

ФИЗИКА В ЗАДАЧАХ

Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 160 с.

Данная книга занимает промежуточное положение между учебником и сборником задач по физике. На конкретных примерах показывается, как фундаментальные законы физики могут быть использованы при анализе физических явлений. Делается это в форме решения задач. Цель книги — научить читателя рассуждать, находить ответы на новые вопросы, относящиеся к известной ему области, довести его до глубокого понимания сути рассматриваемых явлений. На многочисленных примерах показывается, что при действительном понимании законов природы многие даже очень сложные задачи могут быть решены просто и строго. Каждая задача — это повод для серьезного и глубокого, пусть иногда и совсем краткого, разговора о физике. Этим книга отличается как от учебника физики, излагающего "теоретический материал, так и от задачника, в котором ограничиваются приведением формального решения,

Книга может быть рекомендована учащимся старших классов средних школ для самообразования и подготовки к конкурсным экзаменам. Книгу можно использовать в работе физических кружков. Она будет полезна для преподавателей физики, методистов и студентов, особенно педагогических институтов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Кинематика	7
Динамика	21
Статика	50
Молекулярная физика и термодинамика	65
Электростатика	86
Электрический ток	106
Оптика. Релятивистская и квантовая физика	133

Предисловие

Опыт преподавания на физическом факультете и в физико-математической школе-интернате Ленинградского университета привел авторов к выводу о необходимости создания учебного пособия по физике, занимающего промежуточное положение между классическим учебником и сборником задач. Основной целью учебника физики является достаточно полное и точное определение и разъяснение основных физических понятий и законов на основе опытных данных с примерами конкретных применений этих законов. В настоящее время существует несколько учебников для начального этапа изучения физики, более или менее удовлетворяющих этим требованиям. Наиболее удачным из них, по мнению авторов, является трехтомное пособие для средней школы «Физика» Б. Б. Буховцева, Ю. Л. Климонтовича и Г. Я. Мякишева (М., «Просвещение», 1973).

Судить о степени понимания физических законов можно по умению применять их для анализа конкретных физических явлений, т. е. для решения задач. Поэтому решение физических задач представляет собой необходимый и чрезвычайно важный этап при изучении физики. Существует несколько хороших сборников задач с подробными решениями, например «Задачи по физике» В. Г. Зубова и В. П. Шальнова (М., «Наука», 1972) и «Сборник задач по элементарной физике» Б. Б. Буховцева, В. Д. Кривченкова и др. (М., «Наука», 1966). Общей чертой всех имеющихся задачников является то, что в них приводятся готовые решения, т. е. указывается, какие физические законы и в какой последовательности следует применять для получения ответа на поставленные вопросы. Между тем весь опыт преподавания показывает, что наибольшую трудность для учащихся представляет вопрос «с чего начать?», т. е. не само использование физических законов, а именно выбор, какие законы и почему следует применять при анализе каждого конкретного явления. Это умение выбрать путь решения задачи, т. е. умение определить, какие именно физические законы описывают рассматриваемое явление, как раз и свидетельствует о глубоком и всестороннем понимании физики. Сколько раз авторам приходилось наблюдать, как ознакомление буквально с несколькими первыми строчками

приводимых в задачниках решений позволяет учащемуся более или менее уверенно довести решение до конца самостоятельно. Но даже и после этого значительная часть учащихся, как правило, не может объяснить, почему же применение именно данного физического закона приводит к поставленной цели. Преодолению этих трудностей и призвано помочь предлагаемое пособие.

Однако это не единственная цель, которую ставили перед собой авторы. По их глубокому убеждению, должна существовать и «обратная связь» между разбираемыми задачами и физическими законами. Каждая задача должна давать повод для серьезного и глубокого, пусть иногда и совсем краткого, разговора о сути физических явлений и законов. Изучая физику, учащиеся постигают различные физические законы, одни из которых относятся только к определенному кругу явлений, например механических, электрических, оптических, другие же являются фундаментальными, общими для всех физических явлений. Для глубокого понимания физики необходимо четкое осознание степени общности различных физических законов, границ их применимости, их места в общей физической картине мира.

Поставленные цели и определили название и структуру книги. Каждому разделу предпослано краткое введение, в котором формулируются основные физические законы. Эти введения не могут заменить учебника физики, их цель — только напомнить и разъяснить суть физических явлений, фигурирующих в разбираемых задачах данного раздела.

Основное содержание книги в задачах. Однако авторы не рассчитывают на то, что читатель будет пытаться самостоятельно решать все эти задачи. А если читатель даже решит какую-либо задачу сам, то авторы советуют все-таки прочесть решение: возможно, что читатель обнаружит при этом много интересного, ускользнувшего от него при самостоятельном решении, взглянет на разбираемое явление с несколько иной стороны. Но и простое чтение книги потребует временами от читателя некоторых усилий, уж во всяком случае читать ее следует с карандашом в руке, воспроизводя некоторые опущенные выкладки.

Книга невелика по объему. Разбираемый в ней материал не охватывает полностью даже обычной школьной программы. Авторы сознательно ограничили себя простейшими, но наиболее фундаментальными физическими явлениями и законами, которые служат основой для понимания бесконечно сложной картины физического мира.

Почему же для разговора о сути физических явлений выбрана форма задач? Физика — точная наука, физические законы обычно выражаются на языке математических уравнений. По словам известного физика Р. Фейнмана, математики или люди с математическим складом ума часто при изучении физики теряют физику из виду и впадают в заблуждение. Они говорят: «Физический закон — это уравнение; сами физики признают, что нет ничего, что бы не содер-

жалось в этом уравнении. Если я разберусь в нем математически, я разберусь и в физике». Но ничего из этого не выходит. Их постигает неудача от того, что настоящие физические ситуации реального мира так запутаны, что нужно обладать гораздо более широким пониманием уравнений. * Однако запутанность реальных физических ситуаций ни в коей мере не оправдывает «запутанности» мыслей. По мнению одного из величайших физиков современности Энрико Ферми, «в физике нет места для путанных мыслей, и физическая сущность действительно понимаемого вопроса может быть объяснена без помощи сложных формул». ** В умении объяснить сущность вопроса «на пальцах» и заключается истинное понимание уравнений, выражающих физические законы. Знаменитый физик П. Дирак писал: «Я считаю, что понял смысл уравнения, если в состоянии представить себе общий вид его решения, не решая его непосредственно. Значит, если у нас есть способ узнать, что случится в данных условиях, не решая уравнения непосредственно, мы «понимаем» уравнения в применении к этим условиям. Физическое понимание — это нечто неточное, неопределенное и абсолютно не математическое, но для физика оно совершенно необходимо». ***

Эти высказывания выдающихся физиков относятся к проблемам переднего края науки, однако все это, разумеется, справедливо и при изучении ее основ. По мнению авторов, наилучшей формой выработки физического понимания и является решение задач. При глубоком понимании многие даже очень сложные задачи могут быть решены просто и строго.

Степень глубины физического понимания характеризует также умение применять наиболее общие, фундаментальные законы к анализу конкретных явлений. Во многих задачах всех разделов книги показывается, как, например, применение закона сохранения энергии часто позволяет решить задачу проще, взглянуть на нее с более общих позиций и, что особенно важно, часто дает возможность найти ответы на некоторые вопросы, касающиеся тех явлений, для которых нам не известны описывающие их конкретные законы. Физик должен обладать умением подходить к задаче с разных точек зрения.

Подбор задач в книге в значительной степени отличается от традиционного для задачников по физике. Исключены задачи, ничего не добавляющие к пониманию сути явлений, служащие только для развития определенных навыков, например, стандартные задачи с невесомыми блоками и нерастяжимыми нитями в динамике, где, как правило, всегда ясно «с чего начать». Зато имеется ряд задач, дающих повод для разговора о явлениях, несколько выходящих за рамки традиционного школьного курса физики, но доступных для понимания на основе имеющихся у учащихся знаний. Например,

* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5. М., «Мир», 1966, с. 29.

** Бруно Пантеркорво. Энрико Ферми. М., «Знание», 1971, с. 27.

*** См. первую ссылку.

включены задачи о броуновском движении, о корпускулярно-волновом дуализме.

Особое внимание уделяется разумному использованию известных учащимся математических средств. В последнее время много говорят о недостаточности математического образования в средней школе. Однако, по мнению авторов, использование при изучении физики даже хорошо известных учащимся традиционных разделов математики, таких, как исследование квадратного трехчлена, тригонометрические преобразования, метод математической индукции, комплексные числа, является совершенно неудовлетворительным. Во многих задачах иллюстрируется, насколько эффективными могут быть эти методы при анализе физических явлений.

В подавляющем большинстве задач численные расчеты не используются. Исключение составляют те случаи, когда от величины физических параметров качественно зависит картина явления.

Значительная часть задач составлена авторами. Некоторые задачи заимствованы из имеющихся пособий, в частности, те, которые сопровождаются там ошибочными решениями. Как правило, такие ошибки допускаются в «тонких» местах, поэтому разбор этих «тонких» мест представляется особенно поучительным.

В пособии совершенно не используется метод анализа размерностей. Анализ размерностей является одним из мощнейших методов исследования физических явлений, и владение этим методом составляет неотъемлемую часть физического образования. Ферми часто утверждал, что действительно понимающие природу того или иного явления должны уметь получать основные законы из соображений размерности. Единственная причина, по которой авторы не включили в пособие задачи, иллюстрирующие этот метод, — наличие превосходной книги Г. Хантли «Анализ размерностей» (М., «Мир», 1970), которую настоятельно рекомендуем читателю.

Все излагаемые задачи использовались на уроках физики в физико-математической школе-интернате при Ленинградском государственном университете им. А. А. Жданова. Многие задачи предлагались на олимпиадах школьников г. Ленинграда и на семинарских занятиях со студентами на физическом факультете Ленинградского университета. Оказалось, что некоторые задачи представляют определенные трудности даже для студентов-физиков, несмотря на то, что для решения этих задач, строго говоря, не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы как по физике, так и по математике. Поэтому авторы надеются, что книга окажется полезной для учащихся старших классов средней школы, студентов вузов и техникумов и преподавателей.

Авторы выражают искреннюю благодарность Б. Б. Буховцеву и А. С. Трошину, прочитавшим книгу в рукописи, за ряд полезных советов, способствовавших улучшению книги.

Авторы далеки от мысли, что им удалось полностью выполнить намеченную программу, поэтому они заранее выражают искреннюю признательность всем читателям за критические замечания.

Кинематика

Кинематика изучает «геометрию» движения. Что мы под этим понимаем? «Геометрия» движения — это математическое описание движения без анализа причин, его вызывающих. Другими словами, без выяснения вопроса, почему рассматриваемое движение происходит именно так, а не иначе, устанавливается математическое соотношение между его различными характеристиками, такими, как перемещение, пройденный путь, скорость, ускорение, время движения.

Движение материальной точки всегда рассматривается в какой-либо системе отсчета. Положение материальной точки можно определить, если задать ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ или, что эквивалентно, задать три координаты x, y, z — проекции радиус-вектора на оси. Движение математически описано полностью, если известен радиус-вектор как функция времени $\mathbf{r}(t)$, т. е. известны три скалярные функции $x(t), y(t), z(t)$. Основной физический закон кинематики устанавливает вид этой функции $\mathbf{r}(t)$. Например, для равномерного движения, т. е. движения с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, функция $\mathbf{r}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \quad (1)$$

а для равнопеременного движения с ускорением $\mathbf{a}$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{a}t^2/2. \quad (2)$$

В этих формулах $\mathbf{r}_0$ характеризует начальное положение точки, т. е. $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t) |_{t=0} = \mathbf{r}(0)$; $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость.

Подчеркнем, что в кинематике ускорение считается заданным. Величина ускорения находится либо опытным путем, либо расчетным с помощью законов динамики, когда исследуются причины, определяющие характер движения. Забегая вперед, отметим, что уравнение (1) описывает движение материальной точки в инерциальной системе отсчета, если на точку не действуют силы (или все действующие силы уравновешиваются), а уравнение (2) — если действующие силы постоянны. В последнем случае говорят, что движение тела происходит в постоянном во времени однородном силовом поле. Примером такого поля может служить поле тяготения вблизи

поверхности Земли при условии, что высота тела над поверхностью мала по сравнению с радиусом Земли. Обсуждаемые в этом разделе задачи относятся исключительно к этому весьма важному в практическом отношении случаю. Разумеется, движение тела вблизи поверхности Земли описывается уравнением (2) только тогда, когда можно не учитывать сопротивление воздуха.

Итак, функция $g(t)$ содержит полную информацию о кинематике движения тела, т. е. ответ на любой вопрос в кинематических задачах можно получить, используя только зависимость $g(t)$. Никаких других физических законов при этом привлекать не требуется. Например, зависимость мгновенной скорости точки от времени в однородном поле может быть получена из (2) и имеет вид $v(t) = v_0 + at$.

При решении задач мы будем записывать уравнение (2) непосредственно в проекциях на оси координат. При постоянном ускорении a всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы уравнение (2) сводилось к двум скалярным: так как траектория, по которой движется тело, плоская, то нужно просто совместить, например, плоскость xy с плоскостью, в которой лежит траектория. Тогда векторное уравнение (2) эквивалентно двум скалярным уравнениям

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t + a_y t^2/2. \end{aligned} \quad (3)$$

В частности, если рассматривать движение тела вблизи поверхности Земли под действием только силы тяжести, то удобно направить ось y вертикально вверх. Тогда вектор ускорения имеет только одну отличную от нуля проекцию: $a_x = 0$, $a_y = -g$, и система (3) принимает вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t = x_0 + (v_0 \cos \varphi) t, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - gt^2/2 = y_0 + (v_0 \sin \varphi) t - gt^2/2, \end{aligned}$$

где φ — угол, образованный вектором начальной скорости с горизонтом. Иногда удобно поместить начало координат в начальную точку траектории, тогда $x_0 = y_0 = 0$.

Решение любой кинематической задачи сводится к использованию указанных выше уравнений в конкретных условиях, сформулированных в задаче. При этом было бы наивно пытаться овладеть каким-то «общим методом» решения, пригодным для всех задач; подобного «общего метода» попросту не существует. Наоборот, на разбираемых примерах читатель может убедиться, что всегда существует несколько более или менее различающихся между собой подходов к исследованию изучаемых явлений.

Различные подходы нередко оттеняют новые стороны изучаемого явления, позволяя глубже проникнуть в его физический смысл. Поэтому в большинстве разбираемых задач авторы сознательно приводят различные варианты решения. Иногда это использование существенно различающихся подходов к решению сходных задач,

как, например, в задачах 3 и 4, иногда — другие математические приемы. исследования получающихся выражений, как, например, в задачах 1 и 2. Разумеется, в каждом конкретном случае существует оптимальный подход, наиболее быстро приводящий к ответу на вопросы задачи.

Такой многосторонний анализ, использующий разные точки зрения, является чрезвычайно полезным.

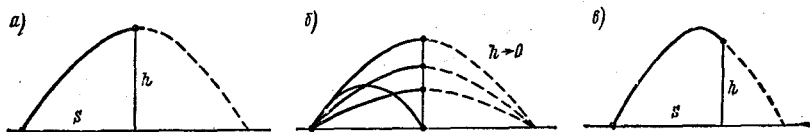
ЗАДАЧА 1

Необходимо с земли попасть камнем в цель с расстояния S . Цель расположена на высоте h . При какой наименьшей начальной скорости камня можно это сделать?

РЕШЕНИЕ

На первый взгляд кажется, что начальная скорость полета камня будет наименьшей из всех возможных, если наивысшая точка траекторий придется на то место, в которое хотим попасть (рисунок а).

Может быть и Вам так показалось? Иллюзия эта настолько сильна, что подобное решение аналогичной задачи можно встретить даже



К задаче 1.

в некоторых солидных пособиях по решению физических задач. Однако даже не решая задачи, легко убедиться, что это не так. Действительно, будем мысленно уменьшать высоту, на которой расположена цель. При этом точка, куда попадает камень, продолжает согласно предположению оставаться наивысшей точкой траектории (рисунок б), в том числе и в предельном случае $h = 0$. Но совершенно очевидно, что для того чтобы попасть в цель, находящуюся на земле, достаточно просто добросить камень до цели (рисунок в). Итак, предположение о том, что цель совпадает с высшей точкой траектории, несправедливо.

Ошибочность этого предположения становится тем более очевидной, если заметить, что требуемая при этом начальная скорость должна возрастать по мере того, как $h \rightarrow 0$.

Приведенный анализ представляет собой пример проверки решения задачи предельным переходом к более простому случаю, когда ответ либо очевиден, либо может быть легко найден.

Из рассмотренного примера можно сделать заключение, что цель всегда должна находиться на нисходящей ветви траектории (рисунок в). Еще раз напомним, что мы ищем траекторию с минимальной начальной скоростью.

Приступим к решению задачи.

Пусть камень брошен под углом α к горизонту и попал в цель. Его перемещения по горизонтали S и по вертикали h могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= (v_0 \cos \alpha) t, \\ h &= (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2. \end{aligned}$$

Поскольку время полета камня t нас не интересует, исключим его из этих уравнений. Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, получаем

$$h = S \operatorname{tg} \alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины v_0 и α и имеет поэтому бесчисленное множество решений, что соответствует возможности попасть в цель бесконечным числом способов. Из этих решений нам нужно выбрать то, которое соответствует минимальному значению v_0 . Прямой путь решения этой задачи состоит в нахождении v_0 как функции от α из уравнения (1) и исследовании этой функции на экстремум, что требует, однако, применения высшей математики. Поэтому поступим иначе. Попробуем решить уравнение (1) относительно α . Используя известное соотношение $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, замечаем, что из (1) получается квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$:

$$gS^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2v_0^2 S \operatorname{tg} \alpha + gS^2 + 2v_0^2 h = 0. \quad (2)$$

Решив его, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gS} [v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gS^2 + 2v_0^2 h)}].$$

Казалось бы, ничего хорошего не получается — очень громоздкое выражение. А на самом деле мы в двух шагах от ответа на вопрос задачи. Действительно, для $\operatorname{tg} \alpha$ физический смысл имеют только вещественные решения, и поэтому дискриминант должен быть неотрицательным:

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2S^2 \geq 0.$$

Легко убедиться, что минимальное значение v_0^2 , при котором это соотношение справедливо, соответствует случаю равенства; таким образом,

$$v_{0\min}^2 = g(h + \sqrt{h^2 + S^2}).$$

(Второй корень $v_{0\min}^2 = g(h - \sqrt{h^2 + S^2})$ не имеет физического смысла, так как квадрат скорости есть величина положительная.) Мы получили ответ

$$v_{0\min} = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + S^2})}. \quad (3)$$

Проанализируем теперь решение несколько подробнее. Возвратимся к квадратному уравнению для $\operatorname{tg} \alpha$. При положительном дискриминанте оно имеет два решения, т. е. при заданном значении v_0 камень может попасть в цель по двум различным траекториям. При

отрицательном дискриминанте решений нет, т. е. ни при каком значении угла α камень не попадет в цель при заданной скорости. При равном нулю дискриминанте имеется только одно решение (единственная траектория полета камня до цели); именно в этом случае, как мы выяснили, начальная скорость будет минимальной. В этом случае выражение для $\operatorname{tg} \alpha$ имеет особенно простой вид:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^3 \min}{gS} = \frac{h + \sqrt{h^2 + S^2}}{S}.$$

Проверим правильность полученного результата предельными переходами.

1. Если $h = 0$, то $\operatorname{tg} \alpha = 1$, т. е. камень нужно бросить под углом 45° . Хорошо известно, что это соответствует максимальной дальности полета по горизонтали при заданной начальной скорости, т. е. при заданной дальности — минимальной начальной скорости. Этот случай уже обсуждался вначале.

2. Если $S \rightarrow 0$, то $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \infty$, а $\alpha \rightarrow \pi/2$. Действительно, в этом случае камень нужно бросать вертикально вверх, и только в этом случае положение цели совпадает с наивысшей точкой траектории.

Итак, мы решили эту задачу, потребовав, чтобы корни квадратного уравнения (2) для $\operatorname{tg} \alpha$ имели физический смысл, т. е. были вещественными.

Рассмотрим теперь несколько иной способ рассуждений, приводящий, естественно, к тому же результату.

Прежде всего отметим одно очевидное обстоятельство: при заданном расстоянии S чем выше расположена цель, тем больше должна быть минимальная начальная скорость камня. Поэтому вместо того чтобы искать минимум v_0 при заданном h , можно искать максимум h при заданном v_0 .

Предположим, что v_0 задано. Тогда, выразив h из (2):

$$h = -\frac{gS^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2v_0^2} + S \operatorname{tg} \alpha - \frac{gS^2}{2v_0^2},$$

легко исследовать получившийся квадратный трехчлен относительно $\operatorname{tg} \alpha$ на максимум. (Напомним, что максимум квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) имеет место при $x = -b/(2a)$ и равен $c - b^2/(4a)$.) Максимальное значение h достигается при $\operatorname{tg} \alpha = v_0^3/(gS)$ и равно

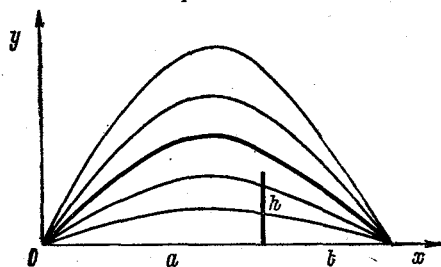
$$h = \frac{v_0^3}{2g} - \frac{gS^2}{2v_0^2}. \quad (4)$$

Из (4) находим минимальное значение начальной скорости v_0 при заданной высоте цели h , совпадающее с полученным ранее.

ЗАДАЧА 2

Между целью и минометом, находящимися на одной горизонтали, расположена стена высотой h . Расстояние от миномета до стены равно a , а от стены до цели b . Определить минимальную величину начальной скорости мины. Под каким углом при этом следует стрелять? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Попробуем разобраться в этой задаче, не выписывая пока никаких формул. Рассмотрим все траектории, проходящие через цель (рисунок), забыв на время о существовании стены. На этом рисунке выделена траектория, соответствующая наименьшему значению начальной скорости мины. Напомним, что этой траектории соответствует угол $\alpha = 45^\circ$. Нетрудно убедиться, что начальные скорости, соответствующие другим траекториям, монотонно возрастают при удалении этих траекторий от выделенной как вверх, так и вниз. Поэтому, если стена окажется ниже выделенной траектории, то решение тривиально: именно эта траектория и удовлетворяет поставленным усло-



К задаче 2.

виям. Если стена окажется выше, то искомая траектория проходит через верхний край стены. Вот и все.

Теперь остается только записать эти рассуждения на математическом языке, т. е. получить выражения для начальной скорости и угла α в каждом из этих случаев.

Прежде всего получим общее уравнение траекторий, проходящих через цель. Как мы уже знаем, уравнение траекторий, выходящих из начала координат, имеет вид

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1)$$

Потребуем, чтобы эти траектории проходили через цель. Для этого положим в (1) $y = 0$ при $x = a + b$:

$$0 = (a + b) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(a + b)^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (2)$$

Выражая из (2) начальную скорость v_0 и подставляя в (1), получим уравнение всех траекторий, проходящих через цель:

$$y = x \left(1 - \frac{x}{a + b} \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Придавая α разные значения в пределах от 0 до $\pi/2$, получаем все траектории, изображенные на рисунке.

Выделенная траектория получается при $\operatorname{tg} \alpha = 1$:

$$y = x \left(1 - \frac{x}{a + b} \right). \quad (4)$$

Выясним теперь, при каком условии эта траектория проходит над стеной. Для этого найдем высоту h_1 точки траектории при $x = a$:

$$h_1 = a \left(1 - \frac{a}{a + b} \right) = \frac{ab}{a + b}.$$

Таким образом, если высота стены h меньше, чем h_1 , то искомая траектория определяется выражением (4), а соответствующая ей начальная скорость v_0 легко находится из уравнения (2) при $\operatorname{tg} \alpha = 1$:

$$v_{0\min} = \sqrt{g(a+b)}.$$

Это есть обычное соотношение между начальной скоростью и максимальной дальностью полета по горизонтали.

Определим теперь искомую траекторию, если стена выше выделенной траектории: $h > h_1$. Как уже отмечалось, в этом случае нужно найти траекторию, проходящую через верхний край стены, т. е. положить в (3) $y = h$ при $x = a$:

$$h = a \left(1 - \frac{a}{a+b} \right) \operatorname{tg} \alpha_1,$$

откуда $\operatorname{tg} \alpha_1 = h(a+b)/(ab)$.

Уравнение искомой траектории получим, подставив найденное значение $\operatorname{tg} \alpha_1$ в формулу (3):

$$y = x \left(1 - \frac{x}{a+b} \right) \frac{a+b}{ab} h.$$

Отметим, что для ответа на поставленные в задаче вопросы это уравнение нам не требуется, но оно дает возможность проследить, через какие точки мина летит к цели. Для нахождения соответствующей этой траектории начальной скорости нужно подставить полученное значение $\operatorname{tg} \alpha_1$ в уравнение (2):

$$v_{0\min}^2 = \frac{gab}{2h} \left[1 + \left(h \frac{a+b}{ab} \right)^2 \right].$$

Итак, резюмируя все изложенное, сформулируем ответ:

$$h < \frac{ab}{a+b}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad v_0^2 = g(a+b);$$

$$h > \frac{ab}{a+b}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(h \frac{a+b}{ab} \right), \quad v_0^2 = \frac{gab}{2h} \left[1 + \left(h \frac{a+b}{ab} \right)^2 \right].$$

Полезно и в этой задаче рассмотреть предельные случаи. Не будем останавливаться на относительно мало интересных случаях, как, например, $a = b$ (стена посередине между минометом и целью).

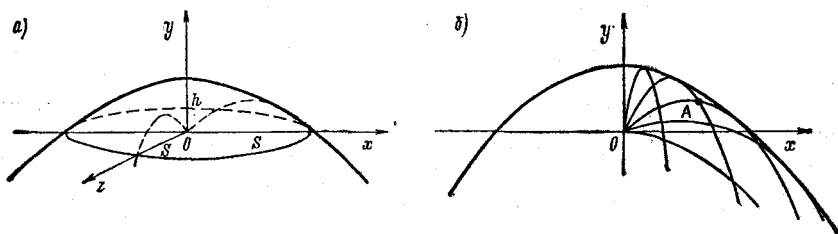
Бессмысленно полагать $a = 0$ или $b = 0$ при $h \neq 0$, но несомненно представляет интерес случай, когда a и b одновременно стремятся к нулю (при $h \neq 0$). В этом предельном случае требуется просто перебросить мину через стену. Ответ в этом случае очевиден: стрелять нужно вертикально вверх ($\alpha = \pi/2$), а начальная скорость $v_0 = \sqrt{2gh}$. Покажем, как получить этот результат из ответа к задаче. Здесь, конечно, нужно обращаться к случаю $h \geq ab/(a+b)$. Полагая $a=b$ и одновременно устремляя их к нулю, получим $\alpha \rightarrow \pi/2$ и

$$v_0^2 = \frac{g}{2h} \left[ab + h^2 \frac{(a+b)^2}{ab} \right] = \frac{g}{2h} (a^2 + 4h^2) \rightarrow 2gh.$$

Зенитное орудие может сообщить снаряду начальную скорость v_0 в любом направлении. Требуется найти границу, отделяющую цели, до которых снаряд из данного орудия может долететь, от недостижимых целей. Сопротивлением воздуха пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Попробуем сначала выяснить, что можно сказать об этой границе, не решая задачи. Сам факт существования этой границы сомнений не вызывает, так что поставленный в задаче вопрос имеет смысл (кстати, начиная решать задачу, никогда не вредно подумать об этом). Попытаемся представить себе искомую границу. Очевидно, что она представляет собой некоторую поверхность. Если цель находится точно над орудием, то стрелять нужно вертикально вверх. Снаряд при этом поднимается на высоту $h = v_0^2/(2g)$, после чего



К задаче 3.

начинает падать вниз, так что граница достижимых целей пересекает вертикаль в точке, находящейся на высоте h .

Если ограничиться целями, находящимися на горизонтальной плоскости, то очевидно, что граница представляет собой окружность, радиус которой равен максимальной дальности полета снаряда по горизонтали $S = v_0^2/g$ (напоминаем, что максимальная дальность полета по горизонтали достигается при угле возвышения ствола орудия $\alpha = 45^\circ$). Эта окружность есть пересечение искомой поверхности с горизонтальной плоскостью (рисунок а). Вообще из симметрии можно сделать вывод, что искомая поверхность представляет собой поверхность вращения некоторой кривой вокруг вертикали, проходящей через орудие, и задача сводится к нахождению этой кривой. Отметим, что эта кривая есть огибающая всех возможных траекторий (рисунок б).

Приступим к решению задачи. Выберем систему координат: орудие расположим в начале координат, ось x направим горизонтально, ось y — вертикально. Тогда зависимость координат снаряда от времени выразится следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos \alpha) t, \\ y(t) &= (v_0 \sin \alpha) t - gt^2/2. \end{aligned}$$

Исключив из этих уравнений t , получим уравнение траектории снаряда $y = f(x)$:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1)$$

Это уравнение параболы. Коэффициенты при x и x^2 зависят от угла α , т. е. при разных направлениях начальной скорости получаются различные траектории. Таким образом, данное уравнение описывает семейство траекторий при одной и той же величине, но различных направлениях начальной скорости v_0 .

Но этому же уравнению можно придать и другой смысл. Будем теперь рассматривать x и y как координаты определенной цели, в которую попадает снаряд, двигаясь по некоторой траектории. Тогда при заданных координатах цели x и y уравнение (1) определяет угол, под которым нужно выпустить снаряд с начальной скоростью v_0 для того, чтобы он попал в эту цель. Решая это квадратное относительно $\operatorname{tg} \alpha$ уравнение, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gx} \left[v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y)} \right]. \quad (2)$$

Если уравнение имеет вещественное решение, т. е. дискриминант неотрицателен:

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y) \geq 0, \quad (3)$$

то в цель попасть можно. Если вещественных решений нет, т. е.

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y) < 0,$$

то в цель попасть нельзя. Это значит, что цель находится за пределами искомой границы. Координаты цели, находящейся на границе, удовлетворяют соотношению $v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y) = 0$. Выражая отсюда y как функцию x , получаем уравнение границы в явном виде:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (4)$$

Это уравнение параболы с вершиной при $x = 0$, $y = v_0^2/(2g)$. Коэффициент при x^2 отрицателен, т. е. ветви направлены вниз и пересекают горизонтальную ось в точках $x = \pm v_0^2/g$ (рисунок б). Итак, полученная граница действительно проходит через точки, которые были нами установлены из элементарных соображений.

Мы нашли сечение граничной поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат. Вся поверхность может быть получена вращением этой параболы вокруг оси y .

В связи с приведенным решением сделаем еще несколько замечаний. Рассмотрим какую-либо точку, находящуюся ближе границы (например, точку A на рисунке б). Для такой точки подкоренное выражение в формуле (2) положительно, и, следовательно, через нее проходят две траектории (при заданной величине начальной скорости), соответствующие двум возможным значениям угла α .

В баллистике одна из этих траекторий называется настильной, а другая, касающаяся границы до попадания в цель, — навесной. Через каждую точку, принадлежащую границе, проходит лишь одна траектория. Отметим, что граница является огибающей для семейства траекторий при различных направлениях начальной скорости и фиксированном значении величины начальной скорости v_0 .

Приведем другой возможный путь решения этой задачи, связанный с еще одной трактовкой уравнения (1). Рассмотрим цели, находящиеся на одной вертикали, отстоящей от орудия на расстояние x , и найдем на ней самую высокую точку, в которую еще может попасть снаряд. Эта точка, очевидно, принадлежит границе. Таким образом, задача сводится к нахождению максимума y , т. е. правой части уравнения (1), рассматриваемой как функция угла α . Правая часть есть квадратный трехчлен относительно $\lg \alpha$ и имеет максимум при $\lg \alpha = v_0^2/(gx)$. Соответствующее максимуму значение y получается подстановкой этого значения $\lg \alpha$ в уравнение (1):

$$y = \frac{v_0^3}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^3},$$

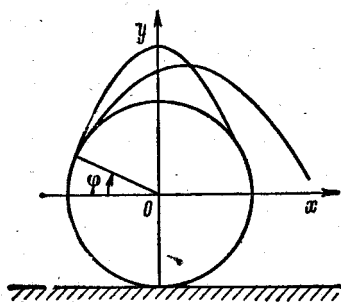
что совпадает с полученным ранее уравнением границы (4).

ЗАДАЧА 4

Телега катится по горизонтальной мокрой дороге. На какую максимальную высоту поднимаются капли воды, отрывающиеся от колес?

РЕШЕНИЕ

Эта задача во многом подобна предыдущим. Самая существенная особенность заключается, пожалуй, в том, что для ее решения



К задаче 4.

нельзя поместить начало координат в исходную точку траектории капли, так как отрыв каплей происходит в разных точках обода колеса. Совместим поэтому начало координат с центром колеса, т. е. будем рассматривать движение капель в системе отсчета, связанной с телегой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно земли. Очевидно, что максимальная высота подъема капель по вертикали не зависит от того, рассматривать их движение в системе

отсчета, связанной с землей, или в системе отсчета, связанной с равномерно движущейся по горизонтали телегой. Если скорость телеги равна v_0 и колеса не пробуксовывают, то в выбранной системе отсчета величина скорости любой точки обода также равна v_0 . (Докажите последнее утверждение сами — это совсем просто.) Положение любой из точек, в которых происходит отрыв капли от обода, однозначно определяется углом φ (рисунок).

Текущие координаты капли, оторвавшейся в точке, характеризующейся углом φ , определяются соотношениями

$$x(t) = -R \cos \varphi + (v_0 \sin \varphi) t, \quad (1)$$

$$y(t) = R \sin \varphi + (v_0 \cos \varphi) t - gt^2/2. \quad (2)$$

Для нахождения максимальной высоты подъема капли $y_{\max}$ нужно подставить в уравнение (2) время подъема капли t_1 , которое проще всего найти следующим образом. В наивысшей точке траектории вертикальная составляющая скорости v_y обращается в нуль: $v_y = v_0 \cos \varphi - gt_1 = 0$, откуда

$$t_1 = v_0 \cos \varphi / g. \quad (3)$$

Тогда максимальная высота подъема капли, оторвавшейся от обода в рассматриваемой точке,

$$y_{\max} = -\frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi + R \sin \varphi + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

(В этой формуле $\cos \varphi$ выражен через $\sin \varphi$.)

Из (4) видно, что максимальная высота подъема зависит от угла φ , т. е. от того, в какой точке произошел отрыв капли. В какой же точке должна оторваться капля, чтобы подняться выше всех остальных? Выражение (4) для максимальной высоты подъема представляет собой квадратный трехчлен относительно $\sin \varphi$ и принимает свое наибольшее значение

$$h_{\max} = \frac{gR^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \quad (5)$$

при $\sin \varphi = gR/v_0^2$. Конечно, этот результат имеет смысл, если $gR \leq v_0^2$, т. е. если телега катится достаточно быстро. В противном случае, как нетрудно убедиться, ни одна из отрывающихся капель не поднимается выше верхней точки обода. Докажите это самостоятельно.

С помощью соотношения (1) легко увидеть, что найденная точка наивысшего подъема лежит точно над осью колеса: подставляя (3) в (1) и учитывая, что $\sin \varphi = gR/v_0^2$, получаем $x = 0$.

Ответ на поставленный в задаче вопрос — формула (5) для наибольшей высоты подъема отрывающихся капель — получен путем исследования на максимум квадратного трехчлена (4) относительно $\sin \varphi$. Этот результат можно получить и иначе. Будем рассуждать следующим образом. Зафиксируем некоторое значение $y_{\max}$ и решим уравнение (4) относительно $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi_{1,2} = \frac{gR}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gR}{v_0^2}\right)^2 + 1 - \frac{2gy_{\max}}{v_0^2}}. \quad (6)$$

Здесь углы φ_1 и φ_2 определяют те точки обода, отрываясь от которых капли достигают заданной максимальной высоты. Если вещественных корней нет, то заданного значения $y_{\max}$ не достигает ни одна

капля. Если есть два различных вещественных корня φ_1 и φ_2 , то заданная высота является максимальной для двух капель. Это отчетливо видно из рисунка 2 задачи 5 про «мокрое» колесо. Наибольшей высоты из всех капель, как видно из того же рисунка, достигает только одна капля. Следовательно, эту наибольшую высоту $h_{\max}$ можно найти, потребовав, чтобы оба корня уравнения (6) сливались в один: приравнивая дискриминант нулю, получаем ответ — формулу (5).

Итак, получено исчерпывающее решение этой задачи. Как и предыдущие задачи, мы решали ее, используя уравнения движения (1) и (2), которые дают зависимость координат движущегося тела от времени. Эти уравнения содержат всю информацию о движении тела. Но во многих случаях полная информация бывает не нужна. Например, в обсуждаемой задаче нас совершенно не интересуют временные зависимости — требуется найти лишь положение точки наивысшего подъема капли, а момент времени, когда капля там оказывается, интереса не представляет. В подобных случаях часто оказывается удобным с самого начала исключить избыточную информацию, воспользовавшись законами сохранения. В рассматриваемой задаче можно сразу получить соотношение (4) для наибольшей высоты подъема капель, если применить закон сохранения механической энергии. Полагая потенциальную энергию капли на уровне оси колеса равной нулю, для полной энергии капли в точке отрыва имеем

$$E_1 = mgR \sin \varphi + mv_0^2/2.$$

В высшей точке траектории вертикальная составляющая скорости обращается в нуль. Поскольку горизонтальная составляющая скорости не меняется, энергия в высшей точке

$$E_2 = mgy_{\max} + m(v_0 \sin \varphi)^2/2.$$

Приравнивая E_1 и E_2 , получаем формулу (4). Как видите, во многих задачах не вредно подумать о том, нельзя ли упростить решение, используя законы сохранения!

ЗАДАЧА 5

Мокрое колесо равномерно вращается в вертикальной плоскости вокруг неподвижной оси. С обода срываются капли. Найти границу «сухой» области.

РЕШЕНИЕ

Движение оторвавшихся капель происходит под действием силы тяжести, которая всем каплям сообщает одинаковое ускорение g . Это позволяет сначала отвлечься от наличия тяготения. Рассмотрим движение капель, оторвавшихся от обода колеса в один и тот же момент. В отсутствие ускорения свободного падения капли движутся по прямым линиям. В любой момент времени t все капли лежат

на окружности радиуса r (рисунок а):

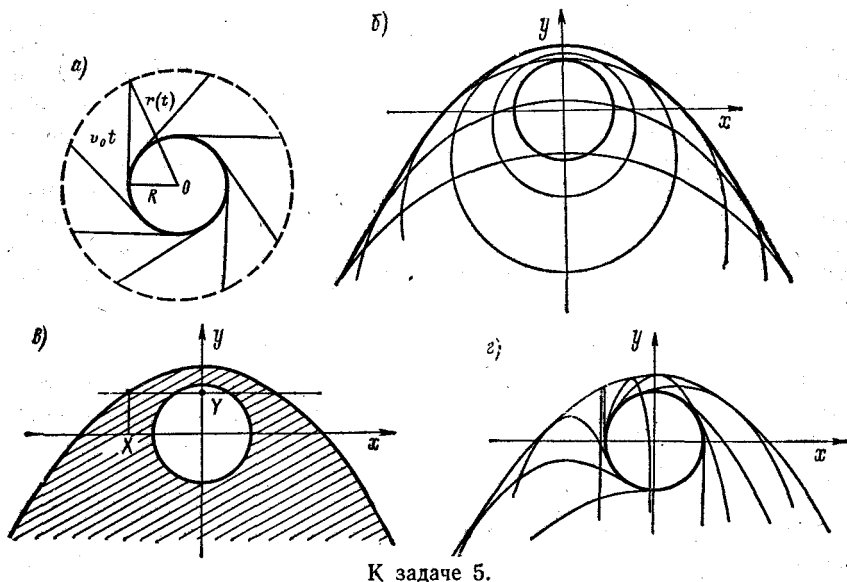
$$r^2(t) = R^2 + (v_0 t)^2, \quad (1)$$

где R — радиус колеса, v_0 — скорость точек обода.

Радиус окружности увеличивается с течением времени, а при наличии тяготения вся эта окружность еще и «падает» с ускорением свободного падения g . Если начало координат выбрано в центре колеса, то в любой момент времени t ордината центра окружности равна $-gt^2/2$. Уравнение «падающей» окружности в этой системе координат имеет вид

$$x^2 + (y + gt^2/2)^2 = r^2(t). \quad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение целого семейства окружностей:



К задаче 5.

придавая t разные значения, получаем окружности, на которых находятся капли в различные моменты времени. Легко сообразить, что искомая граница есть огибающая этого семейства окружностей (рисунок б). Ясно, что высшая точка этой границы лежит точно над осью колеса.

Другими словами, уравнение (2) определяет всю «мокрую» область (рисунок в), и для решения задачи нам нужно найти границу заштрихованной области.

Будем искать эту границу следующим образом. Заметим, что капли, оторвавшиеся от колеса в один и тот же момент времени, достигают границы в разные моменты времени: граница касается разных окружностей. Проведя горизонтальную прямую на некотором уровне Y , найдем на ней наиболее удаленную от оси y «мокрую»

точку, не задумываясь о том, какой окружности она принадлежит. Абсциссу X точки пересечения любой окружности с этой прямой можно найти, подставив в уравнение окружности (2) ординату $y = Y$ и радиус r из уравнения (1):

$$X^2 = R^2 + v_0^2 t^2 - (Y + gt^2/2)^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что правая часть (3) есть квадратный трехчлен относительно t^2 :

$$X^2 = -g^2 t^4/4 + (v_0^2 - gY) t^2 + R^2 - Y^2.$$

Его максимальное значение

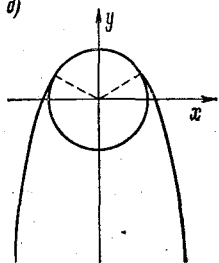
$$X^2 = R^2 + v_0^4/g^2 - 2v_0^2 Y/g. \quad (4)$$

Разрешая (4) относительно Y , получаем уравнение границы «сухой» области

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{gR^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (5)$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, а вершина находится на оси y на высоте $gR^2/(2v_0^2) + v_0^2/(2g)$.

Граница была найдена как огибающая семейства окружностей, на которых находились капли, оторвавшиеся в один и тот же момент времени. Между тем траектория каждой отдельной капли представляет собой параболу, и поэтому найденная граница (5) является огибающей этих парабол (рисунок з).



К задаче 5.

Интересно отметить, что задачи 3 и 4 являются частными случаями этой задачи. Действительно, в задаче 4 фактически требовалось найти лишь верхнюю точку границы «мокрой» области: при $x = 0$ $Y = h_{\max} = gR^2/(2v_0^2) + v_0^2/(2g)$.

Задача 3 получается из этой задачи, если устремить к нулю радиус колеса R при неизменной скорости v_0 . Уравнение границы достижимых целей получается из (5), если в последнем положить $R = 0$:

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

При решении этой задачи мы молчаливо предполагали, что искомая граница проходит вне колеса. Как и в предыдущей задаче, легко убедиться, что это справедливо при условии $v_0^2 > gR$. В противном случае ($v_0^2 < gR$) граница мокрой области в своей верхней части проходит по ободу колеса (дуга окружности), а затем плавно переходит в ветви параболы (рисунок д).

Динамика

Динамика изучает, как происходит движение тела при его взаимодействии с другими телами. Взаимодействие описывается на языке сил, действующих на тело. Основу динамики материальной точки составляют три закона Ньютона. Первый закон выделяет системы отсчета, в которых уравнения динамики имеют наиболее простой вид, — это так называемые инерциальные системы отсчета. Второй закон Ньютона устанавливает связь ускорения, с которым движется материальная точка в инерциальной системе отсчета, с действующими на нее силами. Третий закон связывает между собой силы, с которыми тела действуют друг на друга.

В динамике взаимодействие тел считается заданным: например, гравитационное взаимодействие материальных точек описывается законом тяготения, а электростатическое взаимодействие точечных зарядов — законом Кулона. Выражения для сил, входящих в законы Ньютона, должны быть взяты из других разделов физики.

Решение динамической задачи следует начинать с анализа всех сил, действующих на интересующее нас тело.

Остановимся несколько подробнее на тех видах сил, которые фигурируют в задачах этого раздела. Гравитационное взаимодействие тел осуществляется посредством создаваемых ими полей тяготения. Тело со сферически-симметричным распределением масс (например, земной шар) создает в окружающем пространстве такое же гравитационное поле, как и материальная точка такой же массы, помещенная в его центр. В задачах о движении спутников Земли удобно выражать действующую на них силу притяжения Земли через расстояние спутника до центра Земли r , ускорение свободного падения g на поверхности Земли и ее радиус R :

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mgR^2}{r^2}, \quad (1)$$

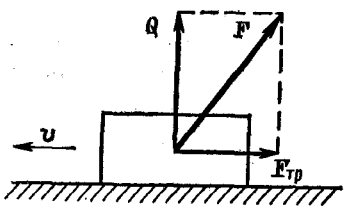
где M — масса Земли, m — масса спутника. Такой вид формулы для F удобен тем, что величина действующей на спутник силы выра-

жается через легко запоминающиеся величины $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ и $R = 6370 \text{ км}$.

Во многих задачах приходится рассматривать трение тел друг о друга. При наличии трения силу F , с которой одно тело действует на другое, удобно рассматривать как две силы (рисунок): силу Q , направленную по нормали к поверхности контакта (сила нормального давления, или сила реакции опоры), и силу трения $F_{\text{тр}}$, направленную по касательной. Удобство заключается в том, что при скольжении тел величины этих составляющих одной силы F связаны между собой приближенным законом Кулона — Амонтона, установленным опытным путем:

$$F_{\text{тр}} = \mu Q. \quad (2)$$

Коэффициент трения скольжения μ зависит от рода соприкасающихся поверхностей. Обычно пренебрегают слабой зависимостью силы трения от площади контакта и от величины относительной скорости тел.



