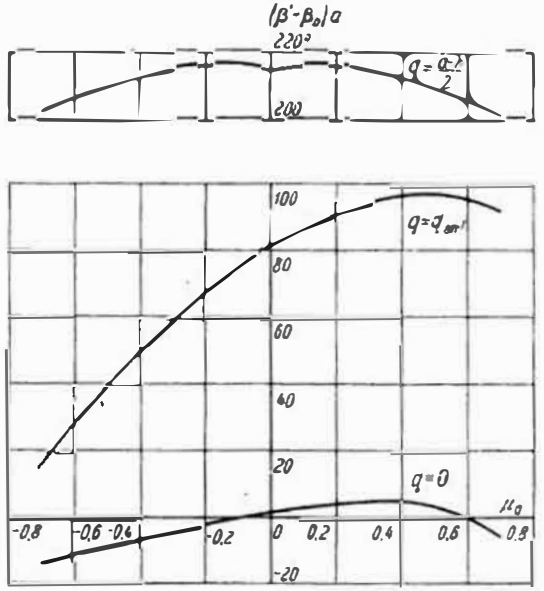


Рис. 60. Зависимость приращения фазовой постоянной a от μ_a при различных положениях пластины.

$\frac{h}{a} = 0{,}08$; $\varepsilon = 9$; $\mu = 0{,}9$; $\lambda = 1{,}39a$; β_0 — фазовая постоянная в пустом волноводе.

кам волновода. Это, так же как и влияние толщины пластины, может быть качественно объяснено концентрацией энергии в пластине.

Очень большой практический интерес представляют зависимости невзаимной разности фазовых сдвигов от длины волны λ. Они приведены для различных положений пластины на рис. 61. Из этого рисунка видно прежде всего, что кривые $\Phi(\lambda)$ являются монотонными и в тех случаях, когда частотная зависимость невелика, близки

к прямым линиям. Это дает право в качестве критерия частотной зависимости ввести коэффициент

$$K = \frac{\Phi(\lambda-\Delta\lambda)-\Phi(\lambda+\Delta\lambda)}{\Phi(\lambda)}\frac{\lambda}{2\Delta\lambda}. \qquad (27,15)$$

В силу указанного характера кривых $\Phi(\lambda)$ этот коэффициент будет мало зависеть от принятой при его вычислении величины $\Delta\lambda$.

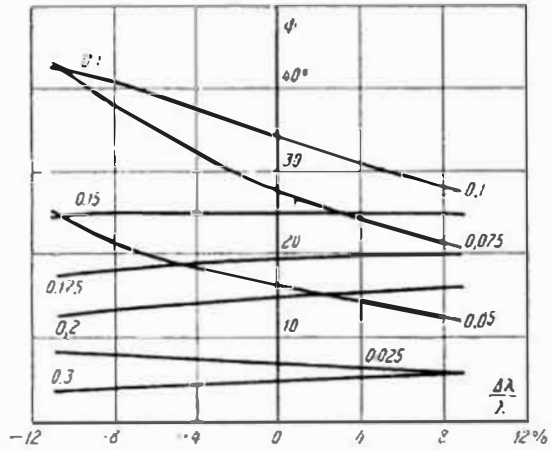


Рис. 61. Зависимость невзаимной разности фазовых сдвигов от длины волны для различных положений пластины в волноводе [263].

$\frac{h}{a}=0.08$; $\lambda=1.39a$; $\varepsilon=9$; $\mu=0.9$; $\mu_a=0.5$. Цифры у кривых—значения g.

Из рис. 61 следует, что коэффициент K изменяет знак при изменении g и при некотором положении пластины обращается в нуль. Это хорошо видно и из рис. 58, на котором приведены зависимости K от положения и толщины пластины. Как следует из этого рисунка, значения максимумов и минимумов $K(g)$ увеличиваются с ростом h, а точки перехода K через нуль смещаются к стенкам волновода, причем эти точки лежат всегда при бо́льших g, чем максимумы кривых $\Phi(g)$.

Рассмотрим теперь влияние параметров феррита на частотный коэффициент K. Как показывает расчет [263], величина μ_a почти не влияет на этот коэффициент, а μ оказывают на него очень малое влияние. Влияние же ε на частотный коэффициент аналогично влиянию h: с уменьшением ε происходит уменьшение максимумов и минимумов кривых $K(g)$, а точка перехода K через нуль смещается от стенок волновода.

Приближенный расчет потерь в волноводе с поперечно намагниченной ферритовой пластиной сводится, как это следует из формулы (26,31), к вычислению производных $\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}$, $\frac{\partial\beta}{\partial\mu}$ и $\frac{\partial\beta}{\partial\mu_a}$ [1]). На рис. 62 приведены зависимости этих производных от положения пластины в волноводе для нескольких толщин пластины и различных направлений распространения. Как видно из этого рисунка, $\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}$ при малых h хорошо совпадает с приближенной формулой

$$\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}=\frac{1}{2}\frac{h}{a}\frac{k_0^2}{\beta_0}(1-\cos 2\varkappa_0 g), \qquad (27,16)$$

которую легко получить из выражения (27,12). При больших h величина $\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}$ начинает зависеть от направления распространения, а также от μ и μ_a. Величины $\frac{\partial\beta}{\partial\mu}$ и $\frac{\partial\beta}{\partial\mu_a}$, т. е. магнитные потери, существенно зависят от направления распространения как при больших, так и при малых h, причем величина $\frac{\partial\beta}{\partial\mu_a}$ для одного из направлений распространения изменяет знак при перемещении пластины.

Сравнение результатов приближенного расчета потерь по формуле (26,31) с результатами строгого расчета, проведенного путем вычисления комплексных корней уравнения (27,1), показало [263], что при $\varepsilon''\leqslant 0{,}1$, $\mu''\leqslant 0{,}1$

[1]) Штрих у обозначений вещественных частей β, ε, μ и μ_a опускаем.

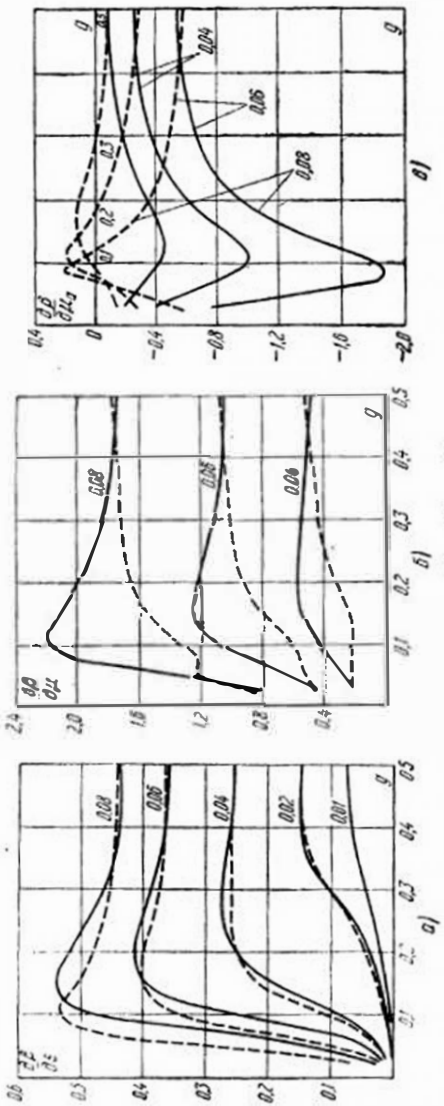


Рис. 62. Зависимость производных $\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon}$, $\frac{\partial\beta}{\partial\mu}$ и $\frac{\partial\beta}{\partial\mu_a}$ от положения пластины.

$\varepsilon=9$; $\mu=0,9$; $\mu_a=0,5$. Цифры у кривых—значения $\frac{h}{a}$. Сплошные линии и пунктир соответствуют двум направлениям распространения.

и $\mu_a'' \leqslant 0,1$ погрешность приближенного расчета не превышает 3% [1]).

В качестве примера практического использования полученных результатов на рис. 63 приведены вычислен-

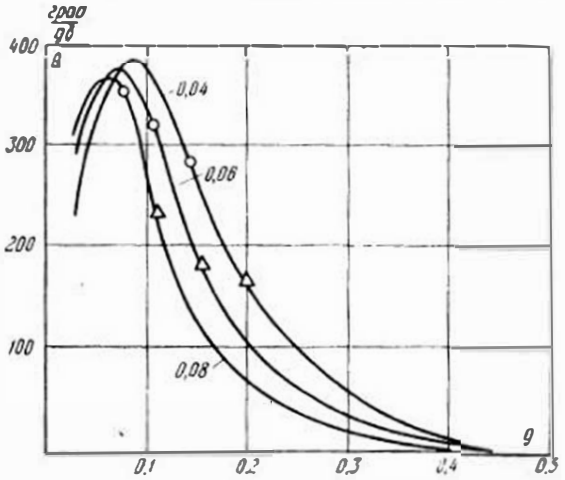


Рис. 63. Зависимость добротности невзаимного ферритового фазовращателя от положения пластины и ее толщины [263].

$\varepsilon=9-i0,02$; $\mu=0,9-i0,01$; $\mu_a=0,5-i0,005$. Цифры у кривых—значения $\frac{h}{a}$. Кружками отмечены точки, соответствующие максимумам невзаимной разности фазовых сдвигов Ф треугольниками—точки, соответствующие $K=0$.

ные значения добротности невзаимного ферритового фазовращателя

$$Q = \frac{\Phi}{\frac{1}{2}(\beta_+'' + \beta_-'')a} \qquad (27,17)$$

в зависимости от толщины и положения пластины.

Как видно из рис. 63, максимальные значения добротности несколько уменьшаются с ростом толщины пластины, а значения добротности в точках максимального Ф

[1]) Применяемые в диапазоне с. в. ч. ферриты имеют вдали от ферромагнитного резонанса меньшие значения ε'', μ'' и μ_a''.

растут с увеличением толщины. Максимумы Q лежат ближе к стенкам волновода, чем максимумы невзаимной разности фазовых сдвигов Ф. Переходы же частотного коэффициента K через нуль (т. е. точки наилучшей широкополосности) находятся дальше от стенок, чем максимумы Ф. Таким образом, в положении пластины, соответствующем максимуму Ф, осуществляется компромисс между наибольшей добротностью и наилучшей широкополосностью.

В области ферромагнитного резонанса, как уже отмечалось выше, расчет β' и β'' возможен только путем вычисления комплексных корней уравнения (27,1) при комплексных значениях μ и μ_a. Расчеты в области больших постоянных магнитных полей нецелесообразно проводить при независимом задании μ и μ_a, так как эти параметры выражаются с помощью формул (4,15), (4,11) и (4,12) через одни и те же независимые величины. Такими величинами являются: постоянное магнитное поле H_0, намагниченность насыщения M_0, частота ω и параметр потерь η, связанный с входящей в (4,11) и (4,12) частотой релаксации ω_r соотношением (4,7).

На рис. 64 приведены в качестве примера результаты расчета зависимости β' и β'' от постоянного магнитного поля для волновода с различным образом расположенными ферритовыми пластинами. Расчет заключался в вычислении корней уравнения (27,1) при использовании формул (4,15) для μ и μ_a с учетом (4,11) и (4,12). Были приняты следующие значения входящих в формулы для μ и μ_a величин: $\frac{\omega}{2\pi} = 9375$ *Мгц*, $M_0 = 170$ *гс*, $\eta = 10^8$. Электрическая проницаемость была принята вещественной и равной 9.

Расчет был проведен и в области малых H_0. При этом было сделано предположение, что формулы (4,11) и (4,12) остаются справедливыми в этой области, если намагниченность насыщения заменить технической намагниченностью материала[1]).

Из приведенных на рис. 64 кривых видно прежде всего, что резонансы (максимумы β'' и точки максимальной крутизны β') имеют место при $H = 2340$ *э*. Эта величина совпадает с полем, вычисленным по формуле (1,39), которое соответствует резонансу при поперечном намагничивании неограниченной среды (§ 21) или «киттелевскому» резонансу в тонкой пластине, намагниченной касательно к ее плоскости (§ 5).

[1]) Строго говоря, это справедливо только в области совсем малых полей, когда соблюдается условие (9,3).

Как видно из рис. 64, в положении пластины, оптимальном с точки зрения невзаимной разности фазовых сдвигов,

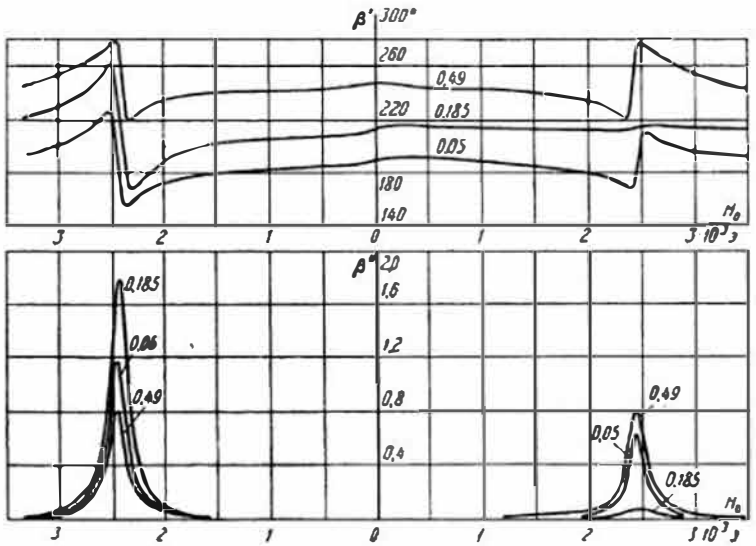


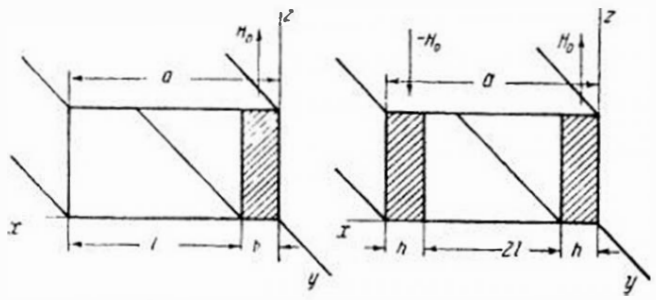
Рис. 64. Влияние положения пластины на резонансные кривые [263]. $\frac{h}{a} = 0{,}02$; цифры у кривых — значения $\frac{g}{a}$.

достигается и сравнительно большое (около 30) отношение резонансных затуханий для разных направлений постоянного поля. При увеличении толщины пластины это отношение резко уменьшается. Очевидно, что такая же невзаимность затухания имеет место при изменении направления распространения энергии[1]).

[1]) Эта невзаимность используется в ферритовых вентилях резонансного типа [24, 25]. Однако форма ферритовых образцов в современных устройствах такого типа [349, 351—357] существенно отличается от рассмотренной в этом параграфе.

§ 28. Волновод с пластинами, прилегающими к узким стенкам

Одной из важных проблем при создании ферритовых устройств является обеспечение их работы при высоких уровнях передаваемой по волноводу мощности. При этом, кроме нелинейных явлений в феррите (см. главу 13), необходимо уделить внимание электрической прочности



а) б)

Рис. 65. Волноводы с ферритовыми пластинами, прилегающими к узким стенкам.

и теплоотдаче. С точки зрения электрической прочности и, особенно, теплоотдачи является целесообразным расположение ферритовых пластин непосредственно около узких стенок прямоугольного волновода (рис. 65). На этом частном случае мы сейчас остановимся более подробно.

Уравнение для постоянной распространения в волноводе с одной пластиной у стенки (рис. 65, *а*) является частным случаем уравнения (26,17) при $g = 0$:

$$p \operatorname{ctg} \varkappa h + p_0 \operatorname{ctg} \varkappa_0 l - q = 0. \qquad (28,1)$$

Уравнение для двух противоположно намагниченных пластин (рис. 65,*б*) следует при $g = 0$ из (26,28):

$$p \operatorname{ctg} \varkappa h - p_0 \operatorname{tg} \varkappa_0 l - q = 0. \qquad (28,2)$$

В этих уравнениях использованы обозначения (26,16). Уравнение (28,2) отличается от (28,1), так же как (26,28) от (26,17), заменой $\operatorname{ctg} \varkappa_0 l$ на $(-\operatorname{tg} \varkappa_0 l)$. При этом в уравнении (28,1) $l = a - h$, а в (28,2) $l = \frac{a-h}{2}$ (рис. 65, *а* и *б*).

При толщине пластины $h \to 0$ последние, невзаимные члены уравнений (28,1) и (28,2) становятся малыми по сравнению с другими членами. Отсюда ясно, что невзаимная разность постоянных распространения уменьшается при $h \to 0$, как малая величина более высокого порядка, чем h.

Формула (27,12) для приращения постоянной распространения при $h \to 0$ в случае пластины, прилегающей к стенке волновода ($g = 0$), перейдет в следующее выражение:

$$\Delta\beta = \frac{h}{a} \frac{\pi^2 a^2}{\beta_0} \left(\frac{\mu_\perp}{\mu_0} - 1 \right). \qquad (28,3)$$

Аналогичное выражение для случая двух пластин может быть получено из уравнения (28,2) таким же способом, какой был использован при выводе формулы (27,12). Величина $\Delta\beta$ оказывается при этом в два раза большей, чем в случае одной пластины. Последнее обстоятельство имеет место и для пластин, не прилегающих к стенкам волновода. Оно становится понятным, если учесть, что рассматриваемые выражения могут быть получены методом возмущений, согласно которому действия пластин, симметрично расположенных и намагниченных в противоположных направлениях, должны складываться.

Из (28,3), так же как и непосредственно из уравнений (28,1) и (28,2), видно, что при $h \to 0$ приращение постоянной распространения для пластин, прилегающих к стенкам, является взаимным. Отсюда следует, что для получения достаточно больших значений невзаимных разностей фазовых сдвигов пластины, прилегающие к стенкам волновода, должны иметь значительно бо́льшую толщину, чем пластины, находящиеся в положениях оптимальных с точки зрения невзаимности.

Это подтверждается расчетами [262], некоторые результаты которых будут приведены ниже. Исследовалась зависимость невзаимной разности фазовых сдвигов Φ и ее частотного коэффициента K (который, как и раньше, определялся выражением (27,15)) от толщины пластин и параметров феррита. Как и в § 27, в качестве единицы длины была принята ширина волновода a.

Зависимости Φ и K от толщины пластины при различных параметрах феррита приведены на рис. 66. Из этого рисунка видно прежде всего, что при малых h невзаимные разности фазовых сдвигов, как уже отмечалось выше, весьма малы. Начиная с некоторых значений h, они растут с ростом h очень быстро. Это может быть качественно объяснено эффектом концентрации энергии в пластинах. При дальнейшем возрастании h этот эффект почти не приводит к росту Φ, так как основная часть энергии уже передается в пластине. Характер же электромагнитного поля в пластине становится все менее «выгодным», и в результате величина Φ, пройдя через максимум, начинает медленно убывать[1]).

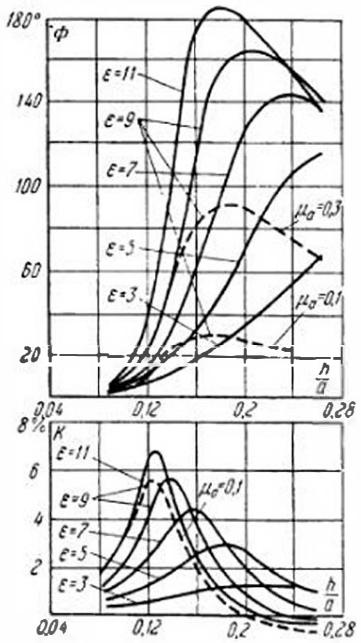


Рис. 66. Невзаимные разности фазовых сдвигов Φ и частотные коэффициенты K в волноводе с одной пластиной (рис. 65, *а*) [262]. $\mu=0{,}9$; $\mu_a=0{,}5$ (кроме пунктирных кривых); $\lambda=1{,}39\,a$.

Как видно из рис. 66, функции $K(h)$ приблизительно пропорциональны производным от $\Phi(h)$: максимумы K имеют место вблизи точек перегиба Φ, а переходы K через нуль — вблизи максимумов Φ. Заметим, что это обстоятельство, которое носит, конечно, только качественный характер, имело место и для зависимости K и Φ от g в случае пластин, смещенных относительно стенки волновода (§ 27, в частности, рис. 58).

[1]) Заметим, что те же факторы определяют и зависимость угла поворота поляризации от радиуса продольно намагниченного стержня, расположенного в круглом волноводе (§ 24).

Влияние диагонального компонента магнитной проницаемости μ на зависимости $\Phi(h)$ и $K(h)$ оказывается в данном случае, так же как и для пластин, смещенных относительно стенки волновода, сравнительно малым. Влияние антисимметричного компонента магнитной проницаемости μ_a для пластин, расположенных у стенки волновода, характерно тем, что зависимости $\Phi(\mu_a)$ являются линейными лишь при малых μ_a (меньше приблизительно 0,3); при бо́льших μ_a наступает заметное насыщение этих зависимостей. Величины K несколько убывают с ростом μ_a.

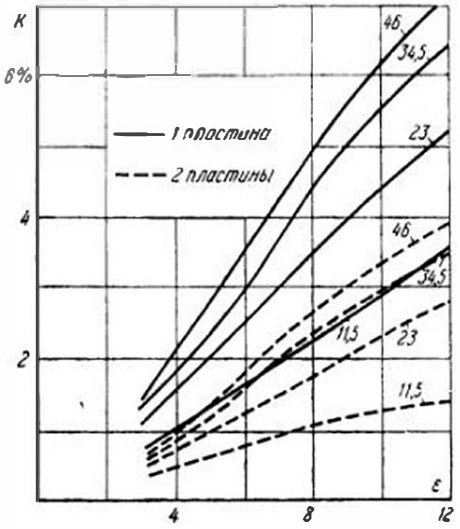


Рис. 67. Частотные коэффициенты в зависимости от ε при фиксированных значениях Φ [262].
Параметры те же, что и на рис. 66. Цифры у кривых — значения Φ.

Влияние электрической проницаемости ε на кривые $\Phi(h)$ и $K(h)$ хорошо объясняется эффектом концентрации энергии в пластинах. С ростом ε значения Φ при небольших h растут очень сильно, максимумы же кривых $\Phi(h)$ возрастают в меньшей степени. Величины K (при $h=\text{const}$) резко увеличиваются с ростом ε.

С практической точки зрения интересно сравнивать значения K для различных параметров феррита, в частности для разных ε, не при $h = \text{const}$, а при $\Phi = \text{const}$. Результаты такого сравнения приведены на рис. 67. Как видно из этого рисунка, рост K при увеличении ε не компенсируется уменьшением K вследствие уменьшения h

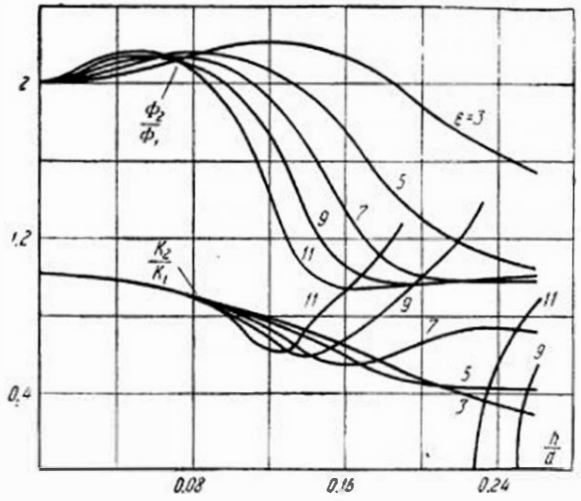


Рис. 68. Отношения величин Φ и K для волноводов с двумя (Φ_2 и K_2) и одной (Φ_1 и K_1) пластиной [262].
Цифры у кривых—значения ε; остальные параметры те же, что и на рис. 66.

(которое имеет место, если ε возрастает, а Φ остается постоянным). Таким образом, широкополосность невзаимных ферритовых фазовращателей с пластинами у стенок волновода значительно улучшается при уменьшении ε.

Остановимся теперь на сравнении случаев одной пластины и двух противоположно намагниченных пластин. Характер зависимостей Φ и K от h, ε и μ_a является для этих случаев одинаковым. Будем обозначать индексом «1» величины, относящиеся к волноводу с одной пластиной, а индексом «2»—с двумя. Отношения $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ и $\frac{K_2}{K_1}$ показаны в зависимости от h на рис. 68. При $h \to 0$, как уже отмечалось выше, отношение $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ стремится к 2. С ростом h это отношение слегка возрастает, а затем падает, становясь при больших h и достаточно больших ε даже меньшим, чем 1. Отношение величин $\frac{K_2}{K_1}$, близкое к 1 при малых h, уменьшается с ростом h до величин порядка 0,3—0,6.

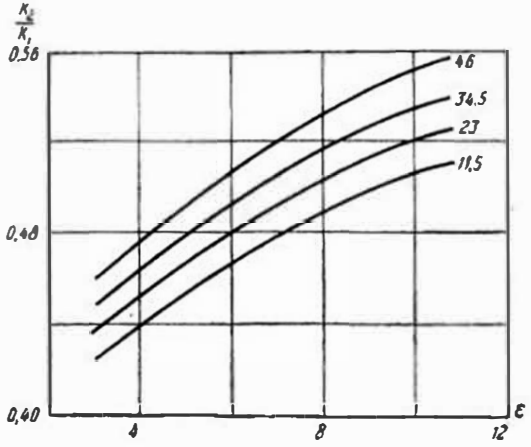


Рис. 69. Отношения частотных коэффициентов для волноводов с двумя пластинами (K_2) и с одной пластиной (K_1) в зависимости от ε при фиксированных значениях Φ [262].
Параметры те же, что и на рис. 66. Цифры у кривых—значения Φ в градусах.

На рис. 69 представлены отношения $\frac{K_2}{K_1}$ в зависимости от ε при $\Phi = \text{const}$. Из этого рисунка, а также из рис. 68 видно, что в случае двух противоположно намагниченных пластин частотные коэффициенты (при $\Phi = \text{const}$) значительно меньше, чем в случае одной пластины. Интересно, что, как следует из рис. 69, в весьма широких интервалах значений ε и Φ отношение $\frac{K_2}{K_1}$ оказывается очень близким к 0,5. Таким образом, применение двух пластин вместо одной может увеличить широкополосность невзаимного ферритового фазовращателя в два раза.

Заметим, что частотные характеристики фазовращателей и вообще ферритовых устройств определяются в действительности двумя факторами: «электродинамическим», который характеризуется величиной K, и «микроскопическим», т. е. зависимостью ε и компонентов тензора μ от частоты. Однако при постоянных магнитных полях, далеких от области ферромагнитного резонанса, в частности, при малых полях, при которых работают обычно фазовращатели, влияние второго фактора мало по сравнению с первым.

ГЛАВА 10

РЕЗОНАТОРЫ С ФЕРРИТОМ

§ 29. Свободные колебания резонатора, содержащего среду с тензорными параметрами

В технике сверхвысоких частот наряду с волноводными ферритовыми устройствами применяются и полые резонаторы, содержащие намагниченные ферритовые образцы. Такие резонаторы будут рассмотрены в этой главе.

Прежде всего необходимо выяснить некоторые вопросы общей теории полых резонаторов, содержащих среды с тензорными параметрами [1]). Этим вопросам будут посвящены § 29 и 30. Развиваемая в них теория явится обобщением на случай неоднородной тензорной среды теории полых резонаторов, разработанной Г. В. Кисунько [13] для однородной скалярной среды. Эта теория основывается на использовании введенных Я. И. Френкелем [11] собственных функций полого электромагнитного резонатора.

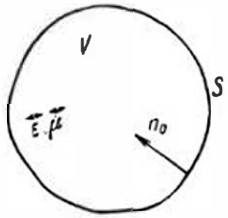


Рис. 70. Резонатор, содержащий среду с тензорными параметрами.

Остановимся сначала на задаче об отыскании собственных функций и собственных частот полого резонатора с тензорной средой, т. е. на задаче о его свободных незатухающих колебаниях. Рассмотрим замкнутый объем V (рис. 70), заполненный средой, тензорные параметры которой $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ могут являться произвольными

[1]) Такие среды будут в дальнейшем для краткости называться тензорными средами, а среды со скалярными ε и μ—скалярными средами.

функциями координат. В частности, объем V может быть целиком или частично заполнен средой с однородными тензорными параметрами. Отсутствие затухания связано с идеальной проводимостью стенок и отсутствием потерь в среде, для чего тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ должны быть эрмитовыми (§ 15).

В случае «линейной» среды, т. е. среды, параметры которой не зависят от напряженностей поля, свободные незатухающие колебания будут гармоническими. Их комплексные амплитуды будут удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{i\omega}{c}\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{i\omega}{c}\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H} \end{aligned}\right\} \tag{29,1}$$

и граничному условию

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}_0 = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{29,2}$$

где $\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности стенок резонатора S.

Представим векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в виде

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= e\boldsymbol{E}_m, \\ \boldsymbol{H} &= h\boldsymbol{H}_m, \end{aligned}\right\} \tag{29,3}$$

где e и h — комплексные амплитуды, связанные между собой соотношением

$$h = ie. \tag{29,4}$$

Подставляя (29,3) в (29,1) и (29,2) и учитывая (29,4), получим, что векторы $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_m = \frac{\omega_m}{c}\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_m, \tag{29,5}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m = \frac{\omega_m}{c}\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}_m \tag{29,6}$$

и граничному условию

$$\boldsymbol{E}_m \times \boldsymbol{n}_0 = 0 \quad \text{на} \quad S. \tag{29,7}$$

Эти векторы мы назовем собственными функциями резонатора. Заметим, что в уравнениях (29,5) и (29,6) ω заменено на ω_m, чтобы подчеркнуть, что речь идет о частотах колебаний, соответствующих собственным функциям $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$.

Как и для резонаторов со скалярной средой [14], решения уравнений (29,5) и (29,6) при граничном условии (29,7) существуют лишь при определенных значениях частоты ω_m, образующих бесконечное дискретное множество. Эти значения и являются собственными частотами колебаний. Как правило, каждому из линейно независимых решений уравнений (29,5) и (29,6), т. е. каждой паре собственных функций $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$, соответствует своя собственная частота ω_m. Индекс «m» у ω_m, $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ можно, таким образом, считать номером типа собственных колебаний. В частных случаях несколько типов собственных колебаний могут иметь одинаковые частоты, т. е. $\omega_k = \omega_{k+1} = \ldots = \omega_l$ (случай вырождения).

Исключая $\boldsymbol{E}_m$ или $\boldsymbol{H}_m$ из (29,5) и (29,6), получим уравнения, которым удовлетворяют эти векторы по отдельности:

$$\operatorname{rot}\left(\overleftrightarrow{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m\right) = \frac{\omega_m^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_m, \tag{29,8}$$

$$\operatorname{rot}\left(\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_m\right) = \frac{\omega_m^2}{c^2}\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}_m. \tag{29,9}$$

Таким образом, собственные функции $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ удовлетворяют различным уравнениям, не совпадающим с уравнениями для собственных функций пустого резонатора. Заметим, что это несовпадение имеет место и для резонатора, заполненного средой со скалярными, но зависящими от координат параметрами. И только в случае резонатора, целиком заполненного средой с однородными скалярными параметрами, для $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ получаются одинаковые волновые уравнения, которые совпадают, как известно, с уравнениями для собственных функций пустого резонатора [14]. Особенность сред с тензорными параметрами заключается в том, что для них уравнения, которым удовлетворяют $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$, различаются и в случае однородной среды, заполняющей весь резонатор.

Если тензоры $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ являются симметричными тензорами (компоненты которых при отсутствии потерь вещественны), то $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ удовлетворяют вещественным

уравнениям и могут быть приняты вещественными. Заметим, что соотношение (29,4) и было введено для того, чтобы в случае симметричных, в частности, скалярных проницаемостей функции $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ можно было одновременно считать вещественными[1]).

Если же параметры среды представляют собой несимметричные тензоры, антисимметричные компоненты которых при отсутствии потерь являются мнимыми, то в уравнения (29,8) и (29,9) войдут комплексные члены. Решения этих уравнений—собственные функции $\boldsymbol{E}_m$ и $\boldsymbol{H}_m$ также будут комплексными. Это означает, что в резонаторе, содержащем среду с несимметричными тензорными параметрами, в частности гиротропную среду, поле собственных колебаний не является полем стоячих волн. Оно может явиться, например, полем, бегущим по азимуту, как в круговом цилиндрическом резонаторе, заполненном гиротропной средой или содержащем коаксиальный стержень из такого материала.

Рассмотрим теперь дальнейшие следствия уравнений (29,8) и (29,9). Умножая (29,8) скалярно на $\boldsymbol{E}_m^*$ и используя формулу для дивергенции векторного произведения [2], получим:

$$\operatorname{div}(\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{E}_m^*)+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m=\frac{\omega_m^2}{c^2}\boldsymbol{E}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_m.$$

Интегрируя это выражение по объему полого резонатора и применяя теорему Гаусса—Остроградского [2], придем к соотношению

$$\int_S(\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m\times\boldsymbol{E}_m^*)\,\boldsymbol{n}_0\,dS+\int_V\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m\,dV=\frac{\omega_m^2}{c^2}\int_V\boldsymbol{E}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_m\,dV.$$

Поверхностный интеграл в этом соотношении может быть записан в виде

$$\int_S(\boldsymbol{E}_m^*\times\boldsymbol{n}_0)\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m\,dS.$$

[1]) Резонаторы с бегущей волной при этом исключаются из рассмотрения.

откуда ясно, что он обращается в нуль в силу граничного условия (29,7). Учитывая это, получим окончательно следующую важную формулу:

$$\omega_m^2=c^2\frac{\int_V\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_m\,dV}{\int_V\boldsymbol{E}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E}_m\,dV}. \tag{29,10}$$

Аналогичная формула[1]), связывающая собственные частоты с функциями $\boldsymbol{H}_m$,

$$\omega_m^2=c^2\frac{\int_V\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_m\,dV}{\int_V\boldsymbol{H}_m^*\cdot\overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H}_m\,dV} \tag{29,11}$$

может быть выведена таким же методом, как и формула (29,10), или получена из (29,10) путем замены (12,25) в соответствии с принципом перестановочной двойственности.

Если тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ являются эрмитовыми (тензоры $\overleftrightarrow{\mu}^{-1}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}$ при этом тоже будут эрмитовыми), то подынтегральные выражения в (29,10) и (29,11) вещественны. Доказательство этого было, по существу, дано при выводе выражения (15,22). Для реальных сред подынтегральные выражения в (29,10) и (29,11) являются, если пренебречь потерями, не только вещественными, но и положительными. Таким образом, собственные частоты резонатора, содержащего среду без потерь, являются вещественными.

Запишем теперь уравнение, комплексно сопряженное с (29,8), для другого собственного колебания — с индексом «n»:

$$\operatorname{rot}(\overleftrightarrow{\mu}^{-1*}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_n^*)=\frac{\omega_n^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}^*\boldsymbol{E}_n^*. \tag{29,12}$$

[1]) Формулы (29,10) и (29, 11) могут оказаться полезными при вычислении собственных частот резонаторов, частично заполненных тензорной средой, различными приближенными, в частности вариационными методами [221].

При этом, не учитывая частотной зависимости компонентов $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, будем считать их одинаковыми для колебаний с индексами «m» и «n». Это допущение является оправданным, если учесть, что непосредственный интерес представляют не свободные, а вынужденные колебания, происходящие с частотой ω возбуждающих токов или полей. Рассмотрение свободных колебаний носит вспомогательный характер: оно имеет смысл построения системы функций, по которым будет производиться разложение комплексных амплитуд поля вынужденных колебаний. Поэтому мы можем построить эти функции для резонатора, заполненного гипотетической средой, $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ которой не зависят от частоты и имеют те же значения, что и реальная среда при частоте ω. Итак, в выражениях (29,8) и (29,12) мы будем принимать значения $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ при интересующей нас частоте ω независимо от величин ω_m и ω_n.

Имея это в виду, умножим скалярно уравнение (29,8) на $\boldsymbol{E}_n^*$, а уравнение (29,12) на $\boldsymbol{E}_m$, вычтем полученные выражения и применим формулу для дивергенции векторного произведения. В результате получим

$$\frac{1}{c^2}\left[\omega_m^2 \boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_m - \omega_n^2 \boldsymbol{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}^* \boldsymbol{E}_n^*\right] =$$

$$= \operatorname{div}\left[(\overleftrightarrow{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m) \times \boldsymbol{E}_n^* - (\overleftrightarrow{\mu}^{-1*} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_n^*) \times \boldsymbol{E}_m\right] -$$

$$- \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m + \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\mu}^{-1*} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_n^*. \quad (29,13)$$

Так как тензоры $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ являются эрмитовыми, то

$$\boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}^* \boldsymbol{E}_n^*,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m = \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m \cdot \overleftrightarrow{\mu}^{-1*} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_n^*.$$

Учитывая это и замечая, что при интегрировании по объему резонатора первый член в правой части (29,13) обратится в нуль вследствие граничных условий, получим:

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_V \boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_m \, dV = 0. \quad (29,14)$$

В отсутствие вырождения ($\omega_m \neq \omega_n$) из (29,14) непосредственно следует:

$$\int_V \boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_m \, dV = 0 \qquad (m \neq n). \quad (29,15)$$

Это выражение представляет собой обобщенное условие ортогональности электрических собственных функций резонатора с тензорной средой. При наличии вырождения из (29,14) еще не следует (29,15), но при этом, если собственные функции окажутся не ортогональными, всегда можно перейти к их ортогональным линейным комбинациям.

Таким же образом, исходя из уравнения (29,9), можно показать, что магнитные собственные функции удовлетворяют аналогичному условию ортогональности:

$$\int_V \boldsymbol{H}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\mu} \boldsymbol{H}_m \, dV = 0 \qquad (m \neq n). \quad (29,16)$$

Если $m = n$, то интегралы в левых частях (29,15) и (29,16), конечно, не обращаются в нуль, и их можно приравнять константам нормировки соответствующих функций. Из формулы (29,10), учитывая (29,5) и принимая снова во внимание эрмитов характер тензора $\overleftrightarrow{\mu}$, легко получить:

$$\int_V \boldsymbol{E}_m^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_m \, dV = \int_V \boldsymbol{H}_m^* \cdot \overleftrightarrow{\mu} \boldsymbol{H}_m \, dV. \quad (29,17)$$

Константы нормировки электрических и магнитных собственных функций оказываются, таким образом, одинаковыми. Принимая их равными 1, можно записать окончательно:

$$\int_V \boldsymbol{E}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{E}_m \, dV = \int_V \boldsymbol{H}_n^* \cdot \overleftrightarrow{\mu} \boldsymbol{H}_m \, dV = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ при } m = n, \\ 0 \text{ при } m \neq n. \end{cases} \quad (29,18)$$

Итак, собственные функции резонатора со средой, параметры которой являются эрмитовыми тензорами, произвольным образом зависящими от координат, оказываются ортогональными и могут быть нормированы. Условие их ортогональности и нормировки (29,18) является

непосредственным обобщением условия [13]

$$\int_V \varepsilon \boldsymbol{E}_n^* \boldsymbol{E}_m \, dV = \int_V \mu \boldsymbol{H}_n^* \boldsymbol{H}_m \, dV = \delta_{mn}$$

для среды со скалярными параметрами.

