Владимир Григорьевич Шавров,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий лабораторией
магнитных явлений в микроэлектронике
Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН

Владимир Игнатьевич Щеглов,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института радиотехники и электроники
имени В. А. Котельникова РАН

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС
В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

В. Г. ШАВРОВ
В. И. ЩЕГЛОВ

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

В. Г. ШАВРОВ
В. И. ЩЕГЛОВ

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2018

УДК 537.874; 537.624
ББК 22.33
Ш 14

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 14-22-00279

Шавров В. Г., Щеглов В. И. **Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. — 568 с. — ISBN 978-5-9221-1806-4.

Монография посвящена рассмотрению явления ферромагнитного резонанса (ФМР) в анизотропных магнитных средах, находящихся в условиях ориентационного перехода по намагниченности. Получен тензор магнитной восприимчивости в средах с одноосной и кубической анизотропиями при различных ориентациях оси анизотропии и кристаллической ячейки. Рассмотрены свойства композиционной среды, представляющей собой совокупность магнитных частиц с произвольной ориентацией осей анизотропии. Приведены результаты исследования прецессии положения равновесия намагниченности, имеющей место в условиях ориентационного перехода. Рассмотрены возможности дальнейших экспериментальных исследований и технических приложений описанных явлений.

Монография предназначена специалистам, работающим в области физики магнитных явлений, инженерам и конструкторам СВЧ-аппаратуры, а также студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1806-4

© ФИЗМАТЛИТ, 2018
© В. Г. Шавров, В. И. Щеглов, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список наиболее часто используемых сокращений 12

Введение 13

Глава 1. **Общие свойства ферромагнитного резонанса и ориентационных переходов (обзор литературы)** 17

1.1. Ферромагнитный резонанс. 17

1.1.1. Общее уравнение динамики намагниченности 17

1.1.2. Ферромагнитный резонанс в анизотропной среде 18

1.1.3. Частотная щель в спектре ферромагнитного резонанса . . 20

1.1.4. Измерение параметров магнитных материалов 21

1.1.5. Композиционные среды на основе магнетиков 21

1.1.6. Некоторые особенности нелинейного ферромагнитного резонанса 23

1.2. Ориентационный и фазовый переходы 24

1.2.1. Соотношение понятий ориентационного и фазового переходов 24

1.2.2. Фазовые переходы первого и второго рода 25

1.2.3. Свойства ориентационных переходов 27

1.3. Доменная структура 27

1.3.1. Физика доменных структур 28

1.3.2. Доменная структура при ориентационных переходах 31

Выводы по главе 1 34

Глава 2. **Математический аппарат, используемый при расчете ферромагнитного резонанса** 37

2.1. Плотности энергии и эффективные поля 37

2.1.1. Полная плотность энергии магнитного кристалла 37

2.1.2. Эффективные поля 39

2.2. Динамическая восприимчивость магнитной среды 40

2.2.1. Уравнение Ландау–Лифшица и процедура линеаризации 41

2.2.2. Тензор магнитной восприимчивости 42

2.2.3. Тензор магнитной проницаемости 43

2.2.4. Различные виды записи компонент тензора восприимчивости 44

2.2.5. Частотная зависимость и резонансная частота 45

2.2.6. Два определения резонансной частоты 47

2.2.7. Два вида записи тензора восприимчивости 49

2.2.8. Замечание о зависимости компонент тензора от поля . . . 50

2.2.9. Полные уравнения движения для намагниченности 52

2.3. Метод Смита–Сула 55

2.3.1. Уравнения движения намагниченности в декартовой системе координат . . . 55
2.3.2. Переход к сферической системе координат . . . 56
2.3.3. Сохранение длины вектора намагниченности . . . 57
2.3.4. Линеаризация уравнений движения . . . 60
2.3.5. Решение уравнений движения. Формула Смита–Сула . . . 61
2.4. Методы решения уравнений высоких степеней . . . 61
2.4.1. Уравнения третьей степени . . . 63
2.4.2. Уравнения четвертой степени . . . 71
Выводы по главе 2 . . . 77

Глава 3. **Математический аппарат, используемый при работе с кристаллами различной симметрии** . . . 80
3.1. Симметрия кристаллической решетки . . . 80
3.1.1. Типы симметрии решетки . . . 81
3.1.2. Магнитная анизотропия . . . 86
3.1.3. Анизотропия типа «легкая ось» и «легкая плоскость» . . . 87
3.1.4. Другие виды магнитной анизотропии . . . 88
3.1.5. Особенности структуры реальных материалов . . . 89
3.2. Основная техника работы с анизотропией . . . 93
3.2.1. Определение матрицы перехода . . . 94
3.2.2. Пример прямого преобразования . . . 95
3.2.3. Пример обратного преобразования . . . 96
3.2.4. Матрица перехода в общем виде . . . 97
3.2.5. Переход из одной декартовой системы координат в другую 97
3.2.6. Матрицы прямая и обратная . . . 99
3.3. Общие правила решения задач о переходе между различными системами координат . . . 102
3.3.1. Вспомогательные геометрические задачи, используемые для получения матрицы преобразования координат . . . 103
3.4. Матрицы преобразования в случае одноосной анизотропии . . . 107
3.4.1. Общая геометрия задачи при произвольной ориентации оси анизотропии . . . 107
3.4.2. Общая структура матрицы прямого перехода . . . 108
3.4.3. Координаты основных точек . . . 108
3.4.4. Определение угла поворота вокруг оси анизотропии . . . 110
3.4.5. Получение направляющих векторов повернутой системы координат через угол поворота вокруг оси анизотропии . . 112
3.4.6. Набор единичных векторов повернутой системы координат 115
3.4.7. Полный вид матрицы прямого перехода . . . 115
3.4.8. Матрица обратного перехода . . . 116
3.4.9. Матрицы перехода в сферической системе координат . . . 117
3.5. Кубическая анизотропия . . . 119
3.5.1. Обозначение осей кубической ячейки . . . 119
3.5.2. Кристаллографические направления . . . 120
3.5.3. Кристаллографические плоскости . . . 121
3.5.4. Схема кубической ячейки . . . 123

3.5.5. Различные ориентации кубической ячейки относительно плоскости магнитной пластины 124
3.6. Матрицы преобразования в случае кубической анизотропии . . . 128
3.6.1. Матрица преобразования для оси [001] 128
3.6.2. Матрица преобразования для оси [011] 131
3.6.3. Матрица преобразования для оси [111] 139
3.6.4. Многообразие вариантов получения матриц преобразования 147
Выводы по главе 3 147

Глава 4. **Плотность энергии магнитной анизотропии** 149
4.1. Операции симметрии 149
4.1.1. Отражение в координатных плоскостях 149
4.1.2. Поворот на некоторые характерные углы 151
4.1.3. Поворот на произвольный угол 154
4.1.4. Поворот в случаях тригональной и гексагональной симметрии 155
4.2. Плотность энергии одноосной магнитной анизотропии 156
4.2.1. Анизотропия второго порядка по намагниченности 157
4.2.2. Анизотропия типа «легкая ось» и «легкая плоскость» . . . 159
4.2.3. Одноосная анизотропия высоких порядков 160
4.2.4. Плотность энергии одноосной магнитной анизотропии с произвольным направлением оси 160
4.2.5. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной одноосной анизотропии с произвольным направлением оси . . 165
4.2.6. Другой вид выражения для плотности энергии одноосной магнитной анизотропии с произвольным направлением оси 165
4.3. Плотность энергии кубической магнитной анизотропии 168
4.3.1. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [001] 168
4.3.2. Поле кубической анизотропии 171
4.3.3. Особенности кубической анизотропии железоиттриевого граната 172
4.3.4. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [001] в сферической системе координат 173
4.3.5. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [001] 174
4.3.6. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [011] 175
4.3.7. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [011] 178
4.3.8. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [111] 179
4.3.9. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [111] 181
4.3.10. Плотность энергии при некоторых других углах поворота относительно оси [111] 182

4.4. Плотности энергии, эффективные поля и их производные по времени для кубической магнитной анизотропии при различных ориентациях кубической ячейки . . . 183
4.4.1. Ориентация [001] (ребро куба) . . . 184
4.4.2. Ориентация [011] (диагональ грани куба) . . . 184
4.4.3. Ориентация [111] (пространственная диагональ куба) . . . 185
4.5. Физический смысл различных видов выражений для плотности энергии магнитной анизотропии . . . 185
4.5.1. Анизотропия одноосная . . . 185
4.5.2. Анизотропия формы (размагничивания) . . . 188
4.5.3. Анизотропия внешнего поля . . . 189
4.5.4. Анизотропия кубическая . . . 189
4.6. Некоторые другие виды анизотропии. . . . 191
4.6.1. Анизотропия высоких порядков . . . 191
4.6.2. Ромбическая анизотропия . . . 192
4.6.3. Наклонная одноосная анизотропия . . . 193
Выводы по главе 4 . . . 195

Глава 5. **Ориентационный переход в магнитной среде** . . . 198
5.1. Общая идеология ориентационного перехода . . . 198
5.1.1. Простой ориентационный переход . . . 202
5.1.2. Затянутый ориентационный переход . . . 207
5.1.3. Размазывание фазового перехода . . . 212
5.1.4. Основная схема метода установления . . . 213
5.1.5. Сходимость метода установления . . . 214
5.1.6. Метод динамического установления . . . 216
5.2. Ориентационный переход в пленках смешанных ферритов-гранатов . . . 217
5.2.1. Отклонение оси легкого намагничивания от нормали к плоскости пленки . . . 217
5.2.2. Влияние наклона оси на насыщение пленок . . . 221
5.2.3. Общая ориентационная зависимость поля насыщения пленки . . . 225
5.3. Экспериментальное исследование пленок с наклоном оси анизотропии . . . 226
5.3.1. Поле анизотропии и период доменной структуры . . . 226
5.3.2. Ориентационные зависимости поля насыщения . . . 229
Выводы по главе 5 . . . 232

Глава 6. **Ферромагнитный резонанс в пластине с одноосной и кубической анизотропией**. . . . 235
6.1. Касательное намагничивание . . . 235
6.1.1. Плотность энергии . . . 235
6.1.2. Матрица преобразования при повороте вокруг оси [111] 241
6.1.3. Уравнения движения при поле, параллельном проекции оси [111] . . . 242
6.1.4. Два способа линеаризации полученных уравнений . . . 243

6.1.5. Конечный результат линеаризации и решение линеаризованных уравнений . . . 247
6.1.6. Решение задачи при поле, перпендикулярном проекции оси типа [111] . . . 249
6.1.7. Сравнение резонансных частот для рассмотренных ориентаций . . . 250
6.2. Нормальное намагничивание . . . 251
6.3. Свободный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе . . . 253
6.3.1. Преобразование вектора намагниченности при повороте координат . . . 254
6.3.2. Особенности условий ферромагнитного резонанса в полном интервале изменения поля . . . 256
6.3.3. Приложенное поле меньше поля анизотропии . . . 256
6.3.4. Приложенное поле больше поля анизотропии . . . 262
6.3.5. Произвольное значение приложенного поля . . . 263
6.4. Динамическая магнитная восприимчивость при вынужденном ферромагнитном резонансе в условиях ориентационного перехода. . . . 265
6.4.1. Общая геометрия задачи . . . 266
6.4.2. Приложенное поле меньше поля анизотропии . . . 267
6.4.3. Восприимчивость в системе, связанной с намагниченностью . . . 267
6.4.4. Восприимчивость в системе, связанной с полем . . . 270
6.4.5. Приложенное поле больше поля анизотропии . . . 274
Выводы по главе 6 . . . 276

Глава 7. **Ферромагнитный резонанс в пленках с наклоном оси легкого намагничивания** . . . 279
7.1. Общие положения расчета ферромагнитного резонанса в пленках с наклоном оси легкого намагничивания . . . 279
7.1.1. Общая методология расчета . . . 279
7.1.2. Общая геометрия задачи . . . 280
7.1.3. Введение сферических координат . . . 281
7.1.4. Плотности энергии различных видов . . . 282
7.2. Параллельно-перпендикулярная геометрия . . . 283
7.2.1. Эквивалентность двух выражений для плотности энергии 284
7.2.2. Два характерных варианта наклонной геометрии . . . 285
7.3. Вариант первый: ось легкого намагничивания лежит в плоскости изменения поля . . . 286
7.3.1. Равновесное положение намагниченности в отсутствие внешнего поля . . . 288
7.3.2. Равновесное положение намагниченности в присутствии внешнего поля . . . 290
7.3.3. Ориентационная зависимость минимума энергии . . . 291
7.3.4. Скачкообразное изменение ориентации вектора намагниченности . . . 295
7.3.5. Условия ферромагнитного резонанса . . . 297

7.3.6. Резонансное поле 301
7.3.7. Приближение сильного поля 303
7.4. Вариант второй: ось легкого намагничивания лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля 305
7.4.1. Равновесное положение намагниченности в отсутствие внешнего поля 306
7.4.2. Равновесное положение намагниченности в присутствии внешнего поля 310
7.4.3. Решение методом установления 311
7.4.4. Выбор выражений для плотности энергии 313
7.4.5. Некоторые особенности метода установления 314
7.4.6. Равновесная ориентация намагниченности 315
7.4.7. Особенности ориентации намагниченности при малом поле 316
7.4.8. Влияние начальной ориентации намагниченности 318
7.4.9. Замечание о потенциальном характере наблюдаемых зависимостей 320
7.4.10. Условия ферромагнитного резонанса 322
7.4.11. Резонансное поле 324
7.4.12. Приближение сильного поля 325
7.5. О возможности раздельного экспериментального определения константы одноосной анизотропии и намагниченности 327
7.6. Экспериментальное исследование ферромагнитного резонанса в пленках ферритов-гранатов 329
Выводы по главе 7 332

Глава 8. **Ферромагнитный резонанс в композиционной среде, состоящей из анизотропных ферритовых частиц** 337
8.1. Общая постановка задачи 337
8.1.1. Системы координат 339
8.1.2. Равновесная ориентация намагниченности 341
8.2. Последовательный порядок решения задачи 345
8.2.1. Матрицы переходов 346
8.2.2. Представление полной задачи в виде последовательности отдельных шагов 347
8.2.3. Реализация последовательных шагов решения задачи . . . 348
8.2.4. Компоненты тензора восприимчивости в комплексном виде 356
8.3. Представление компонент тензора восприимчивости через параметры материала и постоянного поля 357
8.4. Процедура усреднения 359
8.4.1. Общая схема процедуры усреднения 359
8.4.2. Усреднение по полярному углу 360
8.4.3. Усреднение по азимутальному углу 361
8.4.4. Суммирование по всем возможным направлениям 363
8.4.5. О порядке численного расчета тензора восприимчивости 363
8.5. Зависимости компонент тензора от частоты 366
8.5.1. Крайние частоты резонансов восприимчивости 367

8.5.2. Особенности процедуры усреднения при изменении величины шага . . . 369
8.5.3. Зависимости компонент тензора от частоты при усреднении по полярному углу . . . 371
8.5.4. Зависимости компонент тензора от параметров среды . . . 373
8.5.5. Усреднение по азимутальному углу . . . 374
8.6. Возможный случай аналитического усреднения. . . . 376
8.7. Формирование заданных свойств магнитной восприимчивости среды. . . . 377
8.7.1. Упорядочение ориентации частиц . . . 378
8.7.2. Упорядочение по полярному углу . . . 379
8.7.3. Упорядочение по азимутальному углу . . . 382
8.7.4. Общие возможности формирования параметров среды . . . 383
Выводы по главе 8 . . . 383

Глава 9. **Прецессия положения равновесия намагниченности в условиях ориентационного перехода** . . . 387
9.1. Общая иллюстрация прецессии положения равновесия. . . . 387
9.1.1. Геометрия задачи и основные уравнения . . . 388
9.1.2. Иллюстрация прецессии положения равновесия . . . 390
9.1.3. Схема образования прецессии положения равновесия . . . 394
9.1.4. Векторная модель . . . 395
9.2. Основные свойства прецессии положения равновесия. . . . 398
9.2.1. Зависимости периода от постоянного и переменного полей 399
9.2.2. Соотношение вынуждающей частоты с собственной . . . 401
9.2.3. Критическое значение частоты возбуждения . . . 403
9.2.4. Влияние диссипации на параметры прецессии положения равновесия . . . 406
9.2.5. Влияние намагниченности на параметры прецессии положения равновесия . . . 407
9.3. Мультирежимный характер прецессии положения равновесия . . 409
9.3.1. Развитие колебаний во времени и прецессионные портреты для различных режимов . . . 409
9.3.2. Некоторые особенности отдельных режимов . . . 413
9.4. Механическая аналогия прецессии положения равновесия . . . 414
9.4.1. Плоский маятник с боковым пружинным подвесом . . . 414
9.4.2. Цилиндрический маятник с боковым пружинным подвесом 416
9.4.3. Формирование колебаний маятника при различных частотах возбуждающей силы . . . 419
9.4.4. Особенности мультирежимного характера колебаний цилиндрического маятника . . . 422
9.5. Специфические свойства мультирежимного характера прецессии положения равновесия намагниченности . . . 423
9.5.1. Переходы между режимами прецессии намагниченности на основе модели потенциала . . . 423
9.5.2. Условия возбуждения режимов прецессии при различных параметрах затухания и амплитудах переменного поля . . 425

9.5.3. Свойства поперечной компоненты намагниченности при различных режимах прецессии 427
9.5.4. Зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля 429
9.6. Прецессия положения равновесия в условиях нарушения симметричности 431
9.6.1. Общие замечания о нарушении симметричности 431
9.7. Нарушение симметричности по постоянному полю 433
9.7.1. Влияние несимметричности постоянного поля на характер прецессии положения равновесия 433
9.7.2. Критичность несимметричности постоянного поля 435
9.7.3. Левая прецессия 436
9.7.4. Механизмы формирования прецессионного портрета 437
9.7.5. Проверка формулы для периода 441
9.7.6. Области существования прецессии положения равновесия 441
9.7.7. Объяснение вида областей существования на основе энергетической модели 444
9.7.8. Зависимость периода прецессии положения равновесия от несимметричности постоянного поля 445
9.7.9. Частотные свойства периода прецессии при несимметричности постоянного поля 448
9.8. Нарушение симметричности по поперечному переменному полю 450
9.8.1. Симметричные условия возбуждения 450
9.8.2. Несимметричное поперечное переменное поле 451
9.8.3. Случаи малой и большой амплитуды 452
9.8.4. Схема образования сгущений малых колец на прецессионном портрете 455
9.8.5. Различие между низким и высоким уровнями возбуждения 457
9.8.6. Период прецессии положения равновесия при различной степени несимметричности переменного поля 458
9.8.7. Критическая степень несимметричности переменного поля 459
9.9. Нарушение симметричности по продольному переменному полю 462
9.9.1. Общая картина колебаний намагниченности при продольной несимметричности переменного поля 462
9.9.2. Механизм образования сгущения малых колец 462
9.9.3. Некоторые общие свойства прецессии при несимметричности переменного поля 464
9.9.4. Компенсирующее воздействие несимметричного постоянного поля 464
Выводы по главе 9 467

Глава 10. **Прецессия положения равновесия намагниченности в анизотропной среде** 472
10.1. Прецессия положения равновесия намагниченности в среде с одноосной анизотропией. 472
10.1.1. Геометрия задачи 472
10.1.2. Матрица перехода 473

10.1.3. Полная плотность энергии, эффективные поля и уравнения движения в исходной (лабораторной) системе координат . . . 474
10.1.4. Прецессионные портреты . . . 476
10.1.5. Модель образования сгущений и разрежений . . . 478
10.1.6. Критичность нарушения симметрии системы . . . 481
10.1.7. Трансформация сгущения колец при изменении наклона оси анизотропии . . . 482
10.1.8. Компенсация наклона оси постоянным полем . . . 485
10.1.9. Критичность к константе анизотропии . . . 488
10.2. Прецессия положения равновесия намагниченности в среде с кубической анизотропией . . . 489
10.2.1. Геометрия задачи . . . 490
10.2.2. Основные уравнения . . . 491
10.2.3. Ориентация [001] . . . 493
10.2.4. Ориентация [011] . . . 495
10.2.5. Ориентация [111] . . . 497
10.2.6. Прецессионные портреты . . . 499
10.2.7. Критичность нарушения симметрии системы . . . 502
10.3. Особенности дополнительного воздействия постоянного и переменного полей в случае кубической анизотропии. . . . 503
10.3.1. Постоянное поле в плоскости пластины . . . 504
10.3.2. Переменное поле в плоскости пластины . . . 504
10.3.3. Синхронизм с частотой возбуждения . . . 505
10.3.4. Синхронизм с частотой прецессии положения равновесия 508
10.4. Некоторые дополнительные замечания . . . 512
10.5. Кинетика перехода между различными режимами прецессии положения равновесия . . . 513
10.6. Условия наблюдения прецессии положения равновесия в эксперименте . . . 517
10.6.1. Частотно-полевые и энергетические параметры . . . 517
10.6.2. Геометрические параметры . . . 518
10.6.3. Доменная структура . . . 519
10.6.4. О возможности наблюдения прецессии положения равновесия в несимметричных условиях . . . 520
10.6.5. Техника создания полей . . . 521
10.7. Возможные технические применения. . . . 523
10.7.1. Ферромагнитный резонанс . . . 523
10.7.2. Преобразование частоты . . . 523
10.7.3. Компенсация несимметричности . . . 524
10.7.4. Скачкообразный срыв . . . 524
10.7.5. Одноосная анизотропия . . . 525
10.7.6. Кубическая анизотропия . . . 525
10.8. Вопросы для дальнейших исследований. . . . 526
Выводы по главе 10 . . . 529

Литература . . . 534

Список наиболее часто используемых сокращений

ФМР — ферромагнитный резонанс.
НФМР — нелинейный ферромагнитный резонанс.
МСВ — магнитостатическая волна.
ПМСВ — поверхностная магнитостатическая волна.
ЭМВ — электромагнитная волна.
СВЧ — сверхвысокая частота.
ЖИГ — железоиттриевый гранат.
ТбФГ — тербиевый феррит-гранат.
СФГ — смешанный феррит-гранат.
ОЛН — ось легкого намагничивания.
ЦМД — цилиндрический магнитный домен.
ВБЛ — вертикальная блоховская линия.
ГБЛ — горизонтальная блоховская линия.

Введение

Среди многочисленных и разнообразных динамических явлений в магнитных средах особое место занимает ферромагнитный резонанс (ФМР), проявляющийся в резонансной зависимости магнитной восприимчивости среды от частоты приложенного переменного магнитного поля.

Уникальные свойства ФМР в магнитодиэлектрических средах находят широкое применение для создания высокоэффективных устройств аналоговой обработки информации в диапазоне СВЧ. К числу таких устройств относятся фильтры, линии задержки, фазовращатели, невзаимные и нелинейные устройства и другие. В качестве магнитодиэлектрической среды используются пленки и пластины ферритов, в первую очередь — железоиттриевого граната (ЖИГ), имеющего рекордно малые магнитные потери.

Разнообразные свойства ФМР существенно усложняются структурированием и неоднородным характером распределения намагниченности среды, появлением новых ветвей спектра и аномальными зависимостями от магнитного поля.

Особую сложность приобретают упомянутые эффекты в анизотропной среде, в том числе при ориентационных переходах, когда вектор намагниченности под действием приложенного поля переориентируется от одного равновесного положения к другому.

Эти обстоятельства явились стимулом для исследования некоторых свойств ФМР в условиях ориентационных переходов, описанию результатов которого и посвящена настоящая монография.

Приведенные в монографии сведения, ни в коей мере не претендуя на исчерпывающую полноту, не более чем отражают круг научных интересов авторов. Основной объем монографии представляет собой краткое изложение и обобщение главных научных и прикладных результатов, полученных авторами в период с 1990 по 2015 годы.

Монография является третьей из цикла, посвященного магнитостатическим волнам, ферромагнитному резонансу и сопутствующим им явлениям.

Первая монография [1] носит название «Магнитостатические волны в неоднородных полях» и охватывает круг вопросов, касающихся распространения магнитостатических волн (МСВ) в ферритовых пленках со свободными поверхностями (ФСП), а также в некоторых структурах, однородных в плоскости пленки, в первую очередь — феррит–диэлектрик–металл (ФДМ) и феррит–металл (ФМ), намагниченных неоднородным полем.

Вторая монография [2] носит название «Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах» и охватывает круг вопросов, касающихся распространению МСВ и частично электромагнитных волн (ЭМВ) в сложных структурах, основой которых являются магнитные среды с малым затуханием, в первую очередь — пленки железоиттриевого граната. Рассмотрено распространение магнитостатических волн в периодических структурах с различным соотношением между периодом структуры и длиной волны. Отдельное внимание уделено эффекту преобразования магнитостатических волн в электромагнитные на неоднородности поля, проявляющемуся как излучение электромагнитных волн из феррита. Обсуждены некоторые возможности практического применения и дальнейшего исследования описываемых явлений.

Настоящая монография, третья в упомянутой серии, посвящена рассмотрению свойств ферромагнитного резонанса в специфических условиях ориентационных переходов, имеющих место в анизотропных средах. Данная монография носит, в основном, теоретический характер. Экспериментальные результаты приведены в той мере, в какой они касаются излагаемых теоретических вопросов, а также являются исходным материалом для постановки рассматриваемых теоретических задач. Некоторые эксперименты приведены с целью расширения картины наблюдаемых явлений, в настоящее время исчерпывающей теоретической трактовки еще не нашедших, то есть ожидающих будущих исследователей.

Определенный опыт работы авторов со студентами и начинающими исследователями показывает, что при первоначальном ознакомлении с предметом заметные трудности вызывает освоение математического аппарата, значительная часть которого рассеяна в статьях, не всегда легко стыкующихся друг с другом. С целью исправления подобного положения начальные главы монографии посвящены подробному описанию математического аппарата, используемого при расчетах анизотропных свойств магнитной среды. Другие, более специфические методы расчета, также рассматриваются в соответствующих главах с достаточной подробностью.

Структура монографии следующая.

ПЕРВАЯ ГЛАВА представляет собой краткий обзор литературы, призванный ввести читателя в круг вопросов, рассматриваемых в последующих главах. Обзор ни в коей мере не охватывает всю тематику ФМР и ориентационных переходов, а лишь обращается к некоторым работам, важным для последующего изложения. Какое-либо перекрытие с обзорами, приведенными в предыдущих монографиях настоящей серии [1, 2], также отсутствует, приведены лишь ссылки на действительно необходимые здесь работы.

ВТОРАЯ ГЛАВА также в значительной степени носит обзорный характер и предназначена для ознакомления читателя с основными принципами и положениями науки о кристаллографической симметрии и анизотропных свойствах твердого тела. Приводятся некоторые

сведения о магнитной анизотропии реальных материалов, важные для дальнейшего изложения.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена описанию основного математического аппарата, используемого при расчете анизотропных свойств твердого тела. Подробно излагается методика работы с матрицами перехода между различными системами координат, а также способы получения таких матриц.

ЧЕТВЕРТАЯ ГЛАВА рассматривает конкретные примеры матриц преобразования для различных ориентаций одноосной анизотропии, а также для важнейших характерных ориентаций осей кубической анизотропии. Получены аналитические выражения для плотности энергии одноосной и кубической магнитной анизотропии при различных ориентациях кубической ячейки.

ПЯТАЯ ГЛАВА обращается к описанию ориентационных переходов в магнитных средах с одноосной анизотропией. Приведены результаты исследования переходов в пленках ферритов-гранатов с отклонением оси одноосной анизотропии от нормали к плоскости пленки.

ШЕСТАЯ ГЛАВА посвящена изучению свойств ферромагнитного резонанса в анизотропной среде. Рассмотрены свободные и вынужденные колебания намагниченности при ориентационном переходе. В линейном приближении найден тензор динамической восприимчивости магнитной среды, сочетающий в себе как симметричные, так и антисимметричные свойства.

СЕДЬМАЯ ГЛАВА обращается к важному для практики случаю — ферромагнитному резонансу в пленках с сильной одноосной анизотропией, отклоненной от нормали к плоскости пленки. Получены аналитические выражения для резонансных частот и полей, приведен обзор некоторых экспериментальных результатов.

ВОСЬМАЯ ГЛАВА посвящена описанию резонансных свойств композиционной среды, состоящей из набора ферритовых сфер, оси анизотропии которых ориентированы произвольно относительно друг друга. С использованием модели усреднения получены компоненты тензора динамической магнитной восприимчивости в условиях частичной и полной разупорядоченности осей.

ДЕВЯТАЯ ГЛАВА рассматривает прецессию намагниченности в поле, предшествующем полному окончанию ориентационного перехода, представляющую собой двухпериодическую прецессию второго порядка. Выявлены пять возможных режимов такой прецессии, рассмотрены условия возбуждения в отсутствие симметрии системы. Эта глава частично включает в себя материал, опубликованный ранее в монографии [3], написанной одним из авторов совместно с В. С. Власовым и Л. Н. Котовым.

ДЕСЯТАЯ ГЛАВА посвящена описанию прецессии положения равновесия намагниченности в анизотропной среде. Рассмотрены случаи одноосной и кубической анизотропии при различных вариантах ориентации осей легкого намагничивания. Исследована кинетика перехода

между некоторыми режимами прецессии. Приведены рекомендации для постановки экспериментов и отмечены возможные области практического применения.

Как и в первых монографиях данной серии, в описанных здесь работах принимали участие многочисленные соавторы. Так в теоретических работах, касающихся резонанса в анизотропной и композиционной средах, важная роль принадлежит В. И. Зубкову, экспериментальные работы по пленкам смешанных ферритов-гранатов выполнены совместно с Ф. В. Лисовским, в экспериментах по ФМР в таких пленках принимал участие В. А. Осика, сами пленки были выращены И. Г. Аваевой и В. Б. Кравченко. Работы, посвященные исследованию свойств прецессии положения равновесия намагниченности (прецессии второго порядка), выполнялись совместно с В. С. Власовым, М. С. Кирушевым, Л. Н. Котовым. Более подробно участие соавторов работ, положенных в основу монографии, отражено в списке литературы.

Выполнению работы в значительной степени способствовало стимулирующее внимание и неоднократные полезные замечания С. В. Яковлева. Многочисленные дискуссии с плодотворным обсуждением проходили с участием П. Е. Зильбермана. В неоднократных полезных обсуждениях, касающихся физики фазовых переходов, участвовали А. Ф. Кабыченков и В. В. Коледов. Ряд полезных замечаний, в том числе касающихся методического характера изложения материала, был сделан С. В. Тарасенко. В обсуждении ряда вопросов по технологии пленок смешанных ферритов-гранатов, принимал участие В. А. Котов. Вопросы, касающиеся техники измерения слабых магнитных полей, влияния диссипации и возможности экспериментально наблюдения прецессии положения равновесия намагниченности обсуждались с П. М. Ветошко.

В многочисленных обсуждениях оригинальных работ авторов, лежащих в основе данной монографии, принимали участие: А. В. Вашковский, Э. Г. Локк, С. В. Герус, Ю. И. Беспятых, И. Е. Дикштейн, В. В. Тарасенко, В. Д. Харитонов, Е. И. Нефедов, Г. С. Макеева, Ф. В. Лисовский, Е. Г. Мансветова, Г. В. Арзамасцева, Н. Н. Кирюхин, А. В. Вороненко, Д. Г. Шахназарян, В. В. Кильдишев, Л. А. Красножен.

Важнейшая роль в создании благоприятных условий для работы, постоянное к ней внимание и неоднократное оказание административной и научной помощи принадлежит академику РАН Ю. В. Гуляеву.

Непосредственное выполнение работы, в том числе написание настоящей монографии, оказалось возможным благодаря помощи члена-корреспондента РАН С. А. Никитова.

Практически все работы были проведены с деятельным участием многочисленного технического персонала, без помощи которого выполнение поставленной задачи было бы совершенно невозможным.

Всем перечисленным участникам и соавторам работ авторы выражают огромную признательность, отдают низкий поклон и приносят глубочайшую благодарность. Величайшее спасибо Вам, дорогие соратники, друзья и помощники!

Глава 1

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФЕРРОМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА И ОРИЕНТАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ (ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ)

Предметом рассмотрения настоящей монографии являются некоторые особенности ферромагнитного резонанса и ориентационных переходов в анизотропной среде. При этом главный упор делается на свойства ферромагнитного резонанса в условиях ориентационного перехода. В связи с этим настоящая глава представляет собой краткий обзор основных сведений по ферромагнитному резонансу и ориентационным переходам, необходимых для того, чтобы ввести читателя в курс дела и обеспечить понимание материала последующих глав.

Приведенные данные, ни в коей мере не претендуя на полноту, опираются на основные известные авторам литературные источники и за редкими исключениями не включают в себя результаты работ, выполненных самими авторами, изложению которых будут посвящены последующие главы монографии.

Перекрытие с обзорами, приведенными в предыдущих монографиях настоящей серии [1, 2] по мере возможности отсутствует, приведены лишь ссылки на работы, необходимые для последующего рассмотрения.

В обзоре по ходу изложения приведены ссылки на оригинальные разделы данной монографии, развивающие рассматриваемые положения.

Настоящая глава состоит из двух частей: первая посвящена ферромагнитному резонансу, в первую очередь в анизотропной среде, вторая — ориентационному переходу как таковому. Рассмотрим эти части последовательно.

1.1. Ферромагнитный резонанс

Рассмотрение ферромагнитного резонанса (ФМР) начнем с общего уравнения динамики намагниченности, в том числе в историческом аспекте.

1.1.1. Общее уравнение динамики намагниченности

Ферромагнитный резонанс как физическое явление имеет немалую историю. Первые попытки изучения динамических свойств магнетиков, главным образом частотной зависимости магнитной проницаемости,

относятся к началу 20 века. Краткий обзор первых работ можно найти, например в [4, стр. 772–773]. Среди основополагающих теоретических работ следует в первую очередь отметить статью [5], написанную еще до открытия ФМР в эксперименте и призванную скорее интерпретировать структуру и динамические свойства доменных границ. Тем не менее, именно в этой работе было впервые предложено уравнение движения намагниченности, лежащее в основе всей феноменологической теории динамических явлений в магнетиках, в том числе ферромагнитного резонанса и магнитостатических волн [1, 2], в настоящее время именуемое как «уравнение Ландау–Лифшица».

Там же была приведена схема получения входящих в это уравнение эффективных полей, определяющих динамические явления, а именно показано, что такие поля могут быть вычислены как производные от плотности магнитной энергии магнетика по компонентам намагниченности.

Ввиду его огромной важности, приведем здесь уравнение Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [6–9]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma\,[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\alpha}{M_0}\left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right]. \tag{1.1}$$

Здесь $\gamma > 0$, при этом свободная прецессия намагниченности является правой; $\mathbf{H}_e$ — эффективное поле, равное

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}, \tag{1.2}$$

где U — плотность энергии.

Вопросы ФМР достаточно подробно рассмотрены в ряде обзорных монографий, из которых в первую очередь следует отметить [6–8]. Подробный разбор уравнения (1.1) и его решения содержится также в [1, 2].

1.1.2. Ферромагнитный резонанс в анизотропной среде

Исследование ферромагнитного резонанса в анизотропной среде началось достаточно скоро после открытия явления ферромагнитного резонанса как такового. Особенно подробно анизотропные свойства ферромагнитного резонанса исследовались в монокристаллах железоиттриевого граната (ЖИГ), обладающих кубической симметрией, что было связано с высокими перспективами практического применения этого материала, обладающего рекордно малыми магнитными потерями [6–8].

Отдельно следует отметить исследование резонансных свойств магнитных материалов при высоких уровнях мощности, то есть в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса (НФМР) [10–12]. Здесь более или менее стационарное поведение прецессии намагниченности при малых сигналах осложняется параметрическим возбуждением обменных спиновых волн, что приводит к значительному росту потерь и расширению резонансной линии. Особенно резко магнитная анизотропия проявляет себя в поведении намагниченности за порогом

параметрического возбуждения, где наблюдаются явления автомодуляционного характера.

Так, согласно [10, стр. 213], при поперечной накачке (то есть при переменном СВЧ поле, перпендикулярном постоянному) максимальная амплитуда автомодуляции имеет место при намагничивании кристалла вдоль кристаллографической оси типа [001], а при намагничивании вдоль осей [011] и [111] падает примерно в 10 и 100 раз соответственно. Насколько известно авторам настоящей монографии, теоретическая интерпретация столь сильной анизотропии запороговой автомодуляции до сих пор отсутствует.

Перечислим кратко некоторые работы по ФМР в анизотропной среде, важные для дальнейшего рассмотрения.

Линейный ФМР широко исследовался в анизотропных пленках с кубической симметрией, в первую очередь ферритов-гранатов ($R_3Fe_5O_{12}$, где R — иттрий или редкоземельный металл) [8, 13–26] и ферритов-шпинелей (RFe_2O_4, где R — немагнитный металл) [27–29]. В работах [22–25] приведены результаты исследования ФМР в пленках смешанных ферритов-гранатов, обладающих одновременно кубической и достаточно сильной одноосной анизотропией, в том числе в условиях значительного отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пленки [30].

К числу важнейших пионерских работ следует отнести статью Смита и Бельерса [31], экспериментально исследовавших ФМР в условиях ориентационного перехода в сильно анизотропном гексаферрите бария ($BaFe_{12}O_{19}$). Измерения были выполнены на частоте 23,9 ГГц в поле до 25 кЭ. Поле одноосной анизотропии в исследованном материале составляло 17 кЭ, что соответствует частоте естественного резонанса около 50 ГГц. Намагничивание осуществлялось по нормали к оси анизотропии, причем было отмечено значительное снижение резонансной частоты при приближении ориентации вектора намагниченности к направлению поля. Расчет резонансной частоты был выполнен с использованием уравнения Ландау–Лифшица, записанного в сферической системе координат. Краткий обзор примененного математического аппарата («формула Смита–Бельерса–Сула») можно найти, например, в [7, 8]. Следует заметить однако, что, несмотря на героический характер работы [31], учет доменной структуры был выполнен весьма приближенно, как размагничивающий фактор образца в целом. Более подробно метод Смита–Сула рассматривается в разделе 2.3 настоящей монографии.

Фундаментальные свойства ФМР в анизотропных магнетиках и антиферромагнетиках рассматривались в многочисленных обзорах и монографиях, из которых следует упомянуть [7, 8, 32–34]. Последние два обзора в значительной степени затрагивают не только однородный ФМР, но и волновые процессы как дипольного, так и обменного характера.

В связи с работами по цилиндрическим магнитным доменам (ЦМД) для устройств памяти [35–43], исследовались резонансные свойства материалов с сильной одноосной анизотропией, в том числе ортоферритов и смешанных ферритов-гранатов [22, 23, 25, 44–46].

В монографии [40] приведены три основные задачи, решавшиеся применительно к таким устройствам через посредство ФМР: детектирование ЦМД, зарождение ЦМД, давление на стенку ЦМД.

1.1.3. Частотная щель в спектре ферромагнитного резонанса

Отдельно следует отметить исследование резонансных свойств антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом, анизотропия которых выражена настолько сильно, что в спектре ФМР имеется довольно значительная энергетическая щель, обусловленная спонтанными деформациями за счет магнитоупругого взаимодействия [47, 48].

Величина щели, например в гематите (α-Fe_2O_3), составляет около 10 ГГц, так что для наблюдения ФМР нужны довольно значительные магнитные поля.

С другой стороны, существование такой щели приводит к весьма сильной зависимости скорости упругой волны от магнитного поля, даже в полях от 0,5 до 2000 Э составляющей 20 % от исходной величины [25, 49–52].

Согласно исторически первой теоретической модели [25, 49, 50] (построенной независимо несколько позже в [51]), в отсутствие щели скорость упругой волны по мере роста поля плавно увеличивается, однако в реальных твердых телах в поле до десятков килоэрстед такое увеличение незначительно и не превышает долей процента. При этом максимальное увеличение скорости происходит уже в незначительных полях (единицы эрстед), а дальше крутизна зависимости резко падает, и она идет весьма полого. Такое падение крутизны зависимости происходит задолго до исчезновения доменной структуры, поэтому в экспериментах на многодоменных образцах не наблюдается.

В слабых ферромагнетиках, в присутствии энергетической щели магнитоупругого характера, внешнее поле умножается на коэффициент, равный отношению поля Дзялошинского к полю обмена, который составляет порядка 10^{-3}, так что начальный участок резкого роста скорости упругой волны по полю сильно растягивается. Такое растяжение приходится как раз на реально наблюдаемые в эксперименте поля порядка нескольких тысяч эрстед, что и выглядит как сильная зависимость скорости упругой волны от поля.

В последовавшей затем более подробной теоретической модели [53] было показано, что в малом поле намагниченность слабого ферромагнетика претерпевает фазовый переход второго рода, сопровождаемый «размягчением» системы, вследствие чего скорость упругой волны стремится к нулю. Заметим однако, что в эксперименте подобное «зануление» скорости упругой волны не наблюдалось, по-видимому, из-за мешающего действия доменной структуры.

Дальнейшее развитие эти исследования получили в многочисленных работах, в том числе посвященных ортоферритам [54], поверхностным волнам Рэлея [55], параметрическому возбуждению упругих волн в окрестности точек фазовых переходов [56], часть из которых была обобщена в обзоре [33].

1.1.4. Измерение параметров магнитных материалов

Необходимо отметить, что наряду с исследованием собственно резонансных свойств, большое значение имеет использование ФМР в качестве инструмента для измерения параметров материалов, к которым в первую очередь относится анизотропия.

Тенденция таких измерений, по-видимому, берет начало еще с металлических пленок [57], причем часто одновременно с анизотропией измеряется и намагниченность [13, 20, 22–26, 58–65].

При измерении параметров пленок с одноосной анизотропией, перпендикулярной плоскости пленки, возникает проблема раздельного измерения анизотропии и намагниченности. Если ось анизотропии лежит в плоскости пленки, как это часто имеет место в металлических пленках [57], то задача раздельного измерения решается путем измерения частоты ФМР при намагничивании пленки параллельно и перпендикулярно оси анизотропии. В пленках ферритов-гранатов, особенно используемых для устройств на ЦМД, ось анизотропии обычно перпендикулярна к плоскости пленки, так что плотности энергии размагничивания и анизотропии описываются одинаковыми выражениями, что делает раздельное измерение констант затруднительным. Положение упрощается в случае хотя бы небольшого отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пленки [25, 30]. При этом направления намагничивания пленки в плоскости вдоль и поперек проекции оси анизотропии на эту плоскость становятся не эквивалентными, и раздельное измерение константы анизотропии и намагниченности становится возможным [22–25]. В работе [66] для такого же разделения предложено использовать поверхностные магнитостатические волны, размагничивающие поля которых, имея периодичность того де порядка, что и длина волны, позволяют в какой-то степени нейтрализовать действие размагничивающего фактора пленки, имеющего значительную величину из-за крайне малого отношения толщины пленки к ее продольным размерам.

В работах [25, 67–73] описано измерение констант магнитоупругого взаимодействия в магнитных пленках. В работах [74–77] методы ФМР используются для исследования доменной структуры и распределения намагниченности в средах для магнитной записи.

1.1.5. Композиционные среды на основе магнетиков

В последнее время активно развиваются работы по созданию и исследованию композиционных сред, обладающих перспективными для практики электродинамическими свойствами. Такие среды в большинстве

случаев выполняются на основе дискретных токовых элементов, представляющих собой отрезки проводника кольцеобразной, прямой, омегаобразной и других форм [78–83]. Эти среды допускают весьма широкую вариацию параметров путем выбора формы и взаимного расположения дискретных элементов. Важным примером являются киральные среды [84, 85], состоящие из спиральных элементов, а также различные биизотропные и бианизотропные среды [86]. Набор токовых дискретных элементов позволяет создать среды, эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости которых одновременно отрицательны [80, 81]. В таких средах становится возможным распространение обратных электромагнитных волн [87–89], свойства которых заметно отличаются от свойств прямых волн, что дает надежду на создание устройств обработки информации на новых принципах [90–97].

В то же время, есть и другая возможность создания условий для распространения обратных волн. Это — магнитные структуры на основе ферритов [6–8], где могут распространяться как объемные, так и поверхностные обратные волны [98–106]. Более того, ферриты обладают гиротропными свойствами, что позволяет создать устройства передачи информации, обладающие невзаимностью в СВЧ диапазоне [107]. Важнейшей особенностью ферритов является сильная зависимость резонансных свойств от магнитного поля, что позволяет создавать устройства, управляемые путем изменения внешнего поля [6–8, 107–115]. Особые преимущества может дать использование анизотропных ферритов, реализация ориентационного перехода в которых значительно расширяет возможности магнитного управления.

Таким образом, использование ферритов в качестве основы для композиционных сред позволило бы создать невзаимные устройства обработки информации, в том числе на основе обратных волн, обладающие широким диапазоном параметров, зависящих от управляющего поля. Однако, несмотря на значительное количество цитированных работ, возможность создания таких сред и разнообразие их параметров исследованы недостаточно.

В связи с этим в главе 8 настоящей монографии рассмотрена одна такая композиционная среда, представляющая собой решетку из анизотропных ферритовых сфер, впервые предложенная в работах [116, 117]. Такая среда должна обладать свойствами гиротропии, то есть быть невзаимной по отношению к распространяющимся волнам, причем параметры среды можно как задавать изначально путем выбора материала феррита, так и менять в процессе работы устройства путем изменения внешнего магнитного поля. На ее основе можно создать структуры, способные поддерживать обратные электромагнитные волны. Глава 8 посвящена расчету одного из параметров такой среды, в первую очередь определяющего возможность практических применений, а именно — ее динамической магнитной восприимчивости.

1.1.6. Некоторые особенности нелинейного ферромагнитного резонанса

Рассмотренные выше свойства ферромагнитного резонанса относятся в первую очередь к колебательным явлениям линейного характера, имеющим место при малой амплитуде колебаний. Однако при большой амплитуде, то есть в нелинейном режиме, колебания приобретают ряд особенностей, существенно отличающих их от линейных.

Настоящая монография не ставит своей целью изучение более или менее полного круга нелинейных явлений, сопровождающих ферромагнитный резонанс, ибо он неимоверно обширен и требует отдельного внимания. Однако для некоторой ориентации читателя все же приведем здесь небольшой обзор, полезный, по мнению авторов, для дальнейшего рассмотрения.

Исследованию СВЧ нелинейных явлений в ферритах посвящено значительное количество работ, частично обобщенных в [6–8, 10–12, 118]. Подробно изучены как стабильные нелинейные процессы — умножение и преобразование частоты, детектирование, генерирование и усиление электромагнитных сигналов [6, 7], так и разнообразные нестабильности, связанные в первую очередь с параметрическим возбуждением обменных спиновых волн, нашедшие свое применение в ограничителях мощности, шумоподавителях, генераторах шума и других устройствах [8, 118]. С введением в практику материалов с рекордно низкими потерями, в первую очередь железоиттриевого граната (ЖИГ) [6–8], было установлено, что нестабильные нелинейные явления, связанные с параметрическим возбуждением обменных спиновых волн, возникают уже при крайне малых амплитудах прецессии намагниченности, когда угол отклонения вектора намагниченности от равновесного положения не превышает одного–двух градусов [10]. В этом случае развитие спин-волновых неустойчивостей затрудняет проявление других нелинейных процессов, требующих отклонения намагниченности на значительно большие углы, в том числе до нескольких десятков градусов. По-видимому, единственной возможностью для реализации таких углов прецессии является использование ферритовой пленки (пластины), намагниченной перпендикулярно ее плоскости, когда частота однородной моды ферромагнитного резонанса (ФМР) приходится на нижнюю границу (дно) спектра обменных спиновых волн, вследствие чего их параметрическое возбуждение становится невозможным. В эксперименте такие условия были реализованы в работах [119–122], из которых косвенно можно судить о возможности достижения углов прецессии до 20–25 градусов и более без какого-либо возбуждения обменных спиновых волн.

Такое обстоятельство породило значительное количество теоретических работ [123–131], рассматривающих различные нелинейные режимы прецессии намагниченности при больших амплитудах. Были выявлены как стохастические, так и сложные регулярные, в том числе

автоколебательные режимы прецессии, рассмотрены статические и динамические бистабильности, приводящие к динамическому перемагничиванию пленки, построены бифуркационные диаграммы, демонстрирующие широкие возможности управления нелинейной динамикой намагниченности в тонкопленочных структурах посредством изменения внешних магнитных полей.

В большинстве перечисленных работ вектор намагниченности в стационарном состоянии предполагался ориентированным вдоль приложенного к пленке постоянного магнитного поля. В то же время, оставалось без внимания то обстоятельство, что в анизотропных пленках вектор намагниченности в процессе увеличения поля поворачивается от направления оси анизотропии к направлению поля, совершая ориентационный переход [132–134]. Следует ожидать, что такое изменение ориентации равновесной намагниченности приводит к изменению характера нелинейной прецессии. Выяснению этого вопроса посвящены главы 9 и 10 настоящей монографии.

1.2. Ориентационный и фазовый переходы

Основным предметом рассмотрения настоящей монографии является ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода, поэтому теперь кратко остановимся на некоторых важных для дальнейшего свойствах именно переходов как таковых.

1.2.1. Соотношение понятий ориентационного и фазового переходов

Сразу отметим, что в определении ориентационного перехода сегодняшняя терминология имеет несколько неустановившийся характер. Так часто пользуются понятиями «ориентационный переход» и «ориентационный фазовый переход» как синонимами [132], хотя постепенное изменение ориентации вектора намагниченности может происходить без изменения фазы, например, при намагничивании одноосного магнетика в направлении, перпендикулярном оси анизотропии.

Часто используется термин «спин-переориентационный переход» [133], по существу тоже как синоним приведенных выше выражений.

В монографии [134] напрямую указывается о разночтениях в понятии «угловая фаза» [134, стр. 10, сноска]. Там же дано определение, которое, видимо, следует здесь привести дословно [134, стр. 14]: «Ориентационный фазовый переход есть переход между магнитными фазами, возможными в данном кристалле, которые определяются условиями минимума его термодинамического потенциала». Такое определение, по-видимому, следует считать классическим. Из него следует, что это переход именно между различными фазами. Но фазой принято считать состояние магнетика, характеризующееся определенной симметрией распределения намагниченности [135]. В монографии [134, стр. 15]

фаза называется «симметричной», когда векторы намагниченности ориентированы вдоль определенных кристаллографических направлений, и «угловой», когда ориентация вектора может меняться при изменении внешних параметров, например поля. При этом свойства симметрии «симметричной» и «угловой» фаз существенно различаются. Таким образом, переход между «симметричной» и «угловой» фазами является именно фазовым переходом в полном соответствии со значением этого термина. Однако в «угловой» фазе при изменении поля ориентация вектора намагниченности может меняться достаточно плавно, тогда как изменения симметрии не происходит. То есть при этом, несмотря на изменение ориентации вектора намагниченности, переход от одной фазы к другой не происходит. Таким образом, такое изменение ориентации называть «фазовым переходом» не вполне корректно. Можно полагать, что здесь более подходит определение «ориентационный переход» без вставки «фазовый».

Именно такой терминологии авторы предполагают придерживаться в настоящей монографии. То есть переход с изменением ориентации, но без изменения симметрии, будет именоваться «ориентационным переходом», а переход с изменением фазы — «фазовым переходом».

1.2.2. Фазовые переходы первого и второго рода

Ввиду важности различения понятий «ориентационный переход» и «фазовый переход», а основным предметом рассмотрения далее будет в первую очередь ориентационный переход, остановимся сначала кратко на втором из них, а именно на фазовом переходе.

Итак, изменение фазы, то есть степени упорядоченности магнитных диэлектриков, происходит путем фазовых переходов первого или второго рода.

Поскольку ориентационные переходы, как правило, сопровождаются фазовыми переходами второго рода, то для теоретической интерпретации таких фазовых переходов используется теория Ландау [135–138], состоящая в разложении потенциала по малому параметру (как правило, одной из компонент или модуля намагниченности) в окрестности точки перехода. Температура или внешнее поле относительно потенциала рассматривается как возмущение, приводящее к трансформации его экстремумов (минимумов), по числу которых (один или два) определяется переход от однородной фазы к неоднородной.

Согласно теории Ландау, термодинамический потенциал, описывающий состояние тела, при фазовых переходах остается непрерывным, а его производные по температуре и магнитному полю претерпевают разрыв. Фазовый переход первого рода характеризуется разрывам первой производной. Фазовый переход второго рода — разрывом второй производной при сохранении непрерывности первой. При фазовом переходе первого рода как состояние тела, так и его симметрия меняются скачком. При фазовом переходе второго рода состояние тела изменяется плавно, а его симметрия претерпевает скачок.

Магнитные фазовые переходы первого рода обычно сопровождаются скачком намагниченности (по величине или направлению). Типичными примерами таких переходов являются переброс вектора намагниченности с одной оси анизотропии на другую при изменении температуры или внешнего поля, а также перемагничивание одноосного ферромагнетика полем, антипараллельным начальному равновесному положению намагниченности. При таких переходах в определенном интервале изменения поля возможно одновременное сосуществование двух (и более) различных фаз. Ограниченные в пространстве области с различными фазовыми состояниями (например с различными направлениями намагниченности) представляют собой домены, разделенные границами раздела фаз — доменными границами. При однородном начальном состоянии намагниченности формирование второй фазы происходит путем возникновения зародышей с последующим их ростом. Затруднение образования или первоначальное отсутствие зародышей новой фазы при перемагничивании вызывают явления гистерезисного характера.

При переходах второго рода намагниченность тела изменяется плавно, а симметрия — скачкообразно. Состояние тела при этом характеризуется «параметром порядка» η, где $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, причем $\eta = 0$ соответствует более симметричному состоянию, а $\eta \neq 0$ — менее симметричному. В точке перехода $\eta = 0$. В магнетиках параметром порядка обычно является нормированная намагниченность:

$$\eta = M/M_0. \tag{1.3}$$

В окрестности точки фазового перехода термодинамический потенциал разлагается в ряд по четным степеням η:

$$\Phi = \Phi_0 + a\eta^2 + b\eta^4 + \ldots, \tag{1.4}$$

где коэффициенты $a, b, \ldots$ определяют характер перехода. Типичными примерами фазовых переходов второго рода являются переход из ферромагнитного в парамагнитное состояние в точке Кюри и ориентационный переход в одноосном магнетике при поле, перпендикулярном оси анизотропии. В окрестности фазового перехода второго рода может существовать доменная структура, зарождающаяся из флуктуаций параметра порядка без гистерезиса.

Теория Ландау позволяет достаточно точно определить факт существования точки перехода, а также предсказывает аномальный рост теплоемкости, магнитной восприимчивости и некоторых других параметров среды по мере приближения к этой точке. Однако более подробное исследование показывает, что в ближайшей окрестности точки перехода параметр порядка испытывает значительные флуктуации, геометрический размер которых стремится к бесконечности. Для описания таких особенностей используется теория критических индексов, дающая степенную зависимость радиуса корреляции флуктуаций от обратной величины параметра порядка. Более подробно с этой теорией можно познакомиться, например, по монографии [139].

1.2.3. Свойства ориентационных переходов

Вернемся теперь к основному предмету настоящей монографии — ориентационному переходу и кратко охарактеризуем некоторые из работ, важных для дальнейшего рассмотрения.

Весьма подробное описание свойств ориентационных переходов в магнетиках можно найти в обзоре [133] и монографии [134]. Приведено значительное количество экспериментальных результатов, интерпретированных, в основном, в рамках теории Ландау. Весьма примечательным является вывод о том, что в многоподрешеточном ферромагнетике (например феррите-гранате гадолиния) доменная структура может существовать в нескольких интервалах изменения внешнего поля. Так после насыщения в сравнительно небольшом поле (менее 1 кЭ), происходит преобразование конфигурации угловой фазы, так что результирующий вектор намагниченности снова обретает способность ориентироваться в двух противоположных направлениях, в результате чего домены снова возникают уже в довольно значительном поле (порядка 15 кЭ). Экспериментальное наблюдение подобного эффекта описано в работе [140], а также в ряде других цитированных в [134] статей.

Согласно [134], интерпретация возникновения доменов в сильном поле может быть сходна с таковой для антиферромагнетиков [141]. То есть критерием существования доменной структуры является не малость поля, а наличие одновременно существующих нескольких энергетически выгодных состояний в некоторой области температур и полей [134, стр.243].

Подробно иллюстрированный другой вариант разнородных доменных структур, сменяющих друг друга по мере последовательно происходящих ориентационных переходов, приведен в работе [142].

С точки зрения вопросов ФМР и МСВ, рассматриваемых в настоящей монографии, значительный интерес представляет пионерская работа Смита–Бельерса [31], а также последовавшие за ней работы по ФМР в условиях ориентационных переходов, частично обобщенные в [6–8]. Подробному исследованию таких процессов будут посвящены главы 6 и 7 настоящей монографии.

Определенное место занимает рассмотрение ориентационных переходов в дискретных композиционных структурах [143], в том числе представляющих собой совокупность свободно ориентирующихся диполей [144, 145]. Поведение магнитной восприимчивости в композиционных структурах, состоящих из произвольно разориентированных анизотропных ферритовых сфер, будет рассмотрено в главе 8 настоящей монографии.

1.3. Доменная структура

Ориентационный переход, являющийся одним из основных предметов рассмотрения в настоящей монографии, часто происходит в условиях, когда намагниченность имеет две и более равновесных ориентации,

обладающие равными или близкими друг к другу уровнями энергии. Так например, в случае одноосной анизотропии намагниченность с одинаковым успехом может ориентироваться как в положительном, так и в отрицательном направлениях ее оси. В случае ограниченного образца стремление к уменьшению энергии размагничивания приводит к разбиению его на домены, внутри которых намагниченность ориентируется в том или ином из возможных направлений. При этом главным условием образования доменной структуры является равновесие между энергией поля размагничивания и энергией доменных границ образца в целом. Доменная структура как таковая не является предметом рассмотрения в настоящей монографии, однако ввиду ее важности для физики ориентационного перехода, приведем краткую сводку основных сведений о доменах, полезных для дальнейшего.

Началом изучения доменной структуры в магнетиках, по-видимому, можно считать открытие «скачков Баркгаузена», подробное описание которых можно найти, например в [4, стр. 210–214]. Вслед за многочисленными исследованиями доменной структуры методом порошковых фигур [4, стр. 214–225] последовало открытие возможности наблюдения доменов в прозрачных диэлектриках, в том числе в ферритах, по эффекту Фарадея [146]. Подробный обзор о результатах таких исследований можно найти, например в [147]. Особенный всплеск работ по доменной структуре произошел после открытия цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) [35, 37] в связи с возможностью их использования для создания систем памяти для вычислительных машин [148–151]. Бурное развитие физики доменов в те годы отражено в многочисленных обзорах и монографиях, среди которых, никак не претендуя на полноту, можно упомянуть [38–41]. Приведем краткий обзор основных научных результатов, важных для дальнейшего рассмотрения.

1.3.1. Физика доменных структур

Перечислим вкратце основные физические свойства доменных структур. Главной причиной разбиения ограниченного образца на домены является стремление к минимуму полей размагничивания, то есть таких, которые образуются при выходе однородно ориентированной намагниченности на какие-то преграды, нарушающие такую однородную ориентацию. В качестве таких преград могут выступать границы образца или границы других доменов с отличной от первых ориентацией намагниченности. Равновесная доменная структура образуется как результат баланса между энергией полей размагничивания, образованных однородно намагниченными участками образца, и энергией доменных границ, где намагниченность резко меняет ориентацию, приводя в действие сильную энергию неоднородного обменного взаимодействия.

В общем случае конфигурацию доменной структуры можно определить путем минимизации выражения для полной энергии магне-

тика W. Для одноосного магнетика с осью анизотропии, совпадающей с осью Oz, W имеет вид [4]

$$W = \int\limits_V \left\{ \frac{A_0}{2aM_0^2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{K}{M_0^2} \left(M_x^2 + M_y^2 \right) - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \int \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}}{r} d\mathbf{r} \right\} dV, \tag{1.5}$$

где V — объем образца, A_0 — константа неоднородного обменного взаимодействия, a — постоянная решетки кристалла, M_0 — намагниченность насыщения, K — константа одноосной анизотропии.

Здесь первое слагаемое соответствует энергии неоднородного обмена, второе — энергии анизотропии и третье — энергии размагничивающего поля.

Применение вариационного принципа (уравнение Эйлера [152]) к задаче о доменной границе, лежащей в плоскости Oyz (то есть к первым двум слагаемым выражения (1.5)), приводит к зависимости угла θ между $\mathbf{M}$ и Oz координаты x, имеющей вид [4]

$$\theta = \arccos \left(-\operatorname{th} \frac{x}{\delta_0} \right). \tag{1.6}$$

Здесь δ_0 — толщина доменной границы, определяемая выражением

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{A_0}{2aK}}\,. \tag{1.7}$$

Вектор намагниченности в такой границе, называемой «блоховской», по мере изменения координаты x разворачивается в плоскости Oyz, перпендикулярной этой координате.

Для очень тонких пленок энергетически более выгодной может оказаться «неелевская» доменная граница, в которой вектор намагниченности разворачивается в плоскости Oxy, то есть в плоскости самой пленки [39, 40, 57].

В слабоанизотропных одноосных пленках, ось анизотропии которых ориентирована перпендикулярно плоскости пленки, доменная структура имеет вид полос с замыкающими доменами вблизи поверхности [4].

Удобной характеристикой одноосного магнитного материала является «фактор качества» Q, определяемый выражением

$$Q = \frac{K}{2\pi M_0^2}. \tag{1.8}$$

Критерием существования сквозной структуры (без замыкающих доменов) является выполнение неравенства: $Q > 1$.

В отсутствие анизотропии в плоскости пленки доменная структура имеет неупорядоченный (лабиринтный) характер. Приложение постоянного магнитного поля, перпендикулярного плоскости пленки, вызывает стягивание полосовых доменов в цилиндрические магнитные

домены (ЦМД), свойства которых, впервые исследованные в работах [35, 37, 153, 154], подробно рассмотрены в многочисленных обзорах и монографиях [38, 155–182].

Цилиндрический домен существует в интервале между полем эллиптической неустойчивости H_e, ниже которого он растягивается в полосовой, и полем коллапса H_k, выше которого он исчезает. Этим полям соответствуют диаметр эллиптической неустойчивости d_e и диаметр коллапса d_k (очевидно, что $H_e < H_k$ и $d_e > d_k$).

Наряду с изолированными сквозными цилиндрическими доменами, в зависимости от характера анизотропии, слоистой структуры, коэрцитивности и предыстории образца, могут существовать более сложные виды доменов (наклонные, несквозные, кольцевые) и доменных структур (линейная полосовая, гексагональная или аморфная решетка ЦМД и другие [35, 38, 155–171].

В пленках смешанных ферритов-гранатов (СФГ), наряду с «нормальными» ЦМД, имеющими чисто блоховскую доменную границу, наблюдаются так называемые «жесткие» ЦМД, круговая граница которых состоит из чередующихся сегментов с блоховским и неелевским распределением намагниченности [39, 172–179]. Короткие неелевские сегменты обычно называют «вертикальными блоховскими линиями» (ВБЛ). При большом количестве ВБЛ интервал устойчивости ЦМД по полю подмагничивания существенно увеличивается. ВБЛ оказывают существенное влияние на динамические свойства ЦМД. Экспериментальное обнаружение ВБЛ в пленках СФГ оптическими методами затруднено из-за дифракционных ограничений [180]. ВБЛ экспериментально наблюдались методом электронной микроскопии в пленках кобальта и некоторых аморфных материалов [181–183], а также методом порошковых фигур на тонких пленках пермаллоя, покрывающих пленки СФГ [184].

Наряду с вертикальными блоховскими линиями в доменной границе могут существовать также горизонтальные блоховские линии (ГБЛ), существенно сказывающиеся на ее динамических свойствах. В работах [185–192] было показано, что блоховская доменная граница в тонкой пленке не реализуется, причем распределение намагниченности в центре пленки имеет квазиблоховский характер, а вблизи поверхностей — квазинеелевский (скрученная граница). Решение такого вида, однако, не имеет предельного перехода к случаю толстых образцов, и в работе [193] ставится под сомнение. Там же высказывается мнение о целесообразности пересмотра современных представлений о динамических свойствах доменных границ, основанных на модели «скручивания». Тем не менее, в настоящее время концепция «скрученной» доменной границы с ГБЛ является общепринятой при интерпретации динамических экспериментов с ЦМД.

Динамические свойства сложной структуры ЦМД ярко проявляются в весьма красивом эффекте «баллистического последействия». Эффект проявляется в движении ЦМД «по инерции», происходящем

после окончания действия продвигающего импульса поля. При поступательном движении домена под действием такого импульса во фронтальной части ЦМД происходит генерация ГБЛ, в результате чего на боковых его сторонах, где ГБЛ отсутствуют, возникают две системы плотно скрученных ВБЛ, завитых в спираль наподобие резинового мотора летающей модели [194, 195]. После окончания продвигающего импульса обе спирали раскручиваются, что обеспечивает генерацию ГБЛ в обратном направлении, что и вызывает поступательное движение ЦМД «по инерции» вперед еще на значительное расстояние. Более подробное описание эффекта баллистического последействия с многочисленными ссылками на оригинальные работы можно найти, например в [40, 41].

Кроме изолированных ЦМД, лабиринтной и полосовой доменной структуры в пленках смешанных ферритов-гранатов с нормальной одноосной анизотропией наблюдаются многочисленные виды периодических решеток, состоящих из изолированных, ограниченных по протяженности, доменов.

Кроме простой гексагональной решетки из круглых ЦМД [6–8] имеют место структуры из гантелевидных, трехлепестковых и других симметричных изолированных доменов, самоорганизующихся в правильные решетки [199–202]. Динамика подобных структур отличается большим разнообразием, в том числе наблюдается так называемое «ангерное состояние», представляющее собой формирование сложных структур, сохраняющих свое существование только в динамике [197, 198, 203–206].

В последнее время появляются работы, касающиеся динамики доменных структур, возбуждаемых сверхкороткими световыми импульсами от фемтосекундного лазера [207]. Можно полагать, что такое движение доменов происходит в результате реализации трехступенчатого преобразования светового импульса в тепло, вызывающее термическое расширение среды, дающее начало упругим смещениям, которые в свою очередь через магнитострикцию воздействуют на намагниченность («трехтемпературная модель»). Более подробно с механизмами действия света на намагниченность можно ознакомиться, например, по работам [208–228].

1.3.2. Доменная структура при ориентационных переходах

В качестве начального этапа изучения доменной структуры при ориентационных переходах, наверное, следует указать работу [36], где было отмечено изменение периода линейных полосовых доменов при касательном намагничивании магнитной пластины с нормальной одноосной анизотропией. К числу пионерских работ следует также отнести [31], где прослеживается изменение частоты ферромагнитного резонанса при касательном намагничивании подобной пластины вплоть до точки фазового перехода. Однако роль доменной структуры в этой работе, хотя и упоминается, но в достаточной степени не выявлена.

Широкое изучение доменов при ориентационных переходах развернулось в эпоху ЦМД при исследовании сначала ортоферритов, а затем смешанных ферритов-гранатов.

Наблюдение доменной структуры в прозрачных тонких слоях и пленках подобных материалов, выполняемое с помощью эффекта Фарадея, явилось мощным инструментом изучения различных видов магнитной анизотропии. Отправным моментом здесь явился факт исчезновения доменной структуры при касательном намагничивании пленок с нормальной анизотропией, происходящего при фазовом переходе второго рода в поле, близком к полю одноосной анизотропии.

В значительной степени такие исследования обобщены в [25, 38–44], здесь же упомянем лишь некоторые работы, важные для дальнейшего рассмотрения.

Намагничивание одноподрешеточного одноосного магнитного диэлектрика полем, перпендикулярным ОЛН, происходит путем поворота вектора намагниченности **M** к направлению поля и заканчивается при полном выстраивании намагниченности вдоль поля. Момент выстраивания представляет собой фазовый переход второго рода. При поле ниже перехода существуют два энергетически эквивалентных направления намагниченности, при поле выше — только одно. Существование двух возможных направлений в ограниченном образце приводит к разбиению его на домены. Таким образом, в образце, имеющем форму пластины, перпендикулярной ОЛН, возникает доменная структура, как правило, полосового характера. По мере увеличения поля, векторы намагниченности в доменах обоих знаков склоняются к направлению поля, так что энергия размагничивания уменьшается. В то же время, угол разворота вектора намагниченности внутри доменной границы, равный разности углов между направлениями векторов намагниченности соседних доменов, также уменьшается. То есть и энергия доменной границы также уменьшается. Баланс между плотностью энергии размагничивания и плотностью энергии доменных границ приводит к изменению периода полосовой доменной структуры.

Соотношение скоростей изменения той и другой энергий при изменении поля приводит к тому, что период доменной структуры по мере увеличения поля уменьшается. Наблюдаемое в эксперименте уменьшение периода в точке фазового перехода, по отношению к периоду в отсутствие поля, составляет до двух–трех раз. При этом факт полного исчезновения структуры трактуется как момент равенства или достаточной близости внешнего поля к величине поля анизотропии [25, 160, 161, 229–236]. Особенности исчезновения структуры в пленках с отклонением оси магнитной анизотропии от нормали к плоскости пленки, рассмотрены в работах [25, 30]. Более подробно этот вопрос обсуждается в главе 5 настоящей монографии.

Интересный инструмент исследования анизотропии дает наблюдение ориентационного перехода по упругим колебаниям, возбуждаемым за счет магнитострикции при движении доменной структуры [237, 238].

Теоретическое рассмотрение зависимости периода доменной структуры от поля в работах [229, 232–234] выполнено в предположении однородности распределения намагниченности по толщине образца. Однако в работе [230] было показано, что такое рассмотрение правомерно только достаточно далеко от точки перехода. Вблизи точки перехода, благодаря возрастанию магнитной восприимчивости и действию размагничивающего поля, характерный размер неоднородности распределения намагниченности приближается к толщине образца, поэтому учет неоднородности по толщине становится необходимым. При этом, согласно [229], период доменной структуры по мере приближения к точке фазового перехода стремится к нулю, тогда как в работе [231] утверждается, что период в этой точке стремится к конечному пределу, значительно от нуля отличному.

Определенное разрешение такого противоречия содержится в работе [25], где путем подробного экспериментального исследования с анализом производной зависимости периода от поля вблизи точки перехода, отдано предпочтение модели, рассмотренной в работе [230], учитывающей неоднородность распределения намагниченности по толщине образца.

Ориентационные переходы при поле, перпендикулярном ОЛН, наблюдаются также и в многоподрешеточных одноосных магнетиках. При этом за счет существования нескольких подрешеток, вместо единственного фазового перехода в одноподрешеточном магнетике, в многоподрешеточном таких переходов наблюдается несколько.

Особое разнообразие являют переходы в магнетиках с точкой температурной компенсации. Вблизи такой температуры поля перехода резко возрастают, что позволяет наблюдать доменную структуру в сильных (сравнимых с обменными) магнитных полях.

Фазовая диаграмма двухподрешеточного одноосного ферримагнетика при его намагничивании перпендикулярно ОЛН приведена в работе [239]. Отмечено существование двух коллинеарных фаз — низкотемпературной с обычными доменами и высокотемпературной с доменами сильного поля. Между этими фазами находится неколлинеарная фаза, где домены отсутствуют. При этом по полю могут существовать два интервала, где образец разбит на домены, разделенные промежутком, где домены отсутствуют. Границы переходов между фазами при изменении температуры и поля получены в работах [231, 240–245]. Наиболее последовательное рассмотрение доменной структуры одноосного двухподрешеточного ферримагнетика вблизи фазового перехода второго рода проведено в работе [246]. В [247–251] теоретически обосновано существование устойчивой доменной структуры в сильных магнитных полях — вплоть до «схлопывания» векторов намагниченности обеих подрешеток ($\sim 10^6$ Э). Интервал монодоменности вблизи температуры компенсации исследован в работах [252–254]. Экспериментальное исследование описанного круга явлений связано с трудностью получения

сильных магнитных полей (10^5–10^6 Э); обзор способов получения таких полей можно найти, например в [255–257].

Выводы по главе 1

В настоящей главе выполнен краткий обзор литературы, касающейся ферромагнитного резонанса в условиях ориентационного перехода.

Основные вопросы, освещенные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена главенствующая роль уравнения Ландау–Лифшица как основного уравнения движения намагниченности при описании явления ферромагнитного резонанса. Отмечена важность исследования ферромагнитного резонанса в материалах, обладающих кубической магнитной анизотропией, к числу которых принадлежит железоиттриевый гранат, обладающий рекордно низкими магнитными потерями. Отмечены оригинальные и обзорные работы, посвященные исследованию ферромагнитного резонанса в анизотропных материалах, в том числе в смешанных ферритах-гранатах, шпинелях, ортоферритах, как в объемных образцах, так и в тонких пленках. Приведены данные, касающиеся особенно сильного проявления анизотропных свойств магнитного резонанса в условиях параметрического возбуждения обменных спиновых волн. Приведены основные задачи, решающиеся с помощью ферромагнитного резонанса в устройствах памяти на цилиндрических магнитных доменах, такие как детектирование и зарождение доменов, а также продвижение доменных границ.