Для трения покоя закон (2) не имеет места: величина силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, обычно несколько превышающего силу трения скольжения этих поверхностей. При решении задач для простоты максимальное значение силы трения

покоя принимается равным μQ .

Основное уравнение динамики — второй закон Ньютона — векторное уравнение. В рассматриваемых задачах действующие силы лежат в одной плоскости, поэтому можно выбрать систему координат так, чтобы векторное уравнение второго закона сводилось к двум скалярным.

Применение второго и третьего законов Ньютона к системе взаимодействующих тел позволяет сформулировать закон движения центра инерции системы тел в очень простом виде: центр инерции движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной сумме масс всех тел, входящих в систему, под действием силы, равной векторной сумме всех *внешних* сил, действующих на тела рассматриваемой системы. В частности, отсюда следует, что под действием только внутренних сил центр инерции не может приобрести ускорения.

Решение динамических задач часто облегчается использованием законов сохранения энергии, импульса и момента импульса. Особенно эффективным является использование этих законов в тех случаях, когда действующие силы непостоянны и непосредственное решение уравнений динамики с помощью элементарной математики невозможно. Закон сохранения энергии широко используется при решении задач о движении космических аппаратов. Как и в (1), выражение для потенциальной энергии тела в гравитационном поле Земли удобно записать через ускорение свободного

падения на поверхности Земли:

$$E_n(r) = -\gamma \frac{mM}{r} = -\frac{mgR^2}{r}. \quad (3)$$

В выражении (3) потенциальная энергия стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, т. е. потенциальная энергия тяготения тела, удаленного на бесконечность, принята равной нулю.

Скорость спутника, движущегося по круговой орбите радиусом r , называется первой космической скоростью. Ее можно найти с помощью второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$v_1 = \sqrt{\frac{gR^2}{r}}.$$

Для спутника, движущегося вблизи поверхности Земли, первая космическая скорость $v_1 = \sqrt{gR} = 7,9$ км/с.

Минимальная скорость, которую нужно сообщить телу, находящемуся на расстоянии r от центра Земли, для того, чтобы оно удалилось на бесконечность, носит название второй космической скорости. Ее можно найти с помощью закона сохранения энергии:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}} = \sqrt{2} v_1.$$

Для тела, находящегося на поверхности Земли:

$$v_{II} = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ км/с}.$$

Тело удалится на бесконечность независимо от того, в каком направлении сообщена ему вторая космическая скорость, хотя траектории при этом будут разные (но параболические!). Если сообщить скорость больше второй космической, то тело удалится по гиперболе. Если начальная скорость меньше второй космической, то тело движется по эллипсу, один из фокусов которого совпадает с центром Земли. Это утверждение носит название первого закона Кеплера, который был открыт в результате наблюдений за движением планет вокруг Солнца.

При решении задач будут использоваться также второй и третий законы Кеплера. Согласно второму закону Кеплера секторная скорость спутника постоянна. Третий закон Кеплера утверждает, что квадраты периодов обращения спутников относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Законы Кеплера можно вывести с помощью уравнений динамики и закона всемирного тяготения.

При решении задач, в которых встречается колебательное движение, следует помнить, что при гармонических колебаниях, когда равнодействующая всех сил направлена к положению равновесия и пропорциональна смещению, циклическая частота колебаний определяется соотношением

$$\omega = \sqrt{k/m},$$

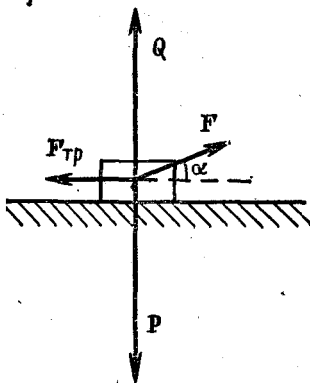
где m — масса тела, а k — коэффициент пропорциональности между силой и смещением. Применение этой формулы к малым колебаниям математического маятника длиной l дает $\omega = \sqrt{g/l}$.

ЗАДАЧА 1

Под каким углом α нужно тянуть за веревку тяжелый ящик, чтобы с наименьшим усилием передвигать его волоком по горизонтальной поверхности?

РЕШЕНИЕ

Будем решать эту задачу в простейшем приближении, считая ящик материальной точкой. В этом случае все силы можно считать приложенными в одной точке — центре масс ящика. Какие силы действуют на ящик, ясно из рисунка а).



К задаче 1.

Считаем, что ящик перемещается равномерно. При этом равнодействующая всех действующих на ящик сил согласно второму закону Ньютона равна нулю:

$$F + Q + F_{тр} + P = 0. \quad (1)$$

Ясно, что при перемещении ящика с ускорением грузчику придется тянуть с большим усилием. Для исследования соотношения (1) спроектируем его на вертикальное и горизонтальное направления:

$$F \sin \alpha + Q - P = 0, \quad (2)$$

$$F \cos \alpha - F_{тр} = 0. \quad (3)$$

Наша задача — исследовать зависимость величины силы F от угла α . Для этого необходимо исключить из уравнений (2) и (3) силу реакции опоры Q и силу трения $F_{тр}$, так как они меняются при изменении α .

Для нахождения величины силы трения скольжения воспользуемся законом Кулона — Амонтона: $F_{тр} = \mu Q$. Выражая силу реакции опоры Q из соотношения (2), получаем

$$F_{тр} = \mu (P - F \sin \alpha).$$

Подстановка этого выражения в (3) дает

$$F(\alpha) = \frac{\mu P}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Числитель не зависит от α , поэтому сила F будет наименьшей, когда знаменатель максимален. Итак, нам нужно найти максимум выражения

$$f(\alpha) = \cos \alpha + \mu \sin \alpha. \quad (4)$$

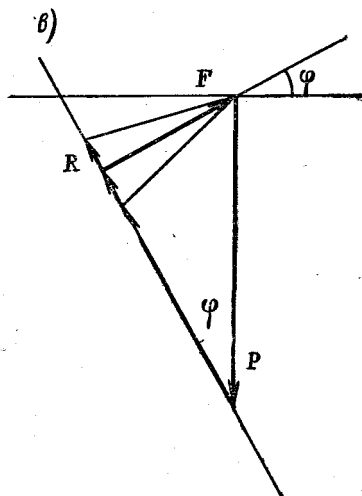
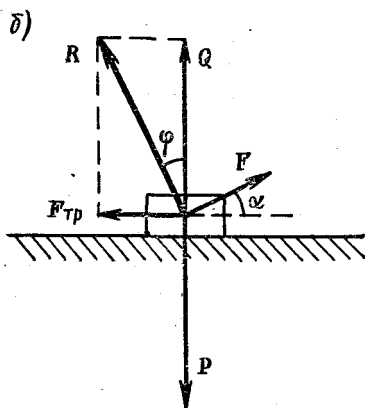
Проще всего это сделать, сведя $f(\alpha)$ к одной тригонометрической функции угла α . Обозначив

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (5)$$

и приведя правую часть выражения (4) к общему знаменателю, получим

$$f(\alpha) = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Отметим, что замена (5) всегда возможна, поскольку тангенс может принимать любые значения. Теперь видно, что величина $f(\alpha)$ максимальна при $\alpha = \varphi = \operatorname{arctg} \mu$.



К задаче 1.

Вот под таким углом и должен тянуть грузик за веревку!

Эту задачу можно рассмотреть с несколько иной точки зрения.

Прежде всего заметим, что формально введенная (соотношением (5)) величина φ вследствие закона Кулона — Амонтона имеет ясный смысл: это есть угол, образуемый векторной суммой сил $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ с нормальной к поверхности силой реакции $\mathbf{Q}$ (рисунок б). Обозначив $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}_{\text{тр}}$, перепишем условие равномерного движения ящика (1) в виде

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{F} = 0. \quad (6)$$

Для ответа на вопрос задачи удобно исследовать уравнение (6) графически. Прежде всего изобразим на чертеже известную по величине и направлению силу $\mathbf{P}$ (рисунок в). Что касается слагаемого $\mathbf{R}$, то нам заранее известно, как видно из рисунка б, лишь его направление. Поэтому через конец вектора $\mathbf{P}$ проводим прямую, составляющую угол $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$ с вертикалью. На этой прямой

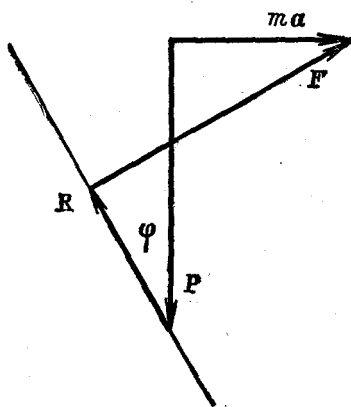
будем откладывать силу R , совмещая ее начало с концом вектора P . Положение конца вектора R пока неизвестно. В соответствии с (6) сила F должна замыкать треугольник сил, т. е. соединять конец вектора R с началом вектора P . Как видно из рисунка *в*, величина силы F будет наименьшей, когда ее направление образует прямой угол с направлением R , т. е. угол φ с горизонтом.

Пусть теперь требуется найти наименьшую силу, сообщающую ящику заданное ускорение a по горизонтали. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$P + R + F = ma.$$

Графическое решение такой задачи дается рисунком *г*. Интересно отметить, что и в этом случае направление силы F перпендикулярно

г)



К задаче 1.

направлению R и составляет тот же самый угол $\varphi = \arctg \mu$ с горизонтом. Однако при достаточно большом ускорении a , когда $g/a < \mu$, перпендикуляр, опущенный из конца вектора ma , пересечет направление R ниже конца вектора P и, поскольку R не может быть направлено вниз, наименьшая по величине сила F замыкает треугольник векторов P и ma , т. е. $R = 0$.

Рассмотрите самостоятельно случай, когда ящик тянут вверх по наклонной плоскости, и убедитесь, что и в этом случае направление F перпендикулярно силе R и образует угол φ , но уже не с горизонтом, а с наклонной плоскостью.

ЗАДАЧА 2

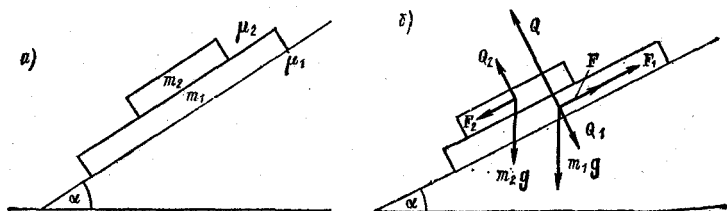
На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, лежат две доски, одна на другой (рисунок *а*). Можно ли подобрать такие значения масс досок m_1 и m_2 , коэффициентов трения досок о плоскость μ_1 и друг о друга μ_2 , чтобы нижняя доска выскользнула из-под верхней? В начальный момент доски покоятся.

РЕШЕНИЕ

На первый взгляд это самая обычная задача. Следует рассмотреть все действующие на доски силы и, пользуясь законами Ньютона, составить уравнения движения. Решив их, найдем ускорения a_1 и a_2 , и для ответа на поставленный вопрос останется только выяснить, при каких условиях ускорение нижней доски a_1 больше ускорения верхней a_2 . Однако, попытавшись выполнить эту программу, мы

сразу столкнемся с трудностью. Для решения уравнений нужно знать, как направлены все действующие силы. Но как направлены силы трения досок друг о друга? Это зависит от их относительной скорости, т. е. от того, какая из досок соскальзывает с большим ускорением. Получается заколдованный круг: чтобы найти ускорения, надо знать направление сил, а чтобы найти направление сил, требуется знать, какое из ускорений больше. Такое положение характерно для многих задач, где учитывается трение. Конечно, можно последовательно перебирать все мыслимые варианты и исключать те из них, которые приводят к нелепому результату. Но можно найти иной подход, чтобы подобных проблем не возникало.

В данной задаче нам нужно только выяснить, возможно ли движение нижней доски с большим ускорением. Предположим, что это возможно, т. е. что мы подобрали такие значения масс и коэффициентов трения, при которых $a_1 > a_2$. Тогда направление всех сил определяется однозначно и указано на рисунке б, где F — сила



К задаче 2.

трения нижней доски о наклонную плоскость, $F_1 = -F_2$ — силы трения досок друг о друга, Q — сила реакции наклонной плоскости, $Q_1 = -Q_2$ — силы давления досок друг на друга. Составляя уравнения движения досок и проецируя их на направление вдоль наклонной плоскости, получаем

$$\begin{aligned} m_1 g \sin \alpha - F - F_1 &= m_1 a_1, \\ m_2 g \sin \alpha + F_1 &= m_2 a_2. \end{aligned}$$

Из этих уравнений сразу видно, что при любых массах и коэффициентах трения

$$a_1 < g \sin \alpha, \quad a_2 > g \sin \alpha,$$

т. е. $a_1 > a_2$. Мы получили противоречие: при предположении, что $a_1 > a_2$, из уравнений динамики следует, что $a_1 < a_2$. Так как уравнения динамики безусловно справедливы, полученное противоречие означает, что предположение о возможности движения нижней доски с большим ускорением ошибочно.

ЗАДАЧА 3

На гладкий стержень, расположенный под углом α к вертикали, насажена бусинка (рисунок а). Стержень вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Описать движение бусинки по стержню. Трением пренебречь.

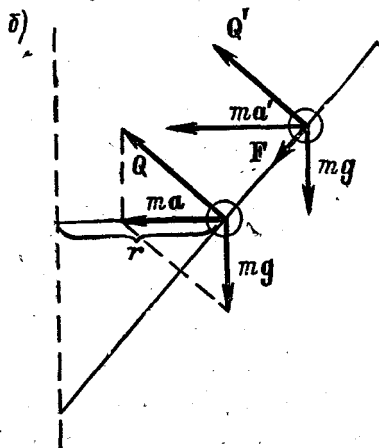
Может ли бусинка покоиться относительно стержня? Предположим, что может. Это значит, что существует такая точка стержня (на расстоянии r от оси вращения — см. рисунок а), находясь в которой бусинка относительно стержня покоится, т. е. действующие на нее силы тяжести mg и реакции стержня Q сообщают ей ускорение a , равное центростремительному ускорению этой точки стержня. Из рисунка видно, что

$$mg \operatorname{ctg} \alpha = ma, \quad (1)$$

откуда следует ($a = \omega^2 r$), что $r = (g/\omega^2) \operatorname{tg} \alpha$. Помещенная в эту точку бусинка покоится относительно стержня. Таким образом, положение равновесия бусинки на вращающемся стержне существует. Будет ли равновесие устойчивым? Другими словами, как будет вести себя бусинка, если по какой-либо причине она немного сместится из этого положения? Для выяснения этого вопроса поступим следующим образом: сместим бусинку немного

К задаче 3.

вверх по стержню и выясним, при каком условии бусинка будет в равновесии и в этой новой точке. Только двумя силами mg и Q здесь не обойтись, поскольку при наличии только этих двух сил положение равновесия определяется однозначно формулой (1). Нужна третья сила. Такой силой могла бы быть сила трения бусинки о стержень. Выясним, в какую сторону она должна быть направлена (рисунок б). Величина и направление силы тяжести не изменились, направление силы реакции Q также не изменилось. Поскольку $ma' > ma$, необходимо, чтобы сила трения была направлена вниз по стержню. Но этой силы нет, поэтому бусинка будет скользить вверх по стержню. Аналогичными рассуждениями можно показать, что при небольшом смещении бусинки вниз она будет скользить вниз, т. е. удаляться от положения равновесия. Таким образом, положение равновесия бусинки на вращающемся стержне будет неустойчивым.



К задаче 3.

Каким будет поведение бусинки при наличии трения? Поскольку величина силы трения покоя может изменяться от нуля до некоторого максимального значения, из предыдущих рассуждений ясно, что должен существовать целый участок на стержне, в любой точке которого бусинка будет покоиться относительно стержня. Предлагаем Вам самостоятельно найти величину и положение этого участка на стержне при известном коэффициенте трения. Если у Вас возникнут затруднения, рекомендуем ознакомиться со следующей задачей.

ЗАДАЧА 4

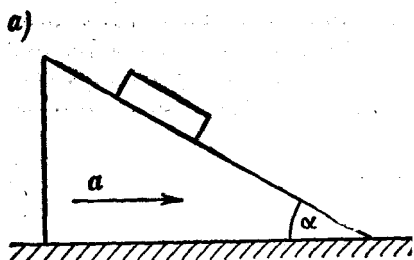
Наклонная плоскость, составляющая угол α с горизонтом, движется горизонтально с ускорением a в направлении, указанном на рисунке *a*. Как будет двигаться лежащий на ней брусок, если коэффициент трения бруска о наклонную плоскость равен μ ?

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим сначала простейший частный случай, когда плоскость покоится или движется равномерно ($a = 0$). При этом поведение бруска исследуется очень просто. Если $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$, брусок покоится на наклонной плоскости, при $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ брусок ускоренно соскальзывает вниз.

Выясним теперь, при каком условии брусок будет неподвижно лежать на наклонной плоскости при ее ускоренном движении. Очевидно, что ускорение бруска при этом должно совпадать с ускорением плоскости. Для этого необходимо, чтобы векторная сумма всех сил, действующих на брусок, была равна произведению его массы на ускорение a . На брусок действуют сила тяжести mg , сила реакции наклонной плоскости Q и сила трения покоя F . Напомним, что величина силы трения покоя может изменяться от нуля до максимального значения, равного μQ . Направлена она может быть как вверх, так и вниз вдоль наклонной плоскости. Если ускорение плоскости a_0 таково, что $mg + Q = ma_0$, то сила трения отсутствует: $F = 0$ (рисунок *б*). Это, конечно, не значит, что доска вдруг стала гладкой! Просто при $a = a_0$ относительная скорость бруска и поверхности равна нулю и в отсутствие силы трения, и поэтому сила трения не возникает. Из рисунка *б* видно, что $a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$. Если ускорение плоскости a немного меньше a_0 , то в отсутствие трения, т. е. при $\mu = 0$, брусок соскальзывал бы вниз; при $\mu \neq 0$ возникает сила трения, направленная вверх вдоль наклонной плоскости, и брусок остается неподвижным. Но поскольку величина силы трения покоя не может превышать μQ , то при достаточно малом ускорении плоскости, меньшем некоторого значения a_1 , брусок будет соскальзывать вниз. Это значение ускорения a_1 находится из условия, что сила трения F равна своему максимальному значению μQ и направлена вверх по наклонной плоскости (рисунок *в*). Составим уравнение движения бруска

$$mg + Q + F = ma_1$$



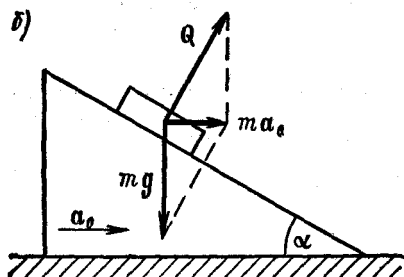
и спроектируем его на направление вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней:

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - \mu Q &= ma_1 \cos \alpha, \\ Q - mg \cos \alpha &= ma_1 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

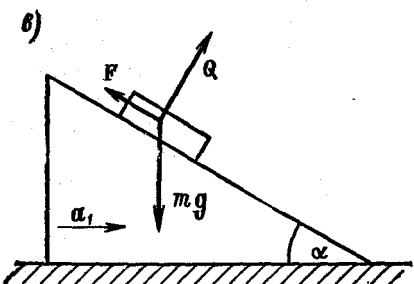
Исключая Q , находим

$$a_1 = g \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}. \quad (2)$$

Итак, если ускорение плоскости $a < a_1$, брусок соскальзывает вниз.

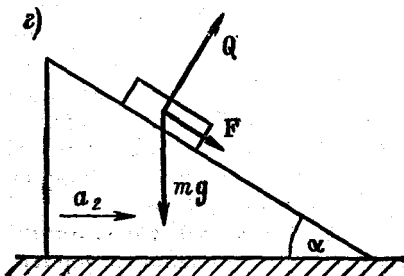


Заметим, что при $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ a_1 оказывается отрицательным. Какой в этом смысл? Напомним, что при $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ брусок не будет соскальзывать и при $a = 0$ (наклонная плоскость неподвижна или движется равномерно). Брусок не будет соскальзывать и при $a < 0$, когда ускорение плоскости направлено влево, до тех пор, пока величина ускорения не превосходит $|a_1|$. Действительно, уравнения (1) справедливы и тогда, когда ускорение a_1 направлено влево, если под a_1 понимать его проекцию на горизонтальное направление.



Таким образом, мы нашли условие соскальзывания бруска при любых μ и α :

$$a < g \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$



Пусть теперь ускорение плоскости a немного больше a_0 . Тогда при $\mu = 0$ брусок перемещался бы вверх вдоль плоскости; при $\mu \neq 0$ возникает сила трения покоя, направленная вниз вдоль плоскости, и брусок остается неподвижным на плоскости. С ростом a увеличивается и сила трения, и когда ускорение становится таким, что величина силы трения F дости-

К задаче 4.

гает своего максимального значения μQ , брусок начинает скользить вверх. Выясним, при каком ускорении плоскости a_2 сила трения становится равной μQ (рисунок *з*). Составляя, как и раньше, уравнение движения бруска $mg + Q + F = ma_2$ и проектируя его на те же направления:

$$mg \sin \alpha + \mu Q = ma_2 \cos \alpha,$$

$$Q - mg \cos \alpha = ma_2 \sin \alpha,$$

находим

$$a_2 = g \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

Итак, если ускорение плоскости $a > a_2$, брусок скользит вверх. Заметим, что a_2 при $\mu = \operatorname{ctg} \alpha$ обращается в бесконечность. Это означает, что при $\mu > \operatorname{ctg} \alpha$ брусок не будет скользить вверх ни при каком ускорении плоскости.

Собирая вместе все полученные результаты, можно записать условие неподвижности бруска на наклонной плоскости в следующем виде:

$$g \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq a \leq \begin{cases} g \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}, & \mu < \operatorname{ctg} \alpha; \\ \infty, & \mu \geq \operatorname{ctg} \alpha. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 5

Однородной тонкой шайбе, лежащей на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщают вращение и одновременно поступательное движение со скоростью v_0 (рисунок *а*). По какой траектории движется центр шайбы? В каком случае шайба пройдет больший путь до остановки: вращаясь или не вращаясь (v_0 одинакова в обоих случаях)?

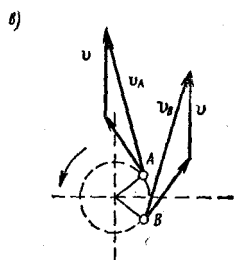
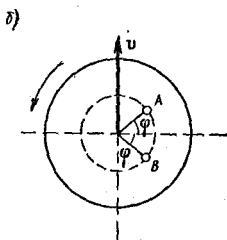
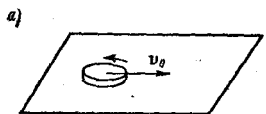
РЕШЕНИЕ

Всем любителям хоккея с шайбой, конечно, хорошо известно, что шайба скользит по льду по прямой линии независимо от того, вращается шайба или нет. Попробуем разобраться, почему это так.

Прежде всего напомним, что движение центра масс (в данном случае центра шайбы) определяется векторной суммой всех сил, действующих на тело, независимо от того, где они приложены. Силы, определяющие траекторию центра шайбы — это силы трения о лед. Поскольку на опыте мы видим, что центр шайбы движется прямолинейно, то равнодействующая всех сил трения, действующих на различные элементы шайбы, должна быть направлена в сторону, противоположную вектору скорости центра шайбы. Раз уж мы догадались, что требуется доказать для ответа на первый вопрос задачи, то теперь нетрудно сообразить, как это сделать.

Рассмотрим два одинаковых элемента шайбы *A* и *B* (рисунок *б*), расположенных симметрично относительно диаметра шайбы, перпендикулярного к скорости движения центра *v*. На рисунке *в* приведено

построение скоростей элементов A и B относительно поверхности, по которой скользит шайба: скорость каждого элемента шайбы равна векторной сумме линейной скорости вращения этого элемента вокруг центра шайбы и скорости движения центра. Из рисунка *в* ясно, что скорости элементов v_A и v_B отклонены от направления движения центра шайбы v в противоположные стороны на один и тот же угол. Действующие на эти элементы силы трения F_A и F_B



К задаче 5.

равны по величине, так как выбраны одинаковые по площади элементы A и B и, следовательно, одинаковы силы давления этих элементов на плоскость. Направления сил F_A и F_B противоположны векторам v_A и v_B скоростей этих элементов относительно плоскости. Поэтому сумма $F_A + F_B$ направлена антипараллельно v (сумма составляющих сил трения, перпендикулярных направлению скорости центра шайбы v , равна нулю). Очевидно, что всю шайбу можно разбить на такие пары элементов, и поэтому равнодействующая всех сил трения направлена противоположно скорости центра шайбы. Эта сила только уменьшает скорость шайбы, не изменяя ее направления. Следовательно, центр шайбы движется по прямой линии.

Отметим, что полученный результат справедлив для любой зависимости величины силы трения от скорости, ибо в рассуждениях использовалось только то, что сила трения направлена противоположно относительной скорости.

Ответить на второй вопрос задачи теперь совсем просто: вращающаяся шайба пройдет большее расстояние до остановки. В самом деле, в отсутствие вращения все силы трения, действующие на отдельные элементы шайбы, направлены в одну сторону антипараллельно v . При вращении шайбы эти силы трения при прежних абсолютных значениях направлены по-разному для различных элементов шайбы и их сумма по величине меньше, чем в первом случае. Чем сильнее закручена шайба, тем дальше она скользит!

Обратите внимание на то, что в последних рассуждениях использовалось предположение о независимости величины силы трения скольжения от величины относительной скорости, что хорошо выполняется при сухом трении.

Итак, хоккейная шайба скользит по льду по прямой. Другое дело в футболе! После «резаного» удара закрученный футбольный мяч летит по весьма замысловатой кривой, изменяя направление движения по горизонтали. Все дело здесь, конечно, в сопротивлении

воздуха, которое при скольжении хоккейной шайбы практически никакой роли не играет. Для объяснения искривленной в горизонтальном направлении траектории крученого футбольного мяча нужно представить себе картину обтекания вращающегося шара набегающим потоком воздуха. Появление при этом «боковой» силы, вызывающей искривление траектории, носит название эффекта Магнуса.

ЗАДАЧА 6

Тело сбрасывается в воду с некоторой высоты без начальной скорости; при этом измеряется глубина погружения за одну секунду после вхождения в воду. Установлено, что если начальную высоту изменить в k раз, то глубина погружения изменится в l раз. При каких соотношениях между k и l тело тонет в воде? Сопротивлением воздуха и воды пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Любой физический процесс представляет собой сложное явление. Составляя условие задачи, мы фактически всегда упрощаем рассматриваемые явления, отбрасывая несущественные, а часто, к сожалению, и существенные стороны. Например, решая задачи о движении тела, брошенного под углом к горизонту, мы пренебрегали сопротивлением воздуха.

В рассматриваемой задаче, например, предлагается пренебречь сопротивлением воды. Если пренебрежение сопротивлением воздуха часто бывает оправданным (особенно при малых скоростях), то пренебрегать сопротивлением воды в этой задаче нельзя, так как получаемые при таком пренебрежении результаты не имеют ничего общего с действительностью: бессмысленно было бы проверять полученный ответ на опыте. Действительно, мы не учитываем фонтан брызг, поднимаемых телом при ударе о воду; расходящуюся по поверхности волну; вязкость воды; не учитываем движение воды, вытесняемой телом.

И все же такие «нефизические» задачи имеют право на существование: во-первых, благодаря четкой постановке задачи (в условии указано, чем пренебречь) они позволяют научиться применять физические законы для количественного анализа искусственно упрощенных явлений; во-вторых, в некоторых случаях такое решение может послужить основой (нулевым приближением) для дальнейших уточнений.

Но вернемся к нашей «нефизической» задаче. Даже при таких упрощениях на первый взгляд неясно, с чего начинать. Обратимся к вопросу, поставленному в задаче: при каком условии тело тонет в воде? Тело тонет, если его масса m больше массы воды m_0 того же объема, что и тело. Таким образом, требуется выяснить, при каких условиях $m_0/m < 1$.

Движение тела в воде происходит под действием двух постоянных сил: силы тяжести mg и выталкивающей силы Архимеда —

$m_0 g$ и, следовательно, будет равнопеременным с ускорением $a = g(1 - m_0/m)$. Поскольку скорость тела перед входом в воду $v_0 = \sqrt{2gh}$, то величина перемещения тела в воде за время t равна

$$S_1 = \sqrt{2gh} t + \frac{1}{2} g \left(1 - \frac{m_0}{m}\right) t^2.$$

Во втором случае, когда тело сброшено с высоты kh , перемещение тела в воде S_2 за то же время t равно

$$S_2 = \sqrt{2kgh} t + \frac{1}{2} g \left(1 - \frac{m_0}{m}\right) t^2.$$

По условию задачи $S_2/S_1 = l$, т. е.

$$\frac{\sqrt{2kgh} + g(1 - m_0/m) t/2}{\sqrt{2gh} + g(1 - m_0/m) t/2} = l. \quad (1)$$

Обозначим для удобства $g(1 - m_0/m) t/2$ через x . Тело будет тонуть при $m_0/m < 1$, т. е. при $x > 0$. Запишем уравнение (1), используя введенное обозначение:

$$\sqrt{2gkh} + x = l(\sqrt{2gh} + x).$$

Выясним, при каком условии корень этого уравнения $x = \sqrt{2gh}(\sqrt{k} - l)/(l - 1)$ положителен. Элементарным анализом можно убедиться, что при $k > 1$ x положительно при $l < \sqrt{k}$, а при $k < 1$ $x > 0$ при $l > \sqrt{k}$.

ЗАДАЧА 7

В результате трения в верхних слоях атмосферы механическая энергия спутника Земли за много витков уменьшилась на 2%. Орбита спутника при этом как была, так и осталась круговой. Как изменились параметры орбиты: радиус r , скорость v , период обращения T ?

РЕШЕНИЕ

В системе отсчета, связанной с Землей, механическая энергия спутника E есть сумма его кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия с Землей (R — радиус Земли):

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{mgR^2}{r}. \quad (1)$$

Так как орбита спутника круговая, то величина его скорости постоянна и связана с радиусом орбиты соотношением

$$v^2 = \frac{gR^2}{r}. \quad (2)$$

С помощью (2) выражение для энергии спутника (1) можно представить в виде

$$E(r) = -\frac{mgR^2}{r} + \frac{mgR^2}{2r} = -\frac{mgR^2}{2r}. \quad (3)$$

Проиллюстрируем соотношение (3) графически. На рисунке показана зависимость потенциальной, кинетической и полной энергии спутника от радиуса r круговой орбиты. Из рисунка видно, что уменьшение механической энергии спутника приводит к уменьшению радиуса орбиты. Поскольку при нашем выборе начала отсчета потенциальной энергии полная энергия спутника всегда отрицательна, относительное изменение энергии $\Delta E/E$ положительно при ее уменьшении ($\Delta E < 0$). Так как по условию полная энергия уменьшилась на 2%, то $\Delta E/E$ положительно и равно 0,02. Соотношение (3) позволяет связать изменение энергии спутника с изменением радиуса орбиты Δr :

$$E(r + \Delta r) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{mgR^2}{r + \Delta r} = E(r) + \Delta E. \quad (4)$$

Правую часть этого выражения при $\Delta r/r \ll 1$ приближенно можно записать так:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{mgR^2}{r(1 + \Delta r/r)} \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{mgR^2}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right) = E(r) \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right). \quad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем $E + \Delta E = E(1 - \Delta r/r)$, т. е. $\Delta r/r = -\Delta E/E = -0,02$. Радиус орбиты также уменьшился на 2%.

Изменение скорости спутника при изменении орбиты легко выразить через изменение радиуса орбиты с помощью соотношения (2):

$$(v + \Delta v)^2 = \frac{gR^2}{r + \Delta r}. \quad (6)$$

Поскольку $\Delta v/v \ll 1$, левую часть этого соотношения приближенно можно записать в виде

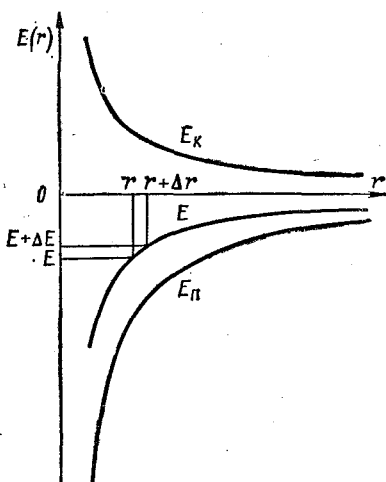
$$v^2 \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^2 \approx v^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta v}{v}\right).$$

Преобразовав правую часть формулы (6) так же, как и при переходе от (4) к (5), получим

$$v^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{gR^2}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right),$$

откуда, учитывая (2), находим $\Delta v/v = -\frac{1}{2} \Delta r/r = \frac{1}{2} \Delta E/E = 0,01$.

Скорость спутника увеличилась на 1%. Обратите внимание, что слабое торможение спутника в верхних слоях атмосферы приводит к увеличению его скорости!



К задаче 7.

Осталось найти изменение периода обращения. Это легко сделать, зная $\Delta r/r$ и $\Delta v/v$, поскольку период связан с радиусом орбиты и скоростью спутника соотношением $T = 2\pi r/v$. Записывая значение периода обращения при изменившихся радиусе орбиты и скорости спутника

$$T + \Delta T = 2\pi \frac{r + \Delta r}{v + \Delta v}$$

и преобразуя правую часть подобно тому, как это делалось выше:

$$2\pi \frac{r(1 + \Delta r/r)}{v(1 + \Delta v/v)} \approx T \left(1 + \frac{\Delta r}{r} - \frac{\Delta v}{v} \right),$$

находим $\Delta T/T = \Delta r/r - \Delta v/v = -\frac{3}{2} \Delta E/E = -0,03$. Период обращения уменьшился на 3%.

ЗАДАЧА 8

С полюса Земли запускают две ракеты, одну вертикально вверх, другую горизонтально. Начальные скорости обеих ракет равны v_0 , причем величина v_0 больше первой космической скорости и меньше второй. Какая из ракет удалится дальше от центра Земли и во сколько раз? Сопротивлением воздуха пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим вначале более простой случай, когда ракета запускается вертикально вверх. Поскольку единственная сила, действующая на ракету в свободном полете, есть сила притяжения к Земле, направленная вертикально вниз, то ракета полетит по прямой, проходящей через центр Земли. Так как начальная скорость ракеты меньше второй космической скорости, ракета не может удалиться на бесконечность: на некотором расстоянии r_1 от центра Земли она остановится и начнет падать назад. Точку максимального удаления проще всего найти из энергетических соображений. Действительно, так как полная механическая энергия системы ракета — Земля сохраняется, энергия в начале полета ($mv_0^2/2 - mgR$) равна энергии в точке остановки ($-mgR^2/r_1$). Отсюда сразу находим расстояние максимального удаления от центра Земли

$$r_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}.$$

Прежде чем вычислять величину максимального удаления ракеты при горизонтальном запуске, выясним вопрос о форме траектории. Поскольку начальная скорость ракеты превышает первую космическую, но меньше второй, ракета движется по эллипсу, у которого фокус находится в центре Земли, а начальная точка полета является перигеем. Большая ось эллипса проходит через эту точку и центр Земли (рисунок). Интересующая нас точка наибольшего удаления от центра Земли — апогей — лежит на противоположном конце большой оси, и скорость ракеты v_2 в этой точке, разумеется,

отлична от нуля и направлена перпендикулярно большой оси эллипса.

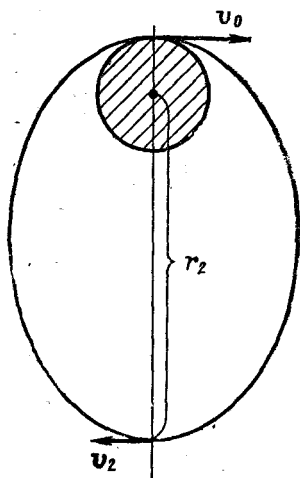
Для нахождения величины r_2 опять можно воспользоваться законом сохранения энергии. Уже отсюда легко увидеть, что максимальное удаление ракеты r_2 в этом случае будет меньше, чем r_1 :

$$\frac{mv_0^2}{2} - mgR = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_2}.$$

Уравнение содержит две неизвестные величины v_2 и r_2 и поэтому имеет бесчисленное множество решений. Что бы это могло означать? Перечитав еще раз наши рассуждения, легко заметить, что в уравнение закона сохранения энергии не вошли никакие признаки, которые характеризовали бы точку r_2 как точку наибольшего удаления. Точно такое же уравнение мы получили бы и для любой другой точки траектории. Заметим, что в первом случае при вертикальном запуске ракеты точка максимального удаления была уже выделена в уравнении закона сохранения энергии, так как только в этой точке кинетическая энергия ракеты обращается в нуль. Подумаем, какое условие следует добавить к уравнению баланса энергии во втором случае, чтобы учесть особенности точки наибольшего удаления, отличающие ее от всех других точек траектории. Мы уже заметили, что в этой точке скорость перпендикулярна к направлению на центр Земли. Этот факт позволяет нам в простом виде применить второй закон Кеплера о постоянстве секторной скорости, учитывая, что точно таким же свойством обладает и начальная точка траектории: по условию задачи начальная скорость ракеты v_0 перпендикулярна направлению на центр Земли. Во всех остальных точках траектории это не так.

Добавляя к уравнению баланса энергии закон Кеплера для точек, в которых скорость перпендикулярна направлению на центр Земли: $v_0 R = v_2 r_2$, получаем систему уравнений для нахождения r_2 , причем из наших рассуждений вытекает, что эта система должна иметь два решения, соответствующих перигею и апогею. Легко убедиться, что после подстановки $v_2 = v_0 R / r_2$ уравнение баланса энергии превращается в квадратное уравнение относительно r_2 , корни которого равны R и $r_2 = v_0^2 R / (2gR - v_0^2)$; сравнивая r_2 с r_1 , получаем

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2gR}{v_0^2} = \left(\frac{v_{II}}{v_0} \right)^2 > 1.$$

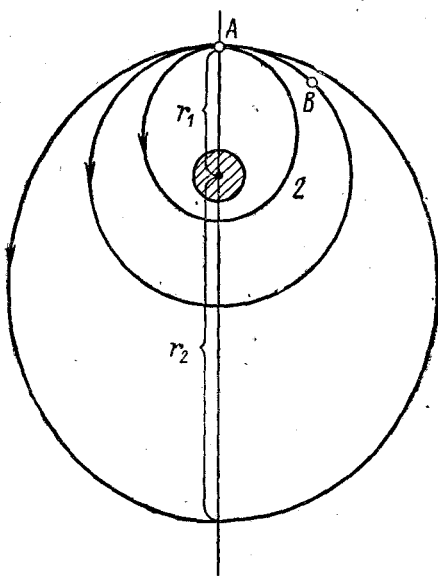


К задаче 8.

Два искусственных спутника Земли движутся по одной и той же круговой орбите на расстоянии L друг от друга, причем величина L много меньше радиуса орбиты. Период обращения спутников равен T . Как можно сблизить спутники на орбите, если на одном из них есть двигатель, с помощью которого можно практически мгновенно сообщить некоторую дополнительную скорость Δv , малую по сравнению с орбитальной скоростью и направленную по касательной к траектории? Как скорость Δv связана с L и T ?

РЕШЕНИЕ

На рисунке показана круговая траектория радиусом r_1 , по которой движутся спутники на расстоянии L друг от друга. Если в произвольной точке A спутнику сообщить дополнительную скорость



К задаче 9.

скорость Δv в направлении орбитального движения, то он будет двигаться по эллиптической орбите 1 с фокусом в центре Земли. Период обращения по такой орбите больше, чем по круговой. Если же дополнительную скорость Δv в точке A направить против движения по орбите, то спутник перейдет на эллиптическую орбиту 2, период обращения по которой меньше T .

Отсюда становится ясным, какие маневры следует проводить для сближения спутников. Прежде всего отметим, что поскольку круговая и эллиптические орбиты имеют только одну общую точку A , встреча спутников может произойти только в этой точке.

Поэтому встреча может произойти только через промежуток времени после совершения маневра,

кратный периоду обращения спутника по эллиптической орбите. Если двигатель установлен на спутнике, идущем впереди, то его нужно разогнать, переводя на орбиту 1. Если же двигатель находится на спутнике, идущем сзади, то его нужно тормозить, переводя на орбиту 2. Обратите внимание на кажущийся парадокс: для того чтобы догнать, нужно притормозить!

Для определенности рассмотрим первый случай: в момент совершения маневра пассивный спутник находится в точке B , отстоящей на L от точки A . Найдем величину дополнительной скорости

Δv , которую нужно сообщить активному спутнику, чтобы встреча произошла через один оборот. Обозначим через v скорость движения по круговой орбите. Тогда период обращения T_1 по эллиптической орбите должен быть больше периода обращения T по круговой на время прохождения дуги L по круговой орбите:

$$T_1 - T = L/v. \quad (1)$$

Найдем связь между периодом обращения T_1 по эллиптической орбите и той добавочной скоростью Δv , которая переводит спутник на эту орбиту. В этом нам помогут законы Кеплера. На основании третьего закона Кеплера

$$T_1^2 = T^2 \frac{a^3}{r_1^3}, \quad (2)$$

где $a = (r_1 + r_2)/2$ — большая полуось эллипса (см. рисунок).

Для того чтобы связать расстояние r_2 от центра Земли до апогея эллиптической орбиты с Δv , воспользуемся вторым законом Кеплера и законом сохранения энергии: обозначив через $v_1 = v + \Delta v$ и v_2 скорости спутника в перигее и апогее эллиптической орбиты, имеем

$$r_1 v_1 = r_2 v_2, \quad (3)$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mgR^2}{r_2}. \quad (4)$$

Здесь m — масса спутника, R — радиус Земли. Выражая v_2 из (3) и подставляя в (4), получаем

$$\frac{1}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = \frac{gR^2}{r_1} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right). \quad (5)$$

Замечая, что gR^2/r_1 есть квадрат скорости спутника на круговой орбите радиусом r_1 , из уравнения (5) получаем

$$r_2 = \frac{r_1}{2v^2/v_1^2 - 1}.$$

Отсюда большая полуось эллипса

$$a = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) = \frac{r_1}{2 - v_1^2/v^2}.$$

Поскольку по условию добавочная скорость Δv много меньше скорости орбитального движения v , то

$$\frac{v_1^2}{v^2} = \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^2 \approx 1 + 2 \frac{\Delta v}{v}.$$

Теперь для большой полуоси имеем $a \approx r_1 (1 + 2\Delta v/v)$. Подставим полученное выражение для a в уравнение третьего закона Кеплера (2). Возводя отношение a/r_1 в куб и учитывая, что $\Delta v/v \ll 1$, находим $T_1^2 \approx T^2 (1 + 6\Delta v/v)$, откуда

$$T_1 - T \approx 3T \Delta v/v. \quad (6)$$

Сравнивая (1) и (6), видим, что

$$\Delta v = \frac{L}{3T}. \quad (7)$$

Итак, если мы хотим, чтобы встреча спутников произошла через один оборот, то идущему впереди спутнику нужно сообщить добавочную скорость Δv , определяемую соотношением (7).

Чтобы встреча произошла через n оборотов, нужно сообщить добавочную скорость $\Delta v = L/(3nT)$. Подумайте сами, как получить этот результат.

Таким образом, мы можем израсходовать тем меньше топлива для совершения маневра, чем больше времени согласны ждать встречи.

Не забудьте, что после завершения маневра сближения, для того чтобы перевести спутник снова на круговую орбиту, придется погасить сообщенную ему добавочную скорость, т. е. еще раз включить двигатель.

Второй случай, когда требуется «догнать» идущий впереди спутник, рассмотрите самостоятельно. Вы получите такое же выражение для Δv .

ЗАДАЧА 10

Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом r . В какой пропорции сообщенная ему при запуске энергия поделилась между потенциальной и кинетической энергиями?

РЕШЕНИЕ

Кинетическую энергию спутника $mv^2/2$, учитывая, что он движется по круговой орбите, удобно выразить через радиус орбиты r :

$$E_k = \frac{mgR^2}{2r}. \quad (1)$$

Находясь на поверхности Земли, спутник уже обладает потенциальной энергией. Если, как обычно, выбрать начало отсчета потенциальной энергии на бесконечности, потенциальная энергия спутника на поверхности Земли будет

$$E_n(R) = -mgR,$$

а потенциальная энергия на орбите

$$E_n(r) = -\frac{mgR^2}{r}.$$

Следовательно, при выводе спутника на орбиту ему была сообщена потенциальная энергия

$$E_n = E_n(r) - E_n(R) = mgR \left(1 - \frac{R}{r}\right) \quad (2)$$

Составляя отношение (1) к (2), находим

$$\frac{E_k}{E_n} = 2 \frac{r-R}{R}.$$

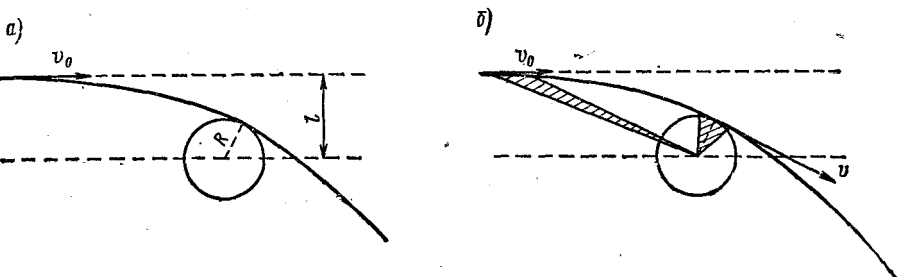
Но $r - R$ равно высоте орбиты H над поверхностью Земли. Итак, $E_{\text{п}}/E_{\text{к}} = 2H/R$, т. е. отношение сообщенной потенциальной энергии к сообщенной кинетической пропорционально высоте орбиты.

ЗАДАЧА 11

На большом расстоянии от Земли метеорит движется относительно нее со скоростью v_0 . Если бы земное притяжение отсутствовало, метеорит прошел бы на расстоянии l от центра Земли (рисунок *а*). При каком наибольшем значении «прицельного» расстояния l метеорит будет захвачен Землей?