Рассмотрим теперь кратко вопрос о потерях в резонаторе с тензорной средой. Мы остановимся при этом только на потерях в среде, так как учет других источников потерь (в стенках и на излучение) может быть произведен так же, как и для резонаторов со скалярной средой.

При наличии потерь в среде тензоры $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ не будут эрмитовыми. Собственные функции резонатора, если определить их так же, как это было сделано выше для среды без потерь, не только изменятся, но и перестанут удовлетворять условию ортогональности (29,18), при доказательстве которого был существенным образом учтен эрмитов характер тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Заметим, что аналогичное положение имеет место и для резонатора, заполненного скалярной, но неоднородной средой, а также для резонатора с однородной скалярной средой, но с потерями в стенках.

Если потери малы, мы можем (так же как при учете потерь в стенках [14]) считать в первом приближении, что собственные функции резонатора с потерями совпадают с собственными функциями резонатора, имеющего те же эрмитовы компоненты $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$, но равные нулю антиэрмитовы компоненты. Тогда собственные частоты резонатора с потерями могут быть приближенно определены по формуле (29,10), при выводе которой не делалось предположения об эрмитовом характере тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$. Собственные частоты при этом окажутся комплексными:

$$\omega_m = \omega_m' + i\omega_m'' = \omega_m' \left(1 + i \frac{1}{2Q_m}\right), \qquad (29,19)$$

где

$$Q_m = \frac{\omega_m'}{2\omega_m''} \qquad (29,20)$$

представляет собой добротность резонатора для m-го собственного колебания.

§ 30. Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь вынужденные колебания в резонаторе, содержащем среду с тензорными параметрами. Предположим, что возбуждение колебаний (рис. 71) производится сторонними токами и зарядами в резонаторе и полями на отверстиях в его стенках. Будем считать эти токи, заряды и поля заданными величинами. В действительности они, конечно, зависят от поля в резонаторе. Но задача о возбуждении резонатора заданными токами, зарядами и полями может служить, как и в случае скалярных сред [1]), первым приближением или первым этапом при рассмотрении вынужденных колебаний.

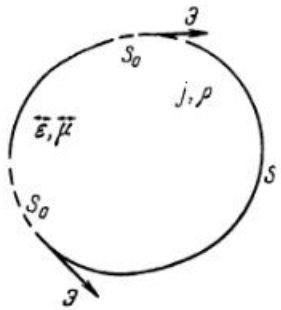


Рис. 71. Возбуждение колебаний в резонаторе.

Предположим, что заданные возбуждающие токи, заряды и поля зависят от времени по гармоническому закону с частотой ω. Если амплитуды колебаний достаточно малы, чтобы среду можно было считать линейной, то поле в резонаторе будет также гармоническим. Для комплексных амплитуд этого поля будут справедливы уравнения Максвелла (12,15)—(12,18).

Граничные условия запишутся следующим образом:

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n}_0 = \begin{cases} \boldsymbol{Э} \text{ на } S_0 \text{ (отверстиях)}, \\ 0 \text{ на } S - S_0 \text{ (остальной поверхности резонатора)}, \end{cases} \qquad (30,1)$$

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{n}_0 = \begin{cases} \boldsymbol{Б} \text{ на } S_0, \\ 0 \text{ на } S - S_0, \end{cases} \qquad (30,2)$$

где $\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор нормали к поверхности резонатора S. Величины $\boldsymbol{j}_{ст}$, $\varrho_{ст}$, $\boldsymbol{Э}$ и $\boldsymbol{Б}$ в рамках данной задачи должны рассматриваться как заданные в (дальнейшем индексы «ст» у $\boldsymbol{j}$ и ϱ будут опускаться).

[1]) См. сноску на стр. 277

Комплексные амплитуды поля вынужденных колебаний будем искать в виде рядов по собственным функциям резонатора, рассмотренным в § 29:

$$\boldsymbol{E} = \sum_n e_n \boldsymbol{E}_n - \nabla\varphi_e. \tag{30,3}$$

$$\boldsymbol{H} = \sum_n h_n \boldsymbol{H}_n - \nabla\varphi_h. \tag{30,4}$$

Коэффициенты e_n и h_n, а также добавочные «градиентные» функции φ_e и φ_h подлежат определению. Градиентный член в (30,3), так же как и в случае скалярной среды, необходим для того, чтобы обеспечить выполнение уравнения (12,18), так как все собственные функции, а следовательно, и их сумма удовлетворяют уравнению (12,24). Введение градиентного члена в (30,4) объясняется, как и для скалярной среды [213], необходимостью учета нормальной составляющей магнитной индукции B на отверстиях.

Подстановка (30,3) в (12,18) дает уравнение для функции φ_e:

$$\operatorname{div}(\overleftrightarrow{\varepsilon}\nabla\varphi_e) = -4\pi\rho. \tag{30,5}$$

Граничное условие для нее может быть принято следующим:

$$\varphi_e = 0 \qquad \text{на } S. \tag{30,6}$$

Подстановка (30,4) в (12,16) дает уравнение для φ_h

$$\operatorname{div}(\overleftrightarrow{\mu}\nabla\varphi_h) = 0. \tag{30,7}$$

Граничное условие для функции φ_m следует из (30,2):

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial n} = \begin{cases} B \text{ на } S_0, \\ 0 \text{ на } S - S_0, \end{cases} \tag{30,8}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к поверхности резонатора.

С помощью выражений (29,5) и (30,6) можно показать, что $\nabla\varphi_e$ ортогонален собственным функциям резонатора $\boldsymbol{E}_m$:

$$\int_V \boldsymbol{E}_m^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}\nabla\varphi_e \, dV = 0. \tag{30,9}$$

С помощью (29,6) и (29,7) может быть показана ортогональность $\nabla\varphi_h$ и собственных функций $\boldsymbol{H}_m$:

$$\int_V \boldsymbol{H}_m^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}\nabla\varphi_h \, dV = 0. \tag{30,10}$$

Заметим, что, как и в случае скалярных сред, функции φ_e и φ_h можно искать в виде рядов по собственным градиентным функциям резонатора. Во многих случаях учет градиентных членов является несущественным. А если частота колебаний ω близка к одной из собственных частот резонатора ω_m, то в разложениях (30,3) и (30,4) практически следует принимать во внимание лишь один член — соответствующий собственному колебанию с номером m.

Умножим теперь $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ на левую и правую части (30,3), а полученное равенство умножим скалярно на $\boldsymbol{E}_m$. После интегрирования по объему резонатора и учета условий ортогональности (29,18) и (30,9) придем к формуле для коэффициентов e_m:

$$e_m = \int_V \boldsymbol{E}_m^* \cdot \overleftrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{E} \, dV. \tag{30,11}$$

Аналогичным путем, исходя из (30,4) и учитывая (29,18) и (30,10), получим:

$$h_m = \int_V \boldsymbol{H}_m^* \cdot \overleftrightarrow{\mu}\boldsymbol{H} \, dV. \tag{30,12}$$

Формулы (30,11) и (30,12) будут использованы при выводе уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты e_n и h_n.

Для получения этих уравнений умножим (12,15) скалярно на $\boldsymbol{H}_m^*$, а (12,17) — на $\boldsymbol{E}_m^*$, проинтегрируем по объему резонатора и учтем формулы (30,11) и (30,12). В результате получим:

$$\int_V \boldsymbol{H}_m^* \operatorname{rot}\boldsymbol{E} \, dV = -\frac{i\omega}{c} h_m, \tag{30,13}$$

$$\int_V \boldsymbol{E}_m^* \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \, dV = \frac{i\omega}{c} e_m + \frac{4\pi}{c} \int_V \boldsymbol{E}_m^* \boldsymbol{j} \, dV. \tag{30,14}$$

Интегралы, стоящие в левых частях (30,13) и (30,14), преобразуем с учетом формулы для дивергенции векторного произведения и теоремы Гаусса—Остроградского [2]:

$$\int_V \boldsymbol{H}_m^* \operatorname{rot} \boldsymbol{E}\, dV = \int_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^*)\, \boldsymbol{n}_0\, dS + \int_V \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_m^*\, dV, \tag{30,15}$$

$$\int_V \boldsymbol{E}_m^* \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, dV = \int_S (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{E}_m^*)\, \boldsymbol{n}_0\, dS + \int_V \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m^*\, dV. \tag{30,16}$$

Поверхностный интеграл в (30,16) обращается в нуль в силу граничного условия (29,7) для собственных функций. Поверхностный интеграл в (30,15) с учетом граничного условия (30,1) может быть преобразован следующим образом:

$$\int_S (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_m^*)\, \boldsymbol{n}_0\, dS = -\int_{S_0} (\boldsymbol{H}_m^* \times \boldsymbol{\Theta})\, \boldsymbol{n}_0\, dS.$$

Объемные интегралы в правых частях (30,15) и (30,16) преобразуем, принимая во внимание уравнения (29,5) и (29,6), эрмитов характер тензоров $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ и $\overleftrightarrow{\mu}$ и формулы (30,11) и (30,12). В результате получим:

$$\int_V \boldsymbol{E} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_m^*\, dV = \frac{\omega_m}{c} e_m, \quad \int_V \boldsymbol{H} \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_m^*\, dV = \frac{\omega_m}{c} h_m.$$

С учетом всех высказанных соображений уравнения (30,13) и (30,14) приведутся к виду

$$\left.\begin{aligned} \omega_m e_m + i\omega h_m &= F_m, \\ i\omega e_m - \omega_m h_m &= -I_m, \end{aligned}\right\} \tag{30,17}$$

где

$$F_m = c \int_{S_0} (\boldsymbol{H}_m^* \times \boldsymbol{\Theta})\, \boldsymbol{n}_0\, dS, \tag{30,18}$$

$$I_m = 4\pi \int_V \boldsymbol{E}_m^* \boldsymbol{j}\, dV. \tag{30,19}$$

Уравнения (30,17), а также формулы (30,18) и (30,19) полностью совпадают с аналогичными выражениями для скалярных сред [13].

Решая систему (30,17) относительно e_m и h_m, приходим к выражениям

$$e_m = \frac{\omega_m F_m - i\omega I_m}{\omega_m^2 - \omega^2}, \tag{30,20}$$

$$h_m = \frac{i\omega F_m + \omega_m I_m}{\omega_m^2 - \omega^2}. \tag{30,21}$$

Проведенное выше обобщение теории полых резонаторов на случай тензорных сред справедливо лишь в предположении эрмитовости тензоров $\overleftrightarrow{\mu}$ и $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ (т. е. при отсутствии потерь в среде). Это предположение использовалось при выводе условия ортогональности собственных функций и, кроме того, было непосредственно принято во внимание при выводе (30,17). Строгая теория резонатора, содержащего тензорную среду с потерями, не может быть построена так просто. Это, впрочем, относится и к резонатору, заполненному неоднородной скалярной средой, а также к резонатору с потерями в стенках.

Если потери в среде невелики, то их учет в первом приближении может быть произведен путем замены вещественных собственных частот в формулах (30,20) и (30,21) комплексными частотами, определенными так, как указывалось в § 29 (выражение (29,19)). Это приводит к приближенным формулам:

$$e_m = \frac{\omega_m F_m - i\omega I_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega_m^2}{Q_m}}, \tag{30,22}$$

$$h_m = \frac{i\omega F_m + \omega_m I_m}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\dfrac{\omega_m^2}{Q_m}}. \tag{30,23}$$

Здесь Q_m определяется согласно (29,20), а ω_m' заменено на ω_m. При этом в качестве собственных функций в выражениях (30,18) и (30,19), так же как и в выражениях (29,10) или (29,11), используемых для расчета комплекс-

ных собственных частот, могут быть приняты собственные функции резонатора без потерь.

Подчеркнем, что в отличие от резонатора, заполненного однородной скалярной средой, собственные функции резонатора с потерями в случае тензорной среды (а также скалярной, но неоднородной) не строго, а лишь в первом приближении совпадают с собственными функциями резонатора без потерь.

§ 31. Расчет резонаторов с ферритом

Основное внимание в этом параграфе будет уделено расчету комплексных собственных частот, т. е. вещественных собственных частот и добротностей резонаторов, содержащих намагниченные ферритовые образцы.

Строгий расчет полых систем, содержащих гиротропную среду, например намагниченный поликристаллический феррит, возможен, как указывалось выше, в весьма ограниченном числе случаев. К ним принадлежат задачи о регулярных волноводах, рассмотренные в главах 8 и 9. Поэтому необходимо прежде всего выяснить, могут ли полученные для этих волноводов результаты быть применены к расчету резонаторов.

Из теории полых систем с изотропными средами (т. е. средами со скалярными параметрами) хорошо известно [14], что, зная поле и постоянную распространения в регулярном волноводе, легко получить собственные функции и собственные частоты так называемого волноводного резонатора. Под волноводным резонатором понимается при этом участок волновода, ограниченный двумя торцевыми металлическими плоскостями, перпендикулярными оси волновода. Собственные функции такого резонатора представляют собой стоячие волны, которые образуются в результате суперпозиции двух волн одинакового типа, распространяющихся в волноводе в противоположных направлениях. Собственные частоты резонатора ω_m определяются из условия

$$\beta(\omega_m) = \frac{\pi n}{l}, \tag{31,1}$$

где l—длина резонатора, n—целое число, а $\beta(\omega)$—постоянная распространения, которую мы считаем известной

функцией поперечных размеров, параметров среды и частоты ω.

Необходимым условием образования поля в резонаторе в результате суперпозиции двух распространяющихся в противоположных направлениях волн в волноводе является взаимность распределения поперечного электрического поля $\boldsymbol{E}_\perp$ в плоскости поперечного сечения волновода:

$$\boldsymbol{E}_{+\perp}(q_1, q_2) = \boldsymbol{E}_{-\perp}(q_1, q_2), \tag{31,2}$$

где q_1 и q_2—координаты в плоскости поперечного сечения, а знаки плюс и минус соответствуют двум направлениям распространения.

Условие (31,2) всегда выполняется в случае скалярной среды. Для волновода, содержащего среду, параметры которой являются несимметричными тензорами, это условие, вообще говоря, не выполняется. При этом двух волн, падающей и отраженной, недостаточно для выполнения граничного условия $\boldsymbol{E}_\perp = 0$ на торцевых поверхностях волноводного резонатора. Это условие может быть выполнено лишь при наличии бесконечного количества различных волн и ближних полей. Очевидно, что собственная функция волноводного резонатора уже не является в этом случае суперпозицией двух волн одного типа в волноводе и формула (31,1) несправедлива.

Взаимность же постоянной распространения, т. е. выполнение равенства

$$\beta_+ = \beta_-, \tag{31,3}$$

не является необходимым условием образования стоячей волны в резонаторе в результате суперпозиции двух волн одного типа. Если это условие не выполняется, то такая суперпозиция возможна, но соотношение (31,1) заменяется следующим:

$$\frac{1}{2}[\beta_+(\omega_m) + \beta_-(\omega_m)] = \frac{\pi n}{l}. \tag{31,4}$$

Условие (31,2) выполняется и для тензорных параметров среды в некоторых частных случаях. Оно выполняется, например, для круглого волновода, заполненного продольно намагниченной гиротропной средой (§ 23) или содержащего коаксиально расположенные цилиндр (§ 24) или трубку

из такой среды. Вторым примером волновода с взаимным распределением поперечного электрического поля является прямоугольный волновод с волной TE_{n0}, целиком заполненный поперечно намагниченной гиротропной средой (§ 25). В обоих упомянутых случаях постоянная распространения также является взаимной и формула (31,1) может быть применена.

Что же касается прямоугольного волноводного резонатора с поперечно (относительно оси волновода) намагниченной пластиной, то для него такой метод расчета не может быть применен, так как распределение поперечного электрического поля в прямоугольном волноводе с намагниченными ферритовыми пластинами (§ 26) всегда зависит от направления распространения.

Сложность строгого расчета резонаторов, содержащих среды с тензорными параметрами, заставляет уделять большое внимание приближенным методам их расчета. Наиболее простым и универсальным из этих методов является метод возмущений с квазистатической аппроксимацией внутреннего поля (см. главу 6). Этот метод был применен в § 24 к расчету регулярного волновода. Сейчас мы рассмотрим несколько примеров использования этого метода для расчета резонаторов с ферритовыми образцами.

В качестве первого примера рассмотрим, согласно В. В. Никольскому [277], резонатор с тонкой ферритовой пластиной, намагниченной касательно к ее плоскости (плоскости xz). Воспользуемся выражениями (17,5) и (17,10) для внутреннего поля в пластине. Подставляя их в формулу (16,22), получим выражение для собственной частоты резонатора, содержащего такую пластину:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-\frac{1}{2W_0}\int\Big[(\mu_\perp-\mu_0)H^*_{0x}H_{0x}+$$
$$+\frac{\mu_0}{\mu}(\mu-\mu_0)H^*_{0y}H_{0y}+\frac{i\mu_a\mu_0}{\mu}(H^*_{0x}H_{0y}-H^*_{0y}H_{0x})+$$
$$+(\mu_\parallel-\mu_0)H^*_{0z}H_{0z}+\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(\varepsilon-\varepsilon_0)E^*_{0y}E_{0y}+$$
$$+(\varepsilon-\varepsilon_0)(E^*_{0x}E_{0x}+E^*_{0z}E_{0z})\Big]\,dV. \quad (31,5)$$

Здесь $\mu_\perp=\mu-\frac{\mu_a^2}{\mu}$, а интегрирование производится по объему пластины.

Предположим теперь, что пластина находится в прямоугольном резонаторе (рис.72), заполненном средой с $\varepsilon_0=\mu_0=1$, в котором при отсутствии пластины имеет место колебание типа TM_{mn0}. Тогда составляющие

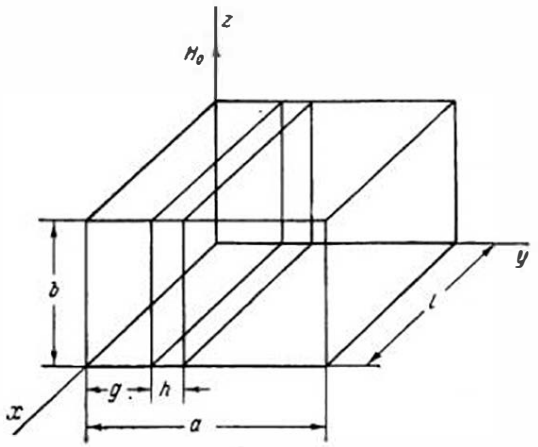


Рис. 72. Прямоугольный резонатор с ферритовой пластиной.

невозмущенного поля резонатора могут быть записаны следующим образом (см., например, [14]):

$$\left.\begin{aligned}H_{0x}&=\frac{k_y}{k_0}\sin k_x x\cos k_y y,\\ H_{0y}&=\frac{k_x}{k_0}\cos k_x x\sin k_y y,\\ E_{0z}&=\sin k_x x\sin k_y y,\\ H_{0z}&=E_{0x}=E_{0y}=0,\end{aligned}\right\} \quad (31,6)$$

где $k_x=\frac{\pi m}{l}$, $k_y=\frac{\pi n}{a}$, а $k_0=\frac{\omega}{c}=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$.

Подставляя выражения (31,6) в формулу (31,5), мы замечаем, что третий член подынтегрального выражения в (31,5), пропорциональный $i\mu_a$, обращается в нуль. Причина этого заключается в том, что невозмущенное

поле является в данном случае полем с линейной поляризацией, для которого собственные функции вещественны. Величина W_0 может быть легко определена по формуле (16,23) и в данном случае составит:

$$W_0 = \frac{abl}{4}.$$

Окончательно из выражения (31,5), учитывая, что толщина пластины является малой, и полагая $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, получим:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{h}{a}\left\{(\mu_\perp - 1)\frac{k_y^2}{k_0^2}\cos^2 k_y g + \right.$$
$$\left. + \left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{k_x^2}{k_0^2} + (\varepsilon - 1)\right]\sin^2 k_y g\right\}. \quad (31,7)$$

Приращение частоты в рассматриваемом приближении пропорционально отношению объема пластины к объему резонатора и состоит из трех членов, зависящих соответственно от приращений величин $\mu_\perp$, $\frac{1}{\mu}$ и ε.

Если пластина находится в узле E_z и H_y, т. е. при $g = \frac{p}{n}a$ (где $p = 0, 1, 2, \ldots, n$), в частности, у стенки резонатора, то не обращается в нуль только первый член (31,7), и

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{h}{a}(\mu_\perp - 1)\frac{k_y^2}{k_0^2}. \quad (31,8)$$

Для пластины в узле H_y, т. е. при $g = \frac{a}{n}\left(p + \frac{1}{2}\right)$, в частности, при нечетном n,—в центре резонатора

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{h}{a}\left[\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{k_x^2}{k_0^2} + (\varepsilon - 1)\right]. \quad (31,9)$$

Если ферритовая пластина находится в узле E_z и H_y (например, у стенки резонатора), но намагничена по оси x, то аналогично предыдущему получим:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{h}{a}(\mu_\parallel - 1)\frac{k_y^2}{k_0^2}. \quad (31,10)$$

Условием справедливости этого расчета, основанного на квазистатической аппроксимации поля, может служить соотношение (17,13).

В качестве второго примера рассмотрим резонатор с тонким ферритовым цилиндром, намагниченным вдоль его оси. В этом случае для внутреннего поля будут справедливы выражения (17,7) и (17,11), подстановка которых в (16,22) дает формулу

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{1}{2W_0}\int\limits_{V_1}\left[2\mu_0\frac{\mu^2 - \mu_0^2 - \mu_a^2}{(\mu + \mu_0)^2 - \mu_a^2}\boldsymbol{H}_{0\perp}^* \boldsymbol{H}_{0\perp} + \right.$$
$$+ \frac{4i\mu_a\mu_0^2}{(\mu + \mu_0)^2 - \mu_a^2}\varkappa_0(\boldsymbol{H}_{0\perp}^* \times \boldsymbol{H}_{0\perp}) + (\mu_\parallel - \mu_0)H_{0z}^* H_{0z} +$$
$$\left. + \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + \varepsilon_0}\boldsymbol{E}_{0\perp}^* \boldsymbol{E}_{0\perp} + (\varepsilon - \varepsilon_0)E_{0z}^* E_{0z}\right] dV. \quad (31,11)$$

Предположим теперь, что такой цилиндр расположен на оси кругового цилиндрического резонатора. Если длина цилиндра совпадает с длиной резонатора, то строгий расчет резонатора, как уже отмечалось выше, сводится к расчету круглого волновода с ферритовым стержнем (§ 24). Собственные функции такого резонатора являются суперпозицией нормальных волн в волноводе со стержнем и, следовательно, так же как и эти волны, будут иметь круговую поляризацию. Очевидно, что для всех типов полей, для которых постоянные распространения в волноводе со стержнем различаются для волн с правым и левым вращением, собственные частоты волноводного резонатора также различны для колебаний с разными направлениями вращения. Можно сказать, что в магнитном поле произойдет расщепление собственной частоты (или резонансной линии) такого резонатора с продольно намагниченным ферритовым образцом на две линии, соответствующие колебаниям с правым и левым направлениями вращения.

Мы не будем останавливаться на расчете кругового цилиндрического резонатора с продольно намагниченным ферритовым стержнем методом возмущений, так как этот расчет явился бы простым повторением аналогичного расчета волновода со стержнем, приведенного в § 24. Заметим лишь, что при этом расчете необходимо в качестве невозмущенного колебания принять также колебание с круговой поляризацией, т. е. с зависимостью от азимутального угла φ в виде $e^{im\varphi}$. Тогда в зависимости от знака m, т. е. от направления вращения поляризации

колебания, расчет даст различные значения собственной частоты резонатора.

Поместим теперь тонкий продольно намагниченный ферритовый цилиндр на оси резонатора квадратного сече-

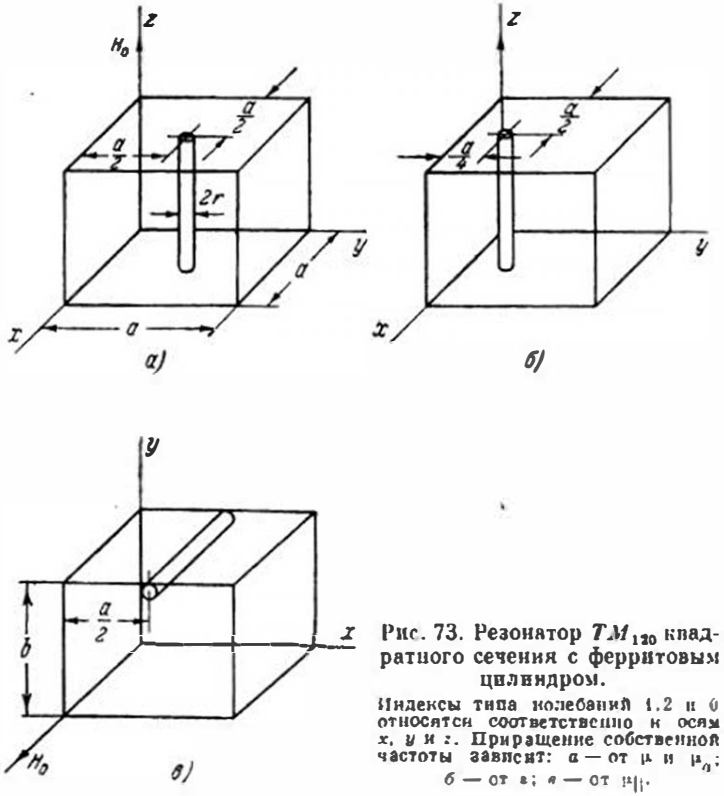


Рис. 73. Резонатор TM_{120} квадратного сечения с ферритовым цилиндром.

Индексы типа колебаний 1, 2 и 0 относятся соответственно к осям x, y и z. Приращение собственной частоты зависит: $а$ — от μ и μ_a; $б$ — от ε; $в$ — от $\mu_\parallel$.

ния (рис. 73, $а$) с колебаниями того же типа TM_{mn0}, что и в первом примере. Вследствие симметрии рассматриваемого резонатора в нем наряду с колебаниями TM_{mn0} могут существовать и колебания TM_{nm0}, причем наличие ферритового образца делает эти колебания связанными между собой. По аналогии с круговым резонатором естественно предположить, что собственными колебаниями рассматриваемого квадратного резонатора с ферритовым цилиндром

будут такие комбинации полей TM_{mn0} и TM_{nm0} (точнее, полей, переходящих в TM_{mn0} и TM_{nm0} при уменьшении радиуса ферритового цилиндра), которые соответствуют круговой поляризации суммарных колебаний. Это заставляет нас принять в качестве невозмущенного (начального) поля такую же комбинацию полей, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_0 &= \boldsymbol{E}_{mn0} \mp i\boldsymbol{E}_{nm0}, \\ \boldsymbol{H}_0 &= \boldsymbol{H}_{mn0} \mp i\boldsymbol{E}_{nm0}, \end{aligned}\right\} \qquad (31,12)$$

где, как обычно, знак минус соответствует правому, а знак плюс — левому вращению.

С учетом (31,12) п (31,6) составляющие начального поля запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} H_{0x} &= \frac{\pi}{k_0 a}\left(n \sin\frac{\pi m}{a} x \cos\frac{\pi n}{a} y \mp im \sin\frac{\pi n}{a} x \cos\frac{\pi m}{a} y\right), \\ H_{0y} &= -\frac{\pi}{k_0 a}\left(m \cos\frac{\pi m}{a} x \sin\frac{\pi n}{a} y \mp \right. \\ &\qquad \left. \mp in \cos\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi m}{a} y\right), \\ E_{0z} &= \sin\frac{\pi m}{a} x \sin\frac{\pi n}{a} y \mp i \sin\frac{\pi n}{a} x \sin\frac{\pi m}{a} y, \\ H_{0z} &= E_{0x} = E_{0y} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (31,13)$$

Подставим эти выражения в формулу (31,11), в которой

$$\boldsymbol{H}_{0\perp} = \boldsymbol{x}_0 H_{0x} + \boldsymbol{y}_0 H_{0y},$$
$$\boldsymbol{E}_{0\perp} = \boldsymbol{x}_0 E_{0x} + \boldsymbol{y}_0 E_{0y}.$$

Величину W, входящую в (31,11), определим согласно (16,23). Примем для определенности, что m — нечетное число, а n — четное. Тогда, считая радиус ферритового цилиндра r малым, получим после несложных преобразований:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\pi r^2}{a^2}\frac{4n^2}{m^2+n^2}\frac{\mu \pm \mu_a - 1}{\mu \pm \mu_a + 1}. \qquad (31,14)$$

В это выражение не входит ε, так как ферритовый цилиндр находится в узле электрического поля, а μ и μ_a входят в комбинации $\mu \pm \mu_a$, так как цилиндр находится в магнитном поле с круговой поляризацией. Так же как и для кругового цилиндрического резонатора, приращения

частоты оказываются различными для колебаний с различными направлениями вращения.

Для такого же резонатора квадратного сечения, но с ферритовым цилиндром, расположенным не на оси резонатора, собственными колебаниями будут колебания уже не с круговой, а, по-видимому, с некоторой эллиптической поляризацией. Если цилиндр находится в пучности электрического поля и узле магнитного (рис. 73,*б*), то эта поляризация будет близка к линейной. Такую же поляризацию следует в этом случае принять и для невозмущенных колебаний, поле которых при этом запишется в виде (31,6). Тогда из выражения (31,11) нетрудно получить:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-\frac{2\pi r^2}{a^2}(\varepsilon-1). \qquad (31,15)$$

Если цилиндр, намагниченный по-прежнему вдоль его оси, расположен, как показано на рис. 73, *в*, в пучности параллельного оси цилиндра переменного магнитного поля, то поляризацию невозмущенного колебания также следует принять линейной. Для этого случая из формулы (31,11) следует:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-\frac{\pi r^2}{ab}\frac{m^2}{m^2+n^2}(\mu_\parallel-1), \qquad (31,16)$$

где b—высота резонатора.

В качестве третьего примера расчета собственных частот резонаторов с ферритом методом возмущений рассмотрим случай, когда ферритовый образец представляет собой малую сферу. При этом необходимо воспользоваться формулами (17,9) и (17,12).

Подставляя их в выражение (16,22) и учитывая, что радиус сферы r мал, получим:

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-\frac{2\pi r^3}{W_0}\left[\mu_0\frac{(\mu-\mu_0)(\mu+2\mu_0)-\mu_a^2}{(\mu+2\mu_0)^2-\mu_a^2}\boldsymbol{H}^*_{0\perp}\boldsymbol{H}_{0\perp}+\right.$$
$$+\frac{3i\mu_a\mu_0^2}{(\mu+2\mu_0)^2-\mu_a^2}\boldsymbol{z}_0(\boldsymbol{H}^*_{0\perp}\times\boldsymbol{H}_{0\perp})+\mu_0\frac{\mu_\parallel-\mu_0}{\mu_\parallel+2\mu_0}H^*_{0z}H_{0z}+$$
$$\left.+\varepsilon_0\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}^*_0\boldsymbol{E}_0\right]. \qquad (31,17)$$

Предположим, что сфера находится на оси кругового цилиндрического резонатора с колебанием типа TE_{mnp} и намагничена вдоль оси резонатора (рис. 74). Тогда по тем же соображениям, что и для резонатора с ферритовым цилиндром, в качестве невозмущенного колебания следует принять колебание с круговой поляризацией. Для рассматриваемой задачи несколько проще не подставлять в (31,17) непосредственно выражения для составляющих поля невозмущенного колебания, а выразить эти составляющие через скалярную собственную функцию резонатора. Эта функция в нашем случае запишется в виде

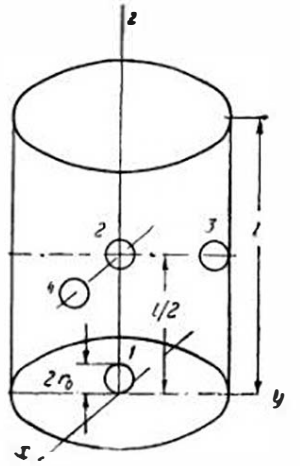


Рис. 74. Круговой цилиндрический резонатор TE_{111} с ферритовой сферой.

Электрическое поле на оси z направлено по оси y. Приращение собственной частоты TE_{111} зависит: *1*—от μ и μ_a (сфера намагничена по оси z) или от $\mu_\parallel$ (сфера намагничена по оси x); *2* и *3*—от z; *4*—от $\mu_\parallel$ (сфера намагничена по оси z).

$$\Psi(r,\varphi,z)=Z(z)\,\psi(r,\varphi), \qquad (31,18)$$

где

$$Z(z)=\sin k_z z \quad \left(k_z=\frac{\pi p}{l}\right),$$

а

$$\psi(r,\varphi)=J_m(\varkappa r)\,e^{im\varphi},$$

(причем $\varkappa R=A_{mn}$—корень уравнения $J'_m(\varkappa R)=0$, где R—радиус цилиндра). Заметим, что функция ψ представляет собой собственную функцию круглого волновода для волны TE_{mn} с круговой поляризацией, которая была использована в § 24 при расчете волновода с ферритовым стержнем.

Составляющие невозмущенного поля выразятся через функции ψ и Z следующим образом [14]:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_\perp=\mu_0 k_0 Z\boldsymbol{z}_0\times\nabla\psi,\\&\boldsymbol{H}_\perp=\frac{dZ}{dz}\nabla\psi,\quad H_z=\varkappa^2 Z\psi.\end{aligned}\right\} \qquad (31,19)$$

Подставляя выражения (31,19) в формулу (31,17) и используя соотношения, приведенные в § 24, после

некоторых преобразований придем к выражению

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-\frac{r_0^3}{lR^2}\frac{A_{mn}^2}{(A_{mn}^2-1)J_m^2(A_{mn})}\left\{\frac{k_z^2}{k_0^2}\mu_0\times\right.$$
$$\times\frac{[(\mu-\mu_0)(\mu+2\mu_0)-\mu_a^2](1+m^2)\pm 6\mu_a}{(\mu+2\mu_0)^2-\mu_a^2}\cos^2 k_z z+$$
$$\left.+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}(1+m^2)\sin^2 k_z z\right\}. \qquad (31{,}20)$$

Для $m=1$ это выражение преобразуется к виду

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-\frac{2r_0^3}{lR^2}\frac{A_{1n}^2}{(A_{1n}^2-1)J_m^2(A_{1n})}\left(\frac{k_z^2}{k_0^2}\mu_0\frac{\mu\pm\mu_a-\mu_0}{\mu\pm\mu_a+2\mu}\cos^2 k_z z+\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\sin^2 k_z z\right). \qquad (31{,}21)$$

Сюда μ и μ_a входят только в комбинации $\mu\pm\mu_a$, так как сфера находится в магнитном поле с круговой поляризацией.

Наибольший практический интерес представляет частный случай, когда $n=1$ (колебание TE_{11p}) и $\mu_0=1$. Тогда для сферы в пучности магнитного поля, например на торцевой поверхности цилиндра (положение *1* на рис. 74):

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-8{,}4\frac{r_0^3}{lR^2}\left(\frac{\lambda_0}{2l}\right)^2\frac{\mu\pm\mu_a-1}{\mu\pm\mu_0+2}, \qquad (31{,}22)$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве. Для сферы в пучности электрического поля, например для нечетного p при $z=\frac{l}{2}$ (положение *2* на рис. 74):

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-8{,}4\frac{r_0^3}{lR^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}. \qquad (31{,}23)$$

Если сфера расположена в пучности магнитного поля, но намагничена постоянным полем в направлении переменного магнитного поля (по оси x в положении *1* или по оси z в положении *4* на рис. 74), то

$$\frac{\omega-\omega_0}{\omega}=-8{,}4\frac{r_0^3}{lR^2}\left(\frac{\lambda_0}{2l}\right)^2\frac{\mu_\parallel-1}{\mu_\parallel+2}. \qquad (31{,}24)$$

Мы проиллюстрировали на ряде примеров технику применения метода возмущений с квазистатической аппроксимацией внутреннего поля к расчету резонаторов с ферритовыми образцами. Как уже указывалось в § 17, этот метод применим лишь при весьма малых (по сравнению с длиной электромагнитной волны в феррите) размерах образцов. В качестве приближенного критерия можно принять условие (17,13), где h представляет собой толщину пластины, диаметр цилиндра или диаметр сферы. Очень важной задачей является разработка других приближенных методов [221, 230, 283], для которых требование к малости образца не является таким жестким.

Заметим, что при использовании рассмотренного метода возмущений, как и при решении электродинамических задач в предыдущих главах, предполагалось, что в малом ферритовом образце, а для большого образца — в малых по сравнению с длиной волны областях имеет место однородная прецессия намагниченности. Таким образом, все эти решения неприменимы в тех случаях, когда создаются условия для возбуждения неоднородных типов прецессии (§ 6).

В полученные выше выражения для приращений собственной частоты резонаторов с ферритовыми образцами, например в выражения (31,7), (31,14) и (31,20), входят комплексные параметры феррита μ, μ_a, $\mu_\parallel$ и ε и комплексные собственные частоты ω_0 и ω. Вещественные части этих частот представляют собой действительные собственные частоты невозмущенного и возмущенного резонатора, а мнимые части связаны формулой (29,20) с соответствующими добротностями. Разделение вещественных и мнимых частей в указанных выражениях приводит к формулам для изменений собственных частот и добротностей резонатора при внесении в него ферритового образца.

Не выписывая здесь этих формул, приведем лишь в качестве примера результаты расчета уходов собственной частоты резонатора $\Delta\nu$ и добротностей его Q_Φ, обусловленных потерями в феррите[1]), для случая ферритовой пластины в резонаторе квадратного сечения с колебанием типа TM_{110}. Положение ферритовых пластин в этом

[1]) Добротность Q резонатора с ферритом связана с Q_Φ очевидным соотношением $\frac{1}{Q}=\frac{1}{Q_0}+\frac{1}{Q_\Phi}$, где Q_0 — добротность пустого резонатора.