2. Отмечено наличие энергетической щели в спектре магнитного резонанса антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом, обусловленной одноосной анизотропией в сочетании с магнитострикцией. Обсуждено влияние щели на эффект сильной зависимости скорости упругой волны от внешнего магнитного поля, одним из вариантов интерпретации которого является возбуждение мягкой моды в точке фазового перехода второго рода. Отмечена важная роль ферромагнитного резонанса как весьма эффективного инструмента для измерения параметров магнитных материалов, в первую очередь анизотропии, намагниченности и магнитоупругих свойств, а также поведения и характера доменной структуры.

3. Кратко рассмотрены основные электродинамические свойства известных композиционных сред, состоящих из дискретных токовых элементов. Отмечена возможность создания сред, эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости которых одновременно являются отрицательными, так что в таких средах становится возможным распространение обратных волн, полезных для создания СВЧ устройств обработки информации. Отмечена возможность создания композиционных сред на основе ферритов, что обеспечивает возможность управления параметрами сред путем изменения магнитного поля. Особые преимущества может дать использование ферритов, обладающих

значительной магнитной анизотропией, реализация ориентационного перехода в которых значительно расширяет возможности магнитного управления.

4. Кратко упомянуты основные явления, сопровождающие ферромагнитный резонанс в нелинейном режиме. Отмечено различие между стабильными и нестабильными нелинейными процессами, Среди нестабильных процессов выделено параметрическое возбуждение обменных спиновых волн, мешающее развитию стабильных процессов значительной амплитуды. В качестве средства, препятствующего такому возбуждению, предложено намагничивание тонкой ферритовой пластины полем, перпендикулярным ее плоскости. Отражена возможность возбуждения в такой геометрии прецессии намагниченности со значительными углами отклонения от направления поля, вплоть до нескольких десятков градусов. Отмечена некоторая ограниченность известных работ, состоящая в недостаточном рассмотрении высокоамплитудной прецессии в условиях ориентационного перехода.

5. Рассмотрено соотношение понятий ориентационного и фазового переходов, отмечены характерные различия того и другого. Приведен вариант терминологии, используемый далее в настоящей монографии. Отмечено различие и приведены основные особенности фазовых переходов первого и второго рода. Кратко рассмотрены основные положения теории Ландау, основанной на разложении в ряд термодинамического потенциала по степеням параметра порядка. Упомянута теория критических индексов, дополняющая теорию Ландау учетом флуктуаций параметра порядка. Приведены примеры фазовых переходов первого и второго рода в магнетиках.

6. Рассмотрены основные работы, касающиеся ориентационных переходов в магнетиках, интерпретированных на основе теории Ландау. Отмечена роль доменов и указана возможность их существования в нескольких интервалах изменения внешнего поля, в том числе за счет образования угловой фазы. Упомянуто рассмотрение ориентационных переходов в дискретных композиционных структурах, представляющих собой совокупность свободно ориентирующихся диполей. Отмечена пионерская роль работы Смита–Бельерса в экспериментальном исследовании ферромагнитного резонанса при ориентационном переходе в одноосном магнетике. Упомянуты последовавшие далее другие работы по той же тематике, касающиеся как теории, так и эксперимента.

7. Рассмотрены некоторые особенности доменной структуры, важные для ориентационных переходов. Отмечено, что главным условием образования доменной структуры является равновесие между энергией поля размагничивания и энергией доменных границ. Приведены общие положения, лежащие а основе физики доменных границ. Кратко перечислены способы наблюдения доменов, такие как исторически первый — по скачкам Баркгаузена, последовавший за ним метод порошковых фигур и основной в настоящее время — по магнитооптическому эффекту Фарадея.

8. Отмечено значительное развитие физики микромагнетизма в связи с работами по применению цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) для систем памяти вычислительных машин. Перечислены основные виды доменных структур в пленках смешанных ферритов-гранатов с нормальной анизотропией — линейная полосовая, лабиринтная и решетки из ЦМД. Упомянуты «жесткие» цилиндрические магнитные домены, вертикальные и горизонтальные блоховские линии, отмечены некоторые свойства динамики доменов, в том числе эффект баллистического последействия. Приведены некоторые работы, касающиеся исследования движения доменов и вообще процессов локального перемагничивания магнитных пленок под действием сверхкоротких мощных импульсов света от фемтосекундного лазера.

9. Рассмотрено поведение доменной структуры магнетиков в условиях ориентационного перехода. Отмечена высокая эффективность наблюдения доменов по эффекту Фарадея вблизи фазового перехода второго рода, являющаяся важным инструментом для измерения параметров магнитной анизотропии пленок ферритов-гранатов. Рассмотрено уменьшение периода полосовой доменной структуры при увеличении касательного поля. Отмечено стремление периода в точке фазового перехода к конечной величине, как правило, в два–три раза меньшей периода в размагниченном состоянии. Отмечена возможность исследования анизотропии пленок по возбуждению в них упругих колебаний под действием переменного поля. Кратко упомянута теоретическая модель, учитывающая неоднородность распределения намагниченности по толщине пленки. Отмечено ее преимущество в интерпретации экспериментальных результатов по фазовому переходу в сравнении с моделью, такого распределения не учитывающей. Отмечена особенность реализации ориентационного перехода в многоподрешеточных магнетиках, состоящая в возможности существования нескольких фазовых переходов по температуре и полю с соответствующими интервалами существования доменных структур, в том числе в сверхсильных магнитных полях (до $\sim 10^6$ Э).

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ФЕРРОМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

В настоящей главе приведем краткие сведения, касающиеся математического аппарата, используемого в дальнейшем изложении при расчете параметров ферромагнитного резонанса. Поскольку в предыдущих монографиях настоящей серии [1, 2] подобному математическому аппарату было уделено значительное внимание, здесь ограничимся лишь краткой иллюстрацией некоторых математических приемов, необходимых далее.

Материал главы в преобладающей степени основан на литературных источниках, среди главных из которых можно отметить [4, 6–8, 258]. Остальные ссылки, ввиду их разнообразия и многочисленности, приведены в тексте.

2.1. Плотности энергии и эффективные поля

Поскольку важнейшим инструментом теоретического анализа ферромагнитного резонанса и ориентационных переходов является минимизация плотности энергии рассматриваемой структуры, кратко перечислим основные виды такой плотности, важные для дальнейшего изложения. Приведенные далее общие выражения присутствуют во множестве обзорных работ и учебных монографий, перечислить хотя бы небольшую часть из которых нет никакой возможности, поэтому отметим лишь [4, 6–8, 40, 134, 135, 258, 259], как наиболее близко соответствующие характеру последующего изложения.

2.1.1. Полная плотность энергии магнитного кристалла

Будем полагать, что полная плотность энергии магнитного кристалла имеет вид:

$$U = U_m + U_e + U_{me}, \tag{2.1}$$

где U_m — плотность магнитной энергии, U_e — плотность упругой энергии, U_{me} — плотность энергии магнитоупругого взаимодействия.

Плотность магнитной энергии определяется выражением

$$U_m = U_{ex} + U_H + U_M + U_a, \tag{2.2}$$

где U_{ex} — плотность энергии неоднородного обменного взаимодействия, U_H — плотность энергии взаимодействия намагниченности

с внешним полем, U_M — плотность энергии взаимодействии намагниченности с полем размагничивания, U_a — плотность энергии магнитной анизотропии.

Рассмотрим перечисленные виды энергии несколько подробнее.

Неоднородное обменное взаимодействие. U_{ex} — плотность энергии неоднородного обменного взаимодействия, имеющая несколько видов записи [4, 7, 8, 40]:

$$U_{ex} = \frac{A_0}{2aM_0^2}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right)^2 = \frac{1}{2}q_0\sum_{i,k}\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right)^2 = \frac{A}{M_0^2}\sum_{i,k}\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k}\right)^2, \quad (2.3)$$

где A_0, q_0, A — различные виды записи константы обменного взаимодействия, a — постоянная решетки магнитного кристалла;

Взаимодействие намагниченности с внешним полем. U_H — плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем $\mathbf{H}$:

$$U_H = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{H} = -(M_xH_x + M_yH_y + M_zH_z). \quad (2.4)$$

Взаимодействие намагниченности с полем размагничивания. U_M — плотность внутренней магнитостатической энергии:

$$U_M = -\frac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\mathbf{H}_p, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{H}_p$ — поле размагничивания, определяемое как градиент потенциала объемных и поверхностных «магнитных зарядов» [4, стр. 291]:

$$\mathbf{H}_p = -\operatorname{grad}\left(\int\limits_V \frac{\operatorname{div}\mathbf{M}}{R}\,dV - \oint\limits_S \frac{\operatorname{Div}\mathbf{M}}{R}\,dS\right). \quad (2.6)$$

В случае однородного внутреннего поля (образец в форме эллипсоида) поле размагничивания удобно выражается через тензор размагничивающих факторов:

$$\mathbf{H}_p = -\overleftrightarrow{N}\mathbf{M}, \quad (2.7)$$

вид которого для безграничной пластины в декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость которой совпадет с плоскостью Oxy, имеет вид

$$\overleftrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

При этом U_M для тонкой пластины в системе координат с осью Oz, перпендикулярной плоскости пластины, имеет вид:

$$U_M = 2\pi M_z^2. \quad (2.9)$$

Магнитная анизотропия. U_a — плотность энергии магнитной анизотропии, которую в общем случае удобно представить в виде

разложения в ряд по степеням нормированных компонент намагниченности ($m_i = M_i/M_0$):

$$U_a = \sum_{i=1}^{3} a_i m_i + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} m_i m_k + \sum_{i,k,l=1}^{3} a_{ikl} m_i m_k m_l + \ldots, \qquad (2.10)$$

где a_i, a_{ik}, a_{ikl} — константы анизотропии соответствующих порядков. В таком виде первое слагаемое описывает одноосную анизотропию, а второе и третье включает в себя кубическую.

При этом плотность энергии одноосной анизотропии с осью вдоль Oz, определяется выражением:

$$U_{a0} = K(m_x^2 + m_y^2), \qquad (2.11)$$

где K — константа одноосной анизотропии.

Плотность энергии кубической анизотропии с координатными осями вдоль ребер куба, имеет вид:

$$U_{ak} = K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) + K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \qquad (2.12)$$

где K_1 и K_2 — соответственно «первая» и «вторая» константы кубической анизотропии.

Упругость и магнитоупругость. Для полноты картины приведем выражения для плотностей упругой U_e и магнитоупругой U_{me} энергий также для случая кубической симметрии с той же ориентацией ячейки:

$$U_e = \frac{1}{2} c_{11}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + c_{12}(u_{xx}u_{yy} + u_{yy}u_{zz} + u_{zz}u_{xx}) + \\ + 2c_{44}(u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2), \qquad (2.13)$$

$$U_{me} = B_1(m_x^2 u_{xx} + m_y^2 u_{yy} + m_z^2 u_{zz}) + \\ + 2B_2(m_x m_y u_{xy} + m_y m_z u_{yz} + m_z m_x u_{zx}), \qquad (2.14)$$

где u_{ik} — тензор деформаций:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \qquad (2.15)$$

c_{11}, c_{12}, c_{44} — константы (модули) упругости, B_1, B_2 — «первая» и «вторая» константы магнитоупругого взаимодействия.

Более подробно различные виды плотности энергии рассматриваются по мере необходимости в соответствующих разделах настоящей монографии.

2.1.2. Эффективные поля

При расчете разнообразных эффектов с участием намагниченности, приведенные выражения для плотности энергии используются для нахождения «эффективных» полей. Не вдаваясь в подробности,

которые можно почерпнуть например из [7, стр. 68], приведем лишь стандартную формулу для такого вычисления:

$$H_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_p} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_p} \right)} \right]. \tag{2.16}$$

В этом выражении первое слагаемое соответствует эффективным полям, меняющимся в пространстве достаточно плавным образом, когда обменное взаимодействие себя еще не проявляет. Второе слагаемое относится именно к эффективному полю, меняющемуся в пространстве настолько резко, что обменное взаимодействие проявляется значительно. В случае волновых процессов первое слагаемое позволяет работать с волнами, порядок длины которых превышает 10^{-4} см, то есть с волнами длиннее одного микрона. Для более коротких волн следует учитывать обменное взаимодействие, отражаемое вторым слагаемым выражения (2.16). Необходим учет обменного взаимодействия также при расчете структуры доменных границ, так как их толщина в реальных материалах, как правило, составляет десятые и сотые доли микрона [4,40,258].

2.2. Динамическая восприимчивость магнитной среды

Важнейшим этапом анализа динамических явлений в магнетиках является вычисление динамической магнитной восприимчивости.

Согласно классическому определению [4, 258, 260], магнитная восприимчивость представляет собой коэффициент пропорциональности между усредненной по объему суммарной намагниченностью и действующим на эту намагниченность внешним по отношению к ней магнитным полем:

$$\chi = \frac{M}{H}. \tag{2.17}$$

Если к изотропной среде приложено постоянное магнитное поле, то вектор намагниченности в статическом состоянии принимает некое равновесное положение, определяемое этим полем в совокупности с другими постоянными полями (например размагничивания или магнитострикции), действующими внутри среды.

Если теперь в дополнение к постоянному приложено небольшое переменное поле, то вектор намагниченности прецессирует вокруг своего равновесного положения в соответствии с законом, определяемым уравнением Ландау–Лифшица.

В общем случае такая прецессия является нелинейной, так что намагниченность пропорциональна полю не в первой, а в более высокой степени. Однако при малой амплитуде переменного поля прецессию можно считать линейной, для описания каковой в уравнении Ландау–Лифшица надо произвести линеаризацию.

Следуя, в основном [6–9], а также [1, 2], покажем, как это можно сделать в случае линейных колебаний.

2.2.1. Уравнение Ландау–Лифшица и процедура линеаризации

Будем исходить из уравнения Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта [6–8]:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\alpha}{M_0}\left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right]. \tag{2.18}$$

Здесь $\gamma > 0$, при этом свободная прецессия является правой; $\mathbf{H}_e$ — эффективное поле, равное

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}, \tag{2.19}$$

где U — плотность энергии.

Раскрывая векторные произведения в уравнении (2.18), получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma\left(M_y H_z - M_z H_y\right) + \frac{\alpha}{M_0}\left(M_y \frac{\partial M_z}{\partial t} - M_z \frac{\partial M_y}{\partial t}\right); \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma\left(M_z H_x - M_x H_z\right) + \frac{\alpha}{M_0}\left(M_z \frac{\partial M_x}{\partial t} - M_x \frac{\partial M_z}{\partial t}\right); \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma\left(M_x H_y - M_y H_x\right) + \frac{\alpha}{M_0}\left(M_x \frac{\partial M_y}{\partial t} - M_y \frac{\partial M_x}{\partial t}\right). \tag{2.22}$$

Теперь полагаем

$$\mathbf{H} = \{h_x, h_y, H_0 + h_z\}; \tag{2.23}$$

$$\mathbf{M} = \{m_x, m_y, M_0 + m_z\}, \tag{2.24}$$

где H_0 и M_0 — постоянные.

Подставляя (2.23)–(2.24) в (2.20)–(2.22), получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma\left[m_y\left(H_0 + h_z\right) - \left(M_0 + m_z\right) h_y\right] + \\ + \frac{\alpha}{M_0}\left[m_y \frac{\partial m_z}{\partial t} - \left(M_0 + m_z\right)\frac{\partial m_y}{\partial t}\right]; \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma\left[\left(M_0 + m_z\right) h_x - m_x\left(H_0 + h_z\right)\right] + \\ + \frac{\alpha}{M_0}\left[\left(M_0 + m_z\right)\frac{\partial m_x}{\partial t} - m_x \frac{\partial m_z}{\partial t}\right]; \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma\left(m_x h_y - m_y h_x\right) + \frac{\alpha}{M_0}\left(m_x \frac{\partial m_y}{\partial t} - m_y \frac{\partial m_x}{\partial t}\right). \tag{2.27}$$

Это — полные уравнения движения для вектора намагниченности с учетом затухания.

Теперь займемся линеаризацией этих уравнений, для чего положим

$$h_x \sim h_y \sim h_z \sim m_x \sim m_y \sim m_z \sim \frac{\partial m_x}{\partial t} \sim \frac{\partial m_y}{\partial t} \sim \frac{\partial m_z}{\partial t} \ll H_0 \sim M_0. \tag{2.28}$$

Линеаризация состоит в пренебрежении в выражениях (2.25)–(2.27) всеми слагаемыми порядка $m_i m_k$, $m_i \dot{m}_k$, $m_i h_k$, в результате чего вместо полных уравнений (2.25)–(2.27) получаются линеаризованные:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma(m_y H_0 - M_0 h_y) - \alpha \frac{\partial m_y}{\partial t}; \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma(M_0 h_x - H_0 m_x) + \alpha \frac{\partial m_x}{\partial t}; \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = 0. \tag{2.31}$$

Третье уравнение здесь говорит о постоянстве z-компоненты вектора намагниченности, то есть в динамике его можно не рассматривать.

Положим теперь гармоническую зависимость от времени для поля и намагниченности в виде

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 e^{i\omega t}; \tag{2.32}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 e^{i\omega t}. \tag{2.33}$$

Для упрощения записи индексы «0» при амплитудах переменных величин далее опускаем.

Подставляя (2.32)–(2.33) в (2.29)–(2.30) и выполняя упрощающие алгебраические преобразования, получаем

$$i\omega m_x + (\gamma H_0 + i\omega\alpha) m_y = \gamma M_0 h_y; \tag{2.34}$$

$$(\gamma H_0 + i\omega\alpha) m_x - i\omega m_y = \gamma M_0 h_x. \tag{2.35}$$

Это — система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решая ее, например, методом расширенной матрицы (правило Крамера — [261, стр. 45, формула (1.9-3)], а также [262, стр. 55, формула (12), замечание на стр. 67]), получаем

$$m_x = -\frac{\gamma M_0(\gamma H_0 + i\omega\alpha)}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2} h_x - \frac{i\omega\gamma M_0}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2} h_y; \tag{2.36}$$

$$m_y = \frac{i\omega\gamma M_0}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2} h_x - \frac{\gamma M_0(\gamma H_0 + i\omega\alpha)}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2} h_y. \tag{2.37}$$

2.2.2. Тензор магнитной восприимчивости

Введем тензор магнитной восприимчивости, в классическом представлении имеющий вид [6–8, 263]

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \chi & i\chi_a & 0 \\ \hline -i\chi_a & \chi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{2.38}$$

где

$$\chi = -\frac{\gamma M_0(\gamma H_0 + i\omega\alpha)}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2}; \tag{2.39}$$

$$\chi_a = -\frac{\omega\gamma M_0}{\omega^2 - (\gamma H_0 + i\omega\alpha)^2}. \tag{2.40}$$

При этом (2.36)–(2.37) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} m_x \\ \hline m_y \\ \hline m_z \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{\chi} \begin{pmatrix} h_x \\ \hline h_y \\ \hline h_z \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

или, учитывая нулевые (в результате линеаризации) значения компонент векторов поля и намагниченности, в укороченном виде:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ \hline m_y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \chi & i\chi_a \\ \hline -i\chi_a & \chi \end{array}\right) \begin{pmatrix} h_x \\ \hline h_y \end{pmatrix}, \tag{2.42}$$

то есть:

$$m_x = \chi h_x + i\chi_a h_y; \tag{2.43}$$

$$m_y = -i\chi_a h_x + \chi h_y. \tag{2.44}$$

Замечание. Здесь и далее при записи тензоров и векторов в виде таблиц пунктирные линии носят разграничительный характер и введены для удобства.

2.2.3. Тензор магнитной проницаемости

Из приведенных здесь выражений видно, что восприимчивость за счет гиромагнитных свойств среды имеет тензорный характер. При этом и проницаемость, определяемая как

$$\overleftrightarrow{\mu} = 1 + 4\pi\overleftrightarrow{\chi}, \tag{2.45}$$

также является тензором:

$$\overleftrightarrow{\mu} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 + 4\pi\chi & i4\pi\chi_a & 0 \\ \hline -i4\pi\chi_a & 1 + 4\pi\chi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mu & i\mu_a & 0 \\ \hline -i\mu_a & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{2.46}$$

где:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi; \tag{2.47}$$

$$\mu_a = 4\pi\chi_a. \tag{2.48}$$

Замечание. Из выражений (2.38) и (2.46) можно видеть, что диагональная компонента восприимчивости χ_{33} равна нулю и соответствующая компонента проницаемости μ_{33} равна единице. Однако такое обстоятельство безусловно имеет место только при выборе диссипативного

члена уравнения Ландау–Лифшица (2.18) в форме Гильберта [9]. При использовании других форм диссипативного члена эти компоненты принимают несколько отличные он нуля и единицы значения. При этом восприимчивость (2.38) и проницаемость (2.46) записываются в виде

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \chi & i\chi_a & 0 \\ \hline -i\chi_a & \chi & 0 \\ \hline 0 & 0 & \chi_{||} \end{array}\right); \tag{2.49}$$

$$\overleftrightarrow{\mu} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mu & i\mu_a & 0 \\ \hline -i\mu_a & \mu & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu_{||} \end{array}\right). \tag{2.50}$$

При малой диссипации величины $\chi_{||}$ и $\mu_{||}$ мало отличаются от нуля и единицы соответственно. Явный вид выражений для $\chi_{||}$ и $\mu_{||}$ можно найти, например в [6–8]. Там же утверждается, что выбор диссипативного члена в виде, отличном от формы Гильберта, требуется в случае изменения длины вектора намагниченности в ходе прецессии. При этом имеют место так называемые «продольная» и поперечная» релаксации. Различение двух видов релаксации важно при рассмотрении парамагнитного резонанса, а также при интерпретации некоторых явлений автомодуляционного характера при нелинейном ферромагнитном резонансе [10]. В рамках настоящей монографии длина вектора намагниченности всегда считается постоянной, так что, можно полагать, что использование диссипативного члена в форме Гильберта является оправданным.

2.2.4. Различные виды записи компонент тензора восприимчивости

Отметим некоторые более короткие виды записи полученных выражений. Так, часто используется обозначение [6–8]

$$\omega_H = \gamma H_0, \tag{2.51}$$

При этом выражения (2.36)–(2.37), после раскрытия скобок в знаменателях, принимают вид:

$$m_x = \frac{\gamma M_0(\omega_H + i\omega\alpha)}{\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H} h_x + \frac{i\omega\gamma M_0}{\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H} h_y; \tag{2.52}$$

$$m_y = \frac{i\omega\gamma M_0}{\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H} h_x + \frac{\gamma M_0(\omega_H + i\omega\alpha)}{\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H} h_y; \tag{2.53}$$

так что компоненты тензора восприимчивости записываются в виде

$$\chi = \frac{\gamma M_0(\omega_H + i\omega\alpha)}{\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}; \tag{2.54}$$

$$\chi_a = \frac{\omega\gamma M_0}{\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega\omega_H}. \tag{2.55}$$

Это — классические выражения, совпадающие с приведенными в [6–8].

При рассмотрении магнитостатических волн [1, 2] определенное сокращение записи дает введение нормированных обозначений:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \tag{2.56}$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}. \tag{2.57}$$

Компоненты тензора восприимчивости при этом равны

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\frac{(\Omega_H + i\alpha\Omega)}{\Omega_H^2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + 2i\alpha\Omega\Omega_H}; \tag{2.58}$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega}{\Omega_H^2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + 2i\alpha\Omega\Omega_H}. \tag{2.59}$$

В отсутствие затухания, то есть при $\alpha = 0$, эти выражения переходят в следующие:

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2}; \tag{2.60}$$

$$\chi_a = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2}. \tag{2.61}$$

Именно эти выражения для восприимчивости используются при рассмотрении дисперсии магнитостатических волн в ферритовых пленках и структурах на их основе [1, 2].

2.2.5. Частотная зависимость и резонансная частота

Из структуры выражений (2.39)–(2.40), а также эквивалентных им (2.54)–(2.55) и (2.58)–(2.59), можно видеть, что по отношению к частоте ω или полю H_0 они имеют резонансный характер.

В отсутствие затухания (например для (2.60)–(2.61)) на резонансной частоте имеется расходимость, при наличии же затухания все перечисленные выражения остаются конечными. При этом резонансная частота равна точно Ω_H или, с учетом с (2.56), (2.57):

$$\omega_{\text{res}} = \gamma H_0. \tag{2.62}$$

Однако при наличии затухания резонансная частота несколько изменяется. Рассмотрим такое изменение на примере (2.54)–(2.55).

Из этих выражений, освобождаясь от мнимости в знаменателе и записывая отдельно действительную и мнимую части, получаем:

$$\chi' = \frac{\gamma M_0 \left\{ \omega_H [\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2] + 2\alpha^2\omega^2\omega_H \right\}}{\left[\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + (2\alpha\omega\omega_H)^2}; \tag{2.63}$$

$$\chi'' = \frac{\alpha\omega\gamma M_0 \left\{ [\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2] - 2\omega_H^2 \right\}}{\left[\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + (2\alpha\omega\omega_H)^2}; \tag{2.64}$$

$$\chi'_a = \frac{\omega\gamma M_0 \left[\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]}{\left[\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + (2\alpha\omega\omega_H)^2}; \tag{2.65}$$

$$\chi''_a = \frac{2\alpha\omega^2\omega_H\,\gamma M_0}{\left[\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2\right]^2 + (2\alpha\omega\omega_H)^2}. \tag{2.66}$$

В качестве примера на рис. 2.1 приведены зависимости действительной χ' (*а*) и мнимой χ'' (*б*) частей компоненты тензора восприимчивости χ от частоты. Кривые построены по формулам (2.63), (2.64) при нескольких значениях параметра затухания.

Из рис. 2.1, *а* видно, что действительная часть χ' компоненты восприимчивости χ, начинаясь на уровне вблизи нуля, по мере увеличения частоты сначала возрастает, после чего, пройдя через максимум, резко убывает, затем проходит через минимум и снова возрастает, асимптотически стремясь к нулю. Прохождение кривой через нуль на участке резкого спада соответствует резонансу. В отсутствие затухания в этой точке имеется расходимость, так что по обе стороны от нее кривая стремится к той или иной бесконечности, в соответствии с формулой (2.60). По мере увеличения затухания (от кривой *1* к кривой *3*) экстремумы кривой соответственно сглаживаются, так что зависимость постепенно приобретает апериодический характер, при котором экстремумы вообще отсутствуют.

Из рис. 2.1, *б* видно, что мнимая часть χ'' компоненты восприимчивости χ, начинаясь на уровне вблизи нуля, по мере увеличения частоты сначала спадает, после чего, пройдя через минимум, снова стремится к нулю. Минимум как раз соответствует резонансу, так что имеет место примерно на той же частоте, что и прохождение кривых через нуль на рис. 2.1, *а*. Заметим, что соответствие частот является хотя и близким, но не совсем точным, о чем будет сказано далее. По мере увеличения затухания глубина минимума падает, так что вся кривая как целое стремится к нулю.

Приведенные на рис. 2.1 зависимости отражают поведение только компоненты χ. Компонента χ_a ведет себя подобным образом. О характере ее поведения можно судить из сходства формул (2.60) и (2.61).

Рис. 2.1. Зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей компоненты тензора восприимчивости χ от частоты при различных значениях параметра затухания α: *1* — 0,01; *2* — 0,02; *3* — 0,04. Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 500$ Э

Более подробно с характером компонент χ и χ_a можно познакомиться, например, по [6–8].

2.2.6. Два определения резонансной частоты

Рассмотрим теперь вопрос о соответствии резонансных значений частот по (2.63) и (2.64) несколько более подробно. Из структуры этих выражений можно видеть, что при любых значениях ω_H и ω в случае $\alpha \neq 0$ знаменатель всегда отличен от нуля, так что расходимость отсутствует. При небольшом затухании можно приближенно положить,

что резонанс соответствует нулевому значению первого слагаемого знаменателя, то есть условию:

$$\omega_H^2 - (1+\alpha^2)\omega^2 = 0, \tag{2.67}$$

так что при заданном поле H_0 резонансная частота равна:

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\gamma H_0, \tag{2.68}$$

а при заданной частоте ω резонансное поле равно:

$$H_{\text{res}} = \sqrt{1+\alpha^2}\,\frac{\omega}{\gamma}. \tag{2.69}$$

Из (2.68) и (2.69) можно видеть, что при увеличении затухания α резонансная частота понижается, а резонансное поле увеличивается. Такой вывод, особенно относительно частоты (2.68), представляется естественным, если учесть, что при увеличении затухания сопротивление движению системы возрастает (увеличивается сила трения), так что свободные колебания системы, определяющие частоту резонанса, становятся более медленными.

Не совсем так, однако, обстоит дело в случае подобного рассмотрения частотной зависимости действительной и мнимой частей компонент тензора восприимчивости. Так, из рассмотрения рис. 2.1 можно видеть, что при резонансе действительная часть компоненты восприимчивости χ' проходит через нуль и меняет знак, а мнимая χ'' проходит через минимум, знака не меняя. В качестве определения резонанса можно рассматривать два варианта:

1) максимальную амплитуду колебаний, то есть середину между экстремумами кривой χ' или точку прохождения этой кривой через нуль;

2) максимальное поглощение энергии колебаний, то есть минимум кривой χ''.

На рис. 2.1 различие между этими вариантами не просматривается из-за относительной грубости чертежа (с точностью до ширины линий обе точки при всех принятых там параметрах затухания практически совпадают), поэтому обратимся к численным данным. Подробный расчет, выполненный при тех же параметрах, что на рис. 2.1, с точностью до семи значащих цифр, показывает, что прохождение кривой χ' через нуль при параметре затухания $\alpha = 0{,}01$ имеет место на частоте 1400,070 МГц, при параметре затухания $\alpha = 0{,}02$ — на частоте 1400,280 МГц и при параметре затухания $\alpha = 0{,}04$ — на частоте 1401,122 МГц. То есть, по мере увеличения затухания частота прохождения кривой χ' через ноль увеличивается.

В то же время, минимум кривой χ'' при $\alpha = 0{,}01$ имеет место на частоте 1399,929 МГц, при $\alpha = 0{,}02$ — на частоте 1399,720 МГц и при $\alpha = 0{,}04$ — на частоте 1398,825 МГц. То есть, по мере увеличения затухания частота минимума кривой χ'' понижается.

Таким образом, если исходить из качественного физического смысла задачи, то есть из того, что с повышением затухания системе двигаться становится труднее, и собственная частота колебаний понижается, то можно сделать вывод, что более корректным является определение частоты резонанса по второму из отмеченных определений, то есть по минимуму χ'', что совпадает с выводом, сделанном выше на основе рассмотрения (2.67)–(2.68).

Замечание. Главенствующая роль χ'' и χ''_a в поглощении энергии, вообще говоря, с физической стороны интуитивно понятна. В самом деле, как видно из (2.64) и (2.66), обе эти компоненты пропорциональны параметру затухания α, то есть при отсутствии затухания равняются нулю. В то же время χ' и χ'_a, то есть (2.63) и (2.65), в отсутствие затухания от нуля отличны. Поскольку затухание колебаний происходит из-за поглощения их энергии средой, то можно полагать, что за такое поглощение ответственны именно компоненты χ'' и χ''_a. Более подробное рассмотрение этого вопроса, опирающееся на понятие вектора Пойнтинга, любознательный читатель может найти, например, в монографиях [7, стр. 257–259, 8, стр. 119–122].

2.2.7. Два вида записи тензора восприимчивости

Наиболее традиционным видом записи тензора динамической восприимчивости для гиротропной среды является (2.38) или (2.49):

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \chi & i\chi_a & 0 \\ \hline -i\chi_a & \chi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{2.70}$$

в котором некоторые компоненты полагаются заведомо равными нулю. Однако, как будет показано далее (главы 6–8), в условиях ориентационного перехода тензор восприимчивости может насчитывать отличными от нуля все девять компонент, причем условия симметрии между ними могут быть достаточно сложными. Поэтому в ряде случаев имеет смысл записывать тензор восприимчивости в более общем виде со всеми девятью компонентами:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \hline \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \hline \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{array}\right). \tag{2.71}$$

Вычисление явного вида этих компонент оставим до следующих разделов, а здесь покажем связь между обеими системами обозначений.

Будем считать, что все компоненты имеют как действительную, так и мнимую части и рассмотрим в качестве примера первые две

компоненты первой строки каждого тензора. Таким образом, будем полагать, что:

$$\chi = \chi' + i\chi''; \tag{2.72}$$
$$\chi_a = \chi'_a + i\chi''_a, \tag{2.73}$$

а также:

$$\chi_{xx} = \chi'_{xx} + i\chi''_{xx}; \tag{2.74}$$
$$\chi_{xy} = \chi'_{xy} + i\chi''_{xy}. \tag{2.75}$$

Из условия равенства компонент по их расположению в матрице тензора, то есть $\chi \to \chi_{xx}$ и $i\chi_a \to \chi_{xy}$, получаем:

$$\chi'_{xx} = \chi'; \tag{2.76}$$
$$\chi''_{xx} = \chi''; \tag{2.77}$$

а также:

$$\chi'_{xy} = -\chi''_a; \tag{2.78}$$
$$\chi''_{xy} = \chi'_a. \tag{2.79}$$

Соотношение между компонентами χ и χ_{xx} очевидно из соотношений (2.76) и (2.77), а соотношение между компонентами χ_a и χ_{xy} иллюстрируется рис. 2.2.

Из этого рисунка можно видеть, что действительная часть χ'_a подобна мнимой части χ''_{xy}, а мнимая часть χ''_a подобна действительной части χ'_{xy} с противоположным знаком. То есть действительная и мнимая части χ_a и χ_{xy} меняются ролями, а мнимая часть еще меняет знак. Такое изменение происходит из-за того, что при записи тензора в виде (2.70) симметричные относительно главной диагонали компоненты содержат в качестве множителя мнимую единицу i, тогда как при записи тензора в виде (2.71), у расположенных на тех же местах компонент этот множитель отсутствует.

2.2.8. Замечание о зависимости компонент тензора от поля

Приведенные здесь зависимости рассматривают изменение тензора восприимчивости от частоты. Однако, например, из формул (2.60)–(2.61), можно видеть, что подобного изменения можно достичь, оставляя частоту постоянной, но меняя поле. В этих формулах такая возможность прослеживается наиболее очевидным образом, так как ее наглядному выявлению не мешает затухание, хотя во всех остальных выражениях (2.54), (2.55), (2.58), (2.59), а также (2.63)–(2.66) она также имеет место в той же степени. Зависимости компонент тензора χ и χ_a от поля имеют примерно такой же вид, как и зависимости от частоты, с точностью до противоположного знака. То есть, например, зависимость χ' от H при фиксированной частоте по мере увеличения поля сначала падает, затем проходит участок резкого

Рис. 2.2. Иллюстрация соотношения между действительными и мнимыми частями компонент χ_a и χ_{xy}. Масштаб по вертикальным осям — условный. Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; $H = 500$ Э, $\alpha = 0{,}01$

подъема, после чего снова падает, так что имеет тот же вид, что кривые на рис. 2.1, но с противоположным знаком. Зависимость χ'' также имеет единственный экстремум, но будучи в положительной области значений, вместо минимума — максимум. То же касается зависимостей действительной и мнимой частей компоненты χ_a от поля, они имеют вид, подобный таковым от частоты, но противоположный знак. Некоторые отличия касаются размера кривых по вертикали, однако их резонансный характер полностью сохраняется. Более подробно соотношение между частотными и полевыми зависимостями компонент тензора восприимчивости можно найти, например в [8, стр. 21].

Следует заметить, что оба вида зависимостей являются полностью эквивалентными, однако при практическом использовании тому или другому виду зависимостей, как правило, отдается определенное предпочтение.

Так, большинство экспериментов по ферромагнитному резонансу проводятся с помощью спектрометров, работающих на фиксированной частоте, при изменении поля. К таким спектрометрам относится, например, использовавшийся в описываемых далее экспериментах по наблюдению ФМР в пленках ферритов-гранатов с наклоном оси анизотропии (раздел 7.6) спектрометр ЭПА-2М, работающий

на фиксированной частоте 9500 МГц в интервале изменения поля от 0 до 5000 Э. С другой стороны, большинство экспериментов по распространению электромагнитных волн, особенно магнитостатических [1, 2], выполняются с помощью спектрометров, работающих в режиме развертки по частоте при фиксированном поле, создаваемом внешним постоянным или электромагнитом. К таким спектрометрам относится использовавшийся в большинстве работ, посвященных исследованию распространения магнитостатических волн в неоднородных полях и сложных структурах [1, 2], измеритель комплексных коэффициентов передачи типа Р4-23 или подобный ему панорамный измеритель типа Р2-52–Р2-58 [1, стр. 125–132].

В настоящем разделе отдано предпочтение зависимости компонент восприимчивости не от поля, а от частоты из-за того, что далее (глава 8) описывается композиционная среда, состоящая из анизотропных ферритовых частиц, основным назначением которой предполагается использование не столько ее чисто резонансных, сколько наиболее общих волноведущих свойств, для описания которых частотные зависимости являются более удобными.

2.2.9. Полные уравнения движения для намагниченности

В предыдущих разделах получены уравнения движения для намагниченности в виде (2.25)–(2.27), из которых получены линеаризованные уравнения (2.29)–(2.31). Именно такой линеаризованный вид позволил найти тензор динамической восприимчивости (2.38) с его компонентами (2.39), (2.40) или в других видах записи (2.54), (2.55), (2.58), (2.59), в том числе в комплексном виде (2.63)–(2.66).

Все эти выражения получены в линейном приближении, то есть при малых амплитудах прецессии намагниченности. Однако имеется целый ряд задач, где линейное приближение является недостаточным, так как требуется рассматривать прецессию намагниченности в условиях большой амплитуды. То есть в системе уравнений движения уже нельзя ограничиться только двумя уравнениями для поперечных составляющих намагниченности, а необходимо также учитывать продольную, ориентированную вдоль постоянного поля. Приведем краткий вывод полных уравнений для этого случая.

Будем исходить из уравнения движения вектора намагниченности Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта (2.18):

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma\,[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e] + \frac{\alpha}{M_0}\left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right]. \tag{2.80}$$

Здесь $\gamma > 0$, при этом свободная прецессия является правой; $\mathbf{H}_e$ — эффективное поле, равное

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}, \tag{2.81}$$

где U — плотность энергии.

Введем нормированную намагниченность в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{M_0}. \tag{2.82}$$

При этом (2.80) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma\,[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e] + \alpha\left[\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}\right], \tag{2.83}$$

причем:

$$\mathbf{H}_e = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{m}}. \tag{2.84}$$

Здесь предполагается, что полная длина вектора намагниченности сохраняется, то есть

$$M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2, \tag{2.85}$$

или

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1. \tag{2.86}$$

В декартовой системе координат входящие в (2.83) векторные произведения имеют вид

$$[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_e] = \mathbf{i}(m_y H_{ez} - m_z H_{ey}) + \mathbf{j}(m_z H_{ex} - m_x H_{ez}) + \\ + \mathbf{k}(m_x H_{ey} - m_y H_{ex}); \tag{2.87}$$

$$\left[\mathbf{m} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}\right] = \mathbf{i}\left(m_y \frac{\partial m_z}{\partial t} - m_z \frac{\partial m_y}{\partial t}\right) + \mathbf{j}\left(m_z \frac{\partial m_x}{\partial t} - m_x \frac{\partial m_z}{\partial t}\right) + \\ + \mathbf{k}\left(m_x \frac{\partial m_y}{\partial t} - m_y \frac{\partial m_x}{\partial t}\right). \tag{2.88}$$

Подставляя (2.87) и (2.88) в (2.83), получаем уравнения движения для $m_{x,y,z}$:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma(m_y H_{ez} - m_z H_{ey}) + \alpha\left(m_y \frac{\partial m_z}{\partial t} - m_z \frac{\partial m_y}{\partial t}\right); \tag{2.89}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma(m_z H_{ex} - m_x H_{ez}) + \alpha\left(m_z \frac{\partial m_x}{\partial t} - m_x \frac{\partial m_z}{\partial t}\right); \tag{2.90}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma(m_x H_{ey} - m_y H_{ex}) + \alpha\left(m_x \frac{\partial m_y}{\partial t} - m_y \frac{\partial m_x}{\partial t}\right). \tag{2.91}$$

Можно видеть, что эти уравнения с точностью до нормировки на M_0 совпадают с уравнениями (2.20)–(2.22) или (2.25)–(2.27).

Замечание. Во избежание путаницы следует учитывать, что там малой буквой $m_{x,y}$ обозначалась малая добавка к величине вектора намагниченности, где малым размером буквы подчеркивалась малость самой добавки, то есть полагалось $m_{x,y} \ll M_0$, а также $m_z = 0$. Такое предположение было необходимо для успешного выполнения последующей линеаризации. Здесь же малая буква $m_{x,y,z}$ означает нормированную компоненту намагниченности по соответствующей координате, с величиной этой компоненты никак не связанную, то есть любая

из компонент m_x, m_y, а также m_z может иметь тот же порядок величины, что и M_0, необходимо лишь, чтобы выполнялось соотношение (2.86).

Выделим из уравнений (2.89)–(2.91) производные по времени:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} + \alpha m_z \frac{\partial m_y}{\partial t} - \alpha m_y \frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma(m_y H_{ez} - m_z H_{ey}); \tag{2.92}$$

$$-\alpha m_z \frac{\partial m_x}{\partial t} + \frac{\partial m_y}{\partial t} + \alpha m_x \frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma(m_z H_{ex} - m_x H_{ez}); \tag{2.93}$$

$$\alpha m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} - \alpha m_x \frac{\partial m_y}{\partial t} + \frac{\partial m_z}{\partial t} = -\gamma(m_x H_{ey} - m_y H_{ex}). \tag{2.94}$$

Решим полученную систему уравнений (2.92)–(2.94) относительно производных по времени, например, с помощью правила Крамера [261, 262]. Ее расширенная матрица имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial m_x}{\partial t} & \dfrac{\partial m_y}{\partial t} & \dfrac{\partial m_z}{\partial t} \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c} 1 & \alpha m_z & -\alpha m_y \\ \hline -\alpha m_z & 1 & \alpha m_x \\ \hline \alpha m_y & -\alpha m_x & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} -\gamma(m_y H_{ez} - m_z H_{ey}) \\ \hline -\gamma(m_z H_{ex} - m_x H_{ez}) \\ \hline -\gamma(m_x H_{ey} - m_y H_{ex}) \end{array}\right|. \tag{2.95}$$

Детерминант с учетом (2.86) равен:

$$D_0 = \left|\begin{array}{c|c|c} 1 & \alpha m_z & -\alpha m_y \\ \hline -\alpha m_z & 1 & \alpha m_x \\ \hline \alpha m_y & -\alpha m_x & 1 \end{array}\right| = 1 + \alpha^2. \tag{2.96}$$

Решение имеет вид

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}\big[(m_y + \alpha m_x m_z)H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x)H_{ey} - \\ - \alpha(m_y^2 + m_z^2)H_{ex}\big]; \tag{2.97}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}\big[(m_z + \alpha m_y m_x)H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y)H_{ez} - \\ - \alpha(m_z^2 + m_x^2)H_{ey}\big]; \tag{2.98}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}\big[(m_x + \alpha m_z m_y)H_{ey} - (m_y - \alpha m_x m_z)H_{ex} - \\ - \alpha(m_x^2 + m_y^2)H_{ez}\big]. \tag{2.99}$$

Это — основная система уравнений для компонент намагниченности в случае рассмотрения нелинейных колебаний [3, 264–266]. Далее она будет использована в главах 7–10.

Замечание. Из структуры уравнений (2.97)–(2.99) можно видеть, что даже в отсутствие затухания, в том числе с учетом (2.32), (2.33) их не удается привести к виду, подобному (2.36)–(2.37), то есть

$$m_{x,y,z} = F_{x,y,z}(h_x, h_y, h_z), \tag{2.100}$$

где правая часть зависит только от компонент поля с постоянными коэффициентами. Такая трудность обусловлена их нелинейным видом, куда даже в отсутствие затухания входят произведения типа $m_i h_k$, а в случае учета затухания еще и $m_i m_k h_l$. Поэтому получение восприимчивости (2.17) в классическом виде, подобном (2.38), (2.49), (2.70), вряд ли возможно. Тем не менее, можно надеяться, что разрешение уравнений типа (2.97)–(2.99) все же осуществимо, в первую очередь, в численном виде (что несомненно), а кроме того, в каких-либо специфических случаях, например, при должном выборе системы координат или определенном соотношении входящих в эти уравнения величин (как это получается, например, при линеаризации).

2.3. Метод Смита–Сула

Метод Смита–Сула [7,8,31,267] представляет собой решение линеаризованного уравнения Ландау–Лифшица, выполненное в сферической системе координат. При этом эффективные поля отдельно не вычисляются, а формула для частоты ферромагнитного резонанса выражается через производные от плотности энергии по сферическим координатам.

Метод удобен для вычисления зависимостей резонансной частоты от величины постоянного поля в случае, когда ориентация такого поля меняется на большие углы, вплоть до полного оборота вокруг какой-то заданной оси, которую удобно совместить с полярной осью сферической системы координат. Приведем упрощенный вывод основной формулы Смита–Сула, в общих чертах следуя [7].

2.3.1. Уравнения движения намагниченности в декартовой системе координат

Будем исходить из уравнения движения для намагниченности Ландау–Лифшица без затухания [6–8]

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_e], \tag{2.101}$$

где γ — гиромагнитная постоянная ($\gamma > 0$), $\mathbf{M}$ — вектор намагниченности, в декартовой системе координат имеющий вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{i}M_x + \mathbf{j}M_y + \mathbf{k}M_z, \tag{2.102}$$

$\mathbf{H}_e$ — эффективное поле, в соответствии с (2.16), равное

$$\mathbf{H}_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial M_x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial M_y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial M_z}, \tag{2.103}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты) декартовой системы координат $Oxyz$, U — плотность энергии магнетика, являющаяся функцией компонент вектора намагниченности.

Запишем векторное произведение по компонентам (для упрощения записи индекс «e» у поля опускаем):

$$[\mathbf{M} \times \mathbf{H}] = \mathbf{i}(M_y H_z - M_z H_y) + \\ + \mathbf{j}(M_z H_x - M_x H_z) + \mathbf{k}(M_x H_y - M_y H_z). \quad (2.104)$$

Уравнение движения вектора намагниченности (2.101), записанное по компонентам, принимает вид:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma(M_y H_z - M_z H_y); \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma(M_z H_x - M_x H_z); \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma(M_x H_y - M_y H_x). \quad (2.107)$$

2.3.2. Переход к сферической системе координат

Рис. 2.3. Вектор намагниченности в сферической системе координат

Для дальнейшего рассмотрения обратимся к сферической системе координат, показанной на рис. 2.3.

Компоненты вектора намагниченности в такой системе имеют вид:

$$M_x = M \sin\theta \cos\theta; \quad (2.108)$$

$$M_y = M \sin\theta \sin\varphi; \quad (2.109)$$

$$M_z = M \cos\theta, \quad (2.110)$$

где M — полная длина вектора намагниченности.

Система уравнений движения намагниченности (2.105)–(2.107) содержит три переменных M_x, M_y, M_z, причем никаких ограничений на длину вектора $\mathbf{M}$ не накладывается. Сферическая система содержит две угловые переменные — полярный и азимутальный углы θ и φ, а третьей переменной здесь является длина вектора намагниченности M, причем все эти переменные могут зависеть от времени.

Уравнения движения (2.105)–(2.107) в левых частях содержат производные по времени от декартовых компонент намагниченности. Запишем эти производные в сферической системе с учетом зависимости от времени всех трех сферических переменных M, θ и φ:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(M \sin\theta \cos\varphi) = (\sin\theta \cos\varphi)\frac{\partial M}{\partial t} + \\ + (M \cos\theta \cos\varphi)\frac{\partial \theta}{\partial t} - (M \sin\theta \sin\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(M\sin\theta\sin\varphi) = (\sin\theta\sin\varphi)\frac{\partial M}{\partial t} + \\ + (M\cos\theta\sin\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial t} + (M\sin\theta\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t}; \quad (2.112)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(M\cos\theta) = (\cos\theta)\frac{\partial M}{\partial t} - (M\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (2.113)$$

Для правых частей уравнений системы (2.105)–(2.107) введем вспомогательные обозначения:

$$P_x = -\gamma(M_y H_z - M_z H_y); \quad (2.114)$$

$$P_y = -\gamma(M_z H_x - M_x H_z); \quad (2.115)$$

$$P_z = -\gamma(M_x H_y - M_y H_x). \quad (2.116)$$

Подставляя (2.111)–(2.113) и (2.114)–(2.116) в (2.105)–(2.107), получаем:

$$(\sin\theta\cos\varphi)\frac{\partial M}{\partial t} + (M\cos\theta\cos\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial t} - (M\sin\theta\sin\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = P_x; \quad (2.117)$$

$$(\sin\theta\sin\varphi)\frac{\partial M}{\partial t} + (M\cos\theta\sin\varphi)\frac{\partial\theta}{\partial t} + (M\sin\theta\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = P_y; \quad (2.118)$$

$$(\cos\theta)\frac{\partial M}{\partial t} - (M\sin\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} = P_z. \quad (2.119)$$

Это — система трех уравнений относительно трех неизвестных $\partial M/\partial t$, $\partial\theta/\partial t$, $\partial\varphi/\partial t$. Решая ее, находим:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = (P_x\sin\theta\cos\varphi + P_y\sin\theta\sin\varphi + P_z\cos\theta); \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{M}(P_x\cos\theta\cos\varphi + P_y\cos\theta\sin\varphi - P_z\sin\theta); \quad (2.121)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{M\sin\theta}(-P_x\sin\varphi + P_y\cos\varphi). \quad (2.122)$$

2.3.3. Сохранение длины вектора намагниченности

До этого места никаких ограничений на длину вектора намагниченности M не накладывалось. То есть полученная система пригодна для решения задач, в которых эта длина не сохраняется. К числу таких задач относится, например, учет затухания в форме Блоха [6–8] или просто колебания намагниченности достаточно большой амплитуды, в том числе при нелинейном ферромагнитном резонансе [10]. Намагниченность также может меняться в результате каких-то резко нестационарных процессов, например при возбуждении электронной системы проводящего магнетика под действием сильного импульса света от фемтосекундного лазера [208–228]. Однако в большинстве классических задач, касающихся ферромагнитного резонанса, длина вектора намагниченности остается постоянной, поэтому пока не будем останавливаться на подобной экзотике, а предположим, что длина

вектора $\mathbf{M}$ сохраняется, и будем обозначать ее как M_0. При этом из уравнения (2.120), при условии $\partial M/\partial t = 0$, получаем

$$P_z = -P_x \frac{\sin\theta\cos\varphi}{\cos\theta} - P_y \frac{\sin\theta\sin\varphi}{\cos\theta}. \tag{2.123}$$

Подставляя это выражение в (2.121) и (2.122), получаем систему из двух уравнений для двух оставшихся переменных:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{M_0\cos\theta}(P_x\cos\varphi + P_y\sin\varphi); \tag{2.124}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{M_0\sin\theta}(-P_x\sin\varphi + P_y\cos\varphi). \tag{2.125}$$

Это — система уравнений, характеризующая движение вектора намагниченности при условии сохранения его длины, записанная в сферической системе координат.

Здесь остаются не раскрытыми относительно сферических переменных параметры P_x и P_y. Обратимся теперь к их вычислению в явном виде. Согласно (2.114)–(2.115), эти параметры содержат эффективные поля, определяемые производными от плотности энергии по компонентам намагниченности (2.103). В соответствии с общим правилом нахождения частных производных [268, 269], заменим дифференцирование плотности энергии по компонентам намагниченности на дифференцирование по сферическим переменным:

$$H_x = -\frac{\partial U}{\partial M_x} = -\frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial M_x} - \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial M_x}; \tag{2.126}$$

$$H_y = -\frac{\partial U}{\partial M_y} = -\frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial M_y} - \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial M_y}; \tag{2.127}$$

$$H_z = -\frac{\partial U}{\partial M_z} = -\frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial M_z} - \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial M_z}. \tag{2.128}$$

Из (2.108)–(2.110) выразим сферические переменные через компоненты намагниченности:

$$\theta = \arccos\left(\frac{M_z}{M_0}\right); \tag{2.129}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{M_y}{M_x}\right). \tag{2.130}$$

Для дифференцирования воспользуемся табличными формулами [268–270]:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{2.131}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2.132}$$

Находя с помощью (2.129)–(2.132) частные производные $\partial\theta/\partial M_{x,y,z}$ и $\partial\varphi/\partial M_{x,y,z}$, подставляя их в (2.126)–(2.128) и выполняя приведение подобных членов, с учетом (2.108)–(2.110), получаем

$$H_x = \frac{\sin\varphi}{M_0\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \tag{2.133}$$

$$H_y = -\frac{\cos\varphi}{M_0\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \tag{2.134}$$

$$H_z = \frac{1}{M_0\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}. \tag{2.135}$$

Подставляя полученные значения полей в (2.114)–(2.115) и записывая компоненты намагниченности через сферические переменные (2.108)–(2.110), получаем

$$P_x = -\gamma\left(\sin\varphi\,\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right); \tag{2.136}$$

$$P_y = -\gamma\left(-\cos\varphi\,\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right). \tag{2.137}$$

Подставляя эти выражения в (2.124)–(2.125) и выполняя приведение подобных членов, получаем:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\gamma}{M_0\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}; \tag{2.138}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\gamma}{M_0\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\theta}. \tag{2.139}$$

Это — искомые уравнения движения вектора намагниченности в сферической системе координат, полученные при условии сохранения его длины. В этих уравнениях какие-либо ограничения на величины углов θ и φ отсутствуют, то есть можно полагать, что ими можно пользоваться при любой амплитуде колебаний намагниченности, в том числе при любом уровне нелинейности.

Тем не менее, следует заметить, что полученные уравнения оба содержат в знаменателях дробей $\sin\theta$, то есть при $\theta \to 0$ можно ожидать каких-то расходимостей. Однако так будет только при отличии от нуля производных $\partial U/\partial\varphi$ и $\partial U/\partial\theta$. В реальном же случае надо смотреть конкретную задачу, то есть конкретный вид функции $U(\theta,\varphi)$, которая при $\theta \to 0$ также может стремиться к нулю. Так будет, например, в случае одноосной анизотропии, ось которой совпадает с полярной осью системы координат. В этом случае вместо расходимости будет неопределенность типа деления нуль на нуль. При решении задачи такую неопределенность надо раскрывать. Более подробно вопрос о расходимости требует отдельного исследования, в рамках данной работы не проводившегося. На практике можно следовать рекомендации, приведенной в монографии [7, стр. 78]: «Если мы хотим «без раздумий» пользоваться методом Смита–Сула, то следует так выбирать полярную

ось, чтобы $\theta_0 \neq 0$. Это всегда возможно, потому что ... в методе Смита–Сула никаких ограничений на выбор оси не накладывается».

2.3.4. Линеаризация уравнений движения

Итак, вернемся к рассмотрению нелинейных уравнений (2.138)–(2.139) и выполним их линеаризацию. Необходимым условием линеаризации является малость амплитуды колебаний в окрестности точки равновесия. То есть сначала надо найти равновесное положение вектора намагниченности, после чего рассматривать малые отклонения вектора намагниченности от этого положения. Традиционным способом нахождения равновесия является минимизация плотности энергии, состоящая в приравнивании к нулю первых производных по координатам от плотности энергии [7, 8, 134].

Таким образом, первым этапом использования метода Смита–Сула является нахождение равновесного положения вектора намагниченности, то есть решение системы уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0; \tag{2.140}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \tag{2.141}$$

Если эти уравнения решены, то это означает, что найдены равновесные значения полярного и азимутального углов θ_S и φ_S.

Представим далее производные от плотности энергии по угловым координатам через малые отклонения $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$ от их равновесных положений в виде первого члена разложения в ряд по степеням:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_S + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\bigg|_S \Delta\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\bigg|_S \Delta\varphi = \\ = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)\bigg|_S \Delta\theta + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta\, \partial \varphi}\right)\bigg|_S \Delta\varphi; \tag{2.142}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)_S + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\bigg|_S \Delta\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\bigg|_S \Delta\varphi = \\ = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta\, \partial \varphi}\right)\bigg|_S \Delta\theta + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right)\bigg|_S \Delta\varphi, \tag{2.143}$$

где учтены равенства нулю первых производных в положении равновесия (2.140)–(2.141), а нижний индекс «S» означает, что производные берутся в точке положения равновесия.

Предположим теперь, что малые колебания намагниченности в окрестности положения равновесия являются гармоническими:

$$\Delta\theta = \theta_0 e^{i\omega t}; \tag{2.144}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}, \tag{2.145}$$

где θ_0 и φ_0 — соответствующие достаточно малые амплитуды.

Подставляя теперь (2.142)–(2.143) и (2.144)–(2.145) в уравнения (2.138)–(2.139), сокращая временной множитель и приводя подобные члены, получаем:

$$\left[i\omega + \frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_S}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right)_S\right]\theta_0 + \frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_S}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)_S \varphi_0 = 0; \quad (2.146)$$

$$-\frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_S}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_S \theta_0 + \left[i\omega - \frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_S}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right)_S\right]\varphi_0 = 0. \quad (2.147)$$

2.3.5. Решение уравнений движения. Формула Смита–Сула

Формулы (2.146) и (2.147) представляют собой систему однородных уравнений относительно амплитуд θ_0 и φ_0. Условием ненулевого решения является равенство нулю ее определителя, раскрывая который и извлекая из полученного выражения квадратный корень, получаем частоту собственных колебаний намагниченности:

$$\omega = \frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_S}\sqrt{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right)_S\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)_S - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right)_S^2}, \quad (2.148)$$

где индекс S означает, что производные и значение угла θ берутся в положении равновесия.

Это и есть знаменитая формула Смита–Сула, позволяющая найти частоту ферромагнитного резонанса в зависимости от ориентации магнитного поля. Как отмечено выше, ориентацию полярной оси сферической системы координат следует выбирать так, чтобы угол θ_S как можно больше отличался от нуля. Если ориентация поля меняется в какой-то плоскости, то оптимальным является выбор полярной оси перпендикулярно этой плоскости, то есть чтобы угол θ_S равнялся 90°.

Отметим еще, что часто для удобства записи индекс S опускают, а производные записывают с помощью нижних индексов. Так сделано, например, в [7, 8, 31, 267]. В этом случае (2.148) принимает вид:

$$\omega = \frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_0}\sqrt{U_{\theta\theta}U_{\varphi\varphi} - U_{\theta\varphi}^2}\,. \quad (2.149)$$

При этом индекс «0» при θ играет ту же роль, что и «S» в (2.148), то есть соответствует равновесному положению.

2.4. Методы решения уравнений высоких степеней

При расчете характеристик ферромагнитного резонанса в анизотропной среде, в том числе в условиях ориентационных переходов, часто встает задача нахождения равновесного положения вектора намагниченности. Такое положение, как правило, определяется действием нескольких факторов: поля анизотропии, поля размагничивания, внешнего поля. В магнитоупругой среде в формировании

равновесного состояния намагниченности также могут участвовать внутренние, внешние или спонтанные деформации.

Определение равновесного положения намагниченности необходимо как для определения характеристик самого ориентационного перехода, так и для расчета условий ферромагнитного резонанса, представляющего собой явление прецессии намагниченности вокруг этого равновесного положения.

Процедура определения равновесного положения намагниченности состоит в минимизации плотности полной энергии магнетика, в большинстве случаев представляющей собой сумму плотностей энергии анизотропии, внешнего поля и поля размагничивания. Иногда также сюда относятся плотности магнитоупругой и упругой энергий.

Такая минимизация включает в себя приравнивание к нулю первой производной от полной плотности энергии по намагниченности, что обычно приводит к возникновению уравнений высоких степеней, в первую очередь третьей и четвертой, которые требуют определенного решения.

В подавляющем большинстве случаев такое решение осуществляется численными методами: путем поиска нуля или методом установления, рассмотренного в главе 5 настоящей монографии. Однако оба эти метода, состоящие в большом количестве (десятки, сотни и более) однообразных операций, требуют определенного машинного времени, значительно возрастающего в случае, когда равновесное положение приходится находить многократно.

К таким задачам, например, относятся рассматриваемые далее особенности ориентационного перехода в пленках смешанных ферритов-гранатов (глава 5), ориентационные зависимости частоты ферромагнитного резонанса в пленках с одноосной и кубической анизотропией (глава 6), в пленках с наклоном оси легкого намагничивания (глава 7), частотные свойства композиционной среды, состоящей из отдельных частиц с различной ориентацией осей анизотропии (глава 8) и многие другие, за рамки настоящей монографии выходящие.

В ряде подобных случаев многократное применение численных методов приводит к нерациональному увеличению машинного времени за счет значительного количества шагов, требуемых для получения заданной точности.

Однако для решения уравнений третьей и четвертой степеней, кроме численных, существуют определенные аналитические методы, которые позволяют сразу за один проход получать требуемое решение, не прибегая к многократным повторениям одного и того же приближенного алгоритма. Можно полагать, что применение аналитических методов решения таких уравнений позволило бы значительно уменьшить машинное время, то есть облегчить решение весьма громоздких задач.

К сожалению, применение аналитических методов при решении уравнений третьей и четвертой степеней в известной авторам настоящей монографии практике расчетов ферромагнитного резонанса

и ориентационных переходов встречается крайне редко. С другой стороны, даже в специфической математической литературе найти достаточно подробное описание таких методов не всегда удается.

Поэтому авторы сочли весьма полезным включить в данную монографию настоящий раздел, посвященный именно аналитическим методам решения подобных уравнений. Рассмотрение ограничено лишь двумя методами: для уравнений третьей степени — методом Кардано, для уравнений четвертой — методом Феррари. Изложение будет в основном придерживаться методики, описанной в монографии [262], а также справочных данных, приведенных в [261].

2.4.1. Уравнения третьей степени

Рассмотрим полное уравнение третьей степени вида

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0. \tag{2.150}$$

Согласно общепринятой практике [261, стр. 44, 262, стр. 198], будем считать, что все коэффициенты a_0, a_1, a_2 и a_3 являются действительными (способ решения уравнения (2.150) при комплексных коэффициентах авторам настоящей монографии не известен).

В записанном в виде (2.150) уравнении присутствуют все степени неизвестного x. Покажем, что в любом случае (при $a_0 \neq 0$) из этого уравнения можно исключить вторую степень. Для этого заменим переменную, для чего представим x в виде

$$x = y + \varepsilon, \tag{2.151}$$

где y — новая переменная, а ε — постоянная величина, требующая определения.

В этом случае получаем

$$x^2 = y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2; \tag{2.152}$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2\varepsilon + 3y\varepsilon^2 + \varepsilon^3. \tag{2.153}$$

Подставив (2.151)–(2.153) в (2.150) и разделив на a_0, получаем

$$y^3 + \frac{3a_0\varepsilon + a_1}{a_0}y^2 + \frac{3a_0\varepsilon + 2a_0\varepsilon + a_2}{a_0}y + \frac{a_0\varepsilon + a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon + a_3}{a_0} = 0. \tag{2.154}$$

Потребуем выполнения равенства

$$\frac{3a_0\varepsilon + a_1}{a_0} = 0, \tag{2.155}$$

откуда получаем:

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{3a_0}. \tag{2.156}$$

То есть (2.151) принимает вид

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0}. \tag{2.157}$$

Подстановка (2.157) в (2.150), после приведения подобных членов, позволяет привести уравнение (2.150) к виду:

$$y^3 + ay + b = 0, \tag{2.158}$$

где введены обозначения:

$$a = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}; \tag{2.159}$$

$$b = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}. \tag{2.160}$$

Заметим, что поскольку все составляющие выражений a и b действительны, то и сами эти выражения тоже действительны.

Таким образом, полученное уравнение (2.158), будучи кубическим, второй степени неизвестной не содержит. Далее будем заниматься решением именно этого уравнения.

Замечание. Кроме непосредственного использования формул (2.159) и (2.160) возможна прямая подстановка (2.157) в (2.150), что часто технически проще. Однако при этом, если второе слагаемое в (2.157) является дробным, то при попытке приведения подобных членов в уравнении (2.150) появится общий множитель, который может быть вынесен за скобку. Однако сокращение на этот множитель может привести к появлению отличного от единицы коэффициента при y^3 в уравнении (2.158), что недопустимо, так как приводит к искажению величин a и b. Поэтому в случае появления такого коэффициента надо все члены полученного уравнения разделить на него, чтобы коэффициент при y^3 обязательно равнялся единице.

Представим теперь одно неизвестное y в виде суммы двух неизвестных u и v, то есть положим

$$y = u + v. \tag{2.161}$$

Подставляя (2.161) в (2.158), получаем,

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + a) + b = 0. \tag{2.162}$$

Так как вместо одного неизвестного y введены два: u и v, то между ними, в дополнение к (2.161), можно ввести какую-то связь. То есть будет как бы система из двух уравнений, неизвестными в которой будут u и v, а y будет выступать в качестве параметра. Выберем эти неизвестные так, чтобы выполнялось соотношение

$$3uv + a = 0, \tag{2.163}$$

или

$$uv = -\frac{a}{3}. \tag{2.164}$$

При этом уравнение (2.162) принимает вид

$$u^3 + v^3 = -b. \tag{2.165}$$

В то же время, из (2.164) получаем

$$u^3 v^3 = -\frac{a^3}{27}. \tag{2.166}$$

Таким образом, у нас имеется сумма величин u^3 и v^3 (2.165), а также их произведение (2.166). То есть эти неизвестные можно рассматривать как корни квадратного уравнения

$$z^2 + bz - \frac{a^3}{27} = 0, \tag{2.167}$$

решение которого имеет вид

$$z = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \tag{2.168}$$

так что

$$u^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}; \tag{2.169}$$

$$v^3 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}, \tag{2.170}$$

откуда

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}; \tag{2.171}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \tag{2.172}$$

Подставляя полученные выражения в (2.161), получаем решение уравнения (2.158) в виде известной формулы Кардано:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}. \tag{2.173}$$

Эта формула является основной при решении уравнения третьей степени в радикалах. В ее справедливости можно убедиться прямой подстановкой в уравнение (2.158).

В формулу (2.173) под знаком радикала третьей степени входит извлечение квадратного корня из выражения:

$$D = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}, \tag{2.174}$$

которое называется «дискриминантом» уравнения (2.158).

Замечание. В монографии [262, стр. 197] рассматривается выражение (2.174) со знаком «минус», и именно оно названо «дискриминантом». Однако в [261, стр. 45–50] рассматривается то же выражение со знаком «плюс». Тем не менее, в обоих случаях проводится, по существу, одинаковый анализ знака этого выражения. Авторы настоящей монографии затрудняются отдать предпочтение той или иной трактовке, однако далее, исходя из определенного удобства и учитывая тождественность получаемых окончательных результатов, используют в качестве «дискриминанта» именно выражение (2.174).

Итак, в зависимости от знака выражения (2.174), могут иметь место различные варианты решения, то есть может требоваться извлечение кубического корня как из действительного, так и из комплексного числа.

Рассмотрим возможные варианты решения, определяемые знаком дискриминанта уравнения (2.158), по отдельности.

Вариант № 1. Пусть значения величин a и b таковы, что $D > 0$. При этом результат извлечения квадратного корня будет действительным. Если при извлечении кубических корней в формуле (2.173) ограничиться только их действительными значениями, то получаемое решение будет также действительным. При этом, если условия задачи требуют получения именно действительного решения, то этим можно и ограничиться.

Если же требуется получить также комплексные решения, то следует учесть, что кубический корень из любого числа имеет три значения — одно действительное и два комплексно сопряженных, то есть при действительном значении кубического корня $\xi = \sqrt[3]{\alpha}$ имеются еще два комплексно сопряженных $\omega\xi$ и $\omega^2\xi$, где ω и ω^2 — мнимые кубические корни из единицы (обозначения заимствованы из [262, стр. 196]):

$$\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \tag{2.175}$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \tag{2.176}$$

Формулы (2.175) и (2.176) получаются в предположении, что уравнение

$$x^3 - 1 = 0 \tag{2.177}$$

имеет один действительный корень $x = 1$, так что после деления (2.177) на $(x - 1)$ получаем квадратное уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0, \tag{2.178}$$

решением которого являются формулы (2.175) и (2.176). Путем непосредственной проверки можно убедиться, что $\omega^3 = 1$ и $(\omega^2)^3 = 1$, то есть уравнение (2.177) удовлетворяется.

Таким образом, при условии допущения мнимости, каждое из слагаемых формулы (2.173) имеет три значения, возможные комбинации из которых дают девять решений. Однако при выборе надлежащих

решений надо учитывать условие (2.164), которое допускает наличие лишь трех возможных комбинации значений u и v, то есть кубических корней в формуле (2.173), В этом можно убедиться непосредственной подстановкой девяти возможных комбинаций в условие (2.164). Таким образом, для y остаются только три возможности:

$$y_1 = u + v; \tag{2.179}$$

$$y_2 = \omega u + \omega^2 v; \tag{2.180}$$

$$y_3 = \omega^2 u + \omega v. \tag{2.181}$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться, что все три выражения (2.179)–(2.181) являются корнями уравнения (2.158).

Соответственно получаются три решения исходного уравнения (2.150):

$$x_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + u + v; \tag{2.182}$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3a_0} + \omega u + \omega^2 v; \tag{2.183}$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3a_0} + \omega^2 u + \omega v. \tag{2.184}$$

Подставляя в эти выражения формулы (2.171) и (2.172), с учетом (2.159) и (2.160), можно получить решение, записанное через параметры исходного уравнения (2.150). Здесь авторы настоящей монографии не приводят эти выражения ввиду их некоторой громоздкости в сочетании с очевидной тривиальностью.

Вариант № 2. Пусть теперь значения величин a и b таковы, что $D = 0$. При этом результат извлечения квадратного корня будет равен нулю, так что из формулы (2.173) получаем

$$y = 2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}\,. \tag{2.185}$$

Учтем далее, что при $D = 0$ имеет место равенство

$$\frac{b^2}{4} = -\frac{a^3}{27}, \tag{2.186}$$

из которого получаем

$$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = -\frac{a^3}{27}. \tag{2.187}$$

Произведем далее следующую цепочку последовательных преобразований, выполняемых с учетом (2.187):

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(-\frac{b}{2}\right)^3}{\left(-\frac{b}{2}\right)^2}} = -\frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)^2}} = -\frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{a^3}{27}}} = \frac{b}{2}\frac{1}{\frac{a}{3}} = \frac{3b}{2a}. \tag{2.188}$$

Подставляя полученное выражение в (2.185), получаем:

$$y_1 = \frac{3b}{a}. \tag{2.189}$$

Два других корня получаем с учетом комплексных корней из единицы, аналогично (2.180) и (2.181):

$$y_2 = \frac{3b}{a}(\omega + \omega^2) = -\frac{3b}{a}. \tag{2.190}$$

$$y_3 = \frac{3b}{a}(\omega^2 + \omega) = -\frac{3b}{a}. \tag{2.191}$$

При этом в соответствии с (2.157) получаем:

$$x_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + \frac{3b}{a}; \tag{2.192}$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3a_0} - \frac{3b}{a}; \tag{2.193}$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3a_0} - \frac{3b}{a}. \tag{2.194}$$

Подстановка в эти выражения (2.159) и (2.160) также позволяет получить решение, записанное через параметры исходного уравнения (2.150).

Вариант № 3. Пусть теперь значения величин a и b таковы, что $D < 0$. При этом результат извлечения квадратного корня будет мнимым, то есть:

$$\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} = i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}\,. \tag{2.195}$$

В этом случае применение формулы (2.173) требует вычисления кубического корня из комплексного числа, что, как показано в [262, стр. 199], эквивалентно решению кубического уравнения такого же вида, как (2.158). То есть получается как бы «порочный круг», выход из которого прямое применение алгебраической формулы (2.173) не дает [262, стр. 198].

Однако в этом случае можно воспользоваться удобным приемом (во времена Кардано еще не существовавшим), позволяющим заменить возведение в степень комплексного числа в тригонометрической форме умножением его аргумента на число, являющееся показателем степени.

Итак, запись комплексного числа z в тригонометрической форме (формула Эйлера) имеет вид [261, стр. 32]:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.196}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \tag{2.197}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2.198}$$

Возведение в степень такого числа дается формулой Муавра [261, стр. 33]

$$z^n = (x+iy)^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)], \tag{2.199}$$

где n — целое число.

Теперь вернемся к решению уравнения (2.158) в виде (2.173). При этом из (2.171) и (2.172) в соответствии с (2.195) получаем

$$u = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}\,; \tag{2.200}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - i\sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}\,. \tag{2.201}$$

Введем обозначения:

$$\alpha = -\frac{b}{2}; \tag{2.202}$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}\,. \tag{2.203}$$

С этими обозначениями (2.200) и (2.201) принимают вид

$$u = \sqrt[3]{\alpha + i\beta}\,; \tag{2.204}$$

$$v = \sqrt[3]{\alpha - i\beta}\,. \tag{2.205}$$

В силу равенства действительных частей этих выражений, а также с учетом соотношения (2.164), правая часть которого является действительной, следует, что u и v являются комплексно сопряженными.