РЕШЕНИЕ

На большом расстоянии от Земли, где потенциальную энергию взаимодействия с Землей можно считать равной нулю, метеорит имеет скорость v_0 , и его полная энергия равна кинетической $mv_0^2/2$. Если бы начальная скорость метеорита v_0 была бы равна нулю, то,



К задаче 11.

двигаясь только под действием силы притяжения к Земле, он обязательно упал бы на Землю и при падении имел бы у поверхности Земли скорость, равную второй космической $v_{11} = 11,2$ км/с, в чем легко убедиться с помощью закона сохранения энергии. Ясно, что траектория метеорита в этом случае — прямая, проходящая через центр Земли. Если же на бесконечности начальная скорость метеорита отлична от нуля, то он в поле земного тяготения движется по гиперболе и будет захвачен Землей только тогда, когда эта гипербола «заденет» земной шар. Нетрудно сообразить, что при заданном прицельном расстоянии l траектория метеорита будет тем меньше искривлена, чем больше его скорость v_0 , так что достаточно быстрые метеориты благополучно минуют Землю. Очевидно, что наименьшей скорости v_0 , при которой метеорит еще «проскочит» Землю, соответствует траектория, изображенная на рисунке *а*. И наоборот, при заданной начальной скорости v_0 эта траектория соответствует наибольшему прицельному расстоянию l , при котором метеорит будет захвачен Землей. Итак, для получения ответа на поставленный вопрос нужно рассмотреть траекторию, касающуюся земного шара.

При движении метеорита в поле тяжести Земли выполняется закон сохранения механической энергии

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 - mgR, \quad (1)$$

где v — скорость метеорита в точке касания, отстоящей от центра Земли на расстоянии R . Второй закон Кеплера о постоянстве секторной скорости при движении тела в поле тяжести справедлив и для разомкнутых траекторий. Поэтому приравняем секторные скорости метеорита в бесконечно удаленной от Земли точке и в точке касания

$$lv_0 = Rv. \quad (2)$$

Правая часть этого равенства очевидна, поскольку в точке касания вектор скорости v перпендикулярен радиусу Земли, а левая часть становится очевидной, если посмотреть на рисунок б. Подставляя v из уравнения (1) закона сохранения энергии в (2), находим l :

$$l = R \sqrt{1 + 2gR/v_0^2} = R \sqrt{1 + (v_{II}/v_0)^2}. \quad (3)$$

Из полученного ответа (3) видно, что максимальное прицельное расстояние, при котором метеорит будет захвачен Землей, зависит от величины скорости v_0 на бесконечности. Если $v_0 \rightarrow 0$, то $l \rightarrow \infty$, т. е. первоначально покоившийся относительно Земли метеорит упадет на Землю при любых обстоятельствах (разумеется, это справедливо в предположении, что Солнце и другие планеты практически не влияют на движение метеорита). Если $v_0 \rightarrow \infty$ (т. е. $v_0 \gg v_{II}$), то $l \rightarrow R$, т. е. в пределе бесконечно большой скорости v_0 траектория прямолинейна, так как за малое время пролета метеорита вблизи Земли сила земного притяжения не успевает вызвать заметного изменения импульса метеорита (т. е. искривить его траекторию), и метеорит попадет на Землю только тогда, когда его прицельное расстояние l не превосходит радиуса Земли.

В приведенном решении не учитывалось влияние земной атмосферы на траекторию метеорита. Однако при расчете максимального прицельного расстояния по формуле (3) мы не получим заметной ошибки, так как толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли R .

ЗАДАЧА 12

На какой угол изменится направление скорости пролетающего мимо Земли метеорита под действием земного притяжения? Скорость метеорита на большом расстоянии от Земли равна v_0 , прицельное расстояние l .

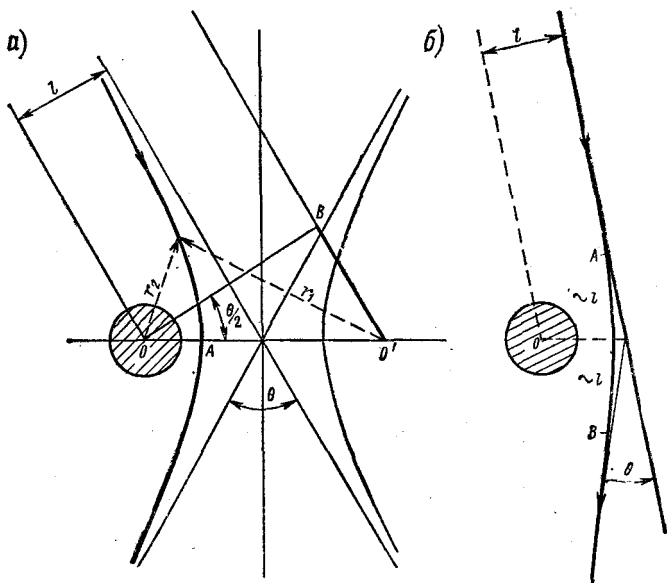
РЕШЕНИЕ

Прежде всего отметим условие, которому должны удовлетворять прицельное расстояние l и начальная скорость v_0 , для того чтобы метеорит миновал Землю:

$$l > R \sqrt{1 + 2gR/v_0^2}$$

(R — радиус Земли). В противном случае, как было показано в предыдущей задаче, метеорит будет захвачен Землей.

Качественно характер зависимости угла отклонения метеорита от скорости v_0 и прицельного расстояния l можно установить сразу: этот угол тем меньше, чем больше l (при заданной скорости v_0) — на пролетающий на большом расстоянии метеорит ослабевающее с расстоянием земное притяжение влияет слабо; угол отклонения тем меньше, чем больше скорость v_0 (при заданном l) — за малое время пролета метеорита сила земного тяготения не успевает вызвать заметного искривления его траектории.



К задаче 12.

Для получения количественного результата необходимо использовать некоторые свойства гиперболической траектории. Гипербола — это геометрическое место точек, разность расстояний до которых от двух заданных точек O и O' (называемых фокусами) постоянна: $r_1 - r_2 = \text{const}$ (рисунок а). Один из фокусов гиперболы (O) совпадает с центром Земли, второй фокус (O') лежит на прямой, проходящей через центр Земли и ближайшую к центру точку A траектории. На бесконечно больших расстояниях от Земли как при приближении, так и при удалении скорость метеорита направлена по асимптотам гиперболы, т. е. задача состоит в нахождении угла θ между асимптотами (см. рисунок а). Точка пересечения асимптот лежит посередине между фокусами.

Приравняем разности расстояний от фокусов O и O' до бесконечно удаленной точки ($O'B$ на рисунке а) и до ближайшей к центру Земли точки (A на рисунке а). Из треугольника $OO'B$ находим

$O'B = 2l \operatorname{tg} (\theta/2)$, $OO' = 2l/\cos (\theta/2)$. Разность расстояний от фокусов до точки A $AO' - AO = (OO' - AO) - AO$. Обозначим через r расстояние AO от центра Земли до ближайшей точки траектории. Теперь условие равенства разности расстояний до выбранных точек можно записать в виде

$$2l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2l}{\cos \frac{\theta}{2}} - 2r.$$

Переносим $2r$ в левую часть, возводя обе части в квадрат и используя тождество $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{l^2 - r^2}{2lr}. \quad (1)$$

При заданном прицельном расстоянии l расстояние r до ближайшей к центру Земли точки траектории зависит от величины скорости v_0 на бесконечности. Для того чтобы исключить r из формулы (1), воспользуемся, как и в предыдущей задаче, законом сохранения энергии

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 - mgR^2/r \quad (2)$$

(v — скорость метеорита в точке A) и вторым законом Кеплера

$$lv_0 = rv. \quad (3)$$

Из (2) и (3) легко находим

$$\frac{l^2 - r^2}{r} = \frac{2gR^2}{v_0^3},$$

что после подстановки в (1) дает

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{gR^2}{lv_0^3}. \quad (4)$$

Эта формула решает поставленную задачу: определяет угол отклонения метеорита в зависимости от прицельного расстояния и скорости на бесконечности. Угол $\theta/2$ монотонно возрастает от 0 до $\pi/2$ при уменьшении произведения lv_0^3 от ∞ до 0, что согласуется с приведенными выше качественными соображениями.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Наибольшее значение угла отклонения $\theta_{\max}$ получается из (4) при наименьшем возможном (при заданной скорости v_0) значении прицельного расстояния $l_{\min}$:

$$l_{\min} = R \sqrt{1 + 2gR/v_0^3} = R \sqrt{1 + (v_{II}/v_0)^2}$$

($l_{\min}$ и $\theta_{\max}$ соответствуют траектории, почти касающейся земного шара). Таким образом,

$$\theta_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{(v_{II}/v_0)^2}{2 \sqrt{1 + (v_{II}/v_0)^2}}. \quad (5)$$

Если скорость на бесконечности мала по сравнению со второй космической: $v_0 \ll v_{II}$, в знаменателе (5) под корнем можно прене-

бречь единицей:

$$\theta_{\max} \approx 2 \arctg \frac{v_{11}}{2v_0},$$

т. е. $\theta_{\max} \rightarrow \pi$ при $v_0/v_{11} \rightarrow 0$: при малой величине начальной скорости и надлежащем выборе ее направления (т. е. таком, чтобы метеорит все-таки миновал Землю) направление скорости метеорита после облета Земли изменится практически на противоположное. Именно по такому принципу выбирались траектории полета космических кораблей к Луне, для которых предусматривалась возможность пассивного (т. е. без использования двигателей) возвращения к Земле после облета Луны.

2) Угол отклонения метеорита будет мал, как видно из (4), при выполнении неравенства $gR^2/(lv_0^3) \ll 1$. В этом случае в (4) тангенс можно заменить его аргументом:

$$\theta \approx \frac{2gR^2}{lv_0^3}. \quad (6)$$

Правая часть этого выражения представляет собой отношение величины потенциальной энергии метеорита на расстоянии l от центра Земли mgR^2/l и его кинетической энергии на бесконечности $mv_0^2/2$.

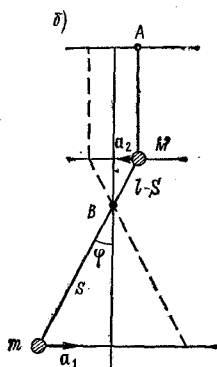
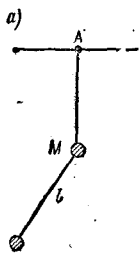
Интересно отметить, что приближенный результат (6) для отклонения на малый угол можно получить совершенно элементарно. Рассмотрим относящийся к этому случаю рисунок б. Грубо можно считать, что взаимодействие метеорита с Землей существенно только на ближайшем к Земле участке траектории AB длиной порядка $2l$; другие участки почти прямолинейны, так как там сила земного притяжения практически параллельна скорости метеорита. В рассматриваемом движении величина скорости практически неизменна, и продолжительность действия силы земного тяготения на метеорит можно принять $\Delta t \approx 2l/v_0$. Силу приближенно можно положить равной mgR^2/l^2 . Таким образом, приращение импульса метеорита Δp в направлении, перпендикулярном направлению его движения, составляет по порядку величины $\Delta p = F \Delta t \approx 2mgR^2/lv_0$. Отсюда для угла отклонения θ легко получить

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{mv_0} = \frac{2gR^2}{lv_0^3}.$$

ЗАДАЧА 13

Рассмотрим двойной маятник (рисунок а). Точка подвеса A совершает малые гармонические колебания в горизонтальном направлении. Массы шариков M и m известны. Длина нижнего маятника равна l . Каким должен быть период колебаний точки подвеса A , чтобы верхняя нить все время оставалась вертикальной?

Рассмотрим систему шариков m и M , соединенных нитью длиной l . Допустим, мы подобрали такой период колебаний T точки подвеса, что при колебаниях нашего двойного маятника верхняя нить все время остается вертикальной. Это значит, что все внешние силы, действующие на выделенную систему, а именно силы тяжести и сила натяжения верхней нити направлены по вертикали. Отсюда следует, что центр инерции системы не перемещается в горизонтальном направлении. Другими словами, шары в любой момент движутся в противоположных направлениях, а отношение их ускорений обратно пропорционально отношению масс (рисунок б):



К задаче 13.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M}{m}. \quad (1)$$

С другой стороны, непосредственно из рисунка б видно, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{S}{l-S}. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим

$$S = \frac{l}{1+m/M}. \quad (3)$$

Попробуем теперь представить себе, что это за колебания. Ускорения обоим шарам сообщает горизонтальная составляющая силы натяжения нижней нити. Поскольку точка B (центр тяжести шаров) по горизонтали не перемещается, движение нижнего шара можно представить себе как свободные колебания математического маятника длиной S . Период таких колебаний с малой амплитудой, как известно, равен $T = 2\pi \sqrt{S/g}$. Подставляя сюда S из формулы (3), получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(1+m/M)}}.$$

Заметим, что точно такие же колебания шаров можно получить, если верхний шар не подвешивать на нити, а насадить на гладкий горизонтальный стержень, по которому он может скользить без трения. Сила реакции такого стержня направлена все время вертикально вверх и выполняет ту же роль, что и сила натяжения верхней вертикальной нити — поддерживает верхний шар на одном и том же уровне, не сообщая ему никакого горизонтального ускорения. Отсюда ясно, что ответ не зависит от длины верхней нити.

Интересно отметить, что рассматриваемые нами колебания этой системы шаров не являются вынужденными: при отсутствии трения

это есть свободные незатухающие колебания. Силу натяжения верхней нити нельзя рассматривать как «вынуждающую», так как будучи перпендикулярной перемещению эта сила работы не совершает, т. е. энергия к этой системе не подводится.

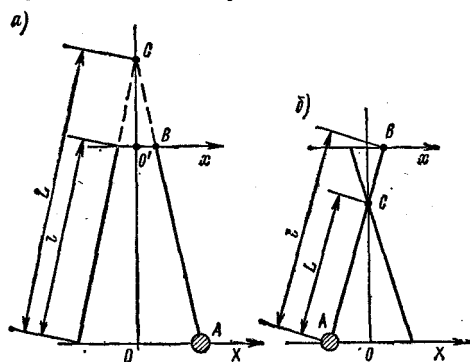
Приведенное решение справедливо при малых амплитудах колебаний нижнего маятника. Подумайте, почему.

ЗАДАЧА 14

Точка подвеса математического маятника длиной l движется под действием внешней силы в горизонтальном направлении по закону $x(t) = x_0 \sin \omega t$. Найти установившиеся вынужденные колебания маятника.

РЕШЕНИЕ

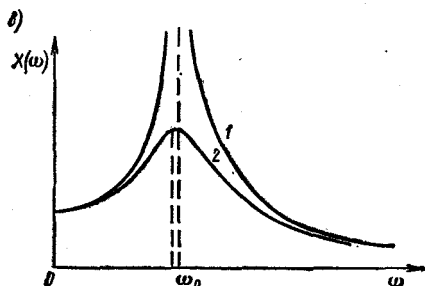
Задача состоит в нахождении *установившихся* вынужденных колебаний маятника. При нахождении вынужденных колебаний будем пренебрегать трением, однако необходимо отчетливо представлять себе, что установление колебаний принципиально возможно лишь при наличии затухания. С одной стороны, мы собираемся решать



задачу без учета сил трения, а с другой стороны, как только что отмечено, силы трения необходимы.

Будет ли полученное решение иметь смысл? Да, будет, но только оно будет описывать движение маятника с малым затуханием спустя достаточно большой промежуток времени после того, как точка подвеса приведена в движение. Слова «достаточно большой промежуток времени» означают здесь, что несмотря на малое затухание переходный процесс уже закончился.

Из условия задачи нам известны амплитуда x_0 и круговая частота ω колебаний точки подвеса. Очевидно, что вы-



К задаче 14.

нужденные колебания будут происходить с той же самой частотой ω , в то время как частота свободных колебаний этого маятника равна $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Основная идея решения заключается в том, чтобы

представить вынужденные колебания данного маятника как свободные колебания некоторого другого маятника. Очевидно, что длина этого маятника L должна определяться из условия $\omega = \sqrt{g/L}$. Здесь могут представиться разные случаи: частота ω может быть меньше, больше или равна собственной частоте свободных колебаний данного математического маятника.

Рассмотрим сначала случай $\omega < \omega_0$, т. е. частота колебаний точки подвеса меньше частоты свободных колебаний. В этом случае длина L воображаемого маятника больше, чем l (рисунок а). Поскольку рассматриваются малые колебания, можно считать, что нижний конец A маятника движется по прямой — ось X на рисунке. Если движение точки A происходит по закону $X(t) = X_0 \sin \omega t$, то, как сразу видно из рисунка, точка B , находящаяся на расстоянии l от нижнего конца, совершает движение вдоль оси x по закону $x(t) = x_0 \sin \omega t$, совпадающему с заданным движением точки подвеса. Теперь нетрудно представить себе, что если в качестве точки B взять точку подвеса маятника l , то движение его нижнего конца будет таким же, как и у воображаемого маятника L . Таким образом, вынужденное колебание происходит в той же фазе, что и движение точки подвеса, а амплитуду этого колебания X_0 можно определить из очевидных геометрических соображений:

$$X_0 = x_0 \frac{L}{L-l} = x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

(Здесь мы подставили выражения для длин маятников через частоты.) Обратим внимание на то, что при стремлении частоты колебаний точки подвеса к частоте свободных колебаний амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает (резонанс). Вблизи резонанса полученное нами решение неприменимо, так как, во-первых, мы исходили из предположения малости колебаний и, во-вторых, вблизи резонанса нельзя пренебречь затуханием, ибо только при учете затухания амплитуда в резонансе получается конечной.

В случае $\omega > \omega_0$ длина воображаемого маятника $L < l$ (рисунок б). Рассуждая аналогично предыдущему случаю, легко прийти к выводу, что движение нижнего конца маятника l (точка A на рисунке б) происходит в противофазе с движением точки подвеса B . Амплитуда вынужденных колебаний опять легко определяется из геометрических соображений. Приведем окончательный результат: вынужденные колебания маятника описываются уравнением

$$X(t) = X_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{где } \varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < \omega_0, \\ \pi & \text{при } \omega > \omega_0; \end{cases}$$

$$X_0 = \begin{cases} \frac{x_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} & \text{при } \omega < \omega_0, \\ \frac{x_0 \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} & \text{при } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

На рисунке *в* приведена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты движения точки подвеса. Кривая 1 соответствует идеализированному случаю, когда затухание отсутствует. Кривая 2 соответствует наличию затухания; при этом оказывается, что максимум амплитуды вынужденных колебаний (резонанс) приходится на частоту, несколько меньшую частоты ω_0 свободных колебаний. Сдвиг частоты тем больше, чем больше затухание. С ростом затухания уменьшается амплитуда вынужденных колебаний.

Статика

Статика изучает равновесие твердых тел. В инерциальной системе отсчета твердое тело находится в равновесии, если векторная сумма всех действующих на тело сил и векторная сумма моментов этих сил равны нулю. При выполнении первого условия равно нулю ускорение центра инерции тела. При выполнении второго условия отсутствует угловое ускорение вращения. Поэтому, если в начальный момент тело покоилось, то оно будет оставаться в покое и дальше.

Во всех задачах этого раздела рассматриваются сравнительно простые системы, в которых все действующие силы лежат в одной плоскости. В этом случае векторное условие $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ сводится к двум скалярным

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0,$$

если расположить оси x и y в плоскости действия сил.

Для плоской системы сил моменты всех сил направлены перпендикулярно плоскости, в которой лежат силы (если моменты рассматриваются относительно точки, лежащей в этой же плоскости). Поэтому векторное условие для моментов сводится к одному скалярному: в положении равновесия алгебраическая сумма моментов всех действующих сил равна нулю. (При этом моменты, стремящиеся повернуть тело по часовой стрелке, берутся с одним знаком, против часовой стрелки — с противоположным.) Выбор точки, относительно которой рассматриваются моменты сил, производится исключительно по соображениям удобства: уравнение моментов будет тем проще, чем больше сил будут иметь равные нулю моменты. Напомним, что величина момента силы $\mathbf{F}$ относительно точки O равна произведению величины силы F на расстояние от точки O до линии действия силы.

Равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным. Равновесие устойчиво, если при малых смещениях тела из положения равновесия действующие силы стремятся вернуть его об-

ратно, и неустойчиво, если силы уведут его дальше от положения равновесия. Если же при малых смещениях действующие на тело силы и их моменты по-прежнему уравниваются, то равновесие безразличное.

Устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии тела по отношению к ее значениям в соседних положениях тела. Этим свойством часто удобно пользоваться при отыскании положения равновесия и исследовании характера равновесия. Во многих задачах статики, как и в других разделах физики, часто оказывается весьма эффективным использование закона сохранения энергии.

ЗАДАЧА 1

Электромонтер весом P поднялся до середины очень легкой лестницы-стремянки, стоящей на горизонтальном полу. Стремянка состоит из двух одинаковых частей, шарнирно соединенных вверху и связанных веревкой у основания (рисунок *а*). Определить, какое натяжение должна выдержать веревка, если лестница образует с полом угол α . Трением стремянки о пол пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Обычно в таких задачах стремятся сразу изобразить как можно больше действующих в рассматриваемой системе сил, затем разлагают их на составляющие, пытаются уравновесить отдельные составляющие. Такой подход едва ли можно считать оптимальным, так как даже в лучшем случае, если удастся избежать ошибок, затраты труда значительно превышают необходимые.

Для того чтобы решение было рациональным, следует вначале рассмотреть внешние силы, действующие на систему, и написать условие равновесия системы в целом. Если при этом не удастся получить ответы на поставленные в задаче вопросы, следует вводить в рассмотрение внутренние силы — силы взаимодействия между различными частями системы.

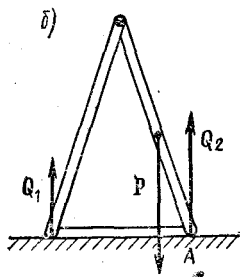
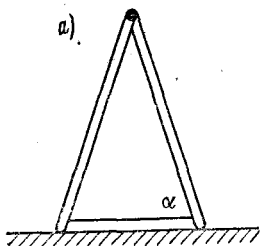
Поясним все сказанное на примере обсуждаемой задачи. Внешними силами по отношению к рассматриваемой системе лестница — электромонтер является сила тяжести электромонтера P и две силы реакции пола Q_1 и Q_2 (рисунок *б*). Условие равновесия системы (учитывая, что система сил плоская) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q_1 + Q_2, \\ Q_1 \cdot 2l \cos \alpha &= P (l/2) \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первое уравнение представляет собой условие равновесия сил, второе — условие равновесия моментов относительно точки A . Система уравнений (1) позволяет найти силы реакции пола. Сила натяжения веревки для рассматриваемой системы является внутренней силой и поэтому не может быть определена из написанных

уравнений. В системе могут действовать и другие внутренние силы, в частности в этой задаче силы взаимодействия лестниц в шарнире. Для определения внутренних сил необходимо рассматривать условия равновесия отдельных частей системы. При этом удачным выбором точки, относительно которой определяются моменты сил, можно исключить из рассмотрения те внутренние силы, которые не подлежат определению.

В данной задаче можно рассматривать, например, условия равновесия моментов сил, действующих на левую лестницу относительно точки B , в которой находится шарнир (рисунок $б$). При этом силы, действующие в шарнире, не войдут в это условие:



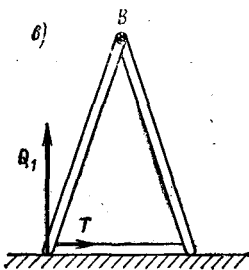
$$Q_1 l \cos \alpha = T l \sin \alpha. \quad (2)$$

Отметим, что это условие фактически означает, что равнодействующая сил T и Q_1 проходит через точку B , т. е. направлена вдоль лестницы. С помощью (1) и (2) находим

$$T = (P/4) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Предлагаем читателям подумать, почему использовалось условие равновесия именно левой лестницы.

Итак, ответ получен. При этом нам удалось избежать рассмотрения сил, действующих в шарнире. Однако и они могут представлять интерес. Попробуйте-ка для начала хотя бы нарисовать их! Сразу встанет вопрос: как они направлены? (Достаточно определить лишь направление одной из сил, так как согласно третьему закону Ньютона они направлены в противоположные стороны.) Легко сообразить, что сила, с которой правая лестница действует в шарнире на левую, направлена



К задаче 1.

вдоль левой лестницы вниз. Почему? Как проще всего найти величину этой силы?

ЗАДАЧА 2

Посмотрите на рисунок 1, a . Опирающаяся на доску тяжелая балка может поворачиваться в шарнире A вокруг горизонтальной оси. Какую горизонтальную силу нужно приложить к доске, чтобы выдержать ее влево? вправо? Известны все величины, указанные на рисунке 1, a .

Рассмотрим прежде всего все действующие силы.

На балку действуют сила тяжести P , нормальная сила реакции доски Q , сила трения со стороны доски F , направленная в сторону движения доски, и сила реакции шарнира. Направление последней силы заранее неизвестно, но оно и не понадобится так как мы будем рассматривать моменты сил, действующих на балку,

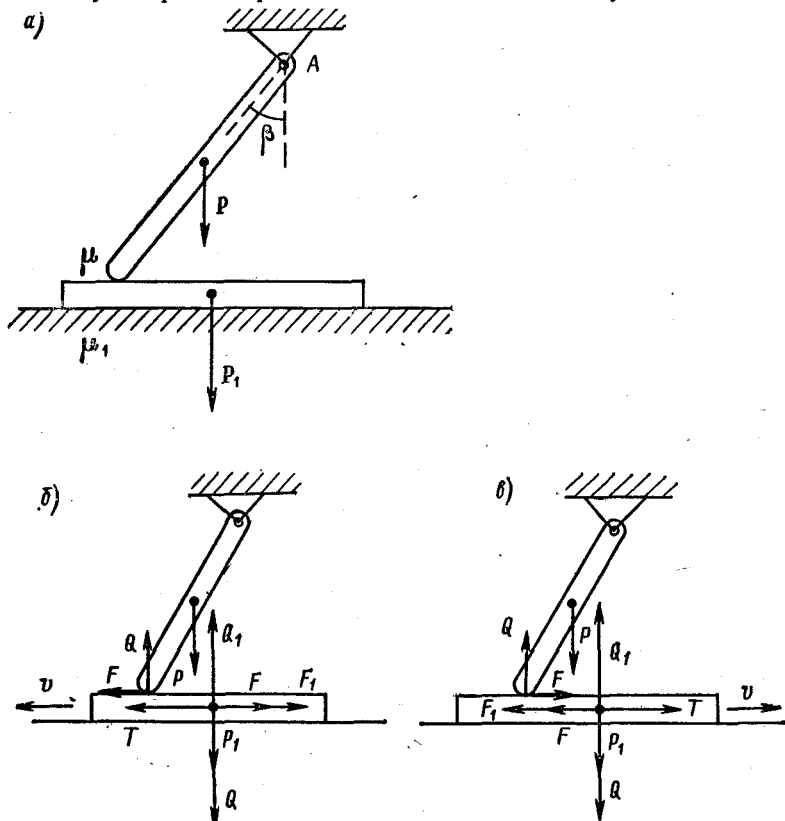


Рис. 1 к задаче 2.

относительно оси вращения. Тогда условие равновесия моментов действующих на балку сил имеет вид

$$(P/2) \sin \beta - Q \sin \beta \pm F \cos \beta = 0. \quad (1)$$

Знак плюс соответствует движению доски влево (рис. 1, б), знак минус — движению вправо (рис. 1, в). Силы, действующие на доску, изображены на рис. 1, б, в, где P_1 — сила тяжести; F — сила трения доски о пол; T — внешняя сила, с которой мы тянем (эта сила будет наименьшей, если доска движется равномерно). На основании вто-

рого закона Ньютона в этом случае имеем

$$T - F - F_1 = 0, \quad (2)$$

$$Q_1 - P_1 - Q = 0. \quad (3)$$

Вид уравнений (2) и (3) не зависит от того, в какую сторону движется доска.

На основании закона Кулона — Амонтона

$$F = \mu Q, \quad F_1 = \mu_1 Q_1. \quad (4)$$

С помощью первого из соотношений (4) и уравнения (1) определяем F и Q . Теперь становится совершенно понятным, почему можно было ограничиться только уравнением моментов сил, действующих на балку: по условию задачи нас интересует только движение доски, а ее взаимодействие с балкой описывается двумя силами F и Q , которые удастся определить из написанных соотношений. Итак:

$$Q = \frac{P \sin \beta}{2(\sin \beta \pm \mu \cos \beta)}.$$

Для нахождения T нужно подставить в уравнение (2) вместо F и F_1 их выражения (4). При этом Q_1 выражается из соотношения (3) через силу Q , которая уже найдена. Прodelав все это, получаем

$$T = \mu_1 P_1 + \frac{P(\mu_1 + \mu)}{2(1 \pm \mu \operatorname{ctg} \beta)}. \quad (5)$$

Напомним, что верхний знак соответствует движению доски влево, нижний — вправо. Однако второй случай — движение вправо — требует дополнительного исследования, ибо при $\mu \operatorname{ctg} \beta = 1$ знаменатель дроби обращается в нуль; при этом $T \rightarrow \infty$. А что, если $\mu \operatorname{ctg} \beta > 1$? Нетрудно сообразить, что если $\mu \operatorname{ctg} \beta$ стремится к единице со стороны меньших значений, необходимая сила T неограниченно возрастает, и при $\mu \operatorname{ctg} \beta = 1$ происходит заклинивание. Совершенно очевидно, что если теперь увеличить μ или $\operatorname{ctg} \beta$, чтобы $\mu \operatorname{ctg} \beta$ стало больше единицы, то доска тем более останется на месте. Поэтому правильный ответ при движении доски вправо выглядит так:

$$T = \mu_1 P_1 + \frac{P(\mu_1 + \mu)}{2(1 - \mu \operatorname{ctg} \beta)}, \quad \text{если } \mu \operatorname{ctg} \beta < 1.$$

При $\mu \operatorname{ctg} \beta \geq 1$ доску вытащить вправо не удастся.

Попробуем объяснить «на пальцах», почему во втором случае происходит заклинивание, т. е. неограниченное возрастание силы трения при стремлении $\mu \operatorname{ctg} \beta$ к единице со стороны меньших значений. Сравним значения силы T , необходимой для вытягивания доски в первом и втором случаях. Во втором случае, как видно из формулы (5), нужна большая сила. Почему? Момент силы трения F относительно оси в этом случае направлен так, что приводит к увеличению силы Q и, как следствие этого, к увеличению самой силы трения F . Сила трения как бы «увеличивает сама себя».

Решив задачу, мы обычно уверены, что эксперимент подтвердит все выводы, в крайнем случае будут несколько нарушены количественные соотношения, если в процессе решения пришлось чем-то пренебречь. Если же используемые приближения окажутся слишком грубыми, то результат эксперимента может качественно отличаться от предсказаний. Например, в этой задаче мы пренебрегали возможностью деформации балки и доски и не учитывали зависимость коэффициента трения скольжения от скорости, что может оказаться весьма существенным в условиях, близких к заклиниванию, в частности, балка может сломаться прежде, чем произойдет заклинивание, или начать подскакивать.

Однако даже такие академические задачи представляют интерес, несмотря на свой абстрактный характер. В конечном счете

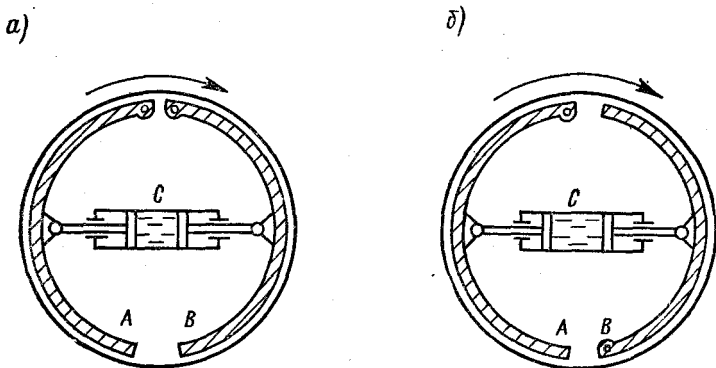


Рис. 2 к задаче 2.

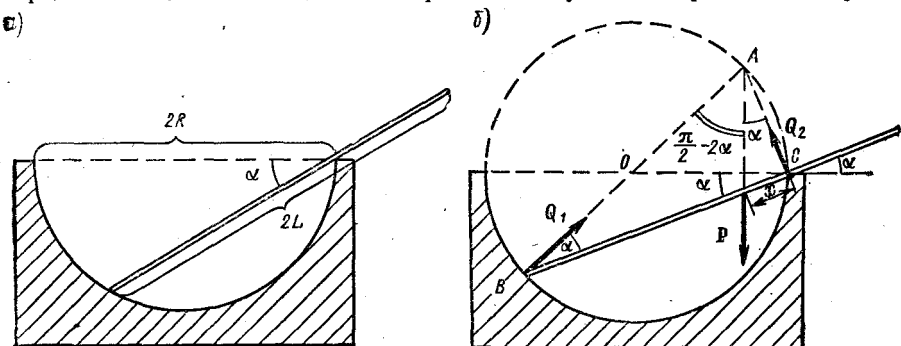
мы не можем рассматривать исчерпывающим образом даже самые простые явления природы — всегда приходится что-то упрощать. Но не выплесните с водой и младенца!

Разбираемая задача помогает лучше понять действие тормозных колодок автомобиля. На рис. 2 показано устройство тормозов задних (а) и передних (б) колес. При нажатии на педаль тормоза возрастает давление в тормозных цилиндрах *C*, и колодки *A* и *B* прижимаются к внутренним поверхностям тормозного барабана, вращающегося вместе с колесом. Легко понять, что поведение колодки *B* у задних колес аналогично первому случаю разобранной задачи, поведение колодки *A* — второму случаю. Сила трения, действующая на тормозной барабан со стороны колодки *A*, больше, чем со стороны колодки *B*, хотя внешнее прижимающее усилие одинаково для обеих колодок. Колодка *A* обладает «самотормозящим» действием. Небольшое изменение конструкции тормоза, показанное на рис. 2, б, приводит к тому, что уже обе колодки обладают самотормозящим действием. Именно так устроены тормоза передних колес. А как вы думаете, почему передние колеса нужно тормозить сильнее задних?

Гладкий однородный стержень длиной $2L$ опирается на край гладкой неподвижной полусферической чашки радиусом R (рисунок а). Какой угол α образует стержень с горизонтом в положении равновесия? Трением пренебречь.

РЕШЕНИЕ

На стержень действуют три силы: сила тяжести P , приложенная в середине стержня, и силы реакции чашки Q_1 и Q_2 . Так как трение отсутствует, сила Q_1 , действующая на конец стержня, упирающийся в чашку, направлена перпендикулярно поверхности чашки, т. е. по радиусу; сила Q_2 приложена к стержню со стороны края чашки и направлена перпендикулярно стержню (рисунок б). Объясните сами, почему. Если стержень находится в положении равновесия, то линии, по которым действуют эти три силы, пере-



К задаче 3.

секаются в одной точке (точке А). Действительно, рассмотрим точку пересечения линий действия каких-либо двух сил, например Q_1 и Q_2 , и составим условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно этой точки. Моменты сил Q_1 и Q_2 относительно точки пересечения их направлений равны нулю, поэтому и момент третьей силы P также должен быть равен нулю, т. е. линия действия силы P проходит через эту же точку. Этого факта достаточно для нахождения положения равновесия стержня. Из элементарных геометрических соображений легко найти все углы, указанные на рисунке б. Теперь можно составить уравнение для какой-нибудь тригонометрической функции искомого угла α . Находя из прямоугольного треугольника ABC хорду $BC = 2R \cos \alpha$ и учитывая, что точка приложения силы тяжести лежит посередине стержня, получим

$$x = 2R \cos \alpha - L. \quad (1)$$

Далее, рассматривая радиус OC как сумму двух отрезков, на которые его делит линия действия силы тяжести P , находим

$$R = R \sin (\pi/2 - 2\alpha) + x \cos \alpha. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем после простых преобразований квадратное уравнение для $\cos \alpha$

$$4R \cos^2 \alpha - L \cos \alpha - 2R = 0. \quad (3)$$

Поскольку угол α лежит в первой четверти, физический смысл имеет только один корень уравнения (3), ибо второй отрицателен:

$$\cos \alpha = \frac{1}{8R} (L + \sqrt{L^2 + 32R^2}). \quad (4)$$

Так как $\cos \alpha$ не превышает единицы, то

$$L + \sqrt{L^2 + 32R^2} \leq 8R,$$

откуда $L \leq 2R$.

Смысл этого условия очевиден: если длина стержня $2L$ превышает удвоенный диаметр чашки, то центр тяжести стержня выходит за край чашки и стержень вываливается из нее. Если $L = 2R$, стержень расположен горизонтально ($\alpha = 0$) и опирается на чашку в одной точке C .

Если стержень слишком короткий, то он соскользнет внутрь чашки. Найдем минимальную длину стержня, при которой еще возможно описанное в условии равновесие, т. е. стержень еще опирается на край чашки своим правым концом ($x = L$):

$$2R \cos \alpha_1 = 2L. \quad (5)$$

Предельный угол α_1 , при котором стержень еще не соскальзывает внутрь чашки, одновременно с (5) должен удовлетворять также условию равновесия (4). Подставляя (4) в (5), находим минимальную длину стержня

$$L = R \sqrt{2/3}.$$

Соответствующий этой минимальной длине стержня предельный угол α_1 удовлетворяет условию

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{2/3}.$$

Итак, если длина стержня удовлетворяет условию

$$R \sqrt{2/3} < L < 2R,$$

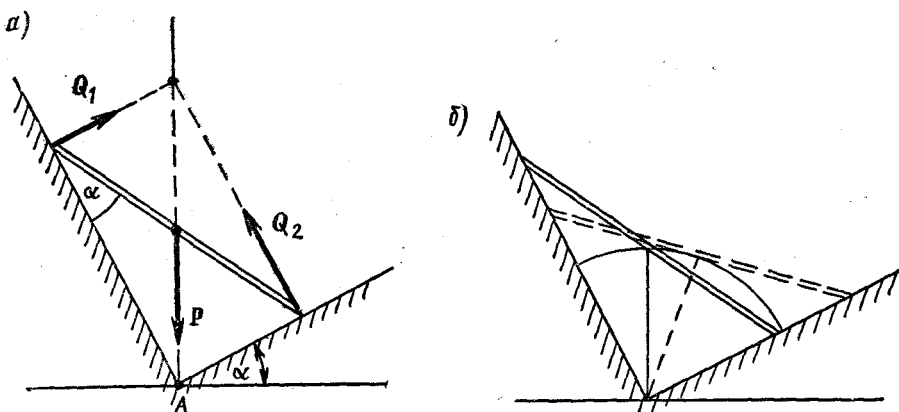
то равновесие возможно, и угол α при равновесии определяется формулой (4). Более детальным исследованием можно показать, что это равновесие устойчиво.

Легко сообразить, что если стержень короче диаметра ($L < R$), то существует другое положение устойчивого равновесия, когда стержень лежит горизонтально внутри чашки.

ЗАДАЧА 4

Однородная доска находится в равновесии в прямом двугранном угле с гладкими стенками. На рисунке *a* изображено сечение этого угла плоскостью, перпендикулярной его ребру. Как расположена доска? Устойчиво ли ее равновесие?

Поскольку трение отсутствует, то на доску действуют три силы: сила тяжести P и две силы реакции опор Q_1 и Q_2 , направленные перпендикулярно граням угла. Как уже было выяснено в предыдущей задаче, в положении равновесия под действием только трех сил линии их действия пересекаются в одной точке (рисунок *а*). Из этого рисунка легко видеть, как можно построением найти положение доски в равновесии. Проводим вертикаль через вершину A и откладываем на ней отрезок, равный длине доски. Из конца этого отрезка опускаем перпендикуляры на грани угла. Положение доски в равновесии совпадает со второй диагональю получившегося прямоугольника. Нетрудно убедиться, что угол, который образует доска с одной из граней угла, равен углу α , образуемому другой гранью угла с горизонтом.



К задаче 4.

В устойчивом положении равновесия потенциальная энергия минимальна, в неустойчивом — максимальна. Поэтому для выяснения характера равновесия достаточно рассмотреть, как изменяется высота центра тяжести доски при малых смещениях ее из положения равновесия. Если перемещать доску так, чтобы концы ее скользили по граням угла, то ее центр тяжести перемещается по дуге окружности, центр которой совпадает с вершиной угла, а радиус равен половине длины доски (рисунок *б*). В самом деле, как видно из рисунка *б*, расстояние от вершины угла до центра тяжести доски не зависит от положения доски и равно половине ее длины.

В положении равновесия радиус, соединяющий вершину угла с центром тяжести доски, расположен вертикально, поэтому при смещении доски ее потенциальная энергия убывает. Равновесие неустойчиво. Случайно отклонившись, доска соскользнет на одну из граней угла.

Электромонтер подвешивает тяжелый фонарь весом P на невесомом шарнире с тремя звеньями (рис. 1). Какое натяжение должна выдержать нить, соединяющая точки A и B ? Трением пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Читатель, у которого хватило терпения разобраться в предыдущих задачах, уже, наверное, недовольно поморщился: задача вроде бы простая, ясно, что делать, но слишком уж много здесь тел, условия равновесия которых необходимо рассмотреть. А это значит — возиться с длинной системой алгебраических уравнений, выражающих условия равновесия каждого из рычагов, из которых собран шарнир. Конечно, симметрия этой задачи значительно облегчила бы работу, но все-таки она остается слишком нудной. Однако не торопитесь! Эту задачу можно решить, вообще не рассматривая условий равновесия. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии применительно к механизмам без трения: ни один механизм не дает выигрыша в работе. (Этот закон называют «золотым правилом механики».)

Попробуем с помощью этого механизма поднимать груз P . Отвязав нить в точке A , потянем ее вверх так, чтобы точка B медленно поднялась на расстояние Δh . Величина перемещения Δh ограничена тем, что сила натяжения нити T должна оставаться неизменной в процессе перемещения. Совершенная при этом работа $\Delta A = T\Delta h$. В результате груз P поднимается на высоту Δh_1 , которая, как ясно из геометрических соображений, равна $3\Delta h$. Так как никаких потерь энергии не происходит, можно утверждать, что изменение потенциальной энергии груза, равное $P\Delta h_1$, определяется совершенной при подъеме работой. Поэтому

$$T = 3P. \quad (1)$$

Очевидно, что для шарнира, содержащего произвольное число n одинаковых звеньев:

$$T = nP.$$

Нетрудно решить эту задачу и в том случае, когда требуется учитывать вес самого шарнира P_1 : совершаемую при подъеме работу следует приравнять сумме изменений потенциальных энергий груза и шарнира. Для шарнира из одинаковых звеньев центр тяжести его поднимается на $n\Delta h/2$. Поэтому

$$T = n(P + P_1/2).$$

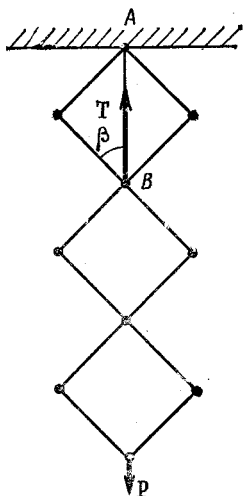


Рис. 1 к задаче 5.

Сформулированный принцип («золотое правило механики») применим и тогда, когда в процессе перемещений не происходит изменения потенциальной энергии, а механизм используется для преобразования силы. Редукторы, трансмиссии, ворота, системы рычагов и блоков — во всех таких системах величину преобразованной силы можно определить, приравняв работы преобразованной и приложенной сил. Другими словами, при отсутствии трения отношение этих сил определяется только геометрией устройства.

Рассмотрим с этой позиции задачу 1. Конечно, использовать стремянку в качестве подъемного механизма, т. е. поднимать

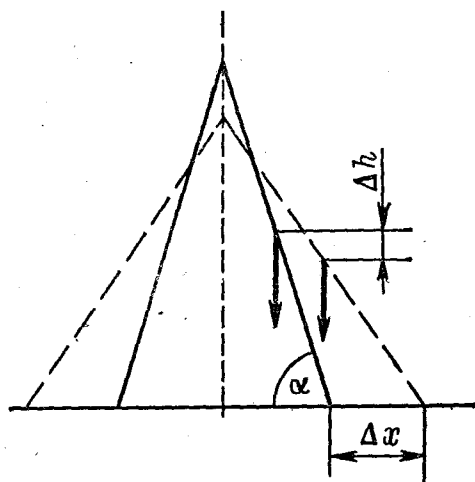


Рис. 2 к задаче 5.

электромонтера, сближая половинки стремянки, вряд ли целесообразно. Однако это не может помешать нам применить описанный метод для решения задачи. Приравнявая работу, совершаемую при сближении частей стремянки, изменению* потенциальной энергии электромонтера и связывая из геометрических соображений перемещение Δx нижнего конца лестницы с изменением высоты груза Δh (рис. 2)*, получаем, как и следовало ожидать, приведенный ранее ответ

$$T = (1/4) P \operatorname{ctg} \alpha.$$

Как мы уже отмечали, величину перемещения следует выбирать такой, чтобы в процессе перемещения можно было считать постоянной величину действующей силы. Легко убедиться, что в задаче о шарнире это условие не накладывает ограничений на величину перемещения, так как сила натяжения нити не зависит от угла β . Напротив, в задаче о стремянке перемещение следует выбирать малым, ибо сила натяжения веревки зависит от α .