резонаторе и направления их намагничивания показаны на рис. 75. Расчетные формулы для $\Delta\nu$ и Q_Φ в случае *а* были получены из выражения (31,8), а в случаях *б* и *в*— соответственно из выражений (31,9) и (31,10). Для компонентов тензора магнитной проницаемости феррита были

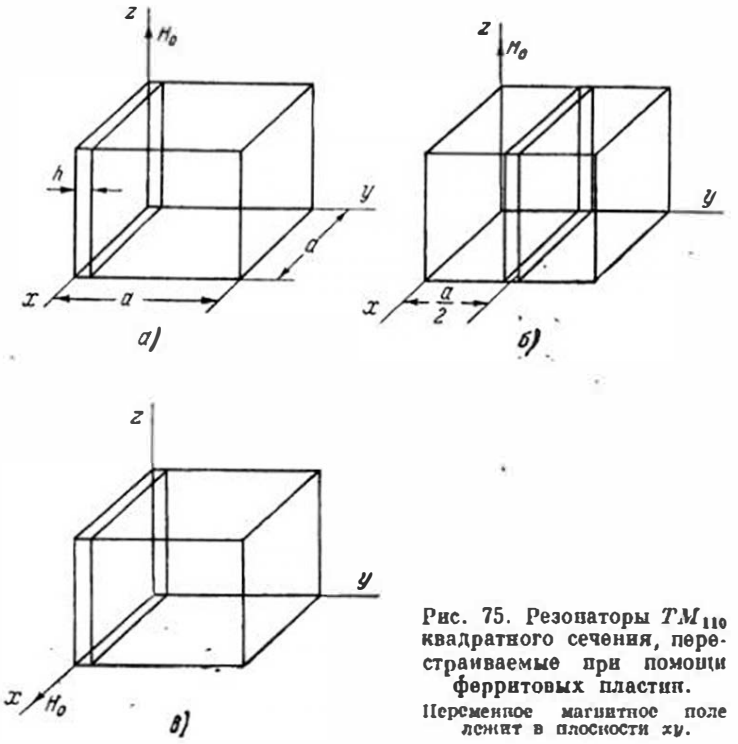


Рис. 75. Резонаторы TM_{110} квадратного сечения, перестраиваемые при помощи ферритовых пластин.

Переменное магнитное поле лежит в плоскости *xy*.

приняты значения, приведенные на рис. 28. Расчет был проведен в трехсантиметровом диапазоне для максимальной толщины пластины (0,8 *мм*), при которой в этом диапазоне, согласно оценке (17,13), еще можно пользоваться квазистатической аппроксимацией внутреннего поля.

Результаты расчета приведены на рис. 76. Из этого рисунка видно, в частности, что диапазон перестройки резонатора (при изменении H_0) порядка 3% может быть

получен при добротности Q_Φ более 750 (результирующая добротность Q будет, конечно, несколько ниже).

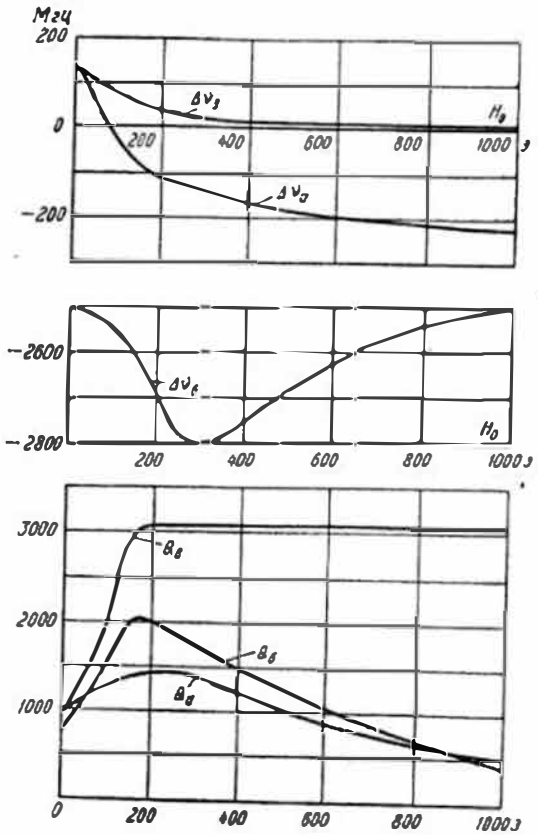


Рис. 76. Результаты расчета зависимости ухода частоты $\Delta\nu$ и добротности Q_Φ резонаторов, показанных на рис. 75 для феррита с параметрами, приведенными на рис. 28.

Длина волны $\lambda=3{,}2$ *см*; размер резонатора $a=2{,}26$ *см*; электрическая проницаемость феррита, $\varepsilon=9$—$10{,}02$. Индексы у величин $\Delta\nu$ и Q_Φ соответствуют резонаторам, показанным на рис. 75, *а*, *б* и *в*.

Резонаторы с ферритовыми образцами могут быть использованы для измерения параметров: ε и компонентов тензора $\overleftrightarrow{\mu}$ намагниченных ферритов на сверхвысоких

частотах [1]). Измеряя приращения собственных частот и добротностей для четырех различных случаев, можно определить все четыре комплексных параметра (т. е. восемь вещественных величин), которыми характеризуется намагниченный поликристаллический ферромагнитный полупроводник.

Указанные четыре случая могут отличаться формой резонатора, типом колебаний в нем [240], формой образца, расположением его в резонаторе [277] и направлением постоянного магнитного поля. Эти случаи должны быть выбраны так, чтобы привести к четырем независимым выражениям, в которые входили бы все четыре параметра феррита. Желательно, конечно, чтобы в каждое выражение входило минимальное число параметров.

Этим требованиям удовлетворяют, например, квадратный или круглый резонаторы с цилиндрическими или сферическими образцами, рассмотренные в данном разделе (второй и третий примеры). Заметим, что выражения (31,14) и (31,22) дают по два независимых уравнения, соответствующих разным направлениям вращения поляризации или разным направлениям постоянного намагничивания.

В случае прямоугольного резонатора с пластиной (первый пример) мы получаем только три уравнения. Однако и этот резонатор может быть использован [278] для измерения всех параметров ферритов, если ε не зависит от постоянного магнитного поля [2]).

До сих пор мы выражали приращения комплексной собственной частоты резонатора с ферритовым образцом через компоненты «внутреннего» тензора магнитной проницаемости феррита. Но гораздо проще, используя по-прежнему метод возмущений, связать эти приращения с компонентами «внешнего» тензора магнитной восприимчивости малого ферритового эллипсоида $\overleftrightarrow{\chi^e}$ (§ 5). При этом отпадает необходимость учета связи между внутренним и внешним полем.

---

[1]) Этот вопрос наиболее полно исследован В. В. Никольским [277].

[2]) Это, по-видимому, в первом приближении имеет место для всех известных материалов.

Будем рассматривать только «магнитную» часть приращения собственной частоты (первый член под интегралом в (16,22)), либо считая, что образец находится в узле электрического поля, либо не интересуясь не зависящей от постоянного магнитного поля «электрической» частью приращения. Тогда для малого образца при $\mu_0 = 1$ из (16,22) получим:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{2\pi V_1}{W_0} \boldsymbol{H}_0^* \cdot \overleftrightarrow{\chi} \boldsymbol{H} dV. \qquad (31,25)$$

Но $\overleftrightarrow{\chi} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{M}$ — намагниченность феррита, и по определению тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$ (§ 5) $\boldsymbol{M} = \overleftrightarrow{\chi^e} \boldsymbol{H}_0$. С учетом этого найдем окончательно:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{2\pi V_1}{W_0} \boldsymbol{H}_0^* \cdot \overleftrightarrow{\chi^e} \boldsymbol{H}_0. \qquad (31,26)$$

Принимая во внимание соотношение для $\boldsymbol{H}_0^* \cdot \overleftrightarrow{\chi^e} \boldsymbol{H}_0$, аналогичное (16,20), запишем последнюю формулу следующим образом:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{2\pi V_1}{W_0} [\chi^e |H_{0\perp}|^2 + \chi_a^e \approx_0 (\boldsymbol{H}_{0\perp}^* \times \boldsymbol{H}_{0\perp}) + \chi_{\parallel}^e |H_{0z}|^2]. \qquad (31,26а)$$

В опытах по исследованию ферромагнитного резонанса (см., например, [22, 128, 271]) обычно определяют компоненты тензора $\overleftrightarrow{\chi^e}$. При этом можно считать, что $\chi_{\parallel}^e = 0$. Если же (как обычно и бывает в этих опытах) образец находится в переменном магнитном поле с линейной поляризацией, то и второй член в правой части (31,26а) обращается в нуль. Если, кроме того, $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, что всегда имеет место в опытах по ферромагнитному резонансу, то, разделяя вещественную и мнимую части приращения частоты и принимая во внимание формулу (16,23), придем к простым соотношениям:

$$\omega' - \omega_0 = -\frac{2\pi\omega_0 p V_1}{V_0} \chi^{e\prime}, \qquad (31,27)$$

$$\frac{1}{Q_0^0} - \frac{1}{Q^0} = \frac{4\pi p V_1}{V_0} \chi^{e\prime\prime}, \qquad (31,28)$$

где V_0 — объем резонатора, Q_0^0 — собственная добротность пустого резонатора, Q^0 — собственная добротность резонатора с ферритовым образцом, а

$$p = \frac{H_{0\perp}^2}{\frac{1}{V_0}\int\limits_{V_0} H^2 dV}$$

— коэффициент порядка единицы, который легко вычисляется для обычно используемых резонаторов простой формы. Формулы (31,27) и (31,28) используются при экспериментальном исследовании ферромагнитного резонанса. В случае достаточно узких резонансных кривых можно считать, что значения ω_0 и Q_0^0 совпадают с соответствующими значениями для резонатора, содержащего образец, но вдали от ферромагнитного резонанса.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ
НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

ГЛАВА 11
СТАБИЛЬНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 32. Детектирование и удвоение частоты

Уравнение Ландау—Лифшица, определяющее изменение намагниченности в ферромагнетиках, является нелинейным. Лишь при малых амплитудах переменных составляющих поля и намагниченности удается «линеаризировать» это уравнение, т. е. получить из него линейное уравнение, связывающее малые амплитуды. Решение этого уравнения приводит к линейным соотношениям между амплитудами переменных составляющих намагниченности и поля. Компоненты тензора магнитной восприимчивости, которые были получены в первой части книги и использованы во второй, и являлись коэффициентами в этих линейных соотношениях.

Невзаимные и быстроуправляемые ферритовые устройства, которые нашли широкое применение в технике с. в. ч., используют антисимметричность тензора магнитной восприимчивости феррита и зависимость его компонентов от постоянного магнитного поля. Эти устройства можно считать линейными системами. При этом следует подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, линейность имеет место только по отношению к переменным составляющим намагниченности и поля; по отношению к полным величинам намагниченности и поля эти устройства, содержащие ферромагнетики, являются, конечно, существенно нелинейными. Именно этой нелинейностью и обусловливается зависимость компонентов «линейного» тензора

восприимчивости, связывающего переменные составляющие намагниченности и поля, от величины постоянного поля.

Во-вторых, линейность по отношению к переменным составляющим имеет место лишь приближенно, тем точнее, чем меньше амплитуды поля и намагниченности. При больших амплитудах нелинейность соотношений между намагниченностью и полем вносит иногда существенные осложнения в работу этих «линейных» устройств. Но не этими осложнениями, а характером «линейного» тензора магнитной восприимчивости, т. е. процессами, рассмотренными в первой и второй частях, определяется принцип действия таких устройств.

Существует, однако, целый ряд интересных и важных явлений, обусловленных нелинейностью соотношений между переменной намагниченностью и переменным полем в ферритах. Одни из этих явлений принципиально имеют место при любых амплитудах поля, но практически сказываются лишь при достаточно больших значениях их. Другие возникают при амплитудах переменного поля, превышающих некоторые пороговые значения. В третьей части будут рассмотрены некоторые из таких нелинейных процессов, сказывающихся или возникающих в намагниченных ферритах при достаточно больших амплитудах переменного магнитного поля сверхвысоких частот.

В этой главе мы будем рассматривать такие нелинейные процессы, которые не связаны с нестабильностью, т. е. нестационарным возрастанием амплитуд колебаний. Мы будем исследовать при этом нелинейность однородной прецессии намагниченности. Таким образом, будут исключены из рассмотрения те явления, в которых неоднородность переменной намагниченности, изменение ее в пространстве играет принципиальную роль, определяя возникновение самого эффекта или его существенные черты.

Одной из фундаментальных особенностей колебаний в нелинейных системах является возможность существования вынужденных колебаний с частотами, отличными от частоты вынуждающей силы. Другой особенностью их является взаимное влияние амплитуд колебаний с разными частотами, в частности, влияние амплитуд переменных составляющих на величину постоянной составляю-

щей (детектирование). Стабильные во времени и однородные в пространстве нелинейные процессы, в которых проявляются указанные особенности, и будут рассмотрены в этой главе.

Исследование этих процессов основывается на решении нелинейного уравнения Ландау—Лифшица (4,2) для неограниченной среды. Такое решение может быть проведено методом последовательных приближений. Остановимся на этом методе, применяя его для простоты к уравнению (4,5) с диссипативным членом в «модернизированной форме Блоха».

Рассматривая однородную прецессию намагниченности и не учитывая анизотропии, мы примем, что входящее в (4,5) поле

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}, \tag{32,1}$$

где $\boldsymbol{H}_0$ — постоянное поле, а $\boldsymbol{h}$ — заданное переменное поле. Решение уравнения (4,5) будем искать в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \ldots, \tag{32,2}$$

где $M_0 \gg m_1 \gg m_2$. Подставим (32,1) и (32,2) в уравнение (4,5) и будем рассматривать последовательные приближения.

В нулевом приближении, отбрасывая все переменные члены, получаем очевидное соотношение:

$$\boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{H}_0 = 0. \tag{32,3}$$

В первом приближении, сохраняя в уравнении переменные члены первого порядка малости и принимая во внимание (32,3), придем к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{m}_1}{dt} = -\gamma \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h} + \omega_r \left(\frac{M_0}{H_0} \boldsymbol{h} - \boldsymbol{m}_1 \right). \tag{32,4}$$

Решение именно этого линейного относительно $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{h}$ уравнения привело к выражениям (4,11)—(4,13) для компонентов тензора восприимчивости.

Сохраняя в уравнении члены второго порядка малости и учитывая (32,3) и (32,4), получим уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{m}_2}{dt} = -\gamma \boldsymbol{m}_2 \times \boldsymbol{H}_0 - \gamma \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{h} - \omega_r \boldsymbol{m}_2. \tag{32,5}$$

Интересно, что это уравнение отличается от (32,4) заменой $\boldsymbol{M}_0$ на $\boldsymbol{m}_1$, а $\boldsymbol{m}_1$ на $\boldsymbol{m}_2$. Нетрудно убедиться, что уравнения для намагниченностей более высоких порядков будут получаться в результате аналогичной замены $\boldsymbol{m}_n$ на $\boldsymbol{m}_{n+1}$, например уравнение для $\boldsymbol{m}_3$ получится в результате замены в (32,5) $\boldsymbol{m}_1$ на $\boldsymbol{m}_2$, а $\boldsymbol{m}_2$ на $\boldsymbol{m}_3$. Однако для анализа тех нелинейных процессов, которые будут рассматриваться в дальнейшем, достаточно ограничиться вторым приближением, т. е. уравнением (32,5).

Метод последовательных приближений, которым мы воспользовались, является весьма общим. Однако применение его к уравнению (4,2), содержащему диссипативный член в форме Ландау — Лифшица, оказывается несколько громоздким. Недостатком этого метода является также то, что с его помощью нельзя получить изменения постоянной составляющей $\boldsymbol{M}$ (эффекта детектирования), так как в уравнение (32,5) входит только производная от $\boldsymbol{m}_2$.

При рассмотрении ряда нелинейных эффектов, в том числе и детектирования, можно, используя также метод последовательных приближений, исходить не из уравнения (32,5), а из соотношения

$$|\boldsymbol{M}| = \text{const}. \tag{32,6}$$

Для того чтобы получить это соотношение, достаточно умножить обе части уравнения Ландау—Лифшица (4,1) скалярно на $\boldsymbol{M}$. Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}) = 0,$$

откуда непосредственно следует (32,6). Соотношение (32,6), которое можно назвать законом сохранения величины намагниченности, означает, что при любых изменениях вектора намагниченности $\boldsymbol{M}$, допускаемых уравнением (4,1), величина этого вектора остается постоянной, а изменяется лишь его направление. Конец вектора $\boldsymbol{M}$ движется (прецессирует) при этом по поверхности сферы S (рис. 77).

В первой части, предполагая переменные составляющие намагниченности малыми и пренебрегая малыми величинами второго порядка, мы тем самым считали, что конец вектора $\boldsymbol{M}$ движется в касательной плоскости Σ (рис. 77). При этом переменная намагниченность не имела составляющей по оси z, а проекция намагниченности на эту ось M_z оставалась постоянной.

Учет того, что в действительности конец вектора $\boldsymbol{M}$ движется по сфере, приведет, как это ясно из рис. 77, к уменьшению постоянной составляющей M_z и появлению переменной составляющей этой величины. Для количественного анализа этих эффектов можно воспользоваться выражением (32,6). Из него следует:

$$M_z = \sqrt{M_0^2 - m_x^2 - m_y^2}, \tag{32,7}$$

где M_0 — величина намагниченности, равная статической намагниченности насыщения, а m_x и m_y — поперечные (переменные) составляющие намагниченности. Если величины m_x и m_y даже при больших амплитудах переменного поля, когда уже существенно сказываются нелинейные эффекты, будут все же значительно меньше M_0, то выражение (32,7) можно приближенно заменить следующим:

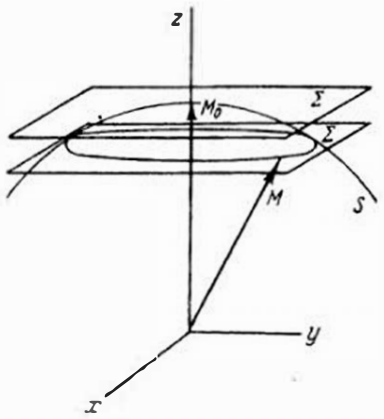


Рис. 77. Прецессия вектора намагниченности при больших амплитудах.

$$M_z = M_0 - \frac{1}{2M_0}(m_x^2 + m_y^2). \tag{32,8}$$

Используя метод последовательных приближений, мы должны в качестве m_x и m_y подставить в выражение (32,8) значения m_{1x} и m_{1y}, которые получаются в результате решения уравнения (32,4).

В этом параграфе мы остановимся на самом простом случае, когда на феррит действует одно поперечное (относительно направления постоянного поля — оси z) переменное магнитное поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону с некоторой частотой ω.

Намагниченность первого порядка m_1 будет при этом также поперечной (см. главу 1). Тогда, как следует из уравнения (32,5), переменная намагниченность второго порядка m_2 будет направлена по оси z. Для расчета этой переменной намагниченности, а также изменения постоянной намагниченности, направленной по оси z, следует воспользоваться соотношением (32,8).

Мгновенные значения составляющих произвольно поляризованного поперечного переменного магнитного поля можно записать:

$$\left.\begin{aligned} h_x &= h_{1x}\cos\omega t,\\ h_y &= h_{1y}\cos(\omega t+\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (32,9)$$

Комплексные амплитуды величин m_{1x} и m_{1y} могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} m_{1x} &= \chi h_x + i\chi_a h_y,\\ m_{1y} &= -i\chi_a h_x + \chi h_y, \end{aligned}\right\} \qquad (32,10)$$

где h_x и h_y — комплексные амплитуды составляющих переменного поля, а

$$\left.\begin{aligned} \chi &= \chi' - i\chi'',\\ \chi_a &= \chi_a' - i\chi_a'' \end{aligned}\right\} \qquad (32,11)$$

— компоненты тензора восприимчивости, которые мы предполагаем известными.

Поскольку выражение (32,8) является нелинейным, метод комплексных амплитуд не может быть непосредственно использован при вычислении M_z, и в (32,8) следует подставлять мгновенные значения m_{1x} и m_{1y} [1]). Эти мгновенные значения в соответствии с (32,9), (32,10) и (32,11) запишутся:

$$\left.\begin{aligned} m_{1x} &= h_{1x}(\chi'\cos\omega t + \chi''\sin\omega t) +\\ &\quad + h_{1y}[-\chi_a'\sin(\omega t+\varphi) + \chi_a''\cos(\omega t+\varphi)],\\ m_{1y} &= h_{1x}(\chi_a'\sin\omega t - \chi_a''\cos\omega t) +\\ &\quad + h_{1y}[\chi'\cos(\omega t+\varphi) + \chi''\sin(\omega t+\varphi)]. \end{aligned}\right\} \qquad (32,12)$$

[1]) См. сноску на стр. 356.

Подставляя выражения (32,12) в (32,8), получим после несложных преобразований:

$$M_z = M_0 - \frac{1}{4M_0}\Big\{(|\chi|^2+|\chi_a|^2)(h_{1x}^2+h_{1y}^2) - 4\sin\varphi\,(\chi'\chi_a' + \chi''\chi_a'')h_{1x}h_{1y} + (\chi'^2-\chi_a'^2-\chi''^2+\chi_a''^2)[h_{1x}^2\cos 2\omega t + h_{1y}^2\cos 2(\omega t+\varphi)] + 2(\chi'\chi''-\chi_a'\chi_a'')[h_{1x}^2\sin 2\omega t + h_{1y}^2\sin 2(\omega t+\varphi)]\Big\}. \qquad (32,13)$$

Это выражение можно представить в виде

$$M_z = M_0 - \Delta M_z + m_{2z}\cos(2\omega t+\psi). \qquad (32,14)$$

Таким образом, учет конечной величины поперечного переменного магнитного поля приводит к уменьшению постоянной намагниченности, направленной по оси z на величину

$$\Delta M_z = \frac{1}{4M_0}[(|\chi|^2+|\chi_a|^2)(h_{1x}^2+h_{1y}^2) - 4\sin\varphi\,(\chi'\chi_a'+\chi''\chi_a'')h_{1x}h_{1y}] \qquad (32,15)$$

и к появлению переменной намагниченности удвоенной частоты.

Изменение постоянной намагниченности, зависящее по квадратичному закону (32,15) от амплитуд переменного поля, позволяет использовать феррит для детектирования колебаний с. в. ч. Из выражения (32,15), как и из рис. 77, следует, что детектирование будет происходить при любой поляризации переменного поля. В частности, при линейной поляризации (например, когда $h_{1y}=0$) из (32,15) следует:

$$\Delta M_z = \frac{1}{4M_0}(|\chi|^2+|\chi_a|^2)h_{1x}^2. \qquad (32,16)$$

При круговой поляризации $\left(h_{1y}=h_{1x}=h_1,\ \varphi=\mp\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Delta M_z = \frac{1}{2M_0}|\chi\pm\chi_a|^2 h_1^2. \qquad (32,17)$$

Из выражений (32,15) и (32,17) видно, что детектирование происходит наиболее интенсивно в области ферромагнитного резонанса. В случае левого вращения при круговой поляризации (знак минус в (32,17)) эффект детектирования будет мал.

Определим ΔM_z для точки ферромагнитного резонанса при линейной поляризации поля. Подставляя (4,16) в (32,16) и учитывая, что $\omega_r \ll \omega_H$, получим:

$$\Delta M_{z\,\text{рез}} = \frac{1}{2}\frac{M_0}{(2\Delta H)^2} h_{1x}^2, \qquad (32,18)$$

где $\Delta H = \frac{\omega_r}{\gamma}$ — полуширина резонансной кривой.

Рассмотренный эффект детектирования может быть обнаружен различными способами. Один из них [422, 426] основан на использовании явления магнитострикции, т. е. изменения размеров ферритового образца при изменении намагниченности. Другой способ [450] заключается в измерении электродвижущей силы, которая наводится при изменении намагниченности в расположенной вблизи ферритового образца катушке.

Выражения (32,15)—(32,18), полученные методом последовательных приближений, несправедливы при больших значениях угла прецессии $\theta = \arcsin\frac{m_\perp}{M_0}$ (где $m_\perp = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$). Строгое решение нелинейного уравнения Ландау—Лифшица, справедливое при любых θ, может быть получено сравнительно просто для случая круговой поляризации поперечного переменного поля. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, заметим лишь, что при резонансе θ становится равной 90°, когда амплитуда переменного поля h достигает полуширины резонансной кривой ΔH. При этом $m_\perp = M_0$, а $M_z = 0$. При дальнейшем увеличении θ значение M_z при резонансе будет оставаться равным нулю, величина $\chi_{\text{рез}}$ начнет убывать, а ширина резонансной кривой—увеличиваться [1]).

[1]) В действительности уже при θ, значительно меньших чем 90°, обычно возникают другие нелинейные процессы (глава 13), обусловленные нестабильностью некоторых неоднородных типов прецессии, которые препятствуют дальнейшему росту θ.

Для получения амплитуды и фазы намагниченности удвоенной частоты проще всего воспользоваться методом комплексных амплитуд, что мы теперь уже имеем право делать, так как косинусы и синусы удвоенной частоты входят в выражение (32,13) линейно.

Введем комплексную амплитуду намагниченности удвоенной частоты

$$m_{2z} = m_{2z} e^{i\Psi}.$$

Переходя от вещественной записи переменных членов в (32,13) к комплексной, т. е. записывая выражение, вещественной частью которого является сумма этих членов, получим для m_{2z} следующую формулу:

$$\dot{m}_{2z} = -\frac{1}{4M_0}(\chi^2 - \chi_a^2)(\dot{h}_{1x}^2 + \dot{h}_{1y}^2 e^{i2\varphi}). \qquad (32,19)$$

Здесь χ и χ_a — комплексные величины, определяемые выражениями (32,11). Формулу (32,19) можно также записать в виде

$$\dot{m}_{2z} = -\frac{1}{4M_0}(\chi^2 - \chi_a^2)(\dot{h}_{1x}^2 + \dot{h}_{1y}^2), \qquad (32,19а)$$

где $\dot{h}_{1x}$ и $\dot{h}_{1y}$ — комплексные амплитуды составляющих переменного магнитного поля.

Подставляя в (32,19а) выражения (4,11) и (4,12) для компонентов тензора восприимчивости и учитывая, что $\omega_r \ll \omega_H$ (это практически всегда выполняется для ферритов), получим приближенную формулу

$$\dot{m}_{2z} = -\frac{1}{4}\frac{\gamma\chi_a}{\omega}(\dot{h}_{1x}^2 + \dot{h}_{1y}^2). \qquad (32,20)$$

Из выражения (32,19а) видно, прежде всего, что вторая гармоника m_{2z} обращается в нуль при круговой поляризации переменного поля (когда $h_{1y} = \pm i h_{1x}$). В этом легко убедиться также с помощью рис. 77. Действительно, при круговой поляризации поля переменная намагниченность будет иметь тоже круговую поляризацию и конец вектора M будет прецессировать в плоскости Σ_1, перпендикулярной оси z. Переменная составляющая M_z при этом не будет возникать.

При линейной поляризации переменного магнитного поля удвоение частоты происходит наиболее эффективно. Поэтому при создании устройств для удвоения частоты ферритовый образец необходимо размещать в области линейной поляризации магнитного поля. На рис. 78 приведена схема такого устройства [425] (элементы согласования на этой схеме не показаны). Под воздействием переменного поля $h_{1\nu}$ частоты ω в ферритовом образце возникает переменная намагниченность $m_{2\nu}$ частоты 2ω.

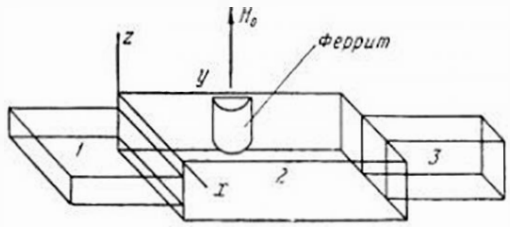


Рис. 78. Ферритовое устройство для удвоения частоты [425].

Она возбуждает в волноводе *2* волну этой частоты с электрическим полем, направленным по оси x, проходящую в волновод *3*. В волновод *1* эта волна пройти не может, так как его размер для этой волны меньше предельного. В таком устройстве получена весьма высокая эффективность преобразования частоты: при падающей мощности 32 *квт* в импульсе на частоте 9 *кМгц* выходная мощность на частоте 18 *кМгц* составляла 8 *квт* в импульсе [1]). При этом зависимость мощности удвоенной частоты от падающей мощности в соответствии с рассмотренной теорией была очень близка к квадратичной.

§ 33. Преобразование частоты

Рассмотрим теперь нелинейные процессы, которые возникают при одновременном воздействии на феррит двух переменных магнитных полей с различными частотами $\omega_{\rm I}$ и $\omega_{\rm II}$. При этом наряду с рассмотренными выше

[1]) Аналогичное устройство было использовано для получения колебаний в коротковолновой части миллиметрового диапазона [432].

эффектами детектирования и появления удвоенных частот $2\omega_{\rm I}$ и $2\omega_{\rm II}$ следует ожидать появления комбинационных частот $m\omega_{\rm I} \mp n\omega_{\rm II}$, в первую очередь суммарной и разностной частоты $\omega_{\rm I} \pm \omega_{\rm II}$.

Возможны, вообще говоря, три случая:

1) оба переменных поля — поперечные по отношению к направлению постоянного намагничивания, оси z ($\boldsymbol{h}_{\rm I} \boldsymbol{z}_0 = 0$; $\boldsymbol{h}_{\rm II} \boldsymbol{z}_0 = 0$);

2) одно поле — поперечное, а другое — продольное ($\boldsymbol{h}_{\rm I} \boldsymbol{z}_0 = 0$; $\boldsymbol{h}_{\rm II} \times \boldsymbol{z}_0 = 0$);

3) оба поля — продольные ($\boldsymbol{h}_{\rm I} \times \boldsymbol{z}_0 = 0$; $\boldsymbol{h}_{\rm II} \times \boldsymbol{z}_0 = 0$).

Намагниченность первого порядка $\boldsymbol{m}_1$ является решением уравнения (32,4), линейного относительно переменных составляющих. Следовательно, она является в общем случае суммой намагниченностей, обусловленных каждым полем в отдельности. Однако продольное поле не будет вызывать намагниченности первого порядка. Поэтому во втором случае $\boldsymbol{m}_1$ будет обусловлено только полем $\boldsymbol{h}_{\rm I}$, а в третьем случае $\boldsymbol{m}_1 = 0$. В последнем случае, согласно уравнению (32,5), не будет возникать и намагниченности второго порядка. Таким образом, следует рассмотреть лишь первые два случая.

Намагниченность $\boldsymbol{m}_1$ является в обоих этих случаях в первом приближении (считая потери малыми) поперечной [1]).

Остановимся сначала на первом случае, когда оба переменных поля являются поперечными. «Вынуждающий» член в уравнении для $\boldsymbol{m}_2$ — второй член в (32,5) — является в этом случае вектором, направленным по оси z. Отсюда следует (и чем легко убедиться, проектируя (32,5) на оси x и y), что намагниченность второго порядка $\boldsymbol{m}_2$ будет направлена тоже по оси z. Для того чтобы вычислить эту намагниченность, можно воспользоваться как проекцией уравнения (32,5) на ось z, так и формулой (32,8).

Оба метода приводят к довольно громоздким выкладкам при произвольной поляризации переменных полей $\boldsymbol{h}_{\rm I}$ и $\boldsymbol{h}_{\rm II}$. Поэтому рассмотрим прежде всего случай, когда

[1]) С учетом потерь $\boldsymbol{m}_1$ будет иметь малую составляющую по оси z (§ 4).

оба эти поля имеют круговую поляризацию. Тогда мгновенные значения проекций переменного поля запишутся:

$$h_x = h_{\rm I}\cos\omega_{\rm I}t + h_{\rm II}\cos\omega_{\rm II}t, \qquad (33,1)$$

$$h_y = (\pm)_{\rm I}h_{\rm I}\sin\omega_{\rm I}t + (\pm)_{\rm II}h_{\rm II}\sin\omega_{\rm II}t. \qquad (33,2)$$

Знаки $\pm$ в выражении (33,2) обозначают направление вращения поляризации, верхние знаки соответствуют правому вращению, а нижние — левому. Первое и второе поле могут иметь любые направления вращения: одинаковые или разные. Поэтому знаки перед первым и вторым членом в правой части (33,2) независимы. Эти знаки имеют индексы, показывающие, направлением вращения какого поля они определяются.

Принимая во внимание соотношения (32,10), запишем мгновенные значения проекций намагниченности m_1:

$$m_{1x} = [\chi' \pm \chi_a']_{\rm I}h_{\rm I}\cos\omega_{\rm I}t + [\chi' \pm \chi_a']_{\rm II}h_{\rm II}\cos\omega_{\rm II}t + \\ + [\chi'' \pm \chi_a'']_{\rm I}h_{\rm I}\sin\omega_{\rm I}t + [\chi'' \pm \chi_a']_{\rm II}\sin\omega_{\rm II}t, \qquad (33,3)$$

$$m_{1y} = [\pm(\chi' \pm \chi_a')]_{\rm I}h_{\rm I}\sin\omega_{\rm I}t + [\pm(\chi' \pm \chi_a')]_{\rm II}h_{\rm II}\sin\omega_{\rm II}t + \\ + [\mp(\chi'' \pm \chi_a'')]_{\rm I}h_{\rm I}\cos\omega_{\rm I}t + [\mp(\chi'' \pm \chi_a'')]_{\rm II}h_{\rm II}\cos\omega_{\rm II}t. \qquad (33,4)$$

Здесь индексы «I» и «II», стоящие у квадратных скобок, относятся как к знакам $\pm$, так и к величинам χ и χ_a в этих скобках.

Подставляя (33,3) и (33,4) в формулу (32,8), получим после несложных преобразований:

$$M_z = M_0 - \frac{1}{2M_0}\{[|\chi \pm \chi_a|^2]_{\rm I}h_{\rm I}^2 + [|\chi \pm \chi_a|^2]_{\rm II}h_{\rm II}^2\} + \\ + \frac{1}{M_0}\{([\chi' \pm \chi_a']_{\rm I}[\chi' \pm \chi_a']_{\rm II} \pm [\chi'' \pm \chi_a'']_{\rm I}[\chi'' \pm \chi_a'']_{\rm II}) \times \\ \times \cos(\omega_{\rm I} \mp \omega_{\rm II})t - ([\chi'' \pm \chi_a'']_{\rm I}[\chi' \pm \chi_a']_{\rm II} \mp \\ \mp [\chi' \pm \chi_a']_{\rm I}[\chi'' \pm \chi_a'']_{\rm II})\sin(\omega_{\rm I} \mp \omega_{\rm II})t\}h_{\rm I}h_{\rm II}. \qquad (33,5)$$

Знаки $\pm$ в квадратных скобках определяются по-прежнему направлениями вращения полей I и II, а остальные двойные знаки в (33,5) имеют следующий смысл: верхний знак соответствует одинаковым направлениям вращения этих полей, а нижний — разным.

Из выражения (33,5) видно прежде всего, что в рассматриваемом случае имеет место эффект детектирования. Этот эффект является аддитивным по отношению к полям I и II: приращение (отрицательное) постоянной составляющей представляет собой сумму приращений, обусловленных каждым полем и имеющих такую же величину, как и при воздействии каждого поля в отдельности (ср. с формулой (32,17)). Составляющих с удвоенными частотами выражение (33,5) не содержит. Это находится также в соответствии с результатом, полученным в § 32: удвоение частоты не имеет места при круговой поляризации поперечных переменных полей.

Переменные члены (33,5) дают эффект преобразования частоты — возникновения намагниченности с разностной или суммарной частотой. Разностная частота возникает при одинаковых направлениях вращения полей с круговой поляризацией, а суммарная частота — при противоположных направлениях их вращения.

Для того чтобы получить амплитуду и фазу намагниченности разностной или суммарной частоты, проще всего воспользоваться методом комплексных амплитуд. Теперь мы, так же как и в случае удвоения частоты (§ 32), уже имеем на это право, так как гармонические функции разностной или суммарной частоты входят в (33,5) линейно. Переходя от переменных членов в правой части (33,5) к комплексным величинам, вещественными частями которых эти члены являются, получим после простых преобразований следующие выражения для комплексных амплитуд:

намагниченности разностной частоты

$$m_{z-} = -\frac{1}{M_0}[\chi \pm \chi_a]_{\rm I}[\chi^* \pm \chi_a^*]_{\rm II}h_{\rm I}h_{\rm II} \qquad (33,6)$$

и намагниченности суммарной частоты

$$m_{z+} = -\frac{1}{M_0}[\chi \pm \chi_a]_{\rm I}[\chi \pm \chi_a]_{\rm II}h_{\rm I}h_{\rm II}. \qquad (33,7)$$

Здесь, так же как и в (33,5), величины χ и χ_a без штрихов представляют собой комплексные восприимчивости ($\chi = \chi' - i\chi''$; $\chi_a = \chi_a' - i\chi_a''$).

Вещественные и мнимые части величины $\chi + \chi_a$ для полей с правым вращением достигают больших значений в области ферромагнитного резонанса (§ 4). Следовательно, для получения больших амплитуд намагниченности разностной или суммарной частоты необходимо, чтобы хотя бы одно переменное поле имело правое вращение, а величина постоянного поля была выбрана такой, чтобы условие ферромагнитного резонанса выполнялось на частоте этого поля. Для получения разностной частоты второе поле должно иметь также правое вращение, для получения суммарной частоты—левое. В первом случае, если частоты ω_I и ω_{II} достаточно близки, условие ферромагнитного резонанса будет приблизительно выполняться для обеих частот. При этом большие величины намагниченности разностной частоты смогут быть получены при сравнительно малых амплитудах h_I и h_{II}.

Таким же образом могут быть рассмотрены нелинейные эффекты при воздействии на ферромагнитный полупроводник двух поперечных полей с линейной или произвольной (эллиптической) поляризацией. При этом, вообще говоря, следует ожидать одновременного появления удвоенных частот $2\omega_I$ и $2\omega_{II}$, суммарной частоты $\omega_I + \omega_{II}$ и разностной частоты $\omega_I - \omega_{II}$.

Рассмотрим в качестве примера случай двух полей с линейной поляризацией, направленных одинаково, например по оси x:

$$\left.\begin{aligned} h_x &= h_I \cos \omega_I t + h_{II} \cos \omega_{II} t, \\ h_y &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33,8)$$

В этом случае мгновенные значения проекции намагниченности первого порядка запишутся:

$$m_{1x} = (\chi_I' \cos \omega_I t + \chi_I'' \sin \omega_I t)\, h_I + \\ + (\chi_{II}' \cos \omega_{II} t + \chi_{II}'' \sin \omega_{II} t)\, h_{II}, \qquad (33,9)$$

$$m_{1y} = (\chi_{aI}' \sin \omega_I t - \chi_{aI}'' \cos \omega_I t)\, h_I + \\ + (\chi_{aII}' \sin \omega_{II} t - \chi_{aII}'' \cos \omega_{II} t)\, h_{II}. \qquad (33,10)$$

Подставляя (33,9) и (33,10) в формулу (32,8), получим изменение постоянной составляющей намагниченности ΔM_z и переменные составляющие с частотами $2\omega_I$, $2\omega_{II}$,

$\omega_I - \omega_{II}$ и $\omega_I + \omega_{II}$. Комплексная амплитуда составляющей разностной частоты оказывается в этом случае равной

$$m_{z-} = \frac{1}{4M_0}(\chi_I \chi_{II}^* + \chi_{aI} \chi_{aII}^*)\, h_I h_{II}, \qquad (33,11)$$

а амплитуда составляющей суммарной частоты

$$m_{z+} = \frac{1}{4M_0}(\chi_I \chi_{II} - \chi_{aI} \chi_{aII})\, h_I h_{II}, \qquad (33,12)$$

где, как и в формулах (33,6) и (33,7), восприимчивости являются комплексными.