Возводя (2.204) в куб и представляя получающееся комплексное число в соответствии с формулой Эйлера (2.196), получаем

$$u^3 = \alpha + i\beta = r(\cos\gamma + i\sin\gamma), \tag{2.206}$$

где

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,; \tag{2.207}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \tag{2.208}$$

где величины r и γ являются известными, так как заведомо могут быть определены, исходя из соотношений (2.202) и (2.203).

Положим также

$$u = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.209}$$

где ρ и φ — неизвестные величины, подлежащие определению.

Возводя (2.207) в куб в соответствии с формулой Муавра (2.199), получаем

$$u^3 = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi). \tag{2.210}$$

Полагая модули равных комплексных чисел (2.206) и (2.210) также равными, получаем

$$\rho^3 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,. \tag{2.211}$$

Подставляя α и β в соответствии с (2.202) и (2.203), получаем

$$\rho^3 = \sqrt{-\frac{a^3}{27}}\,. \tag{2.212}$$

Извлекая кубический корень из обеих частей этого выражения, получаем

$$\rho = \sqrt{-\frac{a}{3}}\,, \tag{2.213}$$

то есть величина ρ, входящая в (2.209), уже определена.

Обратимся теперь к определению величины φ. Сравнивая действительные части (2.206) и (2.210), получаем

$$\alpha = \rho^3 \cos 3\varphi, \tag{2.214}$$

откуда получаем

$$\cos 3\varphi = \frac{\alpha}{\rho^3}. \tag{2.215}$$

Подставляя в эту формулу (2.202) и (2.212), получаем

$$\cos 3\varphi = \frac{-\frac{b}{2}}{\sqrt{-\frac{a^3}{27}}}, \tag{2.216}$$

то есть

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-\frac{b}{2}}{\sqrt{-\frac{a^3}{27}}} \right). \tag{2.217}$$

Теперь оба параметра ρ и φ, входящие в формулу (2.209), определены, так что можно ее записать в виде

$$u = \sqrt{-\frac{a}{3}}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{2.218}$$

где величина φ, определяемая формулой (2.217) здесь не раскрыта, чтобы не создавать излишней громоздкости.

Учитывая отмеченную при рассмотрении формул (2.204) и (2.205) комплексную сопряженность u и v, можно записать величину v в виде

$$v = \sqrt{-\frac{a}{3}}\,(\cos\varphi - i \sin\varphi). \tag{2.219}$$

Таким образом, с учетом (2.179), то есть складывая (2.218) и (2.219), можно получить первое решение уравнения (2.158) в виде

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\,\cos\varphi, \tag{2.220}$$

где φ определяется формулой (2.217).

Записывая два других решения в виде (2.180) и (2.181), с помощью (2.175) и (2.176), получаем:

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\,\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right); \tag{2.221}$$

$$y_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\,\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right), \tag{2.222}$$

где φ по-прежнему определяется формулой (2.217).

При этом в соответствии с (2.157) получаем:

$$x_1 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\,\cos\varphi; \tag{2.223}$$

$$x_2 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\,\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right); \tag{2.224}$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{3a_0} + 2\sqrt{-\frac{a}{3}}\,\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right). \tag{2.225}$$

Подстановка в эти выражения, а также во входящее в них выражение (2.217), формул (2.171) и (2.172) с учетом (2.159) и (2.160), также позволяет получить решение, записанное через параметры исходного уравнения (2.150).

Заметим, что этот путь решения уравнения (2.158) в случае отрицательности его дискриминанта (2.174) обычно называют «тригонометрическим решением» [261,262]. Однако, из (2.200)–(2.203) можно видеть, что оно самостоятельным не является, а опирается на ту же основную формулу Кардано (2.173), «доработанную» с помощью не существовавших еще во времена Кардано формул Эйлера (2.196) и Муавра (2.199).

2.4.2. Уравнения четвертой степени

Обратимся теперь к аналитическому решению уравнения четвертой степени. Способов решения таких уравнений существует несколько [261, 262]. Исторически первым и идеологически наиболее близким к решению Кардано уравнения третьей степени, для уравнения четвертой степени, по-видимому, является способ Феррари (ученика Кардано), к рассмотрению которого и перейдем далее.

Рассмотрим полное уравнение четвертой степени вида

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0. \tag{2.226}$$

Аналогично уравнениям третьей степени, будем считать, что все коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 и a_4 являются действительными (способ решения уравнения (2.226) при комплексных коэффициентах авторам настоящей монографии неизвестен).

В записанном так уравнении присутствуют все степени неизвестного x. Покажем, что в любом случае (при $a_0 \neq 0$) из этого уравнения можно исключить третью степень.

Для этого заменим переменную, для чего представим x в виде

$$x = y + \varepsilon, \tag{2.227}$$

где y — новая переменная, а ε — постоянная величина, требующая определения.

В этом случае получаем:

$$x^2 = y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2; \tag{2.228}$$

$$x^3 = y^3 + 3y^2\varepsilon + 3y\varepsilon^2 + \varepsilon^3. \tag{2.229}$$

$$x^4 = y^4 + 4y^3\varepsilon + 6y^2\varepsilon^2 + 4y\varepsilon^3 + \varepsilon^4. \tag{2.230}$$

Подставляя (2.227)–(2.230) в (2.226) и разделяя на a_0, получаем:

$$y^4 + \frac{4a_0\varepsilon + a_1}{a_0}y^3 + \frac{6a_0\varepsilon^2 + 3a_1\varepsilon + a_2}{a_0}y^2 + \frac{4a_0\varepsilon^3 + 3a_1\varepsilon^2 + 2a_2\varepsilon + a_3}{a_0}y + \\ + \frac{a_0\varepsilon^4 + a_1\varepsilon^3 + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon + a_4}{a_0} = 0. \tag{2.231}$$

Потребуем выполнения равенства

$$\frac{4a_0\varepsilon + a_1}{a_0} = 0, \tag{2.232}$$

откуда получаем

$$\varepsilon = -\frac{a_1}{4a_0}. \tag{2.233}$$

То есть (2.227) принимает вид

$$x = y - \frac{a_1}{4a_0}. \tag{2.234}$$

Подстановка (2.234) в (2.226), после приведения подобных членов, позволяет привести уравнение (2.226) к виду

$$y^4 + ay^2 + by + c = 0, \tag{2.235}$$

где введены обозначения:

$$a = \frac{a_2}{a_0} - \frac{3a_1^2}{8a_0^2}; \tag{2.236}$$

$$b = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1a_2}{2a_0^2} + \frac{a_1^3}{8a_0^3}. \tag{2.237}$$

$$c = \frac{a_4}{a_0} - \frac{a_1a_3}{4a_0^2} + \frac{a_1^2a_2}{16a_0^3} - \frac{3a_1^4}{256a_0^4}. \tag{2.238}$$

Заметим, что поскольку все составляющие выражений для a, b и c действительны, то и сами эти выражения тоже действительны.

Таким образом, полученное уравнение (2.235), будучи уравнением четвертой степени, третьей степени неизвестной не содержит.

Далее будем заниматься решением именно этого уравнения.

Основная идея метода Феррари состоит в том, чтобы представить уравнение четвертой степени (2.235) в виде разности квадратов двух многочленов второй и первой степени относительно y, после чего разложить разность квадратов на сумму и разность таких многочленов, в результате чего уравнение (2.235) распадется на два квадратных уравнения относительно y, которые могут быть решены обычными средствами.

Выделим из уравнения (2.235) первый полный квадрат, для чего представим его в виде

$$(y^2 + \delta + r)^2 + g = 0, \tag{2.239}$$

где величина δ полагается постоянной, а r будем считать вспомогательной переменной, которую требуется определить далее. Величину g пока считаем также вспомогательной, причем полагаем, что она вобрала в себя все, что остается от уравнения (2.235) после записи его в виде (2.239).

В выражении (2.239) раскроем скобки и запишем его по степеням y, а то, что остается — по степеням r:

$$y^4 + 2\delta y^2 + 2y^2 r + r^2 + 2\delta r + \delta^2 + g = 0. \tag{2.240}$$

Сравнивая первые два слагаемых этого уравнения с первыми двумя слагаемыми уравнения (2.235), получаем, что они являются тождественными при условии

$$\delta = \frac{a}{2}. \tag{2.241}$$

Подставляя (2.241) в (2.240), выделим первые два слагаемых (2.240) в левую часть, а остальное — в правую:

$$y^4 + ay^2 = -2y^2 r - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} - g. \tag{2.242}$$

Выполним подобное же разделение в уравнении (2.235):

$$y^4 + ay^2 = -by - c. \tag{2.243}$$

В этих выражениях левые части равны, то есть равны и правые. Приравнивая правые части, получаем

$$2y^2 r + r^2 + ar + \frac{a^2}{4} + g = by + c. \tag{2.244}$$

Выразим из этого равенства величину g:

$$g = by + c - 2y^2 r - r^2 - ar - \frac{a^2}{4}. \tag{2.245}$$

Подставляя это выражение в (2.239), а также, учитывая (2.241), приводим уравнение (2.239) к виду:

$$\left(y^2 + \frac{a}{2} + r\right)^2 + by + c - 2y^2 r - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} = 0. \qquad (2.246)$$

Это уравнение уже содержит один квадрат относительно y^2, то есть для формирования разности квадратов надо всю остающуюся часть этого уравнения с обратным знаком представить также в виде квадрата относительно y уже в первой степени. Для этого надо так определить вспомогательную неизвестную r, чтобы из этой части получился именно полный квадрат относительно y.

Положим, что требуемый второй квадрат, в соответствии с (2.239) равный g, можно представить в виде

$$g = -\alpha^2 (y + \beta)^2, \qquad (2.247)$$

где α и β — неизвестные пока параметры, которые определим из условия возможности записи g в виде (2.247).

Раскрывая в этом выражении скобки, получаем

$$g = -\alpha^2 y^2 - 2\alpha^2 y\beta - \alpha^2 \beta^2. \qquad (2.248)$$

Расположим содержащие y слагаемые (2.245) по степеням y, а те слагаемые, которые y не содержат — по степеням r:

$$g = -2y^2 r + by - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} + c. \qquad (2.249)$$

В выражениях (2.248) и (2.249) от y^2 зависят только первые слагаемые. Другой зависимости от y^2 ни в том, ни в другом выражении нет, поэтому можно положить, что в обоих выражениях эти зависимости являются тождественными, откуда получаем условие

$$\alpha^2 = 2r, \qquad (2.250)$$

то есть

$$\alpha = \sqrt{2r}\,. \qquad (2.251)$$

При этом (2.248) принимает вид

$$g = -2ry^2 - 4ry\beta - 2r\beta^2. \qquad (2.252)$$

Перенося в (2.249) и (2.252) первое слагаемое в левую часть, получаем:

$$g + 2y^2 r = by - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} + c; \qquad (2.253)$$

$$g + 2ry^2 = -4ry\beta - 2r\beta^2. \qquad (2.254)$$

В этих выражениях левые части равны, а следовательно равны и правые. Приравнивая правые части, получаем

$$by - r^2 - ar - \frac{a^2}{4} + c = -4ry\beta - 2r\beta^2. \qquad (2.255)$$

Перенося все в левую часть, записывая по степеням β, y, r и разделяя все на $2r$, получаем

$$\beta^2 + 2\beta y + \frac{b}{2r}y - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8r} + \frac{c}{2r} = 0. \qquad (2.256)$$

Это уравнение содержит две неизвестные величины: y и r, а также свободный пока параметр β. Поскольку неизвестных два, а уравнение всего одно, то за счет выбора этого параметра можно исключить одно из них, чтобы осталось всего одно уравнение с одним неизвестным. Поскольку главным неизвестным является y, а r — вспомогательным, то исключим именно главное неизвестное y, чтобы получить вспомогательное уравнение для вспомогательного же неизвестного r. Уравнение (2.256) содержит зависящие от y два слагаемых — второе и третье. Подберем свободный пока параметр β так, чтобы эти слагаемые взаимно компенсировали друг друга, то есть выполнялось условие

$$2\beta y = -\frac{b}{2r}y. \qquad (2.257)$$

Из этого выражения получаем необходимое значение для свободного параметра β, так что теперь он становится вполне определенным:

$$\beta = -\frac{b}{4r}. \qquad (2.258)$$

Подставляя полученное так значение β в (2.256), получаем

$$\frac{b^2}{16r^2} - \frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8r} + \frac{c}{2r} = 0. \qquad (2.259)$$

В это выражение в качестве неизвестного входит только величина r, то есть его можно рассматривать как уравнение для определения этой величины. Умножая (2.259) на $16r^2$ и записывая по степеням r, получаем

$$8r^3 + 8ar^2 + 2(a^2 - 4c)r - b^2 = 0. \qquad (2.260)$$

Это уравнение содержит кроме неизвестной величины r только коэффициенты исходного уравнения (2.235), а именно: a, b и c, определяемые формулами (2.236)–(2.238). Разрешение этого уравнения, то есть выражение r через эти коэффициенты, можно рассматривать как предварительный этап для решения основного уравнения (2.235). Уравнение (2.260) является полным уравнением третьей степени, так что его можно решить методом Кардано, описанным в предыдущем разделе. В классике [262] это уравнение называется «разрешающим кубическим уравнением» или «кубической резольвентой» для уравнения четвертой степени (2.235).

Если уравнение (2.260) разрешено, то уравнение (2.239), с учетом (2.247), можно представить в виде искомой разности двух квадратов:

$$(y^2 + \delta + r)^2 - \alpha^2(y + \beta)^2 = 0. \qquad (2.261)$$

В этом уравнении δ, α и β определяются через коэффициенты a, b, c уравнения (2.235) с помощью соотношений (2.241), (2.251) и (2.258) соответственно. Параметр r, будучи решением уравнения (2.260), тоже определяется через эти коэффициенты.

Итак, подставляя (2.241), (2.251), (2.258) в (2.261), приводим это уравнение к виду

$$\left(y^2 + \frac{a}{2} + r\right)^2 - \left[\sqrt{2r}\,\left(y - \frac{b}{4r}\right)\right]^2 = 0. \tag{2.262}$$

Разлагая полученную разность квадратов на произведение суммы и разности входящих в них выражений и приравнивая каждый из полученных сомножителей к нулю, получаем два уравнения:

$$y^2 + \frac{a}{2} + r + \sqrt{2r}\,\left(y - \frac{b}{4r}\right) = 0; \tag{2.263}$$

$$y^2 + \frac{a}{2} + r - \sqrt{2r}\,\left(y - \frac{b}{4r}\right) = 0. \tag{2.264}$$

Располагая по степеням y получаем:

$$y^2 + \sqrt{2r}\,y + \frac{a}{2} + r - \frac{b}{2\sqrt{2r}} = 0; \tag{2.265}$$

$$y^2 - \sqrt{2r}\,y + \frac{a}{2} + r + \frac{b}{2\sqrt{2r}} = 0. \tag{2.266}$$

Это — два квадратных уравнения относительно y при условии, что r уже определено из решения уравнения (2.260).

Каждое из этих уравнений имеет по два решения следующего вида:

$$y_{1,2} = -\frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2\sqrt{2r}}}\,; \tag{2.267}$$

$$y_{3,4} = \frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2\sqrt{2r}}}\,. \tag{2.268}$$

Таким образом, уравнение (2.235) имеет четыре решения, как это и должно быть для уравнения четвертой степени.

Из решений (2.267) и (2.268) в соответствии с формулой (2.234) получаются четыре решения исходного уравнения (2.226), имеющие вид:

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} + \frac{b}{2\sqrt{2r}}} - \frac{a_1}{4a_0}; \tag{2.269}$$

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt{2r}}{2} \pm \sqrt{-\frac{r}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2\sqrt{2r}}} - \frac{a_1}{4a_0}, \tag{2.270}$$

где r является решением уравнения (2.260), а коэффициенты a и b определяются формулами (2.236), (2.237).

Таким образом, при надлежащем выборе решения уравнения (2.260), исходное уравнение четвертой степени (2.226) имеет четыре решения, определяемые формулами (2.269), (2.270).

Замечание. Вообще говоря, разрешающее кубическое уравнение (2.260) для r имеет не одно, а три решения, так что каждое из них при подстановке в (2.265), (2.266) дает свою четверку решений для y, то есть всего может быть двенадцать решений, тогда как уравнение (2.235), будучи четвертого порядка, должно иметь всего четыре решения. В известной авторам настоящей монографии литературе подробная трактовка выбора требуемых четырех решений из получающихся двенадцати отсутствует. Так в [262, стр. 202] утверждается, что достаточно найти лишь один из корней уравнения (2.260), а в [261, стр. 44] говорится, что для подстановки в (2.265), (2.266) годится произвольный корень уравнения (2.260). Авторы настоящей монографии не прослеживали достоверность этих утверждений досконально, однако при практических вычислениях рекомендуют проверять корректность полученных решений вида (2.267), (2.268) непосредственно путем подстановки в исходное уравнение (2.235).

Выводы по главе 2

В настоящей главе выполнен краткий обзор основного математического аппарата, используемого при решении задач, касающихся ферромагнитного резонанса.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены плотности энергии различных видов, участвующие в формировании динамического поведения намагниченности под действием поля. Отмечено, что полная плотность энергии магнитного кристалла, в рамках рассматриваемых в настоящей монографии вопросов, имеет три составляющие: энергии магнитной, упругой и магнитоупругой. При этом плотность магнитной энергии включает в себя следующие составляющие: энергию неоднородного обменного взаимодействия, энергию взаимодействия намагниченности с внешним полем, внутреннюю магнитостатическую энергию, то есть энергию взаимодействия намагниченности с размагничивающим полем, а также плотность энергии анизотропии, из различных видов которой главными являются одноосная и кубическая. Для всех перечисленных видов плотности энергии приведены аналитические выражения в системах координат, связанных с направлением поля, формой образца и осями анизотропии. Приведена общая формула для вычисления действующих на намагниченность эффективных полей и даны характеристики ее структуры в связи со степенью неоднородности распределения намагниченности в объеме материала.

2. Рассмотрена динамическая восприимчивость магнитной среды. Приведено общее определение восприимчивости как коэффициента пропорциональности между усредненной по объему суммарной намагниченностью и действующим на нее магнитным полем. Отмечено различие между действием постоянного и переменного полей, состоящее

в том, что постоянное поле определяет равновесное положение намагниченности, тогда как переменное — ее прецессию вокруг этого равновесного положения. Приведено уравнение Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта, выполнена процедура линеаризации, в результате чего получена линеаризованная система уравнений движения намагниченности. Из решения полученной системы уравнений определены компоненты тензора динамической восприимчивости как коэффициенты пропорциональности между компонентами намагниченности и координатными составляющими переменного поля. В соответствии с классическим определением магнитной проницаемости, из тензора восприимчивости получен тензор динамической проницаемости. Получены действительная и мнимая части компонент тензора восприимчивости, выявлен их резонансный характер. Найдены резонансные значения частоты и поля, отмечена конечность компонент тензора восприимчивости при резонансе. Приведены два различных варианта определения резонансной частоты и показано, что наиболее соответствует физическому смыслу определение по экстремуму мнимых частей компонент восприимчивости. Приведены два вида записи матрицы тензора восприимчивости — укороченный и полный, определены соотношения между ними. Отмечена возможность определения зависимости компонент тензора восприимчивости от поля, выявлена эквивалентность такого определения зависимости от частоты, указаны преимущественные области применимости того и другого вида зависимостей в эксперименте. Получены уравнения движения для намагниченности в общем виде, не содержащие предположения о малости поперечных компонент, то есть пригодные для решения задач о нелинейных колебаниях.

3. Рассмотрено решение линеаризованного уравнения Ландау–Лифшица, выполненное в сферической системе координат, известное как метод Смита–Сула. Отмечено удобство метода для вычисления зависимостей резонансной частоты от поля в случае, когда ориентация постоянного поля меняется на большие углы. Приведен упрощенный вывод основной формулы Смита–Сула, состоящий в выражении входящих в уравнение Ландау–Лифшица производных по времени в сферической системе координат с последующим исключением производной от намагниченности при условии сохранения полной длины ее вектора. Результатом такого преобразования является система двух уравнений относительно полярного и азимутального углов вектора намагниченности. Линеаризация полученных уравнений относительно положения равновесия с учетом гармонической зависимости от времени позволяет получить систему двух линейных уравнений для амплитуд полярного и азимутального углов вектора намагниченности. Условие нетривиальности решения такой системы дает зависимость резонансной частоты от поля, известную как формула Смита–Сула. Отмечено ограничение метода Смита–Сула, состоящее в расходимости полученной формулы при малой величине равновесного полярного угла

вектора намагниченности, что на практике требует выбора ориентации полярной оси сферической системы координат вдали от направления постоянного поля.

4. В качестве математического дополнения рассмотрено аналитическое решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней, весьма часто встречающихся при нахождении равновесного положения вектора намагниченности в задачах об ориентационных переходах и ферромагнитном резонансе в анизотропных средах. Отмечено, что целесообразность применения аналитических решений таких уравнений заключается в значительной (на несколько порядков) экономии машинного времени при численном решении рассматриваемых задач. Решение уравнений третьей степени рассмотрено в соответствии с методом Кардано. Приведена методика сведения полного уравнения третьей степени к укороченному уравнению, в котором вторая степень отсутствует. Получено решение такого уравнения в виде классической формулы Кардано. Приведен дискриминант укороченного уравнения и в зависимости от его знака описаны три возможных варианта получения окончательного решения, в том числе его тригонометрический вид. На основе решения укороченного уравнения получено решение исходного полного уравнения третьей степени. Решение уравнения четвертой степени рассмотрено в соответствии с методом Феррари. Приведена методика сведения полного уравнения четвертой степени к укороченному уравнению, в котором третья степень отсутствует. Путем введения вспомогательной переменной показана возможность представления укороченного уравнения в виде разности квадратов двух выражений, включающих вторую и первую степени основной переменной. Установлено, что необходимым условием такого представления является разрешение уравнения третьей степени для вспомогательной переменной, для чего может быть использован метод Кардано. Показано, что в этом случае исходное укороченное уравнение распадается на произведение двух квадратных уравнений, которые дают четыре возможных его решения. Показано, что на основе полученных четырех решений укороченного уравнения может быть получено решение исходного полного уравнения четвертой степени.

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ ПРИ РАБОТЕ С КРИСТАЛЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ СИММЕТРИИ

Настоящая глава посвящена краткому описанию основных математических приемов, используемых при работе с анизотропными кристаллами. Приведены основные типы симметрии кристаллической решетки, рассмотрены особенности некоторых видов магнитной анизотропии. Подробно разбирается аппарат матриц перехода между различными системами координат, приведены примеры матриц прямого и обратного перехода. Рассмотрена кубическая кристаллографическая ячейка и приведены примеры получения матриц преобразования, соответствующих повороту ячейки вокруг основных осей ее симметрии.

Материал главы носит, в основном, обзорный характер, частично переработанный в соответствии с тематикой настоящей монографии. Среди главных источников, касающихся характера симметрии кристаллической решетки, можно указать [135, 271–274]. Описание магнитной анизотропии следует [4, 6–8]. Остальные ссылки, в том числе касающиеся свойств реальных материалов, указаны в тексте.

3.1. Симметрия кристаллической решетки

Важнейшим объектом рассмотрения в настоящей монографии являются магнитоупорядоченные среды, имеющие кристаллическую структуру, атомы в которой образуют правильную периодическую решетку, то есть среда обладает определенной симметрией.

Первейшим видом симметрии является способность решетки совмещаться с самой собой при параллельных переносах на определенные расстояния в определенных направлениях, что и задает ее периодический характер. Это — трансляционная симметрия, присущая решеткам всех видов. Кроме того, решетка может обладать симметрией по отношению к различным поворотам и отражениям. Именно такая симметрия определяет анизотропные (то есть различающиеся по разным направлениям) свойства кристаллических сред. Симметрия означает неизменность свойств кристалла при отражении в определенных плоскостях (зеркальная симметрия) или при повороте вокруг определенных осей (осевая симметрия).

Рассмотрим основные типы симметрии кристаллических решеток.

3.1.1. Типы симметрии решетки

В кристаллических решетках имеются несколько различных типов или систем симметрии, схемы основных из которых показаны на рис. 3.1. На рисунке приведены формы кристаллических ячеек, периодическое повторение которых образует внутреннюю структуру кристалла. Внизу под каждой из ячеек показана структура проекции решетки, образованной множеством подобных ячеек, на плоскость, параллельную одной из плоскостей ячейки (по рисунку — нижнюю). Для ячеек *4* и *7* справа показана аналогичная проекция на плоскость, параллельную боковой грани ячейки.

Рассмотрим свойства симметрии приведенных ячеек.

1 — триклинная система.

Ячейка такой системы представляет собой параллелепипед, образованный тремя парами взаимно параллельных плоскостей, причем ориентация пар плоскостей относительно друг друга произвольна.

Все грани ячейки представляют собой параллелепипеды, причем плоскость ABCD параллельна плоскости EFGH, плоскость ADHE параллельна плоскости BCGF, плоскость ABFE параллельна плоскости DCGH.

Симметрия системы проявляется в сохранении ячейки при ее отражении в любой из плоскостей с последующим поворотом на 180° вокруг оси, перпендикулярной той плоскости, в которой производилось отражение.

Проекция решетки на плоскость (в данном случае EFGH или ABCD) представляет собой совокупность соседствующих друг с другом параллелограммов, причем верхняя и нижняя грани ячейки образуют одинаковые структуры из параллелограммов, сдвинутые относительно друг друга.

2 — моноклинная система.

Ячейка такой системы в основании имеет параллелограмм, такого же типа, как и в триклинной системе, например EFGH, причем пары противолежащих сторон такого параллелограмма друг от друга различаются.

Отличие от триклинной системы состоит в том, что ребра, выходящие из углов этого параллелограмма (EA, FB, GC, HD) перпендикулярны его плоскости EFGH. В силу параллельности верхней и нижней плоскостей ячейки, верхнее основание ABCD представляет собой параллелограмм, идентичный нижнему EFGH. Боковые грани ячейки представляют собой прямоугольники, причем прямоугольник ABFE равен прямоугольнику DCGH, а плоскости их параллельны, то же относится к прямоугольникам ADHE и BCGF.

Симметрия системы проявляется в возможности отражения ячейки в той или иной из боковых плоскостей с последующим поворотом на 180° вокруг оси, перпендикулярной той плоскости, в которой

Рис. 3.1. Основные типы кристаллографической симметрии.
1 — триклинная; *2* — моноклинная; *3* — ромбическая (орторомбическая); *4* — тетрагональная (квадратная); *5* — тригональная; *6* — гексагональная; *7* — кубическая

производилось отражение, а также в отражении в любой из плоскостей основания без последующего поворота. Допустимым является также поворот на 180° вокруг любого из вертикальных ребер ячейки.

Проекция решетки на плоскость EFGH или ABCD представляет собой совокупность соседствующих друг с другом параллелограммов, причем в отличие от триклинной структуры сетки параллелограммов, образованных верхней и нижней гранями ячейки, полностью совпадают.

3 — ромбическая (орторомбическая) система.

Ячейка такой системы в основании имеет прямоугольник EFGH, то есть ребра EF и GH, а также EH и FG, будучи попарно равными, друг от друга могут отличаться. Все боковые ребра ячейки (EA, FB, GC, HD) перпендикулярны плоскости основания и между собой равны. Соответственно верхнее основание ABCD равно нижнему EFGH. То есть ячейка представляет собой классический прямоугольный параллелепипед, типичным примером которого является «спичечный коробок».

Симметрия системы проявляется в возможности отражения ячейки в любой из боковых, а также верхней или нижней плоскостях. Допустимым является также поворот на 180° вокруг любого из ребер ячейки. Структура ячейки сохраняется также при повороте на 180° вокруг любой из осей, проходящих через точку пересечения диагоналей любой грани в направлении, перпендикулярном этой грани.

Проекция решетки на плоскость EFGH или ABCD представляет собой совокупность соседствующих друг с другом одинаковых прямоугольников, причем сетки прямоугольников от верхнего и нижнего оснований, как и для моноклинной системы полностью совпадают.

4 — тетрагональная (квадратная) система.

Ячейка такой системы имеет много общего с ячейкой ромбической системы, с тем отличием однако, что в основании ее EFGH лежит квадрат, то есть все ребра основания EF, FG, GH, HE между собой равны. То же относится и к ребрам верхней грани AB, BC, CD, DA. Ребра боковых граней EA, FB, GC, HD перпендикулярны основанию и между собой равны, но длина их отлична от длины ребер того и другого оснований. То есть ячейка представляет собой классический прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием.

Свойства симметрии системы — те же, что и в ромбической системе, однако в силу квадратной формы основания теперь добавляется возможность поворота вокруг любого из боковых ребер на 90°. Такой же поворот на 90° допустим также относительно оси, проходящей через точку пересечения диагоналей любого из оснований в направлении, перпендикулярном плоскости основания. Ячейка также симметрична относительно отражения в любой из плоскостей, проходящих через диагонали квадратных оснований, то есть ACGE и BDHF. Симметрия также сохраняется при отражении в любой из двух плоскостей, параллельных боковым граням, проходящих через упомянутую выше центральную ось.

Проекция решетки на плоскость EFGH или ABCD представляет собой совокупность соседствующих друг с другом одинаковых квадратов, а проекция на плоскость любой из боковых граней (на рисунке показана справа от ячейки) — совокупность соседствующих прямоугольников, одна пара сторон которых отличается от другой.

До сих пор при рассмотрении моноклинной, ромбической и тетрагональной систем менялась форма только основания ячейки — от параллелограмма через прямоугольник к квадрату. При этом высота ячейки оставалась с параметрами основания никак не связанной. Сплошное покрытие плоскости основаниями соседствующих ячеек отвечало отражению в перпендикулярных этой плоскости других плоскостях или повороту вокруг осей, перпендикулярных плоскости оснований на 180° и 90°. Такое покрытие соответствует сплошному размещению на плоскости геометрических фигур — параллелограммов, прямоугольников и квадратов, из которых последняя, в соответствии с геометрической терминологией, принадлежит к «правильным многоугольникам».

Однако существуют еще два возможных варианта сплошного покрытия плоскости правильными многоугольниками, каковыми являются равносторонние треугольники и шестиугольники. Эти два вида правильных многоугольников порождают еще два вида систем кристаллических ячеек — тригональную и гексагональную. По названиям эти системы родственны тетрагональной. Так «тетра» означает четыре, то есть у основания ячейки, каковым является квадрат, имеется четыре угла («гонос» — угол). Тригональная система в своем названии содержит «три», так что в основании присутствуют три угла, то есть оно является треугольником. Название гексагональной содержит частицу «гекса», означающую шесть, так что основание содержит шесть углов и является шестиугольником. Рассмотрим далее две последние системы.

5 — тригональная система.

Ячейка такой системы в основании имеет правильный треугольник DEF, стороны которого DE, EF и FD равны друг другу. Равные друг другу боковые ребра DA, EB и FC перпендикулярны плоскости основания. Соответственно верхнее основание ABC равно нижнему DEF и одинаково с ним ориентировано. То есть ячейка представляет собой классическую прямую призму с правильным треугольным основанием.

Симметрия системы, кроме возможности отражения в плоскостях того или другого оснований, проявляется еще двояким образом. Во-первых, ячейка переходит сама в себя при повороте на 120° вокруг оси, проходящей через центр того или иного основания перпендикулярно самому основанию (где центром можно считать общую точку пересечения биссектрис, медиан или высот равностороннего треугольника).

Далее, проекция решетки на плоскость DEF, показанная ниже ячейки, представляет собой плотную совокупность соседствующих друг с другом одинаковых равносторонних треугольников. Такая сетка из треугольников имеет еще дополнительные свойства симметрии.

То есть она допускает зеркальное отражение в любой из плоскостей, проходящих через боковую плоскость любой ячейки, а также поворот на 60° вокруг оси, проходящей через боковое ребро любой ячейки.

Решетка также допускает отражение относительно любой из плоскостей, проходящих параллельно боковым ребрам призмы через две противолежащие вершины любых двух треугольников, имеющих одну общую сторону (например относительно плоскости, след которой по рисунку является горизонтальным, а также относительно других подобных плоскостей).

6 — гексагональная система.

Ячейка такой системы в основании имеет правильный шестиугольник GHIJKL, стороны которого GH, HI, IJ, JK, KL, LG равны друг другу. Равные друг другу боковые ребра GA, HB, IC, JD, KE, LF перпендикулярны плоскости основания. Соответственно верхнее основание ABCDEF равно нижнему GHIJKL и одинаково с ним ориентировано. То есть ячейка представляет собой классическую прямую призму с правильным шестиугольным основанием.

Симметрия системы, кроме возможности отражения в плоскостях того или другого оснований, проявляется также в том, что ячейка переходит сама в себя при повороте на 60° вокруг оси, проходящей через центр того или иного основания перпендикулярно самому основанию (где центром можно считать общую точку пересечения главных диагоналей шестиугольника). Кроме того ячейка допускает отражение в любой из своих боковых плоскостей, а также поворот вокруг любого из своих ребер на 120°.

Проекция решетки на плоскость любого из оснований представляет собой совокупность соседствующих друг с другом одинаковых шестиугольников, полностью заполняющих плоскость наподобие «пчелиных сот».

В рассмотренных выше системах степень симметрии, по мере перехода от системы к системе, как правило, повышалась, так что количество операций симметрии, оставляющих ячейку без изменения, увеличивалось. Более строгое доказательство этого положения, основанное на математической теории групп, можно найти например в [135, 271-273]. Весьма доходчивое изложение с довольно популярным подробным объяснением основных положений содержится в [274]. Здесь же ограничимся лишь констатацией того факта, что во всех рассмотренных здесь системах менялась только форма основания ячейки, а высота оставалась произвольной. Однако имеется еще одна система, где высота приобретает решающее значение. Это — весьма распространенная среди магнитных кристаллов кубическая система, к рассмотрению которой далее переходим.

7 — кубическая система.

Ячейка такой системы в основании имеет квадрат EFGH, то есть все его стороны EF, FG, GH и HE между собой равны и стороны,

имеющие общую точку, друг другу перпендикулярны. Все ребра боковых граней EA, FB, GC и HD перпендикулярны плоскости основания и между собой равны. Соответственно верхнее основание ABCD равно нижнему EFGH и одинаково с ним ориентировано. Во всем этом рассматриваемая системе полностью тождественна тетрагональной (№ 4). Однако отличие состоит в том, что длины боковых ребер EA, FB, GC и HD равны сторонам квадрата, лежащего в основании, то есть ребрам EF, FG, GH и HE, а также AB, BC, CD и DA. То есть все ребра такой ячейки равны между собой, а ребра, имеющие общую точку, взаимно перпендикулярны, так что ячейка представляет собой правильный куб.

Свойства симметрии системы — те же, что и в ромбической системе, однако в силу полностью кубической формы теперь реализуется возможность поворота вокруг любого из ребер, как боковых, так и основания на 90°. Такой же поворот на 90° допустим относительно оси, проходящей через точку пересечения диагоналей любой из граней куба в направлении, перпендикулярном плоскости данной грани. Ячейка также симметрична относительно отражения в любой из плоскостей, проходящих через диагонали любой из граней.

Проекция совокупности ячеек на плоскость любой из граней представляет собой сетку из соседствующих друг с другом одинаковых квадратов. Примеры такой сетки на плоскостях EFGH, а также DCGH показаны на рисунке внизу и справа от ячейки.

Дополнительным свойством симметрии, отсутствующим у всех приведенных выше ячеек, является возможность поворота вокруг любой из пространственных диагоналей куба на угол в 120°. То есть такой поворот возможен вокруг осей EC, AG, FD и BH.

Пример такого поворота относительно пространственной диагонали FD показан слева от ячейки (рис. 3.1, *7*). Представлен вид вдоль этой диагонали со стороны точки D, в которой сходятся ребра DA, DC и DH. К этим ребрам примыкают грани DABC, DCGH и DHEA. Можно видеть, что поворот рисунка на 120° вокруг точки D например, по часовой стрелке приводит к переходу ребра DA на место DC, ребра DC на место DH, ребра DH на место DA. При этом грань DABC переходит на место грани DCGH, грань DCGH на место DHEA, а грань DHEA на место DABC. Аналогичным образом преобразуются и другие ребра и грани, примыкающие к другому концу оси DF, то есть к точке F. Таким образом, можно полагать, что кубическая ячейка обладает наиболее высокой степенью симметрии из всех, рассмотренных выше.

3.1.2. Магнитная анизотропия

Рассмотренная в предыдущих разделах кристаллографическая анизотропия относится в первую очередь к кристаллической структуре материала, то есть к геометрическому расположению атомов в периодической решетке. Изменение положения атомов вызывает силы, стремящиеся вернуть их к равновесному положению. Поэтому всякое смещение

атомов друг относительно друга подчиняется именно рассмотренным свойствам симметрии. Такое смещение происходит при механическом воздействии на решетку, например, при какой-либо деформации или распространении упругой волны. То есть при рассмотрении задач, касающихся упругости, следует учитывать именно кристаллографическую анизотропию среды.

Однако для магнитных сред положение несколько иное. В первую очередь это касается магнитоупорядоченных сред, то есть обладающих ферромагнетизмом, антиферромагнетизмом или ферримагнетизмом, в которых магнитные атомы связаны обменным взаимодействием, приводящим к коллинеарной ориентации их спинов относительно друг друга, следствием чего является упорядоченность ориентации на значительных расстояниях («дальний порядок») [4, 138].

Так, во многих материалах, особенно сложного состава, далеко не все атомы обладают магнитными свойствами, поэтому смещение каких-то немагнитных атомов магнитное состояние вещества изменить не может. Следует однако учитывать, что в ряде случаев магнитные свойства обусловлены взаимодействием магнитных атомов через посредство немагнитных, например двух атомов железа через расположенный между ними атом кислорода. Такое взаимодействие носит название косвенного обмена и также вызывает дальний порядок ориентации намагниченности. Тем не менее, благодаря «разбавленности» магнитной решетки немагнитными атомами, в ряде случаев магнитная анизотропия имеет более высокую степень симметрии, чем кристаллографическая, то есть поворот или отражение ячейки, соответствующее кристаллографической симметрии, к изменению магнитной симметрии не приводит. Рассмотрим некоторые варианты такой магнитной анизотропии.

3.1.3. Анизотропия типа «легкая ось» и «легкая плоскость»

Простейшим примером магнитной симметрии является анизотропия типа «легкая ось» и «легкая плоскость». Так например, если в ромбической ячейке магнитные атомы расположены вдоль оси, параллельной одному из ребер, то поворот ячейки вокруг этого ребра на произвольный угол расположения магнитных атомов не меняет, так что магнитные свойства вещества относительно этого направления остаются прежними. Подобная ситуация может иметь место и для других видов ячеек.

Если вектор намагниченности в равновесном положении ориентируется вдоль той самой оси, поворот вокруг которой магнитного состояния вещества не меняет, то имеет место анизотропия типа «легкая ось». Такую анизотропию часто называют «одноосной». При этом в отсутствие внешнего поля намагниченность ориентируется в положительном или отрицательном направлении единственной оси.

Если вектор намагниченности в равновесном положении ориентируется перпендикулярно той оси, поворот вокруг которой магнитного состояния вещества не меняет, то имеет место анизотропия типа «легкая

плоскость». Такую анизотропию часто называют «легкоплоскостной». При этом в отсутствие внешнего поля намагниченность может располагаться в любом направлении в плоскости, перпендикулярной упомянутой оси.

В общем случае степень симметрии анизотропии типа «легкая ось» и «легкая плоскость» — одна и та же, различие состоит только в знаке соответствующей константы. То есть при изменении ее знака, например при изменении температуры, легкая ось может переходить в легкую плоскость и обратно. Плотность энергии анизотропии такого типа имеет второй порядок по намагниченности.

3.1.4. Другие виды магнитной анизотропии

Среди других видов магнитной анизотропии следует прежде всего отметить опять же одноосную, но более высокого порядка, чем рассмотренная в предыдущем разделе. Плотность энергии такой анизотропии имеет по намагниченности четвертый, шестой или еще более высокий четный порядок. При этом, если анизотропия второго порядка может иметь только единственную ось единственного направления, то осей анизотропии четвертого порядка может быть несколько. То есть кристалл может иметь несколько осей легкого намагничивания, отличающихся только направлением. В общем случае могут одновременно сосуществовать одна ось второго порядка и одна или несколько осей четвертого порядка. Типичным примером многоосной анизотропии четвертого порядка является кубическая. Так например, элементарная ячейка железа имеет три эквивалентные друг другу оси легкого намагничивания, параллельные ребрам куба, а ячейка никеля или железоиттриевого граната — четыре оси, параллельные пространственным диагоналям такого же куба [4, 6–8]. Возможны и другие виды магнитной кубической анизотропии, например соответствующие диагоналям грани ячейки. Кроме кубической подобными же свойствами может обладать ромбическая или тетрагональная ячейка, где также возможно сосуществование нескольких осей легкого намагничивания.

Особый вид анизотропии кубических кристаллов составляет одноосная, имеющая произвольное направление относительно ребер кубической ячейки. Примером такой анизотропии является так называемая «ростовая» анизотропия кристаллов смешанных ферритов-гранатов [40, 240, 275–277], обусловленная упругими напряжениями и разориентацией плоскости роста кристалла относительно плоскости типа (111) кубической ячейки. Некоторые явления, сопровождающие подобную анизотропию, описаны например в [22–25, 30, 278].

Еще одной особенностью кубических кристаллов, в первую очередь пленок смешанных ферритов–гранатов, является «ромбическая» или «орторомбическая» анизотропия, результатом проявления которой является различная величина приложенного в плоскости пленки постоянного поля, соответствующего зарождению (или исчезновению) доменной структуры. Краткий обзор проявления подобной анизотропии

можно найти в [40, стр. 25]. Различие между наклонной «ростовой» и «орторомбической» анизотропией, определяемыми по зарождению доменной структуры, довольно подробно описано в работе [276]. Там же отмечено, что роль наклонной одноосной анизотропии в насыщении пленок, при намагничивании в их плоскости, значительно превышает роль ромбической анизотропии, так что различие между ними часто не выходит за пределы ошибок эксперимента.

В кристаллах, обладающих тригональной и гексагональной симметрией, типичной является одноосная магнитная анизотропия, ориентированная вдоль оси третьего или шестого порядка. Примером кристалла с такой анизотропией является гематит, кристаллическая ячейка которого имеет тригональную симметрию. Магнитная анизотропия гематита имеет четко выраженный одноосный характер вдоль тригональной оси в сочетании с небольшой гексагональной анизотропией в плоскости, перпендикулярной этой оси. Весьма сильной одноосной анизотропией обладает гексаферрит бария, имеющий в основе гексагональную ячейку.

В некоторых кристаллах, обладающих каким-то одним выделенным направлением, намагниченность может принимать форму спиральной или винтовой структуры, витки которой как бы навинчиваются на ось, соответствующую этому направлению. При этом какое-либо преимущественное направление ориентации намагниченности, перпендикулярное винтовой оси, может отсутствовать. Период такой структуры вдоль винтовой оси может значительно превышать период основной кристаллической ячейки. Определенное представление о таких видах магнитной симметрии можно получить например из [32, 279, 280] и цитированной там литературы.

3.1.5. Особенности структуры реальных материалов

Рассмотренными в предыдущем разделе семью видами кристаллических ячеек исчерпываются все возможности существования кристаллографической анизотропии. Однако следует отметить, что приведенные здесь конфигурации ячеек не означают, что атомы в каждой ячейке находятся в точках, где сходятся ребра соседствующих граней, то есть в точках вершин этих ячеек. Конфигурация ячеек означает лишь набор ограничивающих ее плоскостей, определяющих поверхности, по которым к данной ячейке примыкают другие ей подобные. Атомы же, принадлежащие данной ячейке, могут находиться в любых ее местах, важно лишь, чтобы эти места от ячейки к ячейке повторялись. Так например, кубическая ячейка, кроме атомов, расположенных в вершинах куба, может иметь атомы, расположенные на пересечении диагоналей каждой грани, а также в точке пересечения всех четырех пространственных диагоналей куба. То есть кубическая ячейка, кроме расположения атомов только в вершинах куба, может быть также «границентрированной» и «объемноцентрированной». Важнейший пример таких видов решетки являет обычное железо.

Более того, несмотря на видимую простоту элементарных ячеек (рис. 3.1), реальное расположение атомов в каждой ячейке может быть весьма сложным. Главным требованием здесь является повторяемость внутренней структуры ячейки при соответствующих операциях отражения и поворота. Рассмотрим особенности некоторых важных для практики магнитных материалов, для чего начнем с того же железа.

Железо. Чистое железо при температуре ниже 910 °C (α-фаза) имеет объемноцентрированную кубическую решетку с постоянной решетки (ребром куба) равной 2,87 Å, а в интервале от 910 °C до 1400 °C (γ-фаза) — границентрированную кубическую решетку с постоянной 3,64 Å. При температуре выше 1400 °C вплоть до температуры плавления, равной 1539 °C (δ-фаза) решетка снова становится объемноцентрированной с постоянной 2,94 Å. Выше температуры плавления кристаллическая решетка разрушается, и железо становится аморфным [281]. Во всех этих случаях, кроме, разумеется, аморфного состояния, кристаллическая решетка железа остается кубической, то есть по симметрии, соответствующей ячейке № 7 на рис. 3.1. Однако при переходе через температуру 910 °C расположение атомов внутри ячейки изменяется. Такой переход от объемноцентрированной кубической структуры к границентрированной, опять же кубической, является типичным примером структурного фазового перехода [135–139].

Гематит. Другим примером расположения атомов, не соответствующим точкам встречи ребер ячейки, является широко распространенный минерал гематит (особый вид железной руды, составляющий, например, основу Курской магнитной аномалии). Химический состав гематита — окись железа α-Fe_2O_3. Симметрия ячейки гематита является тригональной (в отличие от γ-Fe_2O_3, где ячейка чисто кубическая [8]). Такая ячейка представляет собой куб, растянутый вдоль одной из его пространственных диагоналей. Именно такое растяжение обеспечивает сохранение ячейки при повороте вокруг этой диагонали на 120°, то есть здесь присутствует симметрия такого же типа, как показано на рис. 3.1 слева от кубической ячейки (№ 7). Ось растяжения совпадает с вертикальным направлением тригональной ячейки *5* на рис. 3.1. В первом приближении можно полагать, что ионы железа располагаются по центрам треугольных оснований ячейки, а ионы кислорода — на серединах ее боковых ребер. Расположение атомов в решетке гематита схематично показано в [8, стр. 71, рис. 3.3], а более подробно структура изучается в работе [282].

Ортоферриты. Начнем наше рассмотрение с ортоферрита, химическая формула которого имеет вид: $R\,FeO_3$, где R — иттрий или редкоземельный элемент. С точки зрения кристаллографии ортоферрит имеет несколько искаженную структуру распространенного в природе минерала перовскита $CaTiO_3$ (подобную структуру имеют также широко используемые в акустике сегнетоэлектрики $BaTiO_3$, $LiNbO_3$).

Ортоферрит имеет ромбическую структуру. Однако расположение атомов в ячейке весьма сложно. Определенное представление о таком расположении можно получить из [134, стр. 38, рис. 2.1]. Относительно ромбической ячейки атомы железа находятся на середине ребер основания. Атомы иттрия или редкоземельного металла — на середине высоты центральной оси. Атомы кислорода окружают каждый атом железа октаэдром, диагонали которого ориентированы вдоль ребер основной ячейки. В несколько ином ракурсе та же структура представлена в работе [138, стр. 301, рис. 6.29]. Результатом такого расположения является антиферромагнитное упорядочение со слабым ферромагнетизмом в сочетании с сильной одноосной анизотропией.

Ферриты-шпинели. Характерным примером кубической симметрии является структура шпинели. В природном состоянии шпинель — минерал, имеющий состав AB_2O_4, где A — Mg, Zn, Mn, Fe^{2+}, ..., B — Al, Fe^{3+}, Cr, Mn, ... [283]. Представление о расположении атомов в структуре типа шпинели дает [284, стр. 117–119, рис. 3.20], а также [138, стр. 294, рис. 6.24]. Классическая шпинель — $MgAl_2O_4$ — немагнитный минерал, достаточно широко распространенный в природе. При замене алюминия железом структура сохраняется, получается магниевый феррит $MgO \cdot (Fe_2O_3)$, обладающий магнитными свойствами. Элементарная ячейка структуры шпинели содержит 32 иона кислорода, 16 ионов железа Fe^{3+} и 8 ионов немагнитного металла, например Mg, Mn, Zn или железа Fe^{2+}. Полная ячейка шпинели имеет кубическую симметрию.

Наибольший интерес для данного рассмотрения представляют шпинели, содержащие магнитные ионы, в первую очередь — железа. Примером магнитной шпинели является широко распространенный минерал магнетит $FeO \cdot Fe_2O_3$ (или как часто записывают Fe_3O_4) [285]. Это — особый вид железной руды (Магнитогорское месторождение), магнитные свойства которого были известны еще древним грекам. В современной технике СВЧ широко используются никель-цинковый $(Ni, Zn)O \cdot Fe_2O_3$ и марганец-цинковый $(Mn, Zn)O \cdot Fe_2O_3$, а также магний-марганцевый $(Mg, Mn)O \cdot Fe_2O_3$ ферриты [286], имеющие относительно невысокую намагниченность насыщения, что важно для устройств дециметрового диапазона волн [284, стр. 123].

Ферриты-гранаты. Важнейшими представителями материалов с кубической структурой являются ферриты-гранаты. В природе гранат — широко распространенный минерал состава $R_3^{2+}R_2^{3+}(SiO_4)_3$, где R_3^{2+}, R_2^{3+} — различные двух и трехвалентные металлы, дающие минералу огромное разнообразие видов и физических свойств, находящих широкое применение (от технических абразивов до ювелирных украшений) [287].

В радиоэлектронике широко используются гранаты, в которых место кремния занимает железо, носящие название ферритов-гранатов.

Общая формула таких материалов имеет вид: $M_3Fe_5O_{12}$, где M — иттрий или редкоземельный металл. Кубическая элементарная ячейка феррита-граната содержит восемь формульных единиц состава $M_3Fe_2(FeO_4)_3$. Шестнадцать ионов Fe^{3+} занимают октаэдрические узлы, двадцать четыре иона Fe^{3+} занимают тетраэдрические узлы. Двадцать четыре иона M^{3+} занимают узлы восьмивершинного двенадцатигранного полиэдра. Каждая элементарная ячейка содержит 96 ионов кислорода, занимающих узлы, являющиеся вершинами одного тетраэдра, одного октаэдра и двух полиэдров [284, стр. 127–129, рис. 3.28–3.31].

В 1970–1990 гг. широко исследовались ферриты-гранаты, содержащие вместо иттрия редкоземельные элементы, так называемые «смешанные ферриты-гранаты», характерным свойством которых является наличие сильной одноосной анизотропии. Такие гранаты в виде эпитаксиальных пленок, выращенных на подложках из гадолиний-галлиевого граната ($Gd_3Ga_5O_{12}$), рассматривались как перспективный материал для устройств памяти на цилиндрических магнитных доменах (ЦМД) [40]. Некоторые свойства таких гранатов рассматриваются далее в разделах 5.2, 5.3.

Железоиттриевый гранат. Особое место среди ферритов-гранатов, имеющих кубическую симметрию, занимает железоиттриевый гранат (ЖИГ) $Y_3Fe_5O_{12}$ (формула которого иногда записывается в виде $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$ или $(Y_2O_3)_3 \cdot (Fe_2O_3)_5$). Кристаллическая структура железоиттриевого граната описана в [288,289], а также в [284, стр. 127–129, рис. 3.28–3.31]. Взаимное расположение атомов кислорода относительно атомов железа представлено например в [138, стр. 297, рис. 6.26].

Особая роль железоиттриевого граната в радиоэлектронике связана с его рекордно низкими потерями при ферромагнитном резонансе (ФМР). Ширина резонансной линии ЖИГ может быть малой вплоть до 0,5 Э, тогда как типичная ширина линии ФМР в ферритах-шпинелях составляет 10–20 Э, а в ортоферритах — 100–200 Э [8, 284].

Гексаферрит бария. Еще одним материалом, важным для дальнейшего изложения, является гексаферрит бария (или «бариевый гексаферрит»), имеющий состав $BaFe_{12}O_{19}$ или $BaO \cdot (Fe_2O_3)_6$. В технике этот материал широко используется для изготовления постоянных магнитов под названием магнетоплюмбит или ферроксдюр.

Кристаллическая структура этого материала является довольно сложной и представляет собой упорядоченное чередование слоев шпинельного типа, содержащих ионы железа с кубической симметрией, разделенных слоями бария с кислородом, имеющими гексагональную симметрию. При этом магнитные свойства определяются взаимодействием ионов железа шпинельной решетки через ионы кислорода в бариевом слое, поэтому гексагональная симметрия слоя бария навязывает свою симметрию шпинельному слою. В результате материал приобретает

сильную одноосную анизотропию (ось «*c*») в сочетании с относительно слабой гексагональной анизотропией в плоскости, перпендикулярной оси «*c*» [284, стр. 139–141, рис. 3.42–3.44]. Таким образом, характерной особенностью этого материала является наличие ярко выраженной одноосной анизотропии (поле анизотропии до 19 кЭ), что и позволяет создавать на его основе постоянные магниты. Резонансные свойства гексаферрита бария значительно хуже, чем у ферритов-гранатов, однако это не помешало реализовать на нем весьма эффективное исследование ферромагнитного резонанса в условиях ориентационного перехода [31].

Замечание. Из приведенного перечня весьма незначительного числа реальных структур можно видеть большое разнообразие расположения конкретных атомов внутри отдельной элементарной кристаллической ячейки. Однако такое разнообразие повторяется периодически, что и дает возможность судить о многих свойствах кристалла. Закончить этот раздел хочется цитатой из [273, 290], весьма красочно характеризующей положение дел в практической кристаллографии: «Решетка дает нам размер и форму повторяющейся единицы структуры, ее элементарную ячейку, но не определяет, каково же расположение вещества внутри самой элементарной ячейки. На первом этапе это и не важно. Стальной остов здания должен существовать прежде, чем начнется обсуждение внутреннего убранства или мебелировки (Лонсдэйл, 1952)».

3.2. Основная техника работы с анизотропией

Ориентационный переход состоит в перемещении вектора намагниченности из одного устойчивого положения в другое, также устойчивое. При этом устойчивость обоих таких положений определяется минимумом суммарной энергии магнетика, важнейшее место в которой занимает плотность энергии магнитной анизотропии. В то же время, формы записи плотности энергии анизотропии в различных системах отсчета также различаются. Поскольку для большинства задач наибольшее удобство представляет система координат, одна из осей которой связана с вектором намагниченности, то в процессе ориентационного перехода ориентация этой системы относительно кристаллической решетки магнетика может меняться. В то же время, наиболее простую форму плотность энергии анизотропии имеет как раз в системе, связанной с решеткой. Поэтому для успешного решения подобных задач необходим аппарат, позволяющий переходить от одной системы к другой. В основе такого аппарата лежит понятие матрицы перехода, позволяющей работать с анизотропией по правилам алгебры матриц. Поэтому начнем рассмотрение с определения такой матрицы.

3.2.1. Определение матрицы перехода

Рассмотрим основные принципы выбора системы координат для задачи, состоящей в определении поведения системы в соответствии с законом движения.

Будем считать, что мы находимся в лабораторной системе координат, которую назовем «исходной». Пусть, кроме того, имеется другая система координат, как-то повернутая относительно исходной, которую будем называть «повернутой».

Пусть имеется какое-то выражение, являющееся функцией одного или нескольких векторов, заданное в исходной системе координат (например, плотность энергии).

Пусть также имеется определенное функциональное правило, оперирующее с этим выражением (например, закон движения), причем вид этого правила в повернутой системе достаточно прост, а в исходной системе имеет более сложный вид. По этой причине требуемое правило удобнее применить в повернутой системе, после чего полученный результат перевести в исходную систему. Для этого надо функциональное выражение, первоначально заданное в исходной системе координат, перевести в повернутую систему.

Поскольку функциональное выражение представляет собой совокупность векторов, заданных в исходной системе координат, то для его перевода в повернутую систему надо эти же векторы записать в повернутой системе. Далее, поскольку теперь функциональное выражение будет уже записано в повернутой системе, к нему можно с достаточным удобством применить требуемое функциональное правило. Результат такого применения будет записан все еще в повернутой системе. То есть теперь для окончательного решения задачи его надо перевести снова в исходную систему, для чего выполнить преобразование векторов, обратное первоначальному.

Таким образом, требуются два вида преобразований компонент векторов:

1) компоненты, заданные в исходной системе, записать через компоненты, заданные в повернутой системе;

2) компоненты, заданные в повернутой системе, записать через компоненты, заданные в исходной.

Будем называть первое преобразование — прямым, второе — обратным.

Возможен и обратный вариант: закон движения имеет простой вид в исходной системе, а функциональное выражение — в повернутой. Тогда надо компоненты векторов в повернутой системе перевести в исходную, после чего воспользоваться законом движения уже в исходной системе. При этом достаточно воспользоваться лишь вторым видом преобразования, то есть обратным.

Если все же окончательный результат требуется в повернутой системе, то решение, полученное в исходной системе, надо перевести

в повернутую, для чего следует воспользоваться прямым преобразованием.

Таким образом, для решения любой задачи достаточно только двух видов преобразования — прямого и обратного.

3.2.2. Пример прямого преобразования

Приведем типичный пример задачи, требующей прямого преобразования. Рассмотрим прецессию намагниченности в анизотропной одноосной среде при наличии постоянного поля, ориентация которого с направлением оси анизотропии не совпадает.

Плотность энергии магнитной анизотропии имеет наипростейший вид, будучи выраженной через векторы намагниченности, заданные в системе координат, связанной с осью анизотропии, которую будем считать исходной.

Приложение постоянного поля к такой системе в статике вызывает установление вектора намагниченности в определенном равновесном положении, ориентация которого определяется совокупностью двух факторов — анизотропии и поля, оба из которых задаются в исходной системе.

Движение намагниченности удобно рассматривать как отклонение от равновесного положения, в системе, связанной с этим равновесным положением, то есть повернутой.

Поэтому предварительным этапом решения задачи должно быть нахождение такого равновесного положения относительно исходной системы, которое и будет далее определять ориентацию повернутой системы.

Итак, если ориентация анизотропии и направление постоянного поля заданы в исходной системе, то, чтобы иметь возможность решать задачу в повернутой системе, надо выразить компоненты векторов намагниченности, заданные в исходной системе, через компоненты тех же векторов, заданные в повернутой системе, то есть осуществить прямое преобразование.

После подстановки полученных таким образом компонент векторов в выражение для плотности энергии, заданное в исходной системе, получается плотность энергии, выраженная через компоненты векторов в повернутой системе, что и позволяет далее решать задачу в этой системе.

Поясним то же самое несколько более подробно.

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с полем задается через компоненты векторов намагниченности и поля в исходной системе. Уравнение движения вектора намагниченности при заданном поле (Ландау–Лифшица) является векторным соотношением, не зависящим от выбора системы координат. В общем виде оно сводится к системе из трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, решение которой является достаточно сложным.

Однако при записи в системе координат, одна из осей которой направлена вдоль равновесного положения намагниченности, легко провести линеаризацию уравнений движения относительно малых компонент

вектора намагниченности, перпендикулярных направлению равновесного положения. Такая линеаризация позволяет свести задачу, содержащую три нелинейных уравнения, к системе двух линейных уравнений, которая значительно проще исходной.

Таким образом, для возможности линеаризации задачи, надо перевести выражение для плотности энергии, заданное в исходной системе координат, в систему, одна из осей которой параллельна направлению равновесной ориентации намагниченности.

Для этого надо выразить компоненты векторов поля и намагниченности, заданные в исходной системе координат, через компоненты тех же векторов в повернутой системе, после чего подставить полученные выражения в исходное выражение для плотности энергии. Таким образом, исходная плотность энергии будет выражена через компоненты векторов поля и намагниченности в повернутой системе.

После такого преобразования задача (то есть уравнение Ландау–Лифшица, требующее нахождения эффективных полей) решается уже в повернутой системе координат, причем для выполнения линеаризации нормированная компонента намагниченности, параллельная равновесной ориентации намагниченности, полагается равной единице, а обе перпендикулярные компоненты полагаются настолько малыми, что их квадратами и произведением друг на друга можно пренебречь.

3.2.3. Пример обратного преобразования

Предположим, что в ходе выполнения предыдущего примера получены уравнения движения намагниченности в повернутой системе координат. Если движение намагниченности является вынужденным, то решение такой задачи позволяет найти тензор магнитной восприимчивости, компоненты которого будут опять же выражены в повернутой системе координат. Решение задачи о прецессии намагниченности будет через посредство этого тензора выражено в повернутой системе.

Однако, если требуется найти восприимчивость в исходной системе, то надо сделать две вещи.

Во-первых, выразить компоненты вектора намагниченности в повернутой системе через компоненты в исходной системе, то есть выполнить относительно этого вектора обратное преобразование.

Во-вторых, выразить компоненты тензора восприимчивости в повернутой системе через подобные же компоненты в исходной системе, то есть выполнить обратное преобразование относительно компонент тензора.

Далее следует полученные компоненты вектора намагниченности и тензора восприимчивости подставить в выражение, полученное в повернутой системе, в результате чего получится уже все в исходной системе.

Пример такого преобразования будет приведен далее в разделе 6.4, посвященном вынужденным колебаниям намагниченности в условиях ориентационного перехода. Оставим пока преобразование тензора

до упомянутого раздела, а более подробно рассмотрим технику преобразования вектора.

3.2.4. Матрица перехода в общем виде

В общем случае надо выразить компоненты вектора, заданные в одной системе координат, через компоненты того же вектора в другой системе. То есть, выражаясь терминами математики, надо осуществить переход от одного базиса к другому.

Согласно правилам такого перехода [291], преобразование компонент вектора при повороте системы координат производится с помощью матрицы перехода в соответствии с формулой

$$\mathbf{a}_1 = \overleftrightarrow{A}_{21}\mathbf{a}_2, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{a}_1$ — вектор в первой системе координат, $\mathbf{a}_2$ — вектор во второй системе координат, $\overleftrightarrow{A}_{21}$ — матрица перехода от второй системы к первой.

Компоненты матрицы перехода представляют собой косинусы углов между осями первой и второй систем координат.

Обратный переход осуществляется с помощью обратной матрицы

$$\mathbf{a}_2 = \overleftrightarrow{A}_{12}\mathbf{a}_1, \tag{3.2}$$

компоненты которой также представляют собой косинусы, но теперь уже между осями второй и первой систем координат.

То есть в первом случае каждой строке прямой матрицы соответствуют углы между одной из координат первой системы с каждой из координат второй системы, а во втором — каждой строке обратной матрицы соответствуют углы между одной из координат второй системы с каждой из координат первой системы.

Поясним это более подробно на примере двух декартовых систем координат.

3.2.5. Переход из одной декартовой системы координат в другую

Важным частным случаем перехода является преобразование вектора $\mathbf{a}'$, заданного в повернутой системе координат $Ox'y'z'$, в вектор $\mathbf{a}$, заданный в исходной системе $Oxyz$ [292,293]. Такой переход осуществляется с помощью прямого преобразования

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}'. \tag{3.3}$$

При этом таблица компонент матрицы перехода имеет вид

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cos(\angle xOx') & \cos(\angle xOy') & \cos(\angle xOz') \\ \hline y & \cos(\angle yOx') & \cos(\angle yOy') & \cos(\angle yOz') \\ \hline z & \cos(\angle zOx') & \cos(\angle zOy') & \cos(\angle zOz') \end{array}\right|, \tag{3.4}$$

то есть сама матрица прямого преобразования имеет вид

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos(\angle xOx') & \cos(\angle xOy') & \cos(\angle xOz') \\ \cos(\angle yOx') & \cos(\angle yOy') & \cos(\angle yOy') \\ \cos(\angle zOx') & \cos(\angle yOz') & \cos(\angle zOz') \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Обратный переход, то есть преобразование вектора $\mathbf{a}$, заданного в декартовой системе координат $Oxyz$, в вектор $\mathbf{a}'$, заданный в системе $Ox'y'z'$, осуществляется с помощью обратного преобразования

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{a}. \tag{3.6}$$

При этом таблица компонент матрицы перехода имеет вид

	x	y	z
x'	$\cos(\angle x'Ox)$	$\cos(\angle x'Oy)$	$\cos(\angle x'Oz)$
y'	$\cos(\angle y'Ox)$	$\cos(\angle y'Oy)$	$\cos(\angle y'Oz)$
z'	$\cos(\angle z'Ox)$	$\cos(\angle z'Oy)$	$\cos(\angle z'Oz)$

. (3.7)

Соответствующая матрица обратного преобразования, имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\angle x'Ox) & \cos(\angle x'Oy) & \cos(\angle x'Oz) \\ \cos(\angle y'Ox) & \cos(\angle y'Oy) & \cos(\angle y'Oz) \\ \cos(\angle z'Ox) & \cos(\angle z'Oy) & \cos(\angle z'Oz) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Из сравнения (3.5) и (3.8) можно видеть, что взаимное преобразование матриц обоих переходов друг в друга получается путем замены строк одной матрицы столбцами другой и обратно.

Исходя из того, что последовательное применение прямого и обратного преобразований должно привести вектор к своему исходному значению, следует, что произведение матриц прямого и обратного преобразований должно быть равно единичной матрице, оставляющей вектор неизменным, то есть должно выполняться равенство

$$\overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Это свойство, характеризующее поворот одной декартовой системы относительно другой, обе из которых являются правыми и имеют общее начало, является достаточно универсальным. Оно выполняется при условии, что базис каждой из матриц (то есть набор направляющих векторов осей координат) является ортонормированным, где нормировка состоит в равенстве единице суммы квадратов компонент каждого из этих векторов [261, стр. 447, формула (14.10.3)]. То есть сумма квадратов компонент каждого направляющего вектора одной системы,

разложенного по осям другой системы, должна равняться единице. Таким образом, по каждой из осей каждой системы задается единичный вектор, а компоненты матриц являются косинусами углов между единичными векторами одной системы и единичными векторами другой.

Итак, главная задача нахождения матрицы поворота состоит в определении единичных направляющих векторов осей одной системы относительно другой.

Компоненты матриц прямого и обратного перехода, как правило, получить легче в исходной системе координат $Oxyz$. Так, если обозначить единичные векторы осей системы координат $Ox'y'z'$ через $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$, то направляющие косинусы этих векторов в системе $Oxyz$ и будут искомыми элементами матриц $\overleftrightarrow{A}$ и $\overleftrightarrow{A}^{-1}$.

Важным случаем задания взаимного положения исходной и повернутой систем координат является такой, при котором положение системы $Ox'y'z'$ относительно системы $Oxyz$ однозначно определяется ориентацией оси Oz', заданной направляющим вектором $\mathbf{l}_{z'}$ в системе $Oxyz$, а также углом ε поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг этой оси. Этот угол должен отсчитываться в плоскости $Ox'y'$ от оси, направляющий вектор которой относительно системы $Oxyz$ остается неподвижным и может быть определен заранее. Таким образом, задача построения матрицы перехода состоит в том, чтобы выразить все входящие в (3.5) или (3.8) углы между осями систем $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ через углы, которые определяют ориентацию оси Oz' и оси отсчета угла поворота ε, а также через значение самого угла ε. Для этой цели удобно использовать систему углов Эйлера [261, стр. 450].

При этом, если матрица, например, прямого перехода будет получена, то матрицу обратного переходя можно получить из нее путем замены строк соответствующими столбцами. То же касается и получения матрицы прямого перехода из матрицы обратного.

3.2.6. Матрицы прямая и обратная

Рассмотрим преобразование компонент векторов из одной системы в другую в наиболее общем виде.

Матрица ПРЯМАЯ преобразует вектор из системы $Ox'y'z'$ в систему $Oxyz$:

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}'. \tag{3.10}$$

Ее компоненты — направляющие косинусы осей системы $Ox'y'z'$ относительно осей системы $Oxyz$, то есть для построения прямой матрицы надо выразить компоненты единичных векторов осей Ox', Oy', Oz' в системе $Oxyz$. Обозначим единичные направляющие векторы обеих систем координат через $\mathbf{l}_i$, а косинусы углов между векторами той и другой систем через $(\mathbf{l}_i)_k$, где i, k — соответствующие координаты.

Таблица, задающая компоненты ПРЯМОЙ матрицы, имеет вид:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} & \mathbf{l}_{x'} & \mathbf{l}_{y'} & \mathbf{l}_{z'} \\ \hline x & (\mathbf{l}_{x'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_x \\ y & (\mathbf{l}_{x'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_y \\ z & (\mathbf{l}_{x'})_z & (\mathbf{l}_{y'})_z & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{array}\right|, \tag{3.11}$$

то есть

$$\overleftrightarrow{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{l}_{x'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_x \\ (\mathbf{l}_{x'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_y \\ (\mathbf{l}_{x'})_z & (\mathbf{l}_{y'})_z & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{array}\right). \tag{3.12}$$

Преобразование вектора $\mathbf{a}$ от системы $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$ имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{l}_{x'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_x \\ (\mathbf{l}_{x'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_y \\ (\mathbf{l}_{x'})_z & (\mathbf{l}_{y'})_z & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{array}\right). \tag{3.13}$$

Матрица ОБРАТНАЯ преобразует вектор из системы $Oxyz$ в систему $Ox'y'z'$:

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1} \mathbf{a}. \tag{3.14}$$

Ее компоненты — направляющие косинусы осей системы $Oxyz$ относительно осей системы $Ox'y'z'$, то есть для построения прямой матрицы надо выразить компоненты единичных векторов осей Ox, Oy, Oz в системе $Ox'y'z'$.

Таблица, задающая компоненты ОБРАТНОЙ матрицы, имеет вид:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} & \mathbf{l}_{x} & \mathbf{l}_{y} & \mathbf{l}_{z} \\ \hline x' & (\mathbf{l}_{x})_{x'} & (\mathbf{l}_{y})_{x'} & (\mathbf{l}_{z})_{x'} \\ y' & (\mathbf{l}_{x})_{y'} & (\mathbf{l}_{y})_{y'} & (\mathbf{l}_{z})_{y'} \\ z' & (\mathbf{l}_{x})_{z'} & (\mathbf{l}_{y})_{z'} & (\mathbf{l}_{z})_{z'} \end{array}\right|, \tag{3.15}$$

то есть

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{l}_{x})_{x'} & (\mathbf{l}_{y})_{x'} & (\mathbf{l}_{z})_{x'} \\ (\mathbf{l}_{x})_{y'} & (\mathbf{l}_{y})_{y'} & (\mathbf{l}_{z})_{y'} \\ (\mathbf{l}_{x})_{z'} & (\mathbf{l}_{y})_{z'} & (\mathbf{l}_{z})_{z'} \end{array}\right). \tag{3.16}$$

Преобразование вектора $\mathbf{a}$ от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{l}_x)_{x'} & (\mathbf{l}_y)_{x'} & (\mathbf{l}_z)_{x'} \\ (\mathbf{l}_x)_{y'} & (\mathbf{l}_y)_{y'} & (\mathbf{l}_z)_{y'} \\ (\mathbf{l}_x)_{z'} & (\mathbf{l}_y)_{z'} & (\mathbf{l}_z)_{z'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

При решении задач о прецессии намагниченности обычно система $Oxyz$ является лабораторной системой, связанной с постоянным магнитным полем или равновесным положением вектора намагниченности, вдоль которых направлена ось Oz. Плотность энергии анизотропии обычно задается в системе $Ox'y'z'$, связанной с осью анизотропии или с ребрами кубической элементарной ячейки, так как в этих случаях выражение для плотности энергии имеет наиболее простой вид. При этом плотность энергии выражается через компоненты вектора намагниченности $m_{x'}$, $m_{y'}$, $m_{z'}$, заданные в системе $Ox'y'z'$.

Для обеспечения возможности решения задачи в лабораторной системе $Oxyz$, надо иметь выражение для плотности энергии именно в этой системе. Для этого надо компоненты вектора намагниченности $m_{x'}$, $m_{y'}$, $m_{z'}$ выразить через компоненты того же вектора m_x, m_y, m_z, заданные в системе $Oxyz$, после чего подставить их в выражение для плотности энергии, заданное в системе $Ox'y'z'$. В результате плотность энергии будет определена через компоненты m_x, m_y, m_z, что позволит работать далее в системе $Oxyz$.

Таким образом, надо осуществить преобразование:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{B}\,\mathbf{m}, \tag{3.18}$$

где $\overleftrightarrow{B}$ — требуемая матрица перехода.

Из сравнения этого выражения с (3.6) видно, что $\overleftrightarrow{B}$ является обратной матрицей, определяемой выражением (3.16), то есть

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\,\mathbf{m}. \tag{3.19}$$

Итак, для получения плотности энергии в системе $Oxyz$, если она задана в системе $Ox'y'z'$, надо использовать ОБРАТНУЮ матрицу вида (3.16). Однако обычно технически проще найти прямую матрицу вида (3.12), так как при этом требуется найти направляющие косинусы единичных векторов системы $Ox'y'z'$ в системе $Oxyz$, то есть на этапе нахождения прямой матрицы можно работать в лабораторной системе координат, что более удобно. После нахождения прямой матрицы найти обратную матрицу из нее можно путем замены строк столбцами. Правомерность такой замены обеспечивается проверкой произведения прямой и обратной матриц, которое должно равняться единичной матрице.