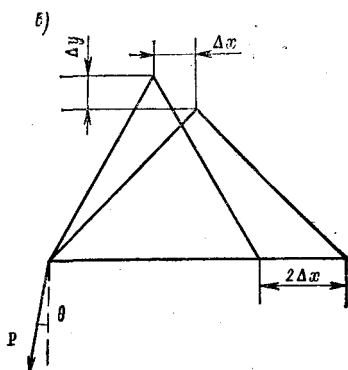
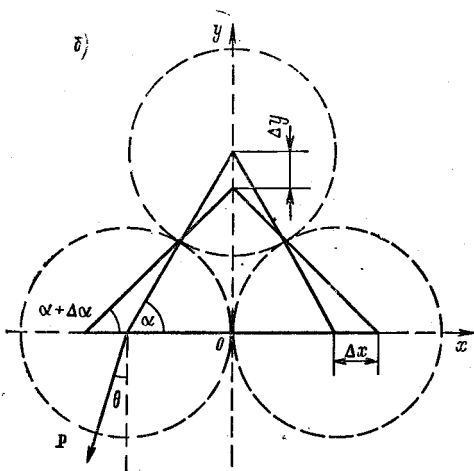
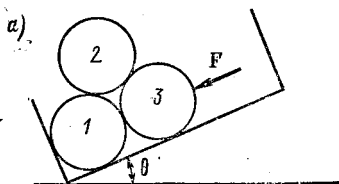
ЗАДАЧА 6

Грузовик загружен одинаковыми гладкими бревнами. Заехав в кювет, он накренился на один борт, так что дно кузова образовало с горизонтом угол θ . Заканчивается разгрузка, в кузове осталось три бревна (рисунок а). С какой силой F нужно подпереть крайнее бревно 3, чтобы бревна не раскатились? Трением пренебречь.

* Если Вы затрудняетесь это сделать, ознакомьтесь сначала с решением следующей задачи.

Положение бревен, указанное на рисунке *a*, возможно только, если угол $\theta < 30^\circ$. В противном случае направление силы тяжести верхнего бревна 2 пройдет левее точки опоры о нижнее бревно 1, и бревно 2 скатится на борт.

При решении этой задачи попытаемся избежать утомительного рассмотрения всех действующих сил и воспользуемся законом сохранения энергии. Если система бревен находится в равновесии, то работа внешней силы F при мысленном бесконечно малом



К задаче 6.

медленном перемещении крайнего бревна 3 определяет изменение потенциальной энергии бревен, так как трение отсутствует, а нормальные силы реакции работы не совершают.

«Геометрия» перемещения бревен показана на рисунке *б*, который для удобства повернут на угол θ по часовой стрелке. На такой же угол поворачивается направление силы тяжести.

Треугольники на рисунке *в* соединяют центры бревен до и после перемещения. До перемещения треугольник был равносторонним со стороной, равной диаметру бревен a . После перемещения бревен треугольник становится равнобедренным, боковые стороны его по-прежнему равны a , основание увеличивается на $2\Delta x$, а высота изменяется на Δy . В самом деле, бревно 1 лежит на месте,

бревно 3 перемещается на $2\Delta x$ вдоль дна кузова, а бревно 2 перемещается на Δx вдоль дна и на Δy перпендикулярно дну.

Учитывая, что направление силы тяжести составляет угол θ с осью y (рисунок б), изменение потенциальной энергии бревен можно записать в виде

$$\Delta E_{\text{п}} = P \cos \theta \cdot \Delta y + P \sin \theta \cdot \Delta x + P \sin \theta \cdot 2\Delta x.$$

Первые два слагаемых дают изменение потенциальной энергии бревна 2, а третье слагаемое — бревна 3. При таком перемещении внешняя сила F совершает работу $\Delta A = -F \cdot 2\Delta x$. На основании закона сохранения энергии

$$-F \cdot 2\Delta x = P \cos \theta \cdot \Delta y + P \sin \theta \cdot 3\Delta x. \quad (1)$$

Для нахождения силы F нужно найти связь между перемещениями Δx и Δy . Проще всего это сделать, выразив их через изменение $\Delta \alpha$ угла α . В системе координат, показанной на рисунке б, координаты вершин треугольника до перемещения бревен равны

$$x = a \cos \alpha, \quad y = a \sin \alpha. \quad (2)$$

После перемещения

$$x + \Delta x = a \cos (\alpha + \Delta \alpha), \quad y + \Delta y = a \sin (\alpha + \Delta \alpha). \quad (3)$$

Используя формулы для синуса и косинуса суммы двух углов и учитывая, что при малых $\Delta \alpha$ $\cos \Delta \alpha \approx 1$, $\sin \Delta \alpha \approx \Delta \alpha$, с помощью выражений (2) и (3) находим

$$\Delta x = -a \sin \alpha \cdot \Delta \alpha, \quad \Delta y = a \cos \alpha \cdot \Delta \alpha. \quad (4)$$

Подставляя (4) в соотношение (1), получаем следующее выражение для силы F :

$$F = \frac{P}{2} (\cos \theta \operatorname{ctg} \alpha - 3 \sin \theta).$$

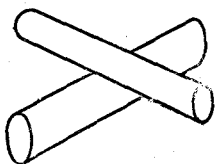
Угол $\alpha = 60^\circ$, так как нужно определить силу F , не позволяющую бревнам раскатываться. Поэтому

$$F = \frac{P}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta - 3 \sin \theta \right). \quad (5)$$

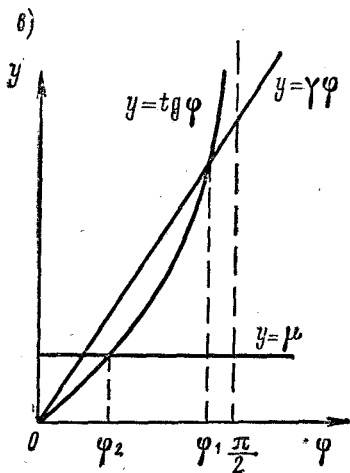
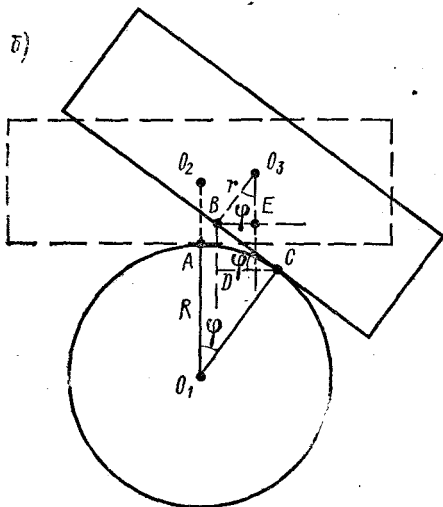
Проанализируем полученный ответ. Если угол наклона кузова θ лежит в интервале $0 < \theta < \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$, то сила $F > 0$, т. е. бревна действительно нужно удерживать: если силу F убрать, то бревна раскатятся. При $\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}$ сила F обращается в нуль. При таком θ_1 бревна не раскатятся, даже если их не подпирать. Если $\theta_1 < \theta < 30^\circ$, то сила F согласно формуле (5) отрицательна. Это означает, что бревна не раскатятся, даже если бревно 3 вытягивать вдоль дна кузова с силой, меньшей $|F|$. Таким образом, θ_1 представляет собой наименьший угол, при котором бревна не раскатываются в отсутствие удерживающей силы F .

Имеются два круглых карандаша радиусами R и r . Один из них расположен горизонтально, другой уравновешен на нем в горизонтальном положении так, что оси карандашей взаимно перпендикулярны (рисунок а). При каком соотношении между радиусами равновесие устойчиво? На какой максимальный угол можно при этом отклонить от горизонтали верхний карандаш? Коэффициент трения равен μ .

а)



б)



К задаче 7.

РЕШЕНИЕ

Поскольку верхний карандаш уравновешен в горизонтальном положении, центры тяжести карандашей O_1 и O_2 лежат на одной вертикали (рисунок б).

Отклоним верхний карандаш на некоторый угол φ от горизонтали. При отсутствии трения покоя он немедленно соскользнул бы вниз. Чтобы не думать пока о возможном соскальзывании, будем считать трение достаточно большим.

При этом верхний карандаш «прокатывается» по нижнему без проскальзывания. Точка опоры из положения A перемещается в новое положение C , а та точка, которой верхний карандаш до отклонения опирался о нижний, переходит в положение B . Поскольку проскальзывание отсутствует, длина дуги AC равна длине отрезка BC : $\cup AC = R\varphi = BC$. Центр тяжести верхнего карандаша O_2 переходит в положение O_3 . Если вертикаль, проведенная через O_3 , проходит левее новой точки опоры C , то сила тяжести стремится вернуть верхний карандаш в положение равновесия. Выразим это условие математически. Проведя вертикаль через точку B , видим, что должно быть выполнено условие

$$BE < DC. \quad (1)$$

Так как $BE = r \sin \varphi$, а $DC = BC \cos \varphi = R\varphi \cos \varphi$, то из условия (1) получаем

$$\frac{r}{R} < \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (2)$$

Поскольку $\operatorname{tg} \varphi > \varphi$ ($0 < \varphi < \pi/2$), сила тяжести будет стремиться возвратить верхний карандаш в положение равновесия только при $r/R < 1$.

Следовательно, устойчивое равновесие верхнего карандаша на нижнем возможно только тогда, когда его радиус меньше радиуса нижнего карандаша.

Для ответа на второй вопрос задачи следует выяснить, какие причины ограничивают величину допустимого угла отклонения. Во-первых, при больших углах отклонения вертикаль, проведенная через центр тяжести верхнего карандаша, может пройти правее точки опоры C . Из условия (2) видно, что при заданном отношении радиусов карандашей $\gamma = R/r$ максимальный угол отклонения φ_1 определяется уравнением $\operatorname{tg} \varphi_1 = \gamma \varphi_1$. Решение этого трансцендентного уравнения легко найти графически (рисунок e). Во-вторых, максимальное значение угла отклонения ограничивается величиной трения: карандаш не должен соскальзывать, т. е. для предельного угла φ_2 получаем (вспомните условие равновесия на наклонной плоскости!) $\operatorname{tg} \varphi_2 = \mu$.

Решение этого уравнения также показано на рисунке e . Очевидно, что максимальный допустимый угол отклонения равен меньшему из φ_1 и φ_2 . Поскольку $\gamma > 1$, а коэффициент трения μ обычно меньше единицы, то максимально допустимый угол отклонения практически всегда определяется условием соскальзывания, т. е. углом φ_2 .

Молекулярная физика и термодинамика

Физические свойства систем, состоящих из большого числа частиц (атомов и молекул), составляют предмет изучения молекулярной физики и термодинамики. Любая макроскопическая система содержит огромное число частиц, например всего 1 см^3 воздуха при нормальных условиях содержит $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Поэтому совершенно очевидно, что применение законов динамики для нахождения микроскопических характеристик такой системы, т. е. координат и скоростей всех молекул, совершенно бесперспективно. Но такая детальная информация о рассматриваемой системе нам и не нужна. Для рассмотрения очень многих вопросов нам достаточно знать не поведение отдельных молекул, а только макроскопические параметры, характеризующие состояние всей системы. Такими параметрами являются, например, объем системы, ее масса, полная энергия. Если система находится в состоянии равновесия, то она характеризуется еще и такими параметрами, как давление и температура. Значение макроскопических параметров определяется не поведением отдельных молекул, а средним результатом, к которому приводит их совокупное движение, т. е. средними значениями микроскопических параметров. Задача молекулярно-кинетической теории или статистической механики состоит в том, чтобы установить связь макроскопических параметров системы со средними значениями микроскопических величин и дать способ вычисления этих средних значений на основе законов движения отдельных частиц. Так, например, для одного моля идеального газа молекулярно-кинетическая теория устанавливает связь между величиной произведения двух макроскопических параметров газа — давления p и объема V и средним значением микроскопического параметра $\langle E \rangle$ — кинетической энергии хаотического движения одной молекулы E :

$$pV = \frac{2}{3} \langle E \rangle N_A, \quad (1)$$

где N_A — число Авогадро.

Исторически сложился и другой подход к изучению систем, состоящих из большого числа частиц, в котором установление связей между различными макроскопическими параметрами производится опытным путем. Например, для одного моля идеального газа на опыте установлена следующая связь между тремя макроскопическими параметрами — давлением, объемом и абсолютной температурой газа:

$$pV = RT, \quad (2)$$

(R — универсальная газовая постоянная). Такой эмпирический подход характерен для термодинамики.

В основе термодинамики лежат несколько установленных на опыте фундаментальных физических законов. Первый закон термодинамики представляет собой обобщенный закон сохранения энергии: энергия макроскопической системы может быть изменена как в результате работы внешних сил, так и при сообщении тепла. Если считать механическую энергию системы неизменной, то первый закон термодинамики утверждает, что изменение внутренней энергии системы ΔU при переходе из одного состояния в другое равно сумме работы внешних сил $\Delta A'$ и количества переданного тепла ΔQ :

$$\Delta U = \Delta A' + \Delta Q. \quad (3)$$

Второй закон термодинамики связан с необратимостью реальных процессов в макроскопических системах и указывает направление возможных энергетических превращений.

В рамках термодинамики невозможно вскрыть глубокий физический смысл макроскопических параметров системы, т. е. их связь со средними значениями микроскопических параметров. Однако именно благодаря этому обстоятельству основные законы термодинамики, установленные на опыте, отличаются большой общностью и применимы ко всем макроскопическим системам независимо от особенностей их внутренней структуры.

Наиболее полные представления о свойствах систем большого числа частиц дает совместное использование термодинамики и статистической механики. Например, сравнение формул (1) и (2) дает возможность установить физический смысл макроскопического параметра — термодинамической температуры T :

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad k = \frac{R}{N_A},$$

а также получить удобное выражение для давления идеального газа

$$p = nkT, \quad n = \frac{N_A}{V}.$$

Таким образом, давление идеального газа определяется средним числом частиц в единице объема n и абсолютной температурой.

Для многих задач первый закон термодинамики удобно записать в несколько отличной от выражения (3) форме

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

Сообщенное системе количество тепла ΔQ равно сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы ΔA , совершенной системой; ΔA — работа, которую совершают силы, приложенные со стороны рассматриваемой системы к внешним телам. Исторически первый закон термодинамики был впервые сформулирован именно в таком виде.

ЗАДАЧА 1

Оценить число молекул воздуха в земной атмосфере.

РЕШЕНИЕ

В условии задачи нет никаких данных. Следовательно, подразумевается, что число молекул воздуха в атмосфере нужно выразить через значения каких-то хорошо известных характеристик атмосферы. Что же нам известно о земной атмосфере? Прежде всего давление воздуха вблизи поверхности Земли на уровне моря, равное в среднем 76 см рт. ст. Практически вся атмосфера состоит из молекул азота и кислорода, причем средний молекулярный вес воздуха μ равен 29 г/моль, поэтому если бы мы знали массу атмосферы, то легко могли бы определить число молекул в ней. А как оценить массу атмосферы? «Снизу» атмосфера ограничена поверхностью Земли, средний радиус которой равен 6400 км. Что можно считать «верхней» границей атмосферы? Давление воздуха убывает с высотой и, например, на высоте Эльбруса (5,6 км) составляет лишь половину давления на уровне моря, т. е. концентрация молекул уже в два раза меньше. Отсюда, конечно, не следует делать вывод, что на вдвое большей высоте молекул воздуха нет вовсе. Как известно, современные самолеты, использующие подъемную силу крыла, могут летать на высоте 30 км. Значит, там еще достаточно воздуха. Но вот спутник, летающий на высоте немногим более 100 км, практически не испытывает сопротивления воздуха, т. е. вся масса атмосферы сосредоточена ниже.

Посмотрим, как меняется величина ускорения свободного падения g в зависимости от высоты в пределах атмосферы:

$$g(h) = \frac{\gamma M}{(R+h)^2} = \frac{g}{(1+h/R)^2} \approx g \left(1 - \frac{2h}{R}\right), \quad g \equiv g(0). \quad (1)$$

В этой формуле M — масса Земли; γ — гравитационная постоянная.

Поскольку высота атмосферы, как мы выяснили, составляет несколько десятков километров, что много меньше радиуса Земли R , то изменение g на протяжении атмосферы, как видно из (1), не превосходит 2%, и при оценках величину ускорения свободного падения можно считать постоянной. Поэтому давление воздуха

p на уровне моря численно равно весу столба воздуха с единичным основанием: $p = mg$, где m — масса воздуха в этом столбе.

Полную массу атмосферы m_0 получим, умножив m на площадь поверхности Земли $S = 4\pi R^2$:

$$m_0 = \frac{p}{g} 4\pi R^2.$$

Разделив m_0 на средний молекулярный вес воздуха μ , получаем число молей, содержащихся в земной атмосфере, и тогда полное число молекул N равно

$$N = \frac{m_0}{\mu} N_A = \frac{4\pi R^2 p}{\mu g} N_A. \quad (2)$$

Выразив все входящие в формулу (2) величины в одной системе единиц, получим $N \approx 10^{44}$.

Итак, чтобы подсчитать число молекул воздуха в земной атмосфере, достаточно знать лишь давление воздуха на уровне моря, молекулярный вес воздуха, радиус Земли и ускорение свободного падения g у ее поверхности. В ответ не входит высота атмосферы, важно лишь, чтобы она была мала по сравнению с радиусом Земли. Совершенно несущественной оказалась величина температуры воздуха и ее распределение в земной атмосфере.

ЗАДАЧА 2

Частица массой M , взвешенная в жидкости, совершает броуновское движение. Пусть в начальный момент частица находится в начале координат. Определить среднее расстояние, на которое удалится частица от начала координат за время t .

РЕШЕНИЕ

Прежде всего выясним, что за среднее расстояние имеется в виду. Как движется изучаемая частица под действием града ударов со стороны окружающих ее молекул жидкости? Где она окажется, спустя некоторое время? Предсказать это совершенно невозможно. Однако мы можем повторять этот опыт многократно, каждый раз измеряя расстояние до частицы от начала координат спустя промежуток времени t . Всякий раз мы будем получать разные значения этого расстояния, однако в большинстве опытов будут получаться близкие друг к другу значения, и лишь изредка будут встречаться величины, заметно отличающиеся от остальных. Поэтому под средним расстоянием естественно понимать среднее по большому числу опытов. При этом имеется большая вероятность получить в однократном опыте значение расстояния, близкое к среднему. Подчеркнем, что речь идет именно о расстоянии до частицы от начала координат, а направления перемещений во всех опытах могут быть совершенно различными (все направления равновероятны).

Итак, наша задача — найти зависимость от времени среднего расстояния, которое будем обозначать $\langle R \rangle$.

Разделим интересующее нас время наблюдения t на большое число равных малых промежутков Δt таких, что в течение каждого промежутка частица испытывает огромное число ударов со стороны молекул жидкости. По существу такое рассуждение означает многократное повторение опыта по измерению среднего расстояния, пройденного частицей за время Δt , причем каждый раз мы совмещаем начало координат с положением частицы в конце предыдущего промежутка времени Δt . Другими словами, это такой же опыт, как и рассмотренный выше, только осуществляемый за промежуток времени Δt , а не t . Поскольку и за промежуток Δt частица испытывает огромное число ударов, все приведенные выше рассуждения остаются в силе: направление перемещения за каждый «шаг» Δt совершенно произвольно и никак не связано с направлением перемещений в другие промежутки, а расстояние, проходимое частицей за Δt , будет примерно одинаковым для большинства промежутков. Для простоты будем считать эти расстояния одинаковыми для всех шагов и обозначим через L .

Пусть в результате N таких последовательных шагов частица оказалась в точке с радиус-вектором $\mathbf{R}_N$. Тогда после очередного шага она попадет в точку

$$\mathbf{R}_{N+1} = \mathbf{R}_N + \mathbf{L}_{N+1}, \quad (1)$$

где $\mathbf{L}_{N+1}$ — вектор перемещения за $(N+1)$ -й шаг, имеющий произвольное направление и определенную величину L . Расстояние частицы от начала координат после $(N+1)$ -го шага равно

$$R_{N+1} = \sqrt{R_N^2 + 2R_N L \cos \varphi + L^2}. \quad (2)$$

Здесь φ — угол между векторами $\mathbf{R}_N$ и $\mathbf{L}_{N+1}$. Найти среднее значение правой части этого выражения затруднительно, ибо усреднять нужно квадратный корень, а в общем случае среднее значение функции не равно этой функции от среднего значения аргумента: $\langle f(x) \rangle \neq f(\langle x \rangle)$.

Поскольку нам не удастся найти среднее значение расстояния частицы от начала координат, попробуем найти, какой же величиной можно охарактеризовать среднее удаление частицы. Легко заметить, что если возвести (1) или (2) в квадрат:

$$R_{N+1}^2 = R_N^2 + 2R_N L \cos \varphi + L^2, \quad (3)$$

то среднее значение квадрата смещения может быть легко найдено. Усредняя левую и правую части (3) и учитывая, что $\cos \varphi$ с равной вероятностью принимает любые значения от -1 до 1 , т. е. $\langle \cos \varphi \rangle = 0$, получаем

$$\langle R_{N+1}^2 \rangle = \langle R_N^2 \rangle + L^2. \quad (4)$$

Используя метод математической индукции, на основе соотношения (4) легко показать, что

$$\langle R_N^2 \rangle = NL^2.$$

Таким образом, среднее значение квадрата смещения пропорционально числу шагов, а поскольку шаги совершаются за одинаковые промежутки времени Δt :

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t. \quad (5)$$

Это, конечно, не означает, что среднее смещение пропорционально времени. Броуновское движение частицы таково, что средний *квадрат* смещения растет пропорционально времени. Другими словами, квадратный корень из $\langle R^2 \rangle$ растет со временем пропорционально $\sqrt{t}$. Эта величина, т. е. $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$, называемая средним квадратичным значением R , не равна среднему значению расстояния $\langle R \rangle$ частицы от начала координат спустя промежуток времени t , которое мы хотели определить! Однако можно показать, что эти величины отличаются только постоянным множителем. Поэтому среднее расстояние броуновской частицы от начала координат также пропорционально $\sqrt{t}$:

$$\langle R \rangle = \beta \sqrt{t}. \quad (6)$$

Совершенно очевидно, что коэффициенты α и β в формулах (5) и (6) зависят от интенсивности теплового движения молекул жидкости, удары которых приводят к броуновскому движению взвешенной частицы, т. е. в конечном счете от температуры.

ЗАДАЧА 3

Имеется сосуд объемом V и поршневой насос с объемом камеры V' (рисунок а). Сколько качаний нужно сделать, чтобы давление в сосуде уменьшилось от p до p' ? Атмосферное давление p_0 . Изменением температуры пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Мы, естественно, считаем, что начальное давление p не превосходит наружного давления p_0 , иначе можно просто выпустить излишек газа.

Эту задачу можно решить, используя закон Бойля — Мариотта, хотя в процессе откачки масса газа в сосуде изменяется. Действительно, рассмотрим первый ход поршня влево, при этом клапан A закрыт, клапан B открыт, и газ из сосуда входит в камеру насоса. Давление газа уменьшается от первоначального значения до некоторого p_1 . Поскольку процесс изотермический и масса газа при этом не меняется, можно воспользоваться законом Бойля — Мариотта

$$pV = p_1(V + V'). \quad (1)$$

При обратном ходе поршня клапан B закрывается, и воздух из камеры насоса выталкивается наружу через клапан A . При втором ходе поршня влево все повторяется точно так же, только давление в начале хода в сосуде равно p_1 . Обозначив давление в конце второго хода через p_2 , имеем

$$p_1V = p_2(V + V').$$

Подставив сюда p_1 из уравнения (1), находим

$$p_2 = p \left(\frac{V}{V+V'} \right)^2.$$

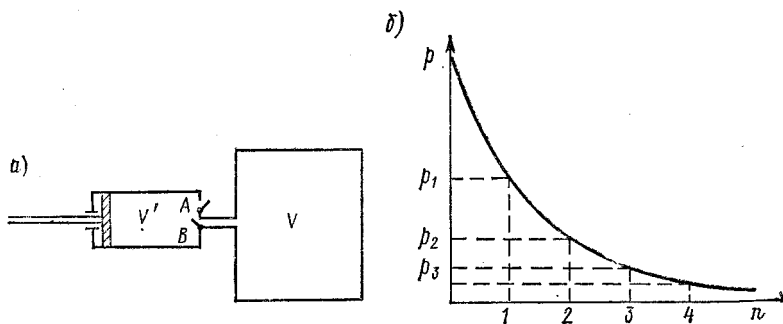
Рассуждая и дальше таким же образом, нетрудно убедиться, что после n ходов поршня давление p_n в сосуде будет равно

$$p_n = p \left(\frac{V}{V+V'} \right)^n. \quad (2)$$

По формуле (2) определяется число качаний n , необходимое для того, чтобы понизить давление в сосуде до значения $p_n = p'$:

$$n = \frac{\lg(p'/p)}{\lg[V/(V+V')]}.$$

Интересно построить график зависимости давления в сосуде от числа качаний n . Это есть график степенной функции с основанием



К задаче 3.

$V/(V+V') < 1$ (рисунок б). Обратите внимание, что давление с каждым шагом уменьшается на все меньшую и меньшую величину. Подумайте, как поступить, если требуемое конечное давление p' не совпадает ни с одним значением p_n , определяемым формулой (2).

ЗАДАЧА 4

Расположенный горизонтально цилиндрический сосуд, заполненный идеальным газом, разделен поршнем, который может двигаться без трения. В равновесии поршень находится посередине цилиндра. При малых смещениях из положения равновесия поршень совершает колебания. Найти зависимость частоты этих колебаний от температуры, считая процесс изотермическим.

РЕШЕНИЕ

В положении равновесия давление на поршень p слева и справа одинаково. Поскольку объем газа слева и справа одинаков, а температура T постоянна, из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$pV = \nu RT \quad (1)$$

следует, что число молей газа ν одинаково по обе стороны от поршня. Отметим, что химический состав газов может быть различным.

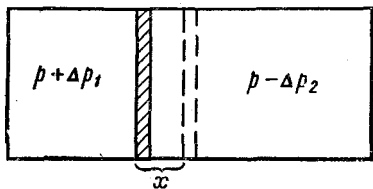
Пусть поршень сместился из положения равновесия, например, влево на малую величину x , так что $Sx \ll V$ (рисунок). Поскольку температура по условию не меняется, то

$$(p + \Delta p_1) (V - Sx) = (p - \Delta p_2) (V + Sx).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$(\Delta p_1 + \Delta p_2) V - (\Delta p_1 - \Delta p_2) Sx = 2pSx.$$

Второе слагаемое слева много меньше первого не только потому, что $Sx \ll V$, но и вследствие того, что множителем при V стоит сумма двух близких величин Δp_1 и Δp_2 , а множителем при Sx — их разность. Пренебрегая вторым слагаемым, получаем



К задаче 4.

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = \frac{2pS}{V} x.$$

Результирующая сила, действующая на поршень, равна

$$F = - \frac{2pS^2}{V} x.$$

Знак минус означает, что сила направлена в сторону, противоположную направлению смещения поршня, т. е. к положению равновесия. Под действием силы, пропорциональной смещению, поршень массой M будет совершать гармонические колебания с частотой ω , определяемой соотношением

$$\omega^2 = \frac{2pS^2}{MV}. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что масса газа много меньше, чем масса поршня, так что кинетической энергией макроскопического движения газа при колебаниях поршня можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией поршня. Подумайте, где использовано это условие.

Выразив p из уравнения Менделеева — Клапейрона (1), получим

$$\omega^2 = \frac{2\nu R}{MV^2} T. \quad (3)$$

Таким образом, частота колебаний поршня пропорциональна $\sqrt{T}$, ибо коэффициент при T в формуле (3) не зависит от температуры, если пренебречь тепловым расширением сосуда.

Подумайте теперь, какие условия должны выполняться, чтобы процесс действительно был изотермическим. Для того чтобы температура газа в процессе колебаний не изменялась, необходим хороший тепловой контакт с большим тепловым резервуаром — термо-

статом, имеющим постоянную температуру. Что значит хороший тепловой контакт? Это значит, что время установления теплового равновесия между газом в сосуде и термостатом должно быть много меньше периода колебаний, тогда можно считать, что газ в каждый момент имеет ту же температуру, что и термостат. Если, наоборот, период колебаний окажется много меньше времени установления теплового равновесия между газом и термостатом, то можно считать, что колебания поршня происходят практически без обмена теплом с термостатом. В этом случае процесс можно считать адиабатическим, несмотря на отсутствие тепловой изоляции сосуда с поршнем. Оказывается, что зависимость частоты колебаний от температуры при этом будет такой же, как и в изотермическом случае, только коэффициент в формуле (3) умножится на число, большее единицы. Увеличение частоты колебаний при адиабатическом процессе можно объяснить, сравнивая $p - V$ -диаграммы изотермического и адиабатического процессов идеального газа.

Отметим, что приведенное решение в обоих случаях имеет смысл, только если время установления теплового равновесия в самом газе много меньше периода колебаний, так как в противном случае вообще теряют смысл такие равновесные макроскопические характеристики газа, как давление и температура. Другими словами, по отношению к самому газу процесс должен быть квазистатическим.

ЗАДАЧА 5

Один моль идеального газа заключен в цилиндр с вертикальными стенками, закрытый сверху поршнем с грузом. В каком случае газу нужно сообщить больше тепла для увеличения его температуры на ΔT : если нагревать газ, закрепив поршень, или — не закрепляя, когда поршень может перемещаться без трения?

РЕШЕНИЕ

Поскольку в обоих случаях нагревается одна и та же масса газа (1 моль), разное количество тепла, необходимое для этого, означает, что газ в этих двух случаях обладает разной теплоемкостью. С чем это связано? Вспомним первое начало термодинамики — закон сохранения энергии для процессов, связанных с теплопередачей:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A; \quad (1)$$

сообщенное системе количество тепла ΔQ определяет изменение внутренней энергии системы ΔU и совершенную при этом системой работу ΔA . Рассматриваемая нами система — идеальный газ, поэтому его внутренняя энергия не зависит от занимаемого им объема и определяется только температурой. В обоих случаях изменение температуры газа ΔT одинаково, поэтому его внутренняя энергия изменяется на одну и ту же величину. В первом случае объем газа не меняется, и никакой работы газ не совершает. Во

втором случае при нагревании газ расширяется при постоянном давлении и совершает положительную работу, поднимая поршень с грузом. Поэтому, как видно из выражения (1), во втором случае газу требуется сообщить большее количество тепла.

Таким образом, теплоемкость газа зависит от условий, при которых совершается теплообмен: теплоемкость при постоянном давлении C_p больше теплоемкости при постоянном объеме C_v . А как они связаны между собой? При постоянном объеме работа не совершается, поэтому для идеального газа

$$C_v = \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (2)$$

При неизменном давлении совершаемая газом работа $\Delta A = p\Delta V$, и из первого начала термодинамики следует, что

$$C_p = C_v + p \frac{\Delta V}{\Delta T}.$$

Из уравнения состояния одного моля идеального газа $pV = RT$ при постоянном давлении p находим $p\Delta V = R\Delta T$.

Теперь для теплоемкости C_p одного моля идеального газа (молярной теплоемкости) получаем

$$C_p = C_v + R. \quad (3)$$

Рассчитать молярную теплоемкость C_v можно, только обратившись к молекулярно-кинетической теории идеального газа. Поскольку для одноатомного идеального газа среднее значение кинетической энергии одной молекулы равно $\frac{3}{2}kT$, внутренняя энергия одного моля газа равна

$$U = \frac{3}{2}kN_A T = \frac{3}{2}RT,$$

откуда с помощью формулы (2) находим

$$C_v = \frac{3}{2}R.$$

ЗАДАЧА 6

Один моль идеального газа нагревают при таких условиях, что давление газа пропорционально его объему:

$$p = \alpha V \quad (1)$$

(α — постоянная). Найти теплоемкость газа при таком процессе. Попробуйте придумать устройство, в котором давление газа и занимаемый им объем были бы связаны соотношением (1).

РЕШЕНИЕ

Как мы убедились, решая предыдущую задачу, теплоемкость газа оказывается различной в зависимости от того, при каких условиях газ нагревают, так как при разных способах нагревания газ совершает разную работу. Действительно, используя первое начало

термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$ и рассуждая, как и в предыдущей задаче, для теплоемкости идеального газа получаем

$$C = C_V + \frac{\Delta A}{\Delta T}. \quad (2)$$

Для нахождения теплоемкости C необходимо определить работу ΔA , которую совершает газ в рассматриваемом процессе при нагревании его на ΔT . Когда расширение газа происходит при постоянном давлении, совершаемая им работа ΔA , как мы видели, вычисляется по формуле

$$\Delta A = p \Delta V. \quad (3)$$

А как вычислить работу, совершаемую газом, когда давление не остается постоянным, а связано с объемом соотношением (1)? Также по формуле (3), но только при постоянном давлении ΔV могло быть любым, а в рассматриваемом случае ΔV нужно выбирать настолько малым, чтобы можно было пренебречь изменением давления газа Δp при его расширении на ΔV . Теперь нужно связать $p \Delta V$ при малом изменении объема с изменением температуры. Для этого воспользуемся уравнением состояния

$$pV = RT. \quad (4)$$

Пусть при изменении температуры газа на ΔT его объем изменился на ΔV , а давление — на Δp . Эти изменения связаны между собой благодаря уравнению состояния (4):

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T). \quad (5)$$

Вычитая выражение (4) из (5) и пренебрегая членом $\Delta p \Delta V$, получаем

$$p \Delta V + V \Delta p = R \Delta T. \quad (6)$$

В рассматриваемом процессе, когда давление газа пропорционально его объему, из формулы (1) имеем $\Delta p = \alpha \Delta V$. Поэтому

$$V \Delta p = \alpha V \Delta V = p \Delta V. \quad (7)$$

Подставляя $V \Delta p$ из выражения (7) в (6), находим

$$\Delta A = p \Delta V = \frac{1}{2} R \Delta T.$$

С помощью формулы (2) находим теплоемкость газа в этом процессе

$$C = C_V + \frac{R}{2}.$$

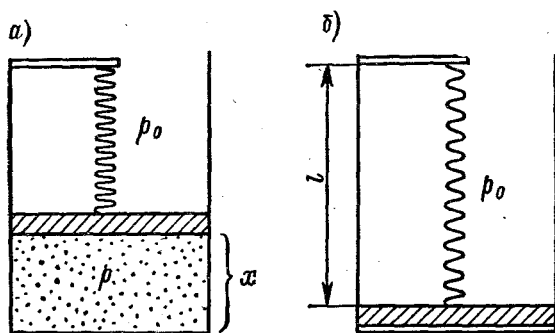
Вспоминая связь C_V и C_p , даваемую формулой (3) предыдущей задачи, замечаем, что C можно представить в виде

$$C = \frac{1}{2} (C_V + C_p).$$

Отметим, что в трех рассмотренных нами процессах (нагревание газа при постоянном объеме, при постоянном давлении и при $p =$

$= \alpha V$) теплоемкость газа остается постоянной на всем протяжении процесса.

Теперь подумаем, как практически можно осуществить устройство, в котором давление газа пропорционально занимаемому им объему. Это, например, может быть сосуд с поршнем. Поставим его вертикально. Чтобы нагревание газа происходило при постоянном объеме, поршень нужно закрепить. Для нагревания при постоянном давлении нужно положить на поршень постоянный груз. В интересующем нас случае можно попытаться подпереть поршень упругой пружиной (рисунок *а*), поскольку вследствие закона Гука действующая на поршень со стороны пружины сила будет линейно зависеть от его смещения. Как подобрать параметры этого устройства, чтобы выполнялось соотношение (1)? При $V = 0$, когда поршень лежит на дне (рисунок *б*), давление газа под поршнем в силу (1) должно быть равно нулю, поэтому вес поршня P и сила атмосфер-



К задаче 6.

ного давления $p_0 S$ (S — площадь поршня) должны уравновешиваться силой растяжения пружины:

$$P + p_0 S = k(l - l_0). \quad (8)$$

Здесь k — коэффициент жесткости пружины, l_0 — ее длина в свободном состоянии. Итак, нужно подобрать такую пружину, чтобы соотношение (8) выполнялось. Проверим, будет ли при этом давление газа p пропорционально его объему V при произвольном положении поршня (см. рисунок *а*). Напишем условие равновесия поршня

$$P + p_0 S = k(l - l_0 - x) + pS.$$

Отсюда с учетом равенства (8) получаем

$$p = \frac{kx}{S} = \frac{k}{S^2} V.$$

Попробуйте придумать другие устройства!

В комнате истопили печь, в результате температура воздуха увеличилась от T_1 до T_2 . Считая воздух идеальным газом, найдите изменение внутренней энергии воздуха в комнате.

РЕШЕНИЕ

Внутренняя энергия идеального газа — это кинетическая энергия хаотического движения его молекул. В состоянии теплового равновесия энергия одной молекулы пропорциональна абсолютной температуре, а энергия всего воздуха в комнате пропорциональна числу молекул, т. е. числу молей газа, находящегося в комнате. Поэтому выражение для энергии можно записать в виде

$$U = C_V \frac{m}{\mu} T,$$

где m — масса воздуха, μ — его молекулярный вес, C_V — коэффициент пропорциональности — молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Воспользовавшись уравнением Менделеева — Клапейрона $pV = (m/\mu) RT$, замечаем, что выражению для внутренней энергии воздуха U можно придать вид

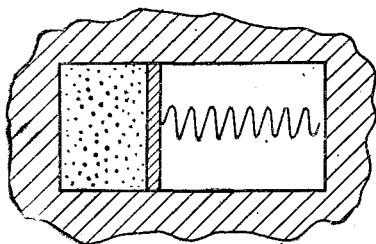
$$U = C_V \frac{pV}{R}. \quad (1)$$

Объем комнаты V не изменяется при протапливании печи; не изменяется и давление воздуха в комнате p . Оно равно атмосферному, поскольку комната не герметична. Глядя на формулу (1), убеждаемся, что внутренняя энергия воздуха в комнате не изменяется при протапливании. Сразу возникают вопросы: куда девается энергия, выделяющаяся при сгорании дров, и зачем мы вообще топим печь? Второй вопрос, конечно, шутка: для человека имеет значение не энергия воздуха, а его температура, которая повышается при протапливании. Что касается энергии, выделяющейся при сгорании дров, то она целиком «выходит» наружу: масса воздуха в комнате при нагревании при постоянном давлении уменьшается.

ЗАДАЧА 8

В расположенном горизонтально цилиндре (рисунок) слева от закрепленного поршня находится 1 моль идеального газа, в правой части цилиндра — вакуум. Цилиндр теплоизолирован от окружающей среды, а пружина, расположенная между поршнем и стенкой, находится первоначально в недеформированном состоянии. Поршень освобождают, и после установления равновесия объем, занимаемый газом, увеличивается вдвое. Как изменились при этом температура и давление газа? Теплоемкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь.

По условию задачи вначале пружина находится в недеформированном состоянии, и сила давления газа на поршень уравновешивается упором, удерживающим поршень. Когда упор убирают, поршень под действием давления газа перемещается вправо и сжимает пружину. По инерции поршень проскакивает положение равновесия, и сжатая пружина после остановки толкает его обратно. В системе возникают колебания, которые вследствие трения постепенно затухают, и поршень останавливается в положении равновесия. В начальном состоянии вся энергия рассматриваемой системы состояла только из внутренней энергии газа, ибо поршень был неподвижен, а пружина недеформирована. В конечном состоянии энергия системы складывается из внутренней энергии газа и потенциальной энергии сжатой пружины.



К задаче 8.

В процессе установления равновесия происходили многократные превращения энергии из одного вида в другие: внутренняя энергия газа частично превращалась в кинетическую энергию движения поршня, в кинетическую энергию макроскопического движения газа в цилиндре вслед за поршнем, в потенциальную энергию деформированной пружины и обратно.

В процессе колебаний вследствие трения механическая энергия превращалась в тепло, т. е. во внутреннюю энергию газа. Изменением внутренней энергии поршня, стенок сосуда и пружины можно пренебречь, так как по условию задачи их теплоемкость мала по сравнению с теплоемкостью газа. На основании первого начала термодинамики можно утверждать, что полная энергия системы в результате всех этих процессов не изменилась, так как теплообмен с окружающей средой отсутствовал, и система не совершала механической работы над внешними телами.

Сохранение полной энергии системы выражается соотношением

$$\Delta U + \frac{kx^2}{2} = 0, \quad (1)$$

где второе слагаемое есть потенциальная энергия пружины жесткостью k , сжатой на величину x , а изменение внутренней энергии одного моля идеального газа ΔU при изменении его температуры от T_1 до T_2 равно

$$\Delta U = C_V (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Здесь C_V — молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме.

В положении равновесия сила давления газа на поршень площадью S уравнивается реакцией сжатой пружины

$$p_2 S = kx. \quad (3)$$

Величина смещения поршня x очевидным образом связана с изменением объема газа от значения V_1 до V_2 :

$$x = \frac{V_2 - V_1}{S}. \quad (4)$$

Подставив в уравнение баланса энергии (1) выражения (2) и (4), получим

$$C_V (T_1 - T_2) = \frac{k (V_1 - V_2)^2}{2S^2}. \quad (5)$$

Используя уравнения состояния идеального газа

$$pV = RT, \quad (6)$$

выразим давление газа p_2 в условии механического равновесия поршня (3) через конечные значения температуры и объема, а смещение поршня x — с помощью формулы (4):

$$\frac{RT_2}{V_2} = \frac{k (V_2 - V_1)}{S^2}. \quad (7)$$

Разделив почленно выражения (5) и (7), получаем

$$\frac{2C_V}{R} \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = 1 - \frac{V_1}{V_2}. \quad (8)$$

При заданном отношении начального и конечного объемов газа формула (8) дает возможность определить отношение температур

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{R}{2C_V} \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right). \quad (9)$$

Зная отношение объемов и температур, можно с помощью уравнения состояния (6) найти отношение давлений

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R}{2C_V} \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) + \frac{V_2}{V_1}. \quad (10)$$

Поскольку для идеального одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$, а по условию задачи конечный объем вдвое больше начального, то с помощью формул (9) и (10) находим $T_2/T_1 = 6/7$, $p_2/p_1 = 3/7$.

Полученные формулы (9) и (10) полезно проверить для предельного случая, когда ответ очевиден. Если коэффициент жесткости $k \rightarrow \infty$, то газ не сможет сдвинуть поршень с места, и, следовательно, объем, температура и давление газа останутся без изменения. В этом случае $V_2 = V_1$ и формулы (9) и (10), как и полагается, дают $T_2 = T_1$ и $p_2 = p_1$.

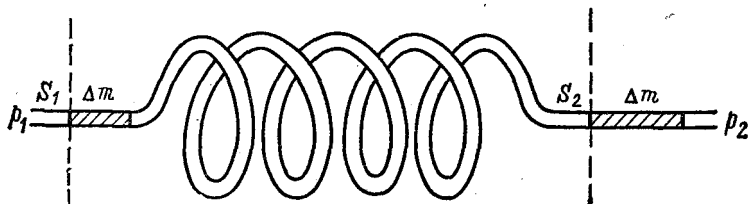
Стационарный поток идеального газа протекает через спиральную трубку (змеевик). На одном конце змеевика (на входе) поддерживаются постоянные давление p_1 и температура T_1 . На выходе змеевика поддерживается постоянное давление p_2 и измеряется температура T_2 . Какая совершается работа при прохождении через змеевик одного моля газа?

РЕШЕНИЕ

О какой работе идет речь? Мы знаем, что газ, а точнее сила давления газа, совершает работу при перемещении поршня или любого другого тела, ограничивающего занимаемый газом объем. Таким телом является, например, оболочка резинового шарика, деформирующаяся при его наполнении газом. Нетрудно написать общее выражение для работы силы давления газа ΔA :

$$\Delta A = p \Delta V. \quad (1)$$

Эта работа положительна при расширении газа ($\Delta V > 0$) и



К задаче 9.

отрицательна при сжатии. Отметим, что наличие тела, ограничивающего объем газа, совершенно необходимо для того, чтобы можно было говорить о совершаемой газом работе: газ, расширяющийся в пустоту, работы не совершает! Поясним это. Представим себе сосуд, разделенный перегородкой на две части: по одну сторону от перегородки находится газ, по другую — вакуум. При внезапном разрушении перегородки газ заполняет весь сосуд, объем газа увеличивается ($\Delta V > 0$), давление газа $p > 0$, однако работы газ не совершает: $\Delta A = 0$. Формула (1) в этом случае неприменима.

Часто наряду с работой, совершаемой газом, говорят о работе, совершаемой над газом. При этом имеют в виду работу сил, действующих на перемещающийся поршень со стороны внешних тел. Очевидно, что при равномерном перемещении поршня работа $\Delta A'$, совершаемая над газом, противоположна по знаку и равна по величине работе газа ΔA : $\Delta A' = -p \Delta V$.

Так о какой же работе идет речь в задаче? Ведь никаких поршней здесь нет! Однако на самом деле «поршни», т. е. внешние тела, поддерживающие заданные давления на входе и выходе змеевика, здесь есть, и они-то и совершают работу над протекающим газом. Эту работу можно подсчитать следующим образом.

Рассмотрим газ, заключенный между входным S_1 и выходным S_2 сечениями змеевика. Вследствие стационарности потока масса этого газа не меняется со временем, т. е. если за время Δt через входное сечение прошла масса газа Δm , то точно такая же масса вышла из змеевика (рисунок).

Пусть объем, занимаемый массой Δm на входе при давлении p_1 и температуре T_1 равен ΔV_1 , а объем на выходе из змеевика равен ΔV_2 . Газ, находившийся между сечениями S_1 и S_2 , теперь занимает новое положение — идущая за ним порция газа действовала на него с силой $F_1 = p_1 S_1$, идущий впереди газ оказывал сопротивление $F_2 = p_2 S_2$. Таким образом, работа внешних сил над рассматриваемым газом $\Delta A' = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$.

Если через змеевик прошел один моль газа, то согласно уравнению состояния идеального газа можно написать

$$p_1 \Delta V_1 = RT_1, \quad p_2 \Delta V_2 = RT_2.$$

Поэтому совершаемая над газом работа равна

$$\Delta A' = R(T_1 - T_2). \quad (1)$$

Формально задача решена. Однако обратим внимание на одну особенность ее условия: в то время, как температура газа на входе в змеевик T_1 задается, температура на выходе T_2 измеряется. Напомним, что давление в обоих случаях задается. От чего же зависит температура газа на выходе? Очевидно, от условий его прохождения через змеевик. Чем же могут различаться эти условия? Только интенсивностью теплообмена протекающего по змеевику газа с окружающей средой. Рассмотрим вначале случай, когда теплообмен вообще отсутствует — змеевик адиабатически изолирован от окружающей среды. Какова при этом температура газа T_2 на выходе? Используя первое начало термодинамики

$$\Delta Q + \Delta A' = \Delta U, \quad (2)$$

получаем $\Delta A' = \Delta U$, так как $\Delta Q = 0$. Поскольку внутренняя энергия идеального газа пропорциональна абсолютной температуре, имеем

$$\Delta U = U_2 - U_1 = C_V(T_2 - T_1). \quad (3)$$

Подставляя выражения (1) и (3) в уравнение (2) и учитывая, что $\Delta Q = 0$, получаем

$$R(T_1 - T_2) = C_V(T_2 - T_1),$$

а так как $C_V > 0$, то отсюда немедленно следует $T_1 = T_2$.