В другом частном случае — взаимно перпендикулярных полей, когда, например,

$$\left.\begin{aligned} h_x &= h_I \cos \omega_I t, \\ h_y &= h_{II} \cos \omega_{II} t, \end{aligned}\right\} \qquad (33,13)$$

комплексная амплитуда составляющей разностной частоты

$$m_{z-} = -\frac{i}{4M_0}(\chi_I \chi_{aII}^* + \chi_{II}^* \chi_{aI})\, h_I h_{II}, \qquad (33,14)$$

а комплексная амплитуда составляющей суммарной частоты

$$m_{z+} = \frac{i}{4M_0}(\chi_I \chi_{aII} - \chi_{II} \chi_{aI})\, h_I h_{II}. \qquad (33,15)$$

Одним из важных применений преобразования частоты является, как известно, выделение разностной, промежуточной частоты при супергетеродинном приеме. В этом случае $\omega_I - \omega_{II} \ll \omega_I$. И если резонансная кривая ферромагнитного полупроводника достаточно широка, чтобы имело место неравенство

$$\frac{\Delta H}{H_{рез}} \gg \frac{\omega_I - \omega_{II}}{\omega_I},$$

то можно считать, что условие ферромагнитного резонанса выполняется одновременно для обеих частот. Тогда можно принять:

$$\chi_{aI}'' = \chi_I'' = \chi_{aII}'' = \chi_{II}'' = \chi_{рез}''; \quad \chi_{aI}' = \chi_I' = \chi_{aII}' = \chi_{II}' = 0.$$

В этом случае формула (33,6) для амплитуды разностной частоты при круговой поляризации обоих полей (с правым

вращением) запишется:

$$(m_{z-})_{\text{кр}} = -\frac{4}{M_0}(\chi''_{\text{рез}})^2 h_{\text{I}} h_{\text{II}}, \qquad (33,16)$$

или с учетом соотношения (4,19):

$$(m_{z-})_{\text{кр}} = -\frac{M_0}{(\Delta H)^2} h_{\text{I}} h_{\text{II}}. \qquad (33,16\text{а})$$

Формула (33,11) для случая одинаковой линейной поляризации обоих полей запишется при этом следующим образом:

$$(m_{z-})_{\text{лин}} = \frac{1}{2M_0}(\chi''_{\text{рез}})^2 h_{\text{I}} h_{\text{II}}. \qquad (33,17)$$

При взаимно перпендикулярных линейных поляризациях двух полей амплитуда разностной частоты обращается и этом случае в нуль. Таким образом, для выделения промежуточной частоты наиболее выгодным является случай круговых поляризаций обоих полей при правом вращении, а случай взаимно перпендикулярных линейных поляризаций является неблагоприятным.

Экспериментальное исследование преобразования частоты производилось [431, 428, 433] для случая одинаковых линейных поляризаций. В. А. Фабриков и Е. Г. Риттер [431] наблюдали возникновение э. д. с. промежуточной частоты в контуре, сердечником катушки которого являлся ферритовый стержень, находящийся в полях h_{I} и h_{II} (рис. 79). В работе [4288] измерялась мощность P_{-}, отводимая от преобразователя на частоте $\omega_{\text{I}} + \omega_{\text{II}}$. Согласно рассмотренной выше теории эта мощность должна быть пропорциональна произведению мощностей P_{I} и P_{II}, подводимых к устройству на частотах ω_{I} и ω_{II}. Результаты упомянутых работ находятся в качественном соответствии с приведенной выше теорией.

Перейдем теперь к рассмотрению преобразования частоты в случае, когда одно из полей ($\boldsymbol{h}_{\text{I}}$) является поперечным, а второе ($\boldsymbol{h}_{\text{II}}$) направлено по оси z, т. е.

$$\left.\begin{aligned} h_{\text{II}\,z} &= h_{\text{II}} \cos \omega_{\text{II}} t, \\ h_{\text{II}\,x} &= h_{\text{II}\,y} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33,18)$$

Как уже указывалось, намагниченность первого порядка будет и в этом случае поперечной и будет полностью определяться полем $\boldsymbol{h}_{\text{I}}$, изменяясь во времени с частотой этого поля ω_{I}. Обращаясь к уравнению для намагниченности второго порядка (32,5), мы видим, что «вынуждающий» член в этом уравнении

$$\gamma \boldsymbol{m}_1 \times (\boldsymbol{h}_{\text{I}} + \boldsymbol{h}_{\text{II}})$$

будет иметь две составляющие: продольную $\gamma \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{h}_{\text{I}}$ и поперечную $\gamma \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{h}_{\text{II}}$. Так как уравнение (32,5)

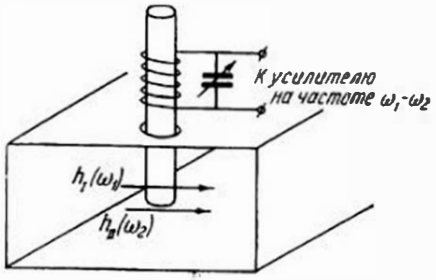


Рис. 79. Схема ферритового преобразователя частоты [431].

является линейным относительно неизвестной величины $\boldsymbol{m}_2$, то решение его будет являться суммой двух намагниченностей, обусловленных этими членами. Первая намагниченность будет продольной и вызовет эффекты детектирования и удвоения частоты, рассмотренные в предыдущем параграфе. Вторая намагниченность, обусловленная членом $\gamma \boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{h}_{\text{II}}$, будет содержать составляющие с частотами $\omega_{\text{I}} + \omega_{\text{II}}$ и $\omega_{\text{I}} - \omega_{\text{II}}$. Для определения этой намагниченности, которая во всяком случае не будет направлена по оси z, мы не можем, конечно, воспользоваться формулой (32,8) и должны исходить из уравнения (32,5).

Примем для определенности, что поле $\boldsymbol{h}_{\text{I}}$ имеет линейную поляризацию и направлено по оси x:

$$\left.\begin{aligned} h_{\text{I}\,x} &= h_{\text{I}} \cos \omega_{\text{I}} t, \\ h_{\text{I}\,y} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (33,19)$$

Тогда составляющие намагниченности m_1 запишутся:

$$\left.\begin{aligned} m_{1x} &= \chi' h_I \cos\omega_I t + \chi'' h_I \sin\omega_I t, \\ m_{1y} &= \chi_a' h_I \sin\omega_I t - \chi_a'' h_I \cos\omega_I t. \end{aligned}\right\} \quad (33,20)$$

Подставляя выражения (33,18) и (33,20) в проекции уравнения (32,5) на координатные оси, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dm_{2x}}{dt} + \omega_r m_{2x} + \omega_H m_{2y} = \\ &= -\gamma\left\{\chi_a'\left[\sin(\omega_I+\omega_{II})t + \sin(\omega_I-\omega_{II})t\right] - \right. \\ &\left. - \chi_a''\left[\cos(\omega_I+\omega_{II})t + \cos(\omega_I-\omega_{II})t\right]\right\}\frac{h_I h_{II}}{2}, \\ &\frac{dm_{2y}}{dt} + \omega_r m_{2y} - \omega_H m_{2x} = \\ &= \gamma\left\{\chi'\left[\cos(\omega_I+\omega_{II})t + \cos(\omega_I-\omega_{II})t\right] + \right. \\ &\left. + \chi''\left[\sin(\omega_I+\omega_{II})t + \sin(\omega_I-\omega_{II})t\right]\right\}\frac{h_I h_{II}}{2}, \end{aligned}\right\} \quad (33,21)$$

где $\omega_H = \gamma H_0$.

Уравнения (33,21) являются линейными относительно m_{2x} и m_{2y}, гармонические функции с суммарной и разностной частотой входят в эти уравнения также линейно. Это дает право воспользоваться методом комплексных амплитуд и искать решение в виде

$$m_{2\,x,y} = m_{+x,y}e^{i(\omega_I+\omega_{II})t} + m_{-x,y}e^{i(\omega_I-\omega_{II})t}. \quad (33,22)$$

Запишем комплексные уравнения, вещественные части которых представляют собой уравнения (33,21), и подставим в них выражения (33,22). После простых преобразований получим одинаковые системы следующего вида для комплексных амплитуд проекций намагниченности суммарной и разностной частоты:

$$\left.\begin{aligned} i(\omega_\pm - i\omega_r)m_{\pm x} + \omega_H m_{\pm y} &= \frac{i\gamma}{2}\chi_a h_I h_{II}, \\ -\omega_H m_{\pm x} + i(\omega_\pm - i\omega_r)m_{\pm y} &= -\frac{\gamma}{2}\chi h_I h_{II}. \end{aligned}\right\} \quad (33,23)$$

Здесь $\omega_\pm = \omega_I \pm \omega_{II}$, а χ_a и χ — комплексные восприимчивости при частоте поперечного поля ω_I.

Решая систему (33,23), получим:

$$m_{\pm x} = \frac{1}{2}\gamma\frac{(\omega_\pm - i\omega_r)\chi_a + \omega_H\chi}{\omega_\pm^2 - \omega_{рез}^2 - 2i\omega_\pm\omega_r}h_I h_{II}, \quad (33,24)$$

$$m_{\pm y} = -\frac{1}{2}i\gamma\frac{(\omega_\pm - i\omega_r)\chi + \omega_H\chi_a}{\omega_\pm^2 - \omega_{рез}^2 - 2i\omega_\pm\omega_r}h_I h_{II}, \quad (33,25)$$

где $\omega_{рез}^2 = \omega_H^2 + \omega_r^2$.

Из выражений (33,24) и (33,25) видно, что намагниченности суммарной и разностной частоты являются поперечными и эллиптически поляризованными. При этом наряду с резонансом на частоте ω_I имеет место ферромагнитный резонанс на суммарной частоте (для m_+) или на разностной частоте (для m_-).

Итак, наличие хотя бы одного поперечного переменного магнитного поля является необходимым условием преобразования частоты в ферромагнитном полупроводнике. Второе поле может быть как поперечным, так и продольным. В первом случае намагниченности суммарной и разностной частоты являются продольными, и ферромагнитного резонанса на этих частотах не возникает. Во втором случае намагниченности суммарной и разностной частоты являются поперечными и имеет место ферромагнитный резонанс на этих частотах.

В заключение подчеркнем, что нелинейные эффекты в ферромагнитном полупроводнике—феррите, в частности, эффекты, рассмотренные в этой главе, являются объемными в отличие, например, от вентильного эффекта в полупроводниковых диодах (кристаллических детекторах). Это облегчает возможность наблюдения и практического использования нелинейных эффектов в ферритах при больших уровнях мощности с. в. ч., где эти эффекты имеют значительную величину.

ГЛАВА 12

ГЕНЕРИРОВАНИЕ И УСИЛЕНИЕ

§ 34. Ферритовый генератор

В нелинейных системах, как и в линейных, но с переменными параметрами (параметрических) [17, 403], могут возникать процессы, существенно отличающиеся от процессов, рассмотренных в предыдущей главе. Приближенное рассмотрение их обнаруживает появление нестабильности, т. е. возрастания во времени амплитуд колебаний. Во многих системах, как, например, в обычном ламповом генераторе с обратной связью или в параметрическом генераторе с переменной емкостью или индуктивностью [403], нестабильность проявляется уже при линеаризированном рассмотрении задачи. Но существуют системы (как мы увидим, к ним относится и намагниченный феррит), в которых источником этой нестабильности является нелинейность системы.

В действительности нестабильность имеет место лишь при установлении колебаний. По мере роста амплитуды колебаний начинают сказываться нелинейные члены (если нестабильность имеет место при линеаризации задачи) или нелинейные члены более высоких порядков (если нестабильность обусловлена низшими нелинейными членами). Их влияние приводит к тому, что, строго говоря, через бесконечное время, а практически—достаточно быстро устанавливается стационарный режим колебаний: так называемый предельный цикл.

Явления в нелинейных и параметрических системах, связанные в указанном смысле с нестабильностью, отличаются большим многообразием. Сюда относятся и автоколебания, и параметрическое возбуждение, и автопараметрические процессы, в которых изменение параметров системы достигается не внешним (например, механическим) воздействием, а в результате процессов, происходящих в самой системе.

Как известно из теории колебаний, явления в нелинейных системах, связанные с нестабильностью, исследуются в несколько этапов. Первый этап—выяснение условий нестабильности, т. е. возможности возникновения этих явлений. Исследование на этом этапе может вестись на основе приближенных, для многих систем—линеаризированных уравнений. Наиболее важным результатом, который получается на этом этапе для параметрических и автопараметрических систем, является наличие минимального, «порогового» значения глубины модуляции параметра, при котором возникает нестабильность [17]. Это пороговое значение оказывается тем выше, чем больше потери в системе.

Вторым этапом является отыскание предельных циклов, в первую очередь условий их существования и устойчивости. Исследование на этом этапе может вестись только на основе полных нелинейных уравнений. Однако здесь широко применимы приближенные и качественные методы [16].

Последним, наиболее сложным этапом (который часто и не рассматривается) является исследование переходных режимов, т. е. процессов установления предельных циклов.

Одним из интересных результатов теории нелинейных колебаний является то, что в нелинейных системах с несколькими степенями свободы может иметь место комбинационное преобразование частоты. Например, в системе с двумя степенями свободы под воздействием возбуждающей силы с частотой ω могут возникать колебания с частотами ω_1 и ω_2, удовлетворяющими, вообще говоря, условию

$$m\omega = p\omega_1 + q\omega_2, \tag{34,1}$$

где m, p и q—целые числа, положительные или отрицательные, а ω_1 и ω_2—нормальные частоты системы.

Явление комбинационного преобразования частоты было исследовано В. А. Лазаревым [406] и В. В. Мигулиным [407] на примере систем с двумя степенями свободы. В работе Мэнли и Роу [411] это явление исследовалось для случая системы с несколькими степенями

свободы, содержащей нелинейную реактивность. При этом было выяснено, что, если амплитуда возбуждающей силы с частотой ω превышает определенное пороговое значение, в системе могут возникнуть колебания с частотами ω_1 и ω_2, удовлетворяющими условию

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \qquad (34,2)$$

которое является частным случаем условия (34,1).

К числу таких систем с комбинационным преобразованием частоты принадлежит и генератор с. в. ч., использующий нелинейность намагниченного феррита,—так называемый ферритовый генератор, предложенный Сулом [434].

Рассмотрим принцип действия такого генератора. Ферритовый образец помещается в колебательную систему с двумя степенями свободы— полый резонатор с собственными частотами ω_1 и ω_2. Этот образец находится также в сравнительно сильном магнитном поле $\boldsymbol{h}_\omega$ с частотой ω (так называемом поле «подкачки») и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$. Частота ω удовлетворяет условию (34,2). Исходя из упомянутых выше общих результатов теории нелинейных колебаний, можно ожидать, что в рассматриваемой системе при выполнении некоторых дополнительных условий будут возникать колебания с частотами ω_1 и ω_2.

Очевидно, что к числу таких условий относится достаточная интенсивность прецессии с частотой ω. Для того чтобы обеспечить большую амплитуду этой прецессии при возможно меньшем поле подкачки, необходимо прежде всего, чтобы поле $\boldsymbol{h}_\omega$ было поперечным (по отношению к $\boldsymbol{H}_0$), или по крайней мере имело большую поперечную составляющую $\boldsymbol{h}_{\omega\perp}$. С этой же целью необходимо выбрать величину $\boldsymbol{H}_0$ так, чтобы для ферритового образца на частоте ω выполнялось условие ферромагнитного резонанса. И наконец, целесообразно применить феррит с интенсивной, а следовательно (§ 4), узкой резонансной кривой.

Второе условие, необходимость которого будет ясна ниже, заключается в том, чтобы магнитное поле одного из типов колебаний (например, с частотой ω_1) было поперечным, или по крайней мере имело большую поперечную составляющую, а магнитное поле другого типа колебаний (с частотой ω_2) было направлено по $\boldsymbol{H}_0$, или по крайней мере имело большую продольную составляющую. Иными словами, поля собственных колебаний $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ не должны быть (в месте расположения образца) оба поперечными или оба продольными.

Рассмотрим теперь механизм возникновения в такой системе автоколебаний на частотах ω_1 и ω_2 под воздействием сильного поля частоты ω. Из этого рассмотрения

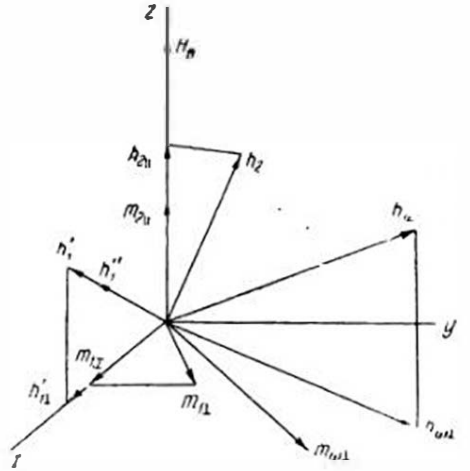


Рис. 80. Направления составляющих поля и намагниченности в ферритовом генераторе.

будет ясна, в частности, и необходимость выполнения упомянутого выше второго условия.

Предположим, что в резонаторе в силу каких-либо причин возникло поле одного из собственных типов колебаний, например поле первого типа $\boldsymbol{h}_1'$. Допустим, что это поле имеет поперечную составляющую $\boldsymbol{h}_{1\perp}'$ (рис. 80). Тогда эта составляющая и поперечная составляющая поля подкачки $\boldsymbol{h}_{\omega\perp}$ приведут в силу рассмотренного в § 33 эффекта преобразования частоты к появлению продольной намагниченности $\boldsymbol{m}_{2\parallel}$ (рис. 80) с частотой $\omega-\omega_1$. Вследствие условия (34,2) эта частота совпадет с собственной частотой ω_2 второго типа колебаний.

Предположим, что поле второго типа колебаний имеет продольную составляющую. Тогда продольная намагни-

ченность $m_{2\parallel}$ возбудит в резонаторе поле этого типа h_2. Его продольная составляющая $h_{2\parallel}$ (рис. 80) и поперечная составляющая поля подкачки в силу другого эффекта преобразования частоты, также рассмотренного в § 33, приведут к возникновению поперечной намагниченности $m_{1\perp}$ с частотой $\omega-\omega_2$. При выполнении условия (34,2) эта частота будет равна ω_1.

Поперечная намагниченность $m_{1\perp}$, имеющая эллиптическую поляризацию (§ 33), будет возбуждать в резонаторе поле h_1'' первого собственного типа колебаний—того же типа, что и исходное поле h_1', существование которого мы допустили.

Таким образом, в рассматриваемой системе имеет место обратная связь. Необходимым условием возникновения колебаний является то, чтобы поле h_1'' совпадало или было близко по фазе к полю h_1', т. е. чтобы обратная связь была положительной. Это условие является, конечно, недостаточным, требуется еще определенная величина обратной связи. Если окажется, что фазы полей h_1' и h_1'' совпадают и $|h_1''|>|h_1'|$, это будет свидетельствовать о нестабильности, т. е. о возможности нарастания колебаний (в режиме установившихся колебаний, конечно, $|h_1''|=|h_1'|$).

Перейдем теперь к выводу количественного условия возникновения колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Для этого рассмотрим более подробно процессы преобразования частоты и возбуждения электромагнитных полей h_2 и h_1'', которыми определяется обратная связь в данной системе.

Примем для определенности, что поперечные составляющие полей h_ω и h_1 имеют линейную поляризацию и параллельны друг другу. Направим их по оси x. Тогда комплексная амплитуда намагниченности $m_{2\parallel}$ определится формулой (33,11) с заменой в ней индексов: «$-$» на «2», «1» на «ω» и «II» на «1». Предположим, что на частоте ω имеет место ферромагнитный резонанс, т. е.

$$\chi_\omega \cong \chi_{a\omega} = -i\chi_{\text{рез}}, \tag{34,3}$$

где согласно (4,19)

$$\chi_{\text{рез}} = \frac{M_0}{2\Delta H}. \tag{34,4}$$

Для частоты ω_1 величина H_0 значительно превышает резонансное значение, поэтому восприимчивости χ_1 и χ_{a1} можно считать вещественными и положительными. С учетом этого выражение для комплексной амплитуды $m_{2\parallel}$ запишется:

$$m_{2\parallel} = -\frac{i}{8\Delta H}(\chi_1+\chi_{a1})\,h_{1\perp}h_{\omega\perp}. \tag{34,5}$$

Комплексная амплитуда проекции намагниченности $m_{1\perp}$ на ось x определится формулой (33,24) с заменой индексов: «$\pm$» на «1», «I» на «ω» и «II» на «2». В нашем случае, когда на частоте ω имеет место ферромагнитный резонанс, $\omega_H=\omega$ [1]), а для χ_ω и $\chi_{a\omega}$ справедливы выражения (34,3) и (34,4). Потерями на частоте ω_1 в этом случае можно пренебречь. Учитывая все это и принимая во внимание условие (34,2) из выражения (33,24), можно получить:

$$m_{1x} = i\frac{\gamma M_0}{4\Delta H\omega_2}h_{\omega\perp}h_{2\parallel}. \tag{34,6}$$

Остановимся теперь на задачах о возбуждении, решение которых позволит выразить $h_{2\parallel}$ через $m_{2\parallel}$ и $h_{1\perp}''$ через $m_{1\perp}$. На этом этапе намагниченности $m_{2\parallel}$ и $m_{1\perp}$ следует рассматривать как заданные.

Задача о возбуждении колебаний в полом резонаторе заданной намагниченностью решается аналогично рассмотренной в § 30 задаче о возбуждении резонатора заданными токами и полями. Поэтому приведем здесь окончательный результат. Поле вынужденных колебаний

$$h = \sum_n a_n h_n + \nabla\varphi_h, \tag{34,7}$$

где h_n — собственные (вихревые) функции резонатора, а φ_h — градиентная функция, введение которой в данном случае обеспечивает выполнение уравнения (12,16). Коэффициенты a_n выражаются следующим образом:

$$a_n = \frac{\omega^2 G}{\omega_n^2-\omega^2+\dfrac{i\omega\omega_n}{Q_n}}. \tag{34,8}$$

[1]) Это условие выполняется и тогда, когда образец не является сферой, так как при этом в формуле (33,24) под ω_n следует понимать резонансную частоту для данного образца.

Здесь ω_n — собственная частота, Q_n — добротность резонатора для n-го типа колебаний, а

$$G = 4\pi \int_{V_\Phi} \boldsymbol{m}\boldsymbol{h}_n^* \, dV. \tag{34,9}$$

Интегрирование в (34,9) производится по объему, где $\boldsymbol{m} \neq 0$ (т. е. по объему ферритового образца), а собственные функции $\boldsymbol{h}_n$ предполагаются нормированными в соответствии с условием (29,18).

Для малого образца поле $\boldsymbol{h}_n$ можно считать постоянным в объеме V_Φ. Мы ограничиваемся пока случаем однородной прецессии и считаем, что образец имеет форму эллипсоида. Тогда намагниченность в образце будет также постоянной и выражение (34,9) запишется:

$$G = 4\pi \boldsymbol{h}_{n\Phi}^* \boldsymbol{m} V_\Phi, \tag{34,10}$$

где $\boldsymbol{h}_{n\Phi}$ — значение собственной функции $\boldsymbol{h}_n$ в месте расположения образца.

В случае малого образца в качестве функций $\boldsymbol{h}_n$ можно принять приближенно собственные функции пустого резонатора. Они являются вещественными, и условие их нормировки будет:

$$\int_{V_0} h_n^2 \, dV = 1. \tag{34,11}$$

Градиентный член в (34,7) дает поле, быстро убывающее по мере удаления от образца. Если мы пренебрежем этим членом, то получим достаточно точное выражение для «невозмущенного» поля резонатора $\boldsymbol{h}_0$ (однако вызванного намагниченностью в образце). Внутреннее поле в образце можно будет тогда получить следующим образом:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_0 - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{m}, \tag{34,12}$$

где $\overleftrightarrow{N}$ — тензор размагничивания образца (§ 5).

В случае резонанса с одним из собственных типов колебаний при достаточно больших Q_n можно учитывать только один — резонансный член в $\sum_n a_n \boldsymbol{h}_n$. Выражение (34,8) при резонансе запишется:

$$a_{n\,\text{рез}} = -iQ_n G. \tag{34,13}$$

Учитывая все это, получим следующее выражение для внутреннего поля в ферритовом образце в случае резонанса с n-м типом колебаний резонатора:

$$\boldsymbol{h} = -i4\pi \frac{p_n V_\Phi}{V_0} Q_n (\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}_0)\, \boldsymbol{n}_0 - \overleftrightarrow{N}\boldsymbol{m}. \tag{34,14}$$

Здесь V_0 — объем резонатора, V_Φ — объем образца, $\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор в направлении поля $\boldsymbol{h}_n$, а

$$p_n = \frac{|h_n|_\Phi^2}{\frac{1}{V_0}\int_{V_0} |h_n|^2 \, dV}$$

— коэффициент порядка 1, равный отношению квадрата собственного магнитного поля резонатора в месте расположения образца к среднему значению этой величины в объеме резонатора.

Применим теперь полученное приближенное выражение к интересующим нас случаям возбуждения. Продольная составляющая поля $\boldsymbol{h}_2$, возбуждаемая намагниченностью $\boldsymbol{m}_{2\parallel}$, направленной по оси z, запишется согласно (34,14) следующим образом:

$$h_{2\parallel} = \left(-i4\pi p_2 Q_2 \frac{V_\Phi}{V_0} - N_z \right) m_{2\parallel}, \tag{34,15}$$

где N_z — размагничивающий фактор образца в направлении оси z. Поперечная составляющая поля $\boldsymbol{h}_1'$, возбуждаемая намагниченностью $\boldsymbol{m}_{1\perp}$ и направленная, как мы предположили ранее, по оси x, запишется:

$$h_{1\perp}' = \left(-i4\pi p_1 Q_1 \frac{V_\Phi}{V_0} - N_x \right) m_{1x}, \tag{34,16}$$

где N_x — размагничивающий фактор по оси x.

Подставляя в выражение (34,16) m_{1x} из (34,6) и учитывая (34,15) и (34,5), получим окончательно:

$$h_{1\perp}'' = \sigma h_{1\perp}', \tag{34,17}$$

где σ выражается следующим образом:

$$\sigma = \frac{\pi}{2}\frac{\omega_м}{\omega_2}\frac{\chi_1 \div \chi_{a1}}{(2\Delta H)^2}\left(Q_1\rho_1\frac{V_ф}{V_0} - i\frac{N_x}{4\pi}\right)\left(Q_2\rho_2\frac{V_ф}{V_0} - i\frac{N_z}{4\pi}\right)h^2_{\omega\perp}. \tag{34,18}$$

(здесь $\omega_м = 4\pi\gamma M_0$).

Как видно из выражения (34,18), $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$, т. е. обратная связь положительна. Условием нарастания колебания будет $\mathrm{Re}(\sigma) > 1$, а пороговое значение амплитуды поля подкачки определится из условия

$$\mathrm{Re}(\sigma) = 1. \tag{34,19}$$

Из выражения (34,18) следует, что наиболее благоприятным для возбуждения колебаний будет случай, когда

$$N_x = N_z = 0. \tag{34,20}$$

В этом случае из (34,19) и (34,18) получим пороговое значение амплитуды поля раскачки

$$h_{пор} = 2\Delta H\frac{V_0}{V_ф}\frac{1}{\sqrt{Q_1Q_2}\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{\omega_2}{\omega_м}\frac{1}{\chi_1 \div \chi_{a1}}}. \tag{34,21}$$

Из этого выражения видно, в частности, что $h_{пор}$ оказывается тем меньше, чем выше добротности резонатора и чем уже резонансная кривая феррита.

Очевидно, что при $h_{\omega\perp}$, значительно превышающем $h_{пор}$, нарастание колебаний будет происходить и при неточном соблюдении условия ферромагнитного резонанса на частоте ω; допустимые отклонения величины H_0 будут тем меньше, чем уже резонансная кривая. Генерирование колебаний с частотами ω_1 и ω_2 может происходить и в том случае, когда собственные частоты резонатора ω_{10} и ω_{20} не в точности удовлетворяют условию (34,2); допустимые отклонения будут тем меньше (при данном $h_{\omega\perp}$), чем выше добротности резонатора. При этом следует подчеркнуть, что фактически генерируемые частоты всегда точно удовлетворяют условию (34,2).

Проведенное выше поочередное рассмотрение процессов преобразования частоты и возбуждения электромагнитных полей не является строгим. В действительности эти процессы происходят одновременно. Результирующее электромагнитное поле и результирующая намагниченность должны быть найдены путем совместного решения уравнений Максвелла и уравнения Ландау—Лифшица с учетом соответствующих граничных условий. Такое решение не удается провести строго. Приближенно оно было проведено Сулом [436].

При этом предполагалось, что все составляющие поля и намагниченности с частотами ω_1 и ω_2 содержат медленно изменяющийся со временем множитель $e^{\lambda t}$. Величина λ оказалась вещественной. Условием нарастания колебаний является теперь $\lambda > 0$. Исходя из этого условия, Сул получил пороговое значение амплитуды намагниченности с частотой ω. Если от него перейти к пороговому значению амплитуды поля подкачки $h_{\omega\perp}$, то получится выражение, практически совпадающее с приведенным выше.

Возникновение нестабильности (нарастание колебаний с частотами ω_1 и ω_2) в рассматриваемом генераторе может быть объяснено [434] и с иной точки зрения. Можно считать, что интенсивная прецессия намагниченности, происходящая с частотой ω, приводит вследствие нелинейности системы к появлению связи между ее собственными колебаниями с частотами ω_1 и ω_2. Если представить эквивалентную схему такой системы в виде двух контуров (рис. 81), то эта связь изобразится в виде общей реактивности, изменяющейся во времени с частотой ω. Для того чтобы возникла нестабильность на частотах ω_1 и ω_2, глубина модуляции параметра (индуктивности или емкости) этой общей реактивности должна превышать некоторую пороговую величину. Очевидно, что эта глубина модуляции будет пропорциональна амплитуде поля подкачки.

Значительный интерес представляет частный случай, когда

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega}{2}. \tag{34,22}$$

Рассмотренный выше механизм возникновения генерации, основанный на двукратном преобразовании частоты, будет справедлив и в этом случае. Однако система может теперь обладать одной степенью свободы—иметь одно собственное колебание с частотой $\frac{\omega}{2}$. Роль полей $h_{1\perp}$ и $h_{2\parallel}$ в рассмотренном механизме будут играть соответственно поперечная

и продольная составляющие поля этого собственного колебания. Формула (34,21) в этом случае запишется:

$$h_{\text{пор}} = 2\Delta H \frac{V_0}{V_\Phi} \frac{1}{pQ} \sqrt{\frac{\omega}{\pi\omega_M} \frac{1}{(\chi+\chi_a)_{\omega/2}}}. \qquad (34,23)$$

Рассмотрение ферритового генератора с точки зрения параметрической модуляции элемента связи между двумя

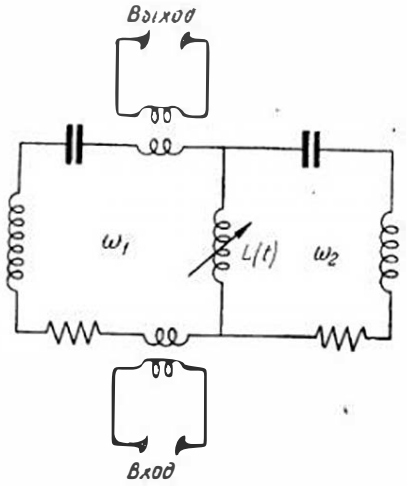


Рис. 81. Эквивалентная схема ферритового генератора [434].

собственными колебаниями теряет смысл при $\omega_1 = \omega_2$. В этом случае ферритовый генератор может трактоваться как система с одной степенью свободы и с параметрическим возбуждением [439, 442]. Роль параметра, изменяющегося с частотой ω, играет при этом тензор магнитной восприимчивости ферритового образца по отношению к полю собственного колебания, имеющего частоту $\frac{\omega}{2}$ [445, 448].

Параметрическое возбуждение колебаний в системах с сосредоточенными постоянными было подробно исследовано еще в 30-е годы Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси [403] и физиками их школы (см., например,

[405—407]). Полученные при этом основные закономерности справедливы [439, 442] и для параметрических генераторов с распределенными постоянными, к числу которых принадлежит ферритовый генератор. Не останавливаясь подробно на этих закономерностях, отметим лишь,

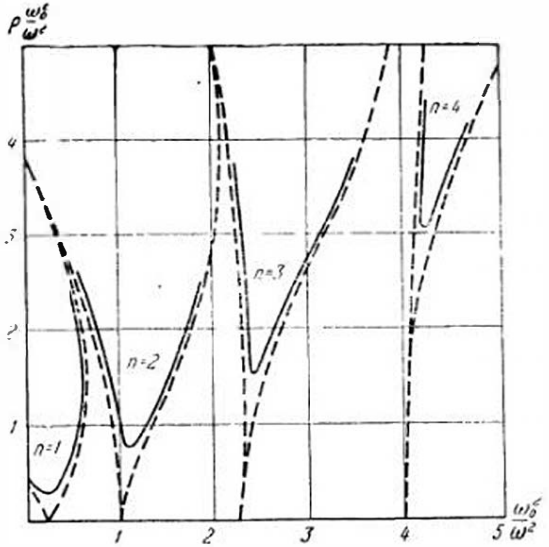


Рис. 82. Области нестабильности при параметрическом возбуждении [17].

ω_0—собственная частота, ω—частота модуляции, p—глубина модуляции. Пунктир—без учета потерь, сплошные линии—с учетом потерь.

что области нестабильности при параметрическом возбуждении находятся вблизи значений собственной частоты:

$$\omega_0 = \frac{m\omega}{2}, \quad \text{где} \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (34,24)$$

причем пороговые значения глубины модуляции при наличии потерь (рис. 82) резко возрастают с увеличением m. Наименьший порог имеет место при условии $\omega_0 = \frac{\omega}{2}$.

Именно это условие и выполняется в рассматриваемом частном случае ($\omega_1 = \omega_2$) для ферритового генератора.

До сих пор речь шла только о нарастании колебаний в ферритовом генераторе. Но по мере увеличения амплитуд полей с частотами ω_1 и ω_2 рост их, как в каждой автоколебательной системе, будет замедляться, пока практически не прекратится. Это будет связано с влиянием не учитываемых до сих пор нелинейных членов в уравнении Ландау—Лифшица и, возможно, с влиянием других нестабильных процессов.

Ферритовый генератор рассмотренного типа при $\omega_1 = \omega_2$ был осуществлен Вейссом [435]. Этот генератор

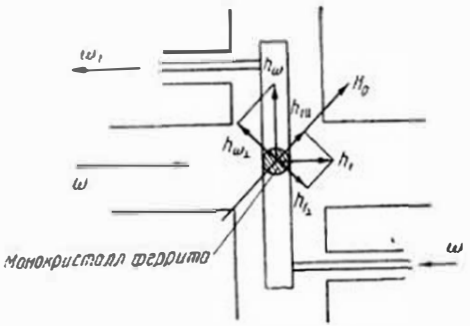


Рис. 83. Схема ферритового генератора [435].

показан схематически на рис. 83. Резонатором является разомкнутый с обеих сторон отрезок полосковой линии, настроенный на частоту $\frac{\omega}{2} = 4500$ *Мгц*. Небольшие диски из монокристалла марганцевого феррита с шириной резонансной линии приблизительно 50 *э* укреплены с обеих сторон внутреннего провода резонатора в пучности его магнитного поля. Мощность раскачки на частоте 9000 *Мгц* подводится к ферритовому образцу по волноводу.

Постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$ является резонансным на частоте ω. Как видно из рисунка, $\boldsymbol{H}_0$ не перпендикулярно полю подкачки $\boldsymbol{h}_\omega$, а образует с ним угол 45°. Это-

является недостатком данной конструкции генератора, так как приводит к увеличению в два раза мощности подкачки.

Поле $\boldsymbol{H}_0$ образует также угол $\alpha = 45°$ с направлением переменного поля резонатора. При этом имеют место обе составляющие $h_\perp$ и $h_\parallel$, необходимые для возбуждения колебаний. Заметим, что случай $\alpha = 45°$ является наиболее выгодным, так как соответствует максимальной величине произведения $h_\perp h_\parallel$, входящего в формулу для $h_{\text{пор}}$, при постоянной величине результирующего поля $h = \sqrt{h_\perp^2 + h_\parallel^2}$. Форма и ориентация ферритового образца в этом генераторе являются также выгодными, так как при этом размагничивающие факторы N_x и N_z, входящие в выражение (34,18), малы.

Генератор отдавал на частоте $\frac{\omega}{2} = 4500$ *Мгц* мощность порядка 100 *вт* при мощности подкачки 3 *квт*. Очевидно, что такая большая мощность могла подаваться на генератор лишь короткими импульсами; только в течение этих импульсов происходила генерация на частоте $\frac{\omega}{2}$. В рассмотренном генераторе лишь сравнительно небольшая доля мощности подкачки поглощалась в ферритовом образце. Эта доля может быть увеличена, если генератор будет являться оконечной согласованной нагрузкой волновода, по которому подается мощность подкачки. За счет этого, а также некоторого увеличения $\frac{V_\Phi}{V_0}$ в (34,23) удалось снизить мощность подкачки до 0,5 *квт* [447].

Пороговое поле и мощность подкачки могут быть уменьшены, как видно из (34,23), путем увеличения нагруженной добротности Q для частоты $\frac{\omega}{2}$. Это, однако, приведет к уменьшению полезной мощности генератора.

Из выражения (34,23) видно также, что пороговое поле пропорционально $2\Delta H$ феррита. Мощность подкачки P_ω будет уменьшаться с уменьшением $2\Delta H$, но более медленно, чем пропорционально $(2\Delta H)^2$. Причина этого заключается в том, что при уменьшении $2\Delta H$ растет $\chi''_{\text{рез}}$ феррита. В предельном случае, когда вся мощность

подкачки поглощается в ферритовом образце,

$$P^{\omega} = \frac{1}{2} h_{\text{пор}}^2 \chi''_{\text{рез}} V_{\Phi},$$

и с учетом формулы (4,19) P_{ω} будет пропорционально $2\Delta H$.

Радикальным путем уменьшения пороговой мощности является увеличение эффективности преобразования частоты. Это в свою очередь, как следует из § 33, может быть достигнуто при выполнении условия ферромагнитного резонанса не только на частоте ω, но и на частоте ω_1[1]). При этом на частотах ω и ω_1 должны быть использованы разные типы прецессии. Если для резонанса на частоте ω используется однородная прецессия, то на частоте ω_1 должен быть использован один из неоднородных (уокеровских) типов прецессии (§ 6).