3.3. Общие правила решения задач о переходе между различными системами координат

Отметим сначала некоторые общие правила решения задач о переходе между различным образом ориентированными системами координат. В случае анизотропной среды возможны два принципиально различных случая.

Случай № 1. Задача решается в исходной (лабораторной) системе координат. При этом плотность энергии анизотропии должна быть первоначально записана в той системе, где ее вид наиболее простой, после чего эту плотность энергии надо преобразовать в исходную систему.

Этот случай удобен для одноосной анизотропии. Задача решается в лабораторной системе $Oxyz$. Плотность энергии имеет наиболее простой вид в системе $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена вдоль оси анизотропии.

Плотность энергии одноосной анизотропии в системе $Ox'y'z'$ имеет вид

$$U_a = K(m_{x'}^2 + m_{y'}^2), \tag{3.20}$$

где в случае легкой оси $K > 0$.

Чтобы выразить эту плотность энергии в системе $Oxyz$, надо компоненты вектора $\mathbf{m}'$ выразить через компоненты вектора $\mathbf{m}$, то есть осуществить преобразование

$$\mathbf{m}' = \overset{\leftrightarrow}{A}{}^{-1}\mathbf{m}, \tag{3.21}$$

где $\overset{\leftrightarrow}{A}{}^{-1}$ — матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$.

Это преобразование осуществляется с помощью обратной матрицы. После этого надо подставить компоненты вектора $\mathbf{m}$ в выражение (3.20), в результате чего получится плотность энергии, выраженная через компоненты вектора $\mathbf{m}$.

Далее задача решается в исходной системе $Oxyz$.

Случай № 2. Задача решается в повернутой системе координат $Ox'y'z'$, ось Oz' которой ориентирована вдоль какого-то для данного рассмотрения важного направления, а плотность энергии анизотропии имеет наиболее простой вид в другой системе, связанной с каким-то характерным направлением для анизотропии. При этом плотность энергии анизотропии должна быть первоначально записана в той системе, где ее вид наиболее простой, после чего эту плотность энергии надо преобразовать в повернутую систему.

Этот случай удобен для кубической анизотропии, когда ось Oz' повернутой системы координат ориентирована вдоль каких-то характерных направлений кубической ячейки, например, ребра, диагонали грани или пространственной диагонали куба.

Плотность энергии имеет наиболее простой вид в системе $Oxyz$, оси которой Ox, Oy и Oz направлены вдоль ребер куба.

Эта плотность энергии имеет вид:

$$U_c(001) = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2), \tag{3.22}$$

где $K_1 > 0$ соответствует легким осям типа (111).

Чтобы выразить эту плотность энергии в системе $Ox'y'z'$, надо компоненты вектора $\mathbf{m}$ выразить через компоненты вектора $\mathbf{m}'$, то есть осуществить преобразование:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{m}', \tag{3.23}$$

где $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от системы $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$.

Это преобразование осуществляется с помощью прямой матрицы. После этого надо подставить компоненты вектора $\mathbf{m}$ в выражение (3.22), в результате чего получится плотность энергии, выраженная через компоненты вектора $\mathbf{m}'$.

Далее задача решается в повернутой системе $Ox'y'z'$, однако, чтобы не загромождать запись штрихами, их опускают и полагают, что повернутая система является лабораторной. Это эквивалентно установке кубической ячейки в лабораторной системе координат таким образом, что выделенное направление ячейки (ребро, диагональ грани или пространственная диагональ куба) ориентируется вдоль оси Oz лабораторной системы координат $Oxyz$.

3.3.1. Вспомогательные геометрические задачи, используемые для получения матрицы преобразования координат

Матрица преобразования координат получается путем поворота системы координат. Компоненты матрицы являются косинусами углов между старыми и новыми осями. Для их нахождения надо решить несколько вспомогательных задач, известных из аналитической геометрии.

Перечень вспомогательных задач.

1. Известен вектор произвольной длины. Найти соответствующий ему единичный вектор.
2. Известны два вектора. Найти угол между ними.
3. Известны два вектора. Найти компоненты вектора, перпендикулярного к обоим исходным векторам.
4. Известен вектор. Найти уравнение прямой, параллельной этому вектору, проходящей через заданную точку.
5. Известен вектор нормали к плоскости и расстояние от начала координат до плоскости. Найти уравнение плоскости.
6. Известны координаты трех точек плоскости. Найти уравнение плоскости.
7. Известно уравнение плоскости. Найти компоненты вектора нормали к этой плоскости.
8. Известны уравнения двух плоскостей. Найти угол между ними.
9. Известны уравнения двух плоскостей. Найти уравнение пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения исходных плоскостей.

Рассмотрим эти задачи отдельно, в основном, следуя [261,292,293].

ЗАДАЧА № 1. Известен вектор произвольной длины. Найти соответствующий ему единичный вектор.

Исходный вектор:

$$\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}. \tag{3.24}$$

Нормирующий множитель:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \tag{3.25}$$

Искомый единичный вектор равен

$$\mathbf{l}_a = \{\mu X, \mu Y, \mu Z\}, \tag{3.26}$$

или

$$\mathbf{l}_a = \left\{ \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \right\}. \tag{3.27}$$

ЗАДАЧА № 2. Известны два вектора. Найти угол между ними.

Исходные векторы:

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}; \tag{3.28}$$

$$\mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}. \tag{3.29}$$

Угол между двумя векторами находится из скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \tag{3.30}$$

ЗАДАЧА № 3. Известны два вектора. Найти компоненты вектора, перпендикулярного к обоим исходным векторам.

Исходные векторы:

$$\mathbf{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}; \tag{3.31}$$

$$\mathbf{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}. \tag{3.32}$$

Компоненты вектора, перпендикулярного к двум исходным, находятся с помощью векторного произведения:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \tag{3.33}$$

Искомый единичный вектор, перпендикулярный к обоим исходным векторам, имеет вид

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]}{|[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]|}. \tag{3.34}$$

ЗАДАЧА № 4. Известен вектор. Найти уравнение прямой, параллельной этому вектору, проходящей через заданную точку.

Исходный вектор

$$\mathbf{a} = \{l, m, n\}. \tag{3.35}$$

Заданная точка

$$(x_0, y_0, z_0). \tag{3.36}$$

Искомое уравнение прямой, параллельной вектору $\mathbf{a}$, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{3.37}$$

Это — два уравнения плоскостей. Искомая прямая является линией пересечения этих плоскостей.

ЗАДАЧА № 5. Известен вектор нормали к плоскости и расстояние от начала координат до плоскости. Найти уравнение плоскости.

Вектор нормали

$$\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}. \tag{3.38}$$

Расстояние от начала координат до плоскости: p.

Искомое уравнение плоскости:

$$xn_x + yn_y + zn_z - p = 0. \tag{3.39}$$

ЗАДАЧА № 6. Известны координаты трех точек плоскости. Найти уравнение плоскости.

Координаты точек:

$$(x_1, y_1, z_1); \tag{3.40}$$

$$(x_2, y_2, z_2); \tag{3.41}$$

$$(x_3, y_3, z_3). \tag{3.42}$$

Искомое уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.43}$$

ЗАДАЧА № 7. Известно уравнение плоскости. Найти компоненты вектора нормали к этой плоскости.

Уравнение исходной плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.44}$$

Нормирующий множитель

$$\mu = \frac{-\dfrac{D}{|D|}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.45}$$

Искомый вектор нормали

$$\mathbf{n} = \{\mu A, \mu B, \mu C\}. \tag{3.46}$$

Благодаря двухсторонности плоскости имеется еще один вектор нормали, равный

$$\mathbf{n}^{(-)} = -\mathbf{n}. \tag{3.47}$$

ЗАДАЧА № 8. Известны уравнения двух плоскостей. Найти угол между ними.

Уравнения исходных плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \tag{3.48}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{3.49}$$

Угол между двумя плоскостями равен углу между векторами нормалей к этим плоскостям.

Нормирующие множители:

$$\mu_1 = \frac{-\dfrac{D_1}{|D_1|}}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}; \tag{3.50}$$

$$\mu_2 = \frac{-\dfrac{D_2}{|D_2|}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.51}$$

Векторы нормалей:

$$\mathbf{n}_1 = \{\mu_1 A_1, \mu_1 B_1, \mu_1 C_1\}; \tag{3.52}$$

$$\mathbf{n}_2 = \{\mu_2 A_2, \mu_2 B_2, \mu_2 C_2\}. \tag{3.53}$$

Искомый угол определяется через скалярное произведение:

$$\cos\varphi = \frac{n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z}}{\sqrt{n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2}\sqrt{n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2}}. \tag{3.54}$$

После сокращения нормирующих множителей получаем

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.55}$$

ЗАДАЧА № 9. Известны уравнения двух плоскостей. Найти уравнение пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения исходных плоскостей.

Уравнения исходных плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \tag{3.56}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{3.57}$$

Искомое уравнение пучка плоскостей:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{3.58}$$

где λ — свободный параметр.

Это уравнение определяет все плоскости, кроме второй из исходных.

3.4. Матрицы преобразования в случае одноосной анизотропии

Рассмотрим сначала наиболее простой вид анизотропии — одноосную, однако предположим, что ось анизотропии ориентирована относительно исходной (лабораторной) системы координат произвольным образом.

3.4.1. Общая геометрия задачи при произвольной ориентации оси анизотропии

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу преобразования от системы координат $Oxyz$ к системе координат $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена произвольно, а оси Ox' и Oy' повернуты вокруг этой оси также на произвольный угол.

Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 3.2. Здесь показана исходная система координат $Oxyz$, а также повернутая система $Ox'y'z'$, имеющая с первой общее начало в точке O. Ось Oz' повернутой системы имеет произвольное направление, совпадающее с отрезком OM. Проекции этого отрезка на оси Ox, Oy и Oz соответствуют отрезкам OT, OS и ON. Проекция отрезка OM на плоскость Oxy обозначена OP. Прямая AB проходит через точку O и лежит в плоскости Oxy, перпендикулярно отрезку OM, а следовательно и отрезку OP. Таким образом $\angle AOP = 90°$. Точка R соответствует пересечению

Рис. 3.2. Общая геометрия задачи при произвольной ориентации оси анизотропии

продолжения линии PT с прямой AB. Точка U соответствует проекции точки R на ось Oy. Точка V соответствует пересечению продолжения линии PS с прямой AB. Плоскость MOC проходит через оси Oz и Oz'. Прямая COE лежит в плоскости MOC и составляет с осью Oz' углы $\angle MOC = \angle MOE = 90°$. В силу перпендикулярности прямых AB и CE к оси Oz', плоскость $ACBEO$ перпендикулярна оси Oz'. Таким образом, оси повернутой системы Ox' и Oy' лежат в плоскости $ACBEO$. При этом поворот системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' определяется углом ε. Этот угол задается взаимным расположением оси Ox' и прямой OA и отсчитывается от прямой OA в сторону прямой OE. В силу взаимной перпендикулярности осей Ox' и Oy', а также прямых OA и OE, угол между прямой OE и осью Oy' также равен ε.

Замечание о направлении отсчета угла поворота. На рис. 3.2 угол ε представлен как угол между осью Ox' и прямой OA. Будем считать положительным направление отсчета угла ε от прямой OA к прямой OE, как это показано стрелкой на оси Ox'. Такой выбор направления отсчета удобен, если мы поворачиваем систему координат $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'. В то же время, если рассматривать систему $Ox'y'z'$ как неподвижную и относительно нее поворачивать систему $Oxyz$, то при том же направлении отсчета угла ε поворот ячейки будет происходить в противоположном направлении, как показано стрелкой на оси Oz'. Таким образом, если мы смотрим со стороны положительного направления оси Oz', то угол ε отсчитывается против часовой стрелки, а система $Oxyz$ поворачивается по часовой стрелке. Если мы смотрим со стороны отрицательного направления оси Oz, то угол ε отсчитывается по часовой стрелке, а система $Oxyz$ поворачивается против часовой стрелки.

3.4.2. Общая структура матрицы прямого перехода

Преобразование компонент вектора из одной системы в другую осуществляется с помощью матрицы перехода по формуле:

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\mathbf{a}', \tag{3.59}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор в исходной системе координат, $\mathbf{a}'$ — тот же вектор в повернутой системе координат, $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от повернутой системы к исходной.

Компоненты матрицы $\overleftrightarrow{A}$ являются направляющими косинусами единичных векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ осей системы координат $Ox'y'z'$, относительно системы $Oxyz$, то есть первой задачей является нахождение этих единичных векторов.

3.4.3. Координаты основных точек

Для нахождения единичных векторов будут нужны координаты некоторых характерных точек общей геометрии задачи.

Будем считать, что отрезок OM, определяющий направление оси Oz', задан изначально. Обозначим длину этого отрезка через B и запишем его проекции на оси Ox, Oy и Oz:

$$OT = B_x; \tag{3.60}$$

$$OS = B_y; \tag{3.61}$$

$$ON = B_z. \tag{3.62}$$

При этом:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}\,. \tag{3.63}$$

Будем определять далее координаты характерных точек через эти проекции B_x, B_y и B_z.

Итак, координаты точек O, M, N, T, S, P равны:

$$O \to (0, 0, 0); \tag{3.64}$$

$$M \to (B_x, B_y, B_z); \tag{3.65}$$

$$N \to (0, 0, B_z); \tag{3.66}$$

$$T \to (B_x, 0, 0); \tag{3.67}$$

$$S \to (0, B_y, 0); \tag{3.68}$$

$$P \to (B_x, B_y, 0). \tag{3.69}$$

Для нахождения координат остальных точек рассмотрим схему их расположения на плоскости Oxy, показанную на рис. 3.3 (вид сверху со стороны положительного направления оси Oz).

Здесь: $OT = B_x$; $OS = B_y$. Из того, что $RP \parallel Oy$, $VP \parallel Ox$, $OP \perp AB$, следует подобие следующих треугольников: ΔOUR, ΔORT,

Рис. 3.3. Схема расположения основных точек на плоскости Oxy

ΔOTP, ΔOPS, ΔOSV. При этом получаем:

$$R \to \left(B_x, -\frac{B_x^2}{B_y}, 0\right); \tag{3.70}$$

$$U \to \left(0, -\frac{B_x^2}{B_y}, 0\right); \tag{3.71}$$

$$V \to \left(-\frac{B_y^2}{B_x}, B_y, 0\right). \tag{3.72}$$

3.4.4. Определение угла поворота вокруг оси анизотропии

Компоненты единичных векторов осей повернутой системы координат $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ определяются по правилам аналитической геометрии, с помощью вспомогательных задач №№ 1–9.

Единичный вектор оси анизотропии $\mathbf{l}_{z'}$. Найдем сначала единичный вектор оси Oz', то есть вектор $\mathbf{l}_{z'}$. По направлению этот вектор совпадает с отрезком OM. С помощью задачи № 1 находим компоненты вектора $\mathbf{l}_{z'}$ в виде:

$$\mathbf{l}_{z'} = \left\{\frac{B_x}{B}, \frac{B_y}{B}, \frac{B_z}{B}\right\} = \\ = \left\{\frac{B_x}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}, \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}, \frac{B_z}{\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}\right\}. \tag{3.73}$$

Независимость этого вектора от угла поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' согласуется с общей постановкой задачи.

Легко видеть, что сумма квадратов компонент вектора $\mathbf{l}_{z'}$ равна единице, что соответствует его единичному характеру.

Угол поворота вокруг оси анизотропии. Вектор $\mathbf{l}_{z'}$ определяет лишь одну из осей системы координат $Ox'y'z'$ относительно оси $Oxyz$. Положение двух других осей Ox' и Oy' определяется поворотом системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' на угол ε, который также является изначально заданным. Поскольку главной задачей является выражение единичных направляющих векторов $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{x'}$ системы $Ox'y'z'$ через этот угол, рассмотрим его связь с величинами B_x, B_y и B_z, задающими направление оси Oz'.

Определим угол ε как угол между линиями пересечения плоскостей MOx' и $AOBM$ с плоскостью $ACBEO$. Возможность такого определения следует из перпендикулярности обеих этих плоскостей к плоскости $ACBEO$, что в свою очередь следует из прохождения обеих этих плоскостей через линию OM, то есть ось Oz', которая перпендикулярна плоскости $ACBEO$. При этом ε отсчитывается в плоскости $ACBEO$ от оси Ox в сторону линии OE.

Для нахождения связи угла ε с параметрами упомянутых плоскостей, воспользуемся задачей № 8, в соответствии с которой косинус угла

между плоскостями определяется через векторы нормалей к этим плоскостям. Угол ε составляют между собой две плоскости: $AOBM$ и MOx'.

Уравнение плоскости $AOBM$ найдем с помощью задачи №6 из условия прохождения плоскости через три точки: $O(0,0,0)$, $M(B_x, B_y, B_z)$ и $R(B_x, -B_x^2/B_y, 0)$.

Таким образом, получаем

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ B_x & -B_x^2/B_y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.74}$$

откуда получаем уравнение плоскости $AOBM$ в виде

$$B_x^2 B_z x + B_x B_y B_z y - B_x(B_x^2 + B_y^2)z = 0. \tag{3.75}$$

Разделив на B_x, получаем

$$B_x B_z x + B_y B_z y - (B_x^2 + B_y^2)z = 0. \tag{3.76}$$

Для нахождения уравнения плоскости MOx' построим пучок плоскостей, проходящих через ось Oz', то есть линию OM, после чего выберем нужную плоскость из этого пучка.

В качестве опорных плоскостей пучка выберем плоскости $AOBM$ и MON, пересекающиеся по линии OM.

Уравнение плоскости $AOBM$ имеет вид (3.76).

Уравнение плоскости MON найдем с помощью задачи №6, учитывая, что эта плоскость проходит через три точки: $O(0,0,0)$, $M(B_x, B_y, B_z)$ и $N(0,0,B_z)$, то есть из соотношения

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ 0 & 0 & B_z & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.77}$$

откуда получаем уравнение плоскости MON в виде

$$B_y B_z x - B_x B_z y = 0. \tag{3.78}$$

Разделив на B_z, получаем

$$B_y x - B_x y = 0. \tag{3.79}$$

Таким образом, для построения пучка плоскостей, проходящих через ось Oz', получаем два уравнения плоскостей $AOBM$ и MON:

$$B_x B_z x + B_y B_z y - (B_x^2 + B_y^2)z = 0. \tag{3.80}$$

$$B_y x - B_x y = 0. \tag{3.81}$$

С помощью задачи №9 получаем уравнение пучка в виде

$$B_x B_z x + B_y B_z y - (B_x^2 + B_y^2)z + \lambda(B_y x - B_x y) = 0 \tag{3.82}$$

или:

$$(B_xB_z + \lambda B_y)x + (B_yB_z - \lambda B_x)y - (B_x^2 + B_y^2)z = 0, \tag{3.83}$$

где λ — параметр, который должен быть определен из условия равенства величине ε угла между плоскостью $AOBM$ и другой, пока не известной плоскостью MOx', содержащейся в пучке (3.83).

Итак, будем рассматривать две плоскости $AOBM$ и MOx', имеющие уравнения:

$$B_xB_zx + B_yB_zy - (B_x^2 + B_y^2)z = 0; \tag{3.84}$$

$$(B_xB_z + \lambda B_y)x + (B_yB_z - \lambda B_x)y - (B_x^2 + B_y^2)z = 0, \tag{3.85}$$

и с помощью задачи № 8 найдем косинус угла ε между ними:

$$\cos\varepsilon = \frac{B}{\sqrt{B^2 + \lambda^2}}, \tag{3.86}$$

где B определяется выражением (3.63).

Из (3.86) получаем

$$\sin\varepsilon = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{B^2 + \lambda^2}}. \tag{3.87}$$

Эти выражения можно рассматривать как уравнения для определения λ, исходя из заданного значения угла ε. При этом получаем

$$\lambda_{1,2} = \pm B\,\mathrm{tg}\,\varepsilon. \tag{3.88}$$

3.4.5. Получение направляющих векторов повернутой системы координат через угол поворота вокруг оси анизотропии

Вектор $\mathbf{l}_{y'}$. Найдем теперь вектор $\mathbf{l}_{y'}$, который зависит от угла ε поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'.

С помощью задачи № 7 найдем этот вектор как нормаль к плоскости MOx', уравнение которой имеет вид (3.85). Нормирующий множитель равен

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}}. \tag{3.89}$$

При этом получаем две возможные нормали:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+)} = \left\{\mu(B_xB_z + \lambda B_y), \mu(B_yB_z - \lambda B_x), \mu(B_x^2 + B_y^2)\right\} =$$
$$= \left\{-\frac{B_xB_z + \lambda B_y}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}}, -\frac{B_yB_z - \lambda B_x}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}}, \frac{B_x^2 + B_y^2}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}}\right\}, \tag{3.90}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-)} = \left\{ -\mu(B_xB_z + \lambda B_y), -\mu(B_yB_z - \lambda B_x), -\mu(B_x^2 + B_y^2) \right\} =$$
$$= \left\{ \frac{B_xB_z + \lambda B_y}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}}, \frac{B_yB_z - \lambda B_x}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}}, -\frac{B_x^2 + B_y^2}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}} \right\}. \tag{3.91}$$

Подставляя λ в соответствии с (3.88) и учитывая два знака, получаем компоненты этих выражений в виде:

$$\frac{B_xB_z + \lambda B_y}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}} = \frac{B_xB_z}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \cos\varepsilon \pm \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \sin\varepsilon; \tag{3.92}$$

$$\frac{B_yB_z - \lambda B_x}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}} = \frac{B_yB_z}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \cos\varepsilon \pm \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \sin\varepsilon; \tag{3.93}$$

$$\frac{B_x^2 + B_y^2}{\sqrt{(B_x^2 + B_y^2)(B^2 + \lambda^2)}} = \frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B} \cos\varepsilon. \tag{3.94}$$

Два знака в этих выражениях в сочетании с двумя знаками в (3.90) и (3.91) соответствуют двум возможным направлениям нормали к плоскости MOx' и двум возможным конфигурациям декартовой системы координат — правой и левой. Для однозначного выбора правой системы координат, ось Ox' которой при $\varepsilon = 0$ совпадает с прямой OA, а ось Oy' с прямой OE, можно рассмотреть какой-либо частный случай ориентации системы $Ox'y'z'$ относительно системы $Oxyz$, в котором выбор должных знаков в выражениях (3.90)–(3.94) был бы очевиден.

Таким частным случаем может быть поворот системы $Ox'y'z'$ вокруг пространственной диагонали кубической кристаллографической ячейки. При этом ось Oz' ориентируется вдоль единичного вектора

$$\mathbf{l}^{[111]} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}, \tag{3.95}$$

а ориентации осей Ox' и Oy' удобно выбрать соответствующими двум характерным значениям угла ε: нуль и 90°.

Сравнение знаков, входящих в выражения (3.90)–(3.94) со знаками компонент вектора $\mathbf{l}_{y'}$, получающихся в этом частном случае, позволяет выбрать знаки (3.90)–(3.94) однозначно. В результате получаем компоненты вектора $\mathbf{l}_{y'}$ в виде:

$$(\mathbf{l}_{y'})_x = \frac{B_xB_z}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \cos\varepsilon - \frac{B_y}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \sin\varepsilon =$$
$$= \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} (B_xB_z \cos\varepsilon - BB_y \sin\varepsilon); \tag{3.96}$$

$$(\mathbf{l}_{y'})_y = \frac{B_y B_z}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \cos\varepsilon + \frac{B_x}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} \sin\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} (B_y B_z \cos\varepsilon + B B_x \sin\varepsilon); \quad (3.97)$$

$$(\mathbf{l}_{y'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B} \cos\varepsilon. \quad (3.98)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что выполняется соотношение:

$$(\mathbf{l}_{y'})_x^2 + (\mathbf{l}_{y'})_y^2 + (\mathbf{l}_{y'})_z^2 = 1, \quad (3.99)$$

то есть условие нормировки на единицу полностью выполнено.

Вектор $\mathbf{l}_{x'}$. Найдем теперь вектор $\mathbf{l}_{x'}$, как перпендикуляр к векторам $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$, с помощью задачи № 3:

$$\mathbf{l}_{x'} = \frac{[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}]}{|[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}]|}. \quad (3.100)$$

Векторное произведение векторов $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$ имеет вид

$$[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_z \\ (\mathbf{l}_{z'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \left\{ (\mathbf{l}_{y'})_y (\mathbf{l}_{z'})_z - (\mathbf{l}_{y'})_z (\mathbf{l}_{z'})_y \right\} +$$

$$+ \mathbf{j} \cdot \left\{ (\mathbf{l}_{y'})_z (\mathbf{l}_{z'})_x - (\mathbf{l}_{y'})_x (\mathbf{l}_{z'})_z \right\} + \mathbf{k} \cdot \left\{ (\mathbf{l}_{y'})_x (\mathbf{l}_{z'})_y - (\mathbf{l}_{y'})_y (\mathbf{l}_{z'})_x \right\}. \quad (3.101)$$

Модуль векторного произведения равен

$$\left| [\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}] \right| = 1. \quad (3.102)$$

Подставляя (3.96)–(3.98) и (3.73), получаем компоненты вектора $\mathbf{l}_{x'}$ в виде

$$(\mathbf{l}_{x'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} (B B_y \cdot \cos\varepsilon + B_x B_z \sin\varepsilon); \quad (3.103)$$

$$(\mathbf{l}_{x'})_y = -\frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}} (B B_x \cdot \cos\varepsilon - B_y B_z \sin\varepsilon); \quad (3.104)$$

$$*(\mathbf{l}_{x'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B} \sin\varepsilon. \quad (3.105)$$

Можно видеть, что здесь условие нормировки также выполняется.

3.4.6. Набор единичных векторов повернутой системы координат

Итак, в соответствии с (3.103)–(3.105), (3.96)–(3.98) и (3.73), получаем набор единичных векторов системы $Ox'y'z'$, компоненты которых выражены в системе $Oxyz$, в виде:

$$(\mathbf{l}_{x'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(BB_y \cos\varepsilon + B_x B_z \sin\varepsilon); \tag{3.106}$$

$$(\mathbf{l}_{x'})_y = -\frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(BB_x \cos\varepsilon - B_y B_z \sin\varepsilon); \tag{3.107}$$

$$(\mathbf{l}_{x'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B}\sin\varepsilon. \tag{3.108}$$

$$(\mathbf{l}_{y'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(B_x B_z \cos\varepsilon - BB_y \sin\varepsilon); \tag{3.109}$$

$$(\mathbf{l}_{y'})_y = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(B_y B_z \cos\varepsilon + BB_x \sin\varepsilon); \tag{3.110}$$

$$(\mathbf{l}_{y'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B}\cos\varepsilon. \tag{3.111}$$

$$(\mathbf{l}_{z'})_x = \frac{B_x}{B}; \tag{3.112}$$

$$(\mathbf{l}_{z'})_y = \frac{B_y}{B}; \tag{3.113}$$

$$(\mathbf{l}_{z'})_z = \frac{B_z}{B}, \tag{3.114}$$

где, в соответствии с (3.63)

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}. \tag{3.115}$$

3.4.7. Полный вид матрицы прямого перехода

Сведем компоненты векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ в единую таблицу:

$$\left|\begin{array}{c|c:c:c} & x' & y' & z' \\ \hline x & (\mathbf{l}_{x'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_x \\ y & (\mathbf{l}_{x'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_y \\ z & (\mathbf{l}_{x'})_z & (\mathbf{l}_{y'})_z & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{array}\right|. \tag{3.116}$$

При этом матрица перехода принимает вид:

$$\overleftrightarrow{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} (\mathbf{l}_{x'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_x \\ (\mathbf{l}_{x'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_y \\ (\mathbf{l}_{x'})_z & (\mathbf{l}_{y'})_z & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{array}\right). \tag{3.117}$$

Записывая матрицу через обозначения компонент:

$$\overleftrightarrow{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right), \tag{3.118}$$

получаем:

$$A_{11} = (\mathbf{l}_{x'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(BB_y \cos\varepsilon + B_x B_z \sin\varepsilon); \tag{3.119}$$

$$A_{12} = (\mathbf{l}_{y'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(B_x B_z \cos\varepsilon - BB_y \sin\varepsilon); \tag{3.120}$$

$$A_{13} = (\mathbf{l}_{z'})_x = \frac{B_x}{B}; \tag{3.121}$$

$$A_{21} = (\mathbf{l}_{x'})_y = -\frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(BB_x \cos\varepsilon - B_y B_z \sin\varepsilon); \tag{3.122}$$

$$A_{22} = (\mathbf{l}_{y'})_y = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(B_y B_z \cos\varepsilon + BB_x \sin\varepsilon); \tag{3.123}$$

$$A_{23} = (\mathbf{l}_{z'})_y = \frac{B_y}{B}; \tag{3.124}$$

$$A_{31} = (\mathbf{l}_{x'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B} \sin\varepsilon; \tag{3.125}$$

$$A_{32} = (\mathbf{l}_{y'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B} \cos\varepsilon; \tag{3.126}$$

$$A_{33} = (\mathbf{l}_{z'})_z = \frac{B_z}{B}. \tag{3.127}$$

3.4.8. Матрица обратного перехода

Обратный переход от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$ осуществляется с помощью матрицы обратного перехода $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ по формуле:

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}, \tag{3.128}$$

где матрица $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ получается из матрицы прямого перехода (3.117) путем замены строк столбцами:

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} (\mathbf{l}_{x'})_x & (\mathbf{l}_{x'})_y & (\mathbf{l}_{x'})_z \\ \hline (\mathbf{l}_{y'})_x & (\mathbf{l}_{y'})_y & (\mathbf{l}_{y'})_z \\ \hline (\mathbf{l}_{z'})_x & (\mathbf{l}_{z'})_y & (\mathbf{l}_{z'})_z \end{array}\right). \tag{3.129}$$

Записывая обратную матрицу через обозначения компонент:

$$\overset{\leftrightarrow}{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} & A_{13}^{-1} \\ \hline A_{21}^{-1} & A_{22}^{-1} & A_{23}^{-1} \\ \hline A_{31}^{-1} & A_{32}^{-1} & A_{33}^{-1} \end{array}\right), \tag{3.130}$$

получаем:

$$A_{11}^{-1} = (\mathbf{l}_{x'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(BB_y \cos\varepsilon + B_x B_z \sin\varepsilon); \tag{3.131}$$

$$A_{12}^{-1} = (\mathbf{l}_{x'})_y = -\frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(BB_x \cos\varepsilon - B_y B_z \sin\varepsilon); \tag{3.132}$$

$$A_{13}^{-1} = (\mathbf{l}_{x'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B}\sin\varepsilon; \tag{3.133}$$

$$A_{21}^{-1} = (\mathbf{l}_{y'})_x = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(B_x B_z \cos\varepsilon - BB_y \sin\varepsilon); \tag{3.134}$$

$$A_{22}^{-1} = (\mathbf{l}_{y'})_y = \frac{1}{B\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}(B_y B_z \cos\varepsilon + BB_x \sin\varepsilon); \tag{3.135}$$

$$A_{23}^{-1} = (\mathbf{l}_{y'})_z = -\frac{\sqrt{B_x^2 + B_y^2}}{B}\cos\varepsilon; \tag{3.136}$$

$$A_{31}^{-1} = (\mathbf{l}_{z'})_x = \frac{B_x}{B}; \tag{3.137}$$

$$A_{32}^{-1} = (\mathbf{l}_{z'})_y = \frac{B_y}{B}; \tag{3.138}$$

$$A_{33}^{-1} = (\mathbf{l}_{z'})_z = \frac{B_z}{B}. \tag{3.139}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что произведение матриц прямого и обратного переходов равно единичной матрице.

3.4.9. Матрицы перехода в сферической системе координат

В проведенном рассмотрении направление оси Oz' задано в декартовой системе координат $Oxyz$ через проекции отрезка OM на оси этой системы, равные B_x, B_y и B_z. Это же направление можно задать в сферической системе координат $Or\theta\varphi$ через полярный и азимутальный углы θ и φ, как это показано на рис. 3.4.

При этом

$$B_x = B\sin\theta\cos\varphi; \tag{3.140}$$

$$B_y = B\sin\theta\sin\varphi; \tag{3.141}$$

$$B_z = B\cos\theta. \tag{3.142}$$

Рис. 3.4. Геометрия задачи в сферической системе координат

Подставляя эти выражения в (3.119)–(3.127), получаем компоненты матрицы перехода в виде:

$$A_{11} = \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + \sin\varphi\cos\varepsilon; \tag{3.143}$$
$$A_{12} = \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin\varepsilon; \tag{3.144}$$
$$A_{13} = \sin\theta\cos\varphi; \tag{3.145}$$
$$A_{21} = \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - \cos\varphi\cos\varepsilon; \tag{3.146}$$
$$A_{22} = \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + \cos\varphi\sin\varepsilon; \tag{3.147}$$
$$A_{23} = \sin\theta\sin\varphi; \tag{3.148}$$
$$A_{31} = -\sin\theta\sin\varepsilon; \tag{3.149}$$
$$A_{32} = -\sin\theta\cos\varepsilon; \tag{3.150}$$
$$A_{33} = \cos\theta. \tag{3.151}$$

Компоненты обратной матрицы, соответственно, имеют вид:

$$A_{11}^{-1} = \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + \sin\varphi\cos\varepsilon; \tag{3.152}$$
$$A_{12}^{-1} = \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - \cos\varphi\cos\varepsilon; \tag{3.153}$$
$$A_{13}^{-1} = -\sin\theta\sin\varepsilon; \tag{3.154}$$
$$A_{21}^{-1} = \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin\varepsilon; \tag{3.155}$$
$$A_{22}^{-1} = \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + \cos\varphi\sin\varepsilon; \tag{3.156}$$
$$A_{31}^{-1} = -\sin\theta\cos\varepsilon; \tag{3.157}$$
$$A_{31}^{-1} = \sin\theta\cos\varphi; \tag{3.158}$$
$$A_{32}^{-1} = \sin\theta\sin\varphi; \tag{3.159}$$
$$A_{33}^{-1} = \cos\theta. \tag{3.160}$$

Запишем эти матрицы в виде таблиц. Так из (3.143)–(3.151) получаем матрицу прямого перехода:

$$\overleftrightarrow{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + & \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - & \sin\theta\cos\varphi \\ +\sin\varphi\cos\varepsilon & -\sin\varphi\sin\varepsilon & \\ \hline \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - & \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + & \sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\varphi\cos\varepsilon & +\cos\varphi\sin\varepsilon & \\ \hline -\sin\theta\sin\varepsilon & -\sin\theta\cos\varepsilon & \cos\theta \end{array}\right). \quad (3.161)$$

Соответственно из (3.152)–(3.160) получаем матрицу обратного перехода:

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + & \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - & -\sin\theta\sin\varepsilon \\ +\sin\varphi\cos\varepsilon & -\cos\varphi\cos\varepsilon & \\ \hline \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - & \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + & -\sin\theta\cos\varepsilon \\ -\sin\varphi\sin\varepsilon & +\cos\varphi\sin\varepsilon & \\ \hline \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{array}\right). \quad (3.162)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что произведение матриц прямого и обратного переходов равно единичной матрице.

3.5. Кубическая анизотропия

Одним из часто встречающихся видов анизотропии является кубическая, поэтому рассмотрим этот вид анизотропии несколько подробнее. Прежде чем перейти к получению матриц поворота, обратимся сначала к общим геометрическим свойствам такой анизотропии, в первую очередь кубической ячейки, а также к основным вариантам ориентации осей типа [111] относительно плоскости магнитной пластины.

3.5.1. Обозначение осей кубической ячейки

Вследствие широкой применимости на практике материалов с кубической анизотропией, для обозначения осей такой анизотропии выработана определенная система индексов [261, 273, 274, 294]. Рассмотрим эту систему на примере кубической ячейки, для чего обратимся к рис. 3.5.

На рис. 3.5, *а* показана кубическая ячейка $ABCD$-$EFGH$, размещенная в декартовой системе координат $Oxyz$ таким образом, что начало этой системы, точка O, совпадает с одной из вершин куба F, а оси Ox, Oy, Oz — с ребрами, выходящими из этой вершины FE, FG, FB. Отмеченная ячейка окружена со всех сторон другими такими же кубическими ячейками, например $NADS$-$MEHP$, $JKBA$-$ILFE$ и другими. Положение любой точки пространства определяется тремя числами, соответствующими проекциям этой точки на оси координат Ox, Oy, Oz. В качестве единицы длины при этом используется длина ребра кубической ячейки. При этом узловые точки

Рис. 3.5. Схема обозначения направлений в кубической ячейке

полной структуры, соответствующие вершинам составляющих структуру кубических ячеек, будут определяться наборами трех целых чисел.

Например точка E имеет координаты $x_E = 1$, $y_E = 0$, $z_E = 0$, точка A — координаты $x_A = 1$, $y_A = 0$, $z_A = 1$, точка K — $x_K = 0$, $y_K = -1$, $z_K = 1$ и так далее. В обозначениях, принятых в аналитической геометрии [292, 293], эти точки записываются в виде: $E(1, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $K(0, -1, 1)$.

3.5.2. Кристаллографические направления

Однако в кристаллографии главным является задание не столько координат отдельных точек (хотя и это важно при анализе внутренней структуры ячейки), сколько определенных направлений, проходящих через узлы решетки. Такие направления задаются в виде прямых, проходящих через две точки, в качестве одной из которых обычно выбирается совмещенное с узлом ячейки начало координат (точка O), а в качестве другой — точка ближайшего узла, через который проходит заданное направление. Поскольку все три координаты точки O всегда равны нулю, то для задания направления достаточно указания трех координат другой точки заданного направления. Эти координаты носят название индексов направлений и записываются в порядке следования по осям Ox, Oy, Oz, после чего заключаются в квадратные скобки. Для точек, лежащих в области отрицательных значений координат, индексы обозначаются знаком «минус», располагающимся над соответствующим числом.

Для более подробного пояснения правил индексации направлений, отметим некоторые из них, наиболее характерные (рис. 3.5, *а*). Так например, направление, соответствующее ребру куба FE, совпадающему с осью Ox, обозначается как [100]. Направление, соответствующее другому ребру FG, обозначается [010], направле-

ние ребра FB — [001]. Направление пространственной диагонали грани $EOGH$, то есть OH, обозначается через [110], направление FC — [011], направление FA — [101]. Направление, соответствующее пространственной диагонали FD имеет обозначение [111]. Направления, проходящие через точки, лежащие в области отрицательных частей координатных осей, имеют вид: FK — $[0\bar{1}1]$, FI — $[1\bar{1}0]$, FJ — $[1\bar{1}1]$ и так далее.

Довольно употребительным на практике, например в технике ЦМД [38–41], является направление, проходящее через пространственную диагональ параллелепипеда, составленного из двух соседствующих кубических ячеек, например, проходящее через точки F и S. Такое направление обозначается как [211]. Соответственно направления диагоналей граней параллелепипеда $NBFM$ и $MFGP$ имеют обозначения [201] и [210].

В случае необходимости работы с другими направлениями, не проходящими через точку F, их следует путем параллельного переноса привести к направлению, проходящему через эту точку, после чего их обозначения принимают тот же вид. Например, обозначение направления, проходящего через точки B и D, имеет тот же вид, что и обозначение направления, проходящего через точки F и H, то есть [110]. Направление, проходящее через точки E и G — $[\bar{1}10]$ и так далее.

Схема обозначений наиболее употребительных направлений кубической ячейки приведена на рис. 3.5, *б*. Чаще всего используются направления [100], [110] и [111], так как они в достаточной степени отражают анизотропные свойства кубического кристалла. Из других направлений часто используется также [211].

3.5.3. Кристаллографические плоскости

Другой важнейшей характеристикой анизотропных свойств кристалла являются плоскости, проходящие через узлы кристаллической решетки.

Для обозначения плоскостей используется та же система индексов, что и для направлений. Однако в этом вопросе имеются две несколько различающиеся трактовки.

Так, согласно [274, стр. 11], плоскость, перпендикулярная данному направлению, обозначается той же совокупностью индексов, что и само направление. При этом обозначение плоскости, в отличие от обозначения направления, заключается в круглые скобки. Так например, перпендикулярно направлению FE (рис. 3.5, *а*), то есть [100], располагается плоскость $FBCG$, так что такая плоскость обозначается как (100). Перпендикулярно направлению FD, то есть [111] располагается плоскость, проходящая через точки A, C и H, то есть (111). Для более сложных плоскостей сохраняется то же правило. Так, плоскость, проходящая через точки J, C, G, I, имеет нормальное направление FP, соответствующее [210], так что обозначается как (210). Плоскость, проходящая через точки M, N, C, G — обозначается (120) и так далее.

С другой стороны, согласно [273, 294], плоскости характеризуются длинами отрезков, отсекаемых ими на координатных осях. При этом единицей измерения является длина ребра куба, а индексы вычисляются как обратные величины длин этих отрезков. В случае дробных значений вся система индексов умножается на минимальное число, приводящее к целому их значению. Полученные таким путем индексы называются «индексами Миллера», записываются также в порядке следования координатных осей и заключаются в круглые скобки.

Чтобы при взятии обратных величин избежать деления на нуль, плоскости проводятся так, чтобы они не проходили через начало координат, а отстояли он него по крайней мере на одно атомное расстояние.

Так для обозначения кристаллографической плоскости, параллельной координатной плоскости Oyz, здесь уже нельзя брать плоскость $FBCG$, а следует взять параллельную ей плоскость $EADH$, отсекающую на оси Ox единичный отрезок, а на осях Oy и Oz не отсекающих ничего вследствие параллельности плоскости Oyz. Обратные величины соответствующих отсечений будут равны 1, 0 и 0 (так как отсутствие отсечения эквивалентно делению на бесконечно большую величину). При этом обозначение данной плоскости в индексах Миллера будет (100). Для плоскостей, проходящих через точки G и B параллельно плоскостям Oxz и Oxy соответственно, обозначения в индексах Миллера будут (010) и (001). Можно видеть, что в этих трех случаях обозначения Миллера совпадают с принятыми в первой трактовке [274]. Для плоскости, проходящей через точки E, B, G, обозначения Миллера имеют вид (111). Видно, что это обозначение также совпадает с принятым в первой трактовке [274], благодаря тому, что плоскость, проходящая через точки E, B, G, параллельна плоскости, проходящей через точки A, C, H, используемые в первой трактовке.

Не так просто однако обстоит дело для ряда других плоскостей. Так плоскость $JCGI$ отсекает на осях координат Ox, Oy, Oz отрезки $1/2$, 1 и ∞ соответственно. Обратные величины этих отрезков дают индексы Миллера в виде (210). Некоторое «усложнение» здесь состоит в необходимости умножения длин отрезков на 2, чтобы привести их к целым величинам.

Подобным же образом, для плоскости, проходящей через точки M, N, C, G получаем индексы Миллера в виде (120). Можно видеть, что и в этом случае обозначения одних и тех же плоскостей в обеих трактовках совпадают.

Такое совпадение становится очевидным, если обратиться к двум видам записи уравнения плоскости, следующим из аналитической геометрии [292, 293]. Так плоскость, перпендикулярная вектору $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, описывается уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.163}$$

где в случае плоскости, не проходящей через начало координат, имеет место $D \neq 0$.

Разделяя это уравнение в целом на D, а каждое из слагаемых на содержащийся в нем коэффициент, получаем:

$$\frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} + 1 = 0, \tag{3.164}$$

откуда, вводя обозначения $a = D/A$, $b = D/B$, $c = D/AC$, получаем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + 1 = 0. \tag{3.165}$$

Это выражение представляет собой традиционно известное «уравнение плоскости в отрезках» [292, 293], где a, b, c — отрезки, отсекаемые этой плоскостью на соответствующих осях координат.

Таким образом, можно видеть, что обе приведенные выше трактовки характеристик кристаллографических плоскостей с помощью индексов Миллера полностью эквивалентны, то есть приводят к одинаковым результатам.

В настоящей монографии далее будет в основном использоваться первая трактовка, определяющая плоскость через нормаль к заданному направлению, что однако всего лишь отражает личные вкусы авторов, никак не препятствуя использованию другой эквивалентной трактовки.

Замечание. Для ячеек другой симметрии, отличной от кубической, также предлагались различные системы обозначения индексов направлений, однако, как отмечено в [274, стр. 11], ни одна из таких систем не нашла широкого применения, сравнимого с индексами Миллера, поэтому каждое использование таких систем требует сопутствующего объяснения.

3.5.4. Схема кубической ячейки

Теперь, когда основная система обозначений установлена, обратимся непосредственно к изучению кубической симметрии, в основе которой лежит элементарная кубическая ячейка, схема которой показана на рис. 3.6.

Отметим некоторые важные для практики направления и углы.

Будем полагать, что ячейка имеет единичный размер, то есть длина каждого ребра куба равна единице.

При этом длина диагоналей грани куба, например AC и BD на рис. 3.6, *б*, равна $\sqrt{2}$, а длина пространственных диагоналей куба, например AG и BH на рис. 3.6, *в*, равна $\sqrt{3}$.

На боковой грани куба $ABCD$ (рис. 3.6, *б*) длина ребер $AB = BC = CD = DA = 1$, длина диагоналей: $AC = BD = \sqrt{2}$.

Углы между диагоналями AC и BD равны 90°, эти диагонали составляют с ребрами куба AB, BC, CD, DA углы по 45°.

Рис. 3.6. Схема кубической кристаллографической ячейки. *а* – схема кубической ячейки в перспективе; *б* — схема боковой грани куба; *в* – схема диагональной плоскости куба

На диагональной плоскости куба $ABGH$ длина сторон AB и GH равна 1, длина диагоналей грани AH и BG равна $\sqrt{2}$. Длина пространственных диагоналей AG и BH равна $\sqrt{3}$.

Углы между пространственными диагоналями и диагоналями граней равны:

$$\angle GAH = \angle GBH = \angle BHA = \angle BGA = \operatorname{arctg}\sqrt{2}\,/2 \approx 35{,}2644^\circ;$$

Углы между пространственными диагоналями и ребрами равны:

$$\angle BAG = \angle BHG = \angle ABH = \angle AGH = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}7356^\circ.$$

Углы между пространственными диагоналями равны:

$$\angle AMB = \angle HMG = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,/2 \approx 70{,}5288^\circ;$$
$$\angle AMH = \angle BMG = 2\operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 109{,}4712^\circ.$$

Прямая PMR перпендикулярна диагонали AG. При этом углы между этой прямой и другой диагональю BH равны:

$$\angle RMH = \angle BMP = \pi/2 - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,/2 \approx 19{,}4712^\circ;$$
$$\angle RMB = \angle HMP = \pi/2 + 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,/2 \approx 160{,}5288^\circ.$$

3.5.5. Различные ориентации кубической ячейки относительно плоскости магнитной пластины

Будем рассматривать важный для практики случай магнитной пластины, материал которой обладает кубической симметрий. На данном

этапе размагничивающий фактор пластины учитывать не будем (это будет сделано позднее), а пластину будем рассматривать лишь как основу для соответствующей ориентации декартовой системы координат $Oxyz$. То есть плоскость пластины будет соответствовать координатной плоскости Oxy, а нормаль к ней — координатной оси Oz. На рис. 3.7 показаны три основных случая направления осей кубической ячейки [001], [011] и [111] вдоль нормали к плоскости магнитной пластины.

Рис. 3.7. Общая схема основных ориентаций кубической ячейки относительно плоскости магнитной пластины

Из рисунка видно, что ориентации осей (например, для ЖИГ соответствующих осях легкого намагничивания) типа [111] во всех этих случаях различны. Рассмотрим расположение осей типа [111] для этих основных ориентаций более подробно.

Ориентация [001]. На рис. 3.8 показана схема расположения осей типа [111] (вверху) и их проекций на плоскость Oxy (внизу). Оси координат Ox, Oy, Oz совпадают с ребрами кубической ячейки [100], [010], [001].

На нижнем рисунке сплошные утолщенные линии соответствуют расположению половин осей типа [111] выше плоскости Oxy.

Из рисунка видно, что углы между проекциями осей типа [111] на плоскость пластины составляют 90°.

Ориентация [011]. На рис. 3.9 показана схема расположения осей типа [111] (вверху) и их проекций на плоскость Oxy (внизу). Ось координат Oz совпадает с диагональю грани кубической ячейки [011], ось Ox совпадает с ребром кубической ячейки [100], ось Oy совпадает с диагональю грани куба $[01\bar{1}]$.

На нижнем рисунке сплошные утолщенные линии соответствуют расположению половин осей типа [111] выше плоскости Oxy, двойные сплошные линии — расположению осей типа [111] в плоскости Oxy.

Рис. 3.8. Ориентация [001]

Рис. 3.9. Ориентация [011]

Рис. 3.10. Ориентация [111]

Из рисунка видно, что две проекции осей типа [111] на плоскость пластины ориентированы вдоль оси Ox, а две другие составляют углы по $\pm \operatorname{arctg} \sqrt{2}/2$ с осью Oy, что соответствует $\pm 35{,}2644°$.

Ориентация [111]. На рис. 3.10 показана схема расположения осей типа [111] (вверху) и их проекций на плоскость Oxy (внизу). Ось координат Oz совпадает с диагональю грани кубической ячейки [111], ось Ox лежит в плоскости, проходящей через вершины куба элементарной ячейки $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ и перпендикулярна оси [111], ось Oy перпендикулярна осям Ox и Oz, составляя с ними правую тройку. Углы между осями [11$\bar{1}$], [1$\bar{1}$1], [$\bar{1}$11] и плоскостью Oxy равны $(\pi/2 - 2\operatorname{arctg}\sqrt{2}/2) = 19{,}4712°$.

На нижнем рисунке сплошные утолщенные линии соответствуют расположению половин осей типа [111] выше плоскости Oxy, двойные пунктирные линии — расположению половин осей типа [111] ниже плоскости Oxy.

Из рисунка видно, что ближайшие друг к другу проекции осей типа [111] на плоскость пластины составляют между собой углы по 60°, а углы между проекциями тех половин осей типа [111], которые располагаются выше или ниже плоскости Oxy, равны 120°.

3.6. Матрицы преобразования в случае кубической анизотропии

Теперь, после того как основные свойства кубической ячейки установлены, перейдем к рассмотрению матриц преобразования в случае кубической анизотропии. Ограничимся простейшими наиболее важными для практики вариантами поворота кубической ячейки — вокруг осей типа [001], [011] и [111].

3.6.1. Матрица преобразования для оси [001]

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу преобразования от системы координат $Oxyz$, оси которой направлены по ребрам куба, к системе координат $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена по ребру куба типа [001], а оси Ox' и Oy' повернуты вокруг этой оси на произвольный угол.

Общая геометрия задачи. Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 3.11. Здесь пунктиром показана кубическая ячейка, вдоль ребер которой по направлениям [100], [010] и [001] ориентированы оси исходной системы координат $Oxyz$. Ось Oz' повернутой системы координат направлена по ребру куба [001], обозначенному отрезком OM. Прямая AB проходит через точку O и лежит в плоскости Oxy, совпадая с осью Ox. Прямая CE проходит через точку O и лежит в плоскости Oxy, совпадая с осью Oy. Плоскость CME проходит через оси Oz и Oz'. В силу построения плоскость $ACBE$ перпендикулярна осям Oz и Oz'. Таким образом, оси повернутой системы Ox' и Oy' лежат в плоскости $ACBE$. При этом поворот системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' определяется углом ε, задаваемым взаимным расположением

Рис. 3.11. Общая геометрия задачи для ориентации [001]

осей Ox и Ox'. В силу взаимной перпендикулярности осей Ox' и $Oxyz$, а также прямых OA и OC, угол между осями Oy и Oy' также равен ε.

Замечание о направлении отсчета угла поворота. На рис. 3.11 угол ε представлен как угол между прямой OA и осью Ox'. Будем считать положительным направление отсчета угла ε от прямой OA к оси Ox', то есть от положительной части оси Ox к положительной части оси Oy, как это показано стрелкой на оси Ox'. Таким образом, угол ε отсчитывается от прямой OA, совпадающей с положительной частью оси Ox. Такой выбор направления отсчета удобен, если мы поворачиваем систему координат $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'. В то же время, если рассматривать систему $Ox'y'z'$ как неподвижную и относительно нее поворачивать кубическую ячейку вместе со связанной с ней системой $Oxyz$, то при том же направлении отсчета угла ε поворот ячейки будет происходить в противоположном направлении, как показано стрелкой на оси Oz вблизи точки M.

Таким образом, если мы смотрим со стороны положительного направления оси Oz, то угол ε отсчитывается против часовой стрелки, а ячейка поворачивается по часовой стрелке. Если мы смотрим со стороны отрицательного направления оси Oz, то угол ε отсчитывается по часовой стрелке, а ячейка поворачивается против часовой стрелки.

Принятое здесь направление отсчета угла ε соответствует классическому принятому в математике выбору направления поворота системы координат [292, 293]. То есть ячейка остается неподвижной, а система координат поворачивается. Однако в эксперименте часто наблюдается противоположная ситуация: лабораторная система координат остается неподвижной, а исследуемый образец (то есть ячейка) поворачивается. В этом случае, для корректного сравнения с экспериментом, во всех получаемых далее выражениях надо изменить знак угла ε на обратный.

Общая структура матрицы прямого перехода. Преобразование компонент вектора из одной системы в другую осуществляется с помощью матрицы перехода по формуле:

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}', \tag{3.166}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор в исходной системе координат, $\mathbf{a}'$ — тот же вектор в повернутой системе координат, $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от повернутой системы к исходной.

Компоненты матрицы $\overleftrightarrow{A}$ являются направляющими косинусами единичных векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ осей системы координат $Ox'y'z'$, относительно системы $Oxyz$, то есть первой задачей является нахождение этих единичных векторов.

Получение единичных векторов осей повернутой системы координат. Компоненты единичных векторов осей повернутой системы координат $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ определяются по правилам аналитической геометрии [292, 293].

Очевидно, единичный вектор оси Oz' совпадает с единичным вектором оси Oz. Получение единичных векторов $\mathbf{l}_{x'}$ и $\mathbf{l}_{y'}$ поясняется рис. 3.12, где показан вид на плоскость Oxy со стороны положительного направления оси Oz при повороте системы координат $Ox'y'$ относительно Oxy.

Рис. 3.12. Поворот системы координат $Ox'y'$ относительно Oxy

Из рисунка можно видеть, что

$$\mathbf{l}_{x'} = \mathbf{i}(\cos\varepsilon) + \mathbf{j}(\sin\varepsilon); \qquad (3.167)$$

$$\mathbf{l}_{y'} = \mathbf{i}(-\sin\varepsilon) + \mathbf{j}(\cos\varepsilon), \qquad (3.168)$$

причем:

$$\mathbf{l}_{z'} = \mathbf{k}1, \qquad (3.169)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы осей координат системы $Oxyz$.

Итак, в соответствии с (3.167), (3.168), (3.169) набор единичных векторов системы $Ox'y'z'$, выраженных в системе $Oxyz$, имеет вид:

$$\mathbf{l}_{x'} = \{\cos\varepsilon,\ \sin\varepsilon,\ 0\}; \qquad (3.170)$$

$$\mathbf{l}_{y'} = \{-\sin\varepsilon,\ \cos\varepsilon,\ 0\}; \qquad (3.171)$$

$$\mathbf{l}_{z'} = \{0;\ 0;\ 1\}. \qquad (3.172)$$

Явный вид матрицы прямого перехода. Сведем компоненты векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ в единую таблицу:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} & x' & y' & z' \\ \hline x & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ y & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array}. \qquad (3.173)$$

При этом матрица перехода принимает вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{001}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.174)$$

Частные случаи углов поворота. Приведем вид матрицы перехода в некоторых полезных для практики частных случаях.

При $\varepsilon = 0°$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{001}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.175)$$

При $\varepsilon = 45^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{001}(45^\circ) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{3.176}$$

При $\varepsilon = 90^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{001}(90^\circ) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{3.177}$$

Обратный переход от системы исходной к системе повернутой. Обратный переход от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$ осуществляется с помощью матрицы $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ по формуле

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{a}. \tag{3.178}$$

Компоненты матрицы $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ можно найти, учитывая, что

$$\mathbf{l}_x = \mathbf{i}'(\cos\varepsilon) + \mathbf{j}'(-\sin\varepsilon); \tag{3.179}$$

$$\mathbf{l}_{y'} = \mathbf{i}'(\sin\varepsilon) + \mathbf{j}'(\cos\varepsilon). \tag{3.180}$$

$$\mathbf{l}_z = \mathbf{k}'1, \tag{3.181}$$

где $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ — единичные векторы осей координат системы $Ox'y'z'$.

Таким образом, матрица обратного перехода равна

$$\overleftrightarrow{A}^{-1}_{001}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon & 0 \\ \hline -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{3.182}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что произведение матриц прямого и обратного перехода (3.174) и (3.182) равно единичной матрице.

3.6.2. Матрица преобразования для оси [011]

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу преобразования от системы координат $Oxyz$, оси которой направлены по ребрам куба, к системе координат $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена по диагонали грани куба типа [011], а оси Ox' и Oy' повернуты вокруг этой оси на произвольный угол.

Общая геометрия задачи. Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 3.13. Здесь пунктиром показана кубическая ячейка, длина ребер которой полагается равной единице. Вдоль ребер ячейки по направлениям [100], [010] и [001] ориентированы оси исходной системы

координат $Oxyz$. Ось Oz' повернутой системы координат направлена по диагонали грани куба [011], обозначенной отрезком OM. Прямая AB проходит через точку O и лежит в плоскости Oxy, совпадая с осью Ox. Точки R и P лежат на этой прямой по обе стороны от точки O на единице расстояния от нее. Плоскость $OCME$ проходит через оси Oz и Oz', совпадая с плоскостью Oyz. Прямая CE, проходя через точку O, лежит в плоскости $OCME$ и составляет с осью Oz' углы $\angle MOC = \angle MOE = 90°$. Точка D на прямой OC соответствует пересечению этой прямой с продолжением ребра куба MN. В силу построения плоскость $ACBEO$ перпендикулярна оси Oz'. При этом оси повернутой системы Ox' и Oy' лежат в плоскости $ACBEO$. Поворот системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' определяется углом ε. Этот угол задается взаимным расположением оси Ox' и прямой OA и отсчитывается от прямой OA в сторону прямой OE. В силу взаимной перпендикулярности осей Ox' и Oy', а также прямых OA и OE, угол между прямой OE и осью Oy' также равен ε.

Замечание о направлении отсчета угла поворота. На рис. 3.13 угол ε представлен как угол между осью Ox' и прямой OA. Будем считать положительным направление отсчета угла ε от прямой OA к прямой OE, как это показано стрелкой на оси Ox'. Такой выбор направления отсчета удобен, если мы поворачиваем систему координат $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'. В то же время, если рассматривать систему $Ox'y'z'$ как неподвижную и относительно нее поворачивать

Рис. 3.13. Общая геометрия задачи для ориентации [011]

кубическую ячейку вместе со связанной с ней системой $Oxyz$, то при том же направлении отсчета угла ε поворот ячейки будет происходить в противоположном направлении, как показано стрелкой на оси Oz'. Таким образом, если мы смотрим со стороны положительного направления оси Oz', то угол ε отсчитывается против часовой стрелки, а ячейка поворачивается по часовой стрелке. Если мы смотрим со стороны отрицательного направления оси Oz', то угол ε отсчитывается по часовой стрелке, а ячейка поворачивается против часовой стрелки.

Общая структура матрицы прямого перехода. Преобразование компонент вектора из одной системы в другую осуществляется с помощью матрицы перехода по формуле:

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}', \tag{3.183}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор в исходной системе координат, $\mathbf{a}'$ — тот же вектор в повернутой системе координат, $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от повернутой системы к исходной.

Компоненты матрицы $\overleftrightarrow{A}$ являются направляющими косинусами единичных векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ осей системы координат $Ox'y'z'$, относительно системы $Oxyz$, то есть первой задачей является нахождение этих единичных векторов.

Получение единичных векторов осей повернутой системы координат. Компоненты единичных векторов осей повернутой системы координат $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ определяются по правилам аналитической геометрии, с помощью вспомогательных задач №№ 1–9 (раздел 3.3.1).

Вектор $\mathbf{l}_{z'}$. Найдем сначала единичный вектор оси Oz', то есть вектор $\mathbf{l}_{z'}$. По направлению этот вектор совпадает с отрезком OM, компоненты которого равны:

$$(OM)_x = 0. \tag{3.184}$$

$$(OM)_y = (OM)_z = 1. \tag{3.185}$$

Его длина равна:

$$OM = \sqrt{(OM)_x + (OM)_y + (OM)_z} = \sqrt{2}\,. \tag{3.186}$$

Нормируя в соответствии с задачей № 1, получаем:

$$\mathbf{l}_{z'} = \left\{0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{3.187}$$

Независимость этого вектора от угла поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' согласуется с общей постановкой задачи.

Вектор $\mathbf{l}_{y'}$. Найдем теперь вектор $\mathbf{l}_{y'}$, который зависит от угла ε поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'. Определим этот угол, как

соответствующий линии пересечения плоскости MOx', проходящей через оси Oz' и Ox', с плоскостью $AOBM$, проходящей через ось Ox и линию OM. Такое определение следует из перпендикулярности обеих этих плоскостей к плоскости $ACBEO$, что в свою очередь следует из прохождения обеих этих плоскостей через линию OM, то есть ось Oz'. При этом ε отсчитывается в плоскости $ACBEO$ от оси Ox в сторону линии OE. Задача построения вектора $\mathbf{l}_{y'}$ состоит в том, чтобы выразить компоненты этого вектора через угол ε. Далее вектор $\mathbf{l}_{y'}$ будет определен через вектор нормали к плоскости MOx', поэтому в качестве первого шага свяжем уравнение этой плоскости с углом ε.

Для такой связи воспользуемся задачей № 8, в соответствии с которой косинус угла между плоскостями определяется через векторы нормалей к этим плоскостям. Угол ε составляют между собой две плоскости: $AOBM$ и MOx'.

Уравнение плоскости $AOBM$ найдем с помощью задачи № 6 из условия прохождения плоскости через три точки: $R(1,0,0)$, $M(0,1,1)$ и $P(-1,0,0)$. Таким образом, получаем

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.188}$$

откуда получаем уравнение плоскости $AOBM$ в виде

$$y - z = 0. \tag{3.189}$$

Для нахождения уравнения плоскости MOx' построим пучок плоскостей, проходящих через ось Oz', то есть линию OM, после чего выберем нужную плоскость из этого пучка.

В качестве опорных плоскостей пучка выберем плоскости $AOBM$ и $MODN$, пересекающиеся по линии OM.

Уравнение плоскости $AOBM$ имеет вид (3.189).

Уравнение плоскости $MODN$, найдем с помощью задачи № 6, учитывая, что эта плоскость проходит через три точки $O(0,0,0)$, $M(0,1,1)$ и $N(0,0,1)$, то есть из соотношения

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.190}$$

откуда получаем уравнение плоскости $MODN$ в виде

$$x = 0. \tag{3.191}$$

Таким образом, для построения пучка плоскостей, проходящих через ось Oz', получаем два уравнения плоскостей $AOBM$ и $MODN$:

$$y - z = 0; \tag{3.192}$$

$$x = 0. \tag{3.193}$$

С помощью задачи № 9 получаем уравнение пучка в виде

$$(y - z) + \lambda(x) = 0, \tag{3.194}$$

где λ — параметр, который должен быть определен из условия равенства величине ε угла между плоскостью $AOBM$ и другой, пока не известной плоскостью MOx', выбранной из пучка.

С помощью задачи № 8, исходя из (3.189) и (3.194), находим косинус угла между плоскостями $AOBM$ и MOx':

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}. \tag{3.195}$$

Из этого получаем

$$\sin\varepsilon = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}. \tag{3.196}$$

С помощью задачи № 7 найдем вектор $\mathbf{l}_{y'}$ как вектор нормали к плоскости MOx', уравнение которой имеет вид (3.194). Нормирующий множитель равен

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}. \tag{3.197}$$

При этом получаем две возможных нормали:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+)} = \left\{-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}\right\}; \tag{3.198}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-)} = \left\{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}, -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + 2}}\right\}. \tag{3.199}$$

Заменяя λ через синус и косинус угла ε, а также учитывая два знака синуса (3.196), для вектора $\mathbf{l}_{y'}$ получаем четыре возможных выражения:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+-)} = \left\{-\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon\right\}; \tag{3.200}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(++)} = \left\{\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon\right\}; \tag{3.201}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-+)} = \left\{\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon\right\}; \tag{3.202}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(--)} = \left\{-\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon\right\}; \tag{3.203}$$

Эти четыре выражения соответствуют двум возможным направлениям нормали к плоскости MOx' и двум возможным конфигурациям декартовой системы координат — правой и левой. Для однозначного выбора правой системы координат, совпадающей при $\varepsilon = 0^\circ$ с исходной, рассмотрим два характерных значения угла ε: нуль и 90°.

При $\varepsilon = 0^\circ$ из (3.200)–(3.203) получаем:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+-)} = \left\{0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}; \tag{3.204}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(++)} = \left\{0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}; \tag{3.205}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-+)} = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}; \tag{3.206}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(--)} = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{3.207}$$

При $\varepsilon = 90^\circ$ из (3.200)–(3.203) получаем:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+-)} = \{-1, 0, 0\}; \tag{3.208}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(++)} = \{1, 0, 0\}; \tag{3.209}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-+)} = \{1, 0, 0\}; \tag{3.210}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(--)} = \{-1, 0, 0\}. \tag{3.211}$$

Из рис. 3.13 можно видеть, что:

$$\mathbf{l}_{y'}(\varepsilon = 0) = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}; \tag{3.212}$$

$$\mathbf{l}_{y'}(\varepsilon = 90^\circ) = \{-1, 0, 0\}. \tag{3.213}$$

Из сопоставления этих выражений с (3.204)–(3.211) видно, что требуемым условиям удовлетворяют только (3.207) и (3.211), что соответствует $\mathbf{l}_{y'}^{(--)}$, то есть вектор $\mathbf{l}_{y'}$ имеет вид:

$$\mathbf{l}_{y'} = \left\{-\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon\right\}. \tag{3.214}$$

Вектор $\mathbf{l}_{x'}$. Теперь, поскольку векторы $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$ получены, остается найти направляющий вектор $\mathbf{l}_{x'}$ оси Ox'. Определим этот вектор как перпендикулярный векторам $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$, с помощью задачи № 3.

Векторное произведение векторов $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$ с учетом (3.214) и (3.187) имеет вид

$$[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}] = \mathbf{i}(\cos\varepsilon) + \mathbf{j}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon\right) + \mathbf{k}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon\right). \tag{3.215}$$

Модуль векторного произведения равен

$$\left|[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}]\right| = 1. \tag{3.216}$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{l}_{x'} = \left\{\cos\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon\right\}. \tag{3.217}$$

Набор единичных векторов повернутой системы координат. Итак, в соответствии с (3.217), (3.214), (3.187) получаем набор единичных векторов системы $Ox'y'z'$, компоненты которых выражены в системе $Oxyz$, в виде:

$$\mathbf{l}_{x'} = \left\{\cos\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon\right\}. \tag{3.218}$$

$$\mathbf{l}_{y'} = \left\{-\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon\right\}. \tag{3.219}$$

$$\mathbf{l}_{z'} = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{3.220}$$

Явный вид матрицы прямого перехода. Сведем компоненты векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ в единую таблицу:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|}
 & x' & y' & z' \\ \hline
x & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \hline
y & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline
z & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline
\end{array}\right|. \tag{3.221}$$

При этом матрица перехода принимает вид

$$\overleftrightarrow{A}_{011}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c}
\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \hline
\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline
-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{array}\right). \tag{3.222}$$

Частные случаи углов поворота. Приведем вид матрицы перехода в некоторых полезных для практики частных случаях.

При $\varepsilon = 0^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{011}(0) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{3.223}$$

При $\varepsilon = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{011}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{\sqrt{6}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline \dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{3.224}$$

При $\varepsilon = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{011}(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,) = \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \hline \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{6}}{6} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{3.225}$$

При $\varepsilon = 90^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(90^\circ) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{3.226}$$

Матрица обратного перехода. Обратный переход от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$ осуществляется с помощью матрицы обратного перехода $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ по формуле:

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{a}, \tag{3.227}$$

где матрица $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ получается из матрицы прямого перехода (3.222) путем замены строк столбцами:

$$\overleftrightarrow{A}^{-1}_{011}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varepsilon & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon \\ \hline -\sin\varepsilon & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon \\ \hline 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{3.228}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что произведение матриц прямого и обратного перехода (3.222) и (3.228) равно единичной матрице.

3.6.3. Матрица преобразования для оси [111]

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу преобразования от системы координат $Oxyz$, оси которой направлены по ребрам куба, к системе координат $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена по пространственной диагонали куба типа [111], а оси Ox' и Oy' повернуты вокруг этой оси на произвольный угол.

Общая геометрия задачи. Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 3.14. Здесь пунктиром показана кубическая ячейка, вдоль

Рис. 3.14. Общая геометрия задачи для ориентации [111]

ребер которой по направлениям [100], [010] и [001] ориентированы оси исходной системы координат $Oxyz$. Ось Oz' повернутой системы координат направлена по пространственной диагонали куба [111], обозначенной отрезком OM. Прямая AB проходит через точку O и лежит в плоскости Oxy, составляя с осями Ox и Oy углы по 45°. В силу симметрии кубической ячейки $\angle MOA = \angle MOB = 90°$. Плоскость MOC проходит через оси Oz и Oz'. Прямая COE лежит в плоскости MOC и составляет с осью Oz' углы $\angle MOC = \angle MOE = 90°$. Точка D на прямой OC соответствует пересечению этой прямой с продолжением диагонали грани куба MN. В силу перпендикулярности прямых AB и CE к оси Oz', плоскость $ACBEO$ перпендикулярна оси Oz'. Таким образом, оси повернутой системы Ox' и Oy' лежат в плоскости $ACBEO$. При этом поворот системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' определяется углом ε. Этот угол задается взаимным расположением оси Ox' и прямой OA и отсчитывается от прямой OA в сторону прямой OE. В силу взаимной перпендикулярности осей Ox' и Oy', а также прямых OA и OE, угол между прямой OE и осью Oy' также равен ε.

Замечание о направлении отсчета угла поворота. На рис. 3.14 угол ε представлен как угол между осью Ox' и прямой OA. Будем считать положительным направление отсчета угла ε от прямой OA к прямой OE, как это показано стрелкой на оси Ox'. Такой выбор направления отсчета удобен, если мы поворачиваем систему координат $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'. В то же время, если рассматривать систему $Ox'y'z'$ как неподвижную и относительно нее поворачивать кубическую ячейку вместе со связанной с ней системой $Oxyz$, то при том же направлении отсчета угла ε поворот ячейки будет происходить в противоположном направлении, как показано стрелкой на оси Oz'. Таким образом, если мы смотрим со стороны положительного направления оси Oz', то угол ε отсчитывается против часовой стрелки, а ячейка поворачивается по часовой стрелке. Если мы смотрим со стороны отрицательного направления оси Oz, то угол ε отсчитывается по часовой стрелке, а ячейка поворачивается против часовой стрелки.

Общая структура матрицы прямого перехода. Преобразование компонент вектора из одной системы в другую осуществляется с помощью матрицы перехода по формуле (3.10):

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}', \tag{3.229}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор в исходной системе координат, $\mathbf{a}'$ — тот же вектор в повернутой системе координат, $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от повернутой системы к исходной.

Компоненты матрицы $\overleftrightarrow{A}$ являются направляющими косинусами единичных векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ осей системы координат $Ox'y'z'$, относительно системы $Oxyz$, то есть первой задачей является нахождение этих единичных векторов.

Получение единичных векторов осей повернутой системы координат. Компоненты единичных векторов осей повернутой системы координат $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ определяются по правилам аналитической геометрии, с помощью вспомогательных задач №№ 1–9.

Вектор $\mathbf{l}_{z'}$. Найдем сначала единичный вектор оси Oz', то есть вектор $\mathbf{l}_{z'}$. По направлению этот вектор совпадает с отрезком OM, компоненты которого равны

$$(OM)_x = (OM)_y = (OM)_z = 1. \tag{3.230}$$

Его длина равна

$$OM = \sqrt{(OM)_x + (OM)_y + (OM)_z} = \sqrt{3}\,. \tag{3.231}$$

Нормируя в соответствии с задачей № 1, получаем

$$\mathbf{l}_{z'} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}. \tag{3.232}$$

Независимость этого вектора от угла поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' согласуется с общей постановкой задачи.

Вектор $\mathbf{l}_{y'}$. Найдем теперь вектор $\mathbf{l}_{y'}$, который зависит от угла ε поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz'. Определим этот угол, как соответствующий линии пересечения плоскости MOx', проходящей через оси Oz' и Ox', с плоскостью $AOBM$, проходящей через прямую AB и линию OM. Такое определение следует из перпендикулярности обеих этих плоскостей к плоскости $ACBEO$, что в свою очередь следует из прохождения обеих этих плоскостей через линию OM, то есть ось Oz'. При этом ε отсчитывается в плоскости $ACBEO$ от оси Ox в сторону линии OE. Задача построения вектора $\mathbf{l}_{y'}$ состоит в том, чтобы выразить компоненты этого вектора через угол ε. Далее вектор $\mathbf{l}_{y'}$ будет определен через вектор нормали к плоскости MOx', поэтому в качестве первого шага свяжем уравнение этой плоскости с углом ε.