Таким образом, температура газа при адиабатическом прохождении через змеевик не меняется, а совершаемая при этом работа, как видно из (1), равна нулю. Для того чтобы работа была отлична от нуля, необходим теплообмен. Легко убедиться, что когда газ получает тепло ($\Delta Q > 0$), совершаемая над ним работа отрицательна и, наоборот, при $\Delta Q < 0$ $\Delta A' > 0$. Действительно, подставляя

в уравнение первого начала (2) выражения (1) и (3), получаем

$$\Delta Q = (C_V + R)(T_2 - T_1).$$

Поскольку $C_V + R > 0$, знак $\Delta T = T_2 - T_1$ совпадает со знаком ΔQ . Если, например, $\Delta Q < 0$, то $T_2 < T_1$ и из выражения (1) видно, что $\Delta A' > 0$. Исходя из полученных результатов, попытаемся представить себе, как происходит протекание газа через змеевик. Если в змеевике газ охлаждается ($\Delta Q < 0$), то совершаемая над газом работа положительна — внешние силы «проталкивают» газ через змеевик. Если тепло подводится ($\Delta Q > 0$), то наш змеевик подобен тепловой машине — газ сам совершает работу над внешними телами. И обратите внимание, что этот результат не зависит от того, какова величина давления газа на входе и на выходе. Единственное условие при этом — давление на входе должно быть больше давления на выходе, иначе газ просто потечет в обратную сторону.

Решая эту задачу, мы пришли к выводу, что при адиабатическом протекании газа через змеевик совершаемая над ним работа равна нулю. Не кажется ли Вам странным этот результат? Легко придумать такой опыт, в котором над газом работа совершается, а теплообмена с окружающей средой нет. Действительно, попробуем при помощи компрессора прокачивать через змеевик газ в вакуум. Для того чтобы процесс можно было считать стационарным, сечение выходного отверстия сделаем много меньше сечения входного. Змеевик теплоизолируем от окружающей среды.

Совершаемая компрессором над газом работа положительна и равна полной совершаемой над газом работе, ибо, как выяснено, выходя в вакуум, газ работы не совершает. Так как нет обмена теплом, налицо противоречие с выводами задачи. В чем же здесь дело?

Ошибок в рассуждениях в том и в другом случае нет. Значит, противоречие возникло потому, что что-то существенное не было учтено.

При решении задачи использовалось первое начало термодинамики в виде $\Delta Q + \Delta A' = \Delta U$, где U — внутренняя энергия газа, которая складывается из кинетической энергии хаотического движения молекул газа и потенциальной энергии их взаимодействия между собой. (Для идеального газа вторая часть — энергия взаимодействия молекул — вообще отсутствует.) Поэтому при использовании такой формулировки первого начала термодинамики заранее молчаливо предполагается, что в рассматриваемых процессах не происходит изменения механической энергии системы, т. е. не меняется потенциальная энергия газа как целого во внешнем поле, не меняется и кинетическая энергия движения газа как целого, не возникает в газе никаких макроскопических потоков. Теперь уже становится ясно, что при анализе приведенного примера нельзя использовать первое начало в таком виде (и, следовательно, применять выводы задачи), так как на выходе из змеевика в вакуум

возникает макроскопический направленный поток, кинетическую энергию которого необходимо учитывать. Работа компрессора в этом случае как раз и определяет кинетическую энергию этого потока. Теперь читатель и сам, наверное, легко сообразит, что выводы задачи неприменимы и в том, например, случае, когда вход и выход змеевика расположены на разной высоте.

ЗАДАЧА 10

В стеклянный сосуд наливают некоторое количество четыреххлористого углерода (CCl_4), а сверху слой воды. При нормальном атмосферном давлении вода кипит при 100°C , а четыреххлористый углерод — при $76,7^\circ\text{C}$. Если медленно нагревать сосуд в водяной бане, то на границе раздела этих несмешивающихся жидкостей кипение начинается при $65,5^\circ\text{C}$! Объясните это явление.

РЕШЕНИЕ

При каких условиях начинается кипение жидкости? Кипение — это образование пузырьков пара внутри жидкости. Оно наступает, когда давление насыщенного пара сравняется с давлением в жидкости на той глубине, где образуется пузырь. Давление жидкости складывается из атмосферного давления и гидростатического давления столба жидкости. Если высота столба жидкости в сосуде несколько сантиметров, то гидростатическое давление составляет несколько тысячных от нормального атмосферного, и его можно не принимать во внимание. Давление насыщенных паров жидкости определяется ее температурой. В воде пузырьки содержат только пары воды, и при 100°C давление насыщенного пара воды равно нормальному атмосферному. В четыреххлористом углероде пузырьки содержат только пары CCl_4 , и давление насыщенных паров равно атмосферному при $76,7^\circ\text{C}$.

На границе раздела этих жидкостей пузырьки содержат как пары CCl_4 , так и пары воды. Давление в этих пузырьках, на основании закона Дальтона, равно сумме парциальных давлений паров воды и CCl_4 . Поэтому давление, равное атмосферному, установится в пузырьках, находящихся на границе, при температуре, меньшей $76,7^\circ\text{C}$. При этой температуре и начинается кипение на границе раздела. Опыт показывает, что это происходит при температуре $65,5^\circ\text{C}$. Эту температуру можно установить без опыта, подбирая такую температуру по таблицам зависимости давления насыщенных паров воды и CCl_4 от температуры, при которой сумма давлений равна атмосферному. При $65,5^\circ\text{C}$ давление паров воды составляет 192 мм рт. ст., а давление паров CCl_4 — 568 мм рт. ст. Используя эти цифры, можно сделать вывод, что в каждом пузырьке, образовавшемся на границе раздела, молекул CCl_4 будет почти в три раза больше, чем молекул воды. К тому же масса молекулы CCl_4 в девять раз больше массы молекулы воды. Поэтому его испарение происходит почти в 25 раз быстрее, чем испарение воды. Наблюдая кипе-

ние в пограничном слое в течение некоторого времени, можно убедиться, что нижний слой CCl_4 выкипает значительно быстрее, чем верхний слой воды.

ЗАДАЧА 11

Два сосуда объемом $V = 10$ л каждый наполнены сухим воздухом при давлении $p_0 = 1$ атм и температуре $t_0 = 0^\circ \text{C}$. В первый вводят $m_1 = 3$ г воды, во второй $m_2 = 15$ г и нагревают сосуды до $t = 100^\circ \text{C}$. Определить давление p влажного воздуха при этой температуре в каждом сосуде.

РЕШЕНИЕ

Введенная в сосуд вода испаряется, и давление в сосуде, согласно закону Дальтона, становится равным сумме парциальных давлений воздуха и паров воды.

Парциальное давление воздуха p в обоих сосудах одинаково и легко находится с помощью закона Шарля, так как нагревание неизменной массы воздуха происходит при постоянном объеме, ибо тепловым расширением сосуда можно пренебречь:

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} = 1 \text{ атм} \cdot \frac{373}{273} = 1,37 \text{ атм}.$$

Теперь определим парциальное давление p_1 паров воды в первом сосуде при 100°C . Для этого воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона

$$p_1 = \frac{1}{V} \cdot \frac{m_1}{\mu} RT. \quad (1)$$

Подставляя в (1) числовые значения всех величин ($R = 0,082$ атм·л/моль·град, $\mu = 18$ г/моль), находим $p_1 = 0,51$ атм < 1 атм. Итак, полное давление в первом сосуде $p + p_1 = 1,88$ атм.

Сосчитав таким же образом парциальное давление паров воды во втором сосуде, получим $p_2 = 2,55$ атм > 1 атм.

Итак, казалось бы, давление во втором сосуде равно

$$p + p_2 = 3,92 \text{ атм}.$$

Но не торопитесь. Может ли давление водяных паров при 100°C быть больше одной атмосферы? Вспомним, что при давлении в 1 атм вода кипит при 100°C . Это значит, что давление насыщающих водяных паров равно 1 атм при 100°C . Другими словами, давление водяных паров при 100°C никогда, ни при каких условиях не может превышать 1 атм. Поэтому во втором сосуде вода испарилась не полностью, пар будет насыщенным, и его парциальное давление равно 1 атм. Полное давление в этом сосуде $p + 1 \text{ атм} = 2,37$ атм.

Подумайте сами, как можно сосчитать массу неиспарившейся воды во втором сосуде.

При решении этой задачи для нахождения давления водяных паров мы использовали закон Менделеева — Клапейрона — уравне-

ние состояния идеального газа. Это можно делать для достаточно разреженного пара независимо от того, является пар насыщенным или нет. Однако содержание закона в этих двух случаях совершенно различно. Если пар далек от насыщения, то, используя уравнение (1), мы находим давление пара, которое оказывается весьма близким к наблюдаемому на опыте. Для насыщенного пара использование этого уравнения для нахождения давления приводит, как мы только что видели, к абсурду. Однако это не означает, что закон неверен. Если вычисленное по уравнению (1) давление паров оказывается больше, чем давление насыщенных паров при данной температуре, то это означает, что на самом деле масса паров меньше той, которую мы подставляли в уравнение, — часть вещества находится в жидкой фазе. Подставляя в формулу (1) давление насыщенных паров, взятое из таблиц, можно из нее найти массу насыщенных паров, содержащихся в объеме V при температуре T .

Таким образом, применяя уравнение Менделеева — Клапейрона к парам, нужно все время иметь под рукой таблицу зависимости давления насыщающих паров от температуры, т. е. зависимости температуры кипения от давления.

Теперь Вы без труда сможете ответить на поставленный дополнительный вопрос — сосчитать массу испарившейся воды во втором сосуде.

Электростатика

Основным законом электростатики, установленным опытным путем, является закон сохранения электрического заряда. В изолированной системе полный электрический заряд, т. е. алгебраическая сумма положительного и отрицательного зарядов, остается постоянным.

Взаимодействие электрических зарядов, находящихся в покое, описывается законом Кулона. Этот закон устанавливает зависимость силы взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме от их величин q_1 и q_2 и расстояния r между ними. В международной системе единиц СИ закон имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Электрические заряды наделяют окружающее их пространство особыми физическими свойствами — создают электрическое поле. Взаимодействие электрических зарядов осуществляется посредством создаваемых ими полей.

Поле, создаваемое неподвижными зарядами, не меняется со временем и называется электростатическим. Силовой характеристикой электростатического поля является напряженность E , измеряемая силой, действующей на единичный положительный пробный заряд. Поле, создаваемое уединенным точечным зарядом q , является сферически-симметричным; величину его напряженности с помощью закона Кулона можно представить в виде

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Энергетической характеристикой электростатического поля является потенциал ϕ , измеряемый работой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из данной точки поля в некоторую точку, потенциал которой принят равным нулю. Физический смысл имеет только разность потенциалов между рассматриваемыми точками, а не абсолютное значение потенциалов точек. Существование потенциала как энергетической характеристики точки поля связано с тем, что работа сил поля при

перемещении заряда не зависит от формы пути, а определяется положением начальной и конечной точек. Поля, обладающие таким свойством, называются потенциальными.

При рассмотрении электростатического поля точечного заряда удобно в качестве точки с нулевым потенциалом выбрать бесконечно удаленную точку. Тогда выражение для потенциала точки, отстоящей на расстояние r от заряда, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.$$

Электрические поля графически изображают либо с помощью силовых линий, либо с помощью эквипотенциальных поверхностей. Силовые линии перпендикулярны поверхностям постоянного потенциала, поэтому, имея одну из этих картин, мы можем построить другую.

Электрические поля удовлетворяют принципу суперпозиции: электрическое поле системы источников является суммой полей отдельных источников. Напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Потенциал произвольной точки поля нескольких зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке каждым зарядом. При этом точка нулевого потенциала выбирается общей для всех зарядов.

Существует еще один закон, эквивалентный закону Кулона, который может с равным успехом считаться основным законом электростатического взаимодействия. Это теорема Гаусса. Эквивалентность теоремы Гаусса и закона Кулона основана на обратной пропорциональности силы взаимодействия двух точечных зарядов квадрату расстояния и на принципе суперпозиции. Теорема Гаусса применима к любому физическому полю, где действует закон обратных квадратов, например к гравитационному полю.

Теорема Гаусса формулируется следующим образом: поток N напряженности электрического поля E через любую замкнутую поверхность определяется полным зарядом q , находящимся внутри этой поверхности: $N = q/\epsilon_0$.

Во многих задачах этого раздела рассматриваются проводники, находящиеся в электрическом поле. В статическом состоянии напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю, и все его точки имеют одинаковый потенциал. Свободные заряды расположены на поверхности проводника. Вне проводника вблизи его границы линии напряженности перпендикулярны к поверхности, а напряженность поля связана с плотностью зарядов σ на поверхности следующим соотношением, вытекающим из теоремы Гаусса:

$$E = \sigma/\epsilon_0.$$

Емкость уединенного проводника определяется только его формой и размерами и измеряется отношением величины заряда Δq к вызываемому им изменению потенциала проводника $\Delta\varphi$.

Емкость системы двух проводников, заряженных равными по величине разноименными зарядами (конденсатор), определяется отношением заряда одного проводника к разности потенциалов между ними и зависит только от размеров, формы и взаимного расположения проводников. Например, емкость плоского конденсатора с пластинами площадью S и расстоянием d между ними в вакууме равна

$$C = \epsilon_0 S/d.$$

Заряженный конденсатор обладает энергией. Если заряд конденсатора q , а разность потенциалов между пластинами U , то энергия

$$W = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}.$$

Энергию заряженного конденсатора можно рассматривать либо как энергию взаимодействия зарядов, сосредоточенных на его обкладках, либо как энергию создаваемого этими зарядами электрического поля. В рамках электростатики оба эти представления эквивалентны. При изучении переменных во времени полей (электромагнитные волны) можно установить, что в действительности энергия сосредоточена в поле.

Энергия плоского конденсатора, рассматриваемая как энергия заключенного между обкладками электростатического поля, имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V,$$

где $V = Sd$ — объем, занимаемый полем. Коэффициент при V имеет смысл объемной плотности энергии электростатического поля.

Отметим, что некоторые задачи этого раздела, в которых фигурируют потенциалы точечных зарядов, для компактной записи формул решены в системе единиц СГСЭ.

ЗАДАЧА 1

Точечный заряд q находится на расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиусом R . Найти полный заряд, индуцированный на поверхности сферы.

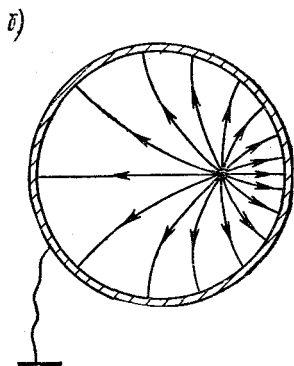
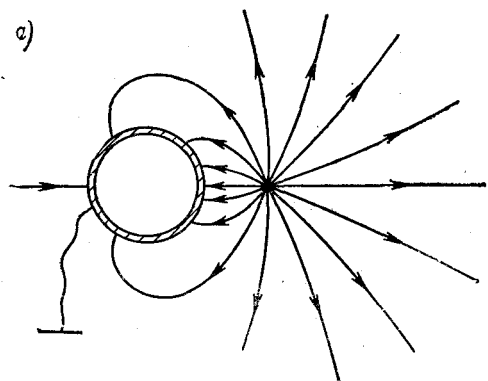
РЕШЕНИЕ

Прежде всего отметим, что возможны два случая: 1) $l > R$ — заряд находится вне сферы, 2) $l < R$ — заряд помещен внутрь сферы. Случай $l = R$ не может быть реализован, так как точечный заряд не может находиться на поверхности проводника — он обязательно расплывется по поверхности, т. е. не будет точечным.

Начнем с первого случая. В условии сказано, что сфера заземлена. Что это значит? Как известно, при равновесии зарядов электрическое поле внутри проводника отсутствует. Из этого следует, что потенциал во всех точках проводника одинаков. Поскольку сфера соединена с землей проводником, то ее потенциал равен по-

тенциалу земли. А каков потенциал во внутренних точках сферы, например в центре? Если бы это был сплошной проводящий шар, то, как было только что отмечено, электрического поля внутри не было бы. Поскольку в проводнике все нескомпенсированные заряды находятся на поверхности, мы никак не изменим поля, удалив внутренность. Таким образом, в полости, как и в самом проводнике, поле отсутствует, а потенциал во всех точках одинаков (рисунок а). Итак, потенциал в центре сферы равен потенциалу земли.

Электрическое поле в любой точке пространства создается зарядом q и зарядом, индуцированным на поверхности сферы, который распределен там, разумеется, неравномерно (как раз так, чтобы обратилась в нуль результирующая напряженность поля внутри



К задаче 1.

сферы, другими словами, поле, создаваемое индуцированным зарядом, внутри сферы должно скомпенсировать поле заряда q). Согласно принципу суперпозиции потенциал в любой точке можно искать в виде суммы потенциалов полей, создаваемых точечным зарядом q и точечными зарядами, на которые можно разбить распределенный по поверхности сферы индуцированный заряд. Поэтому, написав выражение для потенциала какой-либо точки с уже известным нам значением потенциала, мы получим уравнение для определения искомого индуцированного заряда. Какую же точку выбрать? Если в качестве этой точки мы выберем центр сферы, то все элементарные заряды $\Delta q'_i$, на которые разбит индуцированный заряд, окажутся от нее на одинаковом расстоянии, а потенциал создаваемого ими поля в этой точке будет равен

$$\sum_i \frac{\Delta q'_i}{R} = \frac{1}{R} \sum_i \Delta q'_i = \frac{q'}{R}.$$

Написав выражение для потенциала поля точечного заряда q на расстоянии r в виде q/r , мы тем самым полагаем потенциал равным нулю на бесконечности. Тогда полный потенциал в центре сферы

равен

$$\Phi_0 = \frac{q'}{R} + \frac{q}{l}.$$

Заметим, что во всех рассуждениях мы пренебрегаем полем зарядов, индуцированных на поверхности земли. Это справедливо при условии, что расстояние до земли во много раз превосходит все другие линейные размеры, фигурирующие в данной задаче (l, R). Другими словами, мы должны считать землю удаленной на бесконечность, а ее потенциал — равным нулю. Но тогда равен нулю и потенциал в центре сферы, т. е.

$$\frac{q'}{R} + \frac{q}{l} = 0,$$

откуда $q' = -q \frac{R}{l}$.

Полученный ответ удовлетворяет всем предельным случаям, для которых решение задачи очевидно. При стремлении l к бесконечности величина индуцированного заряда стремится к нулю. При неограниченном приближении заряда q к поверхности сферы (т. е. $l \rightarrow R$) величина индуцированного заряда все меньше и меньше отличается от $-q$. Наконец, отметим, что знак минус отражает тот факт, что индуцированный заряд всегда противоположного знака.

Перейдем ко второму случаю: точечный заряд находится внутри заземленной сферы.

Поскольку сфера заземлена, потенциал ее по-прежнему равен нулю. Электрического поля в толще проводника нет, нет его и в окружающем сферу пространстве (рисунок б). В самом деле, ничего не изменится, если мы будем считать, что все это пространство заполнено проводником. В каком-то смысле этот случай похож на предыдущий, но только все «вывернуто наизнанку»: теперь в окружающем пространстве электрического поля нет, зато есть поле внутри полости, и индуцированные заряды теперь будут находиться на внутренней поверхности проводящей сферы. Найдем величину индуцированного заряда. Попробуем сначала упростить задачу: поместим точечный заряд q в центр сферы (это частный случай). Из симметрии совершенно ясно, что индуцированный заряд распределится по внутренней поверхности сферы равномерно, и потенциал создаваемого им поля вне сферы будет равен q'/r . По принципу суперпозиции поле вне сферы есть сумма полей, создаваемых точечным зарядом q и индуцированным зарядом q' :

$$\frac{q}{r} + \frac{q'}{r} = 0.$$

Отсюда $q' = -q$, т. е. индуцируется равный по величине заряд противоположного знака.

Подумаем, что будет, если заряд q находится в произвольной точке внутри сферы. Легко сообразить, что величина индуцированного заряда q' не зависит от расположения заряда q внутри сферы;

при перемещении заряда q внутри сферы будет меняться лишь распределение индуцированного заряда на внутренней поверхности сферы.

Поскольку поле в любой точке вне сферы отсутствует, можно утверждать, что система зарядов q и q' электронейтральна: $q' = -q$ (заметим, что обратное утверждение неверно: из нейтральности системы не следует, что создаваемое ею поле равно нулю; в качестве примера такой системы можно привести диполь).

Этот результат становится особенно очевидным, если воспользоваться картиной силовых линий. Как известно, силовые линии электростатического поля всегда начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, и число силовых линий однозначно связано с величиной заряда. Вне сферы поля нет, т. е. нет силовых линий. Другими словами, все силовые линии начались и окончились на зарядах q и q' , откуда сразу следует, что полный заряд $q + q' = 0$.

В этой задаче выражения для потенциалов точечных зарядов написаны в системе СГСЭ.

ЗАДАЧА 2

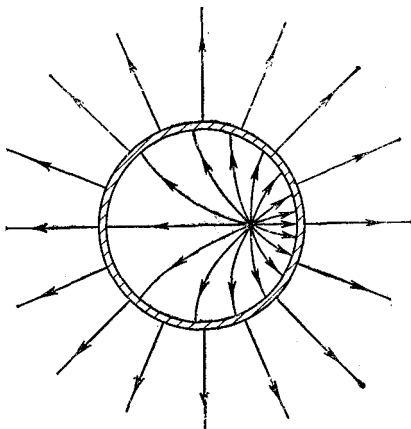
Точечный заряд q находится внутри изолированной незаряженной проводящей сферы. Найти поле вне сферы.

РЕШЕНИЕ

Задача несколько напоминает предыдущую, однако теперь поле есть как в полости, так и вне сферы. В толще сферы, т. е. в проводнике, поле, конечно, отсутствует (рисунок).

Начнем опять с простого частного случая: заряд q расположен в центре сферы. Из симметрии ясно, что индуцированные заряды на внутренней и внешней поверхностях сферы распределены равномерно. Поскольку поля в толще сферы нет, величина индуцированного на внутренней поверхности заряда q_1 равна $-q$ (см. предыдущую задачу). Заряд q_2 , находящийся на наружной поверхности сферы, поля внутри нее не создает. Из электронейтральности самой проводящей сферы следует, что $q_2 = -q_1 = q$. Таким образом, потенциал вне сферы равен q/r , т. е. создаваемое этой системой поле совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре сферы.

При смещении заряда q из центра сферы, как и в предыдущей задаче, изменяется распределение заряда q_1 на внутренней поверх-



К задаче 2.

ности сферы так, чтобы поле в толще сферы оставалось равным нулю. Поле в полости при этом, конечно, меняется, но величина индуцированного заряда q_1 остается прежней. Заряд на внешней поверхности $q_2 = q$ по-прежнему распределен равномерно и поля внутри сферы не создает. Таким образом, поле вне сферы не зависит от расположения заряда q внутри нее.

ЗАДАЧА 3

Точечный заряд q находится между двумя заземленными проводящими концентрическими сферами с радиусами a и b на расстоянии r от центра ($a < r < b$). Найти индуцированные на сферах заряды.

РЕШЕНИЕ

Если читатель разобрался в предыдущих задачах, то ему совершенно ясно, что электрическое поле есть только в пространстве между сферами, и поэтому полный заряд системы равен нулю:

$$q + q_a + q_b = 0.$$

Второе уравнение можно получить, записывая выражение для потенциала в центре сфер:

$$\frac{q}{r} + \frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{b} = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим

$$q_a = -q \frac{a}{r} \cdot \frac{b-r}{b-a}; \quad q_b = -q \frac{b}{r} \cdot \frac{r-a}{b-a}.$$

Теперь предлагаем Вам подумать над другой аналогичной задачей. Пусть точечный заряд находится между двумя параллельными бесконечными проводящими плоскостями. Считая все расстояния известными, найти индуцированные на плоскостях заряды. Попробуйте свести эту задачу к предыдущей. Может быть, Вам удастся найти независимое решение?

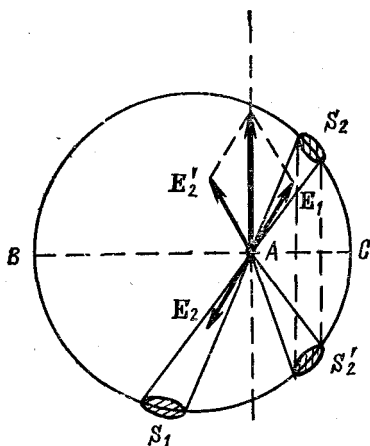
ЗАДАЧА 4

Поверхность полусферической чаши радиусом R с тонкими стенками заряжена с постоянной плотностью. Определить потенциал в каждой точке поверхности, которая стянула бы чашу, как кожа на барабане.

РЕШЕНИЕ

На первый взгляд задача кажется довольно сложной. Если выбрать на интересующей нас поверхности произвольную точку, то расстояние от нее до разных точек заряженной полусферы будет неодинаковым: вроде бы не обойтись без помощи высшей математики. Но не торопитесь! Задачу можно решить очень просто, используя принцип суперпозиции электрических полей и соображения симметрии.

Рассмотрим сначала равномерно заряженную по поверхности сферу. Как мы знаем, поле внутри нее отсутствует. С другой стороны, поле внутри сферы можно рассматривать как суперпозицию полей двух полусфер. Рассмотрим электрическое поле, создаваемое верхней и нижней полусферами в плоскости соприкосновения полусфер. Выберем произвольную точку A на этой плоскости (рисунок) и проведем через нее вертикальную плоскость, перпендикулярную диаметру сферы BC , на котором лежит точка A . Равная нулю напряженность поля сферы в этой точке является векторной суммой напряженностей полей, создаваемых отдельными элементами верхней и нижней полусфер. Как легко убедиться, равна нулю векторная сумма напряженностей E_1 и E_2 , создаваемых участками S_1 и S_2 . Участок S'_2 нижней полусферы, симметричный участку S_2 относительно плоскости соприкосновения полусфер, создает в точке A напряженность поля E'_2 такую, что векторная сумма E_1 и E'_2 перпендикулярна плоскости соприкосновения полусфер. Поскольку для каждого элемента S_1 слева от вертикальной плоскости всегда найдется соответствующий элемент S'_2 справа от этой плоскости, ясно,



К задаче 4.

что полная напряженность поля, создаваемая в точке A всей нижней полусферой (т. е. нашей полукруглой чашей), перпендикулярна плоскости соприкосновения (т. е. воображаемой поверхности, которая стягивает чашу, как кожа на барабане).

Точка A была выбрана совершенно произвольно, поэтому сказанное справедливо для всех точек интересующей нас поверхности. Если напряженность поля перпендикулярна поверхности в любой ее точке, то поверхность эквипотенциальная. Проще всего вычислить потенциал этой поверхности в точке, лежащей на оси симметрии чаши. Эта точка равно отстоит от поверхности чаши, и по принципу суперпозиции ее потенциал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi R^2\sigma}{R} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}.$$

Еще проще можно решить эту задачу, рассматривая не напряженность поля, а потенциал в произвольной точке на интересующей нас поверхности. Опять рассмотрим вспомогательную задачу: найдем потенциал φ_0 поля, создаваемого равномерно заряженной сферой. Он одинаков во всех точках внутри сферы и равен $\sigma R/\epsilon_0$.

С другой стороны, по принципу суперпозиции он равен сумме потенциалов, создаваемых двумя полусферами. Из симметрии ясно,

что потенциалы в любой точке интересующей нас поверхности, создаваемые верхней и нижней полусферами, равны. Поэтому потенциал поля, создаваемого одной заряженной полусферой во всех точках этой поверхности, одинаков и равен $\varphi = \varphi_0/2 = \sigma R/(2\epsilon_0)$.

Подумайте самостоятельно, как найти потенциал в любой точке плоскости «кожи», если ее продолжить за пределы чаши.

ЗАДАЧА 5

На расстоянии l от плоского бесконечного проводящего экрана находится точечный заряд q . Найти электрическое поле в произвольной точке пространства.

РЕШЕНИЕ

Прежде всего отметим, что «половина» ответа нам уже известна: за экраном поля нет, $E = 0$! Остается найти поле в полупространстве, содержащем заряд.

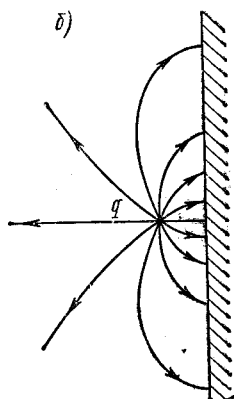
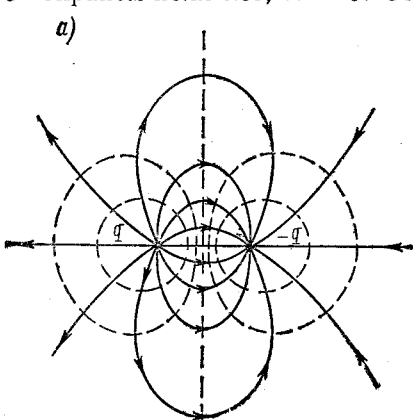


Рис. 1 к задаче 5.

Поле в этой области является суперпозицией поля точечного заряда q и зарядов, индуцированных на экране. Найти его проще всего следующим образом. Предположим, что имеются два точечных заряда q и $-q$ на расстоянии $2l$ друг от друга. Поле такой системы зарядов хорошо известно. На рис. 1 показаны силовые линии и сечения эквипотенциальных поверхностей. Одна из эквипотенциальных поверхностей — плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему заряды, и делящая его пополам. Действительно, потенциал любой точки этой плоскости

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right) = 0,$$

так как расстояния любой точки этой плоскости от зарядов q и $-q$ одинаковы ($r_1 = r_2$). Совместим тонкий проводящий экран с этой плоскостью. Поскольку все точки проводника, помещенного в электростатическое поле, имеют одинаковый потенциал, картина

поля не изменится вне экрана, а внутри него напряженность поля равна нулю. Уберем теперь заряд $-q$. Справа от экрана поля не будет, слева все останется без изменения (рис. 1, б). Но получившаяся система — как раз то, что нам нужно рассмотреть!

Итак, ответ найден. Справа от экрана поля нет, слева напряженность в любой точке определяется векторной суммой напряженностей полей, создаваемых зарядами q и $-q$, а потенциал — алгебраической суммой потенциалов этих полей. Поскольку все силовые линии, выходящие из заряда q и оканчивающиеся на заряде $-q$, теперь оканчиваются на проводящем экране, то полная величина индуцированного на нем заряда равна $-q$. Разумеется, индуцированный на экране заряд распределен на нем неравномерно. Поверхностную плотность σ этих зарядов легко определить из соотношения $E = \sigma/\epsilon_0$, где E — напряженность поля у поверхности экрана.

Напомним, что напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника направлена по нормали к поверхности. Очевидно, что в данной задаче поле обладает осевой симметрией: при вращении вокруг линии, соединяющей заряды q и $-q$, картина поля не меняется. Поэтому поверхностная плотность заряда на экране зависит только от расстояния r до оси симметрии: $\sigma = \sigma(r)$. Простой расчет, идея которого понятна из рис. 2, приводит к результату

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E(r) = \frac{ql}{2\pi(r^2 + l^2)^{3/2}}.$$

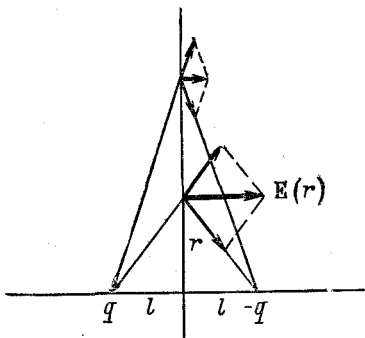


Рис. 2 к задаче 5.

Рассмотренное решение представляет собой пример использования так называемого метода электрических изображений. Основная идея этого метода — подобрать такие точечные заряды, которые создавали бы такие же поля, как и индуцированные на поверхностях проводников заряды. В рассматриваемой задаче заряд $-q$ создает слева от экрана такое же поле, как и индуцированный на экране заряд. Положение и величина этих фиктивных зарядов должны выбираться таким образом, чтобы одна из эквипотенциальных поверхностей поля, создаваемого заданными и фиктивными подобранными зарядами, совпадала бы с поверхностью проводника. Для плоской поверхности положение фиктивного заряда совпадает с изображением заданного заряда в «зеркале», образованном поверхностью проводника, откуда и берет свое название метод изображений. Этот метод с успехом можно применять для нахождения поля точечного заряда вблизи проводящих экранов более сложной формы.

ЗАДАЧА 6

На расстоянии l от плоского бесконечного проводящего экрана находится точечный заряд q . Какую работу нужно совершить, чтобы удалить заряд q на бесконечность?

Какая сила действует на заряд q ? Для нахождения силы нужно знать напряженность поля, в котором находится заряд. В данном случае это поле создается зарядами, индуцированными на экране. Как мы видели в предыдущей задаче, точно такое же поле создает фиктивный заряд $-q$. Таким образом, на заряд q действует такая же сила, как и в системе двух точечных зарядов q и $-q$, находящихся на расстоянии $2l$ друг от друга. Поэтому может показаться, что искомая работа будет такой же, как и при раздвижении этих зарядов на бесконечность:

$$A' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2l}. \quad (1)$$

Однако это неверно. В исходной задаче экран неподвижен, поэтому нам нужно раздвигать заряды таким образом, чтобы плоскость нулевого потенциала оставалась неподвижной, т. е. перемещать одновременно заряды q и $-q$ в противоположные стороны. Поэтому по формуле (1) определяется работа, которая совершается внешними силами, действующими на *оба* заряда. Нам же необходимо найти работу только одной из этих сил — действующей на заряд q . Очевидно, что эта работа будет в два раза меньше:

$$A = \frac{1}{2} A' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4l}. \quad (2)$$

Отметим, что при перемещении зарядов по экрану работа не совершается, так как эти заряды перемещаются по эквипотенциальной поверхности.

Результат (2) становится особенно наглядным, если вспомнить, что электростатическую энергию взаимодействия зарядов можно рассматривать как энергию создаваемого ими поля. В системе двух точечных зарядов q и $-q$ поле существует во всем пространстве, в то время, как в нашей задаче поле существует только в той половине пространства, где находится заряд q . (Сравните рис. 1, а и б в задаче 5.)

ЗАДАЧА 7

Доказать, что энергия взаимодействия системы N неподвижных точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_N$ выражается формулой

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i, \quad (1)$$

где Φ_i — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме i -го, в той точке, где находится i -й заряд:

$$\Phi_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \frac{q_k}{r_{ki}}. \quad (2)$$

Здесь r_{ki} — расстояние между i -м и k -м зарядами.

При решении большинства задач мы старались избегать громоздких математических вычислений, отказываясь часто от «прямого» пути, сопряженного с длинными расчетами; изыскивали «обходные» пути, привлекая другие физические законы, и стремились увидеть физический смысл каждого математического преобразования. При этом оттенялись другие стороны рассматриваемых явлений, что способствовало более глубокому пониманию их физической сущности. Но в этом деле, как и во всяком другом, полезно знать меру и не переусердствовать, ибо математика — рабочий инструмент в физике, позволяющий установить между различными физическими величинами не только качественные, но и количественные связи. Иногда удачно применяемый стандартный математический прием гораздо быстрее приводит к цели, чем поиски «окольных» путей.

Так, в рассматриваемой задаче удобно использовать метод математической индукции. Прежде всего убедимся, что формула (1) справедлива для системы двух точечных зарядов: $N = 2$. Энергия этой системы определяется работой, которая совершается внешними силами при внесении точечного заряда q_2 из бесконечности в поле, создаваемое зарядом q_1 . Эта работа равна произведению заряда q_2 на потенциал φ_2 той точки поля, в которую он внесен: $W_2 = q_2\varphi_2$, где $\varphi_2 = q_1/r_{12}$. Аналогично, считая, что заряд q_1 вносится в поле, создаваемое зарядом q_2 , для энергии системы получим $W_2 = q_1\varphi_1$, где $\varphi_1 = q_2/r_{12}$. Поэтому энергию системы можно записать в симметричном виде

$$W_2 = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i\varphi_i.$$

Теперь предположим, что формула (1) справедлива для N точечных зарядов, и докажем ее справедливость для системы из $N + 1$ зарядов. При внесении $(N + 1)$ -го заряда энергия системы изменится на величину, равную работе, совершаемой внешними силами:

$$W_N = W_{N+1} + A. \quad (3)$$

Здесь W_N согласно предположению определяется формулой (1), а работа $A = q_{N+1} \varphi_{N+1}$, где $\varphi_{N+1} = \sum_{k=1}^N q_k/r_{k,N+1}$. После внесения $(N + 1)$ -го заряда изменяются потенциалы всех точек, кроме той, где находится $(N + 1)$ -й заряд. (Считается, что точечный заряд не действует сам на себя.) Потенциал точки, в которой находится i -й заряд, теперь будет

$$\varphi'_i = \varphi_i + \frac{q_{N+1}}{r_{i,N+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \varphi'_{N+1} = \varphi_{N+1}. \quad (4)$$

Теперь выразим энергию системы $(N + 1)$ зарядов (3) через новые потенциалы φ'_i с помощью соотношений (4):

$$\begin{aligned} W_{N+1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\varphi'_i - \frac{q_{N+1}}{r_{i, N+1}} \right) + q_{N+1} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i, N+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi'_i + \frac{1}{2} q_{N+1} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_{i, N+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi'_i + \frac{1}{2} q_{N+1} \varphi'_{N+1}, \\ \text{т. е. } W_{N+1} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} q_i \varphi'_i, \quad \varphi'_i = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{q_k}{r_{ik}}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (1) доказана.

ЗАДАЧА 8

Показать, что формула для энергии системы зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (1)$$

справедлива и в том случае, когда наряду с точечными зарядами в систему входят заряженные проводники, причем в слагаемых, соответствующих проводникам, q_i есть полный заряд проводника, а φ_i — его потенциал, создаваемый как другими зарядами, так и его собственным.

РЕШЕНИЕ

Пусть в системе из N зарядов есть один заряженный проводник с зарядом q_n и потенциалом φ_n , а все остальные заряды — точечные. Тогда формула (1) должна иметь вид

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} q_i \varphi_i + \frac{1}{2} q_n \varphi_n. \quad (2)$$

Разобьем мысленно заряд проводника q_n на большое число M малых частей так, чтобы каждую часть Δq_k можно было считать точечным зарядом. Тогда энергию всей системы можно представить как энергию $(N - 1) + M$ точечных зарядов

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \Delta q_k \varphi_k. \quad (3)$$

Поскольку все точки проводника имеют одинаковый потенциал $\varphi_k = \varphi_n$ ($k = 1, 2, \dots, M$), во второй сумме в формуле (3) φ_k можно вынести за знак суммы

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \Delta q_k \varphi_k = \frac{1}{2} \varphi_n \sum_{k=1}^M \Delta q_k = \frac{1}{2} \varphi_n q_n \quad (4)$$

(сумма $\sum_{k=1}^M \Delta q_k$ представляет собой полный заряд проводника q_n).

Таким образом, формула (2) доказана. Из приведенного вывода ясно, что потенциал проводника φ_n создается как точечными зарядами q_i , так и зарядом самого проводника. Действительно, в формуле (3) φ_k есть потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме Δq_k , т. е. всеми точечными зарядами q_i и зарядом проводника q_n , за исключением малой его части Δq_k , которая может быть выбрана сколь угодно малой по сравнению с q_n .

ЗАДАЧА 9

Плоский конденсатор с пластинами площадью S с воздушным зазором подсоединен к источнику с постоянным напряжением U_0 . Какую работу нужно совершить, чтобы раздвинуть пластины конденсатора от расстояния d_1 до расстояния d_2 в двух случаях: предварительно отсоединив конденсатор от источника питания; не отсоединяя конденсатора от источника?

РЕШЕНИЕ

В первом случае заряды на обкладках конденсатора все время остаются неизменными: $q = CU = \text{const}$, хотя емкость C и напряжение U изменяются при движении пластин. Зная напряжение на конденсаторе в начальный момент, находим величину этого заряда

$$q = C_1 U_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} U_0. \quad (1)$$

Так как разноименно заряженные пластины конденсатора притягиваются, для их раздвижения необходимо совершить положительную механическую работу. Если при раздвижении расстояние между пластинами все время остается много меньше их линейных размеров, то, как нетрудно убедиться, сила притяжения пластин не зависит от расстояния между ними. Действительно, поле, создаваемое одной из пластин, однородно, и его напряженность $E = \sigma / (2\epsilon_0)$, где $\sigma = q/S$ — поверхностная плотность заряда. Умножив эту напряженность на величину заряда другой пластины, находим величину действующей на нее силы $F = q^2 / (2\epsilon_0 S)$.

Для равномерного перемещения пластины внешняя сила должна уравновесить силу притяжения, и поэтому совершаемая при перемещении пластины на расстояние $d_2 - d_1$ механическая работа равна

$$A = F (d_2 - d_1) = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S} (d_2 - d_1).$$

Подставив в эту формулу величину заряда из (1), найдем

$$A = \frac{\epsilon_0 S U_0^2}{2d_1^2} (d_2 - d_1). \quad (2)$$

Второй случай отличается от рассмотренного тем, что при движении пластин остается неизменным не заряд конденсатора, а напряжение на нем: $U = U_0$. Поскольку расстояние между обклад-

ками увеличивается, то напряженность поля убывает, а следовательно, убывает и заряд на пластинах. Поэтому сила притяжения пластин не остается постоянной, как в первом случае, а убывает, причем, как нетрудно убедиться, обратно пропорционально квадрату расстояния (докажите это сами). Вычислить работу этой переменной силы методами элементарной математики затруднительно — необходимо умение интегрировать. Но все-таки мы можем найти эту работу, ибо математические трудности в физике нередко удается обойти, подходя к задаче с другой стороны, т. е. используя другие физические законы. Как и во многих случаях раньше, на помощь нам придет один из самых фундаментальных законов природы — закон сохранения и превращения энергии.

Применим его сначала к более простому первому случаю. Изменение энергии W конденсатора происходит только за счет механической работы, совершаемой внешними силами: $W_2 - W_1 = A$. Поскольку заряд конденсатора остается неизменным, для энергии конденсатора удобно воспользоваться формулой $W = q^2/(2C)$.

Таким образом,

$$A = \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right),$$

что при подстановке выражения для емкости и для заряда (1) приводит к окончательной формуле (2).

Во втором случае энергия конденсатора изменяется как за счет механической работы, так и за счет работы, совершаемой источником питания:

$$W_2 - W_1 = A + A_{\text{ист}}. \quad (3)$$

Определив независимо изменение энергии конденсатора и работу источника, можно с помощью закона сохранения энергии (3) найти механическую работу.

Поскольку в этом случае остается неизменным напряжение, для расчета энергии конденсатора удобно использовать формулу $W = CU^2/2$. Для изменения энергии получаем

$$W_2 - W_1 = \frac{U_0^2}{2} (C_2 - C_1) = \frac{U_0^2}{2} \epsilon_0 S \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right). \quad (4)$$

При изменении заряда на обкладках конденсатора на величину $\Delta q = q_2 - q_1$ источник питания совершает работу $A_{\text{ист}} = U_0 (q_2 - q_1)$. Заряд конденсатора определяется соотношением $q = CU_0$. Тогда

$$A_{\text{ист}} = U_0^2 \epsilon_0 S \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right), \quad (5)$$

и с помощью выражения (3) получаем

$$A = \frac{1}{2} U_0^2 \epsilon_0 S \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right).$$

Отметим, что из (5) и (4) видно, что

$$A_{\text{ист}} = 2 (W_2 - W_1),$$

т. е. работа источника равна удвоенному изменению энергии конденсатора. К обсуждению этого факта мы еще вернемся и покажем, что он носит универсальный характер.

Интересно отметить, что как работа источника, так и изменение энергии конденсатора получились отрицательными. Это вполне понятно: совершаемая над конденсатором механическая работа положительна и должна была бы привести к увеличению энергии конденсатора (как и происходит в первом случае). Но энергия конденсатора убывает, и, следовательно, источник должен «принять на себя» энергию, равную убыли энергии конденсатора и механической работе внешних сил. Если процессы в источнике обратимы (аккумулятор), то он будет заряжаться, в противном случае источник просто нагревается.

Чтобы лучше разобраться в сути явлений, рассмотрим противоположный случай: присоединенные к источнику пластины конденсатора сближают от расстояния d_1 до расстояния d_2 ($d_2 < d_1$). Поскольку пластины притягиваются, работа внешних сил отрицательна, ибо для равномерного перемещения пластин внешняя сила должна быть направлена в сторону, противоположную перемещению. Энергия конденсатора при сближении пластин возрастает. Итак, механическая работа внешних сил отрицательна, а энергия конденсатора возросла, следовательно, источник совершил положительную работу. Половина этой работы равна увеличению энергии конденсатора, вторая половина передана внешним телам в виде механической работы при сближении пластин. Все приведенные выше формулы применимы, разумеется, при любом направлении перемещения пластин.

Решая эту задачу, мы пренебрегали сопротивлением проводов, соединяющих конденсатор с источником. Если учитывать выделяющееся в проводах при движении зарядов тепло Q , уравнение баланса энергии принимает вид

$$W_2 - W_1 + Q = A + A_{\text{ист.}}$$

Изменение энергии конденсатора и работа источника выражаются, конечно, прежними формулами (4) и (5). Тепло всегда выделяется независимо от того, сближаются или раздвигаются пластины, поэтому $Q > 0$. Величину Q можно вычислить, если известна скорость движения пластин. Чем больше скорость движения, тем больше выделяющееся тепло. При бесконечно медленном движении пластин $Q \rightarrow 0$. Попытайтесь это доказать.