При этом уже частота ω_1 не обязательно должна быть одной из собственных частот резонатора; сам образец, в котором возбуждается один из собственных типов прецессии, является колебательной системой с добротностью порядка [436]

$$Q_k = \frac{4\pi M_0}{\Delta H_k}, \qquad (34,25)$$

где ΔH_k—полуширина резонансной кривой для этого типа прецессии.

Поле $\boldsymbol{h}_1$, возбуждаемое намагниченностью $\boldsymbol{m}_1$, представляет собой в этом случае квазистатическое поле данного типа прецессии. Это поле сосредоточено в основном в образце и в непосредственной близости к нему. Поэтому множитель $p_1 \frac{V_{\Phi}}{V_0}$ в выражении (34,18) заменится множителем порядка единицы, и величина порогового поля существенно уменьшится.

Режим работы генератора, при котором обе частоты, ω_1 и ω_2, являются собственными частотами полого электромагнитного резонатора, был назван Сулом [436] электромагнитным режимом. Режим, при котором одна из этих частот является собственной частотой магнитостатического типа прецессии ферритового образца, был назван полустатическим режимом.

[1]) Выполнение условия ферромагнитного резонанса (для однородной прецессии) только на частоте ω_1 вместо ω не приводит [444], как и следовало ожидать, к уменьшению мощности подкачки.

Переход к полустатическому режиму наряду с применением феррита с меньшим ΔH (монокристалла иттриевого феррита со структурой граната) позволил [435] снизить мощность подкачки до 40 *вт*.

Может быть и такой режим работы генератора, при котором оба поля, $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$, являются полями собственных типов прецессии ферритового образца. Этот режим был назван статическим. При практическом осуществлении такого режима встречаются трудности, связанные с возбуждением нежелательных типов прецессии со «случайными» частотами ω_1' и ω_2', дающими в сумме ω. Такое возбуждение может иметь место при меньших мощностях подкачки, чем пороговые значения этой мощности для полезных типов с заданными частотами ω_1 и ω_2. Одна из причин этого заключается в том, что связь с нагрузкой приводит к снижению результирующей добротности и, следовательно, к повышению пороговых значений мощности подкачки для полезных типов.

Возбуждение нежелательных типов прецессии будет приводить (см. главу 13) к ограничению амплитуды прецессии, происходящей с частотой подкачки, вследствие чего порог возбуждения полезных типов прецессии не будет достигнут.

В случае же электромагнитного и полустатического режимов работы можно так выбрать величины ω_1, ω_2 и H_0, чтобы условие нестабильности $\omega_1' + \omega_2' = \omega$ не выполнялось ни для одной из пар собственных типов прецессии. Действительно, как отмечалось в § 6, собственные частоты различных типов прецессии в случае эллипсоида вращения занимают полосу частот от

$$\omega_{\text{мин}} = \gamma (H_0 - N_z M_0)$$

(рис. 84) до

$$\omega_{\text{макс}} = \gamma (H_0 - N_z M_0) + \gamma 2\pi M_0.$$

Для того чтобы сумма частот любой пары этих типов прецессии не была равна частоте подкачки ω, должны

выполняться условия: $\omega < 2\omega_{мин}$ или $\omega > 2\omega_{макс}$. Принимая во внимание, что частота подкачки должна быть равна частоте однородной прецессии эллипсоида вращения

$$\omega = \gamma\left(H + \frac{4\pi - 3N_z}{2} M_0\right),$$

легко убедиться, что условие $\omega < 2\omega_{мин}$ удовлетворяется при

$$H_0 > \left(2\pi + \frac{N_z}{2}\right) M_0. \qquad (34,26)$$

Остановимся теперь на некоторых положениях разработанной Сулом [436] теории ферритовых генераторов,

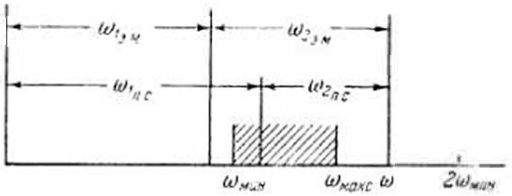


Рис. 84. Частоты в ферритовом усилителе.
Индексы «э.м» соответствуют электромагнитному, а индексы «п.с»—полустатическому режимам. Заштрихована полоса частот Уокеровских типов прецессии.

включающей в качестве частных случаев все три упомянутых режима работы.

Рассмотрим полый резонатор, в который помещен малый ферритовый эллипсоид вращения, намагниченный в направлении его оси—оси z. Переменное электромагнитное поле в резонаторе может быть выражено через векторный потенциал $\boldsymbol{V}$ и скалярный потенциал φ:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla\varphi, \\ \boldsymbol{e} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{V}. \end{aligned}\right\} \qquad (34,27$$

«Масштабное» уравнение [11], связывающее эти потенциалы, выберем так, чтобы φ удовлетворяло уравнению

$$\nabla^2\varphi = -4\pi \operatorname{div}\boldsymbol{m}. \qquad (34,28)$$

Векторный потенциал $\boldsymbol{V}$ будем искать в виде ряда по собственным функциям $\boldsymbol{V}_n$ пустого резонатора, которым соответствуют собственные частоты Ω_n:

$$\boldsymbol{V} = \sum_n a_n \boldsymbol{V}_n e^{i\Omega t}. \qquad (34,29)$$

Скалярный потенциал φ состоит из двух частей:

$$\varphi = \varphi_\perp + \varphi_\parallel, \qquad (34,30)$$

где $\varphi_\perp$ представляет собой потенциал, обусловленный только проекциями переменной намагниченности на оси x и y. Согласно (34,28) он удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\varphi_\perp = -4\pi\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right). \qquad (34,31)$$

Этот потенциал будем искать в виде ряда по функциям φ_m, соответствующим собственным типам прецессии малого образца (§ 6) без учета влияния резонатора:

$$\varphi_\perp = \sum_m s_m \varphi_m e^{i\omega_m t}, \qquad (34,32)$$

где ω_m — собственные частоты этих типов прецессии.

Потенциал $\varphi_\parallel$ может быть выражен через $\varphi_\perp$ с использованием уравнения

$$\nabla^2\varphi_\parallel = -4\pi\frac{\partial m_z}{\partial z}, \qquad (34,33)$$

являющегося непосредственным следствием (34,28), (34,31) и (32,8).

Коэффициенты a_n и s_m представим в виде

$$a_n = a_{n_0} e^{\lambda t}, \quad s_m = s_{m_0} e^{\lambda t}. \qquad (34,34)$$

Нарастание колебаний, отыскание условий которого и является задачей теории, будет иметь место при λ вещественном и положительном.

Потери в образце учитываются путем введения комплексных собственных частот прецессии

$$\omega_m = \omega'_m + i\gamma\Delta H, \qquad (34,35)$$

а потери в резонаторе — путем введения комплексных собственных частот резонатора

$$\Omega_n = \Omega_n' + i\frac{\Omega_n'}{2Q_n}. \qquad (34,36)$$

Разложения (34,29) и (34,32) следует подставить в уравнение Ландау — Лифшица:

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{m} \times \left(\boldsymbol{H}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \nabla\varphi \right), \qquad (34,37)$$

и сохранить в нем только те нелинейные члены, которые могут привести к нарастанию колебаний. Анализ полученных таким образом уравнений позволит найти условие такого нарастания.

Тот или иной режим работы генератора имеет место в зависимости от того, какие условия выполняются:

$$\Omega_i + \Omega_k = \omega, \qquad (34,38)$$

$$\Omega_i + \omega_p = \omega, \qquad (34,39)$$

или

$$\omega_p + \omega_q = \omega. \qquad (34,40)$$

В первом случае будут иметь значительную величину коэффициенты a_i и a_k, соответствующие собственным колебаниям резонатора с частотами Ω_i и Ω_k. При этом осуществляется электромагнитный режим работы. Во втором случае будут иметь большую величину коэффициент a_i и коэффициент s_p, соответствующий собственному типу прецессии с частотой ω_p. При этом будет иметь место полустатический режим. В третьем случае будет осуществляться статический режим.

Условием связи между двумя магнитостатическими типами прецессии и, следовательно, необходимым условием нестабильности их в присутствии мощного сигнала частоты ω, кроме (34,40), является соотношение [457]:

$$m_p + m_q = 1, \qquad (34,41)$$

где m_p и m_q — азимутальные индексы соответствующих типов прецессии.

§ 35. Регенеративный усилитель

Ферритовый генератор (§ 34) можно рассматривать как резонатор, настроенный на частоты ω_1 и ω_2, в котором происходит регенерация — компенсация потерь на этих частотах. Отвлечемся сейчас от механизма этой регенерации, который был исследован в § 34, и сосредоточим внимание на потерях, которые компенсируются. Эти потери состоят из потерь P_0 в самом резонаторе (в стенках и ферритовом образце) и мощности $P_{св}$, которая передается в нагрузку, присоединенную к генератору. Потери P_0 обратно пропорциональны собственной добротности Q_0 рассматриваемого резонатора, потери $P_{св}$ — так называемой добротности связи $Q_{св}$, а суммарные потери $P_0 + P_{св}$ — нагруженной добротности $Q_н$. Очевидно, что

$$\frac{1}{Q_н} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{св}}.$$

Компенсация потерь может трактоваться как внесение в резонатор отрицательных потерь, т. е. появление некоторой отрицательной добротности $Q_p = -|Q_p|$, тем меньшей по абсолютной величине, чем больше компенсируемые потери. Во время нарастания колебаний

$$\frac{1}{|Q_p|} > \frac{1}{Q_н}. \qquad (35,1)$$

После установления предельного цикла значения $Q_н$ и Q_p делаются равными. Если условие (35,1) не выполняется, то автоколебания в резонаторе с присоединенной к нему нагрузкой не будут возникать. Однако, если при этом выполняется условие

$$\frac{1}{|Q_p|} > \frac{1}{Q_0}, \qquad (35,2)$$

то рассматриваемый регенерированный резонатор может явиться усилителем подаваемого на него сигнала.

Рассмотрим, например, резонатор с одним элементом связи, являющийся оконечной нагрузкой некоторого волновода. Роль выходного сигнала будет играть при этом сигнал, отраженный от резонатора. Мы интересуемся

случаем, когда частота сигнала мало отличается от собственной частоты одного из типов колебаний резонатора; при этом практически будет возбуждаться только этот тип колебаний. И так как нас интересуют общие энергетические соотношения, а не структура поля в резонаторе, мы можем представить резонатор эквивалентной схемой колебательного контура, например последовательного (рис. 85). В этот контур наряду с положительным актив-

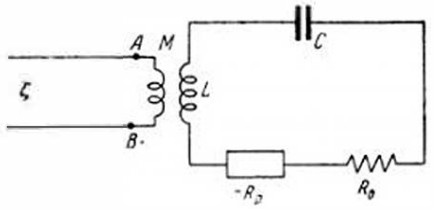


Рис. 85. Эквивалентная схема регенерированного резонатора, включенного в качестве оконечной нагрузки линии.

ным сопротивлением потерь R_0, которое связано с собственной добротностью соотношением

$$Q_0 = \frac{\omega L}{R},$$

включено отрицательное активное сопротивление регенерации $-R_р$, связанное аналогичным соотношением с отрицательной добротностью $-Q_р$. Связь контура с линией для определенности принята индуктивной.

Запишем для схемы рис. 85 уравнения Кирхгофа и исключим из них ток в контуре. Тогда, пренебрегая собственным сопротивлением катушки связи по сравнению с вносимым, получим следующее выражение для сопротивления между точками A и B, т. е. для сопротивления нагрузки линии:

$$Z_н = \frac{\omega^2 M^2}{i\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right) + (R_0 - R_р)}. \qquad (35,3)$$

Коэффициент отражения от этой нагрузки

$$\Gamma = \frac{Z_н - \zeta}{Z_н + \zeta}, \qquad (35,4)$$

где ζ — волновое сопротивление линии.

Подставляя (35,3) в (35,4), получим:

$$\Gamma = \frac{-i\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) - \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{св}} + \frac{1}{|Q_р|}}{i\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{св}} - \frac{1}{|Q_р|}}, \qquad (35,5)$$

где $Q_{св} = \frac{\omega L}{\omega^2 M^2/\zeta}$ — добротность связи, а $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота. Заметим, что выражение (35,5) будет справедливо для произвольного резонатора, независимо от принятой при выводе его эквивалентной схемы.

При резонансе ($\omega = \omega_0$)

$$\Gamma_{рез} = \frac{\frac{1}{Q_{св}} - \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{|Q_р|}}{\frac{1}{Q_{св}} + \frac{1}{Q_0} - \frac{1}{|Q_р|}}. \qquad (35,6)$$

Зависимость $\Gamma_{рез}$ от $\frac{1}{|Q_р|}$ показана на рис. 86. Из этого рисунка, как и из формулы (35,6), видно, что коэффициент отражения при резонансе становится больше 1 при выполнении условия (35,2), т. е. когда регенерация компенсирует собственные потери в резонаторе. По мере дальнейшего роста $\frac{1}{|Q_р|}$ коэффициент отражения, или, как его теперь можно назвать, коэффициент усиления, возрастает, стремясь к бесконечности при

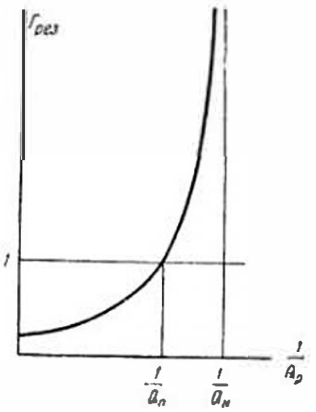


Рис. 86. Зависимость коэффициента отражения регенерированного резонатора от величины отрицательной добротности $Q_р$.

$$\frac{1}{|Q_р|} \to \frac{1}{Q_н}.$$

При этом регенерация компенсирует потери как в резонаторе, так и в его нагрузке, которой является присоединенная к резонатору линия. Бесконечный рост Г свидетельствует о нестабильности—о возникновении автоколебаний.

Нами была рассмотрена линейная задача. В действительности регенерированный резонатор всегда является нелинейной системой. Если учитывать это, амплитуда отраженного сигнала будет стремиться по мере роста $\frac{1}{|Q_р|}$ к конечной величине, т. е. будет иметь место насыщение. Коэффициент усиления будет зависеть от амплитуды входного сигнала и будет всегда, вплоть до порога самовозбуждения, оставаться конечным при конечной амплитуде этого сигнала. Однако при малых сигналах значение Г вблизи порога самовозбуждения будет очень велико.

Недостатком регенеративного усиления является критичность величины регенерации при больших коэффициентах усиления.

Вторым недостатком его является сужение полосы по мере роста усиления. Определим ширину полосы усилителя $2\Delta\omega$ как удвоенное значение расстройки, при которой

$$|\Gamma|^2 = \frac{1}{2}|\Gamma_{рез}|^2.$$

Тогда, как нетрудно получить из (35,5) и (35,6), при $|\Gamma_{рез}| \gg 1$ приближенно справедливо выражение

$$2\Delta\omega = \frac{\omega}{Q_{эф}}, \qquad (35,7)$$

где $Q_{эф}$ — эффективная добротность, обратная величина которой

$$\frac{1}{Q_{эф}} = \frac{1}{Q_в} + \frac{1}{Q_{св}} - \frac{1}{|Q_р|} \qquad (35,8)$$

находится в знаменателе выражения (35,6). Отсюда следует, что по мере роста коэффициента усиления ширина полосы будет уменьшаться.

Третьим недостатком регенеративного усилителя является очень высокое требование к согласованию волновода, в который поступает отраженный сигнал. Если коэффициент отражения этого волновода будет больше, чем $\frac{1}{|\Gamma|}$, где $|\Gamma|$ — коэффициент усиления, то может произойти самовозбуждение.

Регенеративный резонатор усилителя может быть включен не только как оконечная нагрузка волновода, но и «на проход». Не рассматривая подробно этого случая, заметим лишь, что полученные выше результаты будут для него справедливы с тем отличием, что усиленные волны будут распространяться от резонатора как по входному, так и по выходному волноводу. Оба эти волновода должны быть хорошо согласованы.

Для ферритового устройства, рассмотренного в § 34, регенерация является параметрической, т. е. обусловлена подачей сигнала с частотой ω, изменяющего параметры среды для сигналов с частотами ω_1 и ω_2. Величина регенерации может быть уменьшена путем уменьшения поля $h_ω$, т. е. мощности подкачки. Если это поле становится меньше порогового поля $h_{пор}$, необходимого для нарастания колебаний в нагруженном резонаторе, автоколебания на частотах ω_1 и ω_2 прекращаются. При подаче в такой «недовозбужденный» генератор внешнего сигнала с частотой ω_1 или ω_2 происходит усиление этого сигнала. По мере уменьшения $h_ω$ коэффициент усиления уменьшается. Он становится меньше 1, когда $h_ω$ становится меньше порогового значения $h_{пор\,0}$ для ненагруженного резонатора.

В случае параметрической регенерации следует различать два режима: когерентный и некогерентный. Когерентный режим имеет место, когда частоты ω и ω_1 являются в точности кратными, например, когда в точности $\omega = 2\omega_1$. В этом случае очень существенную роль играет разность фаз между сигналами на частотах ω и ω_1. Как было показано (для $\omega = 2\omega_1$) Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси [404], при определенном значении разности фаз $\Delta\varphi$ между этими сигналами ($\Delta\varphi = \Delta\varphi_1$) имеет место наиболее сильная регенерация:

$$\frac{1}{Q_р} = -\left|\frac{1}{Q_р}\right|_{макс},$$

где величина $\left|\frac{1}{Q_р}\right|_{макс}$ определяется глубиной модуляции параметра. При разности фаз $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + \pi$ регенерация отсутствует и имеет место увеличение потерь:

$$\frac{1}{Q_р} = +\left|\frac{1}{Q_р}\right|_{макс}.$$

При промежуточных $\Delta\varphi$ величина $\frac{1}{Q_р}$ лежит между этими крайними значениями, причем в большей части интервала (2π) изменения $\Delta\varphi$ имеет место регенерация, и лишь в сравнительно небольшой области около $\Delta\varphi = \Delta\varphi_2$ — увеличение потерь.

В случае некогерентного режима значение $\Delta\varphi$ и, следовательно, интенсивность регенерации изменяются во времени. В среднем происходит регенерация — компенсация потерь, несколько меньшая, чем при оптимальном фазовом сдвиге $\Delta\varphi_1$.

Эти закономерности, полученные сначала теоретически [404, 405] и подтвержденные экспериментально [405] для систем с сосредоточенными постоянными, подтвердились и для ферритового усилителя [443].

Для некогерентного режима в случае $\omega_1 = \omega_2$ [435] при снижении мощности раскачки относительно порогового значения для нагруженного резонатора приблизительно на 1 *дб* коэффициент усиления составлял 25 *дб* при полосе 1 *Мгц*.

Как было показано в § 34, в ферритовом генераторе происходит (при $\omega_1 \neq \omega_2$) процесс одновременного нарастания колебаний обеих частот. Очевидно, что при h_ω, лежащем в пределах $h_{пор} < h_\omega < h_{пор\,0}$, наряду с регенеративным усилением на частотах ω_1 или ω_2 может происходить регенеративное преобразование одной из этих частот в другую. При подаче слабого сигнала, например на частоте ω_1, может быть получен сигнал частоты ω_2, амплитуда которого будет возрастать по мере приближения величины h_ω к пороговому значению $h_{пор}$ для нагруженного резонатора.

Интерес к ферритовому усилителю связан прежде всего с проблемой создания входных устройств с. в. ч. приемников с низкими шумами. Очень низкие уровни

шума могут быть получены в так называемых квантовых усилителях (мазерах) [408, 421]. В трехуровневом квантовом усилителе [409], в котором использован парамагнитный кристалл [410], получены (при температуре жидкого гелия, которая необходима для работы такого усилителя) эквивалентные температуры шума в несколько десятков градусов [413, 421].

Заметим, что один из таких усилителей—трехуровневый парамагнитный усилитель [410] внешне имеет много общего с ферритовым усилителем. Так же как и последний, он работает при подаче мощности на частоте подкачки ω более высокой, чем усиливаемая частота ω_1, и при наличии постоянного магнитного поля H_0, величина которого является резонансной на частоте ω. В нем происходят энергетические переходы, которым соответствуют частоты, удовлетворяющие условию (34,2).

Но, несмотря на внешнее сходство, принципы работы этих устройств совершенно различны [437]. В трехуровневом усилителе причиной излучения большей мощности, чем та, которая на усиливаемой частоте подается в устройство, является увеличение количества атомов, находящихся на более высоком энергетическом уровне. Роль излучения на частоте подкачки заключается в том, чтобы вызвать это увеличение. Ферритовый же усилитель является параметрическим, в нем причиной усиления является изменение с частотой ω параметров среды, вследствие чего колебания на частотах ω_1 и ω_2, удовлетворяющих условию (34,2), начинают взаимно раскачивать друг друга. С этим различием связано, между прочим, и то, что хотя квантовая теория ферритового усилителя может быть построена [437], квазиклассический подход к нему является наиболее естественным. Именно такой подход был принят в теории Сула [436] и использован в § 34.

Малый уровень шумов является свойством, по-видимому, всех параметрических усилителей. И в связи с упомянутой проблемой создания малошумящих входных устройств приемника было предложено, кроме ферритового, несколько типов параметрических усилителей с. в. ч., в которых модулируемыми параметрами являются скорости электронов в пучке [414] и емкости полупроводниковых диодов [417]. Усилители с полупроводниковыми диодами

оказались наиболее простыми в осуществлении [417]. Для них при комнатных температурах были получены эквивалентные температуры шумов порядка 100° К при мощностях подкачки порядка 100 *мвт* [419].

Преимуществом ферритовых усилителей перед параметрическими усилителями с диодами должна явиться бо́льшая стойкость по отношению к перегрузкам. Однако для того, чтобы ферритовые усилители могли найти практическое применение, мощность подкачки должна быть снижена по крайней мере до значений, допускающих непрерывную подачу этой мощности на ферритовый образец. Это даст возможность провести и измерение шумов ферритового усилителя.

§ 36. Ферритовый усилитель с бегущей волной

Ферритовый усилитель, рассмотренный в § 35, обладает, как уже отмечалось, серьезными недостатками, свойственными вообще регенеративным усилителям. К числу их относятся узкополосность, критичность величины регенерации (что сводится в данном случае к критичности мощности подкачки) и критичность согласования со стороны генератора и нагрузки. От этих недостатков свободен, как известно, другой принцип усиления колебаний с. в. ч., основанный на использовании не колебаний в регенерированном резонаторе, а бегущей волны с возрастающей амплитудой, которая распространяется в некотором волноводе. К числу таких усилителей принадлежит, например, лампа с бегущей волной, в которой для создания волны с возрастающей амплитудой используется электронный поток.

Энергия, необходимая для усиления колебаний, черпается при этом из источника постоянного напряжения, ускоряющего электроны. Такой принцип усиления не может быть непосредственно перенесен на волновод с намагниченным ферритом, так как при этом будет отсутствовать источник энергии для усиления (постоянное магнитное поле не может передавать свою энергию прецессии намагниченности).

К усилителям с бегущей волной может быть применен и принцип параметрического возбуждения, при котором

источником энергии является переменное поле с частотой, отличающейся от частоты сигнала. Это поле модулирует параметры некоторой нелинейной среды, заполняющей волновод. При определенных условиях в таком волноводе может возникнуть возрастающая волна с частотой сигнала [416]. Нелинейной средой в этом параметрическом усилителе с бегущей волной может быть электронный поток [415] или намагниченный феррит [440][1]).

По аналогии с ферритовым генератором и регенеративным усилителем мы можем предполагать, что под влиянием волны подкачки с частотой ω в волноводе с намагниченным ферритом будут возникать две возрастающие волны с частотами ω_1 и ω_2, удовлетворяющими условию (34,2). Не рассматривая пока механизма возникновения этих волн в волноводе с ферритом, убедимся, что они могут возникнуть в любых связанных волноводах, если связь между ними модулируется по закону бегущей волны с частотой ω.

Следуя Тьену и Сулу [440], покажем это на примере двух длинных линий с индуктивной связью. Рассмотрим линии без потерь с распределенными параметрами, отнесенными к единице длины L_1, C_1 и L_2, C_2, и распределенной взаимоиндукцией связи между линиями M. Предположим, что эта взаимоиндукция изменяется по закону

$$M(y,\ t) = M_0 \cos(\omega t - \beta y), \tag{36,1}$$

где y—координата в направлении оси линии.

Предположим, далее, что ток в первой линии i_1 изменяется с частотой ω_1, а ток во второй линии i_2—с частотой ω_2. Если связь между линиями мала, то эти токи можно записать следующим образом:

$$i_{1,2}(y,\ t) = A_{1,2}(y) \cos(\omega_{1,2} t - \beta_{1,2} y), \tag{36,2}$$

где $A_{1,2}(y)$—медленно изменяющиеся функции y.

---

[1]) Осуществлен также квантовый трехуровневый усилитель с бегущей волной [420] и параметрический усилитель с большим числом сосредоточенных реактивностей — емкостей полупроводниковых диодов [418], который может приближенно трактоваться как система с бегущей волной.

Аналогично могут быть представлены и напряжения в линиях. Подставляя эти токи и напряжения в «телеграфные» уравнения для обеих линий и предполагая, что, кроме условия (34,2), выполняется условие

$$\beta_1 + \beta_2 = \beta, \tag{36,3}$$

нетрудно получить для функций $A_1(y)$ и $A_2(y)$ следующее уравнение:

$$\frac{d^2A_{1,2}}{dy^2} - \eta^2 A_{1,2} = 0, \tag{36,4}$$

где $\eta^2 = \frac{1}{16}\frac{M^2}{L_1L_2}\beta_1\beta_2$.

Решения этого уравнения запишутся:

$$A_{1,2} = A_{1,2+}e^{\eta y} + A_{1,2-}e^{-\eta y}. \tag{36,5}$$

Таким образом, при выполнении условий (34,2) и (36,3) в линиях, связь между которыми изменяется по закону бегущей волны с частотой ω, имеют место волны с убывающей и возрастающей амплитудами. Коэффициент возрастания или убывания η пропорционален амплитуде переменной связи между линиями. Волна с возрастающей амплитудой может быть использована для усиления колебаний.

Очевидно, что наличие двух разнесенных в пространстве волноводов не обязательно. Две волны с частотами ω_1 и ω_2 могут распространяться и в одном волноводе, имея, например, различную структуру поля. Требуемая для возникновения возрастающей волны связь между волнами может при этом осуществляться путем модуляции какого-либо параметра общего волновода, в частности параметров среды, заполняющей этот волновод.

Для волновода, заполненного намагниченным ферритом, модуляция параметров среды может быть осуществлена при помощи волны подкачки, распространяющейся в том же волноводе с частотой ω и постоянной распространения β.

Рассмотрим, следуя Тьену и Сулу [440], простую модель, для которой все три волны являются однородными плоскими волнами, распространяющимися в неограниченной среде в направлении оси y (рис. 87). Среда представляет собой феррит, намагниченный до насыщения в направлении оси z постоянным полем H_0.

В качестве двух волн с частотами ω_1 и ω_2 следует выбрать нормальные волны в такой среде, которые при отсутствии связи между ними, обусловленной нелинейностью, распространялись бы независимо друг от друга. Как было показано в § 21, такими волнами являются: «необыкновенная» волна с составляющими поля h_{1x}, h_{1y}

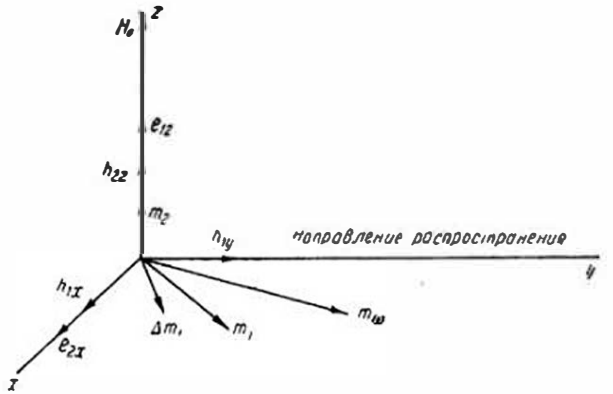


Рис. 87. Составляющие поля и намагниченности в ферритовом усилителе с бегущей волной.

и e_{1z} и «обыкновенная» волна с составляющими h_{2z} и e_{2x}. Постоянные распространения этих волн в случае среды, намагниченной до насыщения ($\mu_{\parallel}=1$), согласно (21,10) и (21,9) запишутся:

$$\beta_1 = \frac{\omega_1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu_\perp}, \tag{36,6}$$

$$\beta_2 = \frac{\omega_2}{c}\sqrt{\varepsilon}. \tag{36,7}$$

По аналогии с ферритовым генератором (§ 34) можно полагать, что для осуществления связи между двумя волнами магнитное поле одной из них должно быть продольным по отношению к направлению постоянного намагничивания, а другой—поперечным. Рассмотренные выше нормальные волны удовлетворяют этому требованию.

Магнитное поле волны подкачки тоже должно быть, по аналогии с ферритовым генератором, поперечным. Оно приведет к появлению поперечной намагниченности $\boldsymbol{m}_\omega$. Эту намагниченность, следуя Тьену и Сулу, будем считать заданной и предположим, что она имеет круговую поляризацию.

Рассмотрим прежде всего, какие намагниченности с частотами ω_1 и ω_2 будут возникать в данном случае. Поперечное поле частоты ω_1 вызовет поперечную намагниченность той же частоты $\boldsymbol{m}_1$. Составляющие ее (без учета потерь) выразятся через составляющие h_{1x} и h_{1y} этого поля согласно выражениям (1,28).

Предположим, что выполняется условие (34,2). Тогда вследствие эффекта преобразования частоты (§ 33) продольное магнитное поле h_2, имеющее частоту ω_2, и намагниченность $\boldsymbol{m}_\omega$ вызовут дополнительную поперечную намагниченность (второго порядка) $\Delta\boldsymbol{m}_1$ с частотой ω_1.

Продольное поле h_2, конечно, не будет вызывать намагниченности первого порядка. Намагниченность с частотой ω_2 возникнет только в силу нелинейного эффекта преобразования частоты благодаря наличию намагниченности $\boldsymbol{m}_\omega$ и поперечного поля h_1. Эта намагниченность $\Delta\boldsymbol{m}_2$ будет направлена по оси z.

Не приводя здесь выражений для этих намагниченностей, заметим лишь, что необходимость учета нелинейных членов в уравнении Ландау—Лифшица не дает возможности при их записи непосредственно воспользоваться методом комплексных амплитуд. Но, с другой стороны, все выкладки упрощаются, если составляющие поля и намагниченности, зависящие от y и t по волновому закону, представить в виде произведения функций от y и от t. Выход может быть найден, если записать мгновенные значения всех составляющих поля и намагниченности в виде сумм комплексно сопряженных величин [1]).

[1]) Этот прием применен также в теории ферритового генератора [436]. Им можно было бы воспользоваться и в главе 11 при исследовании эффектов удвоения и преобразования частоты. Однако там он не приводит к упрощению выкладок по сравнению с использованным способом—непосредственной подстановкой в уравнения вещественных величин.

Например,

$$\left.\begin{aligned} h_{1x} &= \tfrac{1}{2}\left[H_{1x}(y)\,e^{i\omega_1 t} + H^*_{1x}(y)\,e^{-i\omega_1 t}\right],\\ h_{2z} &= \tfrac{1}{2}\left[H_{2z}(y)\,e^{i\omega_2 t} + H^*_{2z}(y)\,e^{-i\omega_2 t}\right],\\ m_{1x} &= \tfrac{1}{2}\left[M_{1x}(y)\,e^{i\omega_1 t} + M^*_{1x}(y)\,e^{-i\omega_1 t}\right],\\ m_{\omega x} &= \tfrac{1}{2}\left[M_{\omega x}(y)\,e^{i\omega t} + M^*_{\omega x}(y)\,e^{-i\omega t}\right] \quad \text{и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{36,8}$$

Эти выражения можно подставить как в линейные соотношения—проекции уравнения первого порядка (32,4), так и в нелинейные соотношения—проекции уравнения второго порядка (32,5). Диссипативными членами в этих соотношениях мы пренебрежем. Приравнивая затем нулю вещественные и мнимые части полученных в результате этой подстановки уравнений, мы получим выражения для пространственных функций: $M_{1x}(y)$, $M_{2z}(y)$ и т. д. и их комплексно сопряженных величин.

Для того чтобы выяснить условия возникновения возрастающих волн, полученные таким образом составляющие намагниченности и составляющие поля следует подставить в проекции уравнений Максвелла. При этом мы получим две системы уравнений: одна будет связывать члены, изменяющиеся во времени с частотой ω_1, а другая—с частотой ω_2.

Эти системы, однако, не будут независимыми. Наличие упомянутых выше намагниченностей второго порядка $\Delta\boldsymbol{m}_1$ и $\Delta\boldsymbol{m}_2$ приведет к тому, что в первую систему, кроме амплитуд полей $H_{1x}(y)$, $H_{1y}(y)$ и $E_{1z}(y)$, войдет амплитуда $H_{2z}(y)$. Во вторую систему, кроме $H_{2z}(y)$ и $E_{2x}(y)$, войдет амплитуда $H_{1x}(y)$. Если затем исключить $E_{1z}(y)$ и $H_{1y}(y)$ из первой системы и $E_{2x}(y)$—из второй, то мы придем к следующим двум уравнениям для амплитуд $H_{1x}(y)$ и $H_{2z}(y)$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_{1x}(y)}{\partial y^2} &= -\beta_1^2 H_{1x}(y) + \beta_{10}^2\,\frac{\mu-\mu_a}{\mu}\,\frac{M_\omega(y)}{M_0}\,\frac{\omega_\omega}{\omega_2}\,H^*_{2z}(y),\\ \frac{\partial^2 H^*_{2z}(y)}{\partial y^2} &= -\beta_2^2 H^*_{2z}(y) + \beta_2^2\,\frac{(\mu+\mu_a-1)(\mu+\mu_a)}{\mu}\,\frac{M^*_\omega(y)}{M_0}\,H_{1x}(y), \end{aligned}\right\} \tag{36,9}$$

где $\beta_{10} = \frac{\omega_1}{c}\sqrt{\varepsilon}$; $\omega_M = 4\pi\gamma M$; μ и μ_a — компоненты тензора магнитной проницаемости на частоте ω_1; M_0 — постоянная намагниченность; $M_\omega(y) = m_\omega e^{-i\beta y}$ — амплитуда намагниченности подкачки с частотой ω (β — постоянная распространения волны подкачки).

Решения системы (36,9) будем искать в виде

$$\left.\begin{aligned} H_{1x}(y) &= A_1(y)\, e^{-i\beta_1 y}, \\ H_{2x}(y) &= A_2(y)\, e^{-i\beta_2 y}, \end{aligned}\right\} \qquad (36{,}10)$$

где $A_1(y)$ и $A_2(y)$ — медленно изменяющиеся функции координаты y (так же как и в рассмотренной выше задаче о связанных линиях).

Если выполняется условие (36,3), то для функций $A_1(y)$ и $A_2(y)$ из (36,9) следуют уравнения вида (36,4). Решениями их являются выражения (36,5). Этим решениям соответствуют возрастающие и убывающие волны. Для коэффициента возрастания и убывания η_0 в данном случае получается следующее выражение:

$$\eta_0 = \frac{m_\omega}{M_0}\beta_{10}\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{\mu_\perp}{\mu}(\mu + \mu_a - 1)\frac{\omega_M}{\omega_2}}\,. \qquad (36{,}11)$$

Мы до сих пор пренебрегали потерями в среде. Теперь учтем, что при отсутствии связи имеет место затухание обеих волн, обусловленное потерями. Коэффициенты затухания волн с частотами ω_1 и ω_2 обозначим соответственно α_1 и α_2. Тогда можно показать, что коэффициент возрастания волн при наличии связи между ними будет:

$$\eta = \eta_0 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\,. \qquad (36{,}12)$$

Таким образом, возрастание волн при наличии потерь будет иметь место, если амплитуда волны подкачки m_ω превысит некоторое пороговое значение, которое может быть определено из условия

$$\eta_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\,. \qquad (36{,}13)$$

Для получения больших величин m_ω и, следовательно, больших коэффициентов возрастания при возможно мень-

ших значениях поля подкачки необходимо, так же как и в случае ферритового регенеративного усилителя, выбирать поле H_0 таким, чтобы на частоте ω выполнялось условие ферромагнитного резонанса. При этом, однако,

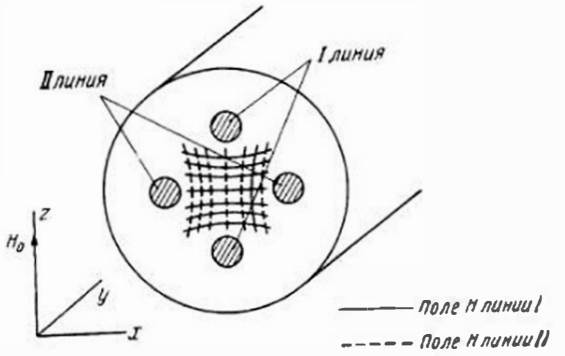


Рис. 88. Волноводная система усилителя с бегущей волной [440].

волна подкачки будет очень быстро затухать. Это является одной из трудностей при создании ферритового усилителя с бегущей волной.

Осуществление волноводной системы, поля в которой приближались бы к полям в рассмотренной выше модели, возможно, по-видимому, рядом способов. В одном из них [440] для создания волн с частотами ω_1 и ω_2 используются две двухпроводные линии (рис. 88).

ГЛАВА 13

НЕЛИНЕЙНЫЙ РОСТ ПОТЕРЬ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛЯХ

§ 37. Порог нестабильности

Нелинейные явления, связанные с нестабильностью, которые не укладываются в рамки рассмотренной в главе 11 теории, были обнаружены впервые в опытах Бломбергена и Дэймона [450—452] по ферромагнитному резонансу в ферритах при больших амплитудах переменного поля. В этих опытах производилось независимое измерение эффекта детектирования, т. е. уменьшения постоянной намагниченности M_z, и потерь при ферромагнитном резонансе.

Если бы процессы определялись только стабильной нелинейностью однородных колебаний намагниченности, то, как отмечалось в § 32, уменьшение резонансного максимума потерь с ростом амплитуды переменного поля h начиналось бы при значениях h порядка полуширины резонансной кривой ΔH. Спад же M_z при резонансе должен был бы происходить уже при меньших амплитудах переменного поля.