Для такой связи воспользуемся задачей № 8, в соответствии с которой косинус угла между плоскостями определяется через векторы нормалей к этим плоскостям. Угол ε составляют между собой две плоскости: $AOBM$ и MOx'.

Уравнение плоскости $AOBM$ найдем с помощью задачи № 6 из условия прохождения плоскости через три точки: $O(0,0,0)$, $M(1,1,1)$ и $R(1,-1,0)$. Таким образом, получаем

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.233}$$

откуда получаем уравнение плоскости $AOBM$ в виде

$$x + y - 2z = 0. \tag{3.234}$$

Для нахождения уравнения плоскости MOx' построим пучок плоскостей, проходящих через ось Oz', то есть линию OM, после чего выберем нужную плоскость из этого пучка.

В качестве опорных плоскостей пучка выберем плоскости $AOBM$ и $MODN$, пересекающиеся по линии OM.

Уравнение плоскости $AOBM$ имеет вид (3.234).

Уравнение плоскости $MODN$, найдем с помощью задачи № 6, учитывая, что эта плоскость проходит через три точки $O(0,0,0)$, $M(1,1,1)$ и $N(0,0,1)$, то есть из соотношения

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.235}$$

откуда получаем уравнение плоскости $MODN$ в виде

$$x - y = 0. \tag{3.236}$$

Таким образом, для построения пучка плоскостей, проходящих через ось Oz', получаем два уравнения плоскостей $AOBM$ и $MODN$:

$$x + y - 2z = 0, \tag{3.237}$$

$$x - y = 0. \tag{3.238}$$

С помощью задачи № 9 получаем уравнение пучка в виде:

$$(x + y - 2z) + \lambda(x - y) = 0, \tag{3.239}$$

или

$$(1 + \lambda)x + (1 - \lambda)y - 2z = 0, \tag{3.240}$$

где λ — параметр, который должен быть определен из условия равенства величине ε угла между плоскостью $AOBM$ и другой, пока не известной плоскостью MOx', выбранной из пучка.

С помощью задачи № 8, исходя из (3.234) и (3.240), находим косинус угла между плоскостями $AOBM$ и MOx':

$$\cos\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda^2 + 3}}. \tag{3.241}$$

Из этого получаем

$$\sin\varepsilon = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 3}}. \tag{3.242}$$

С помощью задачи № 7 найдем вектор $\mathbf{l}_{y'}$ как вектор нормали к плоскости MOx', уравнение которой имеет вид (3.240). Нормирующий множитель равен

$$\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda^2 + 3}}. \tag{3.243}$$

При этом получаем две возможных нормали:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+)} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}\,(1+\lambda)}{2\sqrt{\lambda^2+3}}, -\frac{\sqrt{2}\,(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda^2+3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda^2+3}} \right\}; \tag{3.244}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-)} = \left\{ \frac{\sqrt{2}\,(1+\lambda)}{2\sqrt{\lambda^2+3}}, \frac{\sqrt{2}\,(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda^2+3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\lambda^2+3}} \right\}. \tag{3.245}$$

Заменяя λ через синус и косинус угла ε по (3.241) и (3.242), а также учитывая два знака синуса в (3.242), для вектора $\mathbf{l}_{y'}$ получаем четыре возможных выражения:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(++)} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \right\}; \tag{3.246}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+-)} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \right\}; \tag{3.247}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-+)} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \right\}; \tag{3.248}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(--)} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \right\}. \tag{3.249}$$

Эти четыре выражения соответствуют двум возможным направлениям нормали к плоскости MOx' и двум возможным конфигурациям декартовой системы координат — правой и левой. Для однозначного выбора правой системы координат, ось Ox' которой при $\varepsilon = 0°$ совпадает с прямой OA, а ось Oy' — с прямой OE, рассмотрим два характерных значения угла ε: нуль и 90°.

При $\varepsilon = 0°$ из (3.246)–(3.249) получаем:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(++)} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \tag{3.250}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+-)} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \tag{3.251}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-+)} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \tag{3.252}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(--)} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}. \tag{3.253}$$

При $\varepsilon = 90°$ из (3.246)–(3.249) получаем:

$$\mathbf{l}_{y'}^{(++)} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, 0 \right\}; \tag{3.254}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(+-)} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, 0 \right\}; \tag{3.255}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(-+)} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, 0 \right\}; \tag{3.256}$$

$$\mathbf{l}_{y'}^{(--)} = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, 0 \right\}. \tag{3.257}$$

Из рис. 3.14 можно видеть, что:

$$\mathbf{l}_{y'}(\varepsilon = 0^\circ) = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right\}; \tag{3.258}$$

$$\mathbf{l}_{y'}(\varepsilon = 90^\circ) = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\}. \tag{3.259}$$

Из сопоставления этих выражений с (3.250)–(3.257) видно, что требуемым условиям удовлетворяют только (3.253) и (3.257), что соответствует $\mathbf{l}_{y'}^{(--)}$, то есть вектор $\mathbf{l}_{y'}$ имеет вид

$$\mathbf{l}_{y'} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, \frac{\sqrt{6}}{6}\cos\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon, -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \right\}, \tag{3.260}$$

или

$$\mathbf{l}_{y'} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \sqrt{3}\sin\varepsilon), \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \sqrt{3}\sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \right\}. \tag{3.261}$$

Вектор $\mathbf{l}_{x'}$. Определим теперь вектор $\mathbf{l}_{x'}$ как вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$, с помощью задачи № 3.

Векторное произведение векторов $\mathbf{l}_{y'}$ и $\mathbf{l}_{z'}$ с учетом (3.261) и (3.232) имеет вид

$$[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}] = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\cos\varepsilon + \sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\cos\varepsilon - \sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon \right\}. \tag{3.262}$$

Модуль векторного произведения равен

$$\left|[\mathbf{l}_{y'} \times \mathbf{l}_{z'}]\right| = 1. \tag{3.263}$$

Таким образом, получаем

$$\mathbf{l}_{x'} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\cos\varepsilon + \sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\cos\varepsilon - \sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon \right\}. \tag{3.264}$$

Набор единичных векторов повернутой системы координат. Итак, в соответствии с (3.264), (3.261), (3.232) получаем набор единичных

векторов системы $Ox'y'z'$, компоненты которых выражены в системе $Oxyz$, в виде:

$$\mathbf{l}_{x'} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon + \sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon - \sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon \right\}; \tag{3.265}$$

$$\mathbf{l}_{y'} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \sqrt{3}\,\sin\varepsilon), \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \sqrt{3}\,\sin\varepsilon), -\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\cos\varepsilon \right\}; \tag{3.266}$$

$$\mathbf{l}_{z'} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}. \tag{3.267}$$

Явный вид матрицы прямого перехода. Сведем компоненты векторов $\mathbf{l}_{x'}$, $\mathbf{l}_{y'}$, $\mathbf{l}_{z'}$ в единую таблицу:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|}
 & x' & y' & z' \\ \hline
x & \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon + \sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \sqrt{3}\,\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline
y & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon - \sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \sqrt{3}\,\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline
z & -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon & -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{array}\right|. \tag{3.268}$$

При этом матрица перехода принимает вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c}
\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon + \sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \sqrt{3}\,\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline
-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon - \sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \sqrt{3}\,\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline
-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon & -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{array}\right). \tag{3.269}$$

Частные случаи углов поворота. Приведем вид матрицы перехода в некоторых полезных для практики частных случаях.

При $\varepsilon = 0^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(0) = \left(\begin{array}{c|c|c}
\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline
-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline
0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{array}\right). \tag{3.270}$$

При $\varepsilon = 30^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(30^\circ) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right). \tag{3.271}$$

При $\varepsilon = 60^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(60^\circ) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right). \tag{3.272}$$

При $\varepsilon = 90^\circ$ матрица перехода имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(90^\circ) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right). \tag{3.273}$$

Матрица обратного перехода. Обратный переход от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$ осуществляется с помощью матрицы обратного перехода $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ по формуле:

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{a}, \tag{3.274}$$

где матрица $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ получается из матрицы прямого перехода (3.269) путем замены строк столбцами:

$$\overleftrightarrow{A}^{-1}_{111}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\cos\varepsilon + \\ + \sin\varepsilon) & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\cos\varepsilon - \\ - \sin\varepsilon) & -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon \\ \hline \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \\ - \sqrt{3}\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \\ + \sqrt{3}\sin\varepsilon) & -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right). \tag{3.275}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что произведение матриц прямого и обратного перехода (3.269) и (3.275) равно единичной матрице.

3.6.4. Многообразие вариантов получения матриц преобразования

В предыдущих разделах приведены варианты получения матриц преобразования при различных ориентациях систем координат. Следует отметить, что полученные здесь матрицы являются далеко не единственными. Конкретный характер матриц связан как с ориентацией исходной системы координат, так и осей, вокруг которых осуществляется поворот кубической ячейки. Так например, если обратиться к повороту вокруг оси [111], показанному на рис. 3.14, то можно видеть, что эквивалентный поворот можно осуществить вокруг любой другой пространственной диагонали куба с тем же результатом изменения симметрии, однако матрицы поворота при этом будут несколько другими. Множественность вида матриц поворота здесь сходна с множественностью выбора углов Эйлера, основных вариантов которых может быть 12, а с учетом знака и левого характера систем координат — еще значительно больше [261, сноска на стр. 451].

Таким образом, приведенные здесь матрицы не следует рассматривать как нечто универсальное, пригодное для всех случаев жизни. Это не более чем пример, соответствующий конкретно выбранной геометрии задачи.

Тем не менее, поскольку при различных видах матриц поворота преобразование в любом случае будет опираться на симметрию кубической ячейки, непосредственные элементы матриц будут друг на друга в какой-то степени похожи. То есть достаточно часто будут встречаться числовые коэффициенты типа $\sqrt{3}/3$, $\sqrt{6}/6$ или им подобные, а также умноженные на эти коэффициенты косинусы и синусы углов поворота в различных сочетаниях с различными знаками. При этом каждая конкретная задача будет требовать собственного рассмотрения, применительно к заданным условиям, а приведенные здесь математические приемы следует считать не более чем удобным рабочим инструментом для получения необходимых матриц.

Выводы по главе 3

В настоящей главе выполнен краткий обзор основного математического аппарата, используемого при решении задач, касающихся работы с анизотропными кристаллами.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Приведены основные типы симметрии кристаллической решетки. Рассмотрена геометрия ячеек, соответствующих триклинной, моноклинной, ромбической (орторомбической), тетрагональной (квадратной),

тригональной, гексагональной и кубической структурам. Приведены особенности магнитной симметрии. Отмечены основные виды магнитной анизотропии, такие как одноосная и кубическая. Кратко упомянуты другие виды магнитной анизотропии, такие как одноосная высоких порядков, смешанная одноосно-кубическая, винтовая (спиральная). Рассмотрены особенности структуры некоторых реальных материалов: железа, гематита, ортоферритов, ферритов-шпинелей, ферритов-гранатов, железоиттриевого граната и гексаферрита бария.

2. В качестве основного математического приема работы с анизотропными кристаллами рассмотрен аппарат матриц перехода между системами координат различной пространственной ориентации. Даны определения матриц прямого и обратного преобразований, отмечена их взаимная связь и возможность превращения друг в друга. Качественно обсуждены примеры прямого и обратного преобразований, касающиеся рассмотрения ферромагнитного резонанса в случаях одноосной и кубической анизотропии. Приведена матрица перехода в общем виде. Отмечено, что в случае перехода от одной декартовой системы координат к другой элементы матриц перехода представляют собой косинусы углов между осями той и другой систем координат. Отмечено, что при решении конкретных задач удобно сначала записать плотность энергии анизотропии в той системе, где ее вид является наиболее простым, после чего осуществить переход к системе, непосредственно требуемой условиями задачи. Приведены вспомогательные геометрические задачи, используемые для получения компонент матриц преобразования координат. Получены матрицы прямого и обратного преобразований для случая произвольной ориентации одной декартовой системы координат относительно другой. Приведены те же матрицы перехода в сферической системе координат.

3. Рассмотрены основные особенности кубической анизотропии. Приведены основные практически используемые варианты обозначения осей, кристаллографических направлений и плоскостей кубической симметрии. Приведена схема элементарной кубической ячейки и отмечены ее основные геометрические параметры. Рассмотрены различные виды ориентации кубической ячейки относительно декартовой системы координат. Выделены ориентации кристаллографических осей типа [001], [011] и [111], для которых показано конкретное их расположение относительно осей декартовой системы. Получены матрицы преобразования, соответствующие повороту ячейки относительно осей типа [001], [011] и [111] на произвольный угол. Приведены примеры матриц преобразования для рада важных для практики характерных углов поворота. Отмечена множественность возможных вариантов формы матриц преобразования, связанная с множественностью выбора вариантов углов Эйлера, задающих поворот двух декартовых систем относительно друг друга.

Глава 4

ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Настоящая глава посвящена применению описанного в предыдущей главе математического аппарата матриц перехода для вычисления плотности энергии магнитной анизотропии в разнообразных случаях. Основное внимание уделено одноосной и кубической анизотропии для ряда наиболее характерных ориентаций. Материал главы не столько представляет существенную новизну, сколько предназначен для возможно полного обобщения более или менее известных результатов, рассеянных во множестве статей, выполненных различными способами с различными обозначениями и вспомогательными функциями. Рассмотрение начинается с описания различных операций симметрии, с помощью которых далее осуществляется вычисление плотности энергии сначала одноосной, а затем и кубической анизотропии при различных ориентациях кубической ячейки. Изложенные здесь результаты по большей части опираются на те же литературные источники, что приведены в предыдущей главе. На новые же, не отмеченные там источники, соответствующие ссылки приводятся в тексте.

4.1. Операции симметрии

Любое твердое тело представляет собой совокупность атомов, связанных воедино определенными межатомными взаимодействиями. Периодическая структура кристалла, проявляющаяся в его симметрии, накладывает определенные ограничения на плотность энергии таких взаимодействий. В рамках настоящей монографии нас будут интересовать взаимодействия только магнитные. Другие виды взаимодействий, в том числе упругие и магнитоупругие предполагается рассмотреть в других монографиях настоящей серии. Покажем, как следует применять операции симметрии для получения матриц преобразования для таких взаимодействий.

4.1.1. Отражение в координатных плоскостях

В предыдущих разделах отмечено, что операции как кристаллографической, так и магнитной симметрии, представляют собой отражение в определенных плоскостях и поворот на заданный угол вокруг определенных осей. Математическое описание таких преобразований удобно

выполняется в матричном виде, то есть когда операция симметрии задается с помощью определенной матрицы. Покажем формирование такой матрицы на примере отражения вектора намагниченности $\mathbf{m}$ в плоскости Oxz, для чего обратимся к рис. 4.1.

Рис. 4.1. Схема отражения вектора $\mathbf{m}$ в плоскости Oxz

Из рисунка можно видеть, что вектор $\mathbf{m}$, заданный в правом квадранте системы $Oxyz$, в результате отражения в плоскости Oxz преобразуется в вектор $\mathbf{m}'$, расположенный в левом квадранте той же системы. При этом компоненты вектора $\mathbf{m}$, такие как m_x и m_z остаются прежними, а компонента m_y заменяется на равную ей по величине, но противоположную по знаку компоненту $-m_y$. Такое преобразование можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{m}, \tag{4.1}$$

где $\overleftrightarrow{A}$ — матрица, описывающая отражение вектора $\mathbf{m}$ в плоскости Oxz, то есть осуществляющая преобразование вектора $\mathbf{m}$ в вектор $\mathbf{m}'$. Записывая это соотношение в матричном виде, получаем:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ -m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}m_x + A_{12}m_y + A_{13}m_z \\ A_{21}m_x + A_{22}m_y + A_{23}m_z \\ A_{31}m_x + A_{32}m_y + A_{33}m_z \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

откуда, приравнивая первое и последнее из этой цепочки равенств, получаем матрицу $\overleftrightarrow{A}$ в виде

$$\overleftrightarrow{A}_{xz} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{4.3}$$

где нижний индекс «xz» означает принадлежность матрицы к отражению в плоскости Oxz.

Аналогичным образом получаем матрицы отражения в плоскостях Oyz и Oxy:

$$\overleftrightarrow{A}_{yz} = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \tag{4.4}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{xy} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right). \tag{4.5}$$

Определенный интерес могут представлять матрицы, описывающие отражение в двух плоскостях, проходящих через ось Oz посередине (под углом в 45°) к плоскостям Oxz и Oyz.

Первая из этих плоскостей пересекает плоскость Oxy между положительными направлениями осей Ox и Oy, так что при отражении в ней компоненты m_x и m_y меняются длинами, сохраняя каждая свой знак.

Вторая из этих плоскостей пересекает плоскость Oxy между положительным и отрицательным направлениями каждой из осей Ox и Oy, так что при отражении в ней компоненты m_x и m_y меняются длинами, но и знаки обеих из них при этом меняются на противоположные. Соответствующие матрицы имеют вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{+45} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \tag{4.6}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{-45} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{4.7}$$

где индексы «±45» означают угол, который составляют эти плоскости с положительным направлением оси Ox.

4.1.2. Поворот на некоторые характерные углы

Другой важной операцией симметрии является поворот на 90° вокруг той или иной координатной оси. Получение матриц поворота в этом случае тривиально просто и аналогично рассмотренному

выше, поэтому матрицы для основных координатных осей приведем без вывода:

$$\overleftrightarrow{A}_{x90} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \tag{4.8}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{y90} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array}\right); \tag{4.9}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{z90} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.10}$$

Эти матрицы описывают поворот на 90°, наблюдаемый со стороны соответствующей оси (то ей навстречу) в направлении против часовой стрелки. Повороты в противоположном направлении или при взгляде против соответствующей оси описываются подобными же матрицами с другими знаками, однако для реализации операций симметрии такого отражения, как правило, бывает вполне достаточно трех приведенных здесь матриц.

Для практики может быть важен поворот вокруг тех же осей на 180°. Соответствующие матрицы приведены ниже:

$$\overleftrightarrow{A}_{x180} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right); \tag{4.11}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{y180} = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right); \tag{4.12}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{z180} = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.13}$$

В некоторых случаях может представлять интерес поворот вокруг оси, соответствующей пространственной диагонали кубической ячейки. Ориентацию такой оси можно наглядно видеть из вида ячейки № 7 на рис. 3.1, где эта ось соответствует прямой, проходящей через вершины куба F и D. Там же слева показан вид на кубическую ячейку вдоль этой оси со стороны вершины D. Можно видеть, что ячейка переходит сама в себя при повороте на 120° в ту или иную сторону. С целью наглядности преобразований удобно использовать механическую модель кубической ячейки, выполненную например, из проволоки, подобную показанной на рис. 4.2.

Рис. 4.2. Фотография пространственной модели кубической ячейки

С помощью такой модели легко увидеть, что поворот ячейки на 120° против часовой стрелки приводит к преобразованию компонент вектора намагниченности вида

$$\begin{pmatrix} m_x \\ \hline m_y \\ \hline m_z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m_z \\ \hline m_x \\ \hline m_y \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

а поворот на такой же угол по часовой стрелке — к преобразованию

$$\begin{pmatrix} m_x \\ \hline m_y \\ \hline m_z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m_y \\ \hline m_z \\ \hline m_x \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Соответствующие матрицы поворота, получаемые с помощью преобразования, подобного (4.2), имеют вид:
против часовой стрелки

$$\overset{\leftrightarrow(+)}{A}_{c120} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right); \tag{4.16}$$

по часовой стрелке

$$\overset{\leftrightarrow(-)}{A}_{c120} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{4.17}$$

Непосредственным перемножением легко убедиться, что произведение этих матриц равно единице.

4.1.3. Поворот на произвольный угол

Весьма распространенными видами магнитной анизотропии являются «легкая ось» (легкоосная или одноосная) и «легкая плоскость» (легкоплоскостная). Такие виды анизотропии подразумевают неизменность плотности энергии магнитной среды при повороте вокруг заданной оси на произвольный угол.

Найдем матрицу преобразования для такого поворота. Как и ранее, будем рассматривать поворот против часовой стрелки при взгляде со стороны положительного направления соответствующей оси (здесь — Oz).

Рис. 4.3. Схема поворота вектора $\mathbf{m}$ на произвольный угол φ

Рассмотрим рис. 4.3, где показана схема поворота вектора $\mathbf{m}$ вокруг центра плоскости Oxy на произвольный угол φ. В исходном положении этот вектор составляет с осью Ox угол α и имеет компоненты

$$m_x = m_0 \cos\alpha, \tag{4.18}$$

$$m_y = m_0 \sin\alpha, \tag{4.19}$$

где m_0 — длина вектора $\mathbf{m}$. После поворота на угол φ он преобразуется в вектор $\mathbf{m}'$ той же длины, имеющий компоненты

$$m'_x = m_0 \cos(\alpha + \varphi), \tag{4.20}$$

$$m'_y = m_0 \sin(\alpha + \varphi). \tag{4.21}$$

Опустим коэффициент m_0, как не меняющийся при повороте (или положим его равным единице) и запишем операцию поворота в матричном виде:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{m}, \tag{4.22}$$

где $\overleftrightarrow{A}$ — искомая матрица поворота.

Записывая то же в компонентах, получаем

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\varphi) \\ \hdashline \sin(\alpha+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \hdashline \sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Выполняя умножение в правой части, получаем

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\varphi) \\ \hdashline \sin(\alpha+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\cos\alpha + A_{12}\sin\alpha \\ \hdashline A_{21}\cos\alpha + A_{22}\sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Раскрывая компоненты вектора в левой части по правилам тригонометрии [270] и приравнивая компоненты обоих получившихся векторов

построчно, после приведения подобных членов, получаем систему уравнений:

$$(A_{11} - \cos\varphi)\cos\alpha + (A_{12} + \sin\varphi)\sin\alpha = 0; \tag{4.25}$$

$$(A_{21} - \sin\varphi)\cos\alpha + (A_{22} - \cos\varphi)\sin\alpha = 0. \tag{4.26}$$

В силу произвольности угла α, эта система может удовлетворяться только в том случае, если все коэффициенты при $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ равны нулю. Используя это условие как способ нахождения A_{ik}, где $i, k = 1, 2$, получаем искомую матрицу поворота в плоскости Oxy на произвольный угол φ в виде

$$\overleftrightarrow{A}_{\varphi} = \left(\begin{array}{c|c} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \hline \sin\varphi & \cos\varphi \end{array}\right). \tag{4.27}$$

4.1.4. Поворот в случаях тригональной и гексагональной симметрии

Особые случаи поворотной симметрии составляют тригональная (ромбоэдрическая) и гексагональная (шестиугольная). Для описания таких видов симметрии поворот производится вокруг одной и той же оси, параллельной вертикальному ребру соответствующей ячейки (например AD для ячейки №5 или AG для ячейки №6 на рис. 3.1), проходящей через центр симметрии основания данной ячейки. Обычно такую ось обозначают как Oz. При этом плоскость Oxy, содержащая две другие оси декартовой системы координат Ox и Oy, будучи перпендикулярной Oz, оказывается параллельной горизонтальной плоскости ячейки: ABC или DEF для тригональной ячейки (№5 на рис. 3.1) или $ABCDEF$ или $GHIJKL$ для гексагональной ячейки (№6 на рис. 3.1). Тригональный или гексагональный характер симметрии ячейки требует ее совмещения с прежним положением при повороте на 120° или 60°.

Очевидно, такие повороты являются частными случаями поворота на произвольный угол, описываемого матрицей (4.27).

Из этой матрицы, задавая угол поворота равным 60° и 120°, получаем соответствующие матрицы, как частные случаи:

$$\overleftrightarrow{A}_{60} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right), \tag{4.28}$$

а также:

$$\overleftrightarrow{A}_{120} = \left(\begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right). \tag{4.29}$$

Для трехмерного вектора, компонента вдоль оси Oz которого при повороте не меняется, те же матрицы должны быть дополнены строкой и столбцом, на пересечении которых находится единица. То есть матрица поворота на произвольный угол вокруг оси Oz имеет вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{\varphi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \hline \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.30}$$

Для поворота на углы 60° и 120° получаем:

$$\overleftrightarrow{A}_{60} = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right); \tag{4.31}$$

а также:

$$\overleftrightarrow{A}_{120} = \left(\begin{array}{c|c|c} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{4.32}$$

4.2. Плотность энергии одноосной магнитной анизотропии

Будем полагать, что плотность энергии магнитной анизотропии в наиболее общем случае может быть представлена в виде разложения в ряд по степеням нормированных компонент намагниченности (то есть $m_i = M_i/M_0$):

$$U = \sum_{i=1}^{3} a_i m_i + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} m_i m_k + \sum_{i,k,l=1}^{3} a_{ikl} m_i m_k m_l + \\ + \sum_{i,k,l,m=1}^{3} a_{iklm} m_i m_k m_l m_m + \sum_{i,k,l,m,n=1}^{3} a_{iklmn} m_i m_k m_l m_m m_n + \\ + \sum_{i,k,l,m,n,p=1}^{3} a_{iklmnp} m_i m_k m_l m_m m_n m_p + \ldots, \tag{4.33}$$

где a_i, a_{ik}, a_{ikl}, a_{iklm}, a_{iklmn}, a_{iklmnp} … — постоянные коэффициенты (константы анизотропии), вид которых будет определяться условием, состоящем в сохранении плотности энергии при преобразованиях координат, соответствующих заданной кристаллографической симметрии.

Наиболее простым видом симметрии является одноосная, другим, несколько более сложным, но также достаточно употребительным — кубическая. Рассмотрим эти виды анизотропии последовательно.

4.2.1. Анизотропия второго порядка по намагниченности

Симметрия одноосной анизотропии требует неизменности плотности энергии при двух видах преобразований:

при изменении знака проекции вектора намагниченности на ось анизотропии,

при повороте нормальной к оси анизотропии составляющей вектора намагниченности на произвольный угол вокруг этой оси.

Рассмотрим эти требования последовательно.

Введем декартову систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы координатная ось Oz совпадала с осью анизотропии. При этом плоскость, перпендикулярная оси анизотропии, будет Oxy.

Первое требование по существу означает неизменность плотности энергии при отражении вектора намагниченности в плоскости Oxy. Матрица преобразования дается выражением (4.5). Преобразование вектора намагниченности при таком отражении, в соответствии с общим правилом (4.1), имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m'_x \\ m'_y \\ m'_z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ -m_z \end{pmatrix}. \tag{4.34}$$

Можно видеть, что компоненты вектора намагниченности m_x и m_y остаются неизменными, а компонента m_z меняет знак. Это означает, что все члены плотности энергии, имеющие m_z в нечетных степенях, при преобразовании изменят знак. Такое обстоятельство недопустимо, поэтому все коэффициенты слагаемых выражения (4.33), содержащих m_z в нечетных степенях, надо положить равными нулю.

Выражение (4.33), с точностью до членов второго порядка, принимает вид

$$U = a_x m_x + a_y m_y + a_{xx} m_x m_x + (a_{xy} + a_{yx}) m_x m_y + \\ + a_{yy} m_y m_y + a_{zz} m_z m_z. \tag{4.35}$$

Второе требование означает неизменность плотности энергии при повороте вектора намагниченности вокруг оси Oz на произвольный угол φ. Матрица преобразования дается выражением (4.27). Преобразование вектора намагниченности при таком повороте, в соответствии с общим правилом (4.1), имеет вид:

$$\begin{pmatrix} m'_x \\ m'_y \\ m'_z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \hline \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_x \cos\varphi - m_y \sin\varphi \\ m_x \sin\varphi + m_y \cos\varphi \\ m_z \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Входящие в (4.35) комбинации из компонент вектора намагниченности принимают вид:

$$m_x \to m_x \cos\varphi - m_y \sin\varphi; \tag{4.37}$$

$$m_y \to m_x \sin\varphi + m_y \cos\varphi; \tag{4.38}$$

$$m_x m_x \to (m_x \cos\varphi - m_y \sin\varphi)^2; \tag{4.39}$$

$$m_x m_y \to (m_x \cos\varphi - m_y \sin\varphi)(m_x \sin\varphi + m_y \cos\varphi); \tag{4.40}$$

$$m_y m_y \to (m_x \sin\varphi + m_y \cos\varphi)^2; \tag{4.41}$$

$$m_z m_z \to m_z^2. \tag{4.42}$$

В силу произвольности угла φ следует, что все комбинации, кроме последней (4.42), при изменении этого угла меняются. Так что, для сохранения неизменности плотности энергии надо все коэффициенты a_i и a_{ik}, кроме a_{zz}, положить равными нулю. В результате выражение (4.35) принимает вид

$$U = a_{zz} m_z^2, \tag{4.43}$$

что и составляет требуемое выражение для плотности энергии одноосной анизотропии с легкой осью, совпадающей с осью Oz.

На практике в ряде случаев удобно пользоваться выражением плотности энергии через компоненты намагниченности, перпендикулярные оси анизотропии. Для этого следует воспользоваться условием сохранения длины вектора намагниченности, в нормированных компонентах имеющим вид

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \tag{4.44}$$

откуда, выражая m_z и подставляя в (4.43), с точностью до постоянного слагаемого, получаем

$$U = -a_{zz}(m_x^2 + m_y^2). \tag{4.45}$$

Рис. 4.4. Нормированный вектор намагниченности в декартовой и сферической системах координат

Введем далее для обозначения одноосной анизотропии индекс «a», для константы a_{zz} обозначение «K». В такой записи из (4.43) и (4.45) получаем

$$U_a = K m_z^2 = -K(m_x^2 + m_y^2). \tag{4.46}$$

Запишем полученные выражения в сферической системе координат, показанной на рис. 4.4.

Компоненты нормированного вектора намагниченности имеют вид:

$$m_x = \sin\theta \cos\varphi; \tag{4.47}$$

$$m_y = \sin\theta \sin\varphi; \tag{4.48}$$

$$m_z = \cos\theta. \tag{4.49}$$

Подставляя эти компоненты в первое и второе равенства (4.46), получаем:

$$U_a^{(1)} = K\cos^2\theta; \tag{4.50}$$

$$U_a^{(2)} = -K\sin^2\theta. \tag{4.51}$$

С точностью до знака константы, плотность энергии одноосной анизотропии в виде второго из этих равенств используется в технике ЦМД [40, стр. 23, форм. (1.14)]. Рассмотрим этот вопрос в следующем разделе.

4.2.2. Анизотропия типа «легкая ось» и «легкая плоскость»

Важно отметить, что характер анизотропии зависит от знака ее константы. Все приведенные выше рассуждения не касались этого знака, то есть «по умолчанию» анизотропия полагалась просто одноосной без учета равновесного положения вектора намагниченности. Однако из формулы (4.46) легко видеть, что при положительном знаке этой константы потенциал имеет минимум при $m_z \to 0$ или $(m_x^2 + m_y^2) \to +\infty$. Это означает, что в равновесном состоянии вектор намагниченности располагается в плоскости, перпендикулярной оси анизотропии. Причем азимутальная ориентация вектора безразлична. Такая анизотропия носит название «легкая плоскость» или «легкоплоскостная». При отрицательном знаке константы, наоборот, реализуется случай, когда равновесное положение намагниченности ориентировано вдоль оси анизотропии, то есть имеет место анизотропия «легкая ось» или «легкоосная».

В большинстве практических приложений, например в технике цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) [35–42], имеет место анизотропия именно типа «легкая ось», как правило, ориентированная перпендикулярно плоскости пленки. При этом, исходя из удобства работы с положительными величинами, можно положить константу K положительной, однако тогда в формуле (4.46) надо изменить знаки. Таким образом, получаем

$$U_a = -Km_z^2 = K(m_x^2 + m_y^2), \tag{4.52}$$

где для реализации легкоосной анизотропии полагается $K > 0$.

Напомним, что приведенная здесь формула включает в себя нормированные компоненты вектора намагниченности $m_{x,\,y,\,z}$, то есть для получения полных компонент $M_{x,\,y,\,z}$ их надо умножать на намагниченность насыщения M_0. При этом формула (4.52) принимает вид

$$U_a = -\frac{K}{M_0^2}M_z^2 = \frac{K}{M_0^2}(M_x^2 + M_y^2). \tag{4.53}$$

Удобной характеристикой легкоосной анизотропии является эффективное «поле анизотропии», определяемое в соответствии с обычным

правилом получения эффективных полей [7, 8], без учета обменного взаимодействия, имеющим вид (1.2)

$$H_e = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}}. \tag{4.54}$$

При этом поле анизотропии, получаемое путем дифференцирования первого равенства формулы (4.53) с последующей дальнейшей заменой M_z на M_0, получается равным

$$H_a = \frac{2K}{M_0}. \tag{4.55}$$

В таком виде поле анизотропии, за вычетом размагничивания формы и некоторого влияния доменов, как раз определяет величину внешнего поля, необходимого для «укладывания» вектора намагниченности в плоскость одноосной пленки, используемой для ЦМД. Качественная картина явления здесь такова, что в отсутствие внешнего поля вектор намагниченности ориентирован точно вдоль оси анизотропии, где его «держит» поле H_a. По мере увеличения внешнего поля в плоскости пленки вектор намагниченности поворачивается в направлении этого поля, так что происходит ориентационный переход, заканчивающийся при полном выстраивании намагниченности вдоль внешнего поля. Такое выстраивание соответствует фазовому переходу, рассматриваемому более подробно в главе 5. Этот фазовый переход как раз происходит при внешнем поле, равном полю анизотропии с точностью до упомянутых выше добавок (размагничивание формы и домены). Если поле анизотропии настолько превышает эти добавки, что ими можно пренебречь, то оно как раз соответствует полю фазового перехода.

4.2.3. Одноосная анизотропия высоких порядков

В дополнение к двум предыдущим разделам следует добавить, что проведенное рассмотрение ограничивалось членами в разложении (4.33) не выше второго порядка. Учет членов более высоких порядков может быть проведен аналогично. При этом после учета операций симметрии в разложении остаются только члены, имеющие четный порядок по компоненте m_z, то есть

$$U_u = a_{zz}m_z^2 + a_{zzzz}m_z^4 + a_{zzzzzz}m_z^6 + a_{zzzzzzzz}m_z^8 + \ldots, \tag{4.56}$$

однако следует заметить, что в большинстве реальных материалов величины констант более высоких порядков, как правило, убывают тем скорее, чем порядок выше, так что в большинстве практических случаев в разложении (4.56) вполне можно ограничиться только первым слагаемым.

4.2.4. Плотность энергии одноосной магнитной анизотропии с произвольным направлением оси

В предыдущих разделах рассмотрена ситуация, когда ось магнитной анизотропии совпадает с одной из осей лабораторной декартовой

системы координат (в данном случае — с осью Oz). Теперь обратимся к важному для практики случаю такой же анизотропии, ориентация оси которой относительно лабораторной системы координат может быть произвольной.

Геометрия задачи иллюстрируется рис. 4.5. На рисунке слева показано взаимное расположение постоянного и переменного полей, а также оси анизотропии относительно плоскости ферритовой пластины.

Рис. 4.5. Геометрия задачи об одноосной анизотропии с произвольным направлением оси

Исходная (лабораторная) система координат — $Oxyz$. Плоскость Oxy совпадает с плоскостью ферритовой пластины, ось Oz ей перпендикулярна. Постоянное поле $\mathbf{H}$ параллельно оси Oz.

На данном этапе размагничивающий фактор пластины в явном виде учитывать не будем, чтобы нагляднее выявить роль анизотропии в чистом виде. Подробный учет размагничивающего фактора будет выполнен далее при обращении к реальному характеру анизотропии пленок смешанных ферритов-гранатов (глава 7). Здесь же будем считать, что анизотропию можно описать с помощью единственной оси, которую будем называть «осью легкого намагничивания» (ОЛН). На рисунке ее направляющий вектор обозначен через $\mathbf{B}$.

Направление оси легкого намагничивания относительно системы $Oxyz$ произвольно, и в сферических координатах определяется полярным и азимутальным углами θ_a и φ_a. Система координат $Ox'y'z'$ ориентирована таким образом, что ее ось Oz' направлена вдоль оси анизотропии ОЛН. Прямая AB, проходя через точку O, лежит в плоскости Oxy перпендикулярно оси Oz'. Угол поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz', отсчитываемый от линии OA, обозначен через ε.

Будем считать, что плотность энергии одноосной анизотропии, записанная в системе $Ox'y'z'$, имеет вид

$$U_a^{(1)} = K(m_{x'}^2 + m_{y'}^2), \tag{4.57}$$

где $m_{x',y'}$ — компоненты нормированного вектора намагниченности, K — константа, для случая легкоосной анизотропии — положительная: $K > 0$. Введение индекса «(1)» при плотности энергии на данном этапе принципиальной важности не имеет и более подробно пояснено далее.

Задача состоит в том, чтобы получить выражение для плотности энергии, зависящее от направления ориентации оси анизотропии в системе $Oxyz$, то есть от полярного и азимутального углов θ_a и φ_a.

Поскольку выражение для плотности энергии одноосной анизотропии задано в системе $Ox'y'z'$, то надо компоненты вектора намагниченности $m_{x'}$ и $m_{y'}$, определенные в системе $Ox'y'z'$, выразить через компоненты того же вектора m_x, m_y, m_z в системе $Oxyz$. Подстановка этих компонент в (4.33) даст искомое выражение для плотности энергии в системе $Oxyz$, выраженное через m_x, m_y, m_z. Таким образом, надо найти векторное соотношение

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{B}\,\mathbf{m}, \tag{4.58}$$

где $\overleftrightarrow{B}$ — матрица перехода от системы $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$.

Из общих правил работы с матрицами перехода, следует, что искомая матрица является обратной к матрице произвольного перехода от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$. Технически проще найти сначала прямую матрицу $\overleftrightarrow{A}$, обеспечивающую связь

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{m}', \tag{4.59}$$

так как компоненты этой матрицы представляют собой координаты направляющих векторов осей системы $Ox'y'z'$ относительно системы $Oxyz$. Компоненты прямой матрицы можно найти через компоненты вектора $\mathbf{B}$, используя θ_a, φ_a, ε в качестве углов Эйлера при линии узлов AB [261].

В общем случае прямая матрица имеет компоненты, приведенные в формулах (3.143)–(3.151), то есть, будучи записанной в виде таблицы, она принимает вид (3.161) (индекс «a» опущен для простоты записи)

$$\overleftrightarrow{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + & \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - & \sin\theta\cos\varphi \\ +\sin\varphi\cos\varepsilon & -\sin\varphi\sin\varepsilon & \\ \hline \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - & \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + & \sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\varphi\cos\varepsilon & +\cos\varphi\sin\varepsilon & \\ \hline -\sin\theta\sin\varepsilon & -\sin\theta\cos\varepsilon & \cos\theta \end{array}\right). \tag{4.60}$$

Компоненты обратной матрицы соответствуют формулам (3.152)–(3.160), то есть, будучи записанной в виде таблицы, эта матрица имеет вид (3.162)

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + & \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - & -\sin\theta\sin\varepsilon \\ +\sin\varphi\cos\varepsilon & -\cos\varphi\cos\varepsilon & \\ \hline \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - & \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + & -\sin\theta\cos\varepsilon \\ -\sin\varphi\sin\varepsilon & +\cos\varphi\sin\varepsilon & \\ \hline \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{array}\right). \quad (4.61)$$

Можно видеть, что (4.61) получается также из (4.60) путем замены строк столбцами. Непосредственной проверкой можно убедиться, что произведение (4.60) и (4.61) равно единичной матрице.

Приведенная на рис. 4.5 геометрия в выборе поворота системы $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz' никак не ограничена. Рассмотрим теперь более простой частный случай. Совместим ось Ox' с линией OA, то есть, по Эйлеру, с линией узлов [261], перпендикулярной проекции оси анизотропии на плоскость Oxy. При этом угол ε получается равным нулю, так что обратная матрица (4.61) принимает вид

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \hline \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ \hline \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{array}\right). \quad (4.62)$$

Эта матрица в соотношении (4.58) играет ту же роль, что и приведенная там матрица $\overleftrightarrow{B}$. При подстановке (4.62) соотношение (4.58) принимает вид

$$\left(\begin{array}{c} m_{x'} \\ \hline m_{y'} \\ \hline m_{z'} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \hline \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ \hline \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} m_x \\ \hline m_y \\ \hline m_z \end{array}\right). \quad (4.63)$$

Записывая по компонентам, получаем:

$$m_{x'} = m_x\sin\varphi - m_y\cos\varphi; \quad (4.64)$$

$$m_{y'} = m_x\cos\theta\cos\varphi + m_y\cos\theta\sin\varphi - m_z\sin\theta; \quad (4.65)$$

$$m_{z'} = m_x\sin\theta\cos\varphi + m_y\sin\theta\sin\varphi + m_z\cos\theta. \quad (4.66)$$

Подставляя эти выражения в (4.57), получаем плотность энергии одноосной анизотропии в системе $Oxyz$ в виде

$$\begin{aligned} U_a^{(1)} = K\big\{ & m_x^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + m_y^2(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \\ & + m_z^2\sin^2\theta - 2m_xm_y\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \\ & - 2m_xm_z\sin\theta\cos\theta\cos\varphi - 2m_ym_z\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\big\}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Здесь углы θ и φ характеризуют ориентацию ОЛН относительно системы $Oxyz$, то есть, как и ранее, их можно отметить индексом «a» и ввести обозначения θ_a и φ_a:

$$U_a^{(1)} = K\big\{m_x^2(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) + m_y^2(\cos^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) + \\ + m_z^2\sin^2\theta_a - 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - \\ - 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a - 2m_zm_x\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\big\}. \quad (4.68)$$

Вводя традиционное обозначение для поля анизотропии [7, 8]

$$H_a = \frac{2K}{M_0}, \quad (4.69)$$

запишем (4.68) в виде

$$U_a^{(1)} = \frac{1}{2}M_0H_a\big\{m_x^2(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) + \\ + m_y^2(\cos^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) + \\ + m_z^2\sin^2\theta_a - 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - \\ - 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a - 2m_zm_x\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\big\}. \quad (4.70)$$

Для ряда задач значительный интерес представляют эффективные поля анизотропии, определяемые по формуле (1.2) или (4.54) (с учетом того, что $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$)

$$\mathbf{H}_a = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{m}}. \quad (4.71)$$

В результате получаем:

$$H_a^{(1)} = -H_a\big\{m_x(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) - \\ - m_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - m_z\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\big\}; \quad (4.72)$$

$$H_{ay}^{(1)} = -H_a\big\{m_y(\cos^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) - \\ - m_x\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - m_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\big\}; \quad (4.73)$$

$$H_{az}^{(1)} = -H_a\big\{m_z\sin^2\theta_a - \\ - m_y\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a - m_x\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\big\}. \quad (4.74)$$

Приведем теперь выражение для плотности энергии (4.67) в сферической системе координат. В соответствии с рис. 4.4, компоненты нормированного вектора намагниченности $\mathbf{m}$ имеют вид (4.47)–(4.49):

$$m_x = \sin\theta\cos\varphi; \quad (4.75)$$

$$m_y = \sin\theta\sin\varphi; \quad (4.76)$$

$$m_z = \cos\theta. \quad (4.77)$$

Подставляя (4.75)–(4.77) в (4.68), получаем

$$U_a^{(1)} = K\big\{(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a)\sin^2\theta\cos^2\varphi + \\ + (\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a)\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ + \sin^2\theta_a\cos^2\theta - 2\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \\ - 2\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi - \\ - 2\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\big\}. \quad (4.78)$$

Если ориентация сферической системы координат какими-либо специфическими условиями задачи не задана, то с целью упрощения записи удобно выбрать ее так, чтобы линия начала отсчета азимутальной координаты приходилась на проекцию ОЛН на плоскость, перпендикулярную полярной оси (то есть вдоль оси Ox по рис. 4.5). При этом получается $\varphi_a = 0$, так что (4.68) принимает вид:

$$U_a^{(1)} = K(m_x^2\cos^2\theta_a + m_y^2 + m_z^2\sin^2\theta_a - 2m_x m_z\sin\theta_a\cos\theta_a). \quad (4.79)$$

Подставляя в это выражение (4.75)–(4.77), получаем

$$U_a^{(1)} = K(\cos^2\theta_a\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta_a\cos^2\theta - \\ - 2\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\theta\cos\theta\cos\varphi). \quad (4.80)$$

4.2.5. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной одноосной анизотропии с произвольным направлением оси

Зависимость нормированной плотности энергии от азимутального угла φ при произвольном направлении оси иллюстрируется азимутальной диаграммой, представленной на рис. 4.6. В качестве примера положено $\varphi_a = 0°$, $\theta_a = 60°$, $\theta = 60°$. Кривые построены по формуле (4.80). Сплошная линия соответствует $m_z > 0$, пунктирная — $m_z < 0$.

Из рисунка видно, что минимум плотности энергии при $m_z > 0$, то есть когда ОЛН наклонена от положительной части оси Oz к положительной части оси Ox, приходится на угол $\varphi = 0°$. При $m_z < 0$ минимум приходится на $\varphi = 180°$, что соответствует наклону ОЛН от отрицательной части оси Oz к отрицательной части оси Ox.

4.2.6. Другой вид выражения для плотности энергии одноосной магнитной анизотропии с произвольным направлением оси

Проведенное выше рассмотрение базируется на выражении для плотности энергии вида (4.57):

$$U_a^{(1)} = K(m_{x'}^2 + m_{y'}^2). \quad (4.81)$$

Согласно общему положению теоретической физики, потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого [295], то есть в ее записи, кроме (4.81), возможны другие варианты. Рассмотрим один из них, имеющий большое практическое значение.

Рис. 4.6. Азимутальная диаграмма плотности энергии одноосной магнитной анизотропии с направлением оси, определяемом углами $\varphi_a = 0°$, $\theta_a = 60°$, при $\theta = 60°$

Так, из условия постоянства длины нормированного вектора намагниченности, имеющего вид

$$m_{x'}^2 + m_{y'}^2 + m_{z'}^2 = 1, \tag{4.82}$$

получаем

$$U_a^{(1)} = K - K m_{z'}^2. \tag{4.83}$$

Введем обозначение:

$$U_a^{(2)} = -K m_{z'}^2, \tag{4.84}$$

так что

$$U_a^{(1)} = K + U_a^{(2)}. \tag{4.85}$$

Поскольку потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого, можно считать, что плотности энергии $U_a^{(1)}$ и $U_a^{(2)}$ между собой эквивалентны.

Представление плотности энергии одноосной анизотропии в виде $U_a^{(2)}$ может быть полезным в ряде задач, поэтому приведем его здесь в тех же обозначениях, что и $U_a^{(1)}$. При этом вместо (4.68), получаем:

$$\begin{aligned} U_a^{(2)} = -K\{&m_x^2 \sin^2\theta_a \cos^2\varphi_a + m_y^2 \sin^2\theta_a \sin^2\varphi_a + \\ &+ m_z^2 \cos^2\theta_a + 2m_x m_y \sin^2\theta_a \sin\varphi_a \cos\varphi_a + \\ &+ 2m_x m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \cos\varphi_a + 2m_y m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \sin\varphi_a\}. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Вводя поле анизотропии в соответствии с (4.69), получаем

$$U_a^{(2)} = -\frac{1}{2}M_0H_a\{m_x^2\sin^2\theta_a\cos^2\varphi_a + m_y^2\sin^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \\ + m_z^2\cos^2\theta_a + 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a + \\ + 2m_xm_z\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a + 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\}. \quad (4.87)$$

Эффективные поля приобретают вид:

$$H_{ax}^{(2)} = H_a\{m_x\sin^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \\ + m_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a + m_z\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\}; \quad (4.88)$$

$$H_{ay}^{(2)} = H_a\{m_y\sin^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \\ + m_x\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a + m_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\}; \quad (4.89)$$

$$H_{az}^{(2)} = H_a\{m_z\cos^2\theta_a + \\ + m_y\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a + m_x\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\}. \quad (4.90)$$

Выражая в (4.86) компоненты намагниченности через углы θ и φ в соответствии с (4.75)–(4.77), получаем

$$U_a^{(2)} = -K\{\sin^2\theta_a\cos^2\varphi_a\sin^2\theta\cos^2\varphi + \\ + \sin^2\theta_a\sin^2\varphi_a\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ + \cos^2\theta_a\cos^2\theta + 2\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \\ + 2\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\sin\theta\cos\theta\cos\varphi + \\ + 2\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\}. \quad (4.91)$$

Если подобно предыдущему случаю в выражении (4.86) положить $\varphi_a = 0$, то получаем

$$U_a^{(2)} = -K(m_x^2\sin^2\theta_a + m_z^2\cos^2\theta_a + 2m_xm_z\sin\theta_a\cos\theta_a). \quad (4.92)$$

Подставляя компоненты вектора намагниченности в виде (4.75)–(4.77), получаем:

$$U_a^{(2)} = -K\{\sin^2\theta_a\sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta_a\cos^2\theta + \\ + 2\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\}. \quad (4.93)$$

Зависимость нормированной плотности энергии от азимутального угла φ в этом случае, с учетом соотношения (4.85), полностью совпадает с приведенной на рис. 4.6, что является следствием эквивалентности плотностей энергии $U_a^{(1)}$ и $U_a^{(2)}$.

Замечание. Выше при обсуждении формулы (4.85), отмечено, что плотности энергии $U_a^{(1)}$ и $U_a^{(2)}$ отличаются лишь на постоянную величину, то есть с точки зрения потенциала выражения (4.70) и (4.87) являются эквивалентными. Однако получаемые из этих выражений

эффективные поля (4.72)–(4.74) и (4.88)–(4.90) эквивалентными не являются. Для качественного рассмотрения можно полагать, что физическому смыслу анизотропии типа «легкая ось» отвечают поля вида (4.88)–(4.90), тогда как поля вида (4.72)–(4.74) отвечают анизотропии типа «легкая плоскость». Однако надо сказать, что такое определение является не бесспорным. Поэтому использование полей того или иного вида должно проводиться с полным учетом конкретного характера анизотропии рассматриваемой задачи. Более того, в некоторых случаях, например при изменении температуры, знак константы K может меняться, так что анизотропия типа «легкая ось» будет переходить в анизотропию типа «легкая плоскость» или обратно. При решении задач такого типа при переходе через точку изменения знака константы и выражения для полей должны соответствующим образом заменяться друг на друга. Непрерывность изменения эффективного поля при этом нарушаться не будет, так как в точке изменения знака константа равна нулю, так что все поля в этой точке также равняются нулю.

4.3. Плотность энергии кубической магнитной анизотропии

Рассмотрим сначала плотность энергии кубической анизотропии для наиболее простого случая — ориентации [001]. Этот случай является базовым для любых других ориентаций, плотность энергии для которых получается из базового случая путем поворота кристаллической ячейки, как это будет показано далее.

4.3.1. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [001]

Симметрия кубической анизотропии требует неизменности плотности энергии при двух видах преобразований:

при изменении знака проекции вектора намагниченности на любую из осей, совпадающих с ребрами кубической ячейки;

при повороте на 90° вокруг любой из тех же осей.

Рассмотрим эти требования последовательно.

Введем декартову систему координат $Oxyz$ таким образом, чтобы координатные оси Ox, Oy и Oz совпадали с тремя ребрами кубической ячейки, исходящими из одной вершины. При этом плоскости кубической ячейки, образованные двумя соседствующими ребрами, будут совпадать с координатными плоскостями Oxy, Oxz и Oyz.

Первое требование по существу означает неизменность плотности энергии при отражении вектора намагниченности в этих координатных плоскостях. Матрицы преобразований даются формулами (4.3), (4.4), (4.5).

Преобразования вектора намагниченности при таких отражениях, выполненные аналогично (4.34), показывают, что во всех случаях две компоненты намагниченности остаются неизменными, а третья

меняет знак. Это означает, что все члены плотности энергии, имеющие какую-либо из компонент намагниченности в нечетной степени, меняют знак. С целью сохранения неизменности плотности энергии при таких преобразованиях, все коэффициенты слагаемых выражения (4.33), содержащих m_x, m_y или m_z в нечетной степени, должны быть положены равными нулю.

Выражение (4.33) с точностью до членов четвертого порядка, принимает вид

$$U = a_{xx}m_x^2 + a_{yy}m_y^2 + a_{zz}m_z^2 + a_{xxxx}m_x^4 + a_{yyyy}m_y^4 + a_{zzzz}m_z^4 + \\ + (a_{xxyy} + a_{yyxx})m_x^2m_y^2 + (a_{yyzz} + a_{zzyy})m_y^2m_z^2 + (a_{zzxx} + a_{xxzz})m_z^2m_x^2. \tag{4.94}$$

Поворот на 90° вокруг оси Ox, выполняемый с помощью матрицы $\overleftrightarrow{A}_{x90}$ (4.8), приводит к следующему преобразованию вектора намагниченности:

$$\begin{pmatrix} m_{x'} \\ m_{y'} \\ m_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}. \tag{4.95}$$

Входящие в (4.95) комбинации из компонент вектора намагниченности принимают вид:

$$m_x^2 \to m_x^2; \tag{4.96}$$
$$m_y^2 \to m_z^2; \tag{4.97}$$
$$m_z^2 \to m_y^2; \tag{4.98}$$
$$m_x^4 \to m_x^4; \tag{4.99}$$
$$m_y^4 \to m_z^4; \tag{4.100}$$
$$m_z^4 \to m_y^4; \tag{4.101}$$
$$m_x^2m_y^2 \to m_x^2m_z^2; \tag{4.102}$$
$$m_y^2m_z^2 \to m_z^2m_y^2; \tag{4.103}$$
$$m_z^2m_x^2 \to m_y^2m_x^2. \tag{4.104}$$

Подставляя эти комбинации в (4.95), сравнивая с исходным выражением и проделывая подобную процедуру поворота на 90° вокруг осей Oy и Oz с использованием матриц (4.9), (4.10), получаем:

$$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = a_0; \tag{4.105}$$
$$a_{xxxx} = a_{yyyy} = a_{zzzz} = a_1; \tag{4.106}$$
$$(a_{xxyy} + a_{yyxx}) = (a_{yyzz} + a_{zzyy}) = (a_{zzxx} + a_{xxzz}) = a_2, \tag{4.107}$$

где a_0, a_1, a_2 — вспомогательные обозначения, введенные для сокращения записи.

При таких обозначениях (4.94) принимает вид

$$U = a_0(m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) + a_1(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4) + \\ + a_2(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2), \quad (4.108)$$

что и составляет требуемое выражение для плотности энергии кубической магнитной анизотропии в декартовой системе координат, оси которой совпадают с ребрами кубической ячейки.

Существенное упрощение полученного выражения дает предположение о сохранении длины вектора намагниченности:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1. \quad (4.109)$$

Так, подставляя это выражение в (4.108), из первого слагаемого получаем $a_0(1)$, то есть постоянную величину, которую, учитывая определение потенциала с точностью до произвольной постоянной, можно опустить.

Далее, возводя (4.109) в квадрат, получаем:

$$(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4) + 2(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) = 1. \quad (4.110)$$

Умножая это выражение на $-a_1$ и прибавляя к (4.108), приводя подобные члены и опуская постоянные слагаемые, в силу определения потенциала с точностью до произвольной постоянной, получаем:

$$U = (a_2 - 2a_1)(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \quad (4.111)$$

Аналогично умножая (4.110) на $-a_2/2$, прибавляя к (4.108), опуская постоянные слагаемые и приводя подобные члены, получаем

$$U = (a_1 - a_2/2)(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4). \quad (4.112)$$

В силу равенства (4.111) и (4.112) с точностью до произвольных постоянных, можно видеть, что выражение для плотности энергии кубической анизотропии имеет два эквивалентных вида (4.111) и (4.112), отличающиеся значениями констант.

По-видимому, более распространенным является вид (4.111), где для обозначения коэффициента в первых круглых скобках вводится константа кубической анизотропии, равная

$$K_1 = (a_2 - 2a_1). \quad (4.113)$$

При этом плотность энергии кубической анизотропии, для обозначения которой часто используем индекс «c», принимает вид:

$$U_c = K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \quad (4.114)$$

Такой вид используется, например, в [259, стр. 160, форм. (4.7)].

Из формулы (4.112) можно получить другой вид плотности энергии, эквивалентный первому:

$$U_c = -\frac{K_1}{2}(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4), \quad (4.115)$$

где для получения коэффициента перед скобкой достаточно из (4.113) выразить a_2 через K_1, после чего подставить в (4.112). Такой вид используется например в [7, стр. 90, форм. (2.2.24′)].

Приведенные здесь формулы (4.114) и (4.115), как правило, достаточны для учета кубической анизотропии в большинстве реальных материалов. Однако в некоторых случаях требуется учесть в разложении плотности энергии (4.33) члены более высоких порядков. При этом для кубической анизотропии следующим порядком после четвертого будет шестой. В результате учета неизменности плотности энергии при отражении вектора намагниченности в координатных плоскостях и повороте на 90° вокруг координатных осей, остающееся от (4.33) слагаемое плотности энергии шестого порядка принимает вид

$$U_c^{(6)} = K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2. \tag{4.116}$$

При этом полная плотность энергии является суммой (4.114) или (4.115) и (4.116), так что принимает вид

$$U_c = K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) + K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \tag{4.117}$$

или

$$U_c = -\frac{K_1}{2}(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4) + K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2. \tag{4.118}$$

В виде (4.117) выражение для плотности энергии кубической магнитной анизотропии используется, например, в [7, стр. 83, формула (2.2.3)].

Замечание. Следует отметить однако, что в большинстве реальных материалов константа K_2, как правило, по абсолютной величине значительно меньше, чем K_1. Так в железоиттриевом гранате различие между ними достигает порядка и более. Особенно наглядно для этого материала соотношение констант в широком интервале температур представлено в [8, стр. 62, рис. 2.12]. В то же время, при учете K_2 математические выкладки заметно усложняются. Видимо, по этой причине в большинстве известных авторам настоящей монографии работах рассмотрение ограничивается только учетом константы K_1, то есть плотность энергии кубической анизотропии используется в виде (4.114) или (4.115). Тем не менее, например, в работах [131, 204], посвященных возбуждению гиперзвука в пластине с кубической анизотропией, в аналитических выкладках константа K_2 присутствует, хотя далее более подробно ее роль не рассматривается.

4.3.2. Поле кубической анизотропии

Для характеристики кубической анизотропии часто вводят «поле кубической анизотропии», равное [7, стр. 85, форм. (2.2.10)]

$$H_c = \frac{K_1}{M_0}. \tag{4.119}$$

Заметим однако, что это поле не получается из плотности энергии путем дифференцирования, подобного проведенному при вычислении поля одноосной анизотропии. Тем не менее, это выражение представляет определенные удобства, особенно при анализе ориентационных зависимостей ферромагнитного резонанса [6–8] (в случае ЖИГ надо учитывать знак константы в трактовке, приведенной далее).

4.3.3. Особенности кубической анизотропии железоиттриевого граната

Наибольший интерес для дальнейшего изложения имеет железоиттриевый гранат (ЖИГ), для которого в литературе встречаются два значения поля анизотропии. Так в [7, стр. 95, подпись к рис. 2.2.8] приведено значение $H_c = -36$ Э, а согласно [296, стр. 307, табл. 15] та же величина равна -45 Э. Учитывая, что намагниченность насыщения M_0 для ЖИГ обычно принимается равной 140 Гс (или $4\pi M_0 = 1750$ Гс), константы анизотропии в обоих этих случаях равны соответственно -5046 эрг см$^{-3}$ и -6300 эрг см$^{-3}$.

При этом отрицательный знак константы означает, что легкими осями анизотропии являются пространственные диагонали куба. В этом случае для наглядности можно считать, что отрицательное поле анизотропии (4.119) «отталкивает» намагниченность от осей координат, вокруг которых проводились повороты, то есть от ребер кубической ячейки.

Приведенная здесь трактовка знака константы анизотропии является довольно распространенной [6–8, 296]. Однако при практическом рассмотрения анизотропии железоиттриевого граната не всегда удобно иметь константу отрицательной. Поэтому для облегчения вычислений можно положить константу положительной, то есть считать $K_1 > 0$, но при этом знаки выражений (4.114) и (4.115) надо изменить. Аналогично, в железоиттриевом гранате константа K_2 также является отрицательной [8, стр. 62, рис. 2.12], так что полагая для удобства $K_2 > 0$, знак выражения (4.116) и знаки перед вторыми слагаемыми в выражениях (4.117), (4.118) также должны быть изменены. В результате такого изменения выражения для плотности энергии (4.117) и (4.118) принимают вид:

$$U_c = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) - K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \tag{4.120}$$

а также:

$$U_c = \frac{K_1}{2}(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4) - K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \tag{4.121}$$

где предполагается $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$.

При такой замене знака константы K_1 «поле анизотропии» (4.119) становится положительным, что также облегчает работу с ним.

В рамках настоящей монографии для плотности энергии кубической анизотропии везде используется вид (4.120) в предположении $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$.

4.3.4. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [001] в сферической системе координат

В предыдущих разделах были получены выражения для плотности энергии магнитной анизотропии для одноосного и кубического случаев. Вывод основывался на применении операций симметрии, таких, как отражение в плоскости и поворот вокруг оси. Для выполнения таких операций наиболее удобной является декартова система координат, содержащая в своей основе координатные плоскости и прямые координатные оси. Однако для некоторых задач, особенно с участием одноосной анизотропии, более удобной является сферическая система координат. Такое положение имеет место, например, в технике цилиндрических магнитных доменов [35–42] или в нахождении ориентационных зависимостей частоты ферромагнитного резонанса [6–8, 31].

Для записи плотности энергии в сферической системе координат следует выразить декартовы компоненты вектора намагниченности в сферических координатах, подобно тому, как это сделано при выводе выражений (4.75)–(4.77) или более подробно при выводе (4.47)–(4.49) на основе рис. 4.4. Далее полученные таким образом компоненты вектора намагниченности следует подставить в выражения для плотности энергии, полученные в декартовой системе координат. Такое преобразование для одноосной анизотропии уже выполнено в разделе 4.2.4. Покажем теперь выполнение подобного преобразования для случая кубической анизотропии, причем ради общности рассмотрим обе константы K_1 и K_2.

Итак, подставляя (4.75)–(4.77) в (4.120) с учетом замечания о знаках констант, получаем:

$$U_c = -K_1(\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\theta) - \\ - K_2\sin^4\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi. \quad (4.122)$$

В подобном виде, с точностью до знаков констант и с учетом тригонометрических формул для двойного угла, плотность энергии кубической анизотропии приведена, например, в [7, стр. 96, форм. (2.2.34)].

Аналогично из (4.121) получаем:

$$U_c = \frac{K_1}{2}(\sin^4\theta\cos^4\varphi + \sin^4\theta\sin^4\varphi + \cos^4\theta) - \\ - K_2\sin^4\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi. \quad (4.123)$$

Путем несложных, хотя и несколько громоздких тригонометрических преобразований, можно убедиться, что разность между первыми слагаемыми этих двух выражений равна единице. Это означает, что, несмотря на различие форм записи, определенные этими двумя формулами потенциалы отличаются на постоянную величину, то есть описывают одну и ту же потенциальную энергию.

Приведенные здесь формулы относятся к ориентации кубической ячейки типа [001]. Формулы для других ориентаций в сферической системе координат получаются из формул декартовой системы подобным же образом с помощью подстановки компонент вектора намагниченности в виде (4.75)–(4.77).

4.3.5. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [001]

Вернемся несколько назад к формулам (4.114), (4.115) и приведем удобный прием наглядного изображения распределения плотности энергии кубической анизотропии в трехмерном пространстве. Таким довольно удобным способом здесь является построение азимутальной диаграммы, то есть представление плотности энергии в зависимости от азимутального угла ориентации вектора намагниченности. Подобная диаграмма была построена для одноосной анизотропии на рис. 4.6. Выполним здесь такое же построение случая для кубической анизотропии с ориентацией типа [001]. Общим приемом здесь является выражение компонент вектора намагниченности m_x, m_y, m_z в сферической системе координат с последующей подстановкой в плотность энергии, записанную через эти компоненты. Такая подстановка дает плотность энергии, выраженную через полярный и азимутальный углы θ и φ.

В рассматриваемом случае ориентации [001] подобная процедура приводит к формулам (4.122) и (4.123). Азимутальная диаграмма получается как зависимость плотности энергии от азимутального угла вектора намагниченности φ при заданном значении полярного угла θ. Это значение можно выбрать, исходя из наглядности рисунка. Практика показывает, что довольно удобным значением является $\theta = 60°$.

Такая азимутальная диаграмма, полученная на основе формул (4.114), (4.115) и нормированная на единицу, представлена на рис. 4.7. Здесь линии сплошная и пунктирная соответствуют разным знакам первой константы анизотропии K_1. Сплошная — $K_1 > 0$ (случай ЖИГ или никеля), пунктир — $K_1 < 0$ (случай железа). В обоих случаях вторая константа K_2, ввиду ее малости, не учитывается.

Из рисунка видно, что азимутальная зависимость плотности энергии от угла φ имеет симметрию четвертого порядка, то есть повторяется через каждые 90°. Такая симметрия как раз соответствует симметрии куба, установленного гранью на плоскость, соответствующую $\theta = 90°$. При $K_1 > 0$ минимумы плотности энергии приходятся на углы 45°, 135°, 225°, 315°, то есть проходят через плоскости, соответствующие проекциям осей типа [111] на плоскость Oxy в системе, декартовы оси которой совпадают с ребрами куба. Максимумы плотности энергии приходятся между этими плоскостями. Такой вид азимутальной диаграммы обусловлен тем, что при положительном знаке константы K_1 оси типа [111] являются осями легкого намагничивания.

Противоположный знак константы анизотропии, как можно видеть из характера пунктирной кривой, максимумы и минимумы меняет

Рис. 4.7. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [001]. Полярный угол $\theta = 60°$. Сплошная линия — $K_1 > 0$, пунктирная линия — $K_1 < 0$

местами. Это как раз соответствует тому, что при положительном знаке той же константы оси типа [111] представляют собой оси трудного намагничивания.

4.3.6. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [011]

В разделе 4.3.4 получена плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [001]. Однако в ряде практических задач (например, в технике ЦМД) важны другие ориентации. Приведем далее рассчитанные в соответствии с матрицами, полученными в разделе 3.6, выражения для плотности энергии кубической магнитной анизотропии с константой K_1 при разных кристаллографических ориентациях. Начнем с ориентации [011].

Общая постановка задачи. Имеется выражение для плотности энергии кубической магнитной анизотропии в декартовой системе координат $Oxyz$ для случая, когда ребра кубической кристаллографической ячейки, то есть кристаллографические оси [001], [010] и [100] ориентированы вдоль осей координат Ox, Oy и Oz.

Как показано в разделе 4.3.3, это выражение с точностью до членов четвертого порядка имеет две эквивалентные формы (4.120) и (4.121). Ограничимся далее рассмотрением формы (4.120).

Задача состоит в том, чтобы записать плотность энергии в той же системе, но при направлении кристаллографической оси [011] вдоль

координатной оси Oz, причем сама кристаллографическая ячейка может быть повернута вокруг этой оси на произвольный угол.

Преобразование векторов намагниченности. Для преобразования векторов намагниченности воспользуемся методом матрицы перехода, согласно которому преобразование компонент вектора при повороте системы координат производится в соответствии с формулой (3.10):

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}', \tag{4.124}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор в исходной системе координат, $\mathbf{a}'$ — вектор в повернутой системе координат, $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от повернутой системы $Ox'y'z'$ к исходной $Oxyz$.

Матрица такого перехода имеет вид (3.222)

$$\overleftrightarrow{A}_{011}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{4.125}$$

Рассмотрим теперь преобразование вектора намагниченности. Согласно формуле преобразования (4.124), получаем, что нормированные на M_0 компоненты вектора намагниченности преобразуются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ \hline m_y \\ \hline m_z \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{A}_{011} \begin{pmatrix} m_{x'} \\ \hline m_{y'} \\ \hline m_{z'} \end{pmatrix}, \tag{4.126}$$

откуда получаем:

$$m_x = \cos\varepsilon m_{x'} - \sin\varepsilon m_{y'}; \tag{4.127}$$

$$m_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon m_{x'} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon m_{y'} + \frac{\sqrt{2}}{2} m_{z'}; \tag{4.128}$$

$$m_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varepsilon m_{x'} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varepsilon m_{y'} + \frac{\sqrt{2}}{2} m_{z'}. \tag{4.129}$$

Преобразование плотности энергии. Плотность энергии магнитной анизотропии в системе $Oxyz$, оси которой направлены вдоль ребер куба, имеет вид (4.120):

$$U_c = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) - K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \tag{4.130}$$

где K_1, K_2 — константы кубической анизотропии (в случае ЖИГ обе полагаются положительными).

Ограничимся далее рассмотрением только первой константы анизотропии, полагая $K_2 = 0$. При этом получаем

$$U_c = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \tag{4.131}$$

Чтобы получить плотность энергии, выраженную через компоненты векторов намагниченности в системе $Ox'y'z'$, надо в выражение (4.131) подставить компоненты векторов намагниченности, определяемые выражениями (4.75)–(4.77).

Чтобы уменьшить громоздкость вычислений, полезно слагаемые выражения (4.131) сгруппировать в виде

$$U_c = -K_1\left[m_x^2(m_y^2 + m_z^2) + (m_y m_z)^2\right]. \tag{4.132}$$

Частный случай. Общее выражение получается довольно громоздким, поэтому рассмотрим частный случай, соответствующий $\varepsilon = 0$. При этом ось Oz' ориентирована вдоль диагонали грани куба, ось Ox' — вдоль ребра куба, совпадающего с линией OA, а ось Oy' — вдоль линии OE.

Матрица перехода (4.125) для этого случая принимает вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{011}(0) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{4.133}$$

Компоненты вектора намагниченности (4.127)–(4.129) принимают вид:

$$m_x = m_{x'}; \tag{4.134}$$

$$m_y = \frac{\sqrt{2}}{2}m_{y'} + \frac{\sqrt{2}}{2}m_{z'}; \tag{4.135}$$

$$m_z = -\frac{\sqrt{2}}{2}m_{y'} + \frac{\sqrt{2}}{2}m_{z'}. \tag{4.136}$$

Подставляя (4.134)–(4.136) в (4.132), получаем плотность энергии магнитной анизотропии в виде

$$U_c = -\frac{K_1}{4}(m_{y'}^4 + m_{z'}^4 + 4m_{x'}^2 m_{y'}^2 + 4m_{x'}^2 m_{z'}^2 - 2m_{y'}^2 m_{z'}^2). \tag{4.137}$$

Если дальше задача будет решаться в повернутой системе координат $Ox'y'z'$, то есть в этой системе будет записан закон движения, то можно с целью удобства переименовать эту систему в $Oxyz$ и убрать штрихи у компонент намагниченности (не забывая однако, что эта система — повернутая). При этом плотность энергии (4.137) принимает вид:

$$U_c = -\frac{K_1}{4}(m_y^4 + m_z^4 + 4m_x^2 m_y^2 + 4m_x^2 m_z^2 - 2m_y^2 m_z^2). \tag{4.138}$$

Две из четырех осей типа [111] лежат в плоскости $Ox'y'$ (плоскость $ACBEO$ на рис. 3.13), образуя с осью Ox' (линией OA на том же рисунке) азимутальные углы: 60°, 120°, 240°, 300°. Две другие оси

лежат в плоскости $Ox'z'$ (плоскость $AOBM$ на том же рисунке), то есть их проекции на плоскость $Ox'y'$ приходятся на углы 0° и 180°.

4.3.7. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [011]

Зависимость нормированной плотности энергии от азимутального угла иллюстрируется рис. 4.8. Методика построения этого рисунка аналогична таковой, принятой для рассмотренного выше случая ориентации [001], то есть полярный угол вектора намагниченности заведомо считается постоянным $\theta = 60°$. В данном случае плотность энергии относительно m_z квадратична, поэтому вид изображенной диаграммы от знака этой компоненты не зависит (в отличие от рассматриваемого далее случая ориентации [111]).

Из рисунка видно, что минимумы плотности энергии приходятся на углы 90° и 270°, то есть находятся посередине осей типа [111], лежащих в плоскости $Ox'y'$. Диаграмма имеет двухлепестковый характер, соответствующий расположению двух осей типа [111] в плоскости, перпендикулярной к полярной оси сферической системы координат, и еще двух в плоскости, перпендикулярной первой. Рисунок построен при положительном знаке константы анизотропии, когда оси [111] являются легкими. Изменение знака константы на обратный приводит к повороту диаграммы на 90°, подобно предыдущему случаю.

Рис. 4.8. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [011]. Полярный угол $\theta = 60°$

4.3.8. Плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [111]

Рассмотрим теперь более сложный случай, соответствующий ориентации [111], то есть когда одна из пространственных диагоналей кубической ячейки направлена вдоль оси Oz декартовой системы координат.

Общая постановка задачи. Имеется выражение для плотности энергии кубической магнитной анизотропии в декартовой системе координат $Oxyz$ для случая, когда ребра кубической кристаллографической ячейки, то есть кристаллографические оси [001], [010] и [100] ориентированы вдоль осей координат Ox, Oy и Oz (это выражение приведено в разделе 4.3.4).