ЗАДАЧА 10

Конденсатор присоединен к источнику питания с постоянной э. д. с. E . Показать, что если любым способом изменить энергию конденсатора на величину ΔW , то работа, совершаемая при этом источником питания, равна удвоенному значению ΔW :

$$A_{\text{ист}} = 2\Delta W.$$

Поскольку конденсатор все время остается присоединенным к источнику питания, напряжение на конденсаторе равно э. д. с. источника E как в начале, так и в конце процесса (хотя во время процесса напряжение на конденсаторе может быть и меньше). Если заряд конденсатора во время процесса изменился на величину Δq , то его энергия изменилась на величину

$$\Delta W = \frac{1}{2} E q_2 - \frac{1}{2} E q_1 = \frac{1}{2} E \Delta q.$$

При этом источник питания совершил работу

$$A_{\text{ист}} = E \Delta q = 2\Delta W. \quad (1)$$

Чтобы у читателя не возникло подозрений в том, что половина энергии «бесследно исчезла», полезно написать уравнение баланса энергии

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + A + Q, \quad (2)$$

где A — механическая работа, совершенная при этом процессе над внешними телами; Q — выделившееся тепло. Очевидно, что $A + Q$ и равно оставшейся половине работы источника. Существуют такие процессы, в которых либо $A = 0$, либо $Q = 0$ (приведите примеры таких процессов). Но, как видно из (1) и (2), изменение энергии конденсатора, соединенного с источником, обязательно сопровождается либо совершением механической работы, либо выделением тепла.

ЗАДАЧА 11

Вертикальные пластины плоского конденсатора, соединенного с источником постоянного напряжения U , погружают концами в жидкий диэлектрик с проницаемостью ε и плотностью ρ (рис. 1). На какой высоте h установится уровень жидкости в пространстве между пластинами? Сколько при этом выделится тепла?

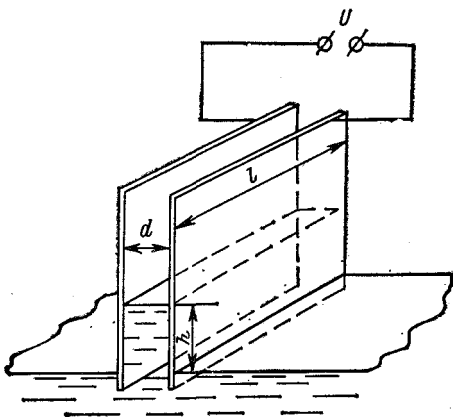


Рис. 1 к задаче 11.

РЕШЕНИЕ

В состоянии равновесия сила, вытягивающая диэлектрик в пространство между пластинами, уравнивается весом P поднятой жидкости: $P = \rho V g = \rho d l h g$.

Для нахождения силы, действующей на диэлектрик со стороны электрического поля, рассмотрим вытягивание твердого диэлектрика в горизонтально расположенный плоский конден-

сатор (рис. 2). Пусть под действием интересующей нас вытягивающей силы $F_{эл}$ и какой-то внешней силы F кусок диэлектрика находится в равновесии, и длина втянутой части при этом равна x . Допустим, что диэлектрик вдвинулся на величину Δx . Из закона сохранения энергии следует, что совершенная источником работа $\Delta A_{ист}$ равна сумме изменения энергии конденсатора ΔW_k и механической работы, совершаемой силой $F_{эл}$ над внешними телами:

$$\Delta A_{ист} = \Delta W_k + F_{эл} \Delta x. \quad (1)$$

Как мы уже знаем, $\Delta A_{ист} = 2\Delta W_k$, поэтому уравнение (1) можно переписать в виде

$$\Delta W_k = F_{эл} \Delta x. \quad (2)$$

Изменение энергии конденсатора при вдвигании диэлектрика на величину Δx равно

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} U^2 \Delta C = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) l \Delta x}{d} \cdot \frac{U^2}{2}. \quad (3)$$

С помощью формул (2) и (3) находим

$$F_{эл} = \frac{\Delta W_k}{\Delta x} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) l}{d} \cdot \frac{U^2}{2}.$$

Таким образом, если на пластинах конденсатора поддержи-

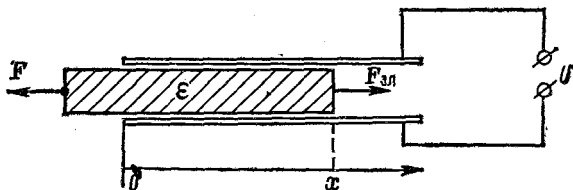


Рис. 2 к задаче 11.

вается постоянное напряжение, то сила, вытягивающая диэлектрик, не зависит от длины втянутой части.

Для нахождения высоты подъема жидкого диэлектрика приравняем вычисленную вытягивающую силу весу столба поднявшейся жидкости и получим

$$h = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) U^2}{2 \rho g d^2}. \quad (4)$$

Для нахождения выделившегося при подъеме жидкости тепла проще всего исходить из закона сохранения энергии. Совершенная источником питания работа равна сумме изменения энергии конденсатора и механической работы, совершенной электрическими силами:

$$A_{ист} = \Delta W_k + A.$$

Поскольку поднятый столб жидкости постоит, совершенная механическая работа равна сумме изменения потенциальной энергии

диэлектрика в поле тяжести и выделившегося тепла Q :

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_{\text{к}} + \frac{1}{2} mgh + Q.$$

Учитывая, что $A_{\text{ист}} = 2\Delta W_{\text{к}}$ и пользуясь соотношением (4), находим

$$Q = \frac{\epsilon_0^2 (\epsilon - 1)^2 l U^4}{8 \rho g d^3} = \frac{1}{2} mgh.$$

Таким образом, половина механической работы, совершенной силами электрического поля, пошла на увеличение потенциальной энергии жидкого диэлектрика, а вторая половина «превратилась» в тепло. Как это тепло выделилось? При погружении пластин конденсатора в диэлектрик жидкость начинает подниматься, приобретая кинетическую энергию, и по инерции проскакивает положение равновесия. Возникают колебания, которые постепенно затухают из-за вязкости жидкости, и кинетическая энергия превращается в тепло. Если вязкость достаточно велика, то колебаний может и не быть — все тепло выделяется при подъеме жидкости до положения равновесия.

Заканчивая раздел электростатики, вернемся еще раз к задаче 3, где мы предложили Вам подумать самостоятельно над такой задачей.

ЗАДАЧА 12

Точечный заряд q находится между двумя бесконечными параллельными проводящими плоскостями на расстоянии d_1 от одной из них и d_2 от другой. Плоскости заземлены. Найти индуцированные на плоскостях заряды q_1 и q_2 .

РЕШЕНИЕ

Вы, конечно, сообразили, что решение этой задачи можно получить путем предельного перехода, используя решение задачи 3 о точечном заряде между двумя заземленными сферами. Для этого нужно устремить к бесконечности радиусы обеих сфер, сохраняя неизменным расстояние между ними и положение заряда q относительно поверхностей сфер: $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $b - a = \text{const} = d_1 + d_2$. Выполняя аккуратно предельный переход, находим

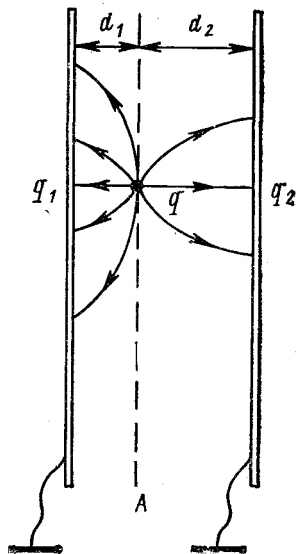
$$q_1 = -q \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \quad q_2 = -q \frac{d_1}{d_1 + d_2}. \quad (1)$$

В задаче 3 предлагалось также поискать другой, независимый путь решения. В самом деле, плоскость «проще», чем сфера. Задача с плоскостями является предельным, более простым случаем задачи со сферами. Поэтому естественно придумать для нее более простое независимое решение, которое можно было бы использовать для проверки решения задачи со сферами.

Будем рассуждать следующим образом. Что произойдет, если заряд q переместить в другую точку плоскости A (рисунок)? Очевидно,

что изменится только распределение индуцированных на плоскостях зарядов, величина же их q_1 и q_2 останется прежней: индуцированные заряды просто перемещаются вместе с зарядом q . Если поместить на этой плоскости несколько точечных зарядов, то вследствие принципа суперпозиции каждый заряд индуцирует на плоскостях такие заряды, как если бы он был один. Поэтому, если нас интересует не распределение индуцированных зарядов, а только их величина, то заряд q можно равномерно «размазать» по всей плоскости A . От этого величина индуцированных зарядов не изменяется, а задача становится совсем простой, ибо поле теперь однородно. Напряженность поля E_1 слева от этой плоскости равна $q_1/(\epsilon_0 S)$ (S — площадь пластин), справа от нее $E_2 = q_2/(\epsilon_0 S)$, так как индуцированные на внутренних поверхностях пластин заряды q_1 и q_2 в этом случае распределены равномерно. Поскольку разность потенциалов между плоскостью A и каждой из пластин одна и та же, то $E_1 d_1 = E_2 d_2$, откуда немедленно следует, что

$$q_1 d_1 = q_2 d_2. \quad (2)$$



К задаче 12.

Снаружи пластин поля нет, индуцированные заряды находятся только на внутренних поверхностях пластин, и на основании теоремы Гаусса можно утверждать, что

$$q_1 + q_2 + q = 0. \quad (3)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), получаем ответ — формулы (1).

Не всегда разумно сводить задачу к предыдущей!

Электрический ток

Расчет электрических цепей постоянного тока основан на использовании закона Ома. Для однородного участка цепи закон Ома выражает связь между током I , напряжением U и сопротивлением R : $I = U/R$.

Часть задач этого раздела посвящена расчету электрических цепей, не сводящихся к совокупности последовательно и параллельно соединенных сопротивлений. В таких задачах очень часто учет симметрии рассматриваемой схемы значительно облегчает ее расчет.

Для замкнутой цепи, содержащей источник тока с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r , закон Ома имеет вид

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Если участок цепи, к концам которого приложено напряжение U , содержит источник тока, то ток находится с помощью закона Ома для неоднородного участка цепи: $I = (U + E)/(R + r)$, где э. д. с. E берется со знаком плюс, если ток внутри источника направлен от отрицательного полюса к положительному, и со знаком минус в противоположном случае. В решении одной из задач показывается, как этот закон может быть получен с помощью закона сохранения энергии. При протекании тока I по участку, к концам которого приложено напряжение U , за время Δt на этом участке электрическим полем совершается работа $\Delta A = IU \Delta t$. В результате совершения этой работы в рассматриваемом участке цепи выделяется тепло, определяемое законом Джоуля — Ленца: $\Delta Q = I^2 R \Delta t$, где R — полное сопротивление участка.

При изменении потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром, в этом контуре возникает электродвижущая индукция, величина которой, согласно закону Фарадея, пропорциональна скорости изменения потока магнитной индукции:

$$E = - \Delta \Phi / \Delta t.$$

Знак минус в этой формуле связан с правилом Ленца о направлении индукционного тока.

Расчет электрических цепей переменного тока основан на том, что при включении в сеть с синусоидальным напряжением сопротивления R , индуктивности L и емкости C ток в цепи также является синусоидальным. Амплитудные значения тока I_0 связаны с амплитудными значениями подаваемого на эти элементы напряжения U_0 следующими соотношениями:

$$I_0 = \frac{U_0}{R}, \quad I_0 = \frac{U_0}{\omega L}, \quad I_0 = U_0 \omega C.$$

На омическом сопротивлении напряжение совпадает по фазе с током, на индуктивности напряжение опережает ток по фазе на $\pi/2$, на емкости — отстает от тока на $\pi/2$.

ЗАДАЧА 1

Имеется n клемм, каждая из которых соединена со всеми остальными клеммами одинаковыми проводниками сопротивлением R . Найти сопротивление между любыми двумя клеммами.

РЕШЕНИЕ

Прежде всего из симметрии схемы ясно, что сопротивление одинаково между любой парой клемм.

Рассмотрим вспомогательную схему (рисунок). Две клеммы A и B соединены друг с другом проводником сопротивлением R , а остальные $(n - 2)$ клеммы соединены с клеммами A и B такими же проводниками сопротивлением R , но не соединены друг с другом.

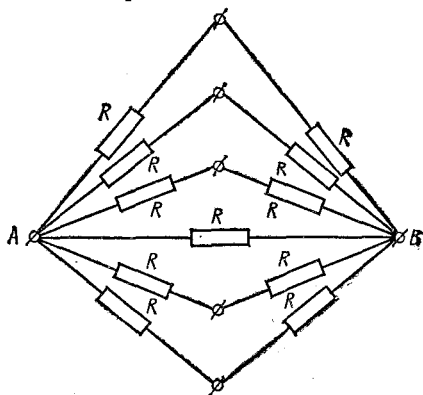
В этой схеме между клеммами A и B параллельно включены сопротивления R и $(n - 2)$ сопротивлений по $2R$. Поэтому полное сопротивление R_{AB} между клеммами A и B вычисляется по формуле

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{n-2}{2R},$$

откуда $R_{AB} = 2R/n$.

Из симметрии схемы, изображенной на рисунке, видно, что если между клеммами A и B создать некоторую разность потенциалов, то потенциалы остальных $(n - 2)$ клемм будут равны между собой.

Соединим теперь проводниками сопротивлением R каждую из $(n - 2)$ клемм со всеми остальными. В этих проводниках тока не будет, и, следовательно, сопротивление R_{AB} между клеммами A и B



К задаче 1.

при этом не изменится. Но получившаяся в результате такого соединения схема совпадает с той, о которой говорится в условии задачи, так как в этой схеме каждая клемма соединена со всеми остальными проводниками сопротивлением R .

Итак, искомое сопротивление между любыми двумя клеммами равно $2R/n$.

ЗАДАЧА 2

Определить сопротивление между двумя соседними узлами бесконечной квадратной проволочной решетки. Сопротивление каждого ребра равно R .

РЕШЕНИЕ

Эту задачу легко решить, используя симметрию разветвленной цепи, образуемой решеткой: все узлы бесконечной решетки эквивалентны, в том числе и выделенные узлы A и B , сопротивление между которыми нас интересует (рисунок a). Подключим положительный полюс источника питания с э. д. с. E и нулевым внутренним сопротивлением к узлу A , а отрицательный полюс заземлим. Будем считать, что решетка заземлена на бесконечности. Так считать действительно можно, поскольку сопротивление между точками A и B не зависит от условий на бесконечности. В этом случае цепь, изображенная на рисунке a , оказывается замкнутой, через источник питания течет некий ток I , который в узле A в силу симметрии решетки разветвляется на четыре одинаковых тока $I/4$.

Отсоединим источник питания от узла A . К узлу B подсоединим отрицательным полюсом такой же источник питания, заземлив его положительный полюс (рисунок b). Поскольку узлы A и B эквивалентны, через источник питания пойдет такой же по величине ток I , как и в первом случае, в направлении, указанном на рисунке b . При этом в узле B сходятся четыре одинаковых тока $I/4$.

Пусть теперь оба источника подсоединены к узлам A и B одновременно (рисунок b). Вследствие принципа суперпозиции для электрических цепей можно утверждать, что ток в каждом участке цепи равен алгебраической сумме токов в том же участке в схемах, изображенных на рисунках a и b . Прежде всего заметим, что равен нулю ток в проводе, соединяющем с «землей» отрицательный полюс первого источника и положительный полюс второго, поэтому этот провод можно убрать (рисунок $г$). Ток в ребре, соединяющем узлы A и B , равен алгебраической сумме токов, текущих по этому ребру в схемах на рисунках a и b , т. е. $I/2$. Разность потенциалов между точками A и B равна $2E$, а сопротивление ребра, соединяющего эти точки, равно R . Поэтому, с одной стороны,

$$2E = RI/2, \quad (1)$$

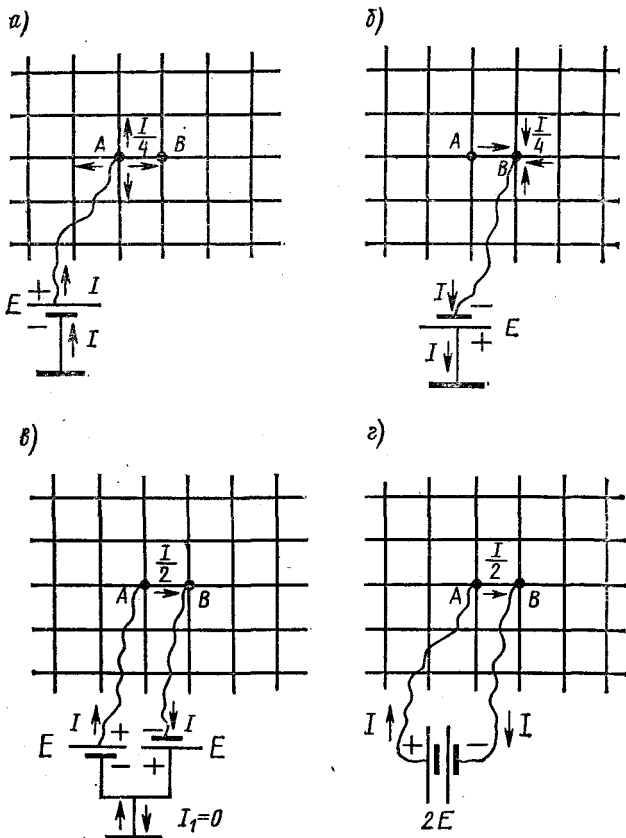
с другой стороны, для всей образованной решеткой разветвленной цепи с сопротивлением R_{AB} (рисунок $г$) можно написать

$$2E = R_{AB}I. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), находим

$$R_{AB} = R/2. \quad (3)$$

Отметим, что все построения, использованные при решении этой задачи, носят чисто умозрительный характер: на самом деле нет никакой необходимости собирать эти схемы. Мы мысленно под-



К задаче 2.

соединяем, что нам нравится и как нам нравится. Например, мы для удобства считали внутреннее сопротивление источников равным нулю, ибо совершенно очевидно, что искомое сопротивление не зависит от внутреннего сопротивления источников. Поэтому нас совершенно не должно беспокоить, что таких источников в действительности не существует.

Предлагаем читателю подумать самостоятельно над следующей аналогичной задачей.

Определить сопротивление между двумя соседними узлами бесконечной кубической трехмерной проволоочной решетки. Сопротивление каждого ребра равно R .

Эту задачу можно решить, буквально повторяя все рассуждения предыдущей. В результате получится

$$R_{AB} = R/3.$$

Может быть Вам удастся придумать какой-нибудь другой способ решения?

ЗАДАЧА 3

На рис. 1 показана часть схемы, состоящей из неизвестных сопротивлений. Как, имея омметр и соединительные провода, можно измерить величину сопротивления R_x , не разрывая ни одного контакта схемы?

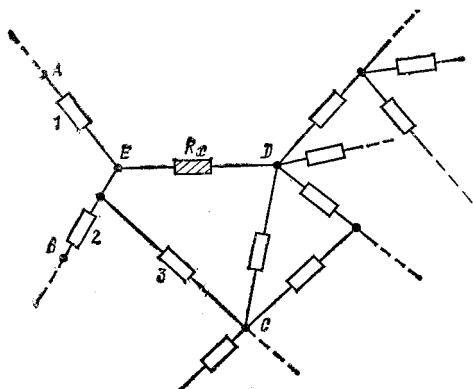


Рис. 1 к задаче 3.

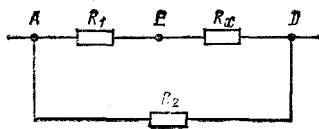


Рис. 2 к задаче 3.

РЕШЕНИЕ

По условию задачи нельзя разрывать никаких соединений в этой цепи, но можно соединять проводами любые точки, т. е. закорачивать некоторые участки. Используя провода, исходную схему всегда можно привести к виду, указанному на рис. 2.

Схема, изображенная на рис. 1, приводится к такому виду, если соединить накоротко точки A , B и C . Тогда роль R_1 на рис. 2 будут играть параллельно соединенные сопротивления 1 , 2 и 3 (рис. 1), а роль R_2 играет вся остальная разветвленная цепь между точками C и D . Нетрудно сообразить, что в общем случае схему, изображенную на рис. 2, из произвольной, содержащей R_x , можно получить, соединяя накоротко между собой концы всех сопротивлений, подключенных к искомому с одной стороны. (Если в схеме есть сопротивления, параллельные R_x , то определить R_x , не производя разрывов, невозможно: можно лишь определить общее сопротивление всех сопротивлений, включенных параллельно R_x .)

Теперь нахождение R_x не представляет никакого труда. Произведем следующие три измерения.

1. Закорачиваем точки E и D и включаем омметр между точками

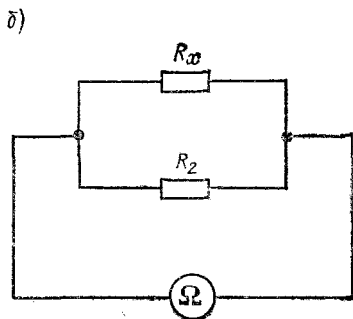
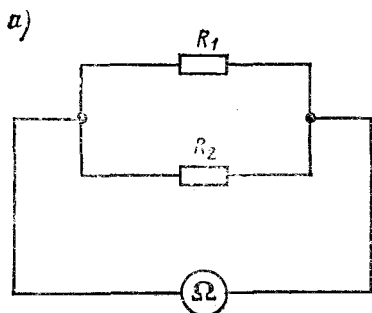


Рис. 3 к задаче 3.

A и D . Эквивалентная схема приведена на рис. 3, *a*. Показание омметра r_1 связано с R_1 и R_2 соотношением

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_1}. \quad (1)$$

2. Закорачиваем точки A и E на рис. 2. Омметр, как и раньше, включен между точками A и D . Эквивалентная схема изображена на рис. 3, *б*. Показание омметра r_2 связано с R_x и R_2 соотношением

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r_2}. \quad (2)$$

3. Закорачиваем точки A и D . Омметр включаем между точками E и D (рис. 3, *в*). Показание омметра r_3 в этом случае подчиняется соотношению

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_3}. \quad (3)$$

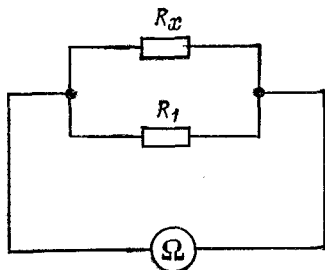


Рис. 3 к задаче 3.

Складывая почленно уравнения (2) и (3) и вычитая уравнение (1), получаем

$$\frac{2}{R_x} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}.$$

ЗАДАЧА 4

Найти сопротивление цепочки, состоящей из N звеньев (рисунок *a*). Сопротивление каждого резистора равно R .

РЕШЕНИЕ

Используемые в решении обозначения показаны на рисунке *б*. Применяя несколько раз закон Ома для участка цепи, нетрудно

получить следующие соотношения:

$$U_n = 2I_n R + U_{n-1}, \quad (1)$$

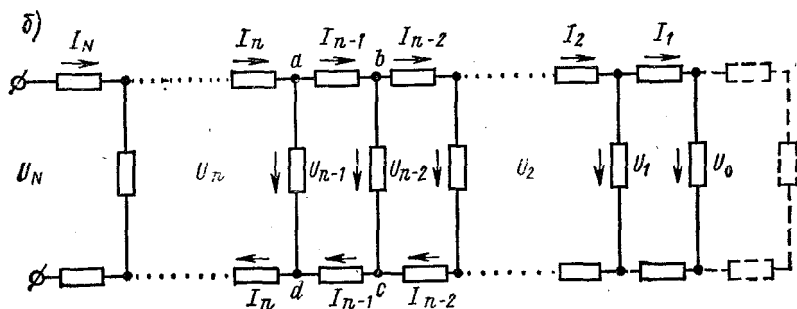
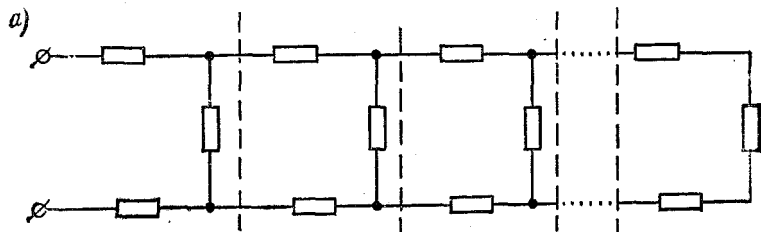
$$U_{n-1} = 2I_{n-1} R + U_{n-2}, \quad (2)$$

$$U_{n-1} = (I_n - I_{n-1}) R. \quad (3)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2) и используя соотношение (3), получаем

$$U_n - 4U_{n-1} + U_{n-2} = 0. \quad (4)$$

Далее, приравняв напряжение U_{n-1} на участке ad сумме



К задаче 4.

напряжений на участках ab , bc и cd , получаем

$$(I_n - I_{n-1}) R = I_{n-1} R + (I_{n-1} - I_{n-2}) R + I_{n-1} R,$$

откуда

$$I_n - 4I_{n-1} + I_{n-2} = 0. \quad (5)$$

Искомое сопротивление R_N определяется отношением U_N/I_N .

Полученные формулы (4) и (5) носят название рекуррентных соотношений, ибо они дают возможность найти ток и напряжение для n -го звена цепочки, если известны эти величины для двух предшествующих звеньев. Примем ток I_1 в первом звене цепочки за единицу: $I_1 = 1$. Тогда $U_1 = 3R$. Теперь для второго звена с помощью схемы на рисунке б нетрудно найти $I_2 = 4$, $U_2 = 11R$. Далее токи и напряжения во всех последующих звеньях можно находить, последовательно применяя рекуррентные соотношения (4) и (5).

Нельзя ли найти общую формулу, которая дала бы возможность сразу написать выражение для напряжения U_n и тока I_n в n -м звене? Для этого нужно найти функцию целого аргумента n , которая удовлетворяла бы уравнению (4) или (5).

Попробуем искать решение уравнения (4) в виде $U_n = x^n$. Подставляя эту функцию в (4), получаем квадратное уравнение для x : $x^2 - 4x + 1 = 0$. Корни его $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Так как уравнение (4) линейное, ему удовлетворяет любая функция вида

$$U_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n = A_1 (2 + \sqrt{3})^n + A_2 (2 - \sqrt{3})^n, \quad (6)$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные. Решение (6) уравнения (4) содержит две постоянные, ибо это уравнение как рекуррентное соотношение определяет значение U_n по двум предшествующим значениям U_{n-1} и U_{n-2} .

Поскольку уравнение (5) имеет точно такой же вид, как и (4), его решение совершенно аналогично (6):

$$I_n = B_1 (2 + \sqrt{3})^n + B_2 (2 - \sqrt{3})^n. \quad (7)$$

Каким образом найти значения постоянных A и B в выражениях (6), (7)? Очевидно, что выражения (6) и (7) должны давать правильные значения для уже известных напряжений и токов в первом и втором звеньях.

Для первого звена ($n = 1$) $U_1 = 3R$, $I_1 = 1$, поэтому

$$\begin{aligned} A_1 (2 + \sqrt{3}) + A_2 (2 - \sqrt{3}) &= 3R, \\ B_1 (2 + \sqrt{3}) + B_2 (2 - \sqrt{3}) &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Совершенно аналогично для второго звена ($n = 2$), где $U_2 = 11R$, $I_2 = 4$:

$$\begin{aligned} A_1 (2 + \sqrt{3})^2 + A_2 (2 - \sqrt{3})^2 &= 11R, \\ B_1 (2 + \sqrt{3})^2 + B_2 (2 - \sqrt{3})^2 &= 4. \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражений (8) и (9) определяются значения постоянных A_1 , A_2 , B_1 , B_2 :

$$\begin{aligned} A_1 &= R \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}, & A_2 &= R \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}; \\ B_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, & B_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вместо того, чтобы использовать уравнения (9), можно ввести формально «нулевое» звено, и с помощью рекуррентных соотношений (4) и (5) найти $U_0 = R$, $I_0 = 0$.

Если взглянуть на схему рисунка б, можно убедиться, что эти величины имеют физический смысл: U_0 и I_0 есть напряжение и ток для несуществующего «нулевого» звена. Тогда для упрощения алгебры при нахождении постоянных A и B вместо (9) можно исполь-

зовать соответствующие соотношения для нулевого звена

$$\begin{aligned}A_1 + A_2 &= R, \\ B_1 + B_2 &= 0.\end{aligned}$$

Итак, для сопротивления цепочки из N звеньев, учитывая формулы (10), получим

$$R_N = \frac{U_N}{I_N} = R \frac{(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})^N + (\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^N}{(2+\sqrt{3})^N - (2-\sqrt{3})^N}. \quad (11)$$

Предоставляем вам возможность самостоятельно убедиться, что при $N \rightarrow \infty$ формула (11) дает известное выражение для сопротивления цепочки с бесконечным числом звеньев

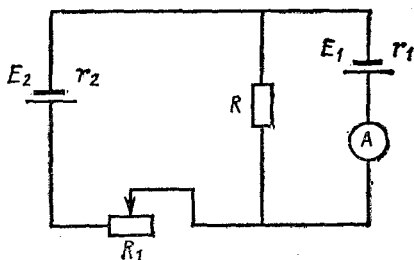
$$R_N \rightarrow R(\sqrt{3}+1) \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

ЗАДАЧА 5

Все хорошо знают, что если изменять сопротивление, включенное в цепь (например, перемещать движок реостата), то ток в цепи меняется. Однако при изменении R_1 на схеме, приведенной на рисунке, показание амперметра не меняется. В чем тут дело? При каком условии это возможно?

РЕШЕНИЕ

Не будем пока выписывать никаких формул. На поставленный вопрос можно ответить, если просто внимательно посмотреть на схему. Если через батарею E_2 ток не идет, то величина сопротивления R_1 ни на что повлиять не может, в том числе и на показания амперметра. При отсутствии тока через R_1 и E_2 батарея E_1 , амперметр и сопротивление R фактически образуют неразветвленную последовательную цепь. Итак, остается выяснить, при каком условии отсутствует ток в ответвлении, содержащем



К задаче 5.

E_2 и R_1 . Применяя к этому участку сформулированный ранее закон Ома для неоднородного участка цепи, легко убедиться, что ток равен нулю, когда напряжение на R равно э. д. с. батареи E_2 ($U = E_2$). Так как при этом

$$U = IR = \frac{E_1}{R+r_1} R,$$

искомое условие есть

$$E_2 = E_1 \frac{R}{R+r_1}. \quad (1)$$

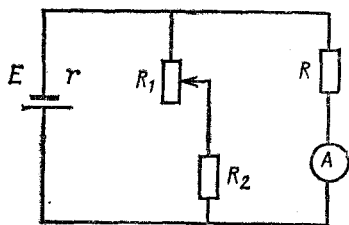
Этому условию можно удовлетворить при $E_2 < E_1$. Отметим, что при этом R_1 может меняться в пределах от нуля до бесконечности. Однако (1) не есть единственно возможное условие. Например, если $r_2 \gg R$ и $r_2 \gg r_1$, то ток в ответвлении, содержащем E_2 и R_1 , мал по сравнению с током через амперметр при любом значении R_1 и поэтому практически не влияет на показания амперметра. Возможны и другие условия. Попробуйте найти их!

ЗАДАЧА 6

Собрана цепь, показанная на рисунке. При каком условии изменение сопротивления R_1 не влияет на показание амперметра? (R_1 меняется в любых пределах).

РЕШЕНИЕ

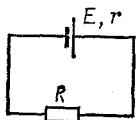
На первый взгляд может показаться, что этого вообще не может быть, так как $R_1 + R_2$ и R соединены параллельно, и изменение R_1 обязательно приводит к изменению тока через амперметр. Однако это лишь на первый взгляд. Возможны несколько случаев, когда это не так. Во-первых, если $R_2 \gg R$, то при любом R_1 ответвлением тока в участок, содержащий R_1 и R_2 , можно пренебречь по сравнению с током через амперметр. Во-вторых, если сопротивление R и внутреннее сопротивление амперметра равны нулю, весь ток, не разветвляясь, идет через амперметр и величина его не зависит от R_1 . И, наконец, наиболее интересный случай: если внутреннее сопротивление батареи $r = 0$, то участки, содержащие реостат R и амперметр, вообще никак не влияют друг на друга. Этот случай соответствует параллельному включению нагрузок в сеть с постоянным напряжением.



К задаче 6.

ЗАДАЧА 7

Источник тока имеет э. д. с. E и внутреннее сопротивление r . Исследовать условия работы этого источника: каким должно быть сопротивление R нагрузки, чтобы получить максимальную силу тока в цепи, максимальную полезную мощность, максимальный коэффициент полезного действия?



РЕШЕНИЕ

Электрическая цепь показана на рис. 1. Ток в цепи определяется законом Ома: $I = E/(R + r)$. Полная мощность N , развиваемая источником тока, равна $IE = E^2/(R + r)$. Полезная мощность N_n , т. е. мощность, выделяющаяся на нагрузке, дается соотношением

$$N_n = IU = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}. \quad (1)$$

Коэффициент полезного действия η источника в этой цепи, определяемый как отношение полезной мощности к полной, зависит от сопротивления нагрузки:

$$\mu = \frac{N_{\text{п}}}{N} = \frac{R}{R+r}. \quad (2)$$

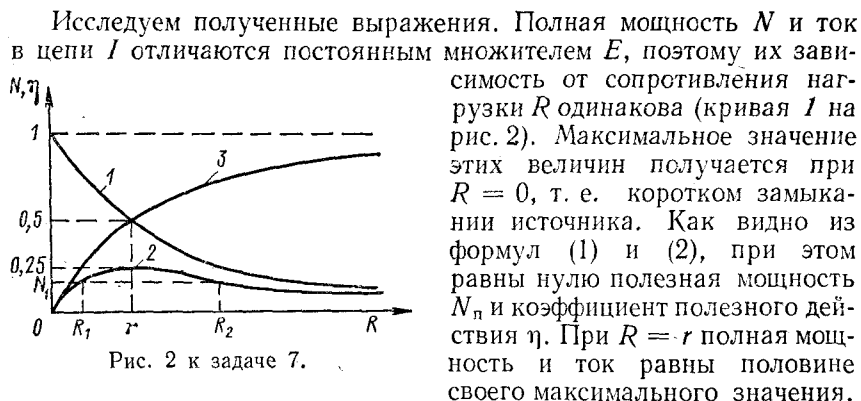


Рис. 2 к задаче 7.

коэффициент полезного действия η равен 0,5, а полезная мощность достигает своего максимального значения, равного половине полной мощности N при этой нагрузке. Для того чтобы убедиться, что при равенстве сопротивления нагрузки и внутреннего сопротивления источника тока полезная мощность максимальна, преобразуем правую часть выражения (2) следующим образом:

$$N_{\text{п}} = \frac{E^2}{(R+r)^2/R} = \frac{E^2}{R+2r+r^2/R}. \quad (3)$$

Полезная мощность будет максимальной, когда знаменатель правой части выражения (3) минимален. Преобразуем знаменатель:

$$R - 2r + \frac{r^2}{R} + 4r = \left(\sqrt{R} - \frac{r}{\sqrt{R}} \right)^2 + 4r. \quad (4)$$

Функция (4) достигает минимума тогда, когда выражение в скобках равно нулю, т. е. при $R = r$.

При неограниченном увеличении сопротивления нагрузки ($R \rightarrow \infty$) как полная, так и полезная мощность стремятся к нулю (кривая 2), а коэффициент полезного действия — к единице (кривая 3).

Из рис. 2 видно, что требования получения максимального тока в цепи, максимальной полезной мощности и максимального к. п. д. противоречивы. Для получения возможно большего тока сопротивление нагрузки должно быть малым по сравнению с внутренним сопротивлением источника, но при этом близки к нулю полезная мощность и к. п. д.: почти вся совершаемая источником тока работа идет на выделение тепла на внутреннем сопротивлении r . Чтобы получить от данного источника тока максимальную полезную мощность, следует взять нагрузку с сопротивлением R , равным внутрен-

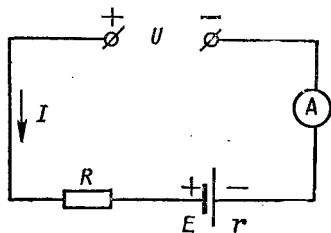
нему сопротивлению источника. Величина максимальной полезной мощности $N_{п\max} = E^2/(4r)$, но коэффициент полезного действия при этом равен всего лишь 0,5. Любую полезную мощность N_1 , меньшую максимальной, мы можем получить, как свидетельствует ход кривой 2, при двух значениях R_1 и R_2 сопротивления нагрузки. Практически для получения заданной полезной мощности следует выбирать нагрузку с большим сопротивлением R_2 , так как к. п. д. при этом выше. Для получения к. п. д., близкого к единице, следует брать нагрузку с сопротивлением, много большим внутреннего сопротивления источника тока, но при этом выделяющаяся мощность $N_{п} \rightarrow 0$.

ЗАДАЧА 8

Аккумулятор с э. д. с. E и внутренним сопротивлением r заряжается через сопротивление R от сети постоянного тока с напряжением U . Какой ток покажет амперметр, включенный в цепь?

РЕШЕНИЕ

Прежде всего поинтересуемся, ставил ли когда-нибудь читатель аккумулятор на зарядку? Куда подключить «+», а куда «-»? Не вдаваясь в детали происходящих при этом процессов, легко сообразить, что при зарядке аккумулятора все процессы внутри него идут «вспять», и, следовательно, ток идет в направлении, противоположном току при разрядке, когда аккумулятор является источником питания для цепи. Поэтому аккумулятор включается в цепь так, как показано на рисунке, а ток в цепи идет в направлении, указанном стрелкой. Как найти величину тока? Закон Ома для полной цепи здесь неприменим, так как нам известен лишь ее участок; не поможет нам и закон Ома для участка однородной цепи, так как этот участок неоднороден — в цепи имеются скачки потенциалов (аккумулятор). Поэтому попытаемся привлечь какие-нибудь известные нам общие физические законы. Проследим за энергетическими превращениями, происходящими в этой цепи. Работа, совершаемая внешним источником (зарядной станцией) в единицу времени, равна IU . Что при этом происходит в цепи? Во-первых, выделяется джоулево тепло $I^2(R + r)$ на всех сопротивлениях, включая внутреннее сопротивление аккумулятора; во-вторых, при зарядке в единицу времени аккумулятор запасает энергию, равную IE . Никаких других энергетических превращений не происходит, поэтому на основании закона сохранения энергии можно утверждать:



К задаче 8.

$$IU = I^2(R + r) + IE,$$

откуда (так как $I \neq 0$) $I = (U - E)/(R + r)$.

Это и есть ответ на вопрос задачи. Стметим, что, как и следовало ожидать, аккумулятор зарядить можно только от сети, напряжение в которой больше э. д. с. аккумулятора. Сопротивление R включается для ограничения величины зарядного тока.

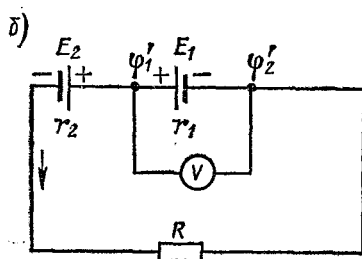
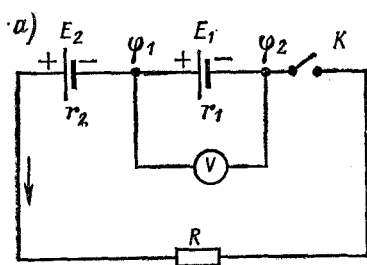
Получившееся выражение представляет собой частный случай закона Ома для неоднородного участка цепи, содержащего источники тока:

$$I = \frac{U + \sum_k E_k}{R + \sum_k r_k}. \quad (1)$$

В формуле (1) U — напряжение на концах участка цепи, а каждая э. д. с. берется со знаком плюс, если она повышает потенциал точек цепи в направлении протекания тока, и со знаком минус в противном случае. Если из формулы (1) ток получится отрицательным, то это означает, что на самом деле он течет в противоположную сторону.

ЗАДАЧА 9

Собрана цепь, схема которой дана на рисунке *а*. Э. д. с. первого источника E_1 больше э. д. с. второго E_2 . Вольтметр идеальный,



К задаче 9.

причем нуль его расположен посредине шкалы. При разомкнутом ключе стрелка вольтметра отклоняется влево. При одних значениях параметров схемы стрелка после замыкания ключа отклоняется влево, а при других — вправо. Величина напряжения, показываемого вольтметром, известна и в обоих случаях одинакова. Что покажет вольтметр и куда отклонится его стрелка в каждом из этих случаев, если второй источник переключить, как показано на рисунке *б*?

РЕШЕНИЕ

Идеальный вольтметр, включенный в электрическую цепь, показывает напряжение, равное разности потенциалов между точками подключения прибора. Обозначим потенциалы этих точек на первой схеме через φ_1 и φ_2 , на второй — через φ'_1 и φ'_2 . Для сокращения записи введем $U = \varphi_2 - \varphi_1$ и $U' = \varphi'_2 - \varphi'_1$. Ток в схеме на ри-

сунке a равен

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R}. \quad (1)$$

С другой стороны, используя закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащего э. д. с. E_1 , для этого же тока I можно написать выражение

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{r_1} = \frac{U + E_1}{r_1}. \quad (2)$$

Приравняв правые части выражений (1) и (2):

$$\frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{U + E_1}{r_1}. \quad (3)$$

Совершенно аналогично для схемы, изображенной на рисунке b , получаем

$$\frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2 + R} = \frac{U' + E_1}{r_1}. \quad (4)$$

Поделив почленно (3) на (4), находим

$$\frac{E_1 + E_2}{E_1 - E_2} = \frac{U + E_1}{U' + E_1}, \quad (5)$$

откуда

$$U' = \frac{(E_1 - E_2)U - 2E_1E_2}{E_1 + E_2}. \quad (6)$$

Формально ответ получен. При его получении мы никак не использовали указания, в какую сторону отклоняется стрелка вольтметра, и пока неясно, как воспользоваться этим ответом в каждом конкретном случае: мы не знаем, какой знак в каждом из рассматриваемых случаев нужно приписать величине U .

При разомкнутом ключе, когда ток в цепи на рисунке a отсутствует, потенциал φ_1 больше, чем φ_2 , т. е. $U = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$. По условию задачи при этом стрелка вольтметра отклоняется влево. Этим устанавливается связь между направлением отклонения стрелки вольтметра и знаком напряжения U : при отклонении стрелки прибора влево $U < 0$, при отклонении вправо $U > 0$. Поэтому в первом случае, когда стрелка вольтметра отклоняется влево, в формулу (6) подставляется отрицательное значение напряжения U , показанного вольтметром, а во втором случае (стрелка — вправо) — положительное. Таким же образом устанавливается направление отклонения стрелки вольтметра в схеме на рисунке b : если значение U' , вычисляемое по формуле (6), окажется отрицательным, стрелка вольтметра будет отклоняться влево, если положительным — вправо.

Легко видеть, что в схеме на рисунке b стрелка вольтметра всегда будет отклоняться в ту же сторону, что и при разомкнутом ключе, независимо от того, в какую сторону она отклонялась в схеме на рисунке a . Действительно, так как $E_1 > E_2$, то направление тока в схеме на рисунке b определяется источником E_1 (так же, как и в задаче 8) и $\varphi'_1 > \varphi'_2$, т. е. $U' < 0$. Это можно увидеть и непосред-

ственно из формулы (6): В случае $U < 0$ этот факт очевиден, в случае $U > 0$ требуется более детальное исследование. Предлагаем вам проделать его самостоятельно, только дочитайте сначала до конца решение задачи.

Подумаем теперь, что физически означают разные направления отклонения стрелки вольтметра в схеме на рисунке *a*. Обратимся к формуле (2). Как мы только что выяснили, входящее в нее напряжение U отрицательно, если отклонение стрелки вольтметра происходит в ту же сторону, что и при разомкнутом ключе, когда тока в цепи нет. В этом случае, как видно из (2), ток в цепи меньше тока короткого замыкания для источника E_1 : $I < I_0 = E_1/r_1$. Это означает, что источник тока работает нормально, выделяя мощность не только на своем внутреннем сопротивлении r_1 , но и во внешней цепи на нагрузке R .

Если отклонение стрелки вольтметра при замыкании ключа происходит в противоположную сторону, то $U > 0$, и из (2) видно, что ток в цепи больше тока короткого замыкания источника I_0 .

Это значит, что источник E_1 работает «ненормально»: выделяющаяся на его внутреннем сопротивлении мощность превосходит его возможности, т. е. максимальную мощность, которую он вообще может развить. Поэтому, если этот источник убрать, ток в цепи возрастет.

Не следует бездумно последовательно соединять источники тока! Иногда это может привести к результату, прямо противоположному желаемому.

А как практически обнаружить такой источник-«паразит» в цепи, питаемой батареей последовательно соединенных элементов?

И последнее. Если будете проводить анализ формулы (6), Вам достаточно только сообразить, что при положительном U величина его не может превышать E_2 . Отсюда немедленно следует, что $U' < 0$, т. е. и в этом случае стрелка вольтметра отклоняется влево.

ЗАДАЧА 10

Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением и сопротивлением якоря R включен в сеть с напряжением U . Исследовать условия работы электромотора: найти зависимости тока в цепи, полной потребляемой мощности и механической мощности мотора, угловой скорости вращения якоря и коэффициента полезного действия от механической нагрузки, т. е. от момента внешних сил, действующих на якорь. Трением в подшипниках пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Предположим, что к якорю электромотора со стороны механической нагрузки приложен постоянный вращающий момент M . Будем рассматривать работу электромотора в стационарном режиме, когда угловая скорость вращения якоря ω не меняется со временем.