В действительности же резкое «насыщение», т. е. уменьшение $\chi''_{рез}$, наступало при значениях h, существенно меньших, чем ΔH, и меньших, чем те, при которых наступало убывание M_z (рис. 89). Это насыщение сопровождалось расширением резонансной кривой, т. е. было связано с увеличением потерь. Кроме того, при значениях h одного порядка с теми, при которых начинался спад $\chi''_{рез}$, появлялся широкий и интенсивный максимум поглощения при постоянных магнитных полях, меньших, чем резонансное (рис. 90). Появление этого максимума (так называемого «дополнительного» резонанса), так же как и

аномально раннее насыщение основного резонанса, нельзя объяснить, исходя из теории стабильных нелинейных процессов, рассмотренной в главе 11.

В последующих опытах [453, 454] измерялось поглощение в волноводах, частично заполненных ферритом,

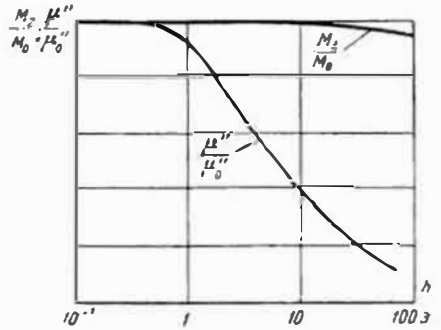


Рис. 89. Спад M_z и μ'' при резонансе с ростом амплитуды переменного поля [452].

при высоких уровнях мощности с. в. ч. Эти измерения показали, что дополнительный максимум поглощения появ-

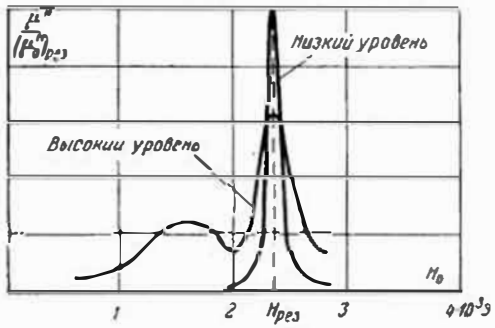


Рис. 90. Потери при низком и высоком уровнях мощности.

ляется, как только величина мощности, передаваемой по волноводу, достигнет некоторого порогового значения. Величины пороговой мощности зависели от размеров волновода и ферритового образца, а также (для круглого

волновода с круговой поляризацией волны) от направления вращения поляризации. Эти зависимости, как показывает анализ результатов измерений [453, 454], в значительной степени определялись эффектом концентрации энергии в феррите (§ 24 и 27).

Значения порогового поля в феррите $h_{\text{пор}}$ существенно зависели от состава феррита и условий синтеза. Так, например, значения $h_{\text{пор}}$ оказались малыми (единицы э) для поликристаллических магний-марганцевых ферритов, которые при низких уровнях мощности имели малые потери. Такие низкие значения $h_{\text{пор}}$, которые соответствуют (для трехсантиметрового диапазона) мощностям, передаваемым по волноводу, порядка 1 *квт*, препятствуют использованию этих ферритов в устройствах высокого уровня мощности.

Существенно отметить, что при $h > h_{\text{пор}}$ фазовые постоянные в волноводе с ферритом, резонансные частоты резонаторов, содержащих ферритовый образец, и другие величины, определяемые вещественными частями компонентов тензора $\overleftrightarrow{\chi}$, остаются практически такими же, как и при малых h. Таким образом, если ввести эффективные, зависящие от амплитуды переменного поля компоненты тензора восприимчивости, то при $h > h_{\text{пор}}$ будут возрастать мнимые части этих компонентов, а вещественные будут оставаться практически постоянными[1]). Это также является совершенно необъяснимым с точки зрения теории стабильных нелинейных процессов.

Появление «аномального» поглощения только при $h > h_{\text{пор}}$ наводит на мысль, что оно связано с какой-то нестабильностью. Источником нестабильности может, вообще говоря, явиться анизотропия формы. Можно показать [455], что для тонкого диска, намагниченного перпендикулярно его плоскости, зависимость ΔM_z от H_0 становится многозначной при H_0, несколько меньшем, чем резонансное поле, и при h, превышающем пороговое значение

$$h_{\text{пор. ф}} = \Delta H \sqrt{\frac{3{,}08 \cdot \Delta H}{4\pi M_0}}.$$

[1]) Это справедливо, конечно, только в том случае, когда увеличение потерь не приводит к существенному нагреванию феррита и изменению вследствие этого его параметров.

Для ферритов с узкой резонансной кривой $h_{\text{пор. ф}}$ значительно меньше, чем ΔH. Многозначность зависимости M_z от H_0 приводит к нестабильностям—разрывам в экспериментальных кривых ферромагнитного резонансного поглощения нормально намагниченного диска. При помещении диска в резонатор эта нестабильность может явиться причиной релаксационных колебаний [462].

Однако аномальное поглощение в опытах Бломбергена и др. [450—454] не было связано с этим видом нестабильности: оно не зависело существенно от формы тела и, во всяком случае, возникало не только в тонких дисках. Предположение, что роль таких дисков играют домены (§ 10), также должно быть отвергнуто, так как «аномальные» нелинейные эффекты наблюдаются при таких постоянных полях, при которых доменная структура заведомо отсутствует.

Остается предположить, что нестабильность, которая при этом возникает, представляет собой возрастание некоторых неоднородных типов прецессии, подобное тому, которое имеет место в ферритовом генераторе при статическом режиме работы (§ 34). Это предположение подтверждается теорией нелинейного поглощения, разработанной Сулом [455, 456].

Основные положения этой теории мы сейчас рассмотрим. В основе ее лежит решение уравнения Ландау—Лифшица для малого (по сравнению с длиной электромагнитной волны) эллипсоида вращения, намагниченного до насыщения вдоль его оси.

Намагниченность будем искать в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}_0(t) + \delta\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t), \qquad (37,1)$$

где $\boldsymbol{M}_0$—постоянная намагниченность, $\boldsymbol{m}_0$—переменная намагниченность, не зависящая от координат внутри эллипсоида, т. е. намагниченность однородной прецессии, а $\delta\boldsymbol{m}$—зависящее от координат возмущение. Это возмущение представим в виде ряда по плоским спиновым волнам с различными волновыми векторами $\boldsymbol{k}$ (§ 3):

$$\delta\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_n \boldsymbol{m}_n(t)\, e^{-i\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r}}. \qquad (37,2)$$

Такое разложение, строго говоря, несправедливо, так как

плоские спиновые волны не удовлетворяют граничным условиям на поверхности эллипсоида. Они не являются собственными типами колебаний рассматриваемой задачи и не образуют, таким образом, полной системы функций, по которой возможно разложение. Для волн с длинами $\lambda_k = \frac{2\pi}{k}$, значительно меньшими, чем размеры эллипсоида, вносимая таким образом погрешность невелика. Для более длинных волн она может быть существенной. Для таких волн обменное взаимодействие практически уже не играет роли. Собственными типами колебаний при этом являются неоднородные — «магнитостатические» типы прецессии (§ 6). Однако в рассматриваемой теории Сула используется приближенное разложение (37,2).

Примем во внимание три вида взаимодействия: взаимодействие с внешним магнитным полем, обменное взаимодействие и магнитное взаимодействие, которое можно учитывать при помощи размагничивающего поля. Те же виды взаимодействия учитывались и при рассмотрении спиновых волн малой амплитуды в неограниченной среде (§ 3). Поэтому выражение (3,3) для эффективного поля будет справедливо и в данном случае. Внешнее поле

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{z}_0 H_0 + \boldsymbol{h}(t), \tag{37,3}$$

где H_0 — постоянное поле, а $\boldsymbol{h}$ — заданное переменное поле, которое для упрощения вычислений предполагается поперечным с круговой поляризацией:

$$\boldsymbol{h}(t) = h(\boldsymbol{x}_0 \cos \omega t + \boldsymbol{y}_0 \sin \omega t). \tag{37,4}$$

Эффективное поле обменного взаимодействия определится выражением (1,15). С учетом (37,1), (37,2) и (3.7) оно запишется следующим образом:

$$\boldsymbol{H}_q = -q \sum_n k_n^2 \boldsymbol{m}_n(t)\, e^{-i k_n r}. \tag{37,5}$$

Размагничивающее поле, связанное с не зависящими от координат первыми двумя членами (37,1), запишется, как обычно (§ 5),

$$\boldsymbol{H}_{M_0} = -\overleftrightarrow{N}(\boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}_0), \tag{37,6}$$

где $\overleftrightarrow{N}$ — тензор размагничивания.

Размагничивающее поле, связанное со спиновыми волнами, записывается так же, как и для спиновых волн в неограниченной среде (выражение (3,11)). Принимая во внимание разложение (37,2), получим:

$$\boldsymbol{H}_{Mk} = -4\pi \sum_n \frac{k_n (k_n \boldsymbol{m}_n)}{k_n^2}\, e^{-i k_n r}. \tag{37,7}$$

Выражения (37,1) — (37,7) следует подставить в уравнение Ландау — Лифшица. Это уравнение может быть принято в форме (1,17) без члена, учитывающего потери. Потери будут в дальнейшем учтены путем перехода от вещественных собственных частот к комплексным. Можно ограничиться рассмотрением проекций уравнения (1,17) только на оси x и y. Составляющая же намагниченности по оси z, которая войдет в эти проекции, может быть выражена через составляющие по осям x и y при помощи соотношения (32,8).

Таким образом, неизвестными величинами будут являться амплитуды m_{nx} и m_{ny}. Для упрощения вычислений целесообразно перейти к их линейным комбинациям:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{M_0}(m_{nx} + i m_{ny}), \\ a^*_{-k} &= \frac{1}{M_0}(m_{nx} - i m_{ny}). \end{aligned}\right\} \tag{37,8}$$

Если умножить на i проекцию уравнения Ландау — Лифшица на ось y, сложить, а затем вычесть полученное соотношение из проекции этого уравнения на ось x и приравнять в полученных соотношениях коэффициенты при одинаковых степенях e, то мы придем к бесконечной системе уравнений для амплитуд a_k и a^*_{-k}.

Будем считать сначала все амплитуды малыми и пренебрежем в уравнениях малыми величинами второго порядка, т. е. рассмотрим линейное приближение. Тогда уравнения для амплитуд a_k и a^*_{-k} с различными индексами окажутся независимыми. Уравнения для a_0 и a^*_0 совпадут с обычными уравнениями однородной прецессии намагниченности малого эллипсоида (§ 5). Амплитуды же спиновых волн с $k > 0$ явятся линейными комбинациями других величин b_k и b^*_{-k}, для которых получаются

простые уравнения гармонических осцилляторов:

$$\frac{db_k}{dt} = i\omega_k b_k; \quad \frac{db^*_{-k}}{dt} = -i\omega_k b^*_{-k}. \tag{37,9}$$

Величина ω_k представляет собой собственную частоту спиновой волны с волновым вектором $\boldsymbol{k}$, для которой справедлива формула (6,15). При этом, как уже отмечалось в § 6, имеет место вырождение: совпадение собственной частоты однородной прецессии с частотой целой группы спиновых волн с $k > 0$.

Для того чтобы учесть затухание, заменим ω_k на

$$\dot{\omega}_k = \omega_k + i\omega_{rk}, \tag{37,10}$$

где ω_{rk} — частота релаксации спиновой волны. Тогда решения уравнений (37,9) запишутся:

$$b_k = b^0_k e^{(i\omega_k - \omega_{rk})t}; \quad b^*_{-k} = b^0_{-k} e^{(-i\omega_k - \omega_{rk})t}. \tag{37,11}$$

Если теперь учесть нелинейность, т. е. не отбрасывать члены с произведениями амплитуд спиновых волн, то уравнения для этих амплитуд, соответствующих различным значениям k, окажутся связанными. В каждое из этих уравнений войдут, вообще говоря, амплитуды всего множества спиновых волн, т. е. каждая из этих волн окажется связанной со всеми остальными, в том числе и с однородной прецессией. Именно этой связью и объясняется нестабильность амплитуд некоторых спиновых волн при достаточно больших значениях a_0.

Остановимся прежде всего на вопросе о пороге нестабильности. При этом можно считать, что все амплитуды a_k с $k > 0$ значительно меньше, чем a_0. Тогда в уравнениях для b_k и b^*_{-k} можно сохранить члены только первого порядка относительно этих величин. Заметим, что величина a_0 войдет в эти члены в первой и во второй степенях.

Решения уравнений для b_k и b^*_{-k} с учетом нелинейности можно по-прежнему искать в виде (37,11), но величины b^0_k и b^0_{-k} будут в этом случае являться функциями времени.

Сохраняя в уравнениях только те нелинейные члены, которые могут привести к нестабильности, получим следующее приближенное уравнение для b^0_k:

$$\frac{db^0_k}{dt} = \varrho_k a_0^0 b^0_{-k} e^{i(\omega - 2\omega_k)t} + \xi_k (a_0^0)^2 b^0_{-k} e^{2i(\omega - \omega_k)t}, \tag{37,12}$$

где ϱ_k и ξ_k — постоянные коэффициенты, a_0^0 — амплитуда однородной прецессии. Уравнение для b^0_{-k} получится из (37,12) путем перехода к комплексно-сопряженным величинам и замены k на $-k$.

Пренебрежем сначала квадратичным (относительно a_0^0) членом в уравнении (37,12). Как будет видно ниже, при этом мы получим объяснение дополнительного максимума поглощения. В этом случае целесообразно искать решение в виде

$$\left.\begin{aligned} b^0_k &= u_k e^{i\left(\frac{\omega}{2} - \omega_k\right)t}, \\ b^0_{-k} &= u_{-k} e^{-i\left(\frac{\omega}{2} - \omega_k\right)t}, \end{aligned}\right\} \tag{37,13}$$

Исключая u_{-k} из (37,12) и аналогичного уравнения для b^0_{-k}, получим окончательно линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{\omega}{2} - \omega_k\right)^2 - \varrho_k \varrho_k^* |a_0^0|^2\right] u_k = 0. \tag{37,14}$$

Решение этого уравнения:

$$u_k = \tilde{u}_k e^{\nu t} + \tilde{u}_k e^{-\nu t}, \tag{37,15}$$

где

$$\eta^2 = \varrho_k \varrho_k^* |a_0^0|^2 - \left(\frac{\omega}{2} - \omega_k\right)^2. \tag{37,16}$$

Если

$$\eta > \omega_{r_k} \tag{37,17}$$

(см. выражение (37,11)), то первый член (37,15) будет неограниченно возрастать. Условие (37,17) может быть записано:

$$|a_0^0|^2 > \left[\omega_{r_k}^2 + \left(\frac{\omega}{2} - \omega_k\right)^2 \frac{1}{\varrho_k \varrho_k^*}\right]. \tag{37,17а}$$

При исследовании порога нестабильности можно в качестве a_0^0 принять обычное значение, получаемое без

учета нелинейности:

$$a_0^0 = \frac{1}{M_0}(\chi^e + \chi_a^e)\, h,$$

где h — амплитуда переменного магнитного поля с круговой поляризацией, а χ^e и χ_a^e — компоненты обычного («линейного») тензора восприимчивости эллипсоида $\overleftrightarrow{\chi^e}$ по отношению к внешнему полю (§ 5). С учетом этого и подставляя вместо коэффициента ϱ_k его значение [456], получим окончательно для амплитуды переменного поля, соответствующей порогу нестабильности, выражение [1]):

$$h_{\text{кр}} = \frac{4\omega_k}{\gamma\omega_M} \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{2} - \omega_k\right)^2 + \omega_{r_k}^2\right]\left[(\omega - \omega_{\text{рез}})^2 + \omega_{r_0}^2\right]}}{\left(\omega_H + \omega_k - \frac{N_z}{4\pi}\omega_M + \omega_{\text{обм}}\right)\sin 2\theta_k}, \tag{37,18}$$

где $\omega_{\text{рез}}$ — частота «киттелевского» резонанса для однородной прецессии эллипсоида, ω_{r_0} — частота релаксации для этой прецессии $\omega_H = \gamma H_0$, а ω_M и $\omega_{\text{обм}}$ определяются выражениями (3,14) и (3,15).

При увеличении h условие (37,18) будет выполнено сначала для одной какой-то группы спиновых волн, характеризующейся некоторыми k и θ_k, т. е. группы, для которой векторы $\boldsymbol{k}$ совпадают с образующими некоторого конуса. Возрастание амплитуд этой группы волн и приведет к интересующим нас нелинейным явлениям. Другие спиновые волны вообще не «вступят в игру», потому что, как мы увидим дальше, амплитуды a_0^0 не будут увеличиваться с ростом h за порогом нестабильности.

Таким образом, необходимо исследовать выражение (37,18) на минимум по отношению к величинам k и θ_k

[1]) Эта формула, а также выражения (37,20), (37,22), (37,24) и (37,28) справедливы при круговой поляризации переменного магнитного поля. В случае линейной поляризации все значения порогового поля будут в 2 раза больше, так как лишь составляющая с правым вращением (амплитуда которой в 2 раза меньше, чем амплитуда поля с линейной поляризацией) будет вызывать все рассмотренные резонансные эффекты.

(от которых зависит и ω_k). Величина постоянного магнитного поля H_0 может при этом являться параметром. Минимальная величина $h_{\text{кр}}$ и представляет собой пороговое поле $h_{\text{пор}}$.

Как видно из (37,18), одним из условий минимума является:

$$\omega = 2\omega_k. \tag{37,19}$$

Это соотношение может трактоваться как условие наиболее эффективного параметрического возбуждения (§ 34)

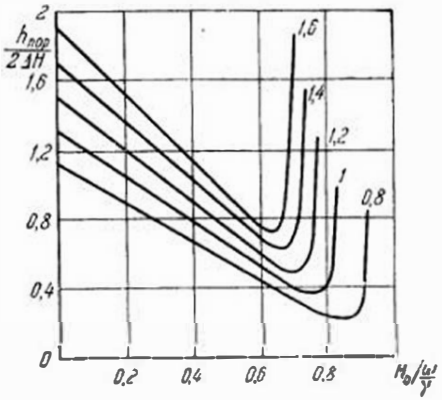


Рис. 91. Зависимость порогового поля от H_0 и намагниченности феррита [455].

Цифры у кривых — значения величины $\frac{\omega}{\gamma}/4\pi M$.

спиновых волн с собственными частотами ω_k переменным магнитным полем или однородной намагниченностью с частотой ω.

В результате анализа выражения (37,18) с учетом (37,19) и (6,15) получаются зависимости $h_{\text{пор}}$ от H_0, приведенные на рис. 91. Абсолютный минимум имеет место при $H_0 = (0{,}5 \div 0{,}9)\, H_{\text{рез}}$ (в зависимости от намагниченности насыщения материала). Именно при таких значениях H_0 наблюдается экспериментально [450 — 454] «дополнительный» максимум нелинейных потерь. Величи-

на $h_{пор}$ может быть оценена по приближенной формуле

$$h_{пор} \cong \frac{\Delta H_k}{\omega_м} \sqrt{(\omega - \omega_{рез})^2 + \gamma^2 \Delta H_0^2}, \qquad (37,20)$$

являющейся следствием (37,18). Здесь ΔH_0 — полуширина кривой ферромагнитного резонансного поглощения для однородной прецессии, связанная с $\omega_{\tau 0}$ соотношением (4,18), а ΔH_k — полуширина резонансной кривой спиновых волн, связанная аналогичным соотношением с $\omega_{\tau k}$.

Если предположить, что ΔH_k близко к ΔH_0, то, как следует из (37,20), пороговое поле будет тем меньше, чем меньше ширина кривой ферромагнитного резонанса, т. е. чем меньше магнитные потери при низком уровне мощности. Это имеет место в действительности. Например, для иттриевого феррита со структурой граната с шириной резонансной кривой $2\Delta H_0$, порядка 1 *э* поле $h_{пор}$ оказывается порядка 10^{-2} *э*.

При малых H_0 минимум $h_{кр}$ достигается при больших величинах k, т. е. очень коротких спиновых волнах, где рассмотренная выше теория Сула должна быть справедлива. В области же больших H_0, т. е. именно там, где лежит абсолютный минимум $h_{кр}$, условием минимума является $k = 0$. При этом, как уже отмечалось выше, разложение (37,2), а следовательно, и все дальнейшие вычисления, строго говоря, несправедливы.

В действительности в этом случае возникает нестабильность некоторых типов неоднородной прецессии ферритового образца (§ 6). По-видимому, главную роль играет при этом, так же как и для статического режима ферритового усилителя (§ 34), нестабильное возрастание амплитуд пар магнитостатических типов, частоты и индексы которых удовлетворяют условиям (34,40) и (34,41). Несмотря на это, рассмотренная выше теория [456], использующая во всех случаях плоские спиновые волны, дает удовлетворительное совпадение с экспериментом как для значений H_0, при которых имеет место минимум $h_{кр}$, так и для минимальных значений $h_{кр}$ — пороговых амплитуд поля. Это свидетельствует, по-видимому, о том, что в данном случае нестабильными становятся неоднородные типы прецессии с большими индексами, для которых граничные условия не играют особенно существенной роли.

Из выражения (37,18) видно, что особенно малые значения порогового поля могут получиться, если наряду с условием (37,19) выполняется и условие

$$\omega = \omega_{рез}, \qquad (37,21)$$

т. е. если происходит совпадение дополнительного резонанса с основным. В этом случае волновое число для спиновых волн с наименьшим $h_{кр}$ оказывается обычно равным нулю [461], и из (37,18) следует:

$$h_{пор} = \frac{\Delta H_k \Delta H_0}{2\pi M_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{N_z}{4\pi}\frac{\omega_M}{\omega}\right) \sin 2\theta_k}. \qquad (37,22)$$

Для того чтобы этот случай мог осуществиться, частота $\frac{\omega_{рез}}{2}$ должна лежать внутри спектра спиновых волн при $k = 0$. Условием этого, как легко показать с учетом (5,10) и (6,15), является (для сфероида, ось которого совпадает с осью z):

$$\frac{N_\perp}{4\pi}\omega_M > \frac{\omega}{2}, \qquad (37,23)$$

где $N_\perp$ — размагничивающий фактор в направлении, перпендикулярном оси z. Условие (37,23) выполняется при достаточно низких частотах. Если это условие будет едва только выполнено, то θ_k будет очень мало и $h_{пор}$ согласно (37,22) будет велико. При дальнейшем снижении частоты величины θ_k будут расти, и значения $h_{пор}$ будут резко уменьшаться, достигая весьма малых величин, порядка

$$h_{пор} \cong \frac{\Delta H_k \Delta H_0}{4\pi M_0}. \qquad (37,24)$$

Высказанные соображения хорошо подтверждаются экспериментально [461]. Для сферы из монокристалла иттриевого феррита со структурой граната при частоте 3200 *Мгц*, точно соответствующей условию (37,23), начинается резкий спад $h_{пор}$, и при частоте 2200 *Мгц* $h_{пор}$ составляет 0,002 *э*. Заметим, что оценка по формуле (37,24)

дает в этом случае несколько бо́льшее значение, порядка 0,01 *э*, если для $2\Delta H_0$ принять экспериментальное значение, полученное на этой частоте (10,3 *э*), и предположить, что $\Delta H_k = \Delta H_0$.

По-видимому, либо величина $2\Delta H_k$ в этом случае значительно меньше, чем $2\Delta H_0$—порядка 0,5 *э*, либо нестабильность имеет место не для спиновых волн (или типов прецессии с большими индексами) с собственными частотами $\frac{\omega}{2}$, как предполагалось при выводе (37,22), а для какой-либо пары типов прецессии с собственными частотами, удовлетворяющими условию (34,40).

Если при $\omega = \omega_{рез}$ условие (37,19) не выполняется, то первый член в правой части уравнения (37,12) уже не дает медленного изменения b_k^0 со временем и может быть отброшен. Нестабильность будет определяться в этом случае квадратичным членом связи—вторым членом в (37,12). Если теперь искать решение в виде

$$b_k^0 = v_k e^{i(\omega - \omega_k)t}, \tag{37,25}$$

то для v_k получится уравнение

$$\left[\frac{d}{dt} + (\omega - \omega_k)^2 - \xi_k^2 |a_0^0|^4\right] v_k = 0. \tag{37,26}$$

Отсюда аналогично предыдущему случаю может быть получено выражение для критического поля. Оно имеет минимум при одновременном выполнении условия

$$\omega = \omega_k \tag{37,27}$$

и условия (37,21). Угол θ_k при этом оказывается равным нулю, а волновое число k принимает большие значения, порядка 10^5 *см*$^{-1}$. Таким образом, при основном резонансе нестабильными являются спиновые волны с большими k, имеющие одинаковую частоту (вырожденные) с частотой однородной прецессии и распространяющиеся в направлении постоянного намагничивания. Для этих волн с собственной частотой $\omega_k = \omega$ и должно иметь место наиболее эффективное параметрическое возбуждение под действием квадратичного члена в (37,12), изменяющегося

во времени с частотой 2ω [442]. Минимальное значение $h_{кр}$ по порядку величины равно в этом случае

$$h_{пор} \cong \Delta H_0 \sqrt{\frac{2\Delta H_k}{4\pi M_0}}. \tag{37,28}$$

Формула (37,28) может быть использована для определения величин ΔH_k по результатам измерения $h_{пор}$. Такое определение было проведено Ле Кроу и Спенсером [467] для сфер из монокристаллов иттриевого феррита с различной обработкой поверхности (§ 5). Ширина резонансной кривой $2\Delta H_0$ при этом изменялась в пределах 0,43—5,5 *э*, величина $h_{пор}$—в пределах 0,03—0,4 *э*, а ΔH_k практически не зависела от обработки поверхности и составляла $2\Delta H_k = 0{,}1$ *э*. Независимость этой величины от состояния поверхности объясняется тем, что ΔH_k характеризует спиновые волны с длинами волн порядка 10^{-5} *см*, которые не могут эффективно взаимодействовать с полями, возникающими на поверхностных неоднородностях значительно бо́льших размеров.

§ 38. Стационарное состояние при полях больших, чем пороговое

Расчеты, рассмотренные в предыдущем параграфе, представляют собой первый этап теории, который заключается в нахождении тех пороговых значений переменного поля, с которых начинается нестабильность, т. е. возрастание амплитуд определенной группы спиновых волн или определенных типов прецессии. Расчет переходного режима, приводящего к установлению при переменном магнитном поле большем, чем критическое, некоторых новых стационарных состояний, чрезвычайно сложен. Однако окончательное стационарное состояние удается найти сравнительно просто для случая $\omega = 2\omega_k$, который соответствует дополнительному максимуму поглощения.

Задача отыскания этого стационарного состояния заключается в совместном решении уравнения для амплитуды однородных колебаний a_0^0 (в которое входят амплитуды спиновых волн b_k^0 и b_{-k}^0) и уравнений для этих амплитуд (в которые входит a_0^0). В этих последних уравнениях мы должны теперь, поскольку мы рассматриваем

вынужденные колебания, учесть и возбуждение спиновых волн тепловыми колебаниями решетки. Однако детальный механизм этого возбуждения оказывается несущественным, достаточно ввести эффективное поле, зависящее от координат и времени по хаотическому закону.

Если решить с учетом этого поля уравнение для b_k^0 и подставить решение в уравнение для a_0^0, то, как показал Сул [456], это уравнение примет следующий вид:

$$|a_0^0|^2 = \frac{\gamma^2 h^2}{(\omega - \omega_{\text{рез}})^2 + (\omega_{r0} + \omega_{r\text{д}})^2} = F(|a_0^0|), \qquad (38,1)$$

где $\omega_{r\text{д}}$ представляет собой функцию от a_0^0. Эта функция

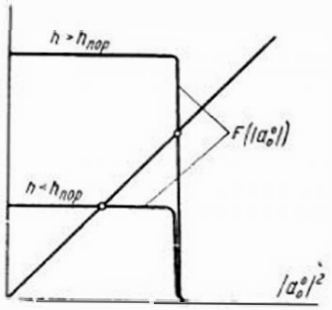


Рис. 92. Графическое решение уравнения (38,1) для стационарной амплитуды прецессии [456].

имеет очень малую величину при $|a_0^0| < |a_0^0|_{\text{пор}}$ и резко возрастает по мере приближения $|a_0^0|$ к $|a_0^0|_{\text{пор}}$, обращаясь в бесконечность при $|a_0^0| = |a_0^0|_{\text{пор}}$ [456]. Из уравнения (38,1) видно, что $\omega_{r\text{д}}$ характеризует дополнительные потери энергии однородной прецессии, вызываемые влиянием спиновых волн. При амплитудах однородной прецессии значительно меньших, чем пороговая, эти потери невелики, однако по мере приближения $|a_0^0|$ к пороговому значению они быстро возрастают.

Стационарное значение $|a_0^0|$ определится пересечением кривых, соответствующих левой и правой частям уравнения (38,1), рассматриваемым как функции $|a_0^0|$. Графики этих функций приведены на рис. 92. Функции $F(|a_0^0|)$,

пропорциональные h, построены при этом для $h < h_{\text{пор}}$ и $h > h_{\text{пор}}$.

Из рисунка видно, что при $h < h_{\text{пор}}$ пересечение происходит на почти горизонтальном участке кривой $F(|a_0^0|)$. Получающиеся при этом значения $|a_0^0|$ с большой степенью точности пропорциональны h, как это и должно быть согласно линейной теории. При $h > h_{\text{пор}}$ пересечение происходит на почти вертикальном участке $F(|a_0^0|)$. Ясно, что при любых значениях h амплитуда однородной переменной намагниченности $|a_0^0|$ не превышает величины $|a_0^0|_{\text{пор}}$, лишь приближаясь к ней по мере роста h. Отсюда, между прочим, и следует, что в действительности играет роль нестабильность лишь той группы спиновых волн, для которых при данных M_0 и H_0 раньше всего, т. е. при меньших h, наступает порог нестабильности.

Теперь уже не представляет труда получить зависимость суммарной частоты релаксации

$$\omega_{r\,\text{эф}} = \omega_{r0} + \omega_{r\text{д}}$$

от уровня мощности

$$\zeta = \frac{h^2}{h_{\text{пор}}^2}.$$

При $h = h_{\text{пор}}$ еще справедлива линейная теория, т. е. $\omega_{r\text{д}} = 0$ и

$$|a_0^0|_{\text{пор}}^2 = \frac{\gamma^2 h_{\text{пор}}^2}{(\omega - \omega_{\text{рез}})^2 + \omega_{r0}^2}. \qquad (38,2)$$

При $h > h_{\text{пор}}$ можно с достаточной точностью считать, что $|a_0^0| = |a_0^0|_{\text{пор}}$. Тогда, приравнивая правые части (38,1) и (38,2), получим:

$$\omega_{r\,\text{эф}} = \sqrt{\omega_{r0}^2 \zeta + (\omega - \omega_{\text{рез}})^2 (\zeta - 1)}. \qquad (38,3)$$

График этой зависимости приведен на рис. 93.

Зная $\omega_{r\,\text{эф}}$, легко получить и зависимость от ζ компонентов эффективного тензора восприимчивости. Ввиду того, что вся рассмотренная теория развита для случая круговой поляризации переменного поля, целесообразно получить зависимость от ζ компонентов диагонального тензора восприимчивости для полей с круговой поляризацией (§ 4). Наибольший интерес представляет, конечно,

восприимчивость $\chi_{\text{п}} = \chi + \chi_{\text{а}}$ для поля с правой поляризацией, которая изменяется по резонансному закону. Используя выражения (38,1), (38,2) и (38,3), получим, в частности:

$$\frac{\chi''_{\text{п}}}{\chi''_{\text{п}\,0}} = \frac{1}{\zeta\omega_{r\,0}} \sqrt{\omega^2_{r\,0}\zeta + (\omega - \omega_{\text{рез}})^2 (\zeta - 1)}. \qquad (38,4)$$

График этой зависимости также приведен на рис. 93.

Результаты эксперимента [456] хорошо соответствуют формуле (38,4) при небольших ζ—на возрастающем участке

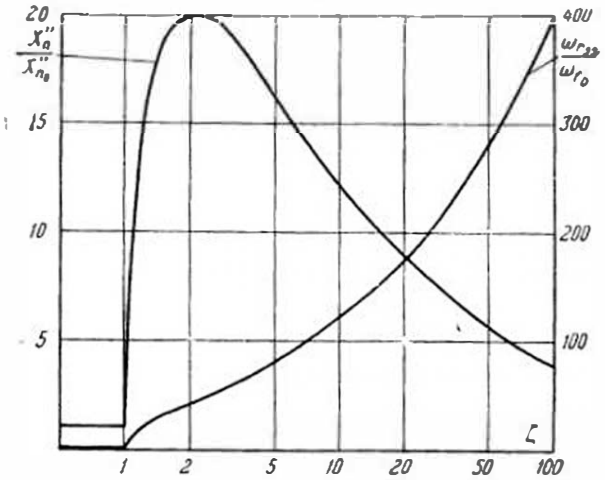


Рис. 93. Зависимости суммарной частоты релаксации $\omega_{r\,\text{эф}}$ и эффективной восприимчивости $\chi''_{\text{п}}$ от уровня мощности [456].

кривой $\frac{\chi''_{\text{п}}}{\chi''_{\text{п}\,0}}(\zeta)$. При больших уровнях мощности — на спадающем участке этой кривой измеренные потери превышают теоретические. Причиной этого расхождения может явиться нестабильность других групп спиновых волн или неоднородных типов прецессии. Источником ее служит связь этих волн уже не с однородной прецессией (амплитуда которой практически не возрастает за порогом), а с рассмотренной выше группой волн, ответственных за первоначальный рост потерь. Амплитуды этих волн непрерывно возрастают по мере увеличения h при $h > h_{\text{пор}}$, пока при некоторой их амплитуде не достигается порог нестабильности другой группы спиновых волн.

В случае $\omega = \omega_k$, который соответствует насыщению основного резонанса, в первом приближении $\chi''_{\text{рез}}$ должно монотонно спадать с ростом h при $h > h_{\text{пор}}$. В действительности на этот спад накладываются небольшие колебания [469], которые можно, по-видимому, объяснить нестабильностью определенных групп спиновых волн.

ЛИТЕРАТУРА

I. Руководства, монографии по общим вопросам

1. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, 1949—1953.
2. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, ГОНТИ, 1938.
3. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Гостехиздат, 1957.
4. А. Ф. Иоффе, Физика полупроводников, Изд-во АН СССР, 1957.
5. С. В. Вонсовский, Я. С. Шур, Ферромагнетизм, Гостехиздат, 1948.
6. С. В. Вонсовский, Современное учение о магнетизме, Гостехиздат, 1952.
7. Я. Г. Дорфман, Магнитные свойства и строение вещества, Гостехиздат, 1955.
8. В. К. Аркадьев, Электромагнитные процессы в металлах, ч. 2, Госэнергоиздат, 1936.
9. К. М. Поливанов, Ферромагнетики, Госэнергоиздат, 1957.
10. Р. Беккер, Теория электричества, т. 2, Электронная теория, Гостехиздат, 1941.
11. Я. И. Френкель, Электродинамика, т. 2, ОНТИ, 1935.
12. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
13. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд-во ВКАС, Л., 1949.
14. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, Изд-во «Сов. радио», 1952.
15. Н. В. Белов, Структурная кристаллография, Изд-во АН СССР, 1951.
16. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, 1959.
17. А. А. Харкевич, Нелинейные и параметрические явления в радиотехнике, Гостехиздат, 1956.

II. Монографии, сборники и обзоры по ферритам

18. Я. Сноек, Исследования в области новых ферромагнитных материалов, перевод под ред. С. В. Вонсовского, ИЛ, 1949.
19. B. J. Smith, H. P. J. Wijn, Физические свойства ферритов. Статья в сб. Advances in Electronics and Electron Physics, т. 6, New York, 1954.
20. A. Fearweather, F. F. Roberts, A. J. E. Welch, Ферриты. Статья в сб. Reports on Progress in Physics, т. 15, London, 1952.
21. C. D. Owens, Обзор свойств и применений ферритов при частотах ниже с.в.ч., Proc. IRE 44, № 10, 1234 (1956).
22. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях, Сб. под ред. С. В. Вонсовского, ИЛ, 1952.
23. Г. А. Смоленский, А. Г. Гуревич, Ферриты, Изд. ЛДНТП, Л., 1957.
24. Г. А. Смоленский, А. Г. Гуревич, Ферромагнитные полупроводники. Статья в сб. Полупроводники в науке и технике, т. 2, под ред. А. Ф. Иоффе, Изд-во АН СССР, 1958.
25. А. Д. Фокс, С. Е. Миллер, М. Т. Вейс, Свойства ферритов и их применение в диапазоне с.в.ч., Изд-во «Сов. радио», 1956.
26. Некоторые применения ферритов в антенно-волноводной технике, Сб. сокращ. перев. под ред. А. Л. Микаэляна, Изд-во «Сов. радио», 1958.

III. Свойства ферритов в постоянных полях [1])

а) Теория ферромагнетизма ферритов

27. L. Néel, Магнитные свойства ферритов, ферримагнетизм и антиферромагнетизм, Ann. de Phys. 3, № 3—4, 137 (1948).
28. С. В. Вонсовский, Е. Н. Агафонова, К теории ферромагнитных полупроводников. Статья в сб., посвящ. 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, Изд-во АН СССР, 1950.
29. L. Néel, Теория ферримагнетизма и ее опытное подтверждение, J. de phys. et rad. 14, № 2, 64 (1953).
30. С. В. Вонсовский, Некоторые вопросы квантовомеханической теории ферромагнитных ферритов и антиферромагнетиков. I. Критический обзор существующих теорий, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 3, 312 (1954).
31. С. В. Вонсовский, Ю. М. Сендов, Квантовомеханическая теория ферромагнитных ферритов, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 3, 319 (1954).
32. К. Б. Власов, Б. Х. Иммухамедов, Ферромагнетизм веществ типа ферритов и антиферромагнетизм, ЖЭТФ 27, № 1, 75 (1954).

[1]) Во всех последующих разделах работы располагаются в хронологическом порядке.

33. L. Néel, К интерпретации магнитных свойств ферритов редких земель, Compt. rend. Acad. Sci. 239, № 1, 8 (1954).
34. С. В. Тябликов, О расчете намагниченности ферритов в зависимости от температуры и поля, Физ. металлов и металловед. 3, № 1, 3 (1956).
35. J. H. Van Vleck, Основы теории ферро- и ферримагнетизма, Proc. IRE 44, № 10, 1248 (1956).
36. Е. И. Кондорский, А. С. Пахомов, Т. Шиклош, Теория спонтанной намагниченности ферритов, Радиотехн. и электрон. 2, № 3, 334 (1957).
37. Ю. П. Ирхин, Е. А. Туров, К многоэлектронной теории полупроводников, II, Ферромагнитные полупроводники, Физ. металлов и металловед. 4, № 1, 9 (1957).
38. С. В. Тябликов, Основное состояние и спектр элементарных возбуждений изотропного феррита, Физ. металлов и металловед. 8, № 1, 152 (1959).