Задача состоит в том, чтобы записать плотность энергии в той же системе, но при направлении кристаллографической оси [111] вдоль координатной оси Oz, причем сама кристаллографическая ячейка может быть повернута вокруг этой оси на произвольный угол.

Преобразование векторов намагниченности. Для преобразования векторов намагниченности воспользуемся методом матрицы перехода, согласно которому преобразование компонент вектора при повороте системы координат производится в соответствии с формулой (3.10)

$$\mathbf{a} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{a}', \tag{4.139}$$

где $\mathbf{a}$ — вектор в исходной системе координат, $\mathbf{a}'$ — вектор в повернутой системе координат, $\overleftrightarrow{A}$ — матрица перехода от повернутой системы $Ox'y'z'$ к исходной $Oxyz$.

Матрица перехода имеет вид (3.269)

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon + \sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \sqrt{3}\,\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon - \sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \sqrt{3}\,\sin\varepsilon) & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon & -\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right). \tag{4.140}$$

Рассмотрим теперь преобразование вектора намагниченности. Согласно формуле преобразования (4.139), получаем, что нормированные на M_0 компоненты вектора намагниченности преобразуются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{A}_{111} \begin{pmatrix} m_{x'} \\ m_{y'} \\ m_{z'} \end{pmatrix}, \tag{4.141}$$

откуда получаем:

$$m_x = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon + \sin\varepsilon)m_{x'} + \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon - \sqrt{3}\,\sin\varepsilon)m_{y'} + \frac{\sqrt{3}}{3}m_{z'}; \tag{4.142}$$

$$m_y = -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\cos\varepsilon - \sin\varepsilon)m_{x'} + \\ + \frac{\sqrt{6}}{6}(\cos\varepsilon + \sqrt{3}\,\sin\varepsilon)m_{y'} + \frac{\sqrt{3}}{3}m_{z'}; \tag{4.143}$$

$$m_z = -\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon m_{x'} - \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon m_{y'} + \frac{\sqrt{3}}{3}m_{z'}. \tag{4.144}$$

Преобразование плотности энергии. Плотность энергии магнитной анизотропии в системе $Oxyz$, оси которой направлены вдоль ребер куба, имеет вид (4.120), (4.130):

$$U_c = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) - K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \tag{4.145}$$

где K_1, K_2 — константы кубической анизотропии (в случае ЖИГ обе полагаются положительными).

Как и в предыдущем случае, ограничимся далее рассмотрением только первой константы анизотропии, полагая $K_2 = 0$. При этом, согласно (4.131), имеем:

$$U_c = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \tag{4.146}$$

Чтобы получить плотность энергии, выраженную через компоненты векторов намагниченности в системе $Ox'y'z'$, надо в выражение (4.146) подставить компоненты векторов намагниченности, определяемые выражениями (4.142)–(4.144).

Чтобы уменьшить громоздкость вычислений, полезно слагаемые выражения (4.146) сгруппировать в виде:

$$U_c = -K_1\left[m_x^2(m_y^2 + m_z^2) + (m_y m_z)^2\right]. \tag{4.147}$$

Частный случай. Общее выражение получается довольно громоздким, поэтому рассмотрим частный случай, соответствующий $\varepsilon = 0$. При этом ось Oz' ориентирована вдоль пространственной диагонали куба, ось Ox' — вдоль линии OA (рис. 3.14), а ось Oy' — вдоль линии OE (там же). Матрица перехода для этого случая имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(0) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \hline 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right). \tag{4.148}$$

Компоненты вектора намагниченности принимают вид:

$$m_x = \frac{\sqrt{2}}{2} m_{x'} + \frac{\sqrt{6}}{6} m_{y'} + \frac{\sqrt{3}}{3} m_{z'}; \tag{4.149}$$

$$m_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} m_{x'} + \frac{\sqrt{6}}{6} m_{y'} + \frac{\sqrt{3}}{3} m_{z'}; \tag{4.150}$$

$$m_z = -\frac{\sqrt{6}}{3} m_{y'} + \frac{\sqrt{3}}{3} m_{z'}. \tag{4.151}$$

Подставляя (4.149)–(4.151) в (4.147), получаем плотность энергии магнитной анизотропии в виде

$$U_c = -\frac{K_1}{12}(3m_{x'}^4 + 3m_{y'}^4 + 4m_{z'}^4 + 6m_{x'}^2 m_{y'}^2 - \\ - 12\sqrt{2}\, m_{x'}^2 m_{y'} m_{z'} + 4\sqrt{2}\, m_{x'}^3 m_{z'}). \tag{4.152}$$

Если дальше задача будет решаться в повернутой системе координат $Ox'y'z'$, то есть в этой системе будет записан закон движения, то можно с целью удобства переименовать эту систему в $Oxyz$ и убрать штрихи у компонент намагниченности (не забывая однако, что эта система — повернутая).

При этом плотность энергии (4.152) принимает вид

$$U_c = -\frac{K_1}{12}(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2 m_y^2 - \\ - 12\sqrt{2}\, m_x^2 m_y m_z + 4\sqrt{2}\, m_x^3 m_z). \tag{4.153}$$

Проекции осей типа [111] на плоскость $Ox'y'$ (плоскость $ACBEO$ на рис. 3.14) приходятся на азимутальные углы: 30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°. При этом положительному направлению оси Oz' соответствуют углы 90°, 210°, 330°.

4.3.9. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [111]

Зависимость нормированной плотности энергии от азимутального угла иллюстрируется рис. 4.9. Сплошная линия соответствует $m_z > 0$, пунктирная — $m_z < 0$.

Из рисунка видно, что при $m_z > 0$ минимумы плотности энергии приходятся на углы 90°, 210°, 330°, а при $m_z < 0$ — на углы 30°, 150°, 270°, что соответствует ориентациям проекций осей типа [111] на плоскость Oxy с учетом направления оси Oz (то есть продолжений этих осей в верхнем и нижнем полупространствах относительно плоскости Oxy).

Рисунок построен при положительном знаке константы анизотропии, когда оси [111] являются легкими. Изменение знака константы на противоположный приводит к замене максимумов обеих кривых соответствующими минимумами и обратно, то есть к повороту исходных кривых на 60°. То есть можно считать, что диаграмма является антисимметричной относительно плоскости, перпендикулярной к полярной оси.

Рис. 4.9. Азимутальная диаграмма плотности энергии магнитной анизотропии для ориентации [111]. Полярный угол $\theta = 60°$. Сплошная линия — $m_z > 0$, пунктирная — $m_z < 0$

4.3.10. Плотность энергии при некоторых других углах поворота относительно оси [111]

Полученное выражение (4.153) соответствует $\varepsilon = 0$, то есть не является единственно возможным. В качестве примера приведем некоторые выражения, соответствующие плотности энергии кубической анизотропии при других углах поворота ячейки относительно оси типа [111]. Вот эти выражения:

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}\big(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2m_y^2 - \\ - 12\sqrt{2}\,m_xm_y^2m_z + 4\sqrt{2}\,m_x^3m_z\big), \quad (4.154)$$

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}\big(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2m_y^2 - \\ - 12\sqrt{2}\,m_x^2m_ym_z + 4\sqrt{2}\,m_y^3m_z\big), \quad (4.155)$$

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}\big(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2m_y^2 + \\ + 12\sqrt{2}\,m_xm_y^2m_z - 4\sqrt{2}\,m_x^3m_z\big), \quad (4.156)$$

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}\big(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2m_y^2 + \\ + 12\sqrt{2}\,m_x^2m_ym_z - 4\sqrt{2}\,m_y^3m_z\big), \quad (4.157)$$

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}\big(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2m_y^2 - \\ - 12\sqrt{2}\,m_xm_y^2m_z + 4\sqrt{2}\,m_x^3m_z\big). \quad (4.158)$$

Эти выражения соответствуют последовательному повороту кубической ячейки от начального положения, соответствующего $\varepsilon = 0$ на углы отвечающие расположению проекций осей типа [111] на плоскость пленки. Выражение (4.154) соответствует $\varepsilon = 0$ и совпадает с (4.153), выражение (4.155) — соответствует $\varepsilon = 30°$, (4.156) — $\varepsilon = 60°$, (4.157) — $\varepsilon = 90°$, (4.158) — $\varepsilon = 120°$. Можно видеть, что выражение (4.158) совпадает с (4.154), как это и должно быть, так как при этом ячейка находится в положении полностью эквивалентном начальному.

Структура всех приведенных выражений практически одинакова, различие состоит лишь в знаках и в перестановке индексов x и y в последнем слагаемом. Столь малое различие определяется высокой степенью симметрии кубической ячейки относительно оси [111]. Однако при отступлении от углов, кратных 30°, выражение для плотности энергии усложняется. В качестве примера приведем плотность энергии для положения, отличающегося от кратного 30° на угол, равный половине от этой кратности, то есть при $\varepsilon = 45°$:

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}\big(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2m_y^2 - 4m_x^3m_z + \\ + 12m_x^2m_ym_z + 12m_xm_y^2m_z - 4m_y^3m_z\big). \quad (4.159)$$

Можно видеть, что здесь структура первых четырех слагаемых сохраняется, однако остальные изменяются в довольно значительной степени. При еще большем отклонении от кратности 30° структура выражения для плотности энергии кубической анизотропии еще более усложняется, так что в этих случаях следует пользоваться полной матрицей поворота вида (4.140).

4.4. Плотности энергии, эффективные поля и их производные по времени для кубической магнитной анизотропии при различных ориентациях кубической ячейки

Ввиду важности для дальнейшего изложения, приведем сводку основных выражений, касающихся кубической анизотропии. В качестве таковых выберем плотность энергии, эффективные поля, а также производные от эффективных полей по времени. Потребность в подобных выражениях возникает например при решении задачи о возбуждении мощного гиперзвука [130,131,264–266,297], в задачах, касающихся переориентации намагниченности [297–301], прецессии положения равновесия намагниченности [302–332] и в ряде других.

Для эффективного поля будем пользоваться его традиционным определением [4,7,8]

$$H_i = -\frac{\partial U_c}{\partial M_i} = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U_c}{\partial m_i}, \quad (4.160)$$

где U_c — плотность энергии анизотропии.

4.4.1. Ориентация [001] (ребро куба)

Плотность энергии:

$$U_c(001) = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \tag{4.161}$$

Эффективные поля:

$$H_{cx} = \frac{2K_1}{M_0} m_x (m_y^2 + m_z^2); \tag{4.162}$$

$$H_{cy} = \frac{2K_1}{M_0} m_y (m_z^2 + m_x^2); \tag{4.163}$$

$$H_{cz} = \frac{2K_1}{M_0} m_z (m_x^2 + m_y^2). \tag{4.164}$$

Производные от эффективных полей по времени:

$$\frac{\partial H_{cx}}{\partial t} = \frac{2K_1}{M_0} \left\{ (m_y^2 + m_z^2) \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2m_x m_y \frac{\partial m_y}{\partial t} + 2m_x m_z \frac{\partial m_z}{\partial t} \right\}; \tag{4.165}$$

$$\frac{\partial H_{cy}}{\partial t} = \frac{2K_1}{M_0} \left\{ 2m_y m_x \frac{\partial m_x}{\partial t} + (m_z^2 + m_x^2) \frac{\partial m_y}{\partial t} + 2m_y m_z \frac{\partial m_z}{\partial t} \right\}; \tag{4.166}$$

$$\frac{\partial H_{cz}}{\partial t} = \frac{2K_1}{M_0} \left\{ 2m_z m_x \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2m_z m_y \frac{\partial m_y}{\partial t} + (m_x^2 + m_y^2) \frac{\partial m_z}{\partial t} \right\}. \tag{4.167}$$

4.4.2. Ориентация [011] (диагональ грани куба)

Плотность энергии:

$$U_c(011) = -\frac{K_1}{4}(m_y^4 + m_z^4 + 4m_x^2 m_y^2 + 4m_x^2 m_z^2 - 2m_y^2 m_z^2). \tag{4.168}$$

Эффективные поля:

$$H_{cx} = \frac{K_1}{M_0} m_x (m_y^2 + m_z^2); \tag{4.169}$$

$$H_{cy} = \frac{K_1}{M_0} m_y (2m_x^2 + m_y^2 - m_z^2); \tag{4.170}$$

$$H_{cz} = \frac{K_1}{M_0} m_z (2m_x^2 - m_y^2 + m_z^2). \tag{4.171}$$

Производные от эффективных полей по времени:

$$\frac{\partial H_{cx}}{\partial t} = \frac{K_1}{M_0} \left\{ (m_y^2 + m_z^2) \frac{\partial m_x}{\partial t} + 2m_x m_y \frac{\partial m_y}{\partial t} + 2m_x m_z \frac{\partial m_z}{\partial t} \right\}; \tag{4.172}$$

$$\frac{\partial H_{cy}}{\partial t} = \frac{K_1}{M_0} \left\{ 4m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + (2m_x^2 + 3m_y^2 - m_z^2) \frac{\partial m_y}{\partial t} - 2m_y m_z \frac{\partial m_z}{\partial t} \right\}; \tag{4.173}$$

$$\frac{\partial H_{cz}}{\partial t} = \frac{K_1}{M_0} \left\{ 4m_x m_z \frac{\partial m_x}{\partial t} - 2m_y m_z \frac{\partial m_y}{\partial t} + (2m_x^2 - m_y^2 + 3m_z^2) \frac{\partial m_z}{\partial t} \right\}. \tag{4.174}$$

4.4.3. Ориентация [111] (пространственная диагональ куба)

Плотность энергии ($\varepsilon = 30°$):

$$U_c(111) = -\frac{K_1}{12}(3m_x^4 + 3m_y^4 + 4m_z^4 + 6m_x^2 m_y^2 - \\ - 12\sqrt{2}\, m_x^2 m_y m_z + 4\sqrt{2}\, m_y^3 m_z). \quad (4.175)$$

Эффективные поля:

$$H_{cx} = \frac{K_1}{M_0}(m_x^3 + m_x m_y^2 - 2\sqrt{2}\, m_x m_y m_z); \quad (4.176)$$

$$H_{cy} = \frac{K_1}{M_0}(m_y^3 + m_x^2 m_y - \sqrt{2}\, m_x^2 m_z + \sqrt{2}\, m_y^2 m_z); \quad (4.177)$$

$$H_{cz} = \frac{K_1}{M_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} m_y^3 + \frac{4}{3} m_z^3 - \sqrt{2}\, m_x^2 m_y\right). \quad (4.178)$$

Производные от эффективных полей по времени:

$$\frac{\partial H_{cx}}{\partial t} = \frac{K_1}{M_0}\Bigg\{(3m_x^2 + m_y^2 - 2\sqrt{2}\, m_y m_z)\frac{\partial m_x}{\partial t} + \\ + 2m_x(m_y - \sqrt{2}\, m_z)\frac{\partial m_y}{\partial t} - 2\sqrt{2}\, m_x m_y \frac{\partial m_z}{\partial t}\Bigg\}; \quad (4.179)$$

$$\frac{\partial H_{cy}}{\partial t} = \frac{K_1}{M_0}\Bigg\{2m_x(m_y - \sqrt{2}\, m_z)\frac{\partial m_x}{\partial t} + \\ + (m_x^2 + 3m_y^2 + 2\sqrt{2}\, m_y m_z)\frac{\partial m_y}{\partial t} - \sqrt{2}\,(m_x^2 - m_y^2)\frac{\partial m_z}{\partial t}\Bigg\}; \quad (4.180)$$

$$\frac{\partial H_{cz}}{\partial t} = \frac{K_1}{M_0}\Bigg\{ - 2\sqrt{2}\, m_x m_y \frac{\partial m_x}{\partial t} - \\ - \sqrt{2}\,(m_x^2 - m_y^2)\frac{\partial m_y}{\partial t} + 4m_z^2 \frac{\partial m_z}{\partial t}\Bigg\}. \quad (4.181)$$

4.5. Физический смысл различных видов выражений для плотности энергии магнитной анизотропии

В заключение настоящей главы приведем некоторые замечания, касающиеся физического смысла полученных выражений для энергии анизотропии. Рассмотрим различные виды анизотропии по отдельности.

4.5.1. Анизотропия одноосная

В разделе 4.2.1 на основе применения операций симметрии получено выражение для плотности энергии одноосной анизотропии (4.45) с осью вдоль Oz, с точностью до обозначений, имеющее вид

$$U_a^{(1)} = K(m_x^2 + m_y^2). \quad (4.182)$$

В то же время, исходя из условия сохранения длины вектора намагниченности (4.44)

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \tag{4.183}$$

можно записать (4.182) в виде

$$U_a^{(2)} = -Km_z^2. \tag{4.184}$$

Можно видеть, что эти два выражения отличаются лишь на постоянное слагаемое, так что

$$U_a^{(1)} = K + U_a^{(2)}. \tag{4.185}$$

При этом, поскольку в общем случае уравнение движения определяется производной от плотности энергии по обобщенной координате [295], то в процессе дифференцирования $U_a^{(1)}$ и $U_a^{(2)}$ по компонентам намагниченности постоянное слагаемое в любом случае пропадает. Поэтому, с точки зрения потенциала, выражения (4.182) и (4.184) можно считать эквивалентными.

Однако не так получается, когда мы хотим найти производные от этого потенциала. Так, вычисление эффективных полей по формуле [7, 8]

$$\mathbf{H}_e = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{m}}, \tag{4.186}$$

с учетом обозначения «поля анизотропии» [7, 8]

$$H_a = \frac{2K}{M_0}, \tag{4.187}$$

для плотности энергии вида (4.182) приводит к выражениям:

$$H_{ax}^{(1)} = -H_a m_x; \tag{4.188}$$

$$H_{ay}^{(1)} = -H_a m_y; \tag{4.189}$$

$$H_{az}^{(1)} = 0. \tag{4.190}$$

В то же время, из (4.184) получаем:

$$H_{ax}^{(2)} = 0; \tag{4.191}$$

$$H_{ay}^{(2)} = 0; \tag{4.192}$$

$$H_{az}^{(2)} = H_a m_z. \tag{4.193}$$

Очевидно, группы выражений (4.188)–(4.190) и (4.191)–(4.193) не являются эквивалентными.

При этом с качественной стороны, исходя из (4.188)–(4.190), можно видеть, что при отклонении вектора намагниченности $\mathbf{m}$ от оси Oz поля, возникающие вдоль осей Ox и Oy, стремятся вернуть вектор намагниченности к оси Oz тем сильнее, чем отклонение больше.

Исходя же из (4.191)–(4.193), видно, что при подобном отклонении $\mathbf{m}$ от оси Oz, то есть при уменьшении m_z, поле, при этом возникающее, хотя тоже стремится вернуть $\mathbf{m}$ к оси Oz, но по мере увеличения отклонения (то есть уменьшения m_z) в свою очередь уменьшается.

Поэтому можно полагать, что выражение плотности энергии в виде (4.182) более соответствует физическому смыслу задачи, состоящей в описании одноосной анизотропии с положительной константой, то есть анизотропии типа «легкая ось».

Если константа анизотропии отрицательная $K < 0$, то положение обратное. Поля (4.188)–(4.190) при отклонении намагниченности от оси Oz стремятся притянуть намагниченность к осям Ox и Oy, однако сила такого притяжения по мере увеличения отклонения слабеет (так как эта сила пропорциональна косинусу угла между полем и намагниченностью). В то же время, поле (4.193) стремится оттолкнуть намагниченность от оси Oz, то есть положить ее в плоскость Oxy, тем сильнее, чем намагниченность больше отклонена от этой плоскости. Так что, по мере отхода от плоскости Oxy воздействие полей анизотропии (4.188)–(4.190) на намагниченность слабеет, а полей (4.191)–(4.193) увеличивается.

Таким образом, можно полагать, что в случае отрицательной константы анизотропии, то есть при описании анизотропии типа «легкая плоскость», физическому смыслу более соответствует выражение плотности энергии в виде (4.184).

Эквивалентность двух выражений для плотности энергии. Несмотря на различие эффективных полей, исходные выражения для плотности энергии вида (4.182) и (4.184), все же с точки зрения потенциала являются эквивалентными. Поясним это на упрощенном примере плотности энергии, зависящей лишь от двух компонент намагниченности m_x и m_z. То есть будем считать:

$$U_a^{(1)} = Km_x^2; \tag{4.194}$$

$$U_a^{(2)} = -Km_z^2. \tag{4.195}$$

Рассмотрим сначала (4.194). Дифференцируя по m_x получаем

$$\frac{\partial U_a^{(1)}}{\partial m_x} = 2Km_x. \tag{4.196}$$

Второе дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2 U_a^{(1)}}{\partial m_x^2} = 2K. \tag{4.197}$$

Равенство нулю выражения (4.196) дает значение $m_x = 0$, при котором $U_a^{(1)}$ имеет экстремум. При $K > 0$ из (4.197) получаем, что этот экстремум является минимумом. То есть при выборе выражения для энергии вида $U_a^{(1)}$ (4.194), равновесным положением намагниченности является выстраивание ее вектора вдоль оси Oz.

Проводя аналогичные действия с (4.195), получаем

$$\frac{\partial U_a^{(2)}}{\partial m_z} = -2Km_z. \tag{4.198}$$

Второе дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2 U_a^{(2)}}{\partial m_z^2} = -2K. \tag{4.199}$$

При $K > 0$ вторая производная (4.199) отрицательна, то есть условие $m_z = 0$, получаемое из (4.198), соответствует максимуму энергии, так что равновесным положением является выстраивание намагниченности перпендикулярно оси Oz, то есть, опять-таки вдоль оси Ox.

Таким образом, возвращаясь к трехмерному случаю, можно полагать, что оба выражения (4.194) и (4.195), несмотря на различие внешнего вида, при $K > 0$ приводят к одному и тому же условию — равновесию намагниченности при ее ориентации вдоль оси Ox.

4.5.2. Анизотропия формы (размагничивания)

В случае ограниченных размеров исследуемого образца наряду с магнитной анизотропией, определяемой кристаллической структурой составляющего образец материала, важное значение имеет также анизотропия формы образца в целом.

Энергия анизотропии формы, называемая также энергией размагничивания, в общем случае имеет вид (2.5):

$$U_p = -\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{H}_m, \tag{4.200}$$

где $\mathbf{H}_m$ — поле размагничивания. В общем случае поле $\mathbf{H}_m$ является неоднородным, то есть зависит от координат точки наблюдения внутри тела.

Однако его однородность сохраняется в том случае, если образец имеет форму эллипсоида, частными случаями которого являются сфера, тонкий цилиндр или тонкая пленка. В этих случаях размагничивающее поле принимает вид [4, 6–8]

$$\mathbf{H}_m = -\overleftrightarrow{N}\mathbf{M} = -M_0\overleftrightarrow{N}\mathbf{m}, \tag{4.201}$$

где $\mathbf{m}$ — нормированный вектор намагниченности, а $\overleftrightarrow{N}$ — тензор размагничивающих факторов эллипсоида:

$$\overleftrightarrow{N} = \left(\begin{array}{c|c|c} N_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & N_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & N_z \end{array}\right). \tag{4.202}$$

В случае тонкой пленки, ориентированной перпендикулярно оси Ox, тензор размагничивающих факторов имеет вид

$$\overleftrightarrow{N} = \left(\begin{array}{c|c|c} 4\pi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{4.203}$$

Подставляя (4.203) в (4.201), выполняя умножение и подставляя полученное выражение в (4.200), получаем плотность энергии размагничивания в виде:

$$U_m^{(1)} = 2\pi M_0^2 m_x^2. \tag{4.204}$$

С учетом условия сохранения длины вектора намагниченности

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \tag{4.205}$$

это выражение с точностью до постоянного слагаемого можно записать в виде:

$$U_m^{(2)} = -2\pi M_0^2 (m_y^2 + m_z^2). \tag{4.206}$$

Можно видеть, что (4.204) и (4.206) по форме совпадают с (4.184) и (4.182) соответственно. Таким образом, в плотности энергии размагничивания коэффициент $-2\pi M_0^2$ играет ту же роль, что и в плотности энергии анизотропии константа одноосной анизотропии K. Однако, в отличие от плотности энергии анизотропии здесь знак этого коэффициента отрицательный, то есть выражения (4.204) и (4.206) описывают анизотропию типа «легкая плоскость». При этом равновесному положению намагниченности соответствует выстраивание именно в этой плоскости.

Руководствуясь примерно теми же соображениями, что и при выборе между формулами (4.182) и (4.184), можно заключить, что физическому смыслу лучше соответствует формула (4.204), которая и будет, в основном, использоваться далее.

4.5.3. Анизотропия внешнего поля

Внешнее поле имеет некоторое направление, поэтому можно условно говорить о его «анизотропии», которая проявляется в анизотропной зависимости плотности энергии взаимодействия поля с намагниченностью при различной ориентации последней.

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем U_h, согласно (2.4), имеет вид

$$U_h = -\mathbf{MH}. \tag{4.207}$$

Записывая намагниченность и внешнее поле по компонентам, получаем:

$$U_h = -M_0 H_0 (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z). \tag{4.208}$$

Здесь все компоненты намагниченности входят только в первой степени, поэтом условие сохранения длины вектора намагниченности к упрощению выражения не приводит, а эффективные поля, получаемые путем дифференцировании по компонентам намагниченности, получаются просто равными компонентам внешнего поля H_0 и $h_{x,y,z}$.

4.5.4. Анизотропия кубическая

В разделе 4.3.3 для плотности энергии кубической анизотропии с ориентацией ячейки типа [001] получены два выражения (4.120)

и (4.121), при $K_2 = 0$ принимающие вид:

$$U_c^{(1)} = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2), \tag{4.209}$$

$$U_c^{(2)} = \frac{K_1}{2}(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4), \tag{4.210}$$

эквивалентные с точностью до постоянного слагаемого.

В реально существующих магнитных материалах, обладающих кубической симметрией, наиболее распространены два вида ориентации осей легкого намагничивания: вдоль пространственных диагоналей и вдоль ребер кубической ячейки. Первый вид при комнатной температуре имеет место в железоиттриевом гранате [7, 8], из металлов — в никеле и кобальте [4]. При этом константа анизотропии является положительной ($K_1 > 0$). Второй вид ориентации осей при комнатной температуре наблюдается в железе [4], где константа анизотропии в принятой здесь трактовке инверсии знаков (см.раздел 4.3.3) является отрицательной ($K_1 < 0$).

При изменении температуры константа анизотропии может менять знак, как это имеет место, например, в никеле, где ниже 100 °C эта константа отрицательна, а выше 200 °C — положительна [4] (в работе [4] температурный интервал охарактеризован только его границами, так как внутри него анизотропия изменяется с температурой крайне медленно). Особенно сильно константа анизотропии может меняться в сплавах при изменении процентного состава по компонентам. Например в пермаллое (сплаве железа с никелем) при содержании никеля равном 70 % константа анизотропии, будучи положительной, составляет 9000 эрг см$^{-3}$, а при содержании 80 % — становится отрицательной равной -3000 эрг см$^{-3}$ [4]. Значительную роль в характере анизотропии кубических магнетиков может играть взаимное соотношение между первой K_1 и второй K_2 константами кубической анизотропии (в соответствии с (4.120) или (4.121)). Так, согласно [134], при $K_1 < 0$ легкими осями являются ребра куба (оси типа [100]), при любом значении K_2, тогда как при $K_1 > 0$ для реализации легких осей типа [111] требуется выполнение неравенства $K_1 > K_2/3$, где константа K_2 предполагается положительной. Однако в большинстве реальных магнетиков вторая константа по абсолютной величине значительно меньше первой, так что приведенное неравенство не является особенно критичным. Так например для ЖИГ при комнатной температуре K_1 составляет около 6000 эрг см$^{-3}$, а K_2 — около 300 эрг см$^{-3}$. При гелиевых температурах те же величины приближаются к 25 000 эрг см$^{-3}$ и 10 000 эрг см$^{-3}$, так что соотношение $K_1 > K_2/3$ всегда заведомо выполняется (приведенные цифры взяты из обзорной монографии [8, стр. 62, рис. 2.12], где рисунок дан без ссылки на первичный источник).

Возвращаясь к формулам (4.209) и (4.210), отметим, что в данном случае из расчета эффективных полей, по-видимому, сил, действующих на вектор намагниченности, не получается столь четкой картины, как для одноосной анизотропии. То есть не удается отдать предпочтение

той или другой из этих формул для описания ориентации ОЛН относительно осей типа [100] или [111]. Как отмечалось ранее в разделе 4.3.1 относительно трактовки формул (4.120) и (4.121), в литературе наравне используются оба выражения типа (4.209) и (4.210), поэтому и в настоящей монографии авторы не отдают предпочтения тому или другому, а следуя собственной излюбленной традиции, используют вид (4.209). Однако в любом случае, при использовании формул (4.209) или (4.210) следует не просто полагаться на получаемые математические формулы, а непременно подробно анализировать физический смысл получаемого решения.

4.6. Некоторые другие виды анизотропии

В разделе 3.1.4 отмечалось многообразие различных видов анизотропии. Приведем здесь некоторые примеры, касающиеся более сложных видов анизотропии, чем рассмотренные выше простая одноосная и кубическая.

4.6.1. Анизотропия высоких порядков

Прежде всего отметим, что одноосная анизотропия, кроме второго может иметь более высокие порядки разложения по намагниченности (подобно (4.56)). То есть при ориентации оси анизотропии, например вдоль координатной оси Ox, имеет место разложение (здесь и далее обозначения констант K_i, соответствующие различным номерам «i» — условные)

$$U_a = K_1 m_x^2 + K_2 m_x^4 + K_3 m_x^6 + \ldots + K_n m^{2n} + \ldots . \tag{4.211}$$

Оси одноосной анизотропии различных порядков могут быть ориентированы в различных направлениях. Так, например, в работе [333] сообщается о существовании в некоторых пленках железоиттриевого граната одноосной анизотропии второго порядка, имеющей ось, перпендикулярной плоскости пленки, которая сопровождается одноосной анизотропией четвертого порядка, ось которой лежит в плоскости пленки.

Следует заметить однако, что константы одноосной анизотропии высоких порядков, как правило, значительно меньше первой константы второго порядка, причем такое уменьшение проявляется тем сильнее, чем порядок анизотропии выше.

Как и в случае одноосной анизотропии, в разложении потенциала по компонентам намагниченности (4.33) для кубической анизотропии можно учесть более высокие порядки. Так, учет шестого порядка, в результате применения операций симметрии, приводит, с точностью до знака, к выражению, подобному (4.116):

$$U_c = K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2, \tag{4.212}$$

где учтено, что знак константы K_2 должен быть положительным, как и для константы K_1 в формулах (4.120) и (4.121). При этом

анизотропия как бы «отталкивает» вектор намагниченности от ребер кубической ячейки, совпадающих с осями декартовой системы координат, то есть действует в том же направлении, что и анизотропия четвертого порядка.

При этом полное выражение для плотности энергии в разложении до шестого порядка имеет вид (4.120) и (с точностью до знака) приведено в [259, стр. 160, форм. (4.7)]:

$$U_c = -K_1(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2) - K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2. \tag{4.213}$$

В [7, стр. 90, форм. (2.2.24′)] (также с точностью до знака) используется другой вид (4.121), эквивалентный первому:

$$U_c = \frac{K_1}{2}(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4) - K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2. \tag{4.214}$$

Аналогично из выражения (4.33) могут быть получены выражения для кубической анизотропии более высоких порядков. Для этого следует использовать те же операции симметрии, что и при выводе выражений (4.212)–(4.214). Так, выражение для плотности энергии кубической анизотропии восьмого порядка в системе координат, оси которой ориентированы вдоль ребер куба, имеет вид:

$$U_c = K_3(m_x^4 m_y^4 + m_y^4 m_z^4 + m_z^4 m_x^4), \tag{4.215}$$

а подобное выражение для десятого порядка имеет вид

$$U_c = K_4(m_x^4 m_y^4 m_z^2 + m_y^4 m_z^4 m_x^2 + m_z^4 m_x^4 m_y^2). \tag{4.216}$$

Подобным же образом могут быть получены выражения еще более высоких порядков. Следует заметить однако, что для кубической анизотропии, так же как и для одноосной, в большинстве реальных материалов величины констант более высоких порядков, как правило, убывают тем скорее, чем порядок выше. Так для железоиттриевого граната константа K_2 при комнатной температуре составляет менее одной десятой части от константы K_1 [8, стр. 62, рис. 2.12]. Таким образом, в большинстве практических случаев в разложениях (4.213) или (4.214) вполне можно ограничиться только первым слагаемым.

4.6.2. Ромбическая анизотропия

Кроме одноосной и кубической во многих реальных материалах встречаются другие виды магнитной анизотропии. Так, в широко исследовавшихся в качестве среды для устройств памяти на ЦМД пленках смешанных ферритов-гранатов была отмечена кроме одноосной еще и ромбическая анизотропия [40, стр. 25], а также [276]. Применение к членам второго порядка разложения (4.33) операций ромбической симметрии (отражению во всех трех координатных плоскостях) приводит к выражению вида

$$U_r = K_1 m_x^2 + K_2 m_y^2 + K_1 m_z^2, \tag{4.217}$$

откуда, учитывая сохранение длины вектора намагниченности

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \tag{4.218}$$

с точностью до перенормировки констант и постоянного слагаемого, получаем

$$U_r = K_1 m_x^2 + K_2 m_y^2, \tag{4.219}$$

То есть для описания ромбической анизотропии даже самого низшего (второго) порядка необходимы две константы анизотропии.

4.6.3. Наклонная одноосная анизотропия

Особое место занимает наблюдаемая в тех же пленках смешанных ферритов-гранатов одноосная «наведенная» анизотропия, ось которой — отклонена от нормали к плоскости пленки. Более подробно такая анизотропия обсуждается далее в главе 7. Здесь же отметим лишь наиболее простой вид плотности энергии такой анизотропии и сравним его с плотностью энергии ромбической анизотропии.

Выполним рассмотрение в геометрии, представленной на рис. 4.5. Будем исходить из вида плотности энергии одноосной анизотропии (4.57)

$$U_a = K(m_{x'}^2 + m_{y'}^2), \tag{4.220}$$

где $m_{x',y'}$ — компоненты нормированного вектора в повернутой системе координат $Ox'y'z'$.

Для простоты будем полагать, что отклонение оси анизотропии от нормали имеет место в плоскости Oxz. При этом, в соответствии с рис. 4.5, полагаем $\varepsilon = 0$ и $\varphi_a = 0$, так что матрица перехода (4.61) принимает вид

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline \cos\theta_a & 0 & -\sin\theta_a \\ \hline \sin\theta_a & 0 & \cos\theta_a \end{array}\right). \tag{4.221}$$

Требуемое преобразование определяется формулой типа (4.58)

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{m}. \tag{4.222}$$

Запишем (4.222) в развернутом виде:

$$\left(\begin{array}{c} m_{x'} \\ \hline m'_y \\ \hline m'_z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 0 \\ \hline \cos\theta_a & 0 & -\sin\theta_a \\ \hline \sin\theta_a & 0 & \cos\theta_a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} m_x \\ \hline m_y \\ \hline m_z \end{array}\right). \tag{4.223}$$

Выполняя умножение, получаем:

$$m_{x'} = -m_y; \tag{4.224}$$

$$m_{y'} = m_x \cos\theta_a - m_z \sin\theta_a; \tag{4.225}$$

$$m_{z'} = m_x \sin\theta_a + m_z \cos\theta_a. \tag{4.226}$$

Подставляя (4.224)–(4.226) в (4.220), получаем:

$$U_a = m_x^2 \cos^2\theta_a + m_y^2 + m_z^2 \sin^2\theta_a - 2m_x m_z \sin\theta_a \cos\theta_a. \qquad (4.227)$$

Исключим из этого выражения m_z с помощью соотношения (4.218), которое запишем в виде:

$$m_z = \sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}\,. \qquad (4.228)$$

Подставляя это выражение в (4.227) и приводя подобные члены, получаем:

$$U_a = \sin^2\theta_a + m_x^2(\cos^2\theta_a - \sin^2\theta_a) + m_y^2\cos^2\theta_a - \\ - 2m_x\sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}\,\sin\theta_a\cos\theta_a. \qquad (4.229)$$

Введем обозначения:

$$K_1 = \cos^2\theta_a - \sin^2\theta_a; \qquad (4.230)$$

$$K_2 = \cos^2\theta_a. \qquad (4.231)$$

Подставляя эти обозначения в (4.229) и опуская не важное для потенциальной энергии постоянное слагаемое, получаем:

$$U_a = K_1 m_x^2 + K_2 m_y^2 - 2\sqrt{K_2(K_2 - K_1)}\,m_x\sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2}\,. \qquad (4.232)$$

Это — с точностью до обозначений констант, выражение для плотности энергии одноосной анизотропии, записанное в системе $Oxyz$ при условии, что ось анизотропии, находясь в плоскости Oxz, отклонена от оси Oz на угол θ_a. В отличие от выражения для одноосной анизотропии типа (4.220), здесь требуются две константы K_1 и K_2, вместо одной K в (2.220). Две константы требуются потому, что кроме величины анизотропии здесь задается также ориентация ее оси. Если положить угол θ_a равным нулю, то из (4.230)–(4.231) можно видеть, что константы между собой сравниваются, корень в последнем слагаемом выражения (4.232) обращается в нуль, так что выражение (4.232) приобретает вид, подобный (4.220) с единственной константой перед суммой квадратов поперечных компонент намагниченности.

Интересно еще сравнить наклонную одноосную анизотропию с ромбической. Так, из сравнения выражений (4.232) и (4.219) можно видеть, что одноосная анизотропия отличается от ромбической дополнительным слагаемым, последним в выражении (4.232). То есть при произвольном значении угла θ_a полное соответствие между этими двумя видами анизотропии места не имеет.

Замечание. Следует отметить, что в известной авторам настоящей монографии литературе, существенное различение между эффектами проявления ромбической и наклонной одноосной анизотропии выявлено недостаточно полно. Довольно подробное рассмотрение этого вопроса приведено в работе [276], однако углы отклонения оси анизо-

тропии от нормали к плоскости пленки выбраны довольно малыми, не превышающими нескольких градусов. В то же время, в работах [22–25, 30, 240, 275, 277, 278] показано, что эти углы могут составлять до десятка градусов и более, причем определяются усилением угла отклонения оси [111] подложки от нормали к своей поверхности.

Сложность различения двух видов анизотропии, по-видимому, обусловлена тем, что та и другая анизотропия, при определении поля анизотропии методом зарождения доменов, приводит к азимутальным зависимостям весьма похожего вида.

В рассмотрении, проводимым далее в настоящей монографии (глава 7), выполнен учет только наклонной одноосной анизотропии, что дало интерпретацию экспериментальных результатов по ферромагнитному резонансу с довольно высокой точностью (не хуже 10 %), так что учет ромбической анизотропии, по-видимому, не требовался. Тем не менее, вопрос о роли обоих видов анизотропии в формировании как поля зарождения доменов, так и частоты ферромагнитного резонанса, по мнению авторов, представляет определенный интерес, то есть остается открытым для будущих исследований.

Выводы по главе 4

В настоящей главе описанный математический аппарат матриц перехода применен для вычисления плотности энергии магнитной анизотропии одноосного и кубического характера.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены различные операции симметрии, необходимые для вычисления плотности энергии анизотропии в различных кристаллических структурах. В качестве основных операций приведено отражение в координатных плоскостях и поворот на определенные углы вокруг координатных осей. Приведены матрицы преобразований вектора намагниченности при таких операциях. Получены матрицы поворота на характерные углы, соответствующие одноосной, кубической, тригональной и гексагональной симметрии.

2. Рассмотрена плотность энергии магнитной анизотропии в наиболее общем виде как ряд по степеням нормированных компонент намагниченности. Выделены члены ряда, соответствующие одноосной и кубической анизотропии. На основе требования сохранения плотности энергии при изменении знака проекции вектора намагниченности на ось анизотропии, а также при повороте нормальной к оси анизотропии составляющей вектора намагниченности на произвольный угол вокруг этой оси, получено общее выражение для плотности энергии одноосной анизотропии. Приведены два эквивалентные друг другу вида записи плотности энергии, переходящие один в другой при учете сохранения длины вектора намагниченности. Получены те же виды записи в сферической системе координат. Рассмотрены виды анизотропии

типа «легкая ось» и «легкая плоскость», продемонстрирован переход их одного в другой при изменении знака константы анизотропии. Отмечены особенности одноосной анизотропии более высоких порядков. Получено выражение для плотности энергии одноосной анизотропии с произвольным направлением оси относительно декартовой системы координат. Приведены матрицы перехода, соответствующие повороту вектора намагниченности на произвольные полярный и азимутальный углы сферической системы координат, а также на произвольный угол вокруг оси анизотропии. Получены эффективные поля, соответствующие приведенным ориентациям. Построена азимутальная диаграмма плотности энергии одноосной магнитной анизотропии, отражающая поворот вектора намагниченности вокруг оси анизотропии при заданном значении полярного угла. Выявлен однолепестковый характер диаграммы, соответствующий отклонению оси анизотропии от полярной оси сферической системы координат.

3. Рассмотрена плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [001]. На основе общего определения плотности энергии магнитной анизотропии в виде разложения в ряд по степеням нормированных компонент намагниченности, выделены члены ряда, соответствующие одноосной и кубической анизотропии. Исходя из требования сохранения плотности энергии при изменении знака проекции вектора намагниченности на любую из осей, совпадающих с ребрами кубической ячейки, а также при повороте на 90° вокруг любой из тех же осей, получено общее выражение для плотности энергии кубической анизотропии с точностью до членов четвертого порядка по намагниченности. Приведены два эквивалентных друг другу вида плотности энергии, которые при учете сохранения длины вектора намагниченности переходят один в другой с точностью до постоянного слагаемого. Введено определение поля кубической анизотропии и рассмотрены особенности такой анизотропии для железоиттриевого граната. Рассмотрена кубическая анизотропия высоких порядков, приведено выражение для плотности энергии шестого порядка по намагниченности и отмечена малость константы анизотропии шестого порядка по сравнению с константой четвертого порядка. Выполнен переход к сферической системе координат и получены два эквивалентных выражения для плотности энергии, содержащие полярный и азимутальный углы вектора намагниченности. Показано, что эти выражения отличаются на постоянную величину, то есть являются эквивалентными друг другу. Построена азимутальная диаграмма плотности энергии кубической магнитной анизотропии ориентации [001]. Выявлен ее четырехлепестковый характер, соответствующий проекциям осей типа [111] на плоскость, перпендикулярную к полярной оси сферической системы координат. Отмечен поворот диаграммы на 90° при изменении знака константы анизотропии.

4. Рассмотрена плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [011]. Получены матрицы перехода и выполнено преобра-

зование полученного ранее выражения плотности энергии в ориентации [001] к ориентации [011]. Записаны два эквивалентных друг другу выражения для плотности энергии для ориентации [011], полученные из соответствующих выражений для ориентации [001]. Построена азимутальная диаграмма плотности энергии кубической магнитной анизотропии в ориентации [011]. Выявлен ее двухлепестковый характер, соответствующий расположению двух осей типа [111] в плоскости, перпендикулярной к полярной оси сферической системы координат, и еще двух в плоскости, перпендикулярной первой. Отмечена симметричность диаграммы относительно плоскости, перпендикулярной к полярной оси, а также ее поворот на 90° при изменении знака константы анизотропии.

5. Рассмотрена плотность энергии кубической анизотропии для ориентации [111]. Получены матрицы перехода и выполнено преобразование полученного ранее выражения плотности энергии в ориентации [001] к ориентации [111]. Построена азимутальная диаграмма плотности энергии кубической магнитной анизотропии в ориентации [111]. Выявлен ее трехлепестковый характер, соответствующий расположению проекций осей типа [111] на плоскость, перпендикулярную к полярной оси сферической системы координат. Отмечена антисимметричность диаграммы относительно плоскости, перпендикулярной к полярной оси, а также ее поворот на 60° при изменении знака константы анизотропии. Приведены выражения для плотности энергии кубической анизотропии ориентации [111] с поворотом вокруг полярной оси на углы, кратные 30°. Отмечено сходство структуры полученных выражений, обусловленное симметрией кубической ячейки относительно осей типа [111].

6. Приведена общая сводка выражений для плотности энергии, эффективных полей и их производных по времени для ориентаций кубической ячейки следующего типа: [001] (ребро куба), [011] (диагональ грани куба), [111] (пространственная диагональ куба).

7. Рассмотрены особенности, физический смысл и эквивалентность допустимых видов записи плотности энергии для различных видов анизотропии: одноосной, кубической, анизотропии формы (размагничивания), а также анизотропного характера внешнего поля. Показана эквивалентность различных видов записи, а также их физическое различие. Приведены рекомендации для использования тех или иных видов записи в соответствии с физическим смыслом решаемых задач.

8. Рассмотрены некоторые специальные виды магнитной анизотропии: одноосная и кубическая высоких порядков, ромбическая и одноосная наклонная. Приведены выражения для плотности энергии перечисленных видов анизотропии. Показано, что как ромбическая, так и наклонная одноосная виды анизотропии требуют для своего описания двух констант. Выполнено сравнение ромбической и наклонной одноосной анизотропии, отмечено принципиальное различие между ними, обсуждены причины трудностей их раздельного определения в эксперименте.

Глава 5

ОРИЕНТАЦИОННЫЙ ПЕРЕХОД В МАГНИТНОЙ СРЕДЕ

Настоящая глава посвящена описанию ориентационных переходов в некоторых специфических условиях. Рассмотрены основные положения физики ориентационных переходов и их соотношения с физикой фазовых переходов. Подробно рассмотрена модель простого ориентационного перехода на основе минимизации плотности энергии, а также условия его «затягивания» и «размазывания» в более сложных случаях. Уделено внимание численным методам расчета ориентационных переходов — простого и динамического установления. Рассмотрены особенности ориентационных переходов в реальных материалах — пленках смешанных ферритов-гранатов с одноосной анизотропией, ось которой отклонена от нормали к плоскости пленки. Приведены результаты экспериментов по исследованию анизотропии в таких пленках.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать работам [4, 132–139, 258], остальные ссылки указаны в тексте.

5.1. Общая идеология ориентационного перехода

Как отмечено выше, основным предметом настоящей работы является исследование ферромагнитного резонанса и магнитостатических волн в условиях ориентационного перехода. Поэтому, учитывая терминологические замечания, приведенные в разделе 1.2.1, вкратце остановимся на понятии ориентационного перехода и рассмотрим его основные особенности.

Под ориентационным переходом будем понимать нестационарное состояние, в котором находится магнетик при переходе от одного стационарного состояния к другому, причем эти состояния отличаются равновесной ориентацией намагниченности внутри магнетика.

Стационарное состояние магнетика при заданной температуре определяется равновесием между тремя полями: полем анизотропии, полем размагничивания и полем, приложенном к магнетику извне. При этом вектор намагниченности в каждой точке магнетика находится в состоянии, определяемом минимумом потенциальной энергии в этой точке, а в отсутствие теплового движения покоится. Потенциальная энергия магнетика в пространстве может иметь несколько минимумов различной

глубины, разделенных между собой потенциальными барьерами той или иной высоты. То есть вектор намагниченности в каждой точке магнетика находится как бы в потенциальной яме, при отклонении от низшей точки которой возникает сила, возвращающая намагниченность в эту точку. Температурное движение представляет собой колебания намагниченности внутри такой ямы. При достаточно высокой температуре амплитуда колебаний может увеличиться настолько, что их энергия превысит потенциальный барьер на краю ямы. В результате такого превышения вектор намагниченности может перескочить из исходной ямы в соседнюю, где ориентация его, определяемая дном новой ямы, изменится. Если глубина новой ямы превышает глубину исходной, то вектор намагниченности может в ней остаться, то есть начнет колебаться вокруг нового стационарного состояния. Избыток кинетической энергии, приобретенной во время падения на дно более глубокой ямы, будет передан кристаллической решетке, за счет чего она слегка нагреется, но будучи открытой системой, быстро передаст этот избыток окружающему пространству (термостату). Таким образом, перескок вектора намагниченности из одной потенциальной ямы в другую будет происходить с изменением его ориентации (так как ориентации всех ям различны). Такое изменение ориентации намагниченности и представляет собой ориентационный переход.

Температура является не единственным фактором, могущим стимулировать ориентационный переход. Из трех упомянутых выше факторов: анизотропии, размагничивания и поля, наиболее легко поддается изменению внешнее магнитное поле. Так что даже при неизменной температуре, под влиянием поля конфигурация потенциальной ямы, в которой находится вектор намагниченности, может изменяться. В простейшем случае меняется взаимная глубина двух соседних ям вплоть до того, что одна из них превращается в поверхность перегиба, так что вектор намагниченности свободно скатывается с нее в соседнюю яму, осуществляя таким путем ориентационный переход.

Типичным примером такого перехода является намагничивание одноосного магнетика в направлении, перпендикулярном оси анизотропии. При этом в отсутствие поля вектор намагниченности ориентируется точно вдоль оси анизотропии (размагничивание пока не учитываем), а по мере увеличения поля постепенно отклоняется от этой оси, поворачиваясь к направлению поля. Переход заканчивается тогда, когда вектор намагниченности выстраивается точно вдоль поля, после чего дальнейшее увеличение поля его ориентации не меняет.

Если магнетик имеет несколько осей анизотропии, например кубической симметрии типа [111], как ЖИГ (или например, никель), то приложение поля вызывает поворот намагниченности в его направлении, причем, благодаря многоосности (то есть наличию нескольких пространственно разнесенных потенциальных ям), движение вектора намагниченности может быть довольно сложным и происходить по изогнутой линии. В конечном счете, вектор намагниченности

при достаточной величине поля все равно ориентируется вдоль его направления, отклоняясь в пределе на бесконечно малые углы.

Описанная картина ориентационного перехода предполагает, что ограниченный в пространстве образец магнетика в целом намагничен однородно, то есть направления вектора намагничивания во всех его точках одни и те же. Однако из-за размагничивания формы эти направления в различных точках образца, особенно вблизи поверхности и различных углов, могут меняться. При этом ориентационный переход в различных точках образца будет происходить по-разному, однако в конечном счете поле все-таки заставит намагниченность во всем образце выстроиться вдоль своего направления.

При достаточном размере образца намагниченность уже не может быть ориентирована во всем образце в одном направлении, так как при этом во внешнем пространстве возникает значительное внешнее поле, имеющее большую энергию. Стремление уменьшить эту энергию заставляет образец разбиваться на домены, причем в случае достаточно большой одноосной анизотропии направления векторов намагниченности в соседних доменах приобретают взаимно противоположные направления, так что распределение намагниченности становится неоднородным. Приложение внешнего поля вдоль оси анизотропии приводит к уничтожению доменов невыгодного знака, так что образец снова обретает однородное состояние. Каждое из таких состояний магнетика называется «фазой», так что в отсутствие поля магнетик находится в «неоднородной фазе» — с доменами, а при достаточном поле переходит в «однородную фазу» — без доменов. Такой переход от одной фазы к другой под действием поля представляет собой фазовый переход. Если в однородной фазе поле убрать, то магнетик не сразу перейдет в неоднородную фазу, так как для зарождения доменов требуется определенная энергия. Эта энергия требуется для преодоления обменного взаимодействия, заставляющего выстраиваться все спины магнетика в одном направлении. Для зарождения доменов надо часть спинов развернуть относительно оставшихся, то есть преодолеть определенный потенциальный барьер. Такое преодоление барьера обычно осуществляется за счет малых зародышей новой фазы, которые образуются за счет тепловых флуктуаций намагниченности в различных точках образца. Поскольку переход от однородной фазы к неоднородной происходит не сразу, а через посредство зародышей, то полное перемагничивание магнетика в прямом и обратном направлениях происходит с гистерезисом, то есть с определенной потерей энергии. Таким образом, переход от однородной фазы к неоднородной под действием поля, приложенного вдоль оси анизотропии, представляет собой фазовый переход первого рода.

Представим себе теперь, что намагничивание образца происходит полем, приложенным перпендикулярно оси анизотропии. При этом векторы намагниченности внутри каждого из доменов будут поворачиваться к полю в одинаковой степени, составляя с ним одинаковые углы. В этом случае взаимная ширина доменов, определяемая ориентацией

векторов намагниченности на границах образца, не будет меняться. Изменение постигнет только плотность энергии доменных границ (так как вектор намагниченности внутри них будет поворачиваться на углы, меньшие 180 градусов), в результате чего изменится период доменной структуры, однако полностью симметричным образом. Когда поле достигнет величины, достаточной для выстраивания ориентации намагниченности вдоль своего направления, домены вообще исчезнут и весь образец будет намагничено однородно. Таким образом, и здесь по мере увеличения поля произойдет переход от неоднородной фазы к однородной. Однако теперь при уменьшении поля два направления, в которых может отклониться вектор намагниченности при зарождении неоднородной фазы, будут эквивалентны, вследствие чего зарождение произойдет сразу в обоих направлениях, так что однородное распределение намагниченности исказится в виде синусоидальной волны, период которой будет равным периоду зарождающейся доменной структуры. Поводом для возбуждения такой волны явится тепловая флуктуация, причем энергетического барьера здесь преодолевать не придется, так как переориентировать направление намагниченности на обратное необходимости не будет. Таким образом, и здесь произойдет переход от однородной фазы к неоднородной, причем без потери энергии и без какого-либо гистерезиса, то есть это будет уже фазовый переход второго рода.

В отсутствие поля векторы намагниченности будут ориентированы в двух противоположных направлениях вдоль оси анизотропии. В поле выше перехода векторы намагниченности во всем объеме образца будут ориентированы в единственном направлении — вдоль поля, которое перпендикулярно оси анизотропии. Таким образом, внутри каждого домена произойдет переориентация вектора намагниченности от старого направления (вдоль оси) к новому (вдоль поля). То есть в этом случае будет иметь место ориентационный переход, заканчивающийся при увеличении поля фазовым переходом второго рода.

Направления векторов намагниченности в доменах разных знаков в процессе перехода будут составлять между собой определенный угол, меньший 180 градусов. Такое состояние намагниченности называется «угловой фазой». В отсутствие поля векторы намагниченности в соседних доменах будут антипараллельны друг другу, то есть будут составлять между собой угол в 180 градусов. Такое состояние намагниченности называется «коллинеарной фазой». Переход между коллинеарной и угловой фазами также можно считать фазовым переходом второго рода, так как он происходит без какой-либо затраты энергии в бесконечно малом, но отличном от нуля поле. Таким образом, можно считать, что намагничивание одноосного магнетика полем, перпендикулярным оси анизотропии, происходит посредством ориентационного перехода, начало и конец которого представляют собой два фазовых перехода второго рода — один от коллинеарной фазы к угловой, второй от угловой фазы к однородной.

Замечание. В формировании равновесного состояния намагниченности, кроме перечисленных видов энергии (анизотропии, размагничивания и внешнего поля), могут участвовать и другие ее виды, например упругая или магнитоупругая, причем их роль может быть довольно значительной. В [4, стр. 320–322] показано, что магнитоупругое взаимодействие препятствует образованию доменов с 90-градусной ориентацией намагниченности, а требует для соседних доменов различия намагниченности 180 градусов. В работах [47, 48] выявлено существование в спектре магнитоупругого кристалла значительной частотной щели магнитоупругого происхождения, обусловленной спонтанной стрикцией. Однако в настоящей монографии, за исключением некоторых специфических случаев, ограничимся только упомянутыми тремя видами энергии, а более сложные варианты формировании энергетического потенциала оставим для отдельного рассмотрения.

5.1.1. Простой ориентационный переход

Рис. 5.1. Геометрия задачи для иллюстрации простого ориентационного перехода. ОЛН — ось легкого намагничивания

Рассмотрим простейший вид ориентационного перехода на примере намагничивания безграничной среды с одноосной анизотропией полем, перпендикулярным оси анизотропии. Геометрия задачи показана на рис. 5.1.

Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ось Oz параллельна оси магнитной анизотропии.

Замечание. Здесь анизотропия подразумевается одноосной, типа «легкая ось», поэтому далее, следуя традиции, установившейся в технике ЦМД ([22–25, 30], а также [38, стр. 14 и далее]), для оси подобной анизотропии используется наименование «ось легкого намагничивания» или в виде аббревиатуры «ОЛН».

Поле **H** перпендикулярно такой оси анизотропии, причем ось Ox направлена вдоль этого поля. Ось Oy перпендикулярна осям Ox и Oz, в силу симметрии задачи ее направление в плоскости Oxy произвольно. Кроме декартовой системы $Oxyz$ введена сферическая система координат $Or\theta\varphi$, начало которой приходится на ту же точку O, что и декартовой системы, полярная ось $O\theta$ совпадает с осью Oz, то есть с ОЛН, а азимутальная $O\varphi$ с осью Ox, то есть с направлением поля. Вектор намагниченности **M** имеет длину M_0, компоненты M_x, M_y, M_z и составляет с осью Oz угол θ, а его проекция на плоскость Oxy составляет с осью Ox угол φ.

В отсутствие поля вектор намагниченности ориентирован вдоль оси Oz, а при включении поля поворачивается в его направлении,

в чем собственно и состоит ориентационный переход. Можно полагать, что благодаря симметрии задачи относительно плоскости Oxz, вектор намагниченности при своем повороте всегда будет оставаться в этой плоскости, то есть угол φ всегда будет оставаться равным нулю [4].

Полагая, что в отсутствие поля вектор намагниченности ориентирован в положительном направлении оси Oz, получаем:

$$M_x = M_0 \sin\theta; \tag{5.1}$$

$$M_y = 0; \tag{5.2}$$

$$M_z = M_0 \cos\theta, \tag{5.3}$$

то есть

$$\mathbf{M} = \{M_0 \sin\theta, 0, M_0 \cos\theta\}. \tag{5.4}$$

При этом поле, ориентированное в положительном направлении оси Ox, равно:

$$H_x = H_0; \tag{5.5}$$

$$H_y = 0; \tag{5.6}$$

$$H_z = 0, \tag{5.7}$$

то есть

$$\mathbf{H} = \{H_0, 0, 0\}. \tag{5.8}$$

Сначала ограничимся рассмотрением перехода в интервале углов $0 \leqslant \theta \leqslant 90°$, так как для предварительного выявления физической картины этого вполне достаточно. Случай начальной ориентации вектора намагниченности в отрицательном направлении оси Oz полностью аналогичен с точностью до симметричного отражения в плоскости Oxy.

Будем искать равновесное положение вектора намагниченности, исходя из минимума плотности энергии магнетика в целом.

Плотность энергии одноосной анизотропии (при $M_y = 0$) равна [4, 40]:

$$U_a = K\left(\frac{M_x}{M_0}\right)^2 = \frac{K}{M_0^2} M_x^2. \tag{5.9}$$

Можно видеть, что при $K > 0$ минимум энергии соответствует $M_x = 0$, то есть выстраиванию намагниченности вдоль оси Oz.

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем равна [4, 40]:

$$U_m = -\mathbf{MH}, \tag{5.10}$$

откуда можно видеть, что вследствие своей отрицательности, а также того факта, что угол между векторами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ равен $90° - \theta$, она минимальна при ориентации намагниченности вдоль поля (то есть при $\theta = 90°$).

Полная плотность энергии равна сумме (5.9) и (5.10):

$$U = U_a + U_m = \frac{K}{M_0^2} M_x^2 - \mathbf{MH}. \tag{5.11}$$

Записывая в сферической системе координат, получаем

$$U = K\sin^2\theta - M_0H_0\sin\theta. \tag{5.12}$$

Определим эффективное поле анизотропии [6–8, 40]

$$H_a = \left.\frac{\partial U_a}{\partial M_x}\right|_{M_x=M_0} = \frac{2K}{M_0}. \tag{5.13}$$

Введем нормированное внешнее поле

$$h = \frac{H_0}{H_a} = \frac{M_0H_0}{2K}. \tag{5.14}$$

Выражая M_0H_0 из (5.14) и подставляя в (5.12), получаем плотность энергии в виде

$$U = K(\sin^2\theta - 2h\sin\theta). \tag{5.15}$$

Равновесное положение вектора намагниченности будем искать из условия минимума плотности энергии (5.15) по углу θ. Таким условием является равенство нулю первой производной U по θ и положительность второй [268].

Найдем эти производные:

$$\frac{dU}{d\theta} = 2K\cos\theta(\sin\theta - h); \tag{5.16}$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2K(\cos^2\theta - \sin^2\theta + h\sin\theta). \tag{5.17}$$

Приравнивая (5.16) к нулю, получаем условие наличия экстремума:

$$\cos\theta(\sin\theta - h) = 0. \tag{5.18}$$

Поскольку это уравнение содержит два сомножителя, то для равенства нулю левой части достаточно, чтобы хотя бы один из сомножителей равнялся нулю. То есть возможны два случая. Рассмотрим их последовательно.

Случай первый.

$$\cos\theta = 0, \tag{5.19}$$

то есть

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{5.20}$$

Подставляя (5.20) в (5.17), находим вторую производную:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2K(-1 + h). \tag{5.21}$$

Экстремум является минимумом в случае положительности второй производной [268]. Поскольку $K > 0$, то минимум имеет место при $(-1 + h) > 0$, то есть $h > 1$ или, с учетом (5.13)–(5.14) — при $H_0 > H_a$, то есть при внешнем поле, большем поля анизотропии.

Случай второй.

$$\sin\theta - h = 0, \tag{5.22}$$

то есть

$$\sin\theta = h, \tag{5.23}$$

или

$$\theta = \arcsin h. \tag{5.24}$$

Подставляя (5.24) в (5.17) находим вторую производную:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2K(1 - h^2). \tag{5.25}$$

Экстремум является минимумом в случае положительности второй производной [268]. Поскольку $K > 0$, то минимум имеет место при $(1 - h^2) > 0$, то есть $|h| < 1$ или, с учетом (5.13)–(5.14) — при $H_0 < H_a$, то есть при внешнем поле, меньшем поля анизотропии.

В случае $H_0 = H_a$, то есть $h = 1$ вторые производные (5.21) и (5.25) равны нулю, то есть в этой точке функция (5.15) имеет перегиб [268], который соответствует стыковке двух рассмотренных случаев. При этом функция (5.15) в точке стыковки остается непрерывной, что соответствует фазовому переходу второго рода.

На рис. 5.2 показано, как меняется плотность энергии (5.15), нормированная на K, при изменении угла θ между вектором намагниченности и осью Oz. Кривые построены при различных значениях

Рис. 5.2. Зависимость нормированной плотности энергии от ориентации вектора намагниченности при различных значениях нормированного поля h: *1* — 0,0; *2* — 0,2; *3* — 0,4; *4* — 0,6; *5* — 0,8; *6* — 1,0

нормированного поля h. Равновесные ориентации вектора намагниченности при заданном значении h соответствуют минимумам кривых, отмеченным точками. В силу симметрии относительно плоскости Oxy, вектор намагниченности может иметь две эквивалентные по энергии ориентации, соответствующие углам θ и $180^\circ - \theta$, что и проявляется как наличие двух симметричных относительно 90° минимумов на кривых.

Можно видеть, что по мере увеличения поля h (то есть при переходе от кривой *1* к кривой *6*) равновесная ориентация намагниченности стремится к $\theta = 90^\circ$, то есть намагниченность поворачивается в направлении поля. При этом абсолютный уровень энергии уменьшается, то есть приложение поля приводит к общему уменьшению энергии системы.

При дальнейшем увеличении поля выше $h = 1$ энергия продолжает убывать в соответствии с (5.17), однако положение минимума остается на месте в соответствии с (5.20).

Таким образом, в точке $h = 1$ происходит фазовый переход, так как симметрия структуры меняется (вместо двух равновесных положений вектора намагниченности остается только одно), причем энергия проходит через эту точку без какого-либо скачка непрерывным образом, то есть переход является переходом второго рода.

Обратимся теперь к рис. 5.3, где показаны зависимости равновесного значения угла θ (*а*), а также нормированных компонент намагниченности $M_{x,z}$ (*б*) от поля h. Равенство внешнего поля H_0 полю анизотропии H_a соответствует $h = 1$, как это отмечено вертикальной точечной линией.

На рис. 5.3, *а* кривая при $0 \leqslant h \leqslant 1$ построена по формуле (5.24), а при $h \geqslant 1$ по формуле (5.20).

На рис. 5.3, *б* кривая *1* при $0 \leqslant h \leqslant 1$ построена по формуле (5.1) с учетом (5.23), что соответствует

$$M_x = M_0 h = M_0 \frac{H_0}{H_a}, \tag{5.26}$$

а при $h \geqslant 1$ по той же формуле (5.1), но с учетом (5.20), что соответствует $M_x = M_0$.

Кривая *2* при $0 \leqslant h \leqslant 1$ построена по формуле (5.3) с учетом (5.23), что соответствует

$$M_z = M_0 \sqrt{1 - h^2} = M_0 \sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{H_a}\right)^2}, \tag{5.27}$$

а при $h \geqslant 1$ по той же формуле (5.3), но с учетом (5.20), что соответствует $M_z = M_0$.

Из рисунка видно, что все приведенные зависимости до точки $h = 1$ меняются плавно, причем ориентация вектора намагниченности меняется также плавно, то есть происходит именно ориентационный переход. После точки $h = 1$ все зависимости далее не меняются,

Рис. 5.3. Зависимость равновесного значения угла θ (*а*), а также нормированных компонент намагниченности $M_{x,z}$ (*б*) от поля h. *1* — M_x/M_0; *2* — M_z/M_0

так что ориентация вектора намагниченности больше не меняется, и он остается выстроенным вдоль оси Ox, то есть вдоль приложенного поля.

В точке $h = 1$ все кривые претерпевают излом, однако остаются непрерывными, что соответствует фазовому переходу второго рода.

5.1.2. Затянутый ориентационный переход

Приведенное выше описание расчета простейшего ориентационного перехода призвано дать не боле чем основную канву методики расчета. То есть сначала в той или иной системе координат записывается плотность энергии как функция компонент намагниченности, после чего на основе соображений симметрии или каких-то других факторов две из компонент выражаются через третью, что позволяет представить исходную плотность энергии в виде функции единственной остающейся компоненты намагниченности. Затем производится дифференцирование плотности энергии по этой компоненте, из равенства нулю первой производной определяются положения экстремумов, а положительность второй производной позволяет идентифицировать экстремумы как минимумы исходной функции, что и дает равновесное положение намагниченности.

Такой подход является более или менее общим и используется в абсолютном большинстве случаев. Однако столь простые математические выкладки, как в предыдущем разделе, получаются далеко не всегда. Так, уже отклонение направления поля от перпендикуляра к оси анизотропии, например введение компоненты поля H_z (рис. 5.1), приводит к несимметричности задачи, вследствие чего выражение (5.12) значительно усложняется. Решение такого уравнения (обычно осуществляемое численными методами) приводит к «затягиванию» выстраивания намагниченности вдоль поля, так что при бесконечном его увеличении вектор намагниченности лишь бесконечно стремится к направлению поля, никогда не достигая его.

Рис. 5.4. Геометрия задачи при несовпадении направления поля с перпендикуляром к оси легкого намагничивания

Рассмотрим такое затягивание ориентационного перехода на простейшем примере отклонения направления поля от нормали к оси анизотропии.

Для простоты будем полагать, что вектор намагниченности в процессе поворота перемещается в плоскости, проходящей через ОЛН и направление поля, то есть в сферической системе координат (рис. 5.1) угол φ можно положить равным нулю. При этом достаточно рассмотреть только плоскость Oxz, где и будут располагаться ОЛН и оба вектора — намагниченности и поля. Ориентация этих векторов и обозначения углов показаны на рис. 5.4.

Из рисунка видно, что в принятой геометрии вектор намагниченности по-прежнему соответствует формуле (5.4), то есть

$$\mathbf{M} = \{M_0 \sin\theta,\ 0,\ M_0 \cos\theta\}, \tag{5.28}$$

а вектор поля имеет вид

$$\mathbf{H} = \{H_0 \sin\theta_H,\ 0,\ H_0 \cos\theta_H\}. \tag{5.29}$$

Плотность энергии, в соответствии с (5.11), принимает вид

$$U = K \sin^2\theta - M_0 H_0 (\sin\theta_H \sin\theta + \cos\theta_H \cos\theta). \tag{5.30}$$

Аналогично предыдущему случаю, введем поле анизотропии:

$$H_a = \frac{2K}{M_0}, \tag{5.31}$$

а также нормированное внешнее поле:

$$h = \frac{H_0}{H_a} = \frac{M_0 H_0}{2K}. \tag{5.32}$$

С использованием этих обозначений приведем (5.30) к виду

$$U = K(\sin^2\theta - 2h\sin\theta_H\sin\theta - 2h\cos\theta_H\cos\theta). \qquad (5.33)$$

Минимум плотности энергии получаем, приравнивая к нулю производную по θ от этого выражения. Исключая из полученного уравнения $\cos\theta$ за счет $\sin\theta$, возводя в квадрат и располагая по степеням $\sin\theta$, получаем:

$$\sin^4\theta - 2h\sin\theta_H\sin^3\theta + (h^2-1)\sin^2\theta + \\ + 2h\sin\theta_H\sin\theta - h^2\sin^2\theta_H = 0. \qquad (5.34)$$

Это — полное уравнение четвертой степени относительно $\sin\theta$.

Для выяснения разрешимости этого уравнения была выполнена контрольная проверка, состоявшая в графическом построении зависимости левой части этого уравнения от θ. При таком построении решение соответствовало прохождению зависимости через нуль. В интервале реальных значений поля $0 \leqslant h \leqslant 10$ и его ориентации относительно ОЛН в интервале $0 \leqslant \theta_H \leqslant 90°$, проверка показала, что это уравнение имеет единственное решение, которое и обеспечивает минимум энергии в четверти плоскости Oxz, соответствующей $M_x \geqslant 0$ и $M_z \geqslant 0$.

Благодаря единственности, можно полагать, что решение этого уравнения в аналитическом виде вполне возможно, например методом Феррари, разрешающим для которого будет уравнение Кардано [261, 262]. Схема такого решения представлена в настоящей монографии в разделе 2.4. Некоторые варианты подобных решений можно найти, например, в работах [297, 334, 335]. Однако, если особенная экономия машинного времени не требуется, то, как правило, более удобным является численное решение, выполняемое методом поиска нуля. Некоторые примеры использования численных решений приведены в последующих главах настоящей монографии. Здесь же ограничимся рассмотрением частного случая, удобного для иллюстрации физической картины явления.

Замечание. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда оба вектора — поля и намагниченности — находятся в положительной четверти плоскости Oxz, так что $0 \leqslant \theta_H \leqslant 90°$, а также $M_x \geqslant 0$ и $M_z \geqslant 0$. Случаи других ориентаций поля и намагниченности, с учетом двунаправленности ОЛН, симметричны рассматриваемому, то есть полностью ему аналогичны. Некоторые особенности начальной ориентации вектора намагниченности, приводящие к его скачкообразной переориентации, рассматриваются далее в главе 7, посвященной ФМР в пленках с наклоном ОЛН.

Обратимся к рис. 5.5, где показаны зависимости полярного угла вектора намагниченности θ от нормированной величины поля при различных его ориентациях. Цифры на кривых соответствуют значениям полярного угла вектора поля θ_H в градусах.

Рис. 5.5. Зависимости полярного угла вектора намагниченности от нормированной величины поля при различных его ориентациях. Цифры на кривых — значения угла θ_H в градусах

Из рисунка можно видеть, что вектор намагниченности при поле, большем поля анизотропии (то есть $h > 1$), выстраивается точно вдоль этого поля только при $\theta_H = 90°$, то есть тогда, когда поле точно перпендикулярно ОЛН. Этот случай как раз соответствует рассмотренному выше. Он реализуется по причине симметричности равновесной ориентации вектора намагниченности относительно оси Ox, так что минимум полной энергии приходится как раз на эту ось. Однако при отклонении вектора поля от оси Ox минимум полной энергии смещается в ту же сторону, что и поле. Поэтому при всех остальных углах, кроме $\theta_H = 90°$, вектор намагниченности по мере увеличения поля лишь стремится к его направлению, причем из рисунка видно, что даже при $h = 4$ норм. ед. различие между углами θ и θ_H остается довольно значительным. Величину различия можно оценить из показанных справа стрелками промежутков между сплошными кривыми, соответствующими углу θ и точечными горизонтальными прямыми, соответствующими углу θ_H. Различие по рисунку максимально (достигает $\sim 10°$) вблизи $\theta_H = 50°$, что близко к среднему положения вектора поля между осями Ox и Oz, то есть $\theta_H = 45°$. При $\theta_H = 90°$ различие отсутствует по указанной выше причине, а при $\theta_H = 0°$ различие также отсутствует, так как в этом случае направление поля совпадает с направлением ОЛН, и вектор намагниченности ориентируется вдоль оси Oz при любой величине поля.

Таким образом, при отличии ориентации поля от направления нормали к ОЛН происходит ориентационный переход, который в поле, равном полю анизотропии, не заканчивается, а продолжается при значительно больших значения поля, то есть по полю он как бы «размазывается». Изменение компонент вектора намагниченности при таком ориентационном переходе иллюстрируется рис. 5.6, где показаны зависимости этих компонент от нормированной величины поля при различных его ориентациях.

Рис. 5.6. Зависимости нормированных компонент вектора намагниченности от нормированной величины поля при различных его ориентациях. *а* — компонента m_x; *б* — компонента m_z. Цифры на кривых — значения угла θ_H в градусах

Из рисунка можно видеть, что при $\theta_H = 90°$ изменение компонент по мере увеличения поля соответствует рассмотренному выше простейшему случаю. При этом ориентационный переход заканчивается фазовым переходом при выстраивании намагниченности точно вдоль поля. Во всех остальных случаях намагниченность только стремится выстроиться ближе к полю, а величины ее компонент определяются формулами (5.1)–(5.3).