Пусть в цепи якоря идет ток I . Воспользуемся законом сохранения энергии: потребляемую мотором от сети мощность $N = IU$ приравняем сумме механической мощности N_m , развиваемой мотором, и джоулева тепла, выделяющегося в якоре в единицу времени:

$$IU = N_m + I^2 R. \quad (1)$$

Поскольку при вращении якоря в постоянном магнитном поле в его обмотке возникает э. д. с. индукции, ток I определяется законом Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U - E_i}{R}, \quad (2)$$

где E_i — абсолютная величина э. д. с. индукции.

Сравнивая формулы (1) и (2), легко увидеть, что

$$N_m = IE_i. \quad (3)$$

Это соотношение, разумеется, почти очевидно и из интуитивных соображений.

Поскольку э. д. с. индукции пропорциональна угловой скорости вращения якоря, равенство (3) можно переписать в виде

$$N_m = Ik\omega, \quad (4)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от напряженности магнитного поля индуктора, от конструкции электромотора, т. е. от размеров и формы обмотки якоря. С другой стороны, развиваемая мотором механическая мощность при равномерном вращении якоря равна произведению механического момента M на угловую скорость:

$$N_m = M\omega. \quad (5)$$

Из сравнения выражений (4) и (5) видим, что при установившемся равномерном вращении якоря ток в его обмотке пропорционален приложенному механическому моменту:

$$I = M/k. \quad (6)$$

Однако из соотношения (2) следует, что ток не может превышать значения

$$I_{\max} = U/R, \quad (7)$$

которое достигается при $E_i = 0$, т. е. при неподвижном якоре. Это означает, что максимальный механический момент, который может развить мотор:

$$M_{\max} = kU/R. \quad (8)$$

Если момент внешних сил, действующих на якорь, будет превышать эту величину, то якорь будет вращаться в противоположную сторону, и мотор будет работать как динамо-машина. Этот случай мы рассматривать не будем.

Итак, из равенства (6) следует, что зависимость тока в якоре от приложенного механического момента линейная (рисунок а),

причем максимальные значения $I_{\max}$ и $M_{\max}$ даются формулами (7) и (8).

Полная мощность, потребляемая электромотором от сети, $N = IU = UM/k$, а ее максимальное значение $N_{\max} = I_{\max}U = U^2/R$.

Зависимость потребляемой мощности от M представлена на рисунке б прямой 1.

С помощью формул (1) и (6) выражение для механической мощности, развиваемой мотором, можно представить в виде

$$N_m = \frac{U}{k} M - \frac{R}{k^2} M^2. \quad (9)$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз (кривая 2 на рисунке б). Механическая мощность мотора обращается в нуль при $M=0$, т. е. при работе мотора на холостом ходу, и при $M = M_{\max}$, когда якорь не вращается. Совсем нетрудно убедиться, что максимальное значение механической мощности мотора достигается при $M = M_{\max}/2$ и равно

$$N_{m \max} = \frac{1}{4} N_{\max} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U^2}{R}.$$

Коэффициент полезного действия мотора, определяемый как отношение механической мощности к полной мощности,

$$\eta = \frac{N_m}{N} = 1 - \frac{R}{kU} M.$$

Зависимость к. п. д. от M представлена прямой на рисунке в. Для определения зависимости угловой скорости якоря от механической нагрузки вернемся к формуле (5). Подставляя в нее N_m из (9), получаем $\omega = U/k - (R/k^2) M$. График зависимости ω от M — также прямая (рисунок з). При отсутствии внешней нагрузки, т. е. на холостом ходу, угловая скорость максимальна:

$$\omega_0 = U/k. \quad (10)$$

К задаче 10.

потребляемой от сети, равен

С помощью формулы (10) коэффициент пропорциональности k между э. д. с. индукции и угловой скоростью ω , входящий в выражение для искомых величин, можно выразить через угловую скорость холостого хода ω_0 , которую легко измерить на опыте.

Приведенные на рисунке кривые наглядно иллюстрируют условия работы электромотора. Стремление получить от данного электромотора возможно больший вращающий момент неизбежно приведет, как это видно из рисунков б, в, к тому, что механическая мощность мотора и его к. п. д. будут крайне низкими, а угловая скорость якоря близка к нулю. Почти вся потребляемая при этом от сети энергия пойдет на нагревание обмотки якоря. Для получения максимальной полезной мощности от данного мотора механическую нагрузку необходимо согласовать с ним. Механический момент внешних сил должен быть равен половине максимального момента, который может развить данный электромотор. Этого можно добиться использованием редуктора. Коэффициент полезного действия мотора, работающего в таком режиме, равен 0,5. Любую механическую мощность $N_{м1}$, меньшую максимальной, можно получить при двух значениях момента внешних сил M_1 и M_2 (см. рисунок б).

Для получения высокого к. п. д. при заданной полезной мощности следует, как видно из рисунка в, выбирать меньшее значение момента внешних сил M_1 — при этом бесполезный расход энергии на нагревание обмотки якоря будет меньше. Мотору, предназначенному для работы на разных режимах, нужен редуктор!

ЗАДАЧА 11

Электромотор с постоянным магнитом, якорь которого имеет сопротивление R , включен в сеть постоянного тока с напряжением U , при этом груз весом P поднимается со скоростью v_0 посредством невесомой нити, намотанной на ось мотора. С какой скоростью v будет опускаться этот же груз, если во внешней цепи произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой? Трением в подшипниках пренебречь.

РЕШЕНИЕ

Прежде всего подумаем, почему вообще устанавливается какая-то определенная скорость спуска. Ведь если просто отключить мотор от сети, то при отсутствии трения в подшипниках груз будет раскручивать якорь и опускаться равноускоренно. Ускорение, конечно, будет меньше ускорения свободного падения, если якорь мотора обладает заметным моментом инерции. Мотор, как мы видим, здесь вообще ни при чем, его якорь — это просто раскручиваемый опускающимся грузом маховик. Однако в рассматриваемом в задаче случае электрическая цепь оказывается замкнутой, но так, что напряжение на мотор не подается, и в результате при опускании груза он работает как замкнутая накоротко динамо-машина. Скорость опускания груза теперь будет увеличиваться только до тех пор, пока действующий на якорь мотора со стороны груза механический момент

не будет уравновешен моментом сил, действующих на якорь с током со стороны магнитного поля индуктора.

Так как момент механических сил, действующих на якорь, одинаков как при равномерном подъеме, так и при равномерном спуске (груз один и тот же), а магнитное поле индуктора считается постоянным (по условию задачи оно создается постоянным магнитом), то и ток в цепи якоря будет одинаковым при установившихся подъеме и спуске. (В самом деле, сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, пропорциональна току.) Обозначим ток в якоре при установившемся движении через I . Найти его величину можно, воспользовавшись законом сохранения энергии при подъеме груза: потребляемая от сети мощность IU расходуется на нагревание обмотки якоря и на подъем груза:

$$IU = I^2 R + P v_0. \quad (1)$$

Решая это уравнение, находим

$$I = \frac{U}{2R} \pm \sqrt{\frac{U^2}{4R^2} - \frac{P v_0}{R}}. \quad (2)$$

Почему получилось два значения тока? В условии задачи заданы вес груза и скорость его подъема, т. е. фактически задана механи-

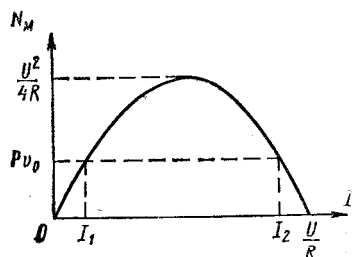


Рис. 1 к задаче 11.

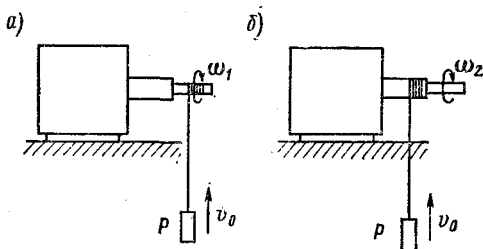


Рис. 2 к задаче 11.

ческая мощность, развиваемая мотором. Как мы видели в предыдущей задаче, одну и ту же механическую мощность, меньшую максимальной, которую может развить мотор при заданном напряжении U , можно получить при двух значениях тока в якоре. В самом деле, из формулы (1) видно, что любое значение механической мощности $P v_0$, меньшее $U^2/(4R)$, можно получить при двух значениях тока I_1 и I_2 (рис. 1). Каждому из этих значений тока соответствует определенное значение момента внешней силы, действующей на якорь мотора. Поскольку эта сила равна весу поднимаемого груза P , то каждому значению механического момента соответствует определенный радиус оси, на которую наматывается нить (рис. 2).

Рис. 2, а соответствует меньшему значению механического момента и, следовательно, току I_1 , рис. 2, б — току I_2 . В первом случае та же самая механическая мощность мотора $P v_0$ получается при меньшем радиусе оси и большей угловой скорости вращения

якоря, чем во втором случае. Первый случай соответствует более высокому коэффициенту полезного действия мотора, и хотя данных задачи, строго говоря, недостаточно для того, чтобы отдать предпочтение тому или другому значению тока, но если предположить, что при подъеме груза мотор работал в «правильном» режиме, то из корней I_1 и I_2 следует выбрать меньший.

Как мы выяснили, такой же ток будет протекать в обмотке якоря и при установившемся спуске груза. Воспользуемся и здесь законом сохранения энергии: поскольку теперь мотор представляет собой замкнутую накоротко динамо-машину, убыль потенциальной энергии груза равна количеству тепла, выделяющегося в обмотке якоря: $Pv = I^2 R$, откуда $v = I^2 R / P$.

Любопытно отметить, что сумма значений скорости подъема и скорости спуска равна скорости холостого хода, т. е. скорости подъема нити без груза. Докажите это сами!

ЗАДАЧА 12

На последовательно соединенные сопротивление R , конденсатор C и катушку индуктивности L подается переменное синусоидальное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$ (рис. 1). Определить ток в цепи, сдвиг по фазе между током и поданным напряжением и напряжение на отдельных элементах схемы.

РЕШЕНИЕ

В последовательной цепи переменного тока сила тока I в каждый момент времени во всех участках цепи одинакова, а сумма мгновенных значений напряжений на сопротивлении R , емкости C и индуктивности L равна значению приложенного напряжения в тот же момент времени:

$$U = U_R + U_C + U_L. \quad (1)$$

Как известно, напряжение на активном сопротивлении по фазе совпадает с током, на емкости напряжение отстает от тока по фазе на $\pi/2$, на индуктивности — опережает ток на $\pi/2$. Амплитудные значения напряжений на этих элементах цепи связаны с амплитудным значением тока соотношениями

$$U_{0R} = I_0 R, \quad U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C}, \quad U_{0L} = I_0 \omega L. \quad (2)$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что мгновенное значение любой изменяющейся по гармоническому закону величины можно представить как проекцию вектора на некоторое заранее выбранное направление, причем сам вектор равномерно вращается в плоскости с частотой ω , а его длина равна амплитудному значению исследуемой величины. С помощью такого представления исследуемой схеме можно сопоставить векторную диаграмму, изобра-

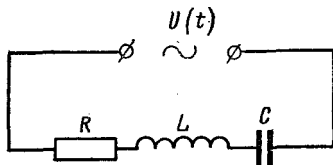


Рис. 1 к задаче 12.

женную на рис. 2, а. Каждой величине: току I , напряжениям на сопротивлении R , емкости C и индуктивности L сопоставляются векторы, длина которых равна амплитудному значению соответствующей величины. Вся система векторов вращается как целое вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка, с угловой скоростью ω . Мгновенные значения величин I , U_R , U_L и U_C получаются проекти-

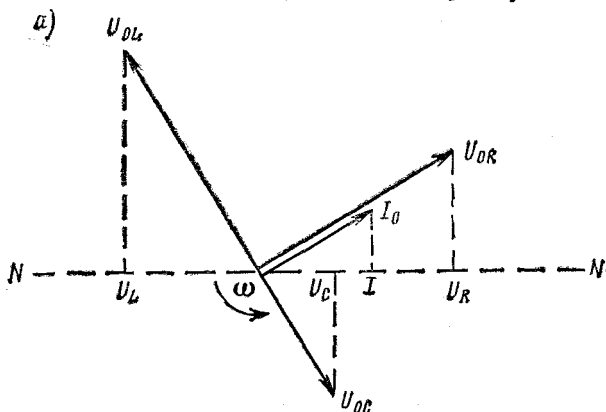


Рис. 2 к задаче 12.

рованием соответствующих векторов на заранее выбранное направление NN . Поскольку ток в цепи находится в фазе с напряжением U_R , отстает на $\pi/2$ от напряжения на индуктивности U_L и опережает на $\pi/2$ напряжение на емкости U_C , то при выбранном направлении

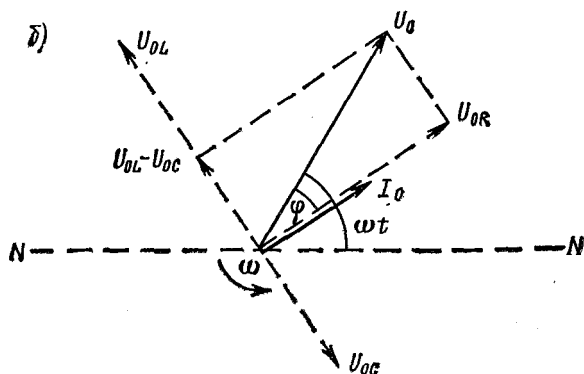


Рис. 2 к задаче 12.

вращения вектор U_{0L} опережает векторы I_0 и U_{0R} на $\pi/2$, которые в свою очередь опережают на $\pi/2$ вектор U_{0C} .

Как теперь найти вектор U_0 , изображающий приложенное напряжение U ? Легко видеть, что для этого нужно просто найти сумму векторов U_{0R} , U_{0L} и U_{0C} , так как проекция результирующего

вектора, которая и определяет мгновенное значение приложенного напряжения U , равна сумме проекций составляющих векторов, представляющих собой мгновенные значения напряжений U_R , U_L и U_C в полном соответствии с равенством (1) (рис. 2, б). Из рис. 2, б легко видеть, что

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}}.$$

Используя соотношение (2), получаем

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (4)$$

Итак, если приложенное напряжение $U = U_0 \cos \omega t$, то ток в цепи $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$, где I_0 и определяются формулами (3) и (4). Ток в цепи, как и напряжение, меняется по синусоидальному закону, но между током и напряжением существует сдвиг по фазе, равный φ .

С помощью векторной диаграммы на рис. 2, а и соотношений (2) теперь легко написать выражение для мгновенных значений напряжений на отдельных элементах схемы:

$$\begin{aligned} U_R &= I_0 R \cos(\omega t - \varphi), \\ U_L &= I_0 \omega L \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \\ U_C &= \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

А что покажет вольтметр, если его подключить к какому-либо из элементов схемы? Если вольтметр проградуирован так, что он показывает действующее значение напряжения, то его показания будут в $\sqrt{2}$ раз меньше амплитудного значения напряжения на том элементе схемы, к которому он подключен. Произведя измерения напряжений на всех элементах схемы по отдельности, можно убедиться, что сумма этих напряжений всегда больше действующего значения, подаваемого на схему напряжения. Более того, напряжение на любом из реактивных сопротивлений может быть гораздо больше подаваемого напряжения. Напряжение же на активном сопротивлении никогда не бывает больше подаваемого напряжения. Подумайте сами, почему.

Если при измерении напряжений на реактивных элементах напряжения окажутся равными друг другу, то это значит, что равны реактивные сопротивления: $\omega L = 1/(\omega C)$. Такую ситуацию называют резонансом напряжений в цепи переменного тока. При этом напряжение на омическом сопротивлении равно приложенному внешнему напряжению.

В электрической цепи, рассмотренной в задаче 12, у источника переменного напряжения можно изменять частоту ω , не меняя амплитуды напряжения U_0 . Оказалось, что при частотах ω_1 и ω_2 величина тока в цепи одинакова и равна половине максимального возможного значения. При какой частоте ω_0 достигается максимальное значение тока?

РЕШЕНИЕ

Амплитуда тока в рассматриваемой цепи определяется формулой (3) предыдущей задачи:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1)$$

При фиксированных параметрах цепи R , L и C и заданной амплитуде внешнего напряжения U_0 эта формула дает зависимость амплитуды тока в цепи от частоты приложенного напряжения ω . Эта зависимость имеет хорошо известный вид резонансной кривой (рис. 1). При низких частотах ($\omega \approx 0$) конденсатор практически эквивалентен разрыву в цепи, и ток отсутствует. При высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$) сопротивление конденсатора стремится к нулю, но зато неограниченно возрастает сопротивление катушки индуктивности, и ток снова стремится к нулю. Максимальное значение амплитуды тока, как видно из формулы (1), достигается при частоте ω_0 , при которой выражение в скобках обращается в нуль:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (2)$$

В этом случае индуктивное и емкостное сопротивления равны друг другу, и в цепи имеет место резонанс напряжений. При $\omega = \omega_0$ ток в цепи зависит только от омического сопротивления R , его амплитуда равна U_0/R , а сдвиг по фазе между током и приложенным напряжением отсутствует.

Формула (2) давала бы ответ на вопрос задачи, если бы были известны индуктивность и емкость. Однако по условию задачи нужно выразить ω_0 через частоты ω_1 и ω_2 , при которых амплитуда тока вдвое меньше максимальной. Из рис. 1 видно, что частота ω_0 лежит между ω_1 и ω_2 , а сами ω_1 и ω_2 тем ближе друг к другу, чем острее резонансная кривая.

Для нахождения резонансной частоты ω_0 поступим следующим образом. Как видно из рис. 1, частоты ω_1 и ω_2 являются корнями

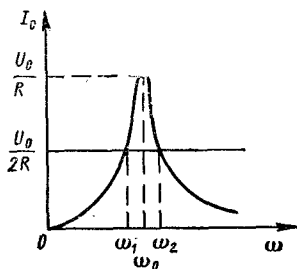


Рис. 1 к задаче 13.

уравнения

$$\frac{U_0}{2R} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (3)$$

поскольку они определяются точками пересечения прямой $I_0 = U_0/(2R)$ и резонансной кривой (1). Отметим, что кроме имеющих физический смысл положительных корней ω_1 и ω_2 уравнение (3) имеет отрицательные корни $-\omega_1$ и $-\omega_2$, поскольку правая часть (3) является четной функцией переменной ω (рис. 2). Возведя (3) в квадрат, получаем

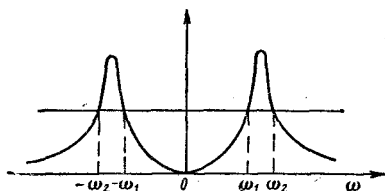


Рис. 2 к задаче 13.

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 - 3R^2 = 0. \quad (4)$$

Умножая (4) на $\omega^2 C^2$ и заменяя согласно (2) произведение LC на $1/\omega_0^2$, получаем

$$\omega^4 - \omega_0^2 (2 + 3R^2 C^2 \omega_0^2) \omega^2 + \omega_0^4 = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) биквадратное и, следовательно, имеет четыре корня. Столько же корней имело исходное уравнение (3). Поскольку при возведении уравнения (3) в квадрат мы не могли потерять корней, корни (5) совпадают с корнями уравнения (3).

По теореме Виета, свободный член уравнения (5) равен произведению его корней: $\omega_1^2 \omega_2^2 = \omega_0^4$, откуда $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

ЗАДАЧА 14

При включении первичной обмотки трансформатора с замкнутым сердечником в сеть с напряжением $U_1 = 100$ В на разомкнутой вторичной обмотке, имеющей в два раза ($n = 2$) большее число витков, напряжение $U_2 = 197$ В. Найти, какое напряжение будет на разомкнутой вторичной обмотке, если воспользоваться сердечником того же размера, но из материала с магнитной проницаемостью в $k = 10$ раз меньшей, чем в первом случае. Рассеяние магнитного потока и потери в сердечнике не учитывать.

РЕШЕНИЕ

Приводимое ниже решение справедливо для режима «холостого хода», когда вторичная обмотка трансформатора разомкнута. Напряжение U_2 на разомкнутой вторичной обмотке в первом случае меньше, чем $nU_1 = 200$ В. Поскольку рассеяния магнитного потока и потерь в сердечнике по условию задачи нет, это различие вызвано падением напряжения на омическом сопротивлении первичной обмотки. Напряжение U_L на индуктивном сопротивлении R_L первичной обмотки опережает по фазе на $\pi/2$ ток и, следовательно, напряжение U_R на омическом сопротивлении. Поэтому для полного напряже-

ния U_1 на первичной обмотке можно написать

$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2}. \quad (1)$$

Разумеется, непосредственно измерить U_L и U_R по отдельности нам не удастся, так как первичная обмотка не есть последовательно соединенные индуктивность L и активное сопротивление R : каждый элемент обмотки обладает одновременно индуктивностью и сопротивлением. Это так называемая цепь с распределенными параметрами. Но при расчете можно заменить реальную обмотку на цепь с сосредоточенными параметрами — катушку индуктивности и сопротивление, соединенные последовательно, поскольку через каждый элемент исходной цепи идет один и тот же ток.

Напряжение U_L равно э. д. с. самоиндукции E_1 , возникающей в первичной обмотке. Напряжение U_2 на разомкнутой вторичной обмотке равно возникающей в ней э. д. с. индукции E_2 . Поскольку э. д. с. E_1 и E_2 связаны соотношением $E_2/E_1 = n$, то

$$U_2 = nU_L. \quad (2)$$

Итак, напряжение на разомкнутой вторичной обмотке определяется величиной индуктивной составляющей напряжения на первичной обмотке. Поскольку из соотношения (1) следует, что

$$\frac{U_L}{U_1} = \frac{R_L}{\sqrt{R_L^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R/R_L)^2}}, \quad (3)$$

$$\text{то } U_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + (R/R_L)^2}}.$$

Замена сердечника приводит к изменению индуктивного сопротивления первичной обмотки. Индуктивное сопротивление R_L пропорционально магнитной проницаемости материала сердечника, поэтому

$$R_L/R'_L = k, \quad (4)$$

где R'_L — индуктивное сопротивление первичной обмотки после замены сердечника.

Учитывая формулу (4), выражение для напряжения U'_2 на вторичной обмотке после замены сердечника можно записать в виде

$$U'_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + (R/R'_L)^2}} = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + (kR/R_L)^2}}. \quad (5)$$

Из соотношений (2) и (3) видно, что

$$(R/R_L)^2 = (U_1/U_L)^2 - 1 = (nU_1/U_2)^2 - 1. \quad (6)$$

Подставляя (6) в соотношение (5), находим

$$U'_2 = \frac{nU_1}{\sqrt{1 + k^2 \{n^2 (U_1/U_2)^2 - 1\}}}. \quad (7)$$

Используя заданные в условии значения входящих в формулу (7) величин, получаем $U'_2 = 100$ В.

Итак, напряжение на разомкнутой вторичной обмотке оказалось равным поданному на первичную обмотку, несмотря на то, что число витков во вторичной обмотке в два раза больше. Рассмотренный пример показывает значение сердечника с большой магнитной проницаемостью: для нормальной работы трансформатора необходимо выполнение условия $R \ll R_L$.

ЗАДАЧА 15

Как записать закон Ома для мгновенных значений тока и напряжения для участка цепи синусоидального тока?

РЕШЕНИЕ

Что такое закон Ома? Это утверждение о пропорциональности между током и напряжением в цепи.

Рассмотрим для простоты участок цепи, содержащий последовательно соединенные сопротивление R , конденсатор C и катушку индуктивности L . Такая цепь была подробно рассмотрена в задаче 12. Как было показано, вид закона Ома имеет только соотношение между амплитудными (или действующими) значениями тока и напряжения в цепи:

$$I_0 = U_0 / \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (1)$$

Наличие определенного сдвига по фазе φ между током и напряжением

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) / R \quad (2)$$

приводит к тому, что мгновенные значения тока и напряжения не пропорциональны друг другу, и мы не можем с помощью вещественных чисел представить ток в цепи как отношение приложенного напряжения к сопротивлению.

Однако это можно легко сделать, используя комплексные числа. Разумеется, ток, напряжение и сопротивление цепи, как и любые другие измеряемые на опыте физические величины, должны выражаться вещественными числами. Мгновенные значения интересующих нас физических величин, как было показано в задаче 12, получаются в результате проектирования векторной диаграммы, изображенной на рис. 2, б. Но вектор на плоскости можно задать с помощью комплексного числа! Будем фиксировать мгновенное значение каждого из вращающихся векторов на рис. 2, б заданием некоторого комплексного числа. В частности, вектору, изображающему ток, сопоставим комплексное число I , вектору, изображающему напряжение, — комплексное число U . Поскольку угол φ между этими вращающимися векторами постоянен, комплексные числа U и I , сопоставляемые этим векторам, можно связать равенством $I = U/Z$, где Z — некоторое постоянное комплексное число. Это соотношение формально имеет вид закона Ома для участка цепи, причем комплексное число Z как-то характеризует сопротивление этого участка

цепи переменному току. Легко найти вид этого числа. Записав выражение для U и I в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} U &= U_0 (\cos \alpha + i \sin \alpha), \\ I &= I_0 (\cos \beta + i \sin \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

и учитывая, что разность аргументов α и β этих комплексных чисел равна постоянному сдвигу фаз φ между напряжением и током: $\alpha - \beta = \varphi$, получаем, используя равенства (3) и правило деления комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = Z_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4)$$

Таким образом, модуль Z_0 комплексного числа Z , как видно из выражений (4) и (1), равен

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

а его аргумент φ представляет собой сдвиг фаз между напряжением и током и определяется формулой (2). Переходя от тригонометрической к алгебраической форме комплексного числа и учитывая, что

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}$ и $Z_0 = \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2}$, получаем для Z выражение

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (5)$$

Комплексное число Z полностью характеризует сопротивление рассматриваемого участка цепи синусоидальному переменному току с частотой ω . Оно носит название комплексного сопротивления или импеданса цепи. Зная Z , легко найти амплитуду тока и сдвиг по фазе между напряжением и током. Формула (5) показывает, что импеданс последовательной цепи можно получить, если элементам схемы R , L и C сопоставить комплексные сопротивления переменному току по следующему правилу:

$$R \rightarrow R, \quad L \rightarrow i\omega L, \quad C \rightarrow \frac{1}{i\omega C}, \quad (6)$$

после чего сложить эти «сопротивления» по правилу сложения сопротивлений в последовательной цепи.

Полученный рецепт имеет совершенно общий характер и справедлив для любой разветвленной цепи: всем элементам сопоставляются комплексные сопротивления по правилу (6), которые затем складываются по правилам для цепей постоянного тока. В качестве упражнения предлагаем вам рассмотреть самостоятельно цепь с параллельно соединенными элементами.

Оптика.

Релятивистская и квантовая физика

Основные законы геометрической оптики — закон прямолинейного распространения света в однородной среде, законы отражения и преломления света на границе раздела двух сред — могут быть получены с помощью принципа Ферма: действительный путь распространения монохроматического луча света есть путь, для прохождения которого свету требуется экстремальное (как правило, минимальное) время по сравнению с любым другим мыслимым путем между теми же точками. Поскольку скорость света в среде с показателем преломления n равна c/n , принцип Ферма можно сформулировать как требование минимальности оптической длины луча при распространении света между двумя заданными точками. Под оптической длиной луча понимается произведение показателя преломления на длину пути луча. В неоднородной среде оптическая длина складывается из оптических длин на отдельных участках. * Использование этого принципа позволяет рассмотреть некоторые задачи с несколько иной точки зрения, чем при непосредственном применении законов отражения и преломления. Например, при рассмотрении фокусирующей оптической системы вместо применения закона преломления можно просто потребовать равенства оптических длин всех лучей.

В основе волновой теории света лежит принцип Гюйгенса, позволяющий по известному положению волнового фронта найти его положение в последующие моменты времени. По принципу Гюйгенса каждая точка волнового фронта является источником вторичных сферических волн. Огибающая поверхность этих вторичных волн

* Такая формулировка принципа Ферма на самом деле не вполне верна. Согласно принципу Ферма оптический путь сравнивается не с любым другим, а с ближайшим. Иначе принцип будет просто неверен, например, когда свет от источника может попасть в какую-либо точку и непосредственно, и после отражения от зеркала. Однако точная формулировка принципа Ферма выходит за рамки данной книги.

представляет собой положение волнового фронта в последующий момент времени.

Волновая теория света дает объяснение таким явлениям, как интерференция и дифракция света. Для получения устойчивой картины интерференции световых волн источники света должны быть когерентными, т. е. создаваемые ими волны должны приходить в точку наблюдения с постоянной разностью фаз. В оптике пока нельзя добиться постоянной разности фаз двух волн от нелазерных независимых источников, и потому для наблюдения интерференционной картины обычно свет от одного источника разделяют на два пучка и потом вновь сводят их вместе после прохождения ими разных путей. Дифракционные явления получают свое объяснение при рассмотрении интерференции когерентных вторичных волн, построенных по принципу Гюйгенса.

Наблюдаемые на опыте корпускулярные свойства света приводят к представлению о свете как о совокупности световых квантов, или фотонов. Согласно квантовой теории энергия фотона E пропорциональна частоте света ν :

$$E = h\nu,$$

где h — постоянная Планка.

Согласно теории относительности энергия всегда связана с массой соотношением

$$E = mc^2. \quad (1)$$

Поэтому масса фотона

$$m = h\nu/c^2.$$

Поскольку фотоны не существуют в состоянии покоя, то их масса покоя $m_0 = 0$, а масса m , определяемая этой формулой, — это масса фотона, движущегося в вакууме со скоростью c ; импульс фотона

$$p = mc = h\nu/c.$$

Так как световую волну можно рассматривать как совокупность фотонов, энергия электромагнитного поля световой волны W связана с импульсом волны p соотношением

$$p = W/c.$$

Для тел, имеющих отличную от нуля массу покоя m_0 , в формулу (1) входит зависящая от скорости тела v масса m , определяемая соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

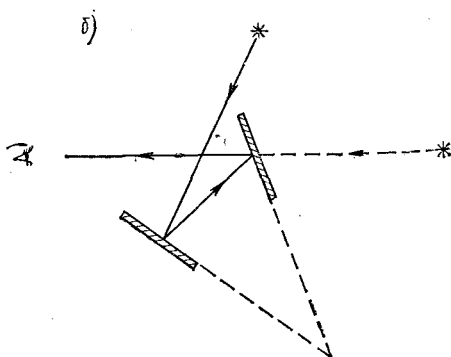
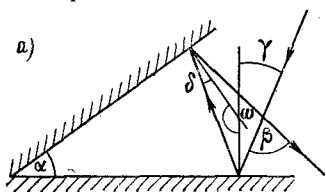
Некоторые задачи этого раздела подобраны с таким расчетом, чтобы показать, как эти на первый взгляд взаимоисключающие волновые и корпускулярные представления о свете фигурируют в рассматриваемых явлениях, создавая единую физическую картину.

ЗАДАЧА 1

Два плоских зеркала образуют двугранный угол α . На одно из зеркал падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Определить угол отклонения луча β от первоначального направления после отражения от обоих зеркал. Ход лучей показан на рисунке а.

РЕШЕНИЕ

Пусть угол падения луча на первое зеркало равен γ , на второе — δ . Очевидно, что угол β как внешний угол треугольника равен $2(\gamma + \delta)$. С другой стороны, $\gamma + \delta = \alpha$, потому что как угол α , так и углы $\gamma + \delta$ дополняют угол ω до π . Поэтому $\beta = 2\alpha$. Самое интересное, что величина этого угла не зависит от угла падения луча на зеркало! Именно это свойство и позволило использовать такую



К задаче 1.

систему зеркал в навигационном приборе, называемом секстантом. Секстантом измеряют высоту светила над горизонтом. Делается это в неблагоприятных условиях, например на качающейся палубе корабля. Прибор можно держать трясущимися руками; важно только точно зафиксировать угол α . Одно из зеркал полупрозрачное. Наблюдая сквозь него линию горизонта, изменением угла α совмещают с ней видимое в этом зеркале изображение светила (рисунок б). Затем величина угла α считывается со шкалы прибора.

Попробуйте сообразить сами, как изменится направление луча после n отражений от каждого из зеркал.

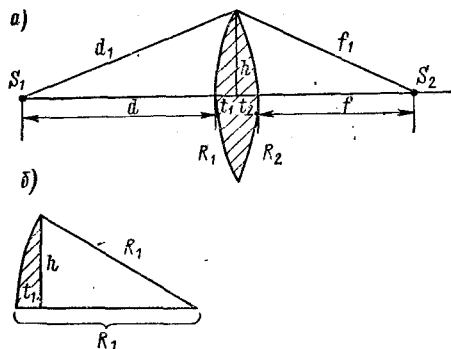
ЗАДАЧА 2

Получить формулу тонкой линзы с помощью принципа Ферма, не прибегая к закону преломления.

РЕШЕНИЕ

Рассмотрим для определенности двояковыпуклую линзу со сферическими преломляющими поверхностями радиусами R_1 и R_2 из стекла с показателем преломления n (рисунок а).

Хорошо известно, что с помощью собирающей линзы можно получить действительное изображение точки. Пусть S_1 — предмет, S_2 — его изображение: все лучи, исходящие из S_1 и прошедшие через линзу, собираются в одной точке S_2 . Пусть S_1 лежит на главной оптической оси линзы, тогда изображение S_2 также лежит на оси.



К задаче 2.

Что значит получить формулу линзы? Это значит установить связь между расстояниями d от предмета до линзы и f от линзы до изображения с величинами, характеризующими данную линзу: радиусами кривизны ее поверхностей R_1 и R_2 и показателем преломления n . Из принципа Ферма следует, что оптические длины всех лучей, выходящих из источника и собирающихся в точке, являющейся его изображением, одинаковы. Рассмотрим

два из этих лучей: один, идущий вдоль оптической оси, второй — через самый край линзы (см. рисунок а). Несмотря на то, что второй луч проходит большее расстояние, его путь в стекле короче, чем у первого, так что время распространения света от S_1 до S_2 для них одинаково. Выразим это математически. Обозначения величин всех отрезков указаны на рисунке. Приравняем оптические длины первого и второго лучей:

$$d + n(t_1 + t_2) + f = d_1 + f_1. \quad (1)$$

Выразим d_1 по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{(d + t_1)^2 + h^2} = (d + t_1) \sqrt{1 + \frac{h^2}{(d + t_1)^2}}.$$

Теперь воспользуемся приближенной формулой $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$, которая справедлива при $x \ll 1$ с точностью до членов порядка x^2 . Считая h малым по сравнению с d_1 , с точностью до членов порядка $(h/d)^4$ имеем

$$d_1 \approx d + t_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{d + t_1}. \quad (2)$$

Аналогично для f_1 получаем

$$f_1 \approx f + t_2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{f + t_2}. \quad (3)$$

Подставляем выражения (2) и (3) в основное соотношение (1) и приводим подобные члены:

$$(n-1)(t_1 + t_2) = \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{d + t_1} + \frac{1}{f + t_2} \right). \quad (4)$$

В этой формуле в случае тонкой линзы можно пренебречь величинами t_1 и t_2 в знаменателях правой части по сравнению с d и f ; очевидно, что в левой части выражения (4) $t_1 + t_2$ следует сохранить, ибо этот член стоит множителем, т. е. является главным.

С той же точностью, что и в формулах (2), (3), t_1 и t_2 с помощью теоремы Пифагора можно представить в виде (рисунок б)

$$t_1 = R_1 - \sqrt{R_1^2 - h^2} \approx \frac{h^2}{2R_1}; \quad t_2 \approx \frac{h^2}{2R_2}.$$

Теперь остается только подставить эти выражения в левую часть формулы (4) и сократить обе части равенства на $h^2/2$:

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Это и есть искомая формула тонкой линзы. Вводя обозначение

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

ее можно переписать в виде

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Легко видеть, что F есть фокусное расстояние линзы: если источник находится на бесконечности (т. е. на линзу падает параллельный пучок лучей), его изображение находится в фокусе. Полагая $d \rightarrow \infty$, получаем $f \rightarrow F$.

ЗАДАЧА 3

Рассмотрим параллельный пучок монохроматических лучей. Если на пути такого пучка поставить собирающую линзу со сферическими поверхностями, то, как известно, все лучи соберутся в одной точке, называемой фокусом. Однако это верно для узкого пучка, т. е. для лучей, не слишком сильно отстоящих от оптической оси. Это значит, что ширина пучка должна быть мала по сравнению с радиусами кривизны преломляющих поверхностей линзы. Для широких пучков имеет место сферическая aberrация, т. е. «далекие» лучи пересекают оптическую ось не в фокусе (рис. 1).

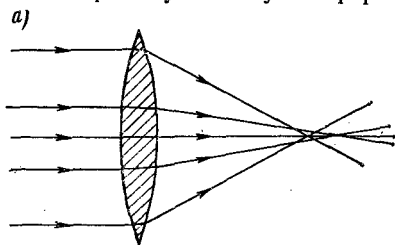


Рис. 1 к задаче 3.

А нельзя ли выбрать форму преломляющих поверхностей линзы таким образом, чтобы сферическая aberrация вообще отсутствовала, т. е. пучок параллельных лучей любой ширины собирался в одной точке?

Как и раньше, воспользуемся принципом Ферма. Предварительно решим вспомогательную задачу. Выясним, какой должна быть форма преломляющей поверхности, разделяющей две однородные среды с показателями преломления 1 и n , чтобы параллельный пучок лучей после преломления собирался в одной точке. Из соображений симметрии ясно, что это будет поверхность вращения вокруг оси симметрии пучка. Поэтому достаточно искать сечение этой поверхности осевой плоскостью (рис. 2, а). Поскольку у всех лучей на оси x фаза одинакова, оптическая длина лучей от оси x до фокуса, лежащего на заданном расстоянии F , должна быть одна и та же.

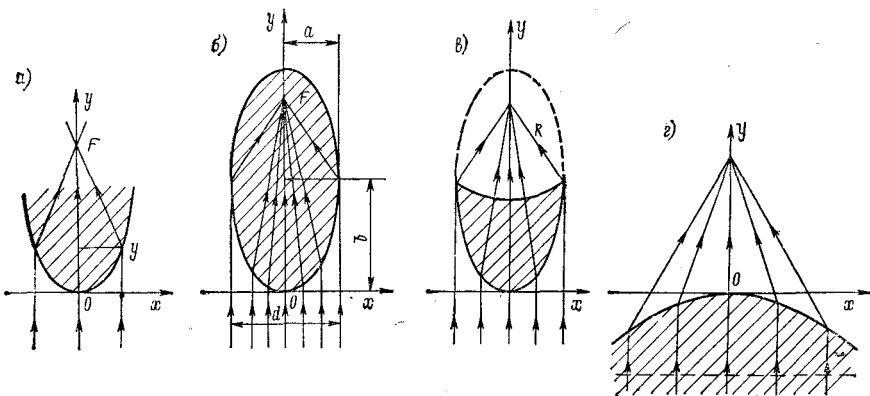


Рис. 2 к задаче 3.

Рассмотрим центральный луч и луч, проходящий на произвольном расстоянии x от оси.

Для них имеем

$$Fn = y + n\sqrt{(F-y)^2 + x^2}.$$

Это и есть уравнение искомой поверхности.

Преобразуем это соотношение, чтобы выяснить форму полученной поверхности. Уединяя квадратный корень и возводя обе части равенства в квадрат, получаем

$$(Fn - y)^2 = n^2[(F - y)^2 + x^2].$$

После несложных преобразований это уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

где

$$a = F\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}, \quad b = F\frac{n}{n+1}; \quad a < b. \quad (2)$$

Уравнение (1) — это эллипс, изображенный на рис. 2, б; a и b — малая и большая полуоси этого эллипса.

Как известно, эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний до которых от двух заданных точек, называемых фокусами, одинакова и равна $2b$. Можно убедиться, что точка пересечения всех лучей (фокус пучка лучей) совпадает с дальним фокусом эллипса. Это совсем несложно, требуется лишь выполнить простые алгебраические преобразования.

Итак, мы нашли форму преломляющей поверхности, удовлетворяющую поставленному условию: все падающие на нее параллельным пучком лучи собираются в одной точке. Однако такой параллельный пучок не может быть сколь угодно широким: при заданном расстоянии F ширина пучка d не может, как видно из формулы (2), превышать значение

$$d = 2a = 2F \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Теперь подумаем, как с помощью такой преломляющей поверхности можно создать линзу, свободную от сферической аберрации для параллельного пучка лучей. Очевидно, что вторая преломляющая поверхность такой линзы должна быть перпендикулярна всем сходящимся лучам, так как в этом случае она не изменит их направления, и все лучи по-прежнему будут пересекаться в одной точке F . Такой поверхностью является сфера с центром в точке F . Чтобы получить линзу максимального диаметра при заданном расстоянии F , радиус R кривизны ее внутренней поверхности следует выбрать равным большой полуоси эллипса b (рис. 2, в).

До сих пор молчаливо предполагалось, что показатель преломления $n > 1$, т. е. верхняя среда на рисунке б оптически более плотная. Однако если под n понимать относительный показатель преломления верхней среды относительно нижней, то имеет смысл рассмотреть и противоположный случай $n < 1$: параллельный пучок лучей испытывает преломление при переходе из более плотной в менее плотную среду. Поскольку при выводе уравнения преломляющей поверхности условие $n > 1$ не использовалось, то и в случае $n < 1$ уравнение искомой границы по-прежнему дается формулой (1), но только, как видно из (2), при $n < 1$ $a^2 < 0$, т. е. в этом случае формула (1) есть уравнение гиперболы, изображенной на рис. 2, г.

Чтобы с помощью такой преломляющей поверхности создать линзу, в качестве второй преломляющей поверхности следует выбрать плоскость в нижней среде, перпендикулярную оси пучка. Расстояние от этой плоскости до вершины преломляющей поверхности выбирается в зависимости от того, какого диаметра мы хотим иметь линзу: ограничений на величину диаметра теперь нет (пунктир на рис. 2, г).

Казалось бы, нам удалось построить идеальную линзу, по крайней мере для монохроматических лучей. Однако такая линза совершенно непригодна для получения изображений даже бесконечно

удаленных предметов. В самом деле, в одной точке пересекаются только лучи, параллельные оси симметрии такой линзы. Пучки параллельных лучей, наклоненные к оптической оси линзы, не пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 4

При равномерном движении электрона в среде со скоростью, превышающей скорость света в данной среде, наблюдается так называемый эффект Вавилова — Черенкова, заключающийся в том, что электрон своим полем когерентно возмущает молекулы или атомы среды, благодаря чему они становятся источниками световых волн, распространяющихся в определенном направлении. Пользуясь принципом Гюйгенса, определите, в каком направлении распространяется черенковское излучение.

РЕШЕНИЕ

В среде с показателем преломления n световые волны распространяются со скоростью $v = c/n < c$.

Для нахождения направления распространения черенковского излучения необходимо в какой-то момент времени определить положение фронта световой волны, возбуждаемой электроном при его движении. На рис. 1, а изображена прямолинейная траектория равномерного движения электрона в среде. Каждую точку траектории электрона можно рассматривать как источник сферической световой волны, распространяющейся со скоростью v . Пусть A , B и C — точки траектории, в которых находился электрон через последовательные равные промежутки времени Δt . В тот момент, когда электрон находился в точке B , фронт волны возбужденной им в точке A , представляет собой сферу, радиус которой $v\Delta t$ меньше расстояния AB , поскольку скорость электрона $v_{эл}$ больше скорости света v в среде. В тот момент, когда электрон попадает в точку C , фронт волны, возбужденной им в точке B , есть сфера радиусом $v\Delta t$, а фронт волны, возбужденной в точке A , — сфера вдвое большего радиуса. Для построения фронта волны черенковского излучения в тот момент, когда электрон находится в точке C , по принципу Гюйгенса следует найти огибающую фронтов всех волн, возбужденных электроном в предшествующие моменты времени. Из рис. 1, а сразу видно, что эта огибающая представляет собой поверхность кругового конуса, ось которого

Рис. 1 к задаче 4.

В тот момент, когда электрон попадает в точку C , фронт волны, возбужденной им в точке B , есть сфера радиусом $v\Delta t$, а фронт волны, возбужденной в точке A , — сфера вдвое большего радиуса. Для построения фронта волны черенковского излучения в тот момент, когда электрон находится в точке C , по принципу Гюйгенса следует найти огибающую фронтов всех волн, возбужденных электроном в предшествующие моменты времени. Из рис. 1, а сразу видно, что эта огибающая представляет собой поверхность кругового конуса, ось которого

совпадает с траекторией электрона, вершина находится в точке C , а угол φ между образующей и осью определяется соотношением

$$\sin \varphi = v/v_{эл.}$$

Поскольку лучи света перпендикулярны фронту волны, черенковское излучение распространяется под углом θ к направлению движения электрона (рис. 1, б):

$$\cos \theta = \sin \varphi = v/v_{эл.} \quad (1)$$

Мы построили фронт волны для того момента времени, когда электрон находится в точке C . С течением времени вершина конуса, совпадающая с положением электрона, перемещается вместе с ним со скоростью $v_{эл.}$ Приемник излучения, находящийся в какой-либо точке D (рис. 1, б), зафиксирует отдельную вспышку света в тот момент, когда фронт волны черенковского излучения пройдет через эту точку. На этом принципе работают черенковские счетчики заряженных частиц, широко используемые в ядерной физике.