б) Структура и статические магнитные свойства

39. S. Hilpert, Зависимость магнитных свойств ферритов и окислов железа от состава и структуры, Ber. deutsch. chem. Gesellsch. 42, № 7, 2248 (1909).
40. Г. А. Смоленский, Ферриты двухвалентных металлов, ДАН СССР, 78, № 5, 931 (1951).
41. Г. А. Смоленский, Неметаллические ферромагнетики—ферриты, Изв. АН СССР, сер. физ., 16, № 6, 728 (1952).
42. Я. Г. Дорфман, О ферромагнитных и антиферромагнитных полупроводниках как проблеме физики твердого тела, Изв. АН СССР, сер. физ., 16, № 4, 412 (1952).
43. L. M. Corliss, J. M. Hastings, F. M. Brockman, Изучение магниевого феррита методом дифракции нейтронов, Phys. Rev. 90, № 6, 1013 (1953).
44. Е. В. Гортер, Намагниченность насыщения и кристаллохимия ферримагнитных окислов, УФН 57, № 2, 279; № 3, 435 (1955).
45. G. H. Jonker, H. P. J. Wijn, P. B. Brown, Ферроксилана-гексагональное оксидное соединение железа для очень высоких частот, Phil. Techn. Rundschau 18, № 9, 249 (1956/57).
46. S. Geller, M. A. Gilleo, Кристаллическая структура и ферримагнетизм иттриевого феррита со структурой граната $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$, J. Phys. Chem. of Solids 3, № 1/2, 30 (1957).
47. M. A. Gilleo, S. Geller, Замещение железа в ферримагнитном иттриевом феррите со структурой граната, J. Appl. Phys. 29, № 3, 380 (1958).
48. R. Pauthenet, Спонтанная намагниченность некоторых ферритов со структурой граната, а также таких ферритов с замещением алюминием, J. Appl. Phys. 29, № 3, 253 (1958).

в) Электрические свойства

49. E. J. Verwey, P. W. Haayman, F. C. Romeijn, Физические свойства и распределение катионов в оксидах со структурой шпинели, II. Электронная проводимость, J. Chem. Phys. 15, № 4, 181 (1947).
50. А. П. Комар, В. В. Клюшин, Зависимость электросопротивления ферритов от температуры, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 3, 400 (1954).
51. L. G. Van Uitert, Диэлектрические свойства и проводимость ферритов, Proc. IRE 44, № 10, 1294 (1956).
52. J. E. Suchet, Низкочастотная дисперсия ϱ и ε в ферритах, Proc. IRE 45, № 3, 360 (1957).
53. L. G. Van Uitert, F. W. Swanekamp, Сопротивление и плотность поликристаллического иттриевого феррита со структурой граната, J. Appl. Phys. 28, № 12, 1513 (1957).
54. E. E. Anderson, Некоторые электрические и магнитные свойства гранатов, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 299 S (1959).
55. J. Peters, R. J. Standley, Диэлектрические свойства магний-марганцевого феррита, Proc. Phys. Soc. 71, № 1, 131 (1958).
56. К. П. Белов, А. А. Попова, Е. В. Талалаева, Электрические и гальваномагнитные свойства монокристаллов феррита марганца, Кристаллография 3, № 6, 733 (1958).

г) Технологии

57. D. L. Fresh, Методы приготовления и кристаллохимия ферритов, Proc. IRE 44, № 10, 1303 (1956).
58. J. W. Nielsen, E. F. Dearborn, Выращивание монокристаллов магнитных ферритов со структурой граната, J. Phys. Chem. of Solids 5, № 3, 202 (1958).
59. W. P. Wolf, G. P. Rodrigue, Изготовление поликристаллических ферримагнитных ферритов со структурой граната для диапазона с.в.ч., J. Appl. Phys. 29, № 1, 105 (1958).
60. А. А. Попова, Получение монокристаллов ферритов методом Вернейля, ДАН СССР 121, № 3, 453 (1958).
61. L. G. Van Uitert, F. W. Swanekamp, S. E. Haszko, Ширина резонансной кривой в поликристаллическом иттриевом феррите со структурой граната, J. Appl. Phys. 30, № 3, 363 (1959).
62. R. Holmquist, F. Bradley, Керамическая технология приготовления иттриевого феррита со структурой граната, Ceram. Age 73, № 6, 42 (1959).
63. W. L. Bond, Изготовление малых сфер, Rev. Sci. Inst. 22, № 5, 344 (1951).
64. W. L. Bond, Изготовление сфер из кристаллов, Rev. Sci. Instr. 25, № 4, 401 (1954).
65. Э. Шандор, П. Гадо, Изготовление маленьких ферритовых шариков, Кристаллография 1, № 6, 729 (1956).

IV. Магнитные свойства ферритов на с.в.ч.

а) Обзоры и общие вопросы

66. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, К теории дисперсии магнитной проницаемости в ферромагнитных телах, Phys. Zs. der. S.U. 8, № 2, 153 (1935).
67. C. Kittel, Ферромагнитный резонанс, J. de phys. et rad. 12, № 3, 291 (1951). (Перевод см. [22].)
68. J. H. Van Vleck, Ферромагнитный резонанс, Physica 17, № 3—4, 234 (1951). (Перевод см. [22].)
69. K. H. Reich, Теория ферромагнитного резонанса и результаты его экспериментального исследования, Zs. angew. Phys. 6, № 7, 326 (1954).
70. N. Bloembergen, Магнитный резонанс в ферритах, Proc. IRE 44, № 10, 1259 (1956).
71. G. T. Rado, К вопросу об электромагнитных характеристиках ферромагнитной среды—тензорыпроницаемости и уравнение спиновых волн, Trans. IRE AP-4, № 3, 512 (1956).
72. B. S. Gourary, Дисперсионные соотношения для тензорной среды и их применение к ферритам, J. Appl. Phys. 29, № 3, 283 (1957).
73. А. Г. Гуревич, Ферромагнитные полупроводники в полях сверхвысоких частот, Изв. АН СССР, сер. физ., 23, № 3, 361 (1959).

б) Квазиклассическая теория ферромагнитного резонанса. Учет влияния формы и анизотропии

74. C. Kittel, К теории ферромагнитного резонансного поглощения, Phys. Rev., 73 № 2, 155 (1948). (Перевод см. [22].)
75. D. Polder, К теории ферромагнитного резонанса, Phil. Mag. 40, № 300, 99 (1949). (Перевод см. [22].)
76. J. R. Macdonald, Ферромагнитный резонанс и внутреннее поле в ферромагнитных материалах, Proc. Phys. Soc. A 64, № 383 A, 968 (1951). (Перевод см. [22].)
77. R. K. Wangsness, Магнитный резонанс для произвольных полей, Phys. Rev. 98, № 4, 927 (1955).
78. J. Smit, H. G. Beljers, Ферромагнитное резонансное поглощение в кристалле $BaFe_{12}O_{19}$ с большой анизотропией, Philips Research Rep. 10, № 2, 113 (1955).
79. E. G. Spencer, L. A. Ault, R. C. Le Craw, Внутренний тензор проницаемости ферритовых цилиндров, сфер и дисков, Proc. IRE 44, № 10, 1311 (1956).
80. A. D. Berk, Зависимость ширины линии ферромагнитного резонанса от формы образца, J. Appl. Phys. 28, № 2, 190 (1957).
81. J. O. Artman, Условия резонанса в анизотропном монокристалле феррита, Proc. IRE 44, № 10, 1284 (1956); см. также Phys. Rev. 105. № 1, 62 (1957).

82. J. O. Artman, Влияние размеров на свойства ферритовых стержней, дисков и сфер в диапазоне с. в. ч., J. Appl. Phys. 28, № 1, 92 (1957).
83. Я. А. Моносов, Электромагнитные волны с большой амплитудой в феррите при переменном подмагничивании, Радиотехн. и электрон. 2, № 8, 951 (1957).
84. H. Seidel, H. Boyet, Форма полдеровского тензора для кубического монокристалла феррита с малой энергией анизотропии, J. Appl. Phys. 28, № 4, 452 (1957).
85. A. M. Clogston, Расширение линий магнитного резонанса в неоднородном поле [1]), J. Appl. Phys. 29, № 3, 334 (1958).
86. Г. В. Скроцкий, Л. В. Курбатов, К теории анизотропии ширины линии ферромагнитного резонансного поглощения, ЖЭТФ 35, № 1, 216 (1958).
87. H. B. Callen, Динамическое уравнение ферромагнетика, J. Phys. Chem. Solids, 4, № 4, 256 (1958).
88. R. A. Hurd, Магнитные поля ферритового эллипсоида, Canad. J. Phys. 36, № 8, 1072 (1958).
89. J. E. Mercereau, g-фактор при ферромагнитном резонансе с точностью до членов, пропорциональных $(kR_0)^2$. J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 184 S (1959).
90. J. I. Masters, R. W. Roberts, Измерение ферромагнитной релаксации модуляционным методом, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 179 S (1959).
91. C. Kittel, Механизм, объясняющий аномальные пики магнитной кристаллографической анизотропии в ферромагнитных кристаллах, Phys. Rev. Lett. 3, № 4, 169 (1959).

в) Квантовая теория ферромагнитного резонанса [2])

92. Я. Г. Дорфман, Некоторые замечания к пониманию механизма магнитных явлений, Zs. f. Phys. 17, 98 (1923).
93. J. M. Luttinger, C. Kittel, Замечания к квантовой теории ферромагнитного резонанса, Helv. Phys. Acta 21, № 6, 480 (1948). (Перевод см. [22].)
94. C. Kittel, О магнетомеханическом факторе и факторе спектроскопического расщепления ферромагнитных веществ, Phys. Rev. 76, № 6, 743 (1949). (Перевод см. [22].)
95. C. Kittel, C. Herring, Влияние обменного взаимодействия на ферромагнитное высокочастотное резонансное поглощение, Phys. Rev. 77, № 5, 725 (1950). (Перевод см. [22].)
96. J. H. Van Vleck, К теории ферромагнитного резонансного поглощения, Phys. Rev. 78, № 3, 266 (1950). (Перевод см. [22].)
97. S. Geschwind, A. M. Clogston, Влияние дипольных сил на сужение резонансных линий, расширенных в неоднородном поле. Phys. Rev. 108, № 1, 49 (1957).

---

[1]) Этот вопрос рассмотрен также в [97].
[2]) См. также [75].

г) Процессы релаксации[1])

98. Я. И. Френкель, К теории релаксационных потерь, связанных с магнитным резонансом в твердых телах, J. Phys. USSR 9, № 4, 299 (1945).
99. А. И. Ахиезер, Теория релаксационных процессов в ферромагнетиках при низких температурах, J. Phys. USSR 10, № 3, 217 (1946).
100. F. Keffer, Спин-спиновая релаксация при ферромагнитном резонансе, Phys. Rev. 88, № 3, 686 (1952).
101. P. W. Anderson, Концепция спин-решеточной релаксации в ферромагнитных материалах, Phys. Rev. 88, № 5, 1214 (1952).
102. Е. А. Туров, С. В. Вонсовский, О ширине линий ферромагнитного резонансного поглощения, ЖЭТФ 24, № 4, 501 (1953).
103. T. Kasuya, Релаксационные процессы при ферромагнитном резонансном поглощении, Progr. Theor. Phys. 12, № 6, 802 (1954).
104. J. K. Galt, W. A. Jager, F. R. Merritt, Температурная зависимость ширины линии ферромагнитного резонанса в Fe-Ni феррите. Новый механизм потерь, Phys. Rev. 93, № 5, 1119 (1954).
105. E. A. Abrahams, Релаксационные процессы в ферромагнетиках. Статья в сб. Advances in Electronics and Electron Phys., т. 6, New York, 1954.
106. A. M. Clogston, Релаксационные явления в ферритах, Bell. System. Techn. J. 34, № 4, 739 (1955).
107. A. M. Clogston, H. Suhl, L. R. Walker, P. W. Anderson, Ширина кривой ферромагнитного резонанса в непроводящих материалах, J. Phys. Chem. of Solids 1, № 3, 129 (1956).
108. R. L. White, Ширина кривой ферромагнитного резонанса и g-фактор ферритов, Phys. Rev. Lett. 2, № 11, 465 (1959).
109. М. И. Каганов, В. М. Цукерник, К феноменологической теории кинетических процессов в ферромагнитных диэлектриках. I. Релаксация в газе спиновых волн, ЖЭТФ, 34, № 6, 1610 (1958). II. Взаимодействие спиновых волн с фононами, ЖЭТФ 36, № 1, 224 (1959).
110. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, К теории релаксационных процессов в ферродиэлектриках при низких температурах, ЖЭТФ 36, № 1, 216 (1959).
111. М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Нерезонансное поглощение энергии переменного магнитного поля ферромагнитным диэлектриком, ЖЭТФ 37, № 3, 823 (1959).
112. В. Г. Барьяхтар, К теории релаксации магнитного момента в ферродиэлектриках, ЖЭТФ 37, № 3, 690 (1959).

[1]) См. также [87].

д) Экспериментальное исследование ферромагнитного резонанса в монокристаллах ферритов[1])

113. W. A. Yager, J. K. Galt, F. R. Merritt, E. A. Wood, Ферромагнитный резонанс в никелевом феррите, Phys. Rev. 80, № 4, 744 (1950). (Перевод см. [22].)
114. L. R. Bickford, Ферромагнитное резонансное поглощение в монокристаллах магнетита, Phys. Rev. 78, № 4, 449 (1950). (Перевод см. [22].)
115. D. W. Healy, Зависимость ферромагнитного резонанса в никелевом феррите от температуры, Phys. Rev. 86, № 6, 1009 (1952).
116. J. K. Galt, W. A. Yager, F. R. Merritt, Ферромагнитный резонанс в двух никелево-железных ферритах, Phys. Rev. 99, № 4, 1203 (1955).
117. J. F. Dillon, S. Geschwind, V. Jaccarino, Ферримагнитный резонанс в монокристаллах марганцевого феррита, Phys. Rev. 100, № 2, 750 (1955).
118. P. E. Tannenwald, Ферромагнитный резонанс в монокристаллах марганцевого феррита, Phys. Rev. 100, № 6, 1713 (1955).
119. H. Suhl, Ферромагнитный резонанс в никелевом феррите в диапазоне 1—2 *кМгц*, Phys. Rev. 97, № 2, 555 (1955).
120. P. E. Tannenwald, M. H. Seavy, Анизотропия марганцевого феррита с добавкой кобальта, Proc. IRE 44, № 10, 1343 (1956).
121. J. F. Dillon, Ферримагнитный резонанс в иттриевом феррите со структурой граната, Phys. Rev. 105, № 2, 759 (1957).
122. R. C. Le Craw, E. G. Spencer, C. S. Porter, Ширина резонансной кривой в монокристаллах иттриевого феррита со структурой граната, Phys. Rev. 110, № 6, 1311 (1958).
123. J. F. Dillon, Ферримагнитный резонанс в иттриевом феррите со структурой граната при гелиевых температурах, Phys. Rev. 111, № 6, 1476 (1958).
124. J. E. Dillon, J. W. Nielson, Влияние редкоземельных примесей на ферромагнитный резонанс в иттриевом феррите со структурой граната, Phys Rev. Lett. 3, № 1, 30 (1959).
125. E. G. Spencer, R. C. Le Craw, A. M. Clogston, Низкотемпературный максимум ширины резонансной кривой в иттриевом феррите со структурой граната, Phys. Rev. Lett. 3, № 1, 32 (1959).
126. H. S. Belson, C. J. Kriessman, Распределение ионов и ферримагнитный резонанс в магниевом феррите, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 170 S (1959).
127. H. S. Belson, C. J. Kriessman, Резонанс в гексагональных ферримагнитных монокристаллах на с. в. ч., J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 175 S (1959).

[1]) См. также [139, 144, 176, 185].

128. А. Г. Гуревич, Н. Е. Гублер, Ферромагнитный резонанс в монокристаллах иттриевого феррита, ФТТ 1, № 12, 1856 (1959).

е) Неоднородные типы прецессии и спиновые волны

129. C. Herring, C. Kittel, К теории спиновых волн в ферромагнитной среде, Phys. Rev. 81, № 5, 869 (1951).
130. R. L. White, I. H. Solt, Расщепление ферромагнитного резонанса в ферритовых сферах, Phys. Rev. 104, № 1, 56 (1956).
131. J. E. Mercereau, R. P. Feynman, Физические условия ферромагнитного резонанса, Phys. Rev. 104, № 1, 63 (1956).
132. L. R. Walker, Магнитостатические типы прецессии при ферромагнитном резонансе, Phys. Rev. 105, № 2, 390 (1957).
133 L. R. Walker, Резонансные типы прецессии ферромагнитного сферонда, J. Appl. Phys. 29, № 3, 318 (1958).
134. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках и ферроакустический резонанс, ЖЭТФ 35, № 1, 228 (1958).
135. C. Kittel, Взаимодействие спиновых волн и ультразвуковых волн в ферромагнитных кристаллах, Phys. Rev. 110, № 4, 836 (1958).
136. М. А. Гинцбург, Обменные эффекты при ферромагнитном резонансе, ЖЭТФ 35, № 4, 1047 (1958).
137. C. Kittel, Возбуждение спиновых волн в ферромагнетике однородным полем, Phys. Rev. 110, № 6, 1295 (1958).
138. M. H. Seavey, P. E. Tannenwald, Прямое наблюдение резонанса спиновых волн, Phys. Rev. Lett. 1, № 5, 168 (1958).
139. J. F. Dillon, Магнитостатические типы прецессии в ферромагнитных сферах, Phys. Rev. 112, № 1, 59 (1958).
140. В. Н. Лазукин, Некоторые особенности мультиплетного ферромагнитного резонанса в ферритах, ЖЭТФ 36, № 3, 682 (1959).
141. P. C. Fletcher, R. O. Bell, Типы процессии в ферримагнитных сферах, J. Appl. Phys. 30, № 5, 687 (1959).
142 P. C. Fletcher, I. H. Solt, R. O. Bell, Идентификация магнитостатических типов в ферримагнитных сферах, Phys. Rev. 114, № 3, 739 (1959).
143. P. C. Fletcher, I. H. Solt, Связь магнитостатических типов, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 181 S (1959).
144. R. L. White, Наблюдение ширины кривой при ферромагнитном резонансе, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 182 S (1959).

ж) Ферромагнитный резонанс в поликристаллических ферритах [1])

145. W. H. Hewitt, Резонансное поглощение на сантиметровых волнах в ферромагнитных полупроводниках, Phys. Rev. 73, № 9, 1118 (1948). (Перевод см. [22].)
146. C. Guilland, W. A. Yager, F. R. Merritt, C. Kittel, Ферромагнитный резонанс в марганцевом феррите и теория ферритов, Phys. Rev. 79, № 1, 181 (1950). (Перевод см. [22].)
147. W. A. Yager, F. R. Merritt, C. Guilland, Ферромагнитный резонанс в различных ферритах, Phys. Rev. 81, № 3, 477 (1951). (Перевод см. [22].)
148. T. Okamura, Y. Torizuka, Y. Kojima, g-фактор ферритов, Phys. Rev. 88, № 6, 1425 (1952).
149. Е. Н. Кондорский, Н. А. Смольков, Ферромагнитный резонанс никель-цинковых ферритов, ДАН СССР, 93, № 2, 237 (1953).
150. P. A. Miles, Ферромагнитный резонанс в ферритах, Nature 174, № 4221, 177 (1954).
151. H. Suhl, L. G. Van Uitert, J. L. Davis, Ферромагнитный резонанс в Mg-Mn-Al феррите в диапазоне 160—1900 *Мгц*, J. Appl. Phys. 26, № 9, 1180 (1955).
152. M. T. Weiss, P. W. Anderson, Ферромагнитный резонанс в ферроксдюре, Phys. Rev. 98, № 4, 925 (1955).
153. K. J. Standley, K. W. H. Stevens, Учет анизотропии при ферромагнитном резонансе, Proc. Phys. Soc. B 69, № 442 B, 993 (1956).
154. M. H. Sirvetz, J. H. Saunders, Резонанс в поликристаллических никель-кобальтовых ферритах, Phys. Rev. 102, № 2, 366 (1956).
155. J. E. Pippin, C. L. Hogan, Измерения резонанса в Ni-Co феррите в зависимости от температуры, а также в Ni-феррит-алюминате, Trans. IRE MTT-6, № 1, 77 (1958).
156. G. P. Rodrigue, J. E. Pippin, W. P. Wolf, C. L. Hogan, Ферримагнитный резонанс в некоторых поликристаллических редкоземельных ферритах со структурой граната, Trans. IRE MTT-6, № 1, 83 (1958).
157. Н. Н. Крупко, Ферромагнитный резонанс в некоторых ферритах при низких температурах, ЖТФ 28, № 8, 1703 (1958).
158. C. A. Morrison, N. Karayianis, Ферромагнитный резонанс в одноосных поликристаллических материалах, J. Appl. Phys. 29, № 3, 339 (1958).
159. E. Schlömann, J. R. Zeender, Ферромагнитный резонанс в поликристаллическом никелевом феррит-алюминате, J. Appl. Phys. 29, № 3, 341 (1958).

[1]) См. также раздел IV л).

160. E. Schlömann, Спиноволновой анал из ферромагнитного резонанса в поликристаллических ферритах, J. Phys. Chem. of Solids 6, № 2/3, 242 (1958).
161. E. Schlömann, Ферромагнитный резонанс в поликристаллических ферритах с большой анизотропией. I. Общая теория и применение к кубическим материалам с отрицательной константой анизотропии, J. Phys. Chem. of Solids 6, № 2/3, 257 (1958).
162. S. E. Harrison, H. S. Belson, C. J. Kriessman, Источник расширения кривой ферромагнитного резонанса в марганцевых ферритах с избытком марганца. J. Appl. Phys. 29, № 3, 337 (1958).
163. C. R. Buffler, Ферромагнитный резонанс вблизи верхней границы спектра спиновых волн, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 172 S (1959).
164. E. Schlömann, R. V. Jones, Ферромагнитный резонанс в поликристаллических ферритах с гексагональной структурой, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 177 S (1959).
165. К. П. Белов, М. А. Зайцева, Л. А. Малевская, Магнитные и резонансные свойства ферритов—гранатов иттрия при замещении ионов Fe^{3+} ионами Cr^{3+} и Al^{3+}, ЖЭТФ 36, № 5, 1602 (1959).

з) Особенности ферромагнитного резонанса в нескомпенсированных антиферромагнетиках

166. J. Kaplan, C. Kittel, Обменная частота электронно-спинового резонанса в ферритах, J. Chem. Phys. 21, № 4, 760 (1953).
167. J. S. Van Wieringen, Аномальное поведение *g*-фактора Li-Fe-Cr ферритов со структурой шпинели в зависимости от температуры, Phys. Rev. 90, № 3, 488 (1953).
168. R. K. Wangsness, Влияние подрешеток на магнитный резонанс, Phys. Rev. 91, № 5, 1085 (1953).
169. R. K. Wangsness, Тензор восприимчивости и фарадеево вращение в ферримагнетиках, Phys. Rev. 95, № 2, 339 (1954).
170. T. R. McGuire, Резонансное поглощение микроволн в никелевом феррит-алюминате, Phys. Rev. 93, № 4, 682 (1954).
171. R. K. Wangsness, Возможность наблюдения обменного резонанса вблизи точки компенсации в ферримагнетике, Phys. Rev. 97, № 3, 831 (1955).
172. T. R. McGuire, Наблюдение обменного резонанса вблизи точки компенсации в ферримагнетике, Phys. Rev. 97, № 3, 831 (1955).
173. A. Eskowitz, R. K. Wangsness, Эффективное гиромагнитное отношение в треугольных ферримагнитных состояниях, Phys. Rev. 107, № 2, 379 (1957).
174. E. Schlömann, Теория инфракрасных резонансов в ферримагнетиках, J. Phys. Chem. of Solids 2, № 3, 214 (1957).

175. J. Polevé, Магнитный резонанс в ферритах с температурой компенсации, J. Appl. Phys. 29, № 3, 259 (1958).
176. R. V. Jones, G. P. Rodrigue, W. P. Wolf, Ферримагнитный резонанс в монокристаллах редкоземельных материалов со структурой граната, J. Appl. Phys. 29, № 3, 434 (1958).
177. B. A. Calhoun, W. V. Smith, J. Overmeyer, Ферримагнитный резонанс в гадолиниевом феррите со структурой граната, J. Appl. Phys. 29, № 3, 427 (1958).
178. R. K. Wangsness, Эффективные параметры ферримагнитного резонанса, Phys. Rev. 111, № 3, 813 (1958).
179. R. K. Wangsness, Эффективные параметры ферримагнитного резонанса при релаксационном члене в форме Джильберта, Phys. Rev. 113, № 3, 771 (1959).
180. S. Geschwind, L. R. Walker, Обменный резонанс в гадолиниевом феррите со структурой граната вблизи температуры магнитной компенсации, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 163 S (1959).

и) Магнитные свойства в постоянных полях, недостаточных для насыщения[1])

181. T. Nagamiya, Попытка интерпретации наблюдений Бикфорда при исследовании резонансного поглощения в магнетите ниже точки превращения, Progr. Theor. Phys. 10, № 1, 72 (1953).
182. D. Polder, J. Smit, Резонансные явления в ферритах, Rev. Mod. Phys. 25, № 1, 89 (1953).
183. G. T. Rado, Теория тензорной магнитной проницаемости и эффекта Фарадея в ненасыщенном ферромагнитном материале, Phys. Rev. 89, №2, 529 (1953).
184. F. Brown, C. L. Gravel, Прямое наблюдение процессов вращения в ферритах, Phys. Rev. 98, № 2, 442 (1955).
185. P. E. Tannenwald, Расщепление резонанса в кобальтовом феррите, Phys. Rev. 99, № 2, 463 (1955).
186. R. C. Le Craw, E. G. Spencer, Тензорные проницаемости ненасыщенных ферритов, Convent. Rec. IRE, ч. 5, 66 (1956).
187. R. C. Le Craw, E. G. Spencer, Влияние доменной структуры при аномальном ферромагнитном резонансе в ферритах, J. Appl. Phys. 28, № 4, 399 (1957).

к) «Естественный» ферромагнитный резонанс. Магнитные спектры ферритов[2])

188. A. J. E. Welch, P. F. Nicks, A. Fairweather, F. F. Roberts, Естественный ферромагнитный резонанс, Phys. Rev. 77, № 3, 403 (1950). (Перевод см. [22].)

[1]) См. также [71, 78, 81]

[2]) В этот раздел включены работы, в которых исследуются ферриты в диапазоне с. в. ч., а также работы, на которые имеются ссылки.

189. G. T. Rado, R. W. Wright, W. H. Emerson, Ферромагнетизм при очень высоких частотах. III. Два механизма дисперсии в феррите, Phys. Rev. 80, № 2,273 (1950). (Перевод см. [22].)
190. R. Becker, Динамика граничного слоя и проницаемость при высоких частотах, J. de phys. et rad. 12, № 3, 332 (1951). (Перевод см. [22].)
191. W. Döring, Инерция границ между доменами. Zs. f. Naturforsch. 3a, № 7, 373 (1948). (Перевод см. [22].)
192. G. T. Rado, R. W. Wright, W. H. Emerson, A. Terris, Ферромагнетизм при очень высоких частотах. IV. Температурная зависимость магнитных спектров ферритов, Phys. Rev. 88, № 4, 909 (1952).
193. T. Okamura, T. Fujimura, M. Date, Диэлектрическая и магнитная проницаемости различных ферритов при сверхвысоких частотах, Phys. Rev. 85, № 6, 1041 (1952); 88, № 6, 1435 (1952).
194. G. T. Rado, Магнитные спектры ферритов. Rev. Mod. Phys. 25, № 1, 81 (1953).
195. P. A. Miles, W. B. Westphal, A. Hippel, Диэлектрическая спектроскопия ферромагнитных полупроводников, Rev. Mod. Phys. 29, № 3, 279 (1957).
196. S. E. Harrison, C. J. Kriesman, S. R. Pollack, Магнитные спектры марганцевого феррита, Phys. Rev. 110, № 4, 844 (1958).
197. Т. М. Перекалина, А. А. Аркочеевский, Естественный ферромагнитный резонанс в никель-магниевом и кобальтовом ферритах, ЖТФ 28, № 3, 511 (1958).
198. R. D. Harrington, A. L. Rasmussen, Магнитные спектры иттриевого феррита со структурой граната в размагниченном состоянии и состоянии остаточной намагниченности. Proc. IRE 47, № 1, 98 (1959).
199. D. J. Epstein, B. Franckiewicz, Зависящее от температуры запаздывание в поликристаллическом иттриевом феррите со структурой граната, J. Appl. Phys. Suppl. до 30, № 4, 295 S (1959).

л) Сверхвысокочастотные ферриты [1])

200 E. Albers-Schoenberg, Ферриты для с. в. ч. и счетно-решающих устройств, J. Appl. Phys. 25. № 2, 152 (1954).
201. L. G. Van Uitert, J. P. Schafer, C. L. Hogan, Ферриты с малыми потерями для применения при 4000 *Мгц*, J. Appl. Phys. 25, № 7, 925 (1954).
202. L. G. Van Uitert, Ферриты с малым магнитным насыщением для с.в.ч. аппаратуры, J. Appl. Phys. 26, № 11, 1289(1955).
203. В. А. Фабрикова, В. Д. Кудрявцев, З. Гущина, Никель-медные ферриты с узкой резонансной кривой, Радиотехн. и электрон. 2, № 10, 1299 (1957).

[1]) Отнесение работ к этому разделу является, конечно, условным.

204. L. G. Van Uitert, Mg-Cu-Mn-Al ферриты для применения на сверхвысоких частотах, J. Appl. Phys. 28, № 3, 320 (1957).
205. B. Josephson, P. E. Ljung, Сверхвысокочастотные ферриты, Ericsson Techn. 14, № 1, 39 (1958).
206. В. А. Фабрикова, З. Гущина, В. П. Васильева, Магниевые феррито-хромиты для применения в нижнем диапазоне с.в.ч., Радиотехн. и электрон. 4, № 3, 536 (1959).
207. M. H. Sirvetz, J. E. Zneimer, Свойства поликристаллических редкоземельных ферритов со структурой граната в диапазоне с. в. ч., J. Appl. Phys 29, № 3, 431 (1958).
208. F. K. du Pré, D. J. De Bitetto, F. G. Brockman, Магнитные материалы для коротковолновой части диапазона с в.ч. (50—90 *кМгц*), J. Appl. Phys. 29, № 7, 1127 (1958).
209. B. Ancker-Johnson, J. J. Rowley, Смешанные ферриты со структурой граната для невзаимных устройств в длинноволновой части диапазона с. в. ч., Proc. IRE 46, № 7, 1421 (1958).
210. А. Г. Гуревич, Н. Е. Гублер, А. Н. Сафантьевский, Сверхвысокочастотные свойства ферритов иттрия и лютеция со структурой типа граната, ФТТ 1, № 12, 1841 (1959).

V. Электродинамика систем, содержащих ферриты

а) Обзоры и общие вопросы электродинамики сред с тензорными параметрами [1])

211. В. К. Аркадьев, Теория электромагнитного поля в ферромагнитном металле, ЖРФХО, ч. физ., 45, № 6, 312 (1913).
212. М. Н. Свешникова, Теорема взаимности в электродинамике и радиотехнике, ЖРФХО, ч. физ., 59, № 5—6, 453 (1927).
213. T. Teichman, E. P. Wigner, Разложения электромагнитного поля в резонаторе без потерь, возбуждаемом через отверстия, J. Appl. Phys. 24, № 3, 262 (1953).
214. A. G. Redfield, Электродинамическая теорема возмущений с применением к невзаимным системам, J. Appl. Phys. 25, № 8, 1021 (1954).
215. M. H. Cohen, Теорема взаимности для анизотропных сред, Proc. IRE 43, № 1, 119 (1955).
216. Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротронных средах, ИЛ, 1955.
217. П. С. Эпштейн, Теория распространения волн в гиромагнитной среде, УФН 65, № 2, 283 (1958).

[1]) В этот раздел включен ряд работ по электродинамике изотропных сред, на которые имеются ссылки.

218. M. L. Kales, Вопросы распространения волн в волноводах с намагниченными ферритами, Proc. IRE 44, № 10, 1403 (1956).
219. H. Seidel, Аномальное распространение волн в волноводе с ферритом, Proc. IRE 44, № 10, 1410 (1956).
220. H. Seidel, Характер типов волн в волноводе с гиромагнитной средой, Bell System Techn. J. 36, № 2, 409 (1957).
221. A. D. Berk, Вариационные принципы для электромагнитных резонаторов и волноводов, Trans. IRE AP-4, № 2, 104 (1956).
222. F. R. Morgenthaler, Поперечная трансформация импедансов в ферромагнитной среде, Proc. IRE 45, № 10, 1407 (1957).
223. В. В. Никольский, Гиротропное возмущение волновода, Радиотехн. и электрон. 2, № 2, 157 (1957).
224. В. В. Никольский, Расчет фазовых сдвигов гиротропных неоднородностей в волноводе методом возмущений. Радиотехн. и электрон. 2, № 7, 833 (1957).
225. А. Г. Гуревич, Внутреннее поле в эллипсоиде с тензорными параметрами, Радиотехн. и электрон. 2, № 7, 937(1957).
226. А. Г. Гуревич, Квадратичные соотношения для сред с тензорными параметрами, Радиотехн. и электрон. 2, № 8, 960 (1957).
227. L. R. Walker, Соотношения ортогональности для гиротропных волноводов, J. Appl. Phys. 28, № 3, 377 (1957).
228. R. L. Pease, Распространение поверхностных волн вдоль бесконечной заземленной ферритовой пластины, Trans. IRE AP-6, № 1, 13 (1958).
229. R. F. Harrington, A. T. Villeneuve, Соотношения взаимности для гиротропной среды, Trans. IRE, MTT-6, № 3, 308 (1958).
230. В. В. Никольский, Нахождение внутреннего поля в методе возмущений при помощи решения дифракционной задачи, Радиотехн. и электрон. 3, № 5, 690 (1958).
231. В. В. Никольский, Простейший случай дифракции плоской волны на гиротропном цилиндре, Радиотехн. и электрон. 3, № 6, 756 (1958).
232. В. В. Никольский, Вариационный принцип для неполощающей гиротропной неоднородности в волноводе, Радиотехн. и электрон. 3, № 9, 1207 (1958).
233. G. Tyras, Матрица магнитной проницаемости феррита, намагниченного в произвольном направлении, и ее собственные значения, Trans. IRE MTT-7, № 1, 176 (1959).
234. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Об ударных электромагнитных волнах в ферритах, ЖЭТФ 36, № 3, 957 (1959).

б) Распространение в продольно намагниченном феррите и в волноводе с такой средой

235. А. Л. Микаэлян, Магнитное вращение плоскости поляризации на сантиметровых волнах, УФН 51, № 2, 205 (1953).

236. H. Gamo, Фарадеево вращение в круглом волноводе, J. Phys. Soc. Japan 8, № 2, 176 (1953).
237. M. L. Kales, Типы волн в волноводах с ферритом, J. Appl. Phys. 24, № 5, 604 (1953).
238. A. A. Van Trier, Распространение электромагнитных волн в волноводах с анизотропными средами, Appl. Sci. Research B 3, № 4—5, 371 (1953).
239. К. М. Поливанов, Я. Н. Колли, М. Б. Хасина, Вращение плоскости поляризации сантиметровых волн ферритовой шайбой, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 3, 350 (1954).
240. М. А. Гинцбург, Гиротропный волновод, ДАН СССР, 95, № 3, 489 (1954).
241. М. А. Гинцбург, О распространении электромагнитных волн в гиротропном слое, ДАН СССР 95, № 4, 753 (1954).
242. C.H.B. Thompson, Необычные характеристики волновода, связанные с отрицательной кажущейся проницаемостью ферритов, Nature 175, 4469, 1135 (1955).
243. L. R. Walker, H. Suhl, Распространение в круглом волноводе, заполненном гиромагнитным материалом, Trans. IRE AP-4, № 3, 492 (1956).
244. A. A. Van Trier, Некоторые вопросы применения гиротропных сред на сверхвысоких частотах, Trans. IRE AP-4, № 3, 502 (1956).
245. Г. В. Скроцкий, В. Ф. Захарченко, К теории эффектов Фарадея и Керра на сверхвысоких частотах, Изв. АН СССР, сер. физ., 21, № 9, 1297 (1957).
246. Я. А. Моносов, Некоторые вопросы теории цилиндрического волновода с ферритовым стержнем, Радиотехн. и электрон. 2, № 4, 408 (1957).
247. Я. А. Моносов, Характеристики эффекта Фарадея в цилиядрическом волноводе с ферритовым стержнем, Радиотехн. и электрон. 2, № 5, 547 (1957).
248. H. Boyet, H. Seidel, Анализ невзаимных эффектов в N-проводной линии передачи с ферритом, Proc. IRE 45, № 4, 491 (1957).
249. J. E. Tompkins, Распределение энергии в волноводе, частично заполненном ферритом, J. Appl. Phys. 29, № 3, 399 (1958).
250. Е. С. Коваленко, Гиротропный эллиптический волновод, ДАН СССР 128, № 2, 276 (1959).

в) Распространение в волноводе с поперечно намагниченным ферритом

251. M. L. Kales, H. M. Chait, N. G. Sakiotis, Сверхвысокочастотное устройство, не удовлетворяющее принципу взаимности, J. Appl. Phys. 24, № 6, 816 (1953); 24, № 12, 1529 (1953
252. B. Lax, J. J. Button, L. M. Roth, Ферритовый фазовращатель на прямоугольном волноводе, J. Appl. Phys. 25, № 11, 1413 (1954).