Таким образом, в случае $\theta_H = 90°$ при поле, меньшем поля анизотропии, возможны две эквивалентные по энергии ориентации вектора намагниченности по разные стороны от оси Ox (вверх и вниз по рис. 5.4), а при поле большем поля анизотропии — только одна вдоль оси Ox. В ограниченных образцах такие две эквивалентные ориентации за счет размагничивания могут привести к образованию доменной структуры.

В случае отклонения вектора поля от нормали к ОЛН две возможные ориентации вектора намагниченности становятся неэквивалентными и реализуется из них более выгодная. Однако в ограниченных образцах в каком-то интервале полей также может иметь место доменная структура, а возможность ее существования в первую очередь определяется величиной компоненты поля вдоль ОЛН. Более подробно некоторые из таких случаев рассматриваются далее в разделе 5.2.

5.1.3. Размазывание фазового перехода

Итак, из проведенного рассмотрения можно видеть, что точка фазового перехода второго рода, которой заканчивается простой ориентационный переход, при отклонении вектора поля от перпендикуляра к направлению ОЛН, теперь точкой не является, так что фазовый переход как бы «размазывается».

При малом отклонении такое «размазывание» также мало, так что при сравнении результатов расчета с экспериментом им, как правило, можно пренебречь. Так при измерении нормальной одноосной анизотропии в пленках смешанных ферритов-гранатов, применяемых в устройствах на ЦМД, часто используется метод магнитооптического наблюдения доменов при намагничивании пленки полем в ее плоскости. При этом за поле анизотропии принимается то значение внешнего поля, при котором происходит исчезновение доменов при увеличении поля или зарождение их при его уменьшении [25,30,38,40,140,229–231,235]. Точность измерения поля анизотропии при этом не превышает 10–15 % из-за трудности учета влияния доменной структуры, а также снижения контраста наблюдаемой доменной картины вблизи перехода [25, 230, 235]. При этом отклонение поля в пределах единиц градусов (до $\sim 5°$) на точности измерений сказывается незначительно. С другой стороны, отклонение оси анизотропии от нормали к плоскости пленки уже в пределах единиц градусов, даже при достаточно точной ориентации поля в ее плоскости, приводит к сильной зависимости поля исчезновения (или зарождения) доменов от направления намагничивания пленки в ее плоскости, причем анизотропия такой зависимости может достигать порядка и более [25, 30, 32].

Другим фактором, существенно усложняющим расчет ориентационного перехода, является кубическая анизотропия, как правило присутствующая в большинстве составов смешанных ферритов-гранатов [24, 25, 38, 40, 276, 277]. При этом даже при намагничивании пленки точно в ее плоскости, вектор намагниченности в процессе ориентаци-

онного перехода остается в одной плоскости только при точной ориентации поля вдоль определенных кристаллографических направлений. В остальных же случаях во время своего перемещения от нормали к плоскости пленки до направления поля в ее плоскости вектор намагниченности может описывать довольно сложную кривую, значительно выходящую из плоскости между нормалью и направлением поля.

Тем не менее, кубическую анизотропию также в ряде случаев удается исследовать путем наблюдения доменов при намагничивании пленки в ее плоскости [276, 277], хотя довольно точные результаты может дать также ферромагнитный резонанс [24, 25, 35, 337].

Дополнительное усложнение характера ориентационного перехода может дать магнитоупругое взаимодействие, присутствующее во многих ферритах-гранатах [24, 25, 38, 40, 338]. Интересным вариантом исследования ориентационного перехода может служить возбуждение упругих колебаний под действием приложенного к пленке переменного поля, вызывающего движение доменов. При этом намагничивание пленки постоянным полем в ее плоскости вплоть до уничтожения доменов позволяет регистрировать фазовый переход по появлению или исчезновению упругих колебаний. Амплитуда возбуждаемых упругих колебаний максимальна вблизи фазового перехода, вследствие чего чувствительность метода столь высока, что он с успехом позволяет определять не только одноосную, но и кубическую анизотропию [237, 238].

Вследствие трудности аналитического расчета характера изменения намагниченности при ориентационном переходе, важное значение приобретают численные методы, среди которых в первую очередь следует отметить метод установления, кратко рассматриваемый в следующем разделе.

5.1.4. Основная схема метода установления

Метод установления находит широкое применение при расчете структуры доменных границ, распределения намагниченности в доменах и в периодических доменных структурах [339–349]. Сравнение этого метода с некоторыми аналитическими моделями приведено, например, в работе [350]. Поскольку в основе подобных задач лежит определение равновесного положения вектора намагниченности, то метод с успехом может быть применен также для расчета ориентационных переходов.

Метод установления в классическом варианте представляет собой реализацию последовательных приближений, состоящую в последовательности выполняемых друг за другом однотипных шагов.

На первом шаге задается какое-то, предположительно более или менее близкое к искомому, начальное направление вектора намагниченности.

Исходя из этого направления, определяются компоненты намагниченности, которые используются для нахождения поля анизотропии.

Из внешнего поля и полученного таким образом поля анизотропии находится суммарное поле, направление которого определяется.

Вектор намагниченности ориентируется вдоль такого суммарного поля, и из его компонент снова вычисляется поле анизотропии.

Это поле анизотропии вновь складывается с внешним полем, находится ориентация суммарного поля, вдоль которого снова направляется вектор намагниченности. Компоненты такого нового вектора намагниченности опять используются для вычисления поля анизотропии и так далее.

Таким образом, происходит постепенное приближение направления вектора намагниченности к равновесному, которое, после достижения требуемой точности, принимается за искомое.

В таком виде метод установления по существу представляет собой широко применяемый в вычислительной математике метод итераций [261, 351, 352]. Сходимость процесса установления обеспечивается единственностью минимума плотности энергии, из которой определяется поле анизотропии. Если плотность энергии имеет несколько минимумов, как например это имеет место для кубической анизотропии, то начальная ориентация вектора намагниченности должна выбираться таким образом, чтобы между искомым минимумом и начальным положением намагниченности не было потенциальных барьеров. В противном же случае вектор намагниченности может «свалиться» не в тот минимум, который требуется определить, а в соседний или еще более удаленный. То есть, перед заданием начальной ориентации намагниченности следует предварительно качественно исследовать конфигурацию поверхности плотности энергии и выбирать начальное положение как можно более близким к искомому.

5.1.5. Сходимость метода установления

Иллюстрацией сходимости метода установления является рис. 5.7, где для случая одноосной анизотропии показаны зависимости компонент намагниченности от поля, полученные методом установления при различном количестве итераций N.

Геометрия задачи соответствует показанной на рис. 5.1, то есть ось анизотропии соответствует оси координат Oz, а поле приложено вдоль оси Ox, так что направление поля перпендикулярно оси анизотропии.

На рисунке в более крупном масштабе показаны области кривых, соответствующие окончанию ориентационного перехода, то есть окрестности точки фазового перехода. Для сравнения на врезках показаны те же кривые при $N = 100$ в полном масштабе по обеим осям. При построении кривых использовались следующие параметры: константа анизотропии $K = 7000$ эрг см$^{-3}$, что соответствует полю анизотропии $H_a = 2K/M_0 = 100{,}53$ Э, намагниченность: $4\pi M_0 = 1750$ Гс ($M_0 = 139{,}26$ Гс).

Из рисунка видно, что общий ход кривых соответствует показанному на рис. 5.3, *б*. Резкий перепад зависимостей соответствует кривой *4*,

Рис. 5.7. Зависимости компонент намагниченности от поля при ориентационном переходе, полученные методом установления при различном количестве итераций N: *1* — 1, *2* — 2; *3* — 10, *4* — 100. *а* – компонента намагниченности M_x; *б* — компонента намагниченности M_z. На врезках — те же кривые при $N = 100$ в полном интервале по горизонтальной оси, начиная от $H = 0$ Э. Вертикальные точечные линии соответствуют полю фазового перехода $H_a = 100{,}53$ Э, горизонтальные — полной намагниченности $M_0 = 139{,}26$ Гс

полученной при количестве итераций $N = 100$. При меньшем числе итераций кривые вдали от точки фазового перехода еще достаточно близко соответствуют друг другу, однако в области порядка 10 % от поля перехода вектор намагниченности довольно сильно не доворачивается до равновесного направления. Так в поле $H = 100{,}53$ Э, равном полю анизотропии H_a, то есть тому, при котором намагниченность должна полностью выстроиться вдоль поля, компонента намагниченности M_z (вдоль ОЛН) при одной итерации составляет 38 Гс (кривая *1*), при двух — 35 Гс (кривая *2*), при десяти — 20 Гс (кривая *3*) и только

при ста итерациях достигает нуля, как того требует теория в точке фазового перехода.

Такое ухудшение точности метода установления вблизи точки окончания перехода происходит потому, что по мере приближения поля к этой точке вектор намагниченности поворачивается все ближе и ближе к направлению поля, так что сила, стремящаяся довернуть его до направления поля, убывает, стремясь в точке перехода вообще к нулю. Таким образом, можно сделать вывод, что при использовании метода установления для достижения достаточной точности вблизи точки фазового перехода, следует число итераций выбирать достаточно большим, как того требуют условия поставленной задачи.

Решение некоторых задач методом установления приведено в настоящей монографии в главах 6–7.

5.1.6. Метод динамического установления

Другую возможность численного нахождения равновесной ориентации намагниченности являет метод динамического установления. Собственно, этим методом сделано большинство цитированных выше работ [339–349], причем особенно наглядное и подробное описание метода содержится в обобщающей работе [342].

Несмотря на сходство названий, этот метод имеет принципиальное отличие от рассмотренного в предыдущем разделе простого метода установления.

Здесь при заданном значении внешнего поля не ищется равновесное положение намагниченности путем последовательных итераций, а после задания начальной ориентации намагниченность «отпускается» в свободную прецессию, закон движения которой дается классическим уравнением Ландау–Лифшица. Уравнение решается численно в полном нелинейном виде (три уравнения первого порядка типа (2.97)–(2.99)), причем затухание прецессии задается с помощью диссипативного члена Гильберта [6–9]. При такой свободной прецессии амплитуда колебаний вектора намагниченности за счет затухания постепенно уменьшается, в результате чего по окончании релаксации вектор останавливается в положении, соответствующем равновесному состоянию. Это конечное положение определяется тем точнее, чем меньше затухание и шаг численного расчета прецессии.

Важным достоинством метода является возможность определения установления намагниченности в двух и даже трех измерениях без предварительно предположения о движении вектора намагниченности вдоль какой-то плоскости, что часто присутствует в простом методе установления.

Недостатком метода является большее требуемое машинное время, что при расчете сложных структур может быть критичным. Так, для расчета простым методом установления достаточно нескольких сотен итераций, тогда как для расчета прецессии намагниченности в тех же условиях уже для одного круга прецессии требуется примерно

такое же количество машинных шагов. То есть метод динамического установления, по сравнению с методом простого установления, требует машинного времени по крайней мере на порядок больше.

Поэтому преимущество метода динамического установления особенно ярко выявляется в случае множественности минимумов плотности энергии, в первую очередь в двумерных структурах [341–343], а также при расчете распределения намагниченности в периодических доменных структурах [340, 343, 345, 349].

5.2. Ориентационный переход в пленках смешанных ферритов-гранатов

Ориентационный переход в пленках смешанных ферритов-гранатов имеет некоторые особенности, отличающие его от рассмотренного выше обычного перехода в безграничной среде или в пластине с ОЛН, ориентированной вдоль нормали к плоскости пластины. Отличие обусловлено тем обстоятельством, что в таких пленках ОЛН, как правило, отклонена от упомянутой нормали на углы, составляющие единицы и даже десятки градусов.

При этом ориентационная зависимость насыщения пленки полем в ее плоскости, регистрируемая по исчезновению доменов, становится сильно анизотропной. То есть исчезновение доменов при намагничивании пленки вдоль проекции ОЛН на ее плоскость происходит при поле, значительно меньшем, чем при намагничивании в направлении, перпендикулярном той же проекции.

Важной особенностью пленок смешанных ферритов-гранатов, делающей их весьма привлекательными для реализации ЦМД, является высокая одноосная анизотропия, ОЛН которой перпендикулярна (или почти перпендикулярна) плоскости самой пленки. При этом поле такой одноосной анизотропии H_a, как правило, на порядок и более превышает поле намагниченности $4\pi M_0$. Так типичная величина $4\pi M_0$ составляет 100–200 Гс, тогда как поле анизотропии H_a лежит в пределах 5–20 кЭ. Для ортоферритов, при использовании которых впервые было отмечено высокое прикладное значение ЦМД [35], это соотношение еще больше и достигает двух порядков [40]. Таким образом, при рассмотрении ориентационных переходов, происходящих при полях, сравнимых с полем анизотропии, в первом приближении добавкой поля размагничивания пластины к полю одноосной анизотропии можно пренебречь, что и сделано далее.

5.2.1. Отклонение оси легкого намагничивания от нормали к плоскости пленки

Итак, поскольку ОЛН в пленках смешанных ферритов-гранатов имеет тенденцию сильно отклоняться от нормали к плоскости пленки, проведем дальнейшее рассмотрение в два этапа. Сначала рассмотрим

механизм отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки, а затем — ориентационные зависимости поля насыщения при намагничивании пленки полем в ее плоскости.

Механизм отклонения. Относительно пленок смешанных ферритов–гранатов имеются два экспериментальных факта:

1. Наличие сильной одноосной анизотропии, без заметных следов кубической (поле анизотропии — стони и тысячи эрстед).

2. Единственная ось такой анизотропии ориентирована вблизи нормали к плоскости пленки, но часто бывает отклонена от этой нормали на небольшой угол (как правило, единицы градусов).

Рассмотрим эти факты последовательно. Прежде всего остановимся на сильной одноосной анизотропии. В общем случае, благодаря устройству элементарной ячейки, имеющей кубическую симметрию, монокристаллы смешанных ферритов-гранатов обладают кубической магнитной анизотропией. Поле такой анизотропии сравнительно невелико и составляет не более нескольких десятков эрстед.

Однако эпитаксиальные пленки, выращенные на подложках из гадолиний-галлиевого граната, во-первых, имеют несколько отличную от подложки постоянную решетки и, во-вторых, имеют довольно малую толщину, в определенной степени препятствующую упорядочению кристаллической решетки должным образом.

В связи с этим в литературе предложены два механизма образования одноосной анизотропии, краткое рассмотрение которых приведено в [40, стр. 24–25]. Следуя этой работе, отметим их основные особенности. Первый механизм — магнитострикционный, то есть состоит в образовании одноосной анизотропии за счет механических напряжений пленки, обусловленных различием параметров решетки пленки и подложки [353]. Второй механизм — «ростовая анизотропия», то есть некубическое упорядочение, связанное с неодинаковым заселением магнитными ионами допустимых узлов решетки [354].

Согласно [40], в реальных пленках роль первого механизма сравнительно невелика, основной же причиной формирования одноосной анизотропии является второй механизм. В пользу его говорит и тот факт, что в ряде случаев в процессе отжига решетка пленки постепенно упорядочивается, соответствующие атомы занимают свои должные места и анизотропия исчезает. Однако безусловность такого упорядочения в [40] не утверждается (точная ссылка отсутствует). Более того, природа второго механизма до конца, по-видимому, остается не выясненной. В пользу такого утверждения можно привести цитату из [40, стр. 24]: «Выявление микроскопического механизма, посредством которого симметрия процесса роста вызывает появление одноосной анизотропии, оказалось трудной задачей. Этот механизм может быть связан с одноионной магнитокристаллической анизотропией, энергией дипольного взаимодействия или с анизотропией обменного взаимодействия». Какие-либо ссылки на роль перечисленных механизмов в работе [40] отсутствуют.

Экспериментальные результаты, констатирующие наличие сильной одноосной анизотропии в пленках ферритов-гранатов различных составов, содержался в значительном числе работ, из которых, не претендуя на полноту, можно указать [25, 42, 275, 278, 355–358].

Обратимся теперь к интерпретации второго экспериментального факта — отклонению оси одноосной анизотропии от нормали к плоскости пленки.

Для пленок типа [111] в экспериментах установлено, что главной причиной такого отклонения является некоторая разориентация кристаллографической оси [111] подложки относительно нормали к плоскости пленки. При этом отклонение оси магнитной (ростовой) анизотропии, как правило, значительно превышает отклонение кристаллографической оси подложки. То есть в пленке, по сравнению с подложкой, отклонение оси значительно усиливается.

В числе работ, где такое усиление наблюдалось, можно отметить [25,30,240,359]. По-видимому, наиболее последовательное феноменологическое описание этого эффекта приведено в работах [240, 359]. Задача этих работ состоит в том, чтобы показать возможность образования одноосной (орторомбической) анизотропии в наиболее общем случае за счет разориентации роста пленки относительно кубических осей.

Утверждается, что при общей записи плотности энергии орторомбической анизотропии в виде

$$E = A_{ij}\alpha_i\alpha_j, \tag{5.35}$$

где A_{ij} — постоянные коэффициенты, такие, что

$$A_{xx} + A_{yy} + A_{zz} = 0, \tag{5.36}$$

а также

$$A_{ij} = A_{ji}, \tag{5.37}$$

причем $\alpha_{i,j}$ — направляющие косинусы вектора намагниченности, и в дальнейшем предположении, что

$$A_{ij} = A_{ij}(\boldsymbol{\beta}), \tag{5.38}$$

где $\boldsymbol{\beta}$ — направление роста пленки, плотность энергии магнитной анизотропии может быть выражена путем разложения по сферическим гармоникам самого низкого порядка, что дает для нее следующее выражение:

$$E = A(\alpha_x^2\beta_x^2 + \alpha_y^2\beta_y^2 + \alpha_z^2\beta_z^2) + \\ + B(\alpha_x\alpha_y\beta_x\beta_y + \alpha_y\alpha_z\beta_y\beta_z + \alpha_z\alpha_x\beta_z\beta_x). \tag{5.39}$$

То есть утверждается, что для феноменологического описания усиления отклонения оси магнитной анизотропии по сравнению с осью кристаллографической анизотропии достаточно всего двух параметров A и B.

Заменяя $\alpha_{x,y,z}$ компонентами нормированного вектора намагниченности

$$\mathbf{m} = \{m_x,\, m_y,\, m_z\}, \tag{5.40}$$

а также вводя направляющий вектор оси эпитаксиального роста, то есть кристаллографической оси [111] подложки

$$\mathbf{p} = \{p_x,\, p_y,\, p_z\}, \tag{5.41}$$

то есть заменяя $\beta_{x,y,z}$ на $p_{x,y,z}$, приведем формулу (5.39) к виду

$$E = A(m_x^2 p_x^2 + m_y^2 p_y^2 + m_z^2 p_z^2) + \\ + B(m_x m_y p_x p_y + m_y m_z p_y p_z + m_z m_x p_z p_x). \tag{5.42}$$

К сожалению, в цитированных работах достаточно подробный вывод этой формулы отсутствует, а численный анализ проведен только для некоторых частных случаев.

В качестве примера можно положить, что вектор $\mathbf{p}$ отклонен от оси Oz в направлении оси Ox, то есть в плоскости Oxz, причем отклонение вектора $\mathbf{m}$ происходит в той же плоскости. Переходя к сферической системе координат и минимизируя выражение для плотности энергии по полярному углу вектора намагниченности, можно показать, что равновесное положение намагниченности определяется биквадратным уравнением относительно синуса этого полярного угла (или в общем случае — полным уравнением четвертой степени). Разрешение такого уравнения дает зависимость ориентации оси магнитной анизотропии от угла между вектором $\mathbf{p}$ и нормалью к плоскости пленки. Условие превышения отклонения оси анизотропии над отклонением вектора $\mathbf{p}$ позволяет найти требуемые значения констант A и B.

Примерно такая процедура проделывается в цитированных выше статьях. Здесь авторы монографии не приводят ее ввиду определенной громоздкости.

Ссылки на приведенную выше формулу (5.39) имеются также в статьях [275, 355–358]. Влияние наклона оси на некоторые динамические свойства, в том числе ФМР и подвижность доменов, отмечены в работах [22–25, 278].

Исследование наклонной одноосной анизотропии магнитооптическим методом выполнялось в работах [25, 30, 42, 229, 231, 235, 276, 277, 360], а также методом ферромагнитного резонанса в работах [22–25].

В работе [43] отмечалось влияние наклонных осей анизотропии (в основном кубических типа [111]) на невзаимное выстраивание сформированной градиентным полем [361] одиночной доменной границы вдоль этих осей. В работе [278] отмечено влияние наклона оси легкого намагничивания на подвижность доменных границ в пленках ферритов-гранатов.

Замечание. Следует отметить, что общая структура формулы (5.42) весьма подобна структуре формулы для плотности энергии магнитоупругого взаимодействия (2.14):

$$U_{me} = B_1(m_x^2 u_{xx} + m_y^2 u_{yy} + m_z^2 u_{zz}) + \\ + 2B_2(m_x m_y u_{xy} + m_y m_z u_{yz} + m_z m_x u_{zx}), \quad (5.43)$$

где u_{ik} — тензор деформаций:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad (5.44)$$

u_i — компоненты упругого смещения, B_1, B_2 — «первая» и «вторая» константы магнитоупругого взаимодействия. Аналогия состоит в замене компонент тензора деформаций u_{ik} на произведение компонент $p_i p_k$ вектора $\mathbf{p}$. Однако формула (5.43) соответствует ориентации [001], тогда как для ориентации [111], которой соответствует формула (5.42), вид плотности энергии существенном меняется. В случае изотропной среды константы магнитоупругого взаимодействия равны друг другу: $B_1 = B_2$. То есть структура формулы (5.43), по-видимому, является наиболее простой из всех возможных. Можно полагать, что с помощью формулы (5.43) можно описать первый из рассматриваемых механизмов образования одноосной анизотропии — магнитострикционный, в том числе наклон оси, стоит лишь должным образом определить компоненты тензора деформаций, что можно сделать, исходя из параметров решетки материала подложки и объемного монокристалла феррита заданного состава. Однако следует учитывать, что в значительном большинстве случаев эпитаксиальные пленки ферритов-гранатов выращиваются на подложках с ориентацией [111], для которой выражение для плотности магнитоупругой энергии будет более сложным, чем (5.43). То есть к отмеченной аналогии следует подходить с известной осторожностью

5.2.2. Влияние наклона оси на насыщение пленок

Рассмотрим теперь, как описанное выше отклонение оси легкого намагничивания от нормали сказывается на поле насыщения пленки при намагничивании в ее плоскости.

Как известно [4], намагничивание образца с доменами происходит в соответствии с двумя механизмами: смещением границ доменов и поворотом вектора намагниченности по направлению поля. Первый обусловлен составляющей магнитного поля вдоль ОЛН, второй — поперек. Рассмотрим эти механизмы по отдельности.

Смещение границ доменов. Первый механизм насыщения пленки обусловлен смещением границ доменов при ее намагничивании вдоль ОЛН. При этом по мере увеличения поля домены, ориентация намагниченности в которых совпадает с направлением поля, увеличиваются, а домены с противоположной ориентацией намагниченности

уменьшаются. В результате при достаточном значении поля домены невыгодного знака полностью исчезают, и вся пленка становится намагниченной однородно вдоль поля. Исчезновение невыгодных доменов происходит тогда, когда составляющая поля, параллельная ОЛН, достигает поля насыщения $H_{\text{sat}}^{(0)}$.

Схема формирования составляющей поля, параллельной ОЛН, иллюстрируется рис. 5.8.

Рис. 5.8. Схема формирования составляющей поля, параллельной ОЛН

На рис. 5.8, *а* показана общая геометрия задачи. Плоскость Oxy декартовой системы координат $Oxyz$ совпадает с плоскостью пленки, ось Oz ей перпендикулярна. При этом ОЛН отклонена от оси Oz (то есть он нормали к плоскости пленки) на угол ψ_0. Ось Ox системы координат параллельна проекции ОЛН на плоскость пленки. Поле $\mathbf{H}$ приложено в плоскости пленки и составляет с осью Ox угол φ_H.

На рис. 5.8, *б* показана схема формирования составляющей поля $\mathbf{H}$ вдоль ОЛН. Эта составляющая получается путем двукратного проектирования. Сначала вектор поля $\mathbf{H}$ проектируется на ось Ox, в результате чего получается его составляющая H_x. Из общей геометрии задачи можно видеть, что только эта составляющая дает проекцию поля $\mathbf{H}$ на ОЛН, так как составляющая вдоль оси Oy перпендикулярна ОЛН (так как ось Oy перпендикулярна плоскости Oxz, в которой лежит ОЛН), а составляющая вдоль оси Oz вообще равна нулю (так как поле $\mathbf{H}$ лежит в плоскости Oxy). Далее, компонента поля H_x проектируется на ОЛН, давая компоненту H_L. Это проектирование происходит в одной плоскости Oxz, так как поле H_x и ОЛН оба лежат в этой плоскости. Из геометрии двух прямоугольных треугольников, образуемых векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_x$, а также $\mathbf{H}_x$ и $\mathbf{H}_L$, можно видеть, что $H_x = H\cos\varphi$ и $H_L = H_x \sin\psi_0$. Таким образом получаем $H_L = H\cos\varphi\sin\psi_0$.

Полагая теперь, что насыщение пленки происходит при поле $H_s^{(d)}$, когда составляющая поля H_L достигает значения $H_{\text{sat}}^{(0)}$, соответствующего полному исчезновению доменов невыгодного знака, то есть

насыщению вдоль ОЛН, получаем

$$H_s^{(d)} = \frac{H_{\text{sat}}^{(0)}}{\sin\psi_0 \cos\varphi_H}. \tag{5.45}$$

Из рис. 5.8 можно видеть, что при изменении знака $\cos\varphi_H$ на противоположный (что имеет место в определенном интервале углов) вектор намагниченности также изменяет свое направление вдоль ОЛН на противоположное. Однако при этом знак поля $H_s^{(d)}$ меняться не должен, так как оба направления насыщения образца вдоль ОЛН равноправны. Поэтому в формуле (5.45) $\cos\varphi_H$ надо взять по модулю, в результате чего она принимает вид:

$$H_s^{(d)} = \frac{H_{\text{sat}}^{(0)}}{\sin\psi_0 |\cos\varphi_H|}. \tag{5.46}$$

Из полученной формулы можно видеть, что при $\varphi_H = 0^\circ + 180^\circ n$, где n — целое, поле $H_s^{(d)}$ имеет минимум, а при $\varphi_H = 90^\circ + 180^\circ n$ стремится к бесконечности.

Поворот вектора намагниченности. Рассмотрим теперь второй механизм, при котором насыщение пленки происходит путем поворота вектора намагниченности в направлении поля. Действие этого механизма обусловлено составляющей поля, перпендикулярной ОЛН. При этом по мере увеличения поля границы доменов если и сдвигаются, то незначительно, однако взаимная ширина доменов того и другого знака не меняется, то есть доменная структура остается симметричной. Намагничивание пленки происходит путем поворота векторов намагниченности в обоих видах доменов к направлению поля полностью симметричным образом относительно плоскости Oxy. То есть внутри каждого домена происходит ориентационный переход, который заканчивается полным (или почти полным) выстраиванием всех векторов намагниченности вдоль поля, так что доменная структура исчезает и вся пленка становится намагниченной однородно. Таким образом, в момент исчезновения доменной структуры происходит изменение симметрии магнитного состояния вещества: вместо двух фаз, соответствующих двум направлениям намагниченности в доменах, остается одна, соответствующая однородному намагничиванию. Такое изменение как раз соответствует фазовому переходу второго рода, подробного описанному в разделе 5.1.1. Этот переход происходит при поле $H_r^{(d)}$, схема формирования которого иллюстрируется рис. 5.9.

На рис. 5.9, *а* приведена общая геометрия задачи. Ориентация системы координат $Oxyz$, ОЛН и поля $\mathbf{H}$ относительно пленки полностью соответствуют приведенным на рис. 5.8. В повороте вектора намагниченности, первоначально ориентированного вдоль ОЛН, участвует составляющая поля, перпендикулярная ОЛН. Поворот заканчивается тогда, когда величина этой составляющей становится равной полю анизотропии H_a (с точностью до поля размагничивания, которым ввиду

Рис. 5.9. Схема формирования составляющей поля, перпендикулярной ОЛН

малости пренебрегаем). Геометрическое место концов такой составляющей представляет собой цилиндр, ось которого совпадает с ОЛН, а радиус равен H_a. Поскольку внешнее поле прикладывается в плоскости Oxy, то переход происходит на линии сечения цилиндра этой плоскостью. Согласно общим правилам аналитической геометрии [292], сечение кругового цилиндра плоскостью, не параллельной оси цилиндра, представляет собой эллипс, обозначенный буквами $ABCD$. Общая структура этого эллипса показана на рис. 5.9, *б*. Его полуоси вдоль Ox и Oy равны соответственно a и b. Из геометрии рис. 5.9, *а* можно видеть, что $a = H_a/\cos\psi_0$, $b = H_a$. Компоненты поля $\mathbf{H}$, играющие роль переменных, соответственно равны: $H_x = \cos\varphi_H$, $H_y = \sin\varphi_H$ (рис. 5.9, *в*). Классическое уравнение эллипса имеет вид [292]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.47}$$

Подставляя в это уравнение значения a и b, а также $x = H_x$ и $y = H_y$, получаем

$$\frac{H^2\cos^2\varphi_H\sin^2\psi_0}{H_a^2} + \frac{H^2\sin^2\varphi_H}{H_a^2} = 1. \tag{5.48}$$

Из этого уравнения находим поле, требуемое для насыщения пленки:

$$H = \frac{H_a}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi_H\sin^2\psi_0}}. \tag{5.49}$$

Полагая, что ОЛН отклонена от нормали на малый угол, так что $\sin^2\psi_0 \ll 1$, а также пользуясь приближенным соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x, \tag{5.50}$$

представляющим собой первый член разложения в ряд Тейлора функции $y = (1+x)^{-1/2}$ в окрестности точки $x = 0$, получаем

$$H_r^{(d)} = H_a\Big(1 + \frac{1}{2}\sin^2\psi_0\cos^2\varphi_H\Big). \tag{5.51}$$

Это выражение дает ориентационную зависимость поля насыщения пленки при намагничивании в плоскости.

5.2.3. Общая ориентационная зависимость поля насыщения пленки

Полученное выражение (5.51) вместе с приведенным выше (5.46) описывают полное насыщение пленки в соответствии с двумя механизмами: смещением доменных границ и вращением вектора намагниченности. Реальное насыщение при заданной ориентации поля **H** наступает тогда, когда его величина H_S достигает меньшего из двух значений: $H_s^{(d)}$ или $H_r^{(d)}$.

На рис. 5.10 показана зависимость поля насыщения пленки H_S от угла φ_H, определяющего ориентацию поля, приложенного в ее плоскости. Кривая *1* построена по формуле (5.46) и соответствует насыщению пленки за счет смещения границ доменов. Кривая *2* построена по формуле (5.51) и соответствует насыщению пленки за счет поворота вектора намагниченности. Реальное насыщение, определяемое минимальным из полей $H_s^{(d)}$ или $H_r^{(d)}$, показано сплошной линией. Пунктирные части кривых *1* и *2* соответствуют нереализуемым значениям тех же полей.

Из рисунка видно, что зависимость имеет периодический характер, повторяющийся через 180°. Углы 0° и 180° соответствуют намагничиванию вдоль проекции ОЛН на плоскость пленки, углы 90° и 270° — намагничиванию перпендикулярно этой проекции.

Ниже сплошных участков кривой *1* происходит смещение доменных границ, в основном, без заметного поворота вектора намагниченности. Некоторый поворот имеет место только на подходе этих кривых к возрастающим участкам сплошной кривой. Ниже сплошных участков кривой *2* происходит ориентационный переход без заметного смещения доменных границ.

При этом сплошные участки кривой *1* соответствуют точке фазового перехода первого рода, имеющей место при возрастании поля. При убывании поля со значения, большего насыщения, домены могут возникнуть не сразу, а тогда, когда вступают в действие соответствующие зародыши. То есть может иметь место определенный гистерезис. Соответствующая кривая зарождения доменной структуры будет

Рис. 5.10. Зависимость поля насыщения пленки с наклоном ОЛН от угла φ_H, определяющего ориентацию поля в плоскости. Кривая *1* построена по формуле (5.46), кривая *2* — по формуле (5.51). Параметры построения: $H_a = 1000$ Э; $H_{\text{sat}}^{(0)} = 100$ Э; $\psi_0 = 20°$

проходить несколько ниже кривой *1*. Сплошные участки кривой *2* соответствуют точке фазового перехода второго рода. При этом в случае уменьшения поля с высоких значений зарождение доменов происходит сразу из синусоидальной неустойчивости ориентации намагниченности, определяемой мягкой модой спиновых волн [230]. В этом случае какой-либо гистерезис отсутствует.

5.3. Экспериментальное исследование пленок с наклоном оси анизотропии

В этом разделе кратко опишем результаты экспериментов по исследованию магнитной анизотропии в пленках смешанных ферритов-гранатов, обладающих значительным отклонением оси одноосной анизотропии от нормали к плоскости пленки. Эксперименты были выполнены в 1972–1980 годах с участием одного из авторов настоящей монографии и подробно описаны в работах [22–25, 30]. Здесь приведем их основные результаты, не вдаваясь в излишние подробности.

5.3.1. Поле анизотропии и период доменной структуры

Экспериментальное исследование магнитной анизотропии проводилось на пленках, основные характеристики которых приведены

в таблице 5.1. Было исследовано более 40 образцов (выращены И. Г. Аваевой и В. Б. Кравченко), так что в таблице приведены лишь наиболее общие их свойства.

Таблица 5.1

Состав	Характер анизотропии	H_a, Э	M_0, Гс
$(EuEr)_3(FeGa)_5O_{12}$	одноосная	5000 ... 9000	5 ... 12
$(EuY)_3(FeGa)_5O_{12}$	одноосная	1000 ... 2000	12 ... 20
$(YSm)_3(FeGa)_5O_{12}$	одноосная	500 ... 800	20 ... 30
$(YGdYb)_3(FeGa)_5O_{12}$	кубическая	100 ... 200	15 ... 25
$(YGdYbBi)_3(FeAl)_5O_{12}$	одноосная	2000 ... 7000	10 ... 20
$(YTmSmBi)_3(FeAl)_5O_{12}$	одноосная	2000 ... 7000	10 ... 20

В первом столбце таблицы приведены номинальные составы пленок, определяемые соотношением компонент в шихте при их выращивании. Первые четыре состава предназначались в первую очередь для изучения ЦМД. В последние два состава был включен висмут, что обеспечило их высокие магнитооптические свойства — сильное вращение плоскости поляризации света, распространяющегося вдоль направления намагниченности (эффект Фарадея) [146].

Во втором столбце приведен характер анизотропии. Во всех пленках с одноосной анизотропией кубическая магнитная анизотропия не наблюдалась. В пленках состава $(YGdYb)_3(FeGa)_5O_{12}$ одноосная анизотропия была сравнительно мала, однако кубическая проявлялась достаточно сильно.

В третьем столбце приведены значения поля одноосной анизотропии. В четвертом — значения намагниченности насыщения. Можно видеть, что большие значения поля анизотропии, в основном, соответствуют меньшим значениям намагниченности.

Рассмотрим прежде всего характер ориентационного перехода при касательном намагничивании пленок, для чего проследим за периодом доменной структуры, наблюдаемой магнитооптическим методом по эффекту Фарадея. Отметим, что во всех пленках, независимо от состава и вида доменной структуры, при намагничивании полем, приложенным в плоскости пленки перпендикулярно проекции ОЛН на плоскость пленки ($\varphi_H = 90° + 180°n$), наблюдалось монотонное уменьшение периода доменной структуры в два–три раза, подобное отмечавшемуся ранее в работах [160, 161, 229–231, 235, 236].

На рис. 5.11 приведена типичная зависимость периода полосовой доменной структуры от поля в плоскости пленки. Исследовалась пленка состава $Y_{0,76}Gd_{0,76}Yb_{0,68}Bi_{0,8}Fe_{3,9}Al_{1,1}o_{12}$, имевшая поле одноосной анизотропии $H_a = 2500$ Э, намагниченность насыщения около 34 Гс, ширину полосовых доменов в отсутствие поля — около 22 мкм. Кристаллографическая ось [111] подложки была отклонена от нормали к плоскости пленки на 4°, что давало отклонение ОЛН от нормали

Рис. 5.11. Зависимость нормированного периода полосовой доменной структуры D/D_S от поля в плоскости пленки. D_S — наблюдаемый период доменной структуры в точке фазового перехода

около 15°. Благодаря наличию висмута, пленка имела высокую магнитооптическую активность: в красном свете поворот плоскости поляризации составлял около 20 000 град./см. При толщине пленки около 20 мкм это обеспечивало поворот плоскости поляризации света в соседних доменах на углы около 40°, так что доменная структура прослеживалась достаточно контрастно вплоть до полного ее исчезновения.

Из рисунка можно видеть, что период доменной структуры при приближении к точке фазового перехода ($H_a = 2500$ Э), стремится не к нулю, как предсказано в [160, 161, 229, 231, 235], а к конечной отличной от нуля величине (около 10 мкм).

Такое поведение периода вблизи фазового перехода теоретически интерпретировано в работе [230], где показано, что в точке перехода период структуры должен равняться длине спиновой волны нулевой частоты в процессе формирования мягкой моды [133,134]. Длина такой волны заведомо отлична от нуля и определяется балансом энергии между полем размагничивания и обменным взаимодействием (так как анизотропия здесь полностью компенсирована внешним полем).

Согласно [230], поле фазового перехода H_p связано с полем анизотропии H_a соотношением:

$$H_p = H_a - 2\pi M_0 \frac{D_S^2}{b^2}, \tag{5.52}$$

где D_S — период доменной структуры в точке перехода, b — толщина пленки. При этом зависимость периода от поля в точке перехода определяется угловым коэффициентом вида:

$$k_S = \frac{d}{dH} B(H)\Big|_{H=H_p} = -\frac{b}{16\pi^2 M_0 D_S}. \tag{5.53}$$

При реальных значениях параметров для исследуемой пленки $D_S = 10$ мкм, $H_a = 2500$ Э, $b = 20$ мкм, $M_0 = 34$ Гс, из формулы (5.52) видно, что добавка к полю анизотропии (второе слагаемое) составляет около 8 Э. На уровне $H_a = 2500$ Э столь малой добавкой можно пренебречь, то есть считать, что $H_p = H_a$. При этом из формулы (5.53) получаем угловой коэффициент $k_S = -37 \cdot 10^{-5}$ Э$^{-1}$. Из экспериментальной зависимости, показанной на рис. 5.11, можно видеть, что угловой коэффициент касательной к сплошной кривой в точке перехода (то есть пунктирной прямой) равен $k_S = -29 \cdot 10^{-5}$ Э$^{-1}$. Эта величина довольно близко (с точностью около 20 %) соответствует расчетному значению.

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод, что конечность периода доменной структуры в точке фазового перехода и довольно близкое соответствие экспериментального значения производной периода доменной структуры по полю с теоретическим, свидетельствуют в пользу теории, учитывающей неоднородность распределения намагниченности по толщине пленки [230].

5.3.2. Ориентационные зависимости поля насыщения

Обратимся теперь к рассмотрению ориентационных зависимостей поля насыщения при намагничивании пленки с сильным наклоном ОЛН полем, приложенным в плоскости пленки. Теоретическое рассмотрение этого вопроса выполнено в главе 7, теперь же обратимся к экспериментальным результатам, опираясь на материалы тех же работ [25, 30].

Измерения проводились на тех же образцах, параметры которых приведены в таблице 5.1. Поле насыщения для заданного с определенным шагом значения угла определялось по факту исчезновения доменной структуры, наблюдаемой магнитооптическим методом (по эффекту Фарадея). Во всех случаях результаты были сходными, то есть ориентационные зависимости имели вид, подобный приведенному на рис. 5.10. Для более наглядной иллюстрации из всей совокупности образцов были выбраны пять наиболее характерных, составы которых приведены в таблице 5.2.

Полученные зависимости поля насыщения пленок от угла φ_H, определяющего ориентацию поля в плоскости, приведены на рис. 5.12. Номера кривых соответствуют номерам образцов, приведенным в таблицах 5.2 и 5.3.

Таблица 5.2

№	Состав
1	$Eu_1Er_2Fe_{4,3}Ga_{0,7}O_{12}$
2	$Eu_1Er_2Fe_4Ga_1O_{12}$
3	$Eu_{0,65}Y_{2,35}Fe_{4,4}Ga_{0,6}O_{12}$
4	$Y_{2,62}Sm_{0,38}Fe_{3,85}Ga_{1,15}O_{12}$
5	$Y_{1,3}Gd_1Yb_{0,7}Fe_{4,1}Ga_{0,9}O_{12}$

Таблица 5.3

№	$H_S^{(\max)}$, Э	$H_S^{(\min)}$, Э	$\psi_{[111]}$, град.	ψ_0, град.
1	7000 ± 500	160 ± 10	4 ± 1	14 ± 2
2	1300 ± 100	$450\pm$	4 ± 1	20 ± 2
3	1000 ± 100	$250\pm$	4 ± 1	17 ± 2
4	500 ± 100	$300\pm$	4 ± 1	15 ± 2
5	90 ± 10	$90\pm$	4 ± 1	0 ± 2

Рис. 5.12. Зависимости поля насыщения пленок с наклоном ОЛН от угла φ_H, определяющего ориентацию поля в плоскости. Номера кривых соответствуют номерам образцов, приведенным в таблицах 5.2 и 5.3

Происхождение и характер полученных в эксперименте зависимостей полностью соответствует приведенному на рис. 5.10, поэтому здесь подробно не обсуждается. Отметим лишь некоторые замечания, касающиеся конкретных параметров исследованных образцов, для чего обратимся к таблице 5.3.

Здесь первый столбец соответствует номерам образцов, составы которых приведены в таблице 5.2. Во втором и третьем столбцах таблицы 5.3 приведены значения максимального $H_S^{(\max)}$ и минималь-

ного $H_S^{(\min)}$ полей, при которых происходит исчезновение доменной структуры. Измерения этих полей производились при углах 0°, 90°, 180°, 270° и 360° соответственно. Можно видеть, что приведенные значения соответствуют экстремумам кривых на рис. 5.12. Учитывая малость добавки к полю анизотропии второго слагаемого в формуле (5.52), можно полагать, что с высокой степенью точности поле $H_S^{(\max)}$ и поле анизотропии H_a равны друг другу: $H_S^{(\max)} = H_a$, что дает удобный способ измерения поля анизотропии.

В четвертом столбце таблицы приведены углы $\psi_{[111]}$, соответствующие отклонению оси [111] подложки от нормали к плоскости пленки. Все подложки были вырезаны из единого стержня гадолиний-галлиевого граната, выращенного методом зонной плавки, причем вырезание осуществлялось перпендикулярно оси стержня. Рентгеноструктурный анализ, выполненный на уже выращенном стержне, выявил отклонение кристаллографической оси [111] от оси стержня на 4°, что и дало соответствующее отклонение оси [111] подложки от нормали к плоскости разрезания стержня на те же 4°.

Не то, однако, отклонение оси магнитной анизотропии от нормали получилось на пленках, выращенных на таких подложках. Отклонение измерялось при наблюдении доменов в касательном поле, близком к полю анизотропии, причем пленка поворачивалась вокруг оси, перпендикулярной той, которая отвечала минимуму поля насыщения. Такой поворот осуществлялся до тех пор, пока поле насыщения не сравнивалось с тем полем, которое соответствовало максимальному значению насыщения. Получаемый при этом угол отклонения нормали к плоскости пленки от ее начального положения, параллельного оси наблюдения, принимался за угол отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки. Полученные таким путем углы ψ_0 отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки, приведены в пятом столбце таблицы.

Из таблицы можно видеть, что в первых четырех образцах угол отклонения ОЛН от нормали превышает таковой для оси [111] в три–пять раз, причем какая-либо корреляция с полем анизотропии не наблюдается. Такое увеличение отклонения соответствует наблюдавшемуся в работах других авторов [25, 43, 275, 278, 355–358], подробно разобранному в разделе 5.2.1. В последнем образце (№ 5) такое отклонение отсутствует, более того, ось магнитной анизотропии почти точно ориентируется вдоль нормали. В связи с этим кривая *5* на рис. 5.12 имеет вид прямой горизонтальной линии без каких-либо заметных экстремумов. Можно полагать, что отсутствие отклонения вызвано отсутствием для пленок такого состава механизма некубического упорядочения, обсужденного в разделе 5.2.1. Заметим однако, что хотя магнитооптический метод заметной анизотропии в этом образце не выявляет, тем не менее, достаточно заметную анизотропию кубического характера удается выявить методом ферромагнитного резонанса [22–25], подробно рассмотренного в главе 7 (раздел 7.6).

Выводы по главе 5

Настоящая глава посвящена описанию ориентационных переходов в различных условиях, в том числе освещены вопросы численного анализа процесса установления намагниченности в реальных материалах.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрена общая идеология ориентационного перехода. Приведено определение ориентационного перехода как промежуточного состояния, в котором находится магнетик при переходе от одного стационарного состояния к другому, причем эти крайние состояния отличаются равновесной ориентацией намагниченности внутри магнетика. Отмечено, что равновесное состояние намагниченности определяется как минимум потенциала, образованного энергиями анизотропии, размагничивания и внешнего поля. Приведены примеры ориентационных переходов, в первую очередь плавный поворот вектора намагниченности при намагничивании одноосного магнетика полем, перпендикулярным оси магнитной анизотропии. Отмечено, что стремление уменьшить потенциальную энергию размагничивающего поля приводит к разбиению ограниченного образца на домены. Приведены определения однородной, неоднородной, коллинеарной и угловой фазы. Отмечено, что зарождение доменной структуры в точке фазового перехода второго рода происходит через посредство спиновой волны нулевой частоты, длина которой равна периоду зарождающейся доменной структуры.

2. Рассмотрен простой ориентационный переход в геометрии намагничивания одноосного магнетика полем, перпендикулярным оси анизотропии. На основе минимизации суммарной плотности энергии анизотропии и внешнего поля получены зависимости продольной и поперечной компонент намагниченности от поля. Выявлен факт затягивания ориентационного перехода при отклонении ориентации внешнего поля от нормали к оси анизотропии. Показано, что минимизация плотности энергии в этом случае требует разрешения полного алгебраического уравнения четвертой степени относительно синуса полярного угла вектора намагниченности. Методом численного решения такого уравнения получены зависимости полярного угла вектора намагниченности от нормированной величины поля при различных его ориентациях. Показано, что только при ориентации поля параллельно или перпендикулярно оси анизотропии ориентационный переход заканчивается четким фазовым переходом второго рода в одной точке, а при всех промежуточных ориентациях вектор намагниченности только бесконечно приближается к направлению поля, никогда его не достигая. Таким образом, происходит как бы «размазывание» фазового перехода по полю, тем более сильное, чем больше направление поля отличается от нормали к оси анизотропии.

3. Рассмотрен метод установления, позволяющий путем последовательных приближений рассчитать зависимость ориентации равно-

весного положения от поля в случаях растянутого ориентационного перехода. Реализация метода состоит в задании какого-то начального направления намагниченности, исходя из которого определяется минимум плотности суммарной энергии. Это положение минимума затем принимается за положение вектора намагниченности, исходя из которого снова находится минимум плотности энергии. Последовательное осуществление подобных шагов (итераций) в случае сходимости метода позволяет найти равновесное положение вектора намагниченности с любой наперед заданной точностью. Рассмотрены условия сходимости и показано, что точность метода по мере приближения к точке фазового перехода постепенно падает, что однако не мешает его успешной реализации в большинстве требуемых на практике случаев. Кратко охарактеризован метод динамического установления, отличающийся от простого метода установления учетом прецессии вектора намагниченности на каждой итерации. Отмечены его преимущества и недостатки по сравнению с простым методом установления.

4. Рассмотрены особенности ориентационного перехода в реальных пленках смешанных ферритов-гранатов, где ось магнитной анизотропии отклоняется от нормали к плоскости пленки на значительный угол. Отмечен резко анизотропный характер зависимости поля насыщения от ориентации внешнего поля, приложенного в плоскости пленки. Показано, что максимумы этой зависимости соответствуют ориентационному переходу вектора намагниченности, подобному таковому при намагничивании одноосного магнетика полем, перпендикулярным оси анизотропии. Минимумы той же зависимости соответствуют насыщению пленки за счет уничтожения доменов невыгодного знака составляющей поля, параллельной оси анизотропии.

5. Рассмотрены возможные механизмы отклонения оси анизотропии в пленках ферритов-гранатов от нормали к плоскости пленки. Отмечено, что значительные углы отклонения оси магнитной анизотропии пленки от нормали являются следствием усиления отклонения кристаллографической оси [111] подложки от той же нормали. Упомянуты два возможных механизма такого усиления: магнитоупругое взаимодействие при условии различия параметров решетки пленки и подложки, а также некубическое упорядочение магнитных ионов в узлах кристаллической решетки. Приведена феноменологическая формула, позволяющая оценить эффект усиления, исходя из разориентации подложки, путем введения двух параметров взаимодействия намагниченности с решеткой. Кратко обсуждена возможная процедура расчета такого усиления, сводящаяся к решению биквадратного уравнения относительно компонент намагниченности. Отмечено сходство структуры приведенной формулы с выражением для плотности энергии магнитоупругого взаимодействия, кратко обсуждены возможные причины подобной аналогии.

6. Выполнен расчет механизмов насыщения пленки с наклонной анизотропией при ее намагничивании в плоскости. Рассмотрено насыщение

путем смещения границ доменов, а также путем поворота вектора намагниченности в направлении поля. Получены аналитические выражения, позволяющие рассчитать зависимость поля насыщения от угла ориентации внешнего поля, исходя из величин поля анизотропии и поля насыщения пленки при намагничивании ее вдоль оси анизотропии. Построена результирующая зависимость, максимумы которой приходятся на направления, при которых внешнее поле ориентировано перпендикулярно проекции оси анизотропии на плоскость пленки, а минимумы — на направления, когда внешнее поле параллельно этой проекции.

7. Приведены результаты экспериментов по исследованию анизотропии в пленках смешанных ферритов-гранатов с наклоном оси легкого намагничивания. Выполнено исследование зависимости периода доменной структуры пленок от поля в условиях фазового перехода второго рода. Показано, что в процессе увеличения поля период доменной структуры уменьшается, причем в точке фазового перехода он всегда остается конечным. Отмечено, что конечное значение периода доменной структуры в точке фазового перехода свидетельствует в пользу теории, предполагающей неоднородное распределение намагниченности по толщине пленки. Приведены результаты экспериментального исследования зависимости поля насыщения от ориентации внешнего поля в плоскости пленки. Отмечено хорошее совпадение с теоретическими механизмами формирования насыщения, учитывающими смещение границ доменов и поворот вектора намагниченности к направлению поля.

Глава 6

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В ПЛАСТИНЕ С ОДНООСНОЙ И КУБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Настоящая глава посвящена описанию явления ферромагнитного резонанса в анизотропной среде, в том числе в условиях ориентационного перехода. Рассмотрен ферромагнитный резонанс в пластине, обладающей одноосной и кубической анизотропией при различных направлениях поля относительно кубических осей. Получен тензор динамической восприимчивости для ферромагнитного резонанса в пластине с нормальной одноосной анизотропией, намагничиваемой полем, перпендикулярным оси анизотропии.

В качестве примера, важного для дальнейшего изложения, рассмотрен ферромагнитный резонанс в пластине, обладающей одноосной и кубической магнитной анизотропией, причем ОЛН и ось [111] перпендикулярны плоскости пластины. В такой геометрии, ввиду несимметричного расположения осей типа [111] относительно плоскости пластины, случаи касательного и нормального намагничивания принципиальным образом различаются, поэтому они рассмотрены по отдельности.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать работам [6–8], остальные ссылки указаны в тексте.

6.1. Касательное намагничивание

Рассмотрим сначала случай касательного намагничивания, то есть когда поле приложено в плоскости пластины. Будем считать, что приложенное поле больше поля анизотропии, то есть равновесная ориентация намагниченности довольно близка к направлению поля. Так что здесь рассмотрен ориентационный переход в затянутом состоянии, то есть в таком, когда дальнейшее увеличение поля только приближает ориентацию намагниченности к направлению поля (раздел 5.1.2).

6.1.1. Плотность энергии

Геометрия задачи показана на рис. 6.1.

Система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость Oyz параллельна плоскости пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Ось анизотропии перпендикулярна плоскости пластины,

Рис. 6.1. Геометрия задачи при касательном намагничивании магнитной пластины. ОЛН — ось легкого намагничивания

то есть направлена вдоль оси Ox. Ось кубической анизотропии [111] будем считать направленной также перпендикулярно плоскости пластины, то есть вдоль той же оси Ox. Выбор такой ориентации оси [111] для данной задачи является не случайным, а обусловлен наиболее распространенной технологической практикой, согласно которой пленки ферритов-гранатов выращиваются на подложках из гадолиний-галлиевого граната с именно такой ориентацией [38, 40].

Замечание. Приведенный здесь выбор наименования осей координат отличается от принятого на рис. 5.1. Это обусловлено тем, что геометрия рис. 5.1 традиционно используется в задачах, касающихся доменной структуры, в первую очередь ЦМД, где ось Oz ориентируется перпендикулярно плоскости пленки [38, 40]. Здесь же используется ориентация, более распространенная при описании волновых процессов, в первую очередь для задач, касающихся распространения поверхностных магнитостатических волн (ПМСВ) в плоскости пленки [1, 2]. При этом ориентация поля совпадает с плоскостью пленки, т. е. направлена вдоль Oz (что вообще традиционно для ФМР [6–8]), а распространение ПМСВ происходит в плоскости Oyz, так что ось Ox оказывается перпендикулярной плоскости пленки.

В принятой геометрии вектор поля имеет вид

$$\mathbf{H} = \{0, 0, H_0\}. \tag{6.1}$$

Плотность энергии без учета кубической анизотропии имеет вид

$$U_a = -\frac{K}{M_0^2} M_x^2 + 2\pi M_x^2 - M_z H_0, \tag{6.2}$$

где первое слагаемое представляет собой плотность энергии одноосной анизотропии ($K > 0$), второе — плотность энергии размагничивания пластины и третье — плотность энергии взаимодействия намагниченности с постоянным полем.

Для записи плотности энергии кубической анизотропии удобнее ввести систему координат, связанную с ребрами кубической ячейки. Обозначим такую систему через $Ox'y'z'$, так что плотность энергии кубической анизотропии в этой системе имеет вид

$$U_c = -\frac{K_1}{M_0^4}(M_{x'}^2 M_{y'}^2 + M_{y'}^2 M_{z'}^2 + M_{z'}^2 M_{x'}^2). \tag{6.3}$$

Здесь предполагается, что $K_1 > 0$, так что легкими являются оси типа [111]. Константу K_2 полагаем значительно меньшей, чем K_1, поэтому не рассматриваем.

Полная плотность энергии имеет вид

$$U = U_a + U_c = \frac{2\pi M_0^2 - K}{M_0^2} M_x^2 - M_z H - \\ - \frac{K_1}{M_0^4}(M_{x'}^2 M_{y'}^2 + M_{y'}^2 M_{z'}^2 + M_{z'}^2 M_{x'}^2). \quad (6.4)$$

Поскольку предполагается, что поле столь велико, что намагниченность ориентирована вдоль поля, то для обеспечения возможности линеаризации уравнений движения задачу следует рассматривать в системе $Oxyz$, так что выражение (6.4) надо привести к этой системе. Для такого приведения воспользуемся аппаратом матрицы перехода (глава 3).

Матрица перехода. Для получения матрицы перехода обратимся к геометрии, показанной на рис. 6.2.

Рис. 6.2. Геометрия, в которой получается матрица перехода

Система координат $Oxyz$ связана с плоскостью пластины и с направлением поля. Именно в этой системе будет решаться основная задача. Система $Ox'y'z'$ связана с кубической ячейкой, так что ее оси ориентированы вдоль ребер куба. Именно в этой системе записана плотность энергии кубической анизотропии (6.3), представляющая собой последнее слагаемое в выражении (6.4). То есть надо осуществить переход от намагниченности, имеющей компоненты $M_{x',y',z'}$ к намагниченности, имеющей компоненты $M_{x,y,z}$, то есть выразить компоненты $M_{x',y',z'}$ через $M_{x,y,z}$. Подобно разделу 3.6.3, воспользуемся

аппаратом углов Эйлера [261]. Прямая AB (линия узлов) лежит в плоскости $Ox'y'$ и составляет с осью Ox' угол в 45°. Ось Ox проходит вдоль пространственной диагонали ячейки, то есть совпадает с осью [111]. Вектор $\mathbf{P}$ лежит в плоскости, проходящей через оси [001] и [111] ячейки, то есть через оси координат Ox и Oz'. Это вектор составляет с осью Ox угол в 90°, то есть лежит в плоскости пластины. Прямая AB, будучи перпендикулярной оси Ox, также лежит в плоскости пластины.

Поскольку плоскость, содержащая вектор $\mathbf{P}$ ось [111], проходит через диагональ грани куба, выходящую из точки O, то можно видеть, что вектор $\mathbf{P}$ перпендикулярен прямой AB. В этой же плоскости, кроме оси [111], совпадающей с осью Ox, лежит другая ось типа [111], точнее ось $[\bar{1}\,\bar{1}1]$, проекция которой на плоскость $Oxyz$ совпадает с вектором $\mathbf{P}$. Заштрихованная плоскость проходит через вектор $\mathbf{P}$ и прямую AB, причем поскольку ось Ox перпендикулярна AB, то ось Oz также лежит в заштрихованной плоскости, то есть эта плоскость совпадает с плоскостью пластины Oyz. Угол между осью Oz и вектором $\mathbf{P}$ обозначен через δ.

Именно этот угол определяет поворот кубической ячейки вокруг оси Ox, то есть оси [111]. При таком повороте прямая AB и вектор $\mathbf{P}$ также поворачиваются вокруг этой оси, одновременно с поворотом всех трех осей системы $Ox'y'z'$, как они следуют за поворотом ребер кубической ячейки.

Таким образом, угол δ определяет ориентацию кристаллографических осей ячейки относительно системы $Oxyz$, связанной с пластиной, то есть также и с полем.

При $\delta = 0°$ ось Oz совпадает с проекцией одной из осей типа [111] (оси $[\bar{1}\,\bar{1}1]$), на плоскость Oyz (то есть на плоскость пластины).

При $\delta = 30°$ ось Oz перпендикулярна такой проекции, то есть находится посередине между двумя проекциями осей типа [111], которые между собой составляют угол в 60° (в соответствии с рис. 3.10 в разделе 3.5.5).

Исходное выражение для плотности энергии кубической анизотропии (6.3) записано в системе $Ox'y'z'$. Согласно принятым условиям задачи (то есть для решения задачи в системе, связанной с пластиной), это выражение надо преобразовать в систему $Oxyz$. Формула (6.3) содержит компоненты вектора намагниченности $M_{x',y',z'}$. Для преобразования такого вектора воспользуемся формулой (3.14)

$$\mathbf{a}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\,\mathbf{a}, \tag{6.5}$$

где $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ — матрица перехода, компоненты которой определяются косинусами углов между осями систем координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Далее, подстановка полученных таким образом компонент $M_{x',y',z'}$, выраженных через $M_{x,y,z}$, позволит получить выражение для плотности

энергии, выраженной через $M_{x,y,z}$, то есть в системе $Oxyz$, где предстоит решение основной задачи.

Как показано в разделе 3.2.6, при решении задачи в системе, связанной с пластиной, то есть $Oxyz$, матрица $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ должна быть матрицей обратного перехода.

Для получения необходимой матрицы найдем косинусы углов между осями систем $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с помощью тех же приемов аналитической геометрии, что и в разделе 3.6.

В результате получаем следующую таблицу компонент матрицы перехода:

	x	y	z
x'	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta+\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta-\cos\delta)$
y'	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta-\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta+\cos\delta)$
z'	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\delta$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\delta$

. (6.6)

То есть требуемая матрица имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(\delta)=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta+\sqrt{3}\,\cos\delta) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta-\cos\delta) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta-\sqrt{3}\,\cos\delta) & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta+\cos\delta) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon & \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

Замечание об эквивалентности матриц. Заметим, что полученная здесь матрица по виду отличается от подобной матрицы (3.275) приведенной в разделе 3.6.3. Это произошло по той причине, что на рис. 6.2 и рис. 3.14 приняты несколько различные системы углов Эйлера. Действительно, как отмечено в [261], может существовать 12 различных вариантов систем углов Эйлера, отличающихся ориентацией линии узлов и направлением отсчета углов по отношению к осям. При этом все системы являются эквивалентными, и на физику явлений это не влияет, а выбор той или иной системы, как правило, обусловлен удобством проведения математических выкладок.

Здесь выбрана несколько отличная от принятой в разделе 3.6.3 система углов Эйлера, что сделано для того, чтобы избежать далее штрихованных обозначений при повороте кубической ячейки вокруг оси [111]. Покажем, как полученную здесь матрицу (6.7) можно привести к виду (3.275).

Прежде всего отметим, что согласно сложившейся в аналитической геометрии традиции [292, 293], оси исходной системы координат принято обозначать буквами без штрихов, а оси повернутой — со штрихами. Именно так обозначены оси на рис. 3.14. Здесь же задача решается в системе $Oxyz$, которая поворачивается относительно системы $Ox'y'z'$, поэтому обозначения приняты обратными.

При этом из сравнения рис. 6.2 с рис. 3.14 можно видеть, что принятые здесь обозначения осей Ox, Oy, Oz, а также Ox', Oy', Oz' заменяются на рис. 3.14 на следующие (приведенные в том же порядке): Oz', Ox', Oy', а также Ox, Oy, Oz.

То есть, записывая (6.6) в обозначениях системы на рис. 3.14, получаем

	z'	x'	y'
x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta+\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta-\cos\delta)$
y	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta-\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta+\cos\delta)$
z	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\delta$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\delta$

. (6.8)

Приведем столбцы этой таблицы в порядок следования обозначений осей x', y', z':

	x'	y'	z'
x	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta+\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta-\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
y	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta-\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta+\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
z	$\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\delta$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\delta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

. (6.9)

Поскольку здесь штрихованная и нештрихованная системы поменялись местами, то следует взять обратную матрицу, то есть заменить строки столбцами:

	x	y	z
x'	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta+\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta-\sqrt{3}\,\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\delta$
y'	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta-\cos\delta)$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta+\cos\delta)$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\delta$
z'	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

. (6.10)

Учтем теперь, что из сравнения рис. 6.2 и рис. 3.14 можно видеть, что углы ε и δ отличаются на 180°, то есть

$$\delta = \varepsilon + 180^\circ, \tag{6.11}$$

так что

$$\sin\delta = -\sin\varepsilon; \tag{6.12}$$

$$\cos\delta = -\cos\varepsilon. \tag{6.13}$$

Производя в (6.10) соответствующие замены, получаем:

	x	y	z
x'	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\varepsilon + \sqrt{3}\,\cos\varepsilon)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\varepsilon - \sqrt{3}\,\cos\varepsilon)$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon$
y'	$-\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\varepsilon - \cos\varepsilon)$	$\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\varepsilon + \cos\varepsilon)$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon$
z'	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

. (6.14)

Можно видеть, что полученная таким путем таблица с точностью до перемены порядка слагаемых в скобках полностью совпадает с таблицей матрицы (3.275) полученной в системе, принятой на рис. 3.14, что и доказывает эквивалентность обеих систем.

6.1.2. Матрица преобразования при повороте вокруг оси [111]

Таким образом, согласно принятой геометрии (рис. 6.2), поворот кубической ячейки на угол δ вокруг оси [111], совпадающей с нормалью к плоскости пластины, описывается матрицей вида (6.7)

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(\delta) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta + \sqrt{3}\,\cos\delta) & \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta - \cos\delta) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sin\delta - \sqrt{3}\,\cos\delta) & -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}\,\sin\delta + \cos\delta \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\varepsilon & \frac{\sqrt{6}}{3}\cos\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

где угол δ — между осью Oz и проекцией на плоскость пластины оси $[\bar{1}\,\bar{1}1]$.

При этом преобразование вектора намагниченности с помощью такой матрицы происходит в соответствии с формулой

$$\mathbf{M}' = \overleftrightarrow{A}_{111}(\delta)\mathbf{M}. \tag{6.16}$$

Напомним, что направление постоянного поля $\mathbf{H}$ в рассматриваемой геометрии (рис. 6.1) параллельно оси Oz.

В общем виде полное преобразование довольно громоздко, поэтому ограничимся двумя важными для практики частными случаями — когда поле параллельно проекции оси типа [111] на плоскость пластины, то есть $\delta = 0°$, а также когда поле перпендикулярно такой проекции, то есть $\delta = 30°$. Рассмотрим эти случаи последовательно.

6.1.3. Уравнения движения при поле, параллельном проекции оси [111]

Рассмотрим сначала случай, когда поле параллельно проекции оси [111] на плоскость пластины, то есть $\delta = 0°$. Матрица преобразования принимает вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(0°) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right). \tag{6.17}$$

Выполняя преобразование в соответствии с (6.16), получаем

$$M_{x'} = \frac{\sqrt{3}}{3} M_x - \frac{\sqrt{2}}{2} M_y - \frac{\sqrt{6}}{6} M_z; \tag{6.18}$$

$$M_{y'} = \frac{\sqrt{3}}{3} M_x + \frac{\sqrt{2}}{2} M_y - \frac{\sqrt{6}}{6} M_z; \tag{6.19}$$

$$M_{z'} = \frac{\sqrt{3}}{3} M_x + \frac{\sqrt{6}}{3} M_z. \tag{6.20}$$

Подставляя эти выражения в плотность энергии (6.4), получаем

$$U = \frac{2\pi M_0^2 - K}{M_0^2} M_x^2 - M_z H_0 - \frac{K_1}{12 M_0^4}(4M_x^4 + 3M_y^4 + 3M_z^4 + \\ + 6M_y^2 M_z^2 - 4\sqrt{2}\, M_x M_z^3 + 12\sqrt{2}\, M_x M_y^2 M_z). \tag{6.21}$$

Находим эффективные поля путем дифференцирования U по компонентам намагниченности в соответствии с (1.2):

$$H_{ex} = -\frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0^2} M_x + \frac{K_1}{3M_0^4}(4M_x^3 - \sqrt{2}\, M_z^3 + 3\sqrt{2}\, M_y^2 M_z); \tag{6.22}$$

$$H_{ey} = \frac{K_1}{M_0^4}(M_y^3 + M_y M_z^2 + 2\sqrt{2}\, M_x M_y M_z); \tag{6.23}$$

$$H_{ez} = H_0 + \frac{K_1}{M_0^4}(M_z^3 + M_y^2 M_z - \sqrt{2}\, M_x M_z^2 + \sqrt{2}\, M_x M_y^2). \tag{6.24}$$

Поскольку далее предполагается линеаризация, то есть компоненты M_x и M_y будут малыми по сравнению с M_z, причем $M_z \to M_0$, то достаточно рассмотреть уравнения движения только для компо-

нент M_x и M_y. Эти уравнения, получаемые из полного уравнения Ландау–Лифшица (2.20)–(2.22) без учета затухания (то есть при $\alpha = 0$) имеют вид

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma(M_y H_{ez} - M_z H_{ey}); \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma(M_z H_{ex} - M_x H_{ez}). \tag{6.26}$$

Подставляя в эти уравнения эффективные поля (6.22)–(6.24), получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \\ = -\gamma\left\{M_y\left[H_0 + \frac{K_1}{M_0^4}(M_z^3 + M_y^2 M_z - \sqrt{2}\,M_x M_z^2 + \sqrt{2}\,M_x M_y^2)\right] - \right. \\ \left. -M_z\frac{K_1}{M_0^4}(M_y^3 + M_y M_z^2 + 2\sqrt{2}\,M_x M_y M_z)\right\}; \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma\left\{M_z\left[-\frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0^2}M_x + \right.\right. \\ \left. + \frac{K_1}{3M_0^4}(4M_x^3 - \sqrt{2}\,M_z^3 + 3\sqrt{2}\,M_y^2 M_z)\right] - \\ \left. -M_x\left[H_0 + \frac{K_1}{M_0^4}(M_z^3 + M_y^2 M_z - \sqrt{2}\,M_x M_z^2 + \sqrt{2}\,M_x M_y^2)\right]\right\}. \tag{6.28}$$

6.1.4. Два способа линеаризации полученных уравнений

Линеаризацию полученных уравнений можно выполнить двумя способами. Классический способ требует предварительного нахождения равновесного состояния намагниченности, малая величина отклонений от которого позволяет пренебречь квадратичными членами, в результате чего уравнения приобретают линейный характер. Другой способ состоит в решении уравнений в первоначальном виде, после чего получающиеся постоянные члены полагаются равными нулю, что опять-таки приводит к линейному виду уравнений. Рассмотрим общие схемы этих способов более подробно.

Способ первый. При обычной линеаризации, то есть если положить $M_x = m_x$, $M_y = m_y$, $M_z = M_0$, где $m_x \ll M_0$, $m_y \ll M_0$, то во втором уравнении получится постоянное слагаемое. Оно получится там, где M_z умножается на M_z^3 , то есть во внутренней скобке первого слагаемого, что при линеаризации даст M_z^4. В первом уравнении подобное произведение отсутствует, поэтому постоянное слагаемое здесь не образуется. Очевидно, производная от намагниченности по времени не может быть постоянной, ибо это означало бы бесконечный во времени рост намагниченности. Можно полагать, что наличие постоянного члена во втором уравнении говорит о том, что в равновесном состоянии вектор намагниченности не лежит вдоль оси Oz, то есть вдоль

поля, а выходит из плоскости пластины. Такой выход происходит из-за несимметричности расположения осей типа [111] относительно плоскости пластины. Поле приложено вдоль проекции одной из таких осей, причем эта ось находится с одной стороны от плоскости пластины. С другой стороны симметрично относительно направления поля находятся две оси, проекции которых на плоскость пластины расположены под углами в 60° относительно проекции первой оси. Расположение осей можно подробно видеть из рис. 3.10. Таким образом, вектор намагниченности в одну сторону от поверхности пластины тянет одна ось анизотропии, а в другую — две, так что эти три силы в плоскости пластины не уравновешиваются. Поэтому никогда, даже при очень большом поле, вектор намагниченности не ложится на плоскость пластины. Из симметрии расположения осей относительно плоскости Oyz следует, что в равновесном состоянии $M_y^{(0)} = 0$, однако $M_x^{(0)} \neq 0$.

Вообще говоря, в таком случае, то есть при $M_x^{(0)} \neq 0$, надо сначала найти устойчивое равновесное состояние вектора намагниченности, исходя из минимума потенциала, то есть путем дифференцирования плотности энергии (6.21) по компонентам намагниченности, в данном случае по M_x (вариант подробной процедуры для сферических координат θ и φ рассмотрен далее в разделе 7.3). При этом относительно $M_x^{(0)}$ получается уравнение третьей степени. После решения этого уравнения следует повернуть систему координат таким образом, чтобы ось Oz была направлена вдоль полученного равновесного состояния намагниченности. Далее можно провести линеаризацию обычным порядком, что позволит найти резонансную частоту прецессии намагниченности в приложенном поле.

Способ второй. Но есть и другой путь. Так, можно выполнить линеаризацию сразу, полагая, что равновесное состояние намагниченности уже найдено, а получающееся в уравнении для M_x постоянное слагаемое положить равным нулю. Получится опять-таки уравнение третьей степени, однако здесь можно будет обойтись без предварительного дифференцирования плотности энергии по M_x. Поэтому такой путь получается несколько короче традиционного, а результат получается тем же самым.

Выберем далее этот второй путь, то есть положим:

$$M_x = M_x^{(0)} + m_x; \tag{6.29}$$

$$M_y = m_x; \tag{6.30}$$

$$M_z = M_0, \tag{6.31}$$

где $m_x \ll M_0$, $m_y \ll M_0$.

При этом в получающихся уравнениях величина $M_x^{(0)}$ считается имеющей тот же порядок, что и M_0, так что: $m_x \ll M_x^{(0)}$ и $m_y \ll M_x^{(0)}$.

Степени компоненты M_x преобразуются следующим образом:

$$M_x^2 \to (M_x^{(0)})^2 + 2M_x^{(0)} m_x; \tag{6.32}$$

$$M_x^3 \to (M_x^{(0)})^3 + 3(M_x^{(0)})^2 m_x. \tag{6.33}$$

Замечание. Следует иметь в виду, что здесь через m_x и m_y обозначены малые добавки к полной длине вектора намагниченности, тогда как в главе 4, а также в главах 9 и 10 теми же буквами обозначены нормированные компоненты намагниченности, то есть полные, разделенные на M_0. Такое различное использование одинаковых обозначений в значительной степени является данью исторической традиции. Так, в линейных задачах нормировка обычно не проводится, а малые буквы, в силу своего малого размера, используются для обозначения малых добавок [6–8]. С другой стороны, при рассмотрении нелинейности удобнее использовать именно нормированные компоненты, так как там (в том числе в главах 4, 9, 10) малость изменения намагниченности все равно не предполагается, а введение нормировки приводит к уменьшению громоздкости получаемых выражений [264].

Физическая сущность постоянного слагаемого. Вернемся опять к линеаризации. Поскольку постоянное слагаемое образуется только во втором уравнении, то обратимся к его более подробному рассмотрению.

Подставляя (6.29)–(6.31) в (6.28), учитывая (6.32)–(6.33) и оставляя только линейные по m_x слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \Bigg\{ &\underline{-\frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0} M_x^{(0)}} - \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0} m_x + \\ &+ \underline{\frac{4K_1}{3M_0^4}(M_x^{(0)})^3} + \frac{4K_1}{M_0^4}(M_x^{(0)})^2 m_x - \underline{\frac{\sqrt{2}\,K_1}{3}} - \\ &- \underline{H_0 M_x^{(0)}} - \underline{\frac{K_1}{M_0} M_x^{(0)}} + \underline{\frac{\sqrt{2}\,K_1}{M_0^2}(M_x^{(0)})^2} + \frac{\sqrt{2}\,K_1}{M_0^2} M_x^{(0)} m_x - \\ &- H_0 m_x - \frac{K_1}{M_0} m_x + \frac{\sqrt{2}\,K_1}{M_0^2} M_x^{(0)} m_x. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Это уравнение содержит как зависящие от m_x переменные слагаемые, так и как постоянные члены (подчеркнутые), от m_x не зависящие. Эти постоянные члены дают уравнение для определения $M_x^{(0)}$ или $(M_x^{(0)}/M_0)$ в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{4K_1}{3}\left(\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right)^3 + \sqrt{2}\,K_1\left(\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right)^2 - \\ &\quad - M_0\left[H_0 + \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0} + \frac{K_1}{M_0}\right]\left(\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right) - \frac{\sqrt{2}\,K_1}{3} = 0. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Введем обозначения:

$$H_a = \frac{2K}{M_0}; \tag{6.36}$$

$$H_c = \frac{K_1}{M_0}. \tag{6.37}$$

Замечание. Первое из этих обозначений H_a соответствует традиционно используемому понятию поля одноосной анизотропии [7, 8] (с точностью до обозначений, определяемому формулами (4.55), (4.69)). Величина H_a представляет собой эффективное поле вида (1.2), получаемое путем дифференцирования по переменной компоненте намагниченности M_x члена плотности энергии (6.21), содержащего константу K, в котором после дифференцирования полагают M_x равной M_0. Такое определение оправдано тем, что при намагничивании безграничной одноосной среды полем, перпендикулярным оси анизотропии, как раз при поле H_a вектор намагниченности ложится точно на направление поля (раздел 5.1.1). Второе из обозначений H_c представляет собой традиционно используемое поле кубической анизотропии (раздел 4.3.2, формула (4.119)). Такое поле также получается путем дифференцирования плотности энергии по одной из компонент намагниченности с последующей заменой оставшихся компонент на M_0, но точное выстраивание вектора намагниченности вдоль поля имеет место только при некоторых специфических направлениях поля (например по рис. 6.2 — при $\delta = 30°$), не перпендикулярных ни одной из осей кубической анизотропии, причем поле выстраивания также не равно величине $2K_1/M_0$. С другой стороны, при определении константы K_1 часто используется именно отношение K_1/M_0, для ЖИГ равное 45 Э [296] или 36 Э [7] (разд. 4.3.3), так что введенное здесь обозначение H_c следует понимать именно таким образом.

Разделяя уравнение (6.35) на M_0 и записывая в обозначениях (6.36)–(6.37), получаем

$$\frac{4}{3}H_c\left(\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right)^3 + \sqrt{2}\,H_c\left(\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right)^2 - \\ - (H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_c)\left(\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right) - \frac{\sqrt{2}}{3}H_c = 0. \tag{6.38}$$

Это — кубическое уравнение относительно величины $(M_x^{(0)}/M_0)$. Решение подобного уравнения для случая одноосной магнитоупругой среды, выполненное методом Кардано [261, 262], можно найти, например, в работах [297,334,362]. Схема аналитического решения подобных уравнений приведена в настоящей монографии в разделе 2.4. Здесь же будем полагать, что поле H_0 настолько велико, что вектор намагниченности отклоняется от направления поля в настолько малой степени,

что $M_x^{(0)} \ll M_0$, так что степенями выше первой в этом уравнении можно пренебречь. Решая получившееся уравнение первой степени, получаем

$$\frac{M_x^{(0)}}{M_0} = -\frac{(\sqrt{2}/3)H_c}{H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_c}. \tag{6.39}$$

Это соотношение определяет равновесное положение вектора намагниченности при заданном значении поля H_0. Можно видеть, что при достаточно большой величине этого поля постоянная компонента намагниченности $M_x^{(0)}$ стремится к нулю, как это и должно быть в соответствии с физическим содержанием явления поворота намагниченности в направлении поля.

6.1.5. Конечный результат линеаризации и решение линеаризованных уравнений

Обратимся теперь к динамической стороне задачи. Поскольку полученное значение $M_x^{(0)}$ определено из условия равенства нулю постоянных слагаемых в уравнении для компоненты m_y (6.34), то остающаяся часть этого уравнения определяет именно процесс, колебательный во времени, каковым является прецессия намагниченности.

Уравнение для компоненты m_x получается из (6.27) путем той же линеаризации, с учетом (6.29)–(6.33). Ход выкладок аналогичен получению уравнения (6.34), причем проходит без образования постоянных слагаемых, так что подробно на нем не останавливаемся.

В конечном результате получаем систему линеаризованных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma \left(H_0 - 3\sqrt{2}\, H_c \frac{M_x^{(0)}}{M_0} \right) m_y; \tag{6.40}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma \left[H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_c \left(1 - \sqrt{2}\, \frac{M_x^{(0)}}{M_0} \right) \right] m_x. \tag{6.41}$$

Полагая зависимость от времени в виде $\exp(i\omega t)$, получаем резонансную частоту

$$\omega = \gamma \sqrt{\begin{array}{l} \left(H_0 - 3\sqrt{2}\, H_c \dfrac{M_x^{(0)}}{M_0} \right) \times \\ \times \left[H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_c \left(1 - \sqrt{2}\, \dfrac{M_x^{(0)}}{M_0} \right) \right] \end{array}}. \tag{6.42}$$

Можно видеть, что в отсутствие всякой анизотропии, то есть при $H_a = 0$ и $H_c = 0$, это выражение переходит в традиционную формулу Киттеля для касательно намагниченной пластины [6–8].

Определение практического параметра. Если известна частота, например, из условий постановки эксперимента, то при условии известности поля кубической анизотропии можно использовать выражение (6.42) для определения важной для практики величины $4\pi M_0 - H_a$:

$$4\pi M_0 - H_a = \frac{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2}{H_0 - 3\sqrt{2}\,H_c \frac{M_x^{(0)}}{M_0}} - H_0 - H_c\left(1 - \sqrt{2}\,\frac{M_x^{(0)}}{M_0}\right). \quad (6.43)$$

В это выражение входит величина $M_x^{(0)}/M_0$, которая заранее не известна, но может быть определена из соотношения (6.39). Однако в это соотношение входит та же искомая величина $4\pi M_0 - H_a$.

Вообще говоря, если в (6.43) подставить $M_x^{(0)}/M_0$ в соответствии с (6.39), то получится уравнение относительно $4\pi M_0 - H_a$ третьей степени, прямое решение которого будет достаточно громоздким.

При необходимости получить численное решение можно пойти по пути последовательных приближений, например с использованием метода итераций [261, 351, 352]. То есть на первом шаге положить величину $M_x^{(0)}/M_0$ равной нулю, подставить в уравнение (6.43), решив которое найти $4\pi M_0 - H_a$ в первом приближении. Далее полученную величину подставить в (6.39), откуда найти $M_x^{(0)}/M_0$ уже во втором приближении. Затем это значение подставить в (6.43), найти следующее приближение величины $4\pi M_0 - H_a$ и так далее. Ввиду малости величины $M_x^{(0)}/M_0$, можно полагать, что сходимость такого процесса будет достаточно быстрой.

Несколько большей точности можно достигнуть, если в уравнении (6.38) сохранить член второго порядка по $M_x^{(0)}/M_0$. При этом величина $M_x^{(0)}/M_0$ будет определяться решением соответствующего квадратного уравнения. В оптимальном случае можно решить полное уравнение (6.38), однако надо учитывать, что оно получено путем линеаризации, так что заведомо содержит в себе определенные приближения, поэтому наиболее точное решение можно получить только из рассмотрения нелинейной задачи.

Замечание. Важность для практики параметра $4\pi M_0 - H_a$ определяется тем, что знание его дает возможность оценки поля одноосной анизотропии, особенно в том случае, когда оно значительно превышает поле размагничивания. Знание поля анизотропии важно для разработки устройств на ЦМД [40]. С другой стороны, входящая в этот параметр намагниченность насыщения M_0 может быть определена независимым методом, например, из параметров доменной структуры [40], что позволяет определить поле одноосной анизотропии в чистом виде.

6.1.6. Решение задачи при поле, перпендикулярном проекции оси типа [111]

Рассмотрим теперь случай, когда поле перпендикулярно проекции оси [111] на плоскость пластины, то есть $\delta = 30°$. Матрица преобразования (6.15) принимает вид

$$\overleftrightarrow{A}_{111}(30°) = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right). \tag{6.44}$$

Выполняя преобразование в соответствии с (6.16), получаем

$$M_{x'} = \frac{\sqrt{3}}{3} M_x - \frac{\sqrt{6}}{3} M_y; \tag{6.45}$$

$$M_{y'} = \frac{\sqrt{3}}{3} M_x + \frac{\sqrt{6}}{6} M_y - \frac{\sqrt{2}}{2} M_z; \tag{6.46}$$

$$M_{z'} = \frac{\sqrt{3}}{3} M_x + \frac{\sqrt{6}}{6} M_y + \frac{\sqrt{2}}{2} M_z. \tag{6.47}$$

Подставляя эти выражения в плотность энергии (6.4), получаем

$$U = \frac{2\pi M_0^2 - K}{M_0^2} M_x^2 - M_z H - \frac{K_1}{12 M_0^4}(4M_x^4 + 3M_y^4 + 3M_z^4 + \\ + 6M_y^2 M_z^2 + 4\sqrt{2}\, M_x M_y^3 - 12\sqrt{2}\, M_x M_y M_z^2). \tag{6.48}$$

Находим эффективные поля путем дифференцирования U по компонентам намагниченности в соответствии с (1.2):

$$H_{ex} = -\frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0^2} M_x + \frac{K_1}{3M_0^4}(4M_x^3 + \sqrt{2}\, M_y^3 - 3\sqrt{2}\, M_y M_z^2); \tag{6.49}$$

$$H_{ey} = \frac{K_1}{M_0^4}(M_y^3 + M_y M_z^2 + \sqrt{2}\, M_x M_y^2 - \sqrt{2}\, M_x M_z^2); \tag{6.50}$$

$$H_{ez} = H_0 + \frac{K_1}{M_0^4}(M_z^3 + M_y^2 M_z - 2\sqrt{2}\, M_x M_y M_z). \tag{6.51}$$

Получение уравнений движения полностью аналогично предыдущему случаю. Здесь расположение осей типа [111] относительно направления поля полностью симметрично, поэтому $M_x^{(0)} = 0$ и можно использовать обычную линеаризацию, то есть положить $M_x = m_x$, $M_y = m_y$, $M_z = M_0$, где $m_x \ll M_0$, $m_y \ll M_0$. Подставляя эффективные поля (6.49)–(6.51) в уравнения (6.25) и (6.26), после выполнения

линеаризации получаем уравнения движения для компонент намагниченности в виде

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma\left(H_0 m_y + \frac{\sqrt{2}\,K_1}{M_0} m_x\right); \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma\left\{\left[H_0 + \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0} + \frac{K_1}{M_0}\right] m_x + \frac{\sqrt{2}\,K_1}{M_0} m_y\right\}. \tag{6.53}$$

Подставляя обозначения для полей H_a и H_c в соответствии с (6.36) и (6.37), получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma(H_0 m_y + \sqrt{2}\,H_c m_x); \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma\big[(H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_c) m_x + \sqrt{2}\,H_c m_y\big]. \tag{6.55}$$

В этих уравнениях вторые слагаемые в скобках содержат те же компоненты намагниченности, что и левая часть. При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ они дают слагаемые с различными знаками, так что при вычислении определителя получаются произведения вида $(i\omega + A)(i\omega - A)$, где $A = \gamma\sqrt{2}\,H_c$, что дает в результате $-\omega^2 - A^2$, так что мнимость уничтожается. В результате получаем частоту в виде

$$\omega = \gamma\sqrt{H_0(H_0 + 4\pi M_0 - H_a + H_c) - 2H_c^2}\,. \tag{6.56}$$

Здесь последнее слагаемое под корнем (с учетом общего коэффициента γ) как раз и представляет собой величину A^2.

Можно видеть, что при $H_c = 0$, что означает отсутствие кубической анизотропии, но сохранение одноосной, формулы (6.56) и (6.42) совпадают. При $H_a = 0$ и $H_c = 0$, то есть при отсутствии анизотропии вообще, выражение (6.56) переходит в традиционную формулу Киттеля для касательно намагниченной пластины [6–8].

Определение практического параметра. Если известна частота, например из условий постановки эксперимента, то можно использовать это выражение для определения важной для практики величины $4\pi M_0 - H_a$:

$$4\pi M_0 - H_a = \frac{1}{H_0}\left[\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 - H_0(H_0 + H_c) + 2H_c^2\right]. \tag{6.57}$$

6.1.7. Сравнение резонансных частот для рассмотренных ориентаций

Из сравнения выражений для резонансных частот (6.42) и (6.56), соответствующих $\delta = 0°$ и $\delta = 30°$, можно видеть, что в первом случае обе добавки, пропорциональные $M_x^{(0)}/M_0$, положительны, так как в соответствии с (6.39) величина $M_x^{(0)}/M_0$ отрицательна (во всяком случае, для материалов типа ЖИГ, где $4\pi M_0 \gg H_a$ и $K_1 > 0$). Во втором же случае добавка $-2H_c^2$ отрицательна. При этом в обоих случаях про-

изведения подкоренных сомножителей без этих добавок совпадают. Из этого следует, что резонансная частота при $\delta = 0^\circ$ (6.42) превышает резонансную частоту при $\delta = 30^\circ$, то есть выполняется соотношение: $\omega|_{\delta=0^\circ} > \omega|_{\delta=30^\circ}$.

6.2. Нормальное намагничивание

Рассмотрим теперь случай нормального намагничивания, то есть когда внешнее поле перпендикулярно плоскости пластины.

Будем считать, что поле одноосной анизотропии больше поля размагничивания, так что даже в отсутствие внешнего поля равновесный вектор намагниченности ориентирован перпендикулярно плоскости пластины. Поскольку ось [111] также перпендикулярна этой плоскости, то кубическая анизотропия вектор намагниченности от нормали не отклоняет. В этом случае приложение внешнего поля вдоль той же нормали ориентации намагниченности не меняет, то есть вектор намагниченности при любом поле ориентирован всегда перпендикулярно плоскости пластины.

Геометрия задачи показана на рис. 6.3.

Рис. 6.3. Геометрия задачи при нормальном намагничивании магнитной пластины. ОЛН — ось легкого намагничивания

Система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость Oyz параллельна плоскости пластины, а ось Ox ей перпендикулярна. Ось анизотропии перпендикулярна плоскости пластины, то есть направлена вдоль оси Ox. Ось кубической анизотропии типа [111] будем считать направленной также перпендикулярно плоскости пластины, то есть вдоль той же оси Ox. То есть ориентация обеих осей совпадает с принятой в разделе 6.1.1 и обусловлена технологической практикой [38, 40].

В принятой геометрии вектор поля имеет вид:

$$\mathbf{H} = \{H_0, 0, 0\}. \tag{6.58}$$

Поскольку поле и ОЛН направлены вдоль нормали к плоскости пластины, то в силу осевой симметрии все направления в плоскости пластины эквивалентны. Так как в равновесном состоянии вектор намагниченности также ориентирован вдоль той же нормали, то при повороте кубической ячейки вокруг нормали плотность энергии кубической анизотропии не меняется. Поэтому плотность энергии можно взять

в любом удобном виде, например в таком, какой принят в разделе 6.1.3 (формула (6.21)).

При этом полная плотность энергии принимает вид

$$U = \frac{2\pi M_0^2 - K}{M_0^2} M_x^2 - M_x H_0 - \frac{K_1}{12 M_0^4}(4M_x^4 + 3M_y^4 + 3M_z^4 + \\ + 6M_y^2 M_z^2 - 4\sqrt{2}\, M_x M_z^3 + 12\sqrt{2}\, M_x M_y^2 M_z), \quad (6.59)$$

причем отличие от (6.21) состоит только во втором слагаемом, где вместо M_z присутствует M_x.

Дифференцирование U по компонентам намагниченности в соответствии с (1.2), дает эффективные поля в виде:

$$H_{ex} = H_0 - \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0^2} M_x + \frac{K_1}{3M_0^4}(4M_x^3 - \sqrt{2}\, M_z^3 + 3\sqrt{2}\, M_y^2 M_z); \quad (6.60)$$

$$H_{ey} = \frac{K_1}{M_0^4}(M_y^3 + M_y M_z^2 + 2\sqrt{2}\, M_x M_y M_z); \quad (6.61)$$

$$H_{ez} = \frac{K_1}{M_0^4}(M_z^3 + M_y^2 M_z + \sqrt{2}\, M_x M_y^2 - \sqrt{2}\, M_x M_z^2). \quad (6.62)$$

Отличие от (6.22)–(6.24) состоит лишь в перемещении H_0 из H_{ez} в H_{ex}.

Поскольку в принятой геометрии равновесное положение вектора намагниченности ориентировано вдоль оси Ox, то и прецессия этого вектора происходит также вокруг этой оси, поэтому достаточно рассмотреть уравнения движения только для компонент M_y и M_z. При этом вместо (6.25)–(6.26) из полного уравнения Ландау–Лифшица (2.20)–(2.22) без учета затухания (то есть при $\alpha = 0$) получаем:

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma(M_z H_{ex} - M_x H_{ez}); \quad (6.63)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma(M_x H_{ey} - M_y H_{ex}). \quad (6.64)$$

Подставляя в эти уравнения эффективные поля (6.60)–(6.62), получаем уравнения движения для M_y и M_z в виде:

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma \left\{ M_z \left[H_0 - \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0^2} M_x + \right.\right. \\ \left. + \frac{K_1}{3M_0^4}(4M_x^3 - \sqrt{2}\, M_z^3 + 3\sqrt{2}\, M_y^2 M_z) \right] - \\ \left. - M_x \left[\frac{K_1}{M_0^4}(M_z^3 + M_y^2 M_z + \sqrt{2}\, M_x M_y^2 - \sqrt{2}\, M_x M_z^2) \right] \right\}. \quad (6.65)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma \left\{ M_x \left[\frac{K_1}{M_0^4}(M_y^3 + M_y M_z^2 + 2\sqrt{2}\, M_x M_y M_z) \right] - \right.$$
$$\left. - M_y \left[H_0 - \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0^2} M_x + \frac{K_1}{3M_0^4}(4M_x^3 - \sqrt{2}\, M_z^3 + 3\sqrt{2}\, M_y^2 M_z) \right] \right\}. \tag{6.66}$$

В принятой геометрии намагниченность в равновесном состоянии выстраивается вдоль оси Ox, поэтому постоянные слагаемые в уравнениях движения могут получиться только пропорциональными M_x^4. Из приведенных уравнений можно видеть, что подобные слагаемые в обоих уравнениях отсутствуют, поэтому можно проводить обычную линеаризацию, то есть положить: $M_x = M_0$, $M_y = m_y$, $M_z = m_z$, где $m_y \ll M_0$, $m_z \ll M_0$.

В этом случае линеаризованные уравнения движения принимают вид:

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left[H_0 - \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0} + \frac{4K_1}{3M_0} \right] m_z; \tag{6.67}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = \gamma \left[H_0 - \frac{2(2\pi M_0^2 - K)}{M_0} + \frac{4K_1}{3M_0} \right] m_y. \tag{6.68}$$

Вводя обозначения (6.36), (6.37), получаем:

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\gamma \left(H_0 - 4\pi M_0 + H_a + \frac{4}{3} H_c \right) m_z; \tag{6.69}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = \gamma \left(H_0 - 4\pi M_0 + H_a + \frac{4}{3} H_c \right) m_y. \tag{6.70}$$

Полагая зависимость от времени в виде $\exp(i\omega t)$, получаем резонансную частоту:

$$\omega = \gamma \left(H_0 - 4\pi M_0 + H_a + \frac{4}{3} H_c \right). \tag{6.71}$$

Можно видеть, что при $H_a = 0$ и $H_c = 0$ это выражение переходит в традиционную формулу Киттеля для нормально намагниченной пластины [6–8].

Если известна частота, то формула (6.71) позволяет получить величину $4\pi M_0 - H_a$:

$$4\pi M_0 - H_a = H_0 + \frac{4}{3} H_c - \frac{\omega}{\gamma}. \tag{6.72}$$

6.3. Свободный ферромагнитный резонанс при ориентационном переходе

В предыдущей главе рассмотрено квазистатическое изменение ориентации вектора намагниченности в процессе ориентационного перехода.

Обратимся теперь к динамическим свойствам прецессии намагниченности при таком переходе. На первом этапе рассмотрим свободный

ферромагнитный резонанс, что позволит найти изменение резонансной частоты свободной прецессии в процессе перехода. Затем обратимся к вынужденному ферромагнитному резонансу, что позволит определить тензор динамической магнитной восприимчивости. В качестве вспомогательной задачи сначала рассмотрим преобразование вектора намагниченности при повороте осей координат, соответствующем ориентационному переходу.

6.3.1. Преобразование вектора намагниченности при повороте координат

Ориентационный переход состоит в изменении ориентации вектора намагниченности. Задача о ферромагнитном резонансе, как правило, решается в системе координат, связанной с равновесным положением вектора намагниченности, что позволяет воспользоваться процедурой линеаризации, значительно упрощающей вычисления. При этом, поскольку в процессе ориентационного перехода вектор намагниченности поворачивается, то и связанную с ним систему координат, в которой производится расчет, также приходится поворачивать. При таком повороте происходит определенное преобразование компонент намагниченности, рассмотрение которого и составляет содержание настоящего раздела.

Итак, рассмотрим преобразование компонент вектора намагниченности при повороте системы координат. Будем следовать общему изложению подобной задачи в традиционных курсах аналитической геометрии [292, 293]. Геометрия для рассматриваемого здесь частного случая представлена на рис. 6.4.

На рис. 6.4, *а* показана схема поворота исходной системы координат $Oxyz$ вокруг оси Oy на угол θ. В результате такого поворота исходная система $Oxyz$ перешла в систему $Ox'yz'$, так что угол между осями Ox и Ox', а также Oz и Oz' равен θ. При этом ось Oy переходит в ось Oy' непосредственно.

На рис. 6.4, *б* показана схема преобразования компонент вектора намагниченности при таком повороте осей.

Исходя из элементарных геометрических соображений, можно видеть, что прямое преобразование компонент имеет вид:

$$M_x = M_{x'} \cos\theta + M_{z'} \sin\theta; \tag{6.73}$$

$$M_z = -M_{x'} \sin\theta + M_{z'} \cos\theta. \tag{6.74}$$

Соответствующее обратное преобразование имеет вид:

$$M_{x'} = M_x \cos\theta - M_z \sin\theta; \tag{6.75}$$

$$M_{z'} = M_x \sin\theta + M_z \cos. \tag{6.76}$$

При этом в обоих случаях y-компонента не меняется, так что $M_y = M_{y'}$, или $M_{y'} = M_y$.

а *б*

Рис. 6.4. Геометрия задачи о повороте системы координат, связанной с намагниченностью. *а* – схема поворота системы координат на угол θ вокруг оси Oy, заштрихованная плоскость содержит оси Ox, Oz, Ox', Oz'. *б* — схема образования компонент вектора намагниченности, вид в заштрихованной плоскости вдоль положительного направления оси Oy

Запишем преобразование с помощью матриц поворота. Прямое преобразование имеет вид

$$\mathbf{M} = \overleftrightarrow{A}_2 \mathbf{M}', \tag{6.77}$$

где индекс «2» соответствует двум измерениям задачи, а сама матрица поворота имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{6.78}$$

Обратное преобразование производится по формуле

$$\mathbf{M}' = \overleftrightarrow{A}_2^{-1} \mathbf{M}, \tag{6.79}$$

а матрица поворота имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{6.80}$$

Прямое и обратное преобразования в трехмерном случае определяется формулами:

$$\mathbf{M} = \overleftrightarrow{A}_3 \mathbf{M}'; \tag{6.81}$$

$$\mathbf{M}' = \overleftrightarrow{A}_3^{-1} \mathbf{M}, \tag{6.82}$$

где соответствующие матрицы имеют вид:

$$\overleftrightarrow{A}_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{array}\right); \tag{6.83}$$

$$\overleftrightarrow{A}_3^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{array}\right). \tag{6.84}$$

Замечание. Следует отметить, что в традиционных курсах, например [292, 293], в формулах, подобных (6.73)–(6.76), синус имеет знак, обратный приведенному. Это происходит по той причине, что обычно направление поворота осей координат отсчитывается в положительном направлении, то есть на рис. 6.4, *б* против часовой стрелки. Здесь же поворот происходит по часовой стрелке, так что угол θ отсчитывается как бы в отрицательном направлении, что и приводит к изменению его знака. Причина такого направления поворота осей состоит в том, что данная задача является подготовительной для рассмотрения ориентационного перехода вектора намагниченности, который в выбранной геометрии происходит от оси Oz к оси Ox (вектор намагниченности поворачивается от ОЛН в направлении поля), то есть угол θ меняется в направлении, обратном традиционному.

6.3.2. Особенности условий ферромагнитного резонанса в полном интервале изменения поля

В предыдущих разделах 6.1, 6.2 рассмотрен ферромагнитный резонанс в анизотропной среде при ориентации внешнего поля в некоторых специфических направлениях относительно осей анизотропии. При этом приложенное поле предполагалось настолько превышающим поле анизотропии, что в стационарном состоянии вектор намагниченности ориентировался вдоль этого поля или близко к его направлению.

Характер явления в случае, когда приложенное поле меньше поля анизотропии, существенно отличается от такового, когда такое поле превышает поле анизотропии. Различие обусловлено тем, что в первом случае вектор намагниченности находится в состоянии ориентационного перехода, и его направление с изменением поля меняется, тогда как во втором случае вектор намагниченности ориентирован точно вдоль поля, и его направление неизменно.

Рассмотрим далее полный интервал приложенного поля от нуля до больших его значений более подробно.

6.3.3. Приложенное поле меньше поля анизотропии

Рассмотрим прежде всего случай, когда поле недостаточно для полного поворота вектора намагниченности к его направлению. В разделах 5.1.1, 5.1.2 показано, что в этом случае вектор намагниченности

претерпевает ориентационный переход от направления, определяемого анизотропией среды, к направлению поля. Для простоты ограничимся случаем одноосной анизотропии в безграничной среде, так как введение кубической, благодаря множественности осей, приводит к значительному усложнению как физической ситуации, так и вычислительной стороны задачи. Поле будем считать направленным перпендикулярно оси анизотропии.

Ориентационный переход происходит в интервале увеличения поля от нуля до поля анизотропии. В нулевом поле вектор намагниченности ориентирован вдоль оси анизотропии. По мере увеличения поля вектор намагниченности поворачивается в направлении поля. В поле, равном полю анизотропии, вектор намагниченности выстраивается вдоль поля и далее остается в этом положении, так что ориентационный переход заканчивается. Поворот вектора намагниченности происходит в одной плоскости, проходящей через ось анизотропии и направление поля.

Геометрия задачи показана на рис. 6.5.

Рис. 6.5. Геометрия задачи о повороте системы координат, связанной с намагниченностью. Штриховкой показана единая плоскость $Ox'xz'z$

Основная система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что ось Ox совпадает с осью анизотропии, а ось Oz совпадает с направлением поля. Вспомогательная система координат $Ox'y'z'$ ориентирована таким образом, что ось Oz' направлена вдоль равновесного направления вектора намагниченности, а ось Ox' лежит в плоскости, проходящей через оси Oz и Oz'. При этом оси Oy и Oy' обеих систем координат совпадают друг с другом. Таким образом, оси Ox, Oz, Ox' и Oz' лежат в одной плоскости, перпендикулярной осям Oy и Oy', а при изменении поля, приводящем к повороту вектора намагниченности в этой плоскости, система $Ox'y'z'$, следуя за намагниченностью, поворачивается относительно системы $Oxyz$ вокруг оси Oy или Oy'. Угол поворота между осями Oz и Oz' обозначен через θ. Очевидно, что угол между осями Ox и Ox' также равен θ.

Для удобства терминологии будем называть систему $Oxyz$ — связанной с полем, а систему $Ox'y'z'$ — связанной с намагниченностью.

Ферромагнитный резонанс представляет собой прецессию вектора намагниченности вокруг его равновесного положения. Это означает, что задача о прецессии (уравнение Ландау–Лифшица) должна решаться в системе, связанной с намагниченностью, то есть $Ox'y'z'$. Такой подход при небольшой амплитуде колебаний позволяет провести

линеаризацию задачи, значительно упрощающую вычисления. Однако, поскольку плотности энергии анизотропии и взаимодействия поля с намагниченностью обычно записываются в системе, связанной с полем, то есть $Oxyz$, то сначала надо перевести все плотности энергии в систему $Ox'y'z'$.

Полная плотность энергии в системе координат, связанной с полем, имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2} M_x^2 - \mathbf{MH}, \tag{6.85}$$

где первое слагаемое соответствует энергии анизотропии, а второе — энергии взаимодействия намагниченности с полем.

Для того, чтобы записать плотность энергии в системе $Ox'y'z'$, надо входящие в (6.85) компоненты намагниченности и поля из системы $Oxyz$ преобразовать в систему $Ox'y'z'$. Компоненты по оси Oy не меняются, поэтому достаточно рассмотреть лишь компоненты вдоль осей Ox и Oz.

Для преобразования входящей в первое слагаемое (6.85) компоненты намагниченности M_x воспользуемся формулой (6.77) с матрицей (6.78), в результате чего получаем

$$M_x = M_{x'} \cos\theta + M_{z'} \sin\theta. \tag{6.86}$$

Второе слагаемое в (6.85) представляет собой скалярное произведение, от выбора системы координат не зависящее, поэтому запишем его сразу в системе $Ox'y'z'$:

$$\mathbf{MH} = M_{x'} H_{x'} + M_{y'} H_{y'} + M_{z'} H_{z'}. \tag{6.87}$$

Поле в системе $Oxyz$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \{0, 0, H_0\}, \tag{6.88}$$

то есть $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H_0$.

Выражая поле в системе $Ox'y'z'$ в соответствии с формулой (6.79) при помощи матрицы (6.80), получаем

$$H_{x'} = H_x \cos\theta - H_z \sin\theta = -H_0 \sin\theta; \tag{6.89}$$

$$H_{y'} = H_y = 0; \tag{6.90}$$

$$H_{z'} = H_x \sin\theta + H_z \cos\theta = H_0 \cos\theta. \tag{6.91}$$

Подставляя в (6.87), получаем

$$\mathbf{MH} = -M_{x'} H_0 \sin\theta + M_{z'} H_0 \cos\theta. \tag{6.92}$$

С использованием (6.86) и (6.92) получаем полную плотность энергии в виде

$$U = -\frac{K}{M_0^2}(M_{x'}^2 \cos^2\theta + M_{z'}^2 \sin^2\theta + 2M_{x'} M_{z'} \sin\theta\cos\theta) + \\ + M_{x'} H_0 \sin\theta - M_{z'} H_0 \cos\theta. \tag{6.93}$$

Раскрывая скобки и упорядочивая по переменным и показателям степеней, получаем

$$U = -\frac{K}{M_0^2}\cos^2\theta M_{x'}^2 - \frac{K}{M_0^2}\sin^2\theta M_{z'}^2 - \frac{2K}{M_0^2}\sin\theta\cos\theta M_{x'}M_{z'} + \\ + H_0\sin\theta M_{x'} - H_0\cos\theta M_{z'}. \quad (6.94)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$A_1 = -\frac{K}{M_0^2}\cos^2\theta; \quad (6.95)$$

$$A_2 = -\frac{K}{M_0^2}\sin^2\theta; \quad (6.96)$$

$$A_3 = -\frac{2K}{M_0^2}\sin\theta\cos\theta; \quad (6.97)$$

$$A_4 = H_0\sin\theta; \quad (6.98)$$

$$A_5 = -H_0\cos\theta. \quad (6.99)$$

С этими обозначениями плотность энергии (6.94) принимает вид:

$$U = A_1M_{x'}^2 + A_2M_{z'}^2 + A_3M_{x'}M_{z'} + A_4M_{x'} + A_5M_{z'}. \quad (6.100)$$

В равновесном состоянии эффективное поле по оси Ox' должно быть равно нулю, то есть

$$H_{ex'}^{(0)} = -\frac{\partial U}{\partial M_{x'}} = 0. \quad (6.101)$$

Дифференцируя (6.100) и приравнивая производную к нулю, получаем

$$2A_1M_{x'} + A_3M_{z'} + A_4 = 0. \quad (6.102)$$

В равновесии должно быть: $M_{x'} = 0$, $M_{y'} = 0$, $M_{z'} = M_0$. Подставляя эти значения в (6.102), получаем

$$A_3M_0 + A_4 = 0. \quad (6.103)$$

Подставляя A_3 и A_4 в соответствии с (6.97) и (6.98), получаем уравнение для определения угла θ в равновесном состоянии:

$$-\frac{2K}{M_0}\cos\theta + H_0 = 0, \quad (6.104)$$

откуда, используя в соответствии с (6.36) обозначение $H_a = 2K/M_0$, получаем:

$$\cos\theta = \frac{H_0}{H_a}; \quad (6.105)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}. \quad (6.106)$$

Формула (6.105) с точностью до обозначений совпадает с полученными в главе 5 формулой (5.23) с учетом (5.14). Наблюдаемое различие обусловлено противоположным выбором ориентации осей координат относительно поля и ОЛН, а также отсчетом угла θ в одном случае от направления поля, а в другом от направления ОЛН.

Замечание. Из уравнения (6.104) получается только формула (6.105), то есть для $\cos\theta$, а формула (6.106) получается из равенства единице суммы квадратов синуса и косинуса. При этом синус может иметь два знака, то есть кроме (6.106) возможно соотношение

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}. \tag{6.107}$$

При этом проекция вектора намагниченности на ось Ox отрицательна, а сам вектор располагается в плоскости Oxz симметрично относительно оси Oz. Эта ситуация имеет место, если в начальном положении в отсутствие поля вектор намагниченности ориентирован в отрицательном направлении оси Ox вдоль той же ОЛН, положительное и отрицательное направления вдоль которой равноправны. При этом по мере увеличения поля ориентационный переход происходит в той же плоскости Oxz, но вектор намагниченности начинает свое движение с отрицательного направления оси Ox. Такая ситуация имеет место в доменах, где изначально имеются два противоположных направления вектора намагниченности. В настоящем рассмотрении этот вопрос принципиальной важности не имеет, поэтому здесь ограничимся только положительным начальным направлением вектора намагниченности относительно оси Ox, то есть для определения θ будем пользоваться формулой (6.106).

Заменяя синус и косинус угла θ с помощью (6.105), (6.106), а также используя обозначение $H_a = 2K/M_0$ (6.36), получаем выражения параметров A_{1-5} (6.95)–(6.99) через поля:

$$A_1 = -\frac{H_0^2}{2M_0H_a}; \tag{6.108}$$

$$A_2 = -\frac{H_a^2 - H_0^2}{2M_0H_a}; \tag{6.109}$$

$$A_3 = -\frac{H_0\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{M_0H_a}; \tag{6.110}$$

$$A_4 = \frac{H_0\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}; \tag{6.111}$$

$$A_5 = -\frac{H_0^2}{H_a}. \tag{6.112}$$

Дифференцируя выражение для плотности энергии (6.100), находим эффективные поля:

$$H_{ex'} = -(2A_1 M_{x'} + A_3 M_{z'} + A_4); \tag{6.113}$$

$$H_{ey'} = 0; \tag{6.114}$$

$$H_{ez'} = -(A_3 M_{x'} + 2A_2 M_{z'} + A_5). \tag{6.115}$$

Уравнения движения для намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау–Лифшица (2.20)–(2.22) в системе $Ox'y'z'$, имеют вид:

$$\frac{\partial M_{x'}}{\partial t} = -\gamma(M_{y'} H_{ez'} - M_{z'} H_{ey'}); \tag{6.116}$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma(M_{z'} H_{ex'} - M_{x'} H_{ez'}); \tag{6.117}$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = -\gamma(M_{x'} H_{ey'} - M_{y'} H_{ex'}). \tag{6.118}$$

Подставляя поля (6.113)–(6.115) и упорядочивая по переменным, получаем:

$$\frac{\partial M_{x'}}{\partial t} = \gamma\{A_3 M_{x'} M_{y'} + 2\,A_2 M_{y'} M_{z'} + A_5 M_{y'}\}; \tag{6.119}$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma\{A_3 M_{x'}^2 - A_3 M_{z'}^2 + 2(A_2 - A_1) M_{x'} M_{z'} + A_5 M_{x'} - A_4 M_{z'}\}; \tag{6.120}$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = -\gamma\{2A_1 M_{x'} M_{y'} + A_3 M_{y'} M_{z'} + A_4 M_{y'}\}. \tag{6.121}$$

Для линеаризации положим: $M_{x'} = m_{x'}$, $M_{y'} = m_{y'}$, $M_{z'} = M_0$, где $m_{x'} \ll M_0$, $m_{y'} \ll M_0$. Подставляя эти переменные в (6.119)–(6.121) и оставляя члены только нулевого и первого порядков по $m_{x'}$ и $m_{y'}$, получаем:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = \gamma(2A_2 M_0 + A_5) m_{y'}; \tag{6.122}$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = -\gamma\left\{[2(A_2 - A_1)M_0 + A_5] m_{x'} - \underline{(A_3 M_0 + A_4) M_0}\right\}; \tag{6.123}$$

$$\frac{\partial m_{z'}}{\partial t} = -\gamma(A_3 M_0 + A_4) m_{y'}. \tag{6.124}$$

Можно видеть, что здесь во втором уравнении получилось постоянное слагаемое (подчеркнуто). В разделе 6.1.4 показано, что появление постоянных слагаемых в подобных уравнениях означает неучет равновесного положения вектора намагниченности. Для определения равновесного положения надо эти слагаемые положить равными нулю. При этом получаем

$$A_3 M_0 + A_4 = 0. \tag{6.125}$$

Можно видеть, что это соотношение тождественно (6.103), из которого получаются выражения (6.105), (6.106), определяющие значение

угла θ равновесного положения намагниченности. При учете соотношения (6.125) третье уравнение (6.124) удовлетворяется тождественно (с учетом того, что $M_{z'} = M_0$, то есть $\partial M_{z'}/\partial t = 0$), а первое и второе (6.122), (6.123) принимают вид:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = \gamma(2A_2M_0 + A_5)m_{y'}; \tag{6.126}$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = -\gamma[2(A_2 - A_1)M_0 + A_5]m_{x'}. \tag{6.127}$$

С помощью (6.108)–(6.112) найдем выражения в скобках:

$$2A_2M_0 + A_5 = -H_a; \tag{6.128}$$

$$2(A_2 - A_1)M_0 + A_5 = -\frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}. \tag{6.129}$$

Подставляя эти выражения в (6.126)–(6.127), получаем:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = -\gamma H_a m_{y'}; \tag{6.130}$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = \gamma\frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}m_{x'}. \tag{6.131}$$

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_{x'}^{(0)} + \gamma H_a m_{y'}^{(0)} = 0; \tag{6.132}$$

$$\gamma\frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}m_{x'}^{(0)} - i\omega m_{y'}^{(0)} = 0, \tag{6.133}$$

где $m_{x'}^{(0)}$ и $m_{y'}^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Равенство нулю определителя этой системы дает резонансную частоту в виде:

$$\omega_0 = \gamma\sqrt{H_a^2 - H_0^2}\,. \tag{6.134}$$

6.3.4. Приложенное поле больше поля анизотропии

Рассмотрим теперь в той же геометрии (рис. 6.5) случай, когда приложенное поле больше поля анизотропии.

В равновесном состоянии намагниченность направлена вдоль поля, то есть:

$$\mathbf{M}^{(0)} = \{0, 0, M_0\}. \tag{6.135}$$

Таким образом, все вычисления можно провести в системе координат, связанной с полем, то есть $Oxyz$.

Полная плотность энергии в этой системе имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2}M_x^2 - M_zH_0, \tag{6.136}$$

где первое слагаемое соответствует энергии анизотропии, а второе — энергии взаимодействия намагниченности с полем.

Дифференцируя выражение для плотности энергии (6.136), находим эффективные поля:

$$H_{ex} = \frac{2K}{M_0^2} M_x; \tag{6.137}$$

$$H_{ey} = 0; \tag{6.138}$$

$$H_{ez} = H_0. \tag{6.139}$$

Полные уравнения движения в соответствии с (6.116)–(6.118) принимают вид:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma H_0 M_y; \tag{6.140}$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma \left(\frac{2K}{M_0^2} M_z - H_0 \right) M_x; \tag{6.141}$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = \gamma \frac{2K}{M_0^2} M_x M_y. \tag{6.142}$$

Выполняя линеаризацию в предположении: $M_x = m_x$, $M_y = m_y$, $M_z = M_0$, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma H_0 m_y; \tag{6.143}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma (H_0 - H_a) m_x, \tag{6.144}$$

где, в соответствии с (6.36), использовано обозначение: $H_a = 2K/M_0$.

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_x^{(0)} + \gamma H_0 m_y^{(0)} = 0; \tag{6.145}$$

$$\gamma (H_0 - H_a) m_x^{(0)} - i\omega m_y^{(0)} = 0, \tag{6.146}$$

где $m_x^{(0)}$ и $m_y^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Равенство нулю определителя этой системы дает резонансную частоту в виде:

$$\omega_0 = \gamma \sqrt{H_0 (H_0 - H_a)}. \tag{6.147}$$

6.3.5. Произвольное значение приложенного поля

Обобщая формулы (6.134) и (6.147) на произвольное значение приложенного поля, а также выполняя нормировку частоты ω_0 на γ и поля H_0 на H_a, получаем:

при $H_0 \leqslant H_a$:

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{H_a} \right)^2}; \tag{6.148}$$

при $H_0 \geqslant H_a$:

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{H_0}{H_a} \right) \left(\frac{H_0}{H_a} - 1 \right)}. \tag{6.149}$$

Соответствующие этим формулам зависимости иллюстрируются рис. 6.6. Кривые *1* и *2* построены по формулам (6.134) и (6.147), кривая *3* соответствует линейной зависимости частоты от поля в отсутствие анизотропии, кривая *4* — той же зависимости, сдвинутой вниз на нормированную величину 0,5. Врезка фактически повторяет зависимость поперечной компоненты намагниченности от поля при ориентационном переходе, показанную на рис. 5.3, *б*.

Рис. 6.6. Зависимость резонансной частоты ω_0 от поля H_0 при ориентационном переходе. На врезке — зависимость компоненты намагниченности M_x от поля H_0 при таком же переходе. Все единицы — нормированные. Кривые соответствуют следующим зависимостям: *1* — $\omega_0/\gamma(H_0/H_a)$ при $H_0 \leqslant H_a$; *2* — $\omega_0/\gamma(H_0/H_a)$ при $H_0 \geqslant H_a$; *3* — $\omega_0/\gamma = H_0/H_a$; *4* — $\omega_0/\gamma = H_0 H_a - 1/2$

Из рисунка видно, что по мере увеличения поля от нуля частота резонанса уменьшается, а при поле, равном полю анизотропии, падает до нуля (кривая *1*). Из врезки видно, что этот момент как раз соответствует окончанию ориентационного перехода, то есть выстраиванию намагниченности точно вдоль поля. Обращение в нуль частоты в этой точке соответствует «размягчению» системы, то есть состоянию «мягкой моды» [5, 133–136, 139]. При поле, большем поля анизотропии, намагниченность своего положения не меняет, но частота увеличивается за счет увеличения поля H_0. Зависимость частоты от поля (кривая *2*) по мере его увеличения стремится к линейной пропорциональности самому полю (кривая *4*), однако за счет присутствия поля анизотропии H_a проходит ниже таковой, соответствующей $\gamma H_0/H_a$ (кривая *3*), на величину, равную 0,5 нормированных единиц.

Такой сдвиг асимптоты 4 кривой *2* вниз относительно кривой *3* сохраняется вплоть до стремления H_0 к бесконечности. Причину постоянства величины сдвига можно объяснить, если найти асимптоту формулы (6.149) при стремлении H_0 к бесконечности. Кратко проиллюстрируем процедуру раскрытия такой неопределенности.

Обозначая величину H_0/H_a через x, а разность между частотой $\gamma H_0/H_a$ (кривая *3*) и частотой, определяемой формулой (6.149) (кривая *2*) через u, получаем, что эту разность можно записать в виде:

$$u = x - \sqrt{x(x-1)}\,. \tag{6.150}$$

Чтобы определить величину сдвига, надо найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} u$, однако при стремлении x к бесконечности эта величина переходит в неопределенность типа ∞–∞. Для раскрытия такой неопределенности ее надо преобразовать к виду, удобному для применения правила Лопиталя [268, 269].

Выполним следующее преобразование

$$u = x - \sqrt{x(x-1)} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}. \tag{6.151}$$

Заменим переменную:

$$\frac{1}{x} = y. \tag{6.152}$$

Такая замена при $x \to \infty$ соответствует $y \to 0$. Таким образом, получаем

$$u = \frac{1-\sqrt{1-y}}{y}. \tag{6.153}$$

При этом искомый предел заменяется на $\lim\limits_{y\to 0} u$ с неопределенностью типа 0/0, который теперь можно найти по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} u = \lim_{y\to 0} u = \lim_{y\to 0} \frac{1-\sqrt{1-y}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-y}}}{1} = \frac{1}{2}. \tag{6.154}$$

Таким образом, искомая асимптота кривой *2* должна лежать ниже кривой *3* на эту величину, что как раз и дает кривую *4*.

6.4. Динамическая магнитная восприимчивость при вынужденном ферромагнитном резонансе в условиях ориентационного перехода

В предыдущих разделах 6.1–6.3 рассмотрен свободный ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. Была получена резонансная частота и исследована ее зависимость от приложенного поля, величина которого может быть как ниже, так и выше поля

анизотропии. Обратимся теперь к рассмотрению вынужденных колебаний намагниченности в той же ситуации. Главной целью такого рассмотрения будет получение тензора восприимчивости и его зависимости от поля.

6.4.1. Общая геометрия задачи

Геометрия задачи показана на рис. 6.7. Отличие от геометрии, представленной на рис. 6.5, состоит в добавлении переменного поля $\mathbf{h}$, ориентация которого относительно постоянного поля предполагается произвольной.

Рис. 6.7. Геометрия задачи об определении динамической магнитной восприимчивости

Среду будем считать безграничной, обладающей одноосной анизотропией, причем поле приложено по нормали к этой оси. Будем рассматривать две системы координат — связанную с полем $Oxyz$ и связанную с намагниченностью $Ox'y'z'$. Ось Oz первой системы совпадает с направлением поля, ось Oz' второй совпадает с равновесным направлением вектора намагниченности. Плоскости Oxz и $Ox'z'$ той и другой систем совпадают друг с другом. Оси Oy и Oy' также совпадают.

Поскольку тензор восприимчивости можно полагать жестко связанным с равновесным вектором намагниченности, так как прецессия будет рассматриваться именно в этой системе, зададим переменное поле сразу в виде разложения по осям системы $Ox'y'z'$:

$$\mathbf{h} = \{h_{x'}, h_{y'}, h_{z'}\}. \tag{6.155}$$

С другой стороны, нахождение тензора восприимчивости является подготовительным этапом к решению задачи о распространении магнитостатических волн в касательно намагниченной пластине с нормальной одноосной анизотропией. Поскольку эта задача будет решаться в системе, связанной с полем, то полученный в системе $Ox'y'z'$ тензор восприимчивости затем надо будет преобразовать в систему $Oxyz$.

Таким образом, полная задача будет решаться в два этапа:

1) рассмотрение вынужденных колебаний в системе, связанной с намагниченностью, линеаризация задачи и получение тензора восприимчивости в этой системе;

2) преобразование полученного тензора восприимчивости к системе, связанной с полем.

Как и ранее (разделы 6.3.3 и 6.3.4), рассмотрение проведем по отдельности для случаев приложенного поля меньшего и большего поля анизотропии.

6.4.2. Приложенное поле меньше поля анизотропии

Рассмотрим прежде всего случай, когда поле недостаточно для полного поворота вектора намагниченности в его направлении. В разделах 5.1.1 и 5.1.2 показано, что в этом случае вектор намагниченности претерпевает ориентационный переход от направления, определяемого анизотропией среды, к направлению поля. Получим сначала тензор восприимчивости в системе, связанной с намагниченностью, а затем преобразуем этот тензор к системе, связанной с полем.

6.4.3. Восприимчивость в системе, связанной с намагниченностью

Пользуясь преобразованием (6.79) с матрицей (6.80), подобно (6.89)–(6.91) с учетом (6.155), находим поле в системе $Ox'y'z'$:

$$H_{x'} = -H_0 \sin\theta + h_{x'}; \tag{6.156}$$

$$H_{y'} = h_{y'}; \tag{6.157}$$

$$H_{z'} = H_0 \cos\theta + h_{z'}. \tag{6.158}$$

Полная плотность энергии U равна сумме плотностей энергии анизотропии и энергии взаимодействия намагниченности с полем (6.85). В системе $Ox'y'z'$, подобно (6.93), полная плотность энергии принимает вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2}(M_{x'}^2 \cos^2\theta + M_{z'}^2 \sin^2\theta + 2M_{x'}M_{z'} \sin\theta\cos\theta) + \\ + M_{x'}(-H_0 \sin\theta + h_{x'}) - M_{y'}h_{y'} - M_{z'}(H_0 \cos\theta + h_{z'}). \tag{6.159}$$

Раскроем скобки и упорядочим слагаемые по переменным и показателям степеней:

$$U = -\frac{K}{M_0^2}\cos^2\theta M_{x'}^2 - \frac{K}{M_0^2}\sin^2\theta M_{z'}^2 - \frac{2K}{M_0^2}\sin\theta\cos\theta M_{x'}M_{z'} + \\ + (H_0 \sin\theta - h_{x'})M_{x'} - h_{y'}M_{y'} + (-H_0 \cos\theta - h_{z'})M_{z'}. \tag{6.160}$$

Вводя обозначения, аналогичные (6.95)–(6.99), приводим полную плотность энергии к виду

$$U = A_1 M_{x'}^2 + A_2 M_{z'}^2 + A_3 M_{x'}M_{z'} + \\ + (A_4 - h_{x'})M_{x'} - h_{y'}M_{y'} + (A_5 - h_{z'})M_{z'}. \tag{6.161}$$

Дифференцируя это выражение по компонентам намагниченности (с обратным знаком), находим эффективные поля:

$$H_{ex'} = -[2A_1 M_{x'} + A_3 M_{z'} + (A_4 - h_{x'})]; \tag{6.162}$$

$$H_{ey'} = h_{y'}; \tag{6.163}$$

$$H_{ez'} = -[A_3 M_{x'} + 2A_2 M_{z'} + (A_5 - h_{z'})]. \tag{6.164}$$

Уравнения движения намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау–Лифшица (2.20)–(2.22), в системе $Ox'y'z'$ имеют вид (6.116)–(6.118). Подставляя в эти уравнения поля (6.162)–(6.164) и упорядочивая по переменным, получаем:

$$\frac{\partial M_{x'}}{\partial t} = \gamma\{A_3 M_{x'} M_{y'} + 2A_2 M_{y'} M_{z'} + (A_5 - h_{z'}) M_{y'} + h_{y'} M_{z'}\}; \tag{6.165}$$

$$\frac{\partial M_{y'}}{\partial t} = -\gamma\{A_3 M_{x'}^2 - A_3 M_{z'}^2 + 2(A_2 - A_1) M_{x'} M_{z'} + \\ + (A_5 - h_{z'}) M_{x'} - (A_4 - h_{x'}) M_{z'}\}; \tag{6.166}$$

$$\frac{\partial M_{z'}}{\partial t} = -\gamma\{2A_1 M_{x'} M_{y'} + A_3 M_{y'} M_{z'} + h_{y'} M_{x'} + (A_4 - h_{x'}) M_{y'}\}. \tag{6.167}$$

Для линеаризации положим: $M_{x'} = m_{x'}$, $M_{y'} = m_{y'}$, $M_{z'} = M_0$, где $m_{x'} \ll M_0$, $m_{y'} \ll M_0$. Также будем считать возбуждение малым, то есть $h_{x'} \sim h_{y'} \sim h_{z'} \ll H_0$, причем $H_0 \sim M_0$, то есть слагаемые вида $m_i m_k$, а также $h_j m_l$ имеют второй порядок малости, так что при линеаризации отбрасываются. Подставляя такие компоненты намагниченности в (6.165)–(6.167), учитывая, что, согласно (6.125), в равновесном состоянии $A_3 M_0 + A_4 = 0$, и оставляя члены только нулевого и первого порядков по $m_{x'}$ и $m_{y'}$, получаем:

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = \gamma(2A_2 M_0 + A_5) m_{y'} + \gamma M_0 h_{y'}; \tag{6.168}$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = -\gamma\{[2(A_2 - A_1) M_0 + A_5] m_{x'} - \gamma M_0 h_{x'}\}; \tag{6.169}$$

$$\frac{\partial m_{z'}}{\partial t} = 0. \tag{6.170}$$

Последнее из этих уравнений соответствует условию $M_{z'} = M_0$, то есть удовлетворяется тождественно, так что далее не рассматривается.

Пользуясь (6.95)–(6.99), с учетом (6.105), (6.106), преобразуем входящие в (6.168)–(6.169) выражения в скобках:

$$2A_2 M_0 + A_5 = -H_a; \tag{6.171}$$

$$2(A_2 - A_1) M_0 + A_5 = -\frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}. \tag{6.172}$$

Подставляя эти выражения в (6.168)–(6.169), получаем систему уравнений движения для малых компонент намагниченности в виде

$$\frac{\partial m_{x'}}{\partial t} = -\gamma H_a m_{y'} + \gamma M_0 h_{y'}; \tag{6.173}$$

$$\frac{\partial m_{y'}}{\partial t} = \gamma \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a} m_{x'} - \gamma M_0 h_{x'}. \tag{6.174}$$

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_{x'}^{(0)} + \gamma H_a m_{y'}^{(0)} = \gamma M_0 h_{y'}^{(0)}; \tag{6.175}$$

$$\gamma \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a} m_{x'}^{(0)} - i\omega m_{y'}^{(0)} = \gamma M_0 h_{x'}^{(0)}, \tag{6.176}$$

где $m_{x'}^{(0)}$ и $m_{y'}^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Как и для уравнений (6.132)–(6.133), равенство нулю определителя этой системы дает резонансную частоту в виде

$$\omega_0 = \gamma\sqrt{H_a^2 - H_0^2}\,. \tag{6.177}$$

Для упрощения дальнейшей записи формул введем вспомогательные обозначения:

$$B_1 = H_a; \tag{6.178}$$

$$B_2 = \frac{H_a^2 - H_0^2}{H_a}. \tag{6.179}$$

Опустим также далее верхний индекс «0», не забывая однако, что величины, обозначаемые далее через $m_{x'}$, $m_{y'}$, $h_{x'}$, $h_{y'}$ являются амплитудами синусоидальных переменных и не зависят от времени.

В результате получаем уравнения движения в виде:

$$i\omega m_{x'} + \gamma B_1 m_{y'} = \gamma M_0 h_{y'}; \tag{6.180}$$

$$\gamma B_2 m_{x'} - i\omega m_{y'} = \gamma M_0 h_{x'}. \tag{6.181}$$

Решая эту систему, находим выражение $m_{x'}$, $m_{y'}$ через $h_{x'}$, $h_{y'}$:

$$m_{x'} = G_1 h_{x'} + H h_{y'}; \tag{6.182}$$

$$m_{y'} = -H h_{x'} + G_2 h_{y'}, \tag{6.183}$$

где введены вспомогательные обозначения:

$$G_1 = \frac{\gamma^2 B_1 M_0}{D_0} = \frac{\gamma^2 H_a M_0}{\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2}; \tag{6.184}$$

$$G_2 = \frac{\gamma^2 B_2 M_0}{D_0} = \frac{\gamma^2 (H_a^2 - H_0^2) M_0}{H_a[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2]}; \tag{6.185}$$

$$H = \frac{i\omega\gamma M_0}{D_0} = \frac{i\omega\gamma M_0}{\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2}, \tag{6.186}$$

в том числе:

$$D_0 = \gamma^2 B_1 B_2 - \omega^2 = \gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2. \tag{6.187}$$

Таким образом, получено решение задачи о вынужденных колебаниях намагниченности в системе, связанной с намагниченностью.

Запишем это решение с помощью матриц:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{\chi}'\mathbf{h}', \tag{6.188}$$

где $\overleftrightarrow{\chi}'$ — тензор восприимчивости, имеющий вид

$$\overleftrightarrow{\chi}' = \left(\begin{array}{c|c|c} G_1 & H & 0 \\ \hline -H & G_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{6.189}$$

где G_1, G_2, H определяются формулами (6.184)–(6.187).

6.4.4. Восприимчивость в системе, связанной с полем

Итак, получен тензор восприимчивости в системе, связанной с намагниченностью (6.189), то есть первая часть поставленной задачи решена. Для разрешения второй части этот тензор надо преобразовать в систему, связанную с полем.

Эту задачу можно решить двумя способами:

1) исходя из уравнений (6.182)–(6.183), последовательно преобразовать компоненты векторов намагниченности $\mathbf{m}'$ и поля $\mathbf{h}'$ в систему, связанную с полем, после чего из полученных уравнений найти тензор восприимчивости;

2) преобразовать тензор, полученный в системе, связанной с намагниченностью, к системе, связанной с полем, используя соответствующие матрицы поворота систем координат.

Оба эти способа приводят к одинаковым результатам, однако второй несколько проще и менее громоздок, поэтому рассмотрим преобразование именно вторым способом.

Итак, согласно (6.188), имеется соотношение

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{\chi}' \mathbf{h}', \tag{6.190}$$

которое надо привести к виду

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{\chi} \mathbf{h}. \tag{6.191}$$

В разделе 3.2.5 для случая перехода от одной системы координат к другой рассмотрены правила преобразования векторов. Рассмотрим сначала, как эти правила можно применить к преобразованию тензоров в общем виде.

Пусть для преобразования векторов имеются матрицы $\overleftrightarrow{A}$ и $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ такие, что прямое преобразование имеет вид (3.10):

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{m}'; \tag{6.192}$$

$$\mathbf{h} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{h}', \tag{6.193}$$

а соответствующее ему обратное преобразование имеет вид (3.14):

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\,\mathbf{m}; \tag{6.194}$$

$$\mathbf{h}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\,\mathbf{h}. \tag{6.195}$$

Используя эти формулы в совокупности с (6.190), выполним цепочку последовательных преобразований:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{A}\,\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}(\overleftrightarrow{\chi}'\mathbf{h}') = \overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{\chi}'\mathbf{h}' = \overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{\chi}'(\overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{h}) =$$
$$= \overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{\chi}'\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{h} = (\overleftrightarrow{A}\overleftrightarrow{\chi}'\overleftrightarrow{A}^{-1})\mathbf{h}. \quad (6.196)$$

Из сравнения первого и последнего членов этой цепочки с (6.191) получаем

$$\overleftrightarrow{\chi} = \mathbf{A}\overleftrightarrow{\chi}'\overleftrightarrow{A}^{-1}. \quad (6.197)$$

Из сравнения рис. 6.7 с рис. 6.4 можно видеть, что присутствующая в обоих случаях система $Oxyz$ связана с полем, а система $Ox'y'z'$ связана с намагниченностью. Поэтому присутствующие в выражении (6.197) матрицы $\overleftrightarrow{A}$ и $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ тождественны матрицам $\overleftrightarrow{A}_3$ и $\overleftrightarrow{A}_3^{-1}$ описываемым формулами (6.83) и (6.84). Таким образом, для входящих в выражение (6.197) матриц $\overleftrightarrow{A}$ и $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ получаем:

$$\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad (6.198)$$

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (6.199)$$

Здесь взаимная ориентация систем $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ определяется равновесным положением вектора намагниченности, то есть, согласно (6.105) и (6.106), угол θ связан с полями H_0 и H_a соотношениями:

$$\cos\theta = \frac{H_0}{H_a}; \quad (6.200)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a}. \quad (6.201)$$

Подставляя в выражение (6.197) матрицы (6.198) и (6.199), а также тензор восприимчивости (6.189), после чего выполняя перемножение матриц справа налево, получаем тензор восприимчивости в системе, связанной с полем, в виде

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} G_1\cos^2\theta & H\cos\theta & -G_1\sin\theta\cos\theta \\ -H\cos\theta & G_2 & H\sin\theta \\ -G_1\sin\theta\cos\theta & -H\sin\theta & G_1\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (6.202)$$

где величины G_1, G_2, H определяются соотношениями (6.184)–(6.187).

Итак, получен тензор восприимчивости в системе, связанной с полем, так что вектор намагниченности $\mathbf{m}$ определяется через поле $\mathbf{h}$ соотношением (6.191).

Выполним некоторые упрощения, для чего запишем тензор восприимчивости (6.202) в укороченных обозначениях:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline -A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{array}\right), \tag{6.203}$$

где в соответствии с (6.184)–(6.187) с учетом (6.178)–(6.179), а также (6.200)–(6.201), имеют место соотношения:

$$A_{11} = G_1 \cos^2\theta = \frac{\gamma^2 M_0 H_0^2}{H_a\left[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2\right]}; \tag{6.204}$$

$$A_{12} = H\cos\theta = \frac{i\omega\gamma M_0 H_0}{H_a\left[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2\right]}; \tag{6.205}$$

$$A_{13} = -G_1 \sin\theta\cos\theta = -\frac{\gamma^2 M_0 H_0\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a\left[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2\right]}; \tag{6.206}$$

$$A_{22} = G_2 = \frac{\gamma^2 M_0 (H_a^2 - H_0^2)}{H_a\left[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2\right]}; \tag{6.207}$$

$$A_{23} = H\sin\theta = \frac{i\omega\gamma M_0\sqrt{H_a^2 - H_0^2}}{H_a\left[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2\right]}; \tag{6.208}$$

$$A_{33} = G_1 \sin^2\theta = \frac{\gamma^2 M_0 (H_a^2 - H_0^2)}{H_a\left[\gamma^2(H_a^2 - H_0^2) - \omega^2\right]}. \tag{6.209}$$

При этом компоненты вектора намагниченности выражаются через компоненты поля с помощью тензора (6.203) следующим образом:

$$m_x = A_{11}h_x + A_{12}h_y + A_{13}h_z; \tag{6.210}$$

$$m_y = -A_{12}h_x + A_{22}h_y + A_{23}h_z; \tag{6.211}$$

$$m_z = A_{13}h_x - A_{23}h_y + A_{33}h_z. \tag{6.212}$$

Подобно (2.56), (2.57), введем нормированные частоты:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \tag{6.213}$$

$$\Omega_H = \frac{H_0}{4\pi M_0}; \tag{6.214}$$

$$\Omega_A = \frac{H_a}{4\pi M_0}. \tag{6.215}$$

Разделяя числители и знаменатели дробей, входящих в (6.184)–(6.186), на $(4\pi\gamma M_0)^2$ и вводя частоты (6.213)–(6.215), получаем:

$$G_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_A}{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2}; \tag{6.216}$$

$$G_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2]}; \tag{6.217}$$

$$H = \frac{i}{4\pi}\frac{\Omega}{(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2}. \tag{6.218}$$

С помощью этих обозначений, а также учитывая (6.200)–(6.201), выразим компоненты тензора (6.204)–(6.209) через нормированные частоты:

$$A_{11} = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_H^2}{\Omega_A\left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2\right]}; \tag{6.219}$$

$$A_{12} = \frac{i}{4\pi}\frac{\Omega\Omega_H}{\Omega_A\left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2\right]}; \tag{6.220}$$

$$A_{13} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_H\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}}{\Omega_A\left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2\right]}; \tag{6.221}$$

$$A_{22} = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A\left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2\right]}; \tag{6.222}$$

$$A_{23} = \frac{i}{4\pi}\frac{\Omega\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}}{\Omega_A\left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2\right]}; \tag{6.223}$$

$$A_{33} = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_A^2 - \Omega_H^2}{\Omega_A\left[(\Omega_A^2 - \Omega_H^2) - \Omega^2\right]}. \tag{6.224}$$

Из такой записи можно видеть, что

$$A_{22} = A_{33}, \tag{6.225}$$

то есть независимыми в тензоре (6.203) являются не шесть, а всего пять компонент, так что его можно записать в несколько более простом виде:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline -A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{13} & -A_{23} & A_{22} \end{array}\right). \tag{6.226}$$

Замечание. Важно отметить, что полученный тензор, хотя и обладает определенными свойствами симметрии, но не является ни полностью симметричным, ни полностью антисимметричным. Так компоненты χ_{12} и χ_{21}, а также χ_{23} и χ_{32}, симметричные относительно главной диагонали, имеют противоположные знаки, тогда как для членов χ_{13} и χ_{31}, симметричных относительно той же диагонали, знаки совпадают.

Этим свойством полученный тензор существенно отличается от классического тензора для магнетика в насыщенном состоянии, который является антисимметричным [6–8]. Можно полагать, что такие свойства симметрии тензора, определяющего восприимчивость магнетика в условиях ориентационного перехода, заметным образом должны сказываться на дисперсии и свойствах невзаимности для различных волновых процессов в ферритах.

6.4.5. Приложенное поле больше поля анизотропии

Рассмотрим теперь случай, когда приложенное поле больше поля анизотропии. Как показано в разделе 5.1.1, благодаря перпендикулярности между направлениями поля и оси анизотропии (рис. 6.7), вектор намагниченности ориентирован точно вдоль поля (как с точностью до обозначений показано на рис. 5.3), так что задачу можно полностью решить в системе, связанной с полем.

Для рассмотрения вынужденных колебаний будем считать, что приложенное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \{h_x, h_y, H_0\}, \tag{6.227}$$

где $h_x \sim h_y \ll H_0$.

Плотность энергии имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2} M_x^2 - h_x M_x - h_y M_y - H_0 M_z. \tag{6.228}$$

Дифференцируя это выражение, получаем эффективные поля в виде:

$$H_{ex} = \frac{2K}{M_0^2} M_x + h_x; \tag{6.229}$$

$$H_{ey} = h_y; \tag{6.230}$$

$$H_{ez} = H_0. \tag{6.231}$$

Уравнения движения намагниченности, получаемые из раскрытия векторного произведения в уравнении Ландау–Лифшица (2.20)–(2.22) в системе $Oxyz$, имеют вид:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma(M_y H_{ez} - M_z H_{ey}); \tag{6.232}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma(M_z H_{ex} - M_x H_{ez}); \tag{6.233}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma(M_x H_{ey} - M_y H_{ex}). \tag{6.234}$$

Подставляя эффективные поля (6.229)–(6.231), получаем уравнения движения в виде:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma H_0 M_y + \gamma h_y M_z; \tag{6.235}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma\left(\frac{2K}{M_0^2}M_z - H_0\right)M_x - \gamma h_x M_z; \tag{6.236}$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma\left\{h_y M_x - \left(\frac{2K}{M_0^2}M_x + h_x\right)M_y\right\}. \tag{6.237}$$

Выполняя линеаризацию в предположении: $M_x = m_x$, $M_y = m_y$, $M_z = M_0$, а также учитывая, что $h_x \sim h_y \ll H_0$, то есть оставляя члены только первого порядка по m_x, m_y, h_x, h_y, получаем:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\gamma H_0 m_y + \gamma M_0 h_y; \tag{6.238}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = \gamma(H_0 - H_a)m_x - \gamma M_0 h_x, \tag{6.239}$$

где в соответствии с (6.36) использовано обозначение: $H_a = 2K/M_0$. Третье уравнение здесь не выписано, так как оно удовлетворяется тождественно.

При зависимости от времени вида $\exp(i\omega t)$ получаем:

$$i\omega m_x^{(0)} + \gamma H_0 m_y^{(0)} = \gamma M_0 h_y^{(0)}; \tag{6.240}$$

$$\gamma(H_0 - H_a)m_x^{(0)} - i\omega m_y^{(0)} = \gamma M_0 h_x^{(0)}, \tag{6.241}$$

где $m_x^{(0)}$ и $m_y^{(0)}$ — амплитуды переменных компонент намагниченности.

Решая эти уравнения, получаем:

$$m_x^{(0)} = P_1 h_x^{(0)} + Q h_y^{(0)}; \tag{6.242}$$

$$m_x^{(0)} = Q h_x^{(0)} + P_2 h_y^{(0)}, \tag{6.243}$$

где введены обозначения:

$$P_1 = \frac{\gamma^2 M_0 H_0}{\gamma^2 H_0(H_0 - H_a) - \omega^2}; \tag{6.244}$$

$$P_2 = \frac{\gamma^2 M_0 (H_0 - H_a)}{\gamma^2 H_0(H_0 - H_a) - \omega^2}; \tag{6.245}$$

$$Q = \frac{i\omega\gamma M_0}{\gamma^2 H_0(H_0 - H_a) - \omega^2}. \tag{6.246}$$

Таким образом, тензор восприимчивости имеет вид:

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} P_1 & Q & 0 \\ \hline -Q & P_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{6.247}$$

Записывая компоненты тензора через нормированные частоты (6.213)–(6.215), получаем:

$$P_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_H}{\Omega_H(\Omega_H - \Omega_A) - \Omega^2}; \tag{6.248}$$

$$P_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\Omega_H - \Omega_A}{\Omega_H(\Omega_H - \Omega_A) - \Omega^2}; \tag{6.249}$$

$$Q = \frac{i}{4\pi}\frac{\Omega}{\Omega_H(\Omega_H - \Omega_A) - \Omega^2}. \tag{6.250}$$

Заметим, что в отличие от (6.226) этот тензор восприимчивости имеет чисто антисимметричный вид, что согласуется с классическим тензором для прецессии намагниченности в насыщенном состоянии [6–8].

Выводы по главе 6

Настоящая глава посвящена описанию явления ферромагнитного резонанса в анизотропной среде, в том числе в условиях ориентационного перехода.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрен ферромагнитный резонанс в пластине, обладающей одноосной и кубической анизотропией в случае, когда ОЛН и ось [111] перпендикулярны плоскости пластины. Отмечено принципиальное различие случаев касательного и нормального намагничивания, обусловленное несимметричным расположением осей типа [111] относительно плоскости пластины. Для случая касательного намагничивания рассмотрение выполнено в системе координат, связанной с полем. При этом плотность энергии кубической анизотропии, первоначально записанная в системе, связанной с ребрами кубической ячейки, также преобразована к системе, связанной с полем, для чего получена соответствующая матрица поворота. Отмечено разнообразие возможных видов записи матрицы поворота, обусловленное различными вариантами выбора ориентации углов Эйлера относительно исходной системы координат. Продемонстрирована эквивалентность матриц для некоторых характерных случаев такой ориентации.

2. Рассмотрены два важных для практики частных случая касательного намагничивания: когда поле параллельно проекции оси типа [111] на плоскость пленки и когда поле перпендикулярно такой проекции. Для обоих случаев получены плотность энергии, эффективные поля и записаны уравнения движения. Приведены два эквивалентных варианта выполнения линеаризации задачи. Согласно первому варианту, при заданном направлении и величине поля сначала находится равновесное состояние намагниченности, отклонение вектора которой от этого направления заведомо предполагается малым, а в получающихся уравнениях движения все члены, порядок которых по намагниченности превышает первый, полностью опускаются. Согласно второму варианту, равновесная ориентация намагниченности заранее не определяется, а уравнения движения записываются через полные компоненты вектора намагниченности, после чего возникающие в этих уравнениях постоянные слагаемые полагаются равными нулю.

Показана полная эквивалентность обоих вариантов, причем отмечено, что равенство нулю постоянных слагаемых во втором варианте, как раз соответствует определению равновесного состояния в первом.

3. Приведен способ определения важного для практики параметра материала — разности между полями размагничивания и одноосной анизотропии с учетом поля кубической анизотропии. Отмечена возможность численного решения получающегося самосогласованного уравнения третьей степени. Рассмотрен случай нормального намагничивания пластины. Получены плотность энергии, эффективные поля и линеаризованные уравнения движения. Найдена резонансная частота и показана возможность определения параметра разности между полями размагничивания и одноосной анизотропии.

4. Рассмотрен ферромагнитный резонанс при простом ориентационном