Интересно отметить, что условие черенковского излучения (1) справедливо для любого «сверхсветового» источника, а не только для заряженной частицы, движущейся со скоростью, большей скорости света в данной среде. Например, если на плоскую границу раздела двух сред падает под некоторым углом α плоская световая волна (рис. 2), то линия пересечения волнового фронта с границей раздела движется вдоль границы со скоростью

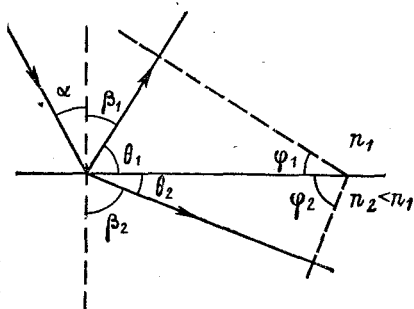


Рис. 2 к задаче 4.

$$v' = \frac{v_1}{\sin \alpha} > v_1, \quad (2)$$

где $v_1 = c/n_1$ — фазовая скорость света в первой среде. Рассматривая эту движущуюся со скоростью $v' > v_1$ линию как сверхсветовой источник и применяя к первой среде условие черенковского излучения (1), находим сразу направление отраженной волны β_1 (рис. 3)

$$\sin \beta_1 = \cos \theta_1 = v_1/v'. \quad (3)$$

Подставляя в (3) скорость движения источника v' из (2), получаем $\sin \beta_1 = \sin \alpha$, $\beta_1 = \alpha$, т. е. хорошо известный закон отражения света на плоской границе. Теперь применим условие черенковского излучения (1) ко второй среде, где фазовая скорость света $v_2 = c/n_2$:

$$\sin \beta_2 = \cos \theta_2 = v_2/v'. \quad (4)$$

Если $v' < v_2$, условие (4) не выполняется ни при каком значении α , т. е. свет во второй среде распространяться не может. Это соответствует хорошо известному случаю полного отражения света от оптически менее плотной среды и имеет место при $v_1/\sin \alpha < v_2$, т. е. $n_1 \sin \alpha > n_2$. При $v' > v_2$ условие черенковского излучения (4) дает нам направление преломленной световой волны, распространяющейся во второй среде:

$$\sin \beta_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha = \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha.$$

Таким образом, мы видим, что обычные законы отражения и преломления света на плоской границе совпадают с условием черенковского излучения, и в этом смысле можно сказать, что условие излучения сверхсветового источника известно уже несколько столетий.

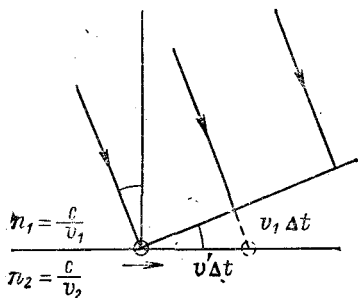


Рис. 3 к задаче 4.

Рассмотрим теперь, чем же черенковское излучение отличается от других видов свечения, вызываемых движущейся в веществе заряженной частицей. При движении электрона сквозь вещество его взаимодействие с атомами вещества приводит к тому, что часть

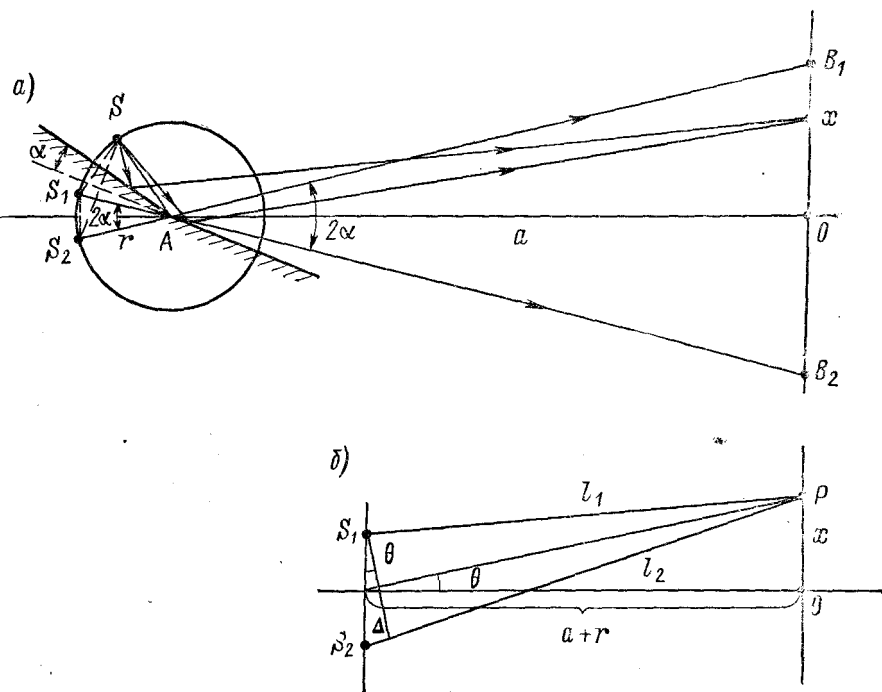
энергии электрона может передаваться атомам, вызывая их ионизацию или возбуждение с последующим высвечиванием. Однако это не есть черенковское излучение, ибо оно некогерентно и возможно и при скорости электрона, меньшей, чем фазовая скорость света в среде. Чтобы яснее представить себе отличие черенковского излучения, рассмотрим следующий пример. Представим себе, что электрон со значительной скоростью движется по оси пустотелого канала, сделанного в веществе, так что он не испытывает непосредственных столкновений с атомами вещества. Оказывается, однако, что если диаметр канала значительно меньше длины волны света, то все же имеет место возмущение среды электромагнитным полем электрона, приводящее при $v_{эл} > v$ к потере энергии электроном в виде светового излучения сквозь поверхность канала. При этом, если среда является вполне прозрачной, поток излучения беспрепятственно проходит через нее. Именно это излучение и представляет собой в чистом виде излучение Черенкова. Излучаемая энергия, конечно, заимствуется из энергии движущегося электрона, скорость которого при этом должна уменьшаться. Но само по себе черенковское излучение отнюдь не связано с торможением электрона, ибо оно должно иметь место и при равномерном движении электрона со скоростью $v_{эл} > v$. Конечно, такое равномерное движение вследствие потерь энергии на излучение не может быть движением по инерции и требует для своего поддержания постоянной внешней силы.

ЗАДАЧА 5

Сколько полос интерференции можно наблюдать на экране в установке с зеркалами Френеля? Длина волны монохроматического источника света λ . Геометрия установки показана на рисунке *a*.

РЕШЕНИЕ

Выясним прежде всего, в каких точках экрана будет наблюдаться интерференционная картина. Будет ли она по всему экрану или в какой-то ограниченной области? Интерференция света наблю-



К задаче 5.

дается там, где происходит наложение волн, пришедших от когерентных источников. В данном опыте нужно определить ту область экрана, в любую точку которой свет приходит после отражения от каждого из зеркал. На рисунке *a* построены изображения S_1 и S_2 точечного источника S в обоих зеркалах. Нетрудно убедиться, что все три точки: S , S_1 и S_2 лежат на одной окружности радиусом r с центром в точке A — вершине угла, образованного зеркалами. Из рисунка видно, что интерференционное поле на экране ограничено точками B_1 и B_2 . Например, B_2 является крайней нижней точкой, в которую еще приходит свет после отражения от верхнего зеркала. Ее

можно найти, если провести прямую через изображение источника S_1 в верхнем зеркале и точку A . Аналогично находится точка B_1 .

Теперь становится очевидным, что число интерференционных полос будет конечным, и для его нахождения нужно разделить размер области интерференции B_1B_2 на расстояние между соседними полосами, поскольку, как мы увидим ниже, эти полосы расположены приблизительно на одинаковом расстоянии друг от друга.

Если экран расположен так, как показано на рисунке, т. е. параллельно линии S_1S_2 , соединяющей изображения источника в зеркалах, то $B_1B_2 = 2a \operatorname{tg} \alpha$. Учитывая малость угла α между зеркалами, можно приближенно написать $B_1B_2 \approx 2a\alpha$.

Для нахождения расстояния между соседними интерференционными полосами воспользуемся вспомогательным рисунком б, где P — произвольная точка интерференционного поля. Разность хода Δ лучей, приходящих в P из S_1 и S_2 , равна

$$\Delta = l_2 - l_1 \approx S_1S_2 \cdot \theta \approx S_1S_2 \frac{x}{a+r} \approx S_1S_2 \frac{x}{a}. \quad (1)$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $r \ll a$, ибо при таком условии обычно и производится наблюдение интерференционной картины. Найдем расстояние δ между двумя соседними максимумами. Так как для n -го максимума разность хода $\Delta_n = n\lambda$, то с помощью (1) находим $x_n = an\lambda/S_1S_2$. Теперь легко видеть, что

$$\delta = x_{n+1} - x_n = a\lambda/S_1S_2,$$

т. е. расстояние между двумя соседними максимумами постоянно по всему интерференционному полю. Поэтому полное число полос N , уместяющихся на интерференционном поле, равно

$$N = B_1B_2/\delta = 2a\alpha S_1S_2/\lambda = 4a^2r/\lambda.$$

В последнем равенстве использовано соотношение $S_1S_2 \approx 2ra$, справедливость которого очевидна из рисунка а.

А теперь, опираясь на приведенное решение, попробуйте уяснить себе, почему наблюдение интерференционной картины обычно производится при условии $r \ll a$.

ЗАДАЧА 6

Одной из важнейших астрономических задач является определение углового расстояния двойных звезд, т. е. того угла, под которым видны эти звезды с Земли. Если звезды находятся на очень маленьком угловом расстоянии θ друг от друга, то даже с помощью самых совершенных телескопов эту задачу решить не удастся, так как в фокальной плоскости телескопа изображения этих звезд размыты вследствие явления дифракции и не могут быть разрешены. Угловое расстояние двойных звезд удастся определить с помощью звездного интерферометра Майкельсона, идею которого можно понять из рис. 1.

Основными элементами интерферометра являются непрозрачный экран A с двумя отверстиями, расстояние между которыми d можно

изменять, собирающая линза L , расположенная непосредственно за экраном A , и экран B , находящийся в фокальной плоскости линзы, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Изменяя расстояние d и наблюдая, как при этом меняется интерференционная картина, удастся определить угловой размер двойной звезды θ . Как это делается?

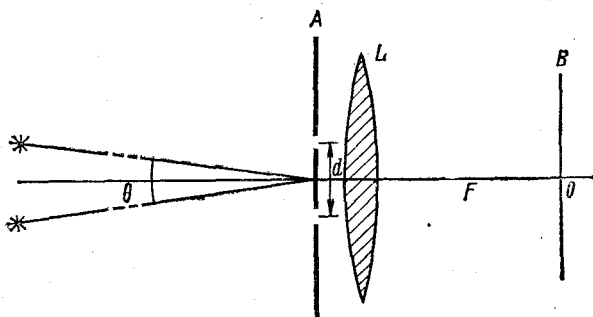


Рис. 1 к задаче 6.

РЕШЕНИЕ

Выясним прежде всего, какой минимальный угловой размер объекта может быть разрешен с помощью телескопа. Предел разрешения определяется дифракцией световых волн. Оказывается, что

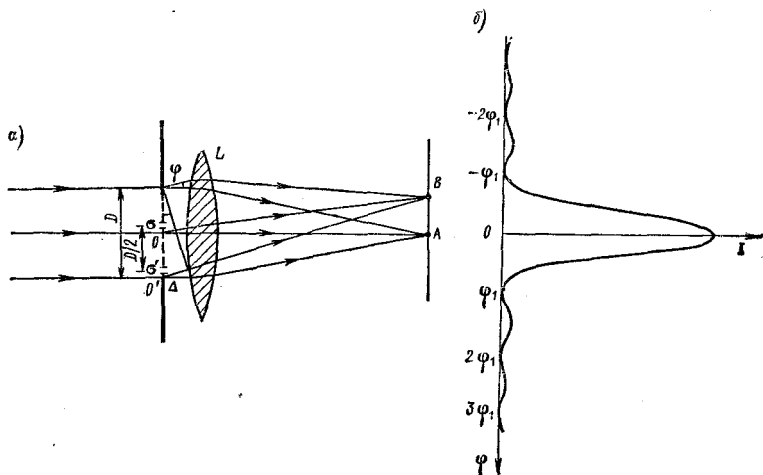


Рис. 2 к задаче 6.

даже в случае идеальной оптической системы, у которой устранены все aberrации, изображение не точно подобно наблюдаемому объекту. Как выглядит изображение бесконечно удаленного точечного источника в фокальной плоскости объектива телескопа? Чтобы получить представление об этом, рассмотрим для простоты дифракцию плос-

кой волны при прохождении ее через щель с параллельными прямыми краями (рис. 2, *a*). Поставим после щели собирающую линзу. Поскольку по принципу Гюйгенса каждая точка фронта световой волны в щели является источником новых колебаний, распространяющихся по всем направлениям, то для нахождения дифракционной картины в фокальной плоскости линзы нужно рассмотреть интерференцию различных параллельных между собой пучков лучей.

Все лучи, идущие параллельно первоначальному направлению, имеют одинаковую фазу, и поэтому в центре дифракционной картины (точка *A* на рис. 2, *a*) будет максимум освещенности. Рассмотрим лучи, составляющие угол φ с первоначальным направлением. Если разность хода крайних лучей Δ равна длине волны света λ , то в результате интерференции в точке *B* произойдет взаимное гашение колебаний. Действительно, для каждого элемента фронта волны σ в верхней половине щели (рис. 2, *a*) найдется отстоящий от него на $D/2$ такой же элемент σ' в нижней половине щели, и разность хода лучей от этих элементов равна $\lambda/2$. В результате интерференции эти лучи гасят друг друга. Соответствующий им угол дифракции φ_1 , как видно из рис. 2, *a*, равен

$$\varphi_1 = \frac{\Delta}{D} = \frac{\lambda}{D}.$$

Лучи, дифрагированные под углами от 0 до φ_1 , собираются в фокальной плоскости между точками *A* и *B* и лишь частично гасят друг друга. Если учесть интерференцию лучей, дифрагированных под углами, большими, чем φ_1 , то расчет показывает, что распределение интенсивности света на экране имеет вид, изображенный на рис. 2, *б*. Освещенность экрана в первом боковом максимуме составляет менее 5% от освещенности в главном максимуме. Это означает, что почти весь световой поток, прошедший через щель, распространяется в интервале углов от $-\varphi_1$ до φ_1 . Изображение бесконечно удаленного точечного источника в фокальной плоскости линзы оказывается размытым в полоску, перпендикулярную краям щели. Длина этой полоски

$$a = 2F\varphi_1 = 2 \frac{\lambda}{D} F, \quad (1)$$

где F — фокусное расстояние линзы.

Рассмотрение дифракции на круглом отверстии диаметром D показывает, что изображение бесконечно удаленного точечного источника размывается в круглое пятно, диаметр которого определяется той же формулой (1) с дополнительным числовым коэффициентом, близким к единице.

В телескопе роль круглого отверстия играет оправа объектива, и изображение звезды представляет собой создаваемую этой оправой дифракционную картину. Объективы большого диаметра дают изображение более высокого качества, так как, как видно из формулы (1), уменьшается влияние дифракции.

Если в телескоп наблюдают две звезды, находящиеся на малом угловом расстоянии друг от друга, то дифракционные картины, даваемые каждой звездой, налагаются одна на другую. Если при этом главные максимумы дифракционных картин сближаются на расстояние, меньшее радиуса центрального дифракционного пятна, то измерить точно расстояние между ними, а тем самым и угловое расстояние между звездами, невозможно.*

Итак, минимальное угловое расстояние θ между объектами, которое можно надежно измерить с помощью телескопа, равно

$$\theta \approx \varphi_1 \approx \lambda/D.$$

По этой формуле легко оценить, что на крупнейшем в мире телескопе-рефлекторе с диаметром зеркала $D = 6$ м, который строится в СССР, можно будет измерять угловые размеры, не меньшие $0,02''$.

Для измерения еще меньших угловых размеров и используется звездный интерферометр. Обратимся к принципиальной схеме интерферометра (см. рис. 1). Как меняется интерференционная картина на экране B при изменении расстояния d между отверстиями в непрозрачном экране A ? Рассмотрим сначала интерференционную картину, создаваемую одним бесконечно удаленным точечным источником S , находящимся на оптической оси прибора (рис. 3, а).

По принципу Гюйгенса отверстия в экране A можно рассматривать как два вторичных когерентных точечных источника S_1 и S_2 . На экране B будут наблюдаться чередующиеся темные и светлые полосы. Если источник S расположен на оптической оси, то фазы вторичных источников S_1 и S_2 совпадают, и в некоторой точке на экране B будет находиться светлая или темная полоса в зависимости от того, будет ли разность хода лучей Δ равна четному или нечетному числу полуволн. Если источник S смещен с оптической оси прибора на угол θ_1 , то создаваемая им интерференционная картина окажется сдвинутой, поскольку между вторичными источниками имеется разность фаз, обусловленная разностью хода лучей Δ_1 от источника S до отверстий в экране A (рис. 3, б):

$$\Delta_1 = d\theta_1. \quad (2)$$

При наблюдении двойной звезды (два некогерентных точечных источника) на экране B будут налагаться две независимые интерференционные картины, создаваемые каждой звездой, и освещенность в любой точке экрана будет равна сумме освещенностей от каждой интерференционной картины. Как будет выглядеть эта суммарная интерференционная картина? Она будет отчетливой, если светлые полосы одной картины приходятся на светлые полосы другой, и исчезнет совсем, если светлые полосы одной совпадут с темными по-

* Приведенное условие разрешения налагающихся дифракционных картин представляет собой так называемый критерий Релея. Отметим, что современные методы обработки экспериментальных результатов позволяют разрешать дифракционные картины, для которых критерий Релея, строго говоря, не выполняется. Однако для ответа на поставленный в задаче вопрос это не принципиально.

лосами другой. (Предполагается, что звезды имеют одинаковую яркость). Теперь уже легко ответить на вопрос, как будет меняться интерференционная картина при изменении расстояния между от-

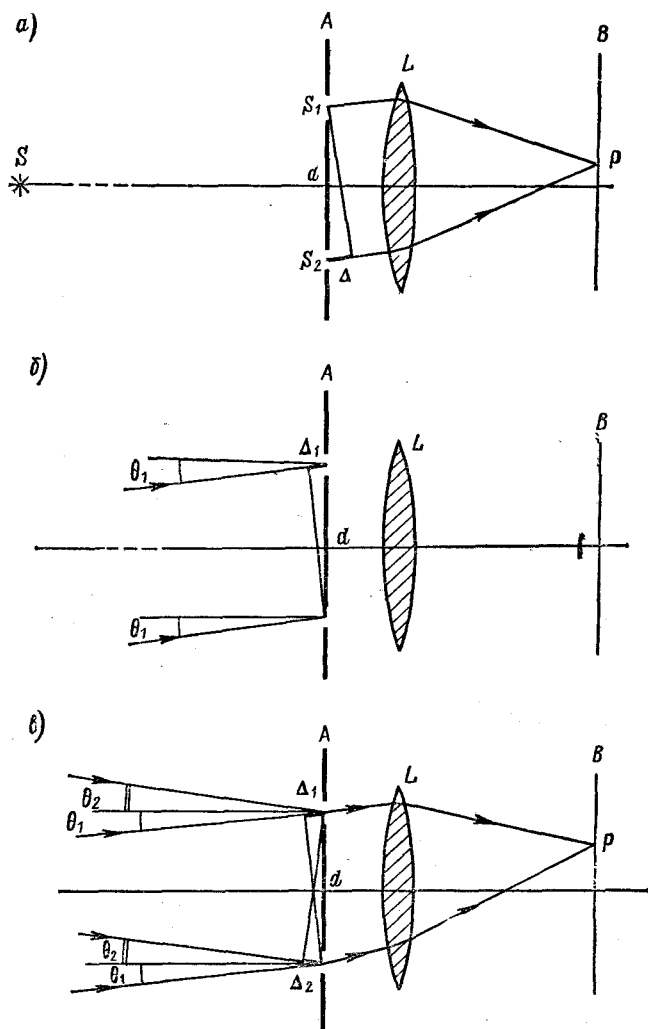


Рис. 3 к задаче 6.

верстиями в экране A . Если отверстия расположены очень близко друг к другу, то, как видно из формулы (2), фазы вторичных источников S_1 и S_2 будут практически совпадать друг с другом как для одной, так и для другой звезды. Интерференционная картина будет отчетливой. Если увеличивать расстояние между отверстиями, то интерференционные картины от разных звезд будут смещаться друг от

носителем друга, и при некотором расстоянии d_0 светлые полосы одной картины совпадут с темными полосами другой: интерференционная картина исчезнет. Пусть в некоторой точке P (рис. 3, в) находится светлая полоса одной интерференционной картины и темная — другой. Это означает, что световые колебания от одной звезды приходят в точку P в фазе, от другой — в противофазе. Поскольку разность хода лучей от вторичных источников S_1 и S_2 до точки P одинакова для обеих интерференционных картин, нетрудно сообразить, что наложение светлой полосы на темную имеет место при выполнении условия

$$\Delta_1 + \Delta_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

где k — любое целое число. С помощью формулы (2) условие полного исчезновения интерференционной картины (3) можно записать в виде

$$d_k (\theta_1 + \theta_2) = d_k \theta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Итак, при увеличении расстояния d между отверстиями первое исчезновение интерференционной картины происходит при

$$d = d_0 = \frac{\lambda}{2\theta}. \quad (4)$$

При дальнейшем увеличении d интерференционные полосы появляются снова, затем снова исчезают и т. д.

Измерив расстояние между отверстиями интерферометра d_0 , при котором впервые исчезает интерференционная картина, мы получаем возможность с помощью формулы (4) вычислить угловой размер двойной звезды.

Оценим, какой минимальный угловой размер двойной звезды можно измерить с помощью интерферометра на базе шестиметрового телескопа: $\theta_{\min} = \frac{\lambda}{2D} \approx 0,01''$ при $\lambda = 5500 \text{ \AA}$.

А теперь подумайте, можно ли небольшим изменением конструкции интерферометра получить еще большее угловое разрешение на том же телескопе.

ЗАДАЧА 7

На неподвижное идеальное плоское зеркало массой m нормально к его поверхности падает плоская световая волна. Под действием силы светового давления зеркало приходит в движение. Определить конечную скорость зеркала и энергию отраженной от него волны, если энергия падающей волны равна W_0 .

РЕШЕНИЕ

На протяжении всей книги мы настойчиво пропагандировали мысль о том, что очень многие физические задачи можно решить, совершенно не вникая в детали происходящих физических явлений. Для ответа на многие вопросы достаточно только «схватить суть»

рассматриваемых явлений и применить подходящие фундаментальные законы сохранения. Так и в этой задаче. Точное динамическое решение здесь сопряжено с большими трудностями. В самом деле, энергия отраженной от зеркала волны зависит от того, как движется зеркало, а закон движения зеркала определяется его взаимодействием со световой волной. Однако совершенно ясно, что независимо от механизма взаимодействия электромагнитной волны с зеркалом должны выполняться законы сохранения энергии и импульса, поскольку рассматриваемая система — зеркало и световая волна — является замкнутой. Использование этих законов дает возможность без труда решить эту задачу даже с учетом релятивистских эффектов, когда становится существенной зависимость массы движущегося тела от его скорости.

Напомним, что в теории относительности зависимость массы движущегося тела от его скорости v имеет вид

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1)$$

где m_0 — масса покоя тела, c — скорость света.

Энергия тела E связана с его массой m соотношением

$$E = mc^2, \quad (2)$$

а энергия электромагнитного поля W связана с его импульсом p соотношением

$$p = \frac{W}{c}. \quad (3)$$

Приступим к решению задачи. Энергия падающей на зеркало световой волны W_0 , энергию отраженной волны обозначим через W_1 . Вначале зеркало покоится. Тогда закон сохранения энергии с учетом формул (1) и (2) можно записать в виде

$$W_0 + m_0 c^2 = W_1 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4)$$

Закон сохранения импульса с учетом выражения (3) принимает вид

$$\frac{W_0}{c} = - \frac{W_1}{c} + \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5)$$

Знак минус в первом члене правой части формулы (5) соответствует тому, что отраженная от зеркала волна движется в обратном направлении. Для исключения энергии отраженной волны W_1 умножим обе части равенства (5) на c и сложим почленно с (4). Тогда получим

$$2W_0 + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(1 + \frac{v}{c} \right). \quad (6)$$

Простыми преобразованиями выражение (6) можно привести к виду

$$\frac{c+v}{c-v} = \left(1 + \frac{2W_0}{m_0 c^2}\right)^2. \quad (7)$$

Отсюда получим выражение для конечной скорости зеркала v :

$$v = c \frac{\left(1 + \frac{2W_0}{m_0 c^2}\right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{2W_0}{m_0 c^2}\right)^2 + 1}. \quad (8)$$

Теперь найдем энергию отраженной волны W_1 . Для этого вычтем из выражения (4) равенство (5), умноженное на c :

$$m_0 c^2 = 2W_1 + m_0 c^2 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}},$$

откуда с помощью (7) легко находим энергию отраженной волны W_1 :

$$W_1 = \frac{W_0}{1 + \frac{2W_0}{m_0 c^2}}. \quad (9)$$

Интересно отметить, что энергия отраженной волны не может превышать половины энергии покоя зеркала, какой бы большой ни была энергия падающей волны. Действительно, пренебрегая единицей в знаменателе (9), мы только увеличим правую часть, поэтому

$$W_1 < \frac{W_0}{\frac{2W_0}{m_0 c^2}} = \frac{m_0 c^2}{2}.$$

Таким образом, чем больше энергия падающей волны, тем большая часть этой энергии передается зеркалу. При $W_0 \gg m_0 c^2$ практически вся энергия волны передается зеркалу. Отражается только малая часть энергии, равная, как мы только что видели, $m_0 c^2/2$. Подчеркнем еще раз, что этот результат мы получили, совершенно не вникая в механизм взаимодействия электромагнитной волны с веществом, из которого сделано зеркало!

Интересно рассмотреть другой предельный случай, когда энергия падающей волны много меньше энергии покоя зеркала: $W_0 \ll \ll m_0 c^2$. В этом нерелятивистском случае формулы (8) и (9) можно упростить. Прodelайте это сами и попытайтесь истолковать полученные результаты.

ЗАДАЧА 8

Читатель наверняка замечал, как меняется высота звука паровозного гудка, когда поезд проносится мимо. Высокий тон гудка приближающегося поезда становится заметно более низким, как только паровоз промчится мимо и начинает удаляться. Такое изменение частоты воспринимаемого сигнала при движении источника

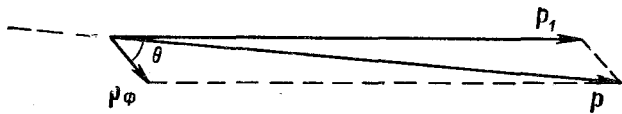
звука (или приемника) носит название явления Допплера. Это явление имеет место и в оптике: движущийся атом излучает свет другой частоты по сравнению с неподвижным. Оказывается, что это типично волновое явление может быть правильно объяснено с точки зрения представления о свете как о совокупности световых квантов — фотонов. Опираясь на эти представления, покажите, что при медленном движении излучающего атома (скорость атома v много меньше скорости света c) относительное изменение частоты излучаемого им света $\Delta\nu/\nu$ дается соотношением

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c} \cos \theta,$$

где θ — угол между направлением движения атома и направлением испускаемого фотона.

РЕШЕНИЕ

Поскольку мы ничего не знаем о механизме излучения света атомами, нам остается только попробовать применить к акту испускания фотона движущимся атомом законы сохранения энергии и



К задаче 8.

импульса. «Закрепленный» неподвижный атом испускает фотон с энергией $h\nu$ при переходе атома из одного стационарного состояния в другое. Разность энергий этих стационарных состояний не зависит от того, покоится атом или движется.

При испускании фотона свободно движущимся атомом импульс атома изменяется, поскольку испущенный фотон обладает импульсом. Следовательно, кинетическая энергия атома также меняется, и энергия фотона $h\nu'$, испущенного движущимся атомом, отличается от $h\nu$ вследствие изменения кинетической энергии атома.

На основании закона сохранения энергии

$$h\nu' - h\nu = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m}, \quad (1)$$

где p — импульс атома массой m до испускания фотона, p_1 — после испускания.

Начальный и конечный импульсы атома можно связать с импульсом испускаемого фотона p_ϕ с помощью закона сохранения импульса (рисунок):

$$p = p_1 + p_\phi. \quad (2)$$

Перенос p_ϕ в равенстве (2) в левую часть, возводя полученное равенство в квадрат и учитывая, что импульс фотона крайне мал

по сравнению с импульсом излучающего атома, получаем

$$p^2 - 2pp_\phi \cos \theta \approx p_1^2. \quad (3)$$

С помощью (3) соотношение (1) можно переписать в виде

$$hv' - hv = \frac{p}{m} p_\phi \cos \theta. \quad (4)$$

Как записать выражение для импульса фотона p_ϕ ? Так как импульс электромагнитного поля связан с энергией поля W соотношением $W = pc$, а энергия испущенного фотона равна hv' , то импульс этого фотона p_ϕ равен

$$p_\phi = hv'/c. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и учитывая, что p/m есть скорость движения v излучающего атома, находим

$$v' - v = v' \frac{v}{c} \cos \theta,$$

откуда

$$v' = \frac{v}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx v \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) \quad (6)$$

с точностью до членов порядка v/c . Из формулы (6) следует приведенное в условии соотношение

$$\frac{\Delta v}{v} \doteq \frac{v}{c} \cos \theta.$$

Явление Допплера приводит к уширению спектральных линий излучения атомов газа, так как атомы газа движутся с различными скоростями. Поскольку средние скорости атомов газа зависят от температуры

$$\langle v \rangle \sim \sqrt{kT/m},$$

то ширина доплеровского контура спектральной линии пропорциональна корню из абсолютной температуры газа.

Явление Допплера используется в астрофизике для определения скорости движения звезд. По сдвигу спектральных линий какого-либо химического элемента в спектре звезды по сравнению с положением тех же линий в спектре земного происхождения можно судить об относительной скорости сближения или удаления данной звезды и Земли.

Существует гипотеза, что красное смещение спектральных линий удаленных галактик также объясняется явлением Допплера и связано с расширением Вселенной.

ЗАДАЧА 9

Может ли свободный электрон излучать свет?

На первый взгляд кажется, что испускание фотона свободно движущимся электроном не противоречит законам сохранения энергии и импульса. Действительно, ничто, казалось бы, не мешает электрону, движущемуся с некоторой скоростью v , уменьшить свою скорость, передав испускаемому фотону часть своего импульса и кинетической энергии. Однако, записав законы сохранения энергии и импульса для этого процесса, мы увидим, что одновременно удовлетворить этим законам невозможно. Проще всего в этом убедиться, воспользовавшись эквивалентностью различных инерциальных систем отсчета: во всех инерциальных системах отсчета все физические законы одинаковы. Поэтому достаточно доказать невозможность излучения фотона свободным электроном в какой-нибудь одной инерциальной системе отсчета.

Рассмотрим систему отсчета, в которой электрон неподвижен. Энергия электрона в этой системе до излучения фотона

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (1)$$

После излучения фотона вследствие закона сохранения импульса электрон приобретает некоторую скорость v , и энергия системы электрон плюс фотон будет

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + h\nu, \quad (2)$$

где $h\nu$ — энергия испущенного фотона.

Сравнивая формулы (1) и (2), видим, что удовлетворить закону энергии невозможно, ибо E всегда больше E_0 .

Вдумавшись в приведенные рассуждения, легко сообразить, что свободный электрон не может не только излучать, но и поглощать свет. Чтобы в этом убедиться, достаточно просто прочитать приведенные формулы в обратном порядке: соотношение (2) дает энергию системы электрон плюс фотон до поглощения в системе отсчета, где суммарный импульс электрона и фотона равен нулю, а соотношение (1) — энергию после поглощения фотона.

Над полученным результатом стоит призадуматься. Ведь известно, что электромагнитное поле действует на электрон с некоторой силой, и, следовательно, электрон в поле должен изменять свою скорость!

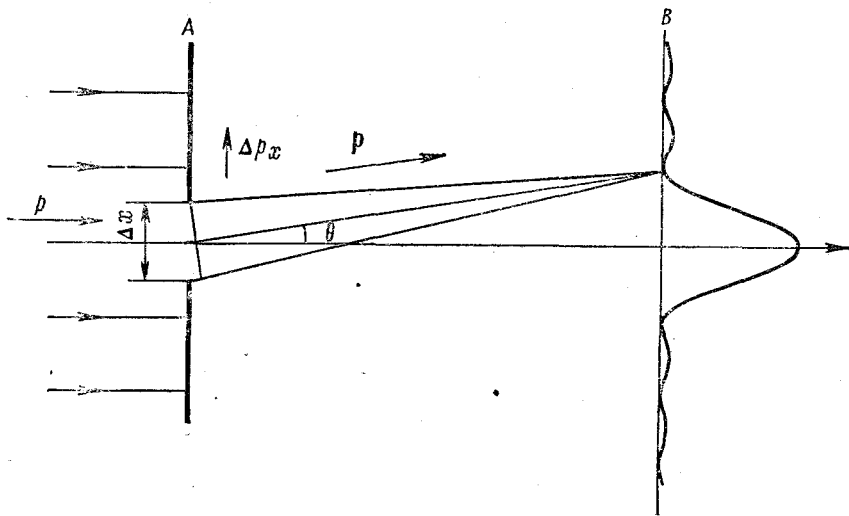
Однако, как мы выяснили, поглощение и излучение фотонов при этом происходить не может. Итак, единственным возможным результатом взаимодействия электромагнитной волны со свободным электроном является рассеяние фотонов. И это можно увидеть только из законов сохранения энергии и импульса, не вникая детально в механизм взаимодействия.

Разумеется, приведенные рассуждения справедливы только для элементарных частиц и неприменимы к сложным объектам, состоящим из нескольких элементарных частиц, например к атомам и молекулам. Свободно движущиеся атомы или молекулы могут излучать и поглощать!

Известно, что законы классической физики неприменимы к явлениям микромира. Возникает вопрос, каковы границы применимости классических представлений и пределы точности классического способа описания. Эти границы устанавливаются так называемыми соотношениями неопределенностей Гейзенберга. Одно из соотношений Гейзенберга связывает между собой неопределенности в значениях координаты частицы x и соответствующей проекции импульса p_x в один и тот же момент времени:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h.$$

Докажите это соотношение Гейзенберга для фотона, рассматривая дифракцию плоской световой волны на узкой щели.



К задаче 10.

РЕШЕНИЕ

Пусть на непрозрачный экран A со щелью шириной Δx падает слева плоская монохроматическая волна (рисунок). На удаленном экране B (на рисунке размер щели сильно преувеличен по сравнению с расстоянием между экранами) наблюдается дифракционная картина, распределение освещенности для которой показано на этом же рисунке. Почти весь дифрагированный свет приходит в область на экране B , ограниченную главным максимумом. Угловую ширину этого максимума легко вычислить. Направление на ближайший минимум характеризуется углом θ , определяемым из условия

$$\Delta x \sin \theta = \lambda \quad (1)$$

(см. задачу 6).

Рассмотрим теперь эту дифракционную картину с точки зрения представления о свете как о совокупности световых квантов — фотонов. Если фотоны проходят через щель в экране A поодиночке, то каждый фотон попадает в определенную точку на экране B . Предсказать, в какую именно точку попадет один отдельно взятый фотон, принципиально невозможно. Однако в совокупности большое число упавших на экран B фотонов дает дифракционную картину, показанную на рисунке. Проследим, как происходит движение фотона в этом приборе. До щели в экране A распространяется плоская монохроматическая волна, т. е. нам точно известен импульс фотонов

$$p = h\nu/c = h/\lambda, \quad (2)$$

направленный по оси z . Составляющая импульса фотона по оси x равна нулю, т. е. известна точно, но зато совершенно не определена x — координата фотона. При прохождении фотона через щель в экране A ширина щели Δx будет служить мерой неопределенности значения x — координаты фотона. В самом деле, факт появления фотона на экране B позволяет сделать лишь тот вывод, что фотон проник сквозь щель; в какой же именно точке щели это произошло, совершенно неизвестно. Далее, по корпускулярным представлениям возникновение на экране дифракционной картины следует истолковать в том смысле, что каждый отдельно взятый фотон, пройдя через щель, отклоняется либо вверх, либо вниз. Но для этого фотон должен приобрести составляющую импульса Δp_x , перпендикулярную направлению первоначального движения. Величина полного импульса фотона p , как видно из формулы (2), при этом не меняется, ибо остается неизменной длина волны.

Поскольку большая часть фотонов попадает в область главного максимума, но принципиально невозможно предсказать, куда попадет каждый отдельный фотон, то из рисунка ясно, что мера неопределенности x — компоненты импульса Δp_x после прохождения через щель есть

$$\Delta p_x \gtrsim p \sin \theta. \quad (3)$$

Перемножая почленно выражения (1) и (3) и учитывая соотношение между импульсом фотона и длиной волны (2), получаем

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h. \quad (4)$$

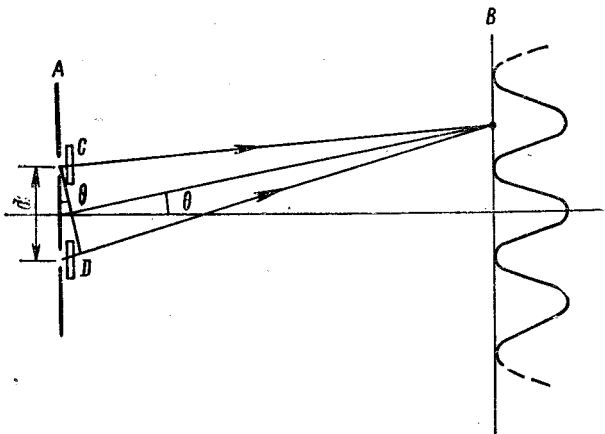
Соотношения неопределенностей Гейзенберга являются одним из фундаментальных законов природы. Они справедливы не только для квантов света (фотонов), но и вообще для любых материальных объектов — элементарных частиц, атомов, молекул и т. д. Справедливость соотношений неопределенностей, как и всех других фундаментальных законов природы, подтверждается всей совокупностью имеющихся экспериментальных фактов. Прделанный в этой задаче «вывод» соотношений неопределенностей представляет собой лишь иллюстрацию их справедливости для конкретного частного случая.

Величины Δx и Δp_x неправильно было бы понимать только как

неточности измерения величин x и p_x , поскольку самый термин «неточность» как бы предполагает, что существуют и «точные» значения x и p_x , но только они почему-то не могут быть измерены. На самом деле невозможность точного измерения есть следствие того, что частица по своей природе не имеет одновременно точного значения координаты и импульса; другими словами, эта невозможность есть следствие корпускулярно-волновой природы материальных микрообъектов.

ЗАДАЧА 11

Что же такое все-таки свет: частицы или волны? Хорошо известно, что некоторые оптические явления, например интерференция света, свидетельствуют в пользу волновых представлений; другие, напри-



К задаче 11.

мер фотоэффект, могут быть объяснены только с корпускулярной точки зрения. Попробуем придумать такой мысленный опыт, в котором свет одновременно проявлял бы и корпускулярные, и волновые свойства. Рассмотрим интерференцию при прохождении монохроматического света через экран с двумя маленькими отверстиями. Возникновение интерференционной картины на удаленном экране свидетельствует о проявлении волновых свойств. Можно заставить свет проявлять в этом опыте и корпускулярные свойства, если с помощью специальных счетчиков определять, через какое именно отверстие в экране проходит каждый фотон. Выяснить, можно ли наблюдать интерференционную картину, если одновременно фиксировать, через какое отверстие проходит каждый фотон.

РЕШЕНИЕ

Схема предлагаемого опыта показана на рисунке, где A — непрозрачный экран с двумя отверстиями, расположенными на расстоянии d друг от друга; C и D — счетчики фотонов; B — экран, на котором наблюдают интерференционную картину.

Если с помощью счетчиков, установленных непосредственно вблизи отверстий в экране A , мы будем определять, через какое именно отверстие проходит каждый фотон, то тем самым мы действительно заставим свет проявлять корпускулярные свойства, ибо только для частицы имеет смысл утверждение, что она прошла через определенное отверстие, для волны вопрос о том, через какое отверстие она прошла (разумеется, если открыты оба), вообще лишен смысла.

Для того чтобы уверенно судить о том, через какое отверстие шел фотон, нужно с помощью счетчиков определять его координату с достаточной точностью, так чтобы ошибка Δx в определении координаты фотона была бы меньше половины расстояния между отверстиями:

$$\Delta x < d/2. \quad (1)$$

Однако не следует стремиться определять x -координату фотона слишком точно, так как в силу соотношения неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim h \quad (2)$$

это приведет к слишком большой неопределенности в значении x -компоненты импульса фотона, и интерференционная картина на экране B заведомо размажется, т. е. нам тогда не удастся наблюдать в этом опыте проявление волновых свойств света.

Итак, для достижения поставленной цели — наблюдения одновременного проявления светом корпускулярных и волновых свойств — необходимо определять координату фотона с максимальной неопределенностью, совместимой с выражением (1), т. е. с возможностью установления, через какое отверстие прошел фотон, надеясь при этом, что вносимая при измерении координаты неопределенность в значении импульса Δp_x еще не приведет к полному размазыванию интерференционной картины. Выясним, совместимы ли эти условия. Какова максимально допустимая неопределенность в значении импульса Δp_x , которая еще не приводит к полному уничтожению интерференционной картины? Интерференционная картина от двух отверстий, наблюдаемая на экране B , состоит из чередующихся светлых и темных полос. Угловое расстояние $\Delta \theta$ между направлениями на соседние максимум и минимум определяются из условия $d \Delta \theta = \lambda/2$, поскольку максимумы расположены в тех точках экрана B , разность хода до которых от отверстий в экране A равна целому числу длин волн. Неопределенность в значении импульса Δp_x можно выразить через неопределенность направления импульса $\Delta \theta_1$: $\Delta p_x = p \Delta \theta_1$.

Интерференционная картина, очевидно, не будет полностью размыта, только если $\Delta \theta_1 < \Delta \theta$, т. е.

$$\frac{\Delta p_x}{p} < \frac{\lambda}{2d}. \quad (3)$$

Используя соотношение между импульсом фотона и длиной волны $\lambda = h/p$, можно переписать неравенство (3) в виде

$$2d \Delta p_x < h. \quad (4)$$

Итак, для проявления волновых свойств света в этом опыте должно выполняться неравенство (4), а для проявления корпускулярных свойств фотонов — неравенство (1). Объединяя эти неравенства, получаем условие одновременного проявления светом корпускулярных и волновых свойств

$$\Delta x \Delta p_x < h/4.$$

Но это условие противоречит соотношению неопределенностей Гейзенберга (2) и потому не может быть выполнено.

Так что же такое свет: частицы или волны? Ни то и ни другое. Мы можем заставить материальный объект, который мы называем светом, проявлять либо корпускулярные, либо волновые свойства. Но принципиально невозможно осуществить эксперимент, в котором свет одновременно проявлял бы и те, и другие свойства. Так в рассматриваемом опыте мы можем, конечно, определить, через какое отверстие проходит каждый фотон, т. е. наблюдать проявление корпускулярных свойств света, но при этом интерференционная картина на экране *B* пропадет. Наблюдать интерференционную картину, т. е. проявление волновых свойств света, можно только в том случае, когда мы не пытаемся одновременно определить, через какое отверстие проходит фотон.

ЗАДАЧА 12

Соотношения неопределенностей Гейзенберга, обсуждавшиеся в предыдущих задачах, устанавливают пределы применимости классического способа описания материальных объектов. Где же фактически проходит граница применимости представлений классической физики? Совершенно очевидно, что для макроскопических объектов: например, планет, искусственных спутников, артиллерийских снарядов — классическое описание является совершенно правильным. Легко убедиться, что при любой достижимой точности измерений координат и импульсов этих объектов соотношения неопределенностей выполняются с огромным запасом, и, следовательно, квантовые эффекты никак не проявляются. А можно ли применять законы классической физики к электронам, движущимся 1) в кинескопе телевизора, 2) в атоме?

РЕШЕНИЕ

1) Рассмотрим пучок электронов в кинескопе телевизора. В современном телевизоре ускоряющее напряжение $U \approx 15$ кВ. Разогнанный такой разностью потенциалов электрон обладает импульсом $p = \sqrt{2meU}$. Подставляя в эту формулу значение массы электрона m , его заряда e и ускоряющей разности потенциалов, находим в системе СГС $p = 6,6 \cdot 10^{-18}$ г·см/с. Этот импульс направлен вдоль оси трубки. Диаметр пучка, формируемого в современных телевизорах, не бывает меньше $d = 10^{-3}$ см (для телевизора меньший диаметр просто не нужен). Формируя пучок, мы тем самым фиксируем координату электрона в перпендикулярном к оси пучка направлении

с точностью Δx , равной диаметру пучка d . В силу соотношения неопределенностей при этом электрону сообщается неконтролируемый импульс Δp , перпендикулярный оси пучка:

$$\Delta p \cong h/d = 6,6 \cdot 10^{-24} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

Связанная с этим неопределенность в направлении движения электрона $\Delta \theta$ определяется отношением

$$\Delta \theta = \Delta p/p = 10^{-6} \text{ рад}.$$

Поскольку длина пути электрона в кинескопе не превышает $l \sim 1$ м, то неконтролируемое смещение ΔS электрона на экране, вызываемое квантовыми эффектами, т. е. неопределенностью в направлении движения электрона $\Delta \theta$, не превосходит $\Delta S \leq l \Delta \theta = 10^{-4}$ см, т. е. меньше диаметра пучка. Итак, движение электронов в кинескопе телевизора можно рассматривать с помощью законов классической физики.

2) Рассмотрим теперь электрон в атоме водорода. Хорошо известно, что размер атома водорода d равен приблизительно 10^{-8} см. Классическое описание поведения электрона в атоме предполагает, что ему можно приписать определенную траекторию. В планетарной модели атома электрон вращается вокруг ядра. Диаметр его орбиты можно считать равным размеру атома. В классической механике условие его движения по круговой орбите радиусом r — второй закон Ньютона — имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}.$$

Отсюда получаем величину импульса электрона $p = mv$:

$$p = e \sqrt{m/r} \approx 2 \cdot 10^{-20} \text{ г} \cdot \text{см/с}. \quad (1)$$

Однако с помощью соотношения неопределенностей убеждаемся, что если электрон находится внутри атома, т. е. неопределенность в значении его координаты Δx не превосходит размеров атома d , то соответствующая неопределенность в значении импульса Δp оказывается больше, чем сам импульс, вычисляемый по формуле (1):

$$\Delta p \sim \frac{h}{\Delta x} \sim \frac{h}{d} \approx 6,6 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

Итак, для электрона в атоме классическое описание непригодно. Но соотношения неопределенностей отнюдь не ставят каких-либо границ для более совершенных способов описания, основанных на законах квантовой механики.