253. А. Л. Микаэлян, Электромагнитные волны в прямоугольном волноводе, заполненном намагниченным ферритом, ДАН СССР 98, № 6, 941 (1954).
254. М. А. Гинцбург, О волнах в гиротропной среде, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 4, 444 (1954).
255. А. Л. Микаэлян, А. А. Пистолькорс, Электромагнитные волны в намагниченном феррите при наличии проводящих плоскостей. Радиотехника 10, № 3, 14 (1955).
256. А. Л. Микаэлян, Магнитооптические явления в прямоугольном волноводе, содержащем ферритовую пластину, Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 3. 139 (1955).
257. B. Lax, K. J. Button, Теория новых типов волн в прямоугольном волноводе с ферритом, J. Appl. Phys. 26, № 9, 1184 (1955).
258. B. Lax, K. J. Button, Новые типы волн в волноводах с ферритом и их применения, J. Appl. Phys. 26, № 9, 1186 (1955).
259. P. H. Vartanian, E. T. Jaynes, Распространение в прямоугольном волноводе, заполненном поперечно намагниченным ферритом, Trans. IRE MTT-4, № 3, 140 (1956).
260. K. J. Button, B. Lax, Теория ферритов в прямоугольном волноводе, Trans. IRE AP-4, № 3, 531 (1956).
261. H. Seidel, Ферритовые пластины в волноводе с поперечно-электрическими типами волн, J. Appl. Phys. 28, № 2, 218 (1957).
262. А. В. Воронова, А. Г. Гуревич, Расчет постоянных распространения в прямоугольном волноводе с ферритовыми пластинами, Радиотехн. и электрон. 2, № 4, 401 (1957).
263. А. Г. Гуревич, Н. А. Богомаз, Невзаимные фазовые сдвиги и коэффициент затухания в волноводе с ферритовой пластиной, Радиотехн. и электрон. 3, № 9, 1113 (1958).
264. W. J. Growe, Поведение волн *TE* в прямоугольном волноводе с ферритом в области ферромагнитного резонанса. J. Appl. Phys. 29, № 3, 397 (1958).
265. C. B. Sharpe, D. S. Heim, Граничная задача в прямоугольном волноводе с ферритом, Trans. IRE MTT-6, № 1, 42 (1958).
266. P. S. Epstein, A. D. Berk, Ферритовый стержень в прямоугольном волноводе, J. Appl. Phys. 27, № 11, 1328 (1956).
267. В. В. Никольский, Поперечный ферритовый стержень в прямоугольном волноводе, Радиотехн. и электрон. 3, № 6, 826 (1958).
268. K. J. Button, Теория невзаимных фазовых сдвигов, вызванных ферритом в коаксиальной линии с диэлектриком, J. Appl. Phys. 29, № 6, 998 (1958).
269. R. C. Fletcher, H. Seidel, Ограничения теории волновода с ферритом, основанной на использовании элементарных типов волн, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 147 S (1959).

270. А. Л. Микаэлян, А. К. Столяров, Поверхностные волны в ферритовых волноводах, Радиотехн. и электрон. 4, № 7, 1079 (1959).

г) Расчет резонаторов с ферритом. Методы измерения параметров намагниченных ферритов [1])

271. H. G. Beljers, Измерение гиромагнитного резонанса в ферритах с помощью резонаторов, Physica 14, № 10, 629 (1949).
272. N. Bloembergen, R. V. Pound, Радиационное затухание в опытах по ферромагнитному резонансу, Phys. Rev. 95, № 1, 8 (1954).
273. E. G. Spencer, R. C. Le Graw, Влияние стенок в сверхвысокочастотных измерениях с ферритовыми сферами, J. Appl. Phys. 26, № 2, 250 (1955).
274. E. G. Spencer, R. C. Le Graw, F. Reggia, Измерение электрической и магнитной проницаемостей ферритовых сфер на с. в. ч., Convent. Rec. IRE, ч. 8, 113 (1955).
275. E. G. Spencer, R. C. Le Graw, F. Reggia, Резонаторы с круговой поляризацией для измерения тензорной магнитной проницаемости, J. Appl. Phys. 26, № 3, 354 (1955).
276. A. D. Berk, B. A. Langyel, Магнитные поля в малых ферритовых образцах и с. в. ч. резонаторы с такими образцами, Proc. IRE 43, № 11, 1587 (1955).
277. В. В. Никольский, Измерение параметров ферритов на с. в. ч., Радиотехн. и электрон. 1, № 4, 447; № 5, 638 (1956).
278. В. Н. Васильев, Новый метод измерения параметров намагниченных ферритов на сантиметровых волнах, Радиотехн. и электрон. 1, № 11, 1444 (1956).
279. E. G. Spencer, R. C. Le Graw, L. A. Ault, Замечание к теории возмущений резонатора, J. Appl. Phys. 28, № 1, 130 (1957).
280. J. E. Tompkins, E. G. Spencer, Влияние запаздывания, вызванного размерами ферритового образца, на сдвиг частоты резонатора [2]), J. Appl. Phys. 28, № 9, 969 (1957).
281. W. Aulock, J. H. Rowon, Измерение диэлектрических и магнитных свойств магнитных материалов на с. в. ч., Bell System Techn. J. 36, № 2, 427 (1957).
282. L. A. Ault, E. G. Spencer, R. C. Le Graw, Резонатор с бегущей волной для измерения тензорной магнитной проницаемости ферритов, Convent. Rec. IRE, ч. 1, 282 (1957).
283. В. В. Никольский, Нахождение собственных значений и функций гиротропных систем методом последовательных приближений, Радиотехн. и электрон. 2, № 8, 1074 (1957).

[1]) В этот раздел включены работы по ферромагнитному резонансу, носящие методический характер.
[2]) См. также [82, 88, 89].

284. H. E. Bussey, L. A. Steinert, Точное решение для гиромагнитного образца и измерения ферритов, Trans. IRE MTT-6, № 1, 72 (1958).
285. А. Г. Гуревич, Резонатор с тензорной средой, Радиотехн. и электрон. 3, № 12, 1475 (1958).
286. H. Seidel, H. Boyet, Сдвиги частоты в резонаторах с продольно намагниченными малыми ферритовыми дисками, Bell System Techn. J. 37, № 3, 637 (1958).
287. H. G. Beljers, Определение гиромагнитного отношения и затухания при магнитном резонансе в ферритах, Philips Research Rep. 13, № 1, 10 (1958).
288. Д. Н. Маш, В. В. Никольский, Измерение комплексной диэлектрической проницаемости и тензора магнитной проницаемости ферритов в диапазоне миллиметровых волн, ЖТФ 29, № 9, 1070 (1959).

VI. Экспериментальное исследование полых систем с ферритами. Ферритовые устройства

а) Общие вопросы теории невзаимных устройств. Широкополосность. Проблема создания устройств дециметрового диапазона

289. R. H. Fox, Невзаимные ферритовые устройства для диапазона 500—3000 *Мгц*, J. Appl. Phys. 26, № 1, 128 (1955).
290. B. Lax, Добротность с. в. ч. ферритов на низких и высоких частотах, J. Appl. Phys. 26, № 7, 9?9 (1955).
291. M. B. Loss, Широкополосность ферритов, Convent. Rec. IRE, ч. 8, 109 (1955).
292. A. C. Macpherson, Измерение сверхвысокочастотных невзаимных четырехполюсников, Proc. IRE 43, № 8, 1017 (1955).
293. J. E. Pippin, Измерение матрицы рассеяния невзаимных с.в.ч. устройств, Proc. IRE 44, № 1, 110 (1956).
294. P. H. Vartanian, J. L. Melchor, W. P. Ayres, Расширение полосы ферритовых с.в.ч. вентилей, Convent. Rec. IRE, ч. 5, 79 (1959). (Сокращ. перев. см. [26].)
295. M. A. Treuhaft, Свойства циркулятора как четырехполюсника с точки зрения матриц рассеяния, Proc. IRE 44, № 10, 1394 (1956).
296. C. L. Hogan, Элементы невзаимных с. в. ч. устройств, Proc. IRE 44, № 10, 1345 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
297. G. S. Heller, Ферриты как элементы с. в. ч. систем, Proc. IRE 44, № 10, 1386 (1956).
298. B. Lax, Частотные характеристики и потери с. в. ч. ферритовых устройств, Proc. IRE 44, № 10, 1368 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
299. C. L. Hogan, Проблема низких частот при конструировании с. в. ч. гираторов и подобных им элементов, Trans. IRE AP-4, № 3, 495 (1956).

300. S. J. Mason, Топологический анализ линейных невзаимных цепей, Proc. IRE 45, № 6, 829 (1957).
301. B. Lax, Современное состояние проблемы использования ферритов и полупроводников на сверхвысоких частотах, Trans. IRE MTT-6, № 1, 5 (1958).
302. Ограничения при создании с. в. ч. ферритовых устройств (дискуссия), Trans. IRE MTT-6, № 1, 104 (1958).
303. M. A. Treuhaft, L. M. Silber, Использование тороидов из с. в. ч. ферритов для устранения постоянных магнитов и уменьшения мощности, необходимой для переключения. Proc. IRE 46, № 8, 1538 (1958).
304. J. L. Melchor, P. H. Vartanian, Температурные эффекты в с. в. ч. ферритовых устройствах, Trans. IRE MTT-7, № 1, 15 (1959).
305. B. A. Auld, Синтез симметричных волноводных циркуляторов, Trans. IRE MTT-7, № 2, 238 (1959).

б) Измерение поворота поляризации. Поляризационные устройства

306. F. F. Roberts, Ферромагнитный эффект Фарадея на сантиметровых волнах, J. de phys. et. rad. 12, № 3, 305 (1951).
307. C. L. Hogan, Ферромагнитный эффект Фарадея на с. в. ч. и его применении—сверхвысокочастотный гиратор, Bell System Techn. J. 31, № 1, 1 (1952); Rev. Mod. Phys. 25, № 1, 253 (1953). Перев. см. Вопр. радиолокац. техники, № 4, 37 (1953) и № 5, 3 (1954).
308. A. A. Van Trier, Измерение фарадеева вращения в волноводах, Appl. Sci. Research. B 3, № 2, 142 (1953).
309. Н. А. Смольков, Исследование эффекта Фарадея в ферритах на сантиметровых волнах, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 3, 378 (1954).
310. Н. Н. Попримеров, Вращение плоскости поляризации в парамагнетиках и ферритах, Изв. АН СССР, сер. физ., 18, № 3, 368 (1954).
311. H. G. Beljers, Эффект Фарадея для бегущих и стоячих волн в некоторых магнитных материалах, Philips Research Rep. 9, № 2, 131 (1954).
312. R. J. Duncan, L. Swern, Температурная зависимость с. в. ч. свойств ферритов в волноводах, Proc. IRE 43, № 5, 629 (1955).
313. C. Stewart, Применение и характеристики ферритов на 0,87 и 1,9 *см*, Trans. IRE MTT-3, № 1, 27 (1955).
314. J. L. Melchor, W. P. Ayres, P. H. Vartanian, Эффекты концентрации энергии в волноводе с ферритом, J. Appl. Phys. 27, № 1, 72 (1956).
315. Н. В. Карлов, А. Е. Саломонович, К вопросу о применении ферритов в радиоастрономической технике, Радиотехн. и электрон. 1, № 1, 120 (1956).
316. P. J. Allen, Турникетный циркуляр, Trans. IRE MTT-4, № 4, 223 (1956).

317. H. Scharfman, Три новых ферритовых фазовращателя, Proc. IRE 44, № 10, 1456 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
318. P. A. Rizzi, Ферритовый циркулятор большой мощности, Trans. IRE MTT-5, № 4, 230 (1957).
319. Д. И. Маш, Вращение плоскости поляризации в продольном магнитном поле (эффект Фарадея в диапазоне миллиметровых волн), ЖТФ 27, № 2, 360 (1957).
320. B. J. Dunkan, L. Swern, Влияние пулевой магнитной проницаемости феррита на волны с круговой поляризацией, Proc. IRE 45, № 5, 647 (1957).
321. R. F. Sullivan, R. C. Le Craw, Новый тип с. в. ч. ферритового выключателя, J. Appl. Phys. 26, № 10, 1282 (1955). (Сокращ. перев. см. [26].)
322. R. C. Le Craw, Магнитное импульсное управление ферритами с большими скоростями, J. Appl. Phys. 25, № 5, 678 (1954).
323. R. C. Le Craw, H. B. Bruns, Постоянная времени быстродействующих ферритовых переключателей, J. Appl. Phys. 26, № 1, 124 (1955).
324. C. S. Uebele, Быстродействующие ферритовые с. в. ч. переключатели, Convent. Rec. IRE, ч. 1, 227 (1957).
325. R. Cole, W. Hencyman, Малогабаритные ферритовые переключатели малой мощности, Electr. and Rad. Eng. 35, № 8, 286 (1958). Перевод см. Радиотехн. и электрон. за рубежом, № 1, 47 (1959).
326. В. А. Киселева, Е. П. Кондорский, Изучение температурных зависимостей некоторых свойств ферритов в диапазоне сантиметровых волн, ДАН СССР 119, № 5, 326 (1958).
327. E. H. Turner, Быстродействующий ферритовый переключатель для диапазона 70 *кМец*, Trans. IRE MTT-6, № 3, 300 (1958).
328. H. N. Chait, N. G. Sakiotis, Широкополосные ферритовые поляризационные устройства, использующие круглый волновод с четырьмя ребрами, Trans. IRE MTT-7, № 1, 38 (1959).
329. J. Gindsberg, Линейный фазовый или амплитудный модулятор сигнала с. в. ч., Convent. Rec. IRE, ч. 3, 79 (1959).

в) Двойное лучепреломление в волноводах с ферритом

330. M. T. Weiss, A. J. Fox, Магнитное двойное лучепреломление на сверхвысоких частотах, Phys. Rev. 88, № 1. 146 (1952).
331. J. C. Cacheris, С. в. ч. ферритовый модулятор с одной боковой полосой, Proc. IRE 42, № 8, 1242 (1954). (Сокращ. перев. см. [26].)
332. P. Loudetto, Исследование эффекта Коттона в диапазоне 9000 *Мец*, J. de phys. et rad. 16, № 12, 99 (1955).
333. R. Serkent, Эффект Коттона в диапазоне 3000 *Мец*, Cah. phys., № 62, 29 (1955).

334. J. C. Cacheris, H. A. Dropkin, Компактный с. в. ч. модулятор с одной боковой полосой, использующей ферриты, Trans. IRE MTT-4, № 3, 152 (1956).
335. N. Karayianis, J. C. Cacheris, Двойное лучепреломление в круглых волноводах с ферритами, Proc. IRE 44, № 10, 1414 (1956).
336. G. Kemanis, К эффекту Коттона—Мутона в ферритах, Proc. IRE 45, № 5, 687 (1957).
337. H. I. Glass, Короткая ферритовая полуволновая пластина для модулятора с одной боковой полосой, Trans. IRE MTT-7, № 2, 295 (1959).

г) Фазовые сдвиги в прямоугольном волноводе с ферритом

338. N. G. Sakiotis, H. N. Chait, Ферриты на сверхвысоких частотах, Proc. IRE 41, № 1, 87 (1953).
339. A. Clawin, Мощный ферритовый вентиль, Trans. IRE MTT-3, № 1, 38 (1955).
340. H. N. Chait, N. G. Sakiotis, Конструкции невзаимных фазовращателей, Convent. Rec. IRE, ч. 5, 58 (1956). (Сокращ. перев см. [26].)
341. F. Reggia, E. G. Spencer, Новый метод создания фазовых сдвигов с помощью ферритов для сканирования с. в. ч. антенн, Proc. IRE 45, № 11, 1510 (1957).
342. P. A. Rizzi, B. Gatlin, Ферритовые фазовращатели в прямоугольном волноводе с продольным магнитным полем, Proc. IRE 47, № 3, 446 (1959).
343. J. A. Weiss, Феноменологическая теория фазовращателя Реджиа—Спенсера, Proc. IRE 47, № 6, 1130 (1959).
344. А. П. Герм, Дифференциальный фазовый сдвиг в скрученном прямоугольном волноводе с аксиальным продольнонамагниченным ферритовым стержнем. Радиотехн. и электрон. 4, № 7, 1198 (1959).
345. F. Araujs, G. Krayer, S. Okwit, Циркуляторы 10 *см* и 20 *см* диапазонов с малыми потерями, Convent. Rec. IRE, ч. 3, 126 (1959).

д) Резонансное поглощение в волноводах с ферритом

346. H. N. Chait, Невзаимные с. в. ч. устройства, Convent. Rec. IRE, ч. 8, 82 (1954).
347. S. Sensiper, Резонансные потери в ферритах в диапазоне 9000 *Мец*, Proc. IRE 44, № 10, 1323 (1956).
348. B. J. Duncan, L. Swern, Зависимость ферримагнитного резонанса для ферритов в волноводе от температуры, J. Appl. Phys. 27, № 3, 209 (1956).
349. M. T. Weiss, Усовершенствованный резонансный вентиль на прямоугольном волноводе, Trans. IRE MTT-4, № 4, 240 (1956).
350. S. Hayasi, Добротность вентилей резонансного типа, Proc. IRE 45, № 10, 1418 (1957).

351. G. S. Heller, G. W. Catuna, Измерение характеристик ферритового вентиля при 1300 *Мгц*, Trans. IRE MTT-6, № 1, 97 (1958).
352. M. T. Weiss, F. A. Dunn, Резонансный вентиль для диапазона 5 *мм*, Trans. IRE MTT-6, № 3, 331 (1958).
353. В. Г. Калина, Ферритовые волноводные вентили с повышенным вентильным отношением, Электроника, № 9, 138 (1958).
354. E. O. Schulz-Dubois, G. J. Wheeler, M. H. Sirvetz, Разработка мощного резонансного вентиля 20 *см* диапазона, Trans. IRE MTT-6, № 4, 423 (1958).
355. B. J. Duncan, B. Vafiades, Конструкция мощного вентиля с полосой, равной полной полосе волновода, Trans. IRE MTT-6, № 4, 411 (1958).
356. E. N. Skomal, Широкополосный ферритовый вентиль для высоких значений средней мощности 10-*см* диапазона, Trans. IRE MTT-7, № 1, 174 (1959).
357. L. C. Kravitz, G. S. Heller, Резонансный вентиль для 70 *кМгц*, Proc. IRE 47, № 2, 331 (1959).

е) Ферритовые устройства со смещением поля

358. S. Weisbaum, H. Seidel, Вентиль со смещением поля, Bell System Techn. J. 35, № 4, 877 (1956).
359. P. H. Vartanian, J. L. Melchor, W. P. Ayres, Широкополосный ферритовый с. в. ч. вентиль, Trans. IRE MTT-4, № 1, 8 (1956).
360. R. F. Sullivan, R. C. Le Craw, Малогабаритный термостойкий вентиль, Convent. Rec. IRE, ч. 5, 36 (1956).
361. S. Weisbaum, H. Boyet, Ферритовый вентиль со смещением поля с двумя ферритовыми пластинами для диапазона 11 *кМгц*, Proc. IRE 44, № 4, 554 (1956).
362. S. Weisbaum, H. Boyet, Вентили со смещением поля для 4; 6; 11 и 24 *кМгц*, Trans. IRE MTT-5, № 3, 194 (1957).
363. А. К. Столяров, Волноводные системы, использующие эффект невзаимного искажения поля ферритом. Статьи в сб. [26].
364. Д. Н. Маш, Ферритовый вентиль для миллиметрового диапазона волн, использующий эффект смещения поля в волноводе, Радиотехн. и электрон. 3, № 7, 958 (1958).
365. K. J. Button, Теоретический анализ работы ферритового вентиля со смещением поля, Trans. IRE MTT-6, № 3, 303 (1958).

ж) Ферриты в двухпроводных линиях

366. F. Reggia, R. W. Beaty, Характеристики магнитного аттенюатора на с. в. ч., Proc. IRE 41, № 1, 93 (1953).
367. O. W. Fix, Вентиль на симметричной полосковой линии, Convent. Rec. IRE, ч. 5, 99 (1956).

368. B. Vafiades, B. J. Duncan, Коаксиальный ферритовый модулятор для 20-*см* диапазона, Convent. Rec. IRE, ч. 1, 235 (1957).
369. M. Sucher, H. J. Carlin, Коаксиальные невзаимные фазовращатели, J. Appl. Phys. 28, № 8, 921 (1957).
370. B. J. Duncan, L. Sworn, K. Tomiyasu, J. Hannwacker, Конструкция широкополосного ферритового коаксиального вентиля, Proc. IRE 45, № 4, 483 (1957). См. также Proc. IRE 46, № 2, 501 (1958).
371. F. R. Morgenthaler, D. L. Fye, С. в. ч. вентиль с иттриевым ферритом, Proc. IRE 45, № 11, 1551 (1957).
372. А. Л. Микаэлян, М. М. Коблова, Применение ферритов для создания коаксиальных вентильных систем, Радиотехника 13, № 4, 30 (1958).
373. D. Fleri, B. J. Duncan, Взаимные ферритовые устройства для линий с волнами *TEM*, Trans. IRE MTT-6, № 1, 91 (1958).
374. M. E. Brodwin, Распространение в полосковой линии, заполненной ферритом, Trans. IRE MTT-6, № 2, 150 (1958).
375. L. Freiberg, Коаксиальный вентиль, в котором использован иттриевый феррит со структурой граната, Trans. IRE MTT-6, № 4, 454 (1958).
376. B. J. Duncan, G. F. Horner, Коаксиальные вентили для частот 1000 *Мгц* и ниже, Proc. IRE 47, № 1, 103 (1959).
377. C. M. Johnson, Ферритовые фазовращатели для диапазона у. к. в., Trans. IRE MTT-7, № 1, 27 (1959).

з) Ферриты в спиральной линии

378. J. S. Cook, R. Kompfner, H. Suhl, Невзаимные ферритовые аттенюаторы для ламп с бегущей волной, Proc. IRE 42, № 7, 1188 (1954).
379. J. A. Rich, S. E. Webber, Ферритовые аттенюаторы для спиралей, Proc. IRE 43, № 1, 100 (1955). (Сокращ. перев. см. [26].)
380. B. N. Enander, Новый ферритовый вентиль, Proc. IRE 44, № 10, 1421 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
381. S. Sensiper, С. в. ч. ферритовый фазовращатель, Proc. IRE 45, № 3, 359 (1957). (Сокращ. перев. см. [26].)
382. A. H. Solomon, F. Sterzer, Миллимикросекундный ферритовый с. в. ч. модулятор, Proc. IRE 47, № 1, 98 (1959).
383. В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, Медленные электромагнитные волны в спиральных волноводах с гиротропной средой, ЖТФ 29, № 10, 1285 (1959).

и) Ферритовые элементы связи[1])

384. R. W. Damon, С. в. ч. направленный ответвитель с магнитным управлением, J. Appl. Phys. 26, № 10, 1281 (1955). (Сокращ. перев. см. [26].)

[1]) См. также [305].

385. A. D. Bork, E. Strumwasser, Ферритовые направленные ответвители, Proc. IRE 44, № 10, 1439 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
386. D. C. Stinson, Связь через отверстие, содержащее анизотропный феррит, Trans. IRE MTT-5, № 3, 184 (1957).
387. D. C. Stinson, Ферритовый направленный ответвитель с отверстиями, смещенными относительно центра, Trans. IRE MTT-6, № 3, 332 (1958).
388. D. C. Stinson, Измерение ширины резонансной кривой феррита в ответвителе с двумя пересекающимися волноводами, Trans. IRE MTT-6, № 4, 446 (1958).
389. H. N. Chait, T. R. Curry, Y-циркулятор, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 152 S (1959).
390. S. Yoshida, X-циркулятор, Proc. IRE 47, № 6, 1150 (1959).
391. R. W. De Grasse, Гиромагнитная связь с малыми потерями, осуществляемая с помощью монокристаллов ферритов со структурой граната, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 155 S (1959).

к) Ферритовые излучающие устройства

392. D. J. Angelakos, M. M. Korman, Излучение из отверстий, заполненных ферритом, Proc. IRE 44, № 10, 1463 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
393. F. Reggia, E. G. Spencer, R. D. Hatcher, J. E. Tompkins, Излучающая система с ферритовыми стержнями «феррода», Proc. IRE 45, № 3, 344 (1957). См. также Convent. Rec. IRE, ч. 1, 213 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
394. M. S. Wheeler, Немеханическое управление лучом путем рассеяния волны ферритом, Trans. IRE MTT-6, № 1, 38 (1958).
395. D. B. Medved, Электрическое сканирование с использованием линзы Люнеберга с ферритом в апертуре, Trans. IRE MTT-6, № 1, 101 (1958).
396. G. Tyras, G. Held, Излучение из прямоугольного волновода, заполненного ферритом, Trans. IRE MTT-6, № 3, 268 (1958).

л) Резонаторы и фильтры с ферритовой настройкой

397. J. C. Cacheris, G. Jones, L. Diehl, Магнитная настройка клистронных резонаторов, Proc. IRE 43, № 8, 1017 (1955).
398. C. E. Fay, Резонаторы с ферритовой настройкой, Proc. IRE 44, № 10, 1446 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)
399. C. E. Nelson, С. в. ч. резонаторы с ферритовой настройкой и новые неотражающие настраиваемые с. в. ч. фильтры, Proc. IRE 44, № 10, 1449 (1956). (Сокращ. перев. см. [26].)

400. G. R. Jones, G. R. Cacheris, C. A. Morrison, Магнитная настройка резонаторов и широкополосная частотная модуляция клистронов, Proc. IRE 44, № 10, 1431 (1956). (Сокращ. перев. см.[26]).
401. W. L. Whirry, C. E. Nelson, С. в. ч. фильтры с круговой поляризацией, содержащие ферриты, Trans. IRE MTT-6, № 1, 58 (1958).

VII. Нелинейные процессы в ферритах на с. в. ч.

а) Общие вопросы теории нелинейных колебаний. Неферритовые нелинейные устройства[1])

402. А. А. Андронов, М. А. Леонтович, О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами, ЖРФХО, ч. физ., 59, № 5—6, 429 (1927).
403. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, О параметрическом возбуждении электрических колебаний, ЖТФ 4, № 1, 5 (1934). (См. также Л. И. Мандельштам, Полн. собр. тр., т. II, Изд. АН СССР, 1947.)
404. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, К вопросу о параметрической регенерации, ИЭСТ, № 3, 1 (1935). (См. также Л. И. Мандельштам, Полн. собр. тр., т. II, Изд. АН СССР, 1947.)
405. М. А. Дивильковский, С. М. Рытов, К вопросу о самовозбуждении и резонансе в системе с периодически изменяющейся самоиндукцией, ЖТФ 6, № 3, 374 (1936).
406. В. А. Лазарев, Параметрическое возбуждение комбинационных колебаний, ЖТФ 7, № 6, 642 (1937).
407. В. В. Мигулин, Резонансные явления в системе с двумя степенями свободы, ЖТФ 7, № 6, 627 (1937).
408. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Применение молекулярных пучков для радиоспектроскопического изучения вращательных спектров молекул, ЖЭТФ 27, № 4, 431 (1954).
409. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, О возможных методах получения активных молекул для молекулярного генератора, ЖЭТФ 28, № 2, 249 (1955).
410. N. Bloembergen, Новый тип мазера, использующий свойства твердого тела, Phys. Rev. 104, № 2, 324 (1956).
411. J. M. Manley, H. E. Rowe, Некоторые общие свойства нелинейных элементов. I. Общие энергетические соотношения, Proc. IRE 44, № 7, 904 (1956).
412. P. W. Anderson, Реактивное поле и его использование в некоторых молекулярных усилителях, J. Appl. Phys. 28, № 9, 1049 (1957).
413. H. E. D. Scovil, Трехуровневый генератор и усилитель (мазер), Trans. IRE MTT-6, № 1, 29 (1958).

[1]) В этом разделе приведены только работы, на которые имеются ссылки.

414. T. J. Bridges, Параметрический усилитель с электронным пучком, Proc. IRE 46, № 2, 494 (1958).
415. A. Ashkin, Параметрическое усиление волн пространственного заряда, J. Appl. Phys. 29, № 12, 1646 (1958).
416. P. K. Tien, Параметрическое усиление и преобразование частоты в системах с бегущей волной, J. Appl. Phys. 29, № 9, 1347 (1958).
417. H. Heffner, K. Kotzebue, Экспериментальные характеристики параметрического усилителя с. в. ч. диапазона на полупроводниковом диоде, Proc. IRE 46, № 6, 1301 (1958). (Перев. см. Радиотехн. и электрон. за рубежом, № 1, 90 (1959).)
418. R. S. Engelbrecht, Малошумящий усилитель бегущей волны с нелинейной реактивностью, Proc. IRE 46, № 9, 1655 (1958).
419. W. E. Danielson, Низкий уровень шумов в парамотрических с. в. ч. усилителях, использующих свойства твердого тела, J. Appl. Phys. 30, № 1, 8 (1959).
420. R. W. Grasse, E. O. Shulz-Du Bois, H. E. D. Scovil, Трехуровневый мазер с бегущей волной, Bell System Techn. J. 38, № 2, 305 (1959).
421. J. Weber, Квантовые усилители (мазеры), Rev. Mod. Phys. 31, № 3, 681 (1959).

б) Детектирование, удвоение и преобразование частоты в ферритах

422. J. C. Simon, G. Broussaud, Детектирование с помощью ферритов, Compt. Rend. Acad. Sci. 238, № 24, 2294 (1954).
423. J. E. Pippin, Удвоение и преобразование частоты в ферритах, Proc. IRE 44, № 8, 1054 (1956).
424. W. P. Ayres, P. H. Vartanian, J. L. Melchor, Удвоение частоты в ферритах, J. Appl. Phys. 27, № 2, 188 (1956).
425. J. L. Melchor, W. P. Ayres, P. H. Vartanian, Удвоение частоты с 9 до 18 *кМгц* в ферритах, Proc. IRE 45, № 5, 643 (1957).
426. D. Jaffe, J. C. Cacheris, N. Karayianis, Ферритовый с. в. ч. детектор, Proc. IRE 46, № 3, 594 (1958).
427. E. N. Skomal, M. A. Medina, Исследование преобразования частоты в диапазоне с. в. ч. в намагниченных ферритах, J. Appl. Phys. 29, № 3, 423 (1958).
428. K. M. Poole, P. K. Tien, Ферромагнитный резонансный преобразователь частоты, Proc. IRE 46, № 7, 1387 (1958).
429. Г. В. Скроцкий, Ю. Н. Алимов, Ферромагнитный резонанс в поляризованном по кругу электромагнитном поле произвольной амплитуды, ЖЭТФ 35, № 12, 1481 (1958).
430. Г. В. Скроцкий, Ю. Н. Алимов, Влияние формы образца на ферромагнитный резонанс в сильном радиочастотном поле, ЖЭТФ 36, № 4, 1267 (1959).

431. В. А. Фабриков, Е. Г. Риттер, Нелинейные гиромагнитные свойства ферритов при низких уровнях с. в. ч. мощности, Изв. АН СССР, сер. физ., 23, № 3, 380 (1959).
432. W. P. Ayres, Экспериментальное исследование генерирования миллиметровых волн с помощью ферритов, Trans. IRE MTT-7, № 1, 62 (1959). (Перев. см. сб. Радиотехн. и электрон. за рубежом, № 4, 25 (1959).)
433. E. N. Skomal, M. A. Medina, Исследование многократного преобразования частоты в ферритах, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 161 S (1959).

в) Ферритовые генераторы и усилители

434. H. Suhl, Ферромагнитный усилитель с. в. ч., Phys. Rev. 106, № 2, 384 (1957).
435. M. T. Weiss, С. в. ч. генератор и усилитель, использующий ферриты, Phys. Rev. 107, № 1, 317 (1957); J. Appl. Phys. 29, № 3, 421 (1958).
436. H. Suhl, Теория ферромагнитного с. в. ч. усилителя, J. Appl. Phys. 28, № 11, 1225 (1957). (Перев. см. Вопр. радиолок. техн., № 3, 26 (1958).)
437. H. Suhl, Квантовый аналог ферромагнитного с. в. ч. усилителя, J. Phys. Chem. of Solids 4, № 4, 278 (1958).
438. C. L. Hogan, R. L. Jepsen, P. H. Vartanian, Новый тип ферромагнитного усилителя, J. Appl. Phys. 29, № 3, 422 (1958).
439. В. Н. Тычинский, Ферритовые генераторы и усилители, Электроника, № 3, 3 (1958).
440. P. K. Tien, H. Suhl, Ферромагнитный усилитель с бегущей волной, Proc. IRE 46, № 4, 709 (1958). (Перев. см. Вопр. радиолок. техн., № 5 (1958).)
441. В. А. Фабриков, Возможность усиления гиромагнитной средой мощности слабого модулирующего сигнала, Радиотехн. и электрон. 3, № 2, 190 (1958).
442. А. Л. Микаэлян, Проблема создания ферритовых усилителей на сверхвысоких частотах, Радиотехн. и электрон. 3, № 11, 1323 (1958).
443. W. L. Whirry, F. B. Wang. Фазовые зависимости в ферромагнитном с. в. ч. усилителе, Proc. IRE 46, № 9, 1657 (1958).
444. W. L. Whirry, F. B. Wang, Экспериментальное исследование модифицированного полустатического усилителя, J. Appl. Phys Suppl. to 30, № 4, 150 S (1959).
445. В. В. Никольский, К теории с. в. ч. усилителя на феррите, Радиотехн. и электрон. 4, № 4, 726 (1959).
446. R. D. Hann, T. A. Osial, Измерения усиления импульсного ферромагнитного с. в. ч. усилителя, Proc. IRE 47, № 4, 587 (1959).
447. А. Л. Микаэлян, Н. З. Шварц, О некоторых свойствах ферритового усилителя сантиметровых волн, Радиотехн. и электрон. 4, № 7, 1196 (1959).

448. В. П. Тычинский, К теории ферритового усилителя, Электроника, № 6, 9 (1959).
449. F. R. Morgenthaler, Излучение сверхвысокой частоты ферримагнитно связанными электронами в нестационарных магнитных полях, Trans. IRE MTT-7, № 1, 6 (1959).

г) Нестабильность и рост потерь в ферритах при высоких уровнях мощности

450. N. Bloembergen, R. W. Damon, Релаксационные явления при ферромагнитном резонансе, Phys. Rev. 85, № 4, 699 (1952).
451. R. W. Damon, Релаксационные эффекты при ферромагнитном резонансе, Rev. Mod. Phys. 25, № 1, 239 (1953).
452. N. Bloembergen, S. Wang, Релаксационные явления при пара- и ферромагнитном резонансе, Phys. Rev. 93, № 1, 72 (1954).
453. N. G. Sakiotis, H. N. Chait, M. L. Kales, Нелинейность ферритов на с. в. ч., Trans. IRE AP-4, № 2, 111 (1956).
454. A. Clavin, Нелинейность при распространении в ферритовой среде, Proc IRE 44, № 2, 259 (1956).
455. H. Suhl, Нелинейность ферритов при высоких уровнях мощности с. в. ч., Proc. IRE 44, № 10, 1240 (1956).
456. H. Suhl, Теория ферромагнитного резонанса при высоких мощностях сигнала, J. Phys. Chem of Solids 1, № 4, 209 (1957).
457. H. Suhl, Источник и использование нестабильностей при ферромагнитном резонансе, J. Appl. Phys. 29, № 3, 416 (1958).
458. R. F. Soohoo, Ограничение мощности с помощью ферритов, Convent. Rec. IRE, ч. 1, 36 (1958).
459. R. C. Le Craw, E. G. Spencer, C. S. Porter, Ферромагнитный резонанс и нелинейные эффекты в иттриевом феррите со структурой граната, J. Appl. Phys. 29, № 3, 326 (1958).
460. R. T. Ferrar, Время спин-решеточной релаксации в иттриевом феррите со структурой граната, J. Appl. Phys. 29, № 3, 425 (1958).
461. E. G. Spencer, R. C. Le Craw, C. S. Porter, Ферромагнитный резонанс в иттриевом феррите со структурой граната при низких частотах, J. Appl. Phys. 29, № 3, 429 (1958).
462. M. T. Weiss, Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, обусловленные нестабильностью при резонансе в ферритах, Phys. Rev. Lett. 1, № 7, 239 (1958); J. Appl. Phys. Suppl. to 30; № 4, 146 S (1959).
463. E. G. Spencer, R. C. Le Craw, Магнитоакустический резонанс в иттриевом феррите, Phys. Rev. Lett. 1, № 7, 241 (1958). J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 149 S (1959).
464. E. Stern, R. S. Mangiaracina, Явления, происходящие в феррите в волноводах при высоком уровне мощности, Trans. IRE MTT-7, № 1, 11 (1959). (Перевод см. Радиотехн. и электрон. за рубежом № 4, 31 (1959).)
465. G. S. Uebele, Характеристики ферритового с. в. ч. ограничителя, Trans. IRE MTT-7, № 1, 8 (1959).
466. E. N. Skomal, M. A. Medina, Ферромагнитный с. в. ч. ограничитель среднего уровня мощности, Proc. IRE 47, № 5, 1000 (1959).
467. R. C. Le Craw, E. G. Spencer, Не зависящая от состояния поверхности релаксация спиновых волн при ферромагнитном резонансе, J. Appl. Phys. Suppl. to 30, № 4, 185 S (1959).
468. R. L. Martin, Явления при высоком уровне мощности в ферритовых пластинах в 3 *см* диапазоне, J. Appl. Phys Suppl. to 30, № 4, 159 S (1959).
469. E. Schlöman, J. J. Green, Тонкая структура спада ферромагнитного резонансного поглощения при увеличении уровня мощности, Phys. Rev. Lett. 3, № 3, 129 (1959).

Гуревич Александр Григорьевич.
Ферриты на сверхвысоких частотах.

Редактор *Е. Л. Старокадомская.*
Техн. редактор *В. Н. Крючкова.*
Корректор *С. Н. Емельянова.*

Сдано в набор 2/IX 1959 г. Подписано к печати 9/III 1960 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 12.75. Условн. печ. л. 20.91. Уч.-изд. л. 20.40. Тираж 10 000 экз. Т-02781. Цена книги 11 р. 70 к. Заказ 1219.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный пер. 9

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
80	5 сн.	ферритов вторая константа	ферритов при не очень низких температурах вторая константа
92	5 сн.	кристалла тем, что для него выполняются условия: $\chi_{11}=\chi_{22}$ и $\chi_{12}=-\chi_{21}$ [1]).	кристалла с кубической решеткой, записанного в осях координат, совпадающих с осями [100] решетки, тем, что для него выполняется условие: $\chi_{11}=\chi_{22}$.
92	1 и 2 сн.	Исключить текст сноски.	
100	ф-ла (8,12)	$N_\perp\left(1+\frac{N_\perp}{N_z}\right)M_0$	$\left(N_z+\frac{N_\perp^2}{N_z}\right)M_0$
114	12 св.	Различными	Если $H_0<\left\|\frac{2K}{M_0}\right\|$, то различными
165	ф-ла (15,22)	$(E'_yE''_x+$	$(E'_yE''_x-$
175	1 сн.	$\boldsymbol{H}=\overleftrightarrow{s}\,\boldsymbol{H}_0$	$\boldsymbol{H}=\overleftrightarrow{s}\,\boldsymbol{H}_0$
187	ф-ла (19,8в)	$e^{i\Phi}$	$e^{j\Phi}$
202	10 св.	$D_{\text{макс}}$	$T_{\text{макс}}$
203	13 св.	$\mathcal{Э}$	$\mathcal{Э}_{\text{отр}}$
219	ф-ла (23,8)	$r_0\frac{\partial}{\partial r}\varphi+_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$	$r_0\frac{\partial}{\partial r}+\varphi_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}$
252	ф-ла (26,27)	$M\,(q\cos\varkappa h-$	$M\,(q\cos\varkappa h+$
255	ф-ла (26,31)	$\frac{\partial\beta''}{\partial\varepsilon'}\varepsilon''$	$\frac{\partial\beta'}{\partial\varepsilon'}\varepsilon''$
310	1 св.	это уравнение отличается	это уравнение (при отсутствии потерь) отличается
340	2 св.	P^ω	P_ω
367	ф-ла (37,17а)	$\frac{1}{Q_hQ_k^*}\Big]$.	$\Big]\frac{1}{Q_kQ_h^*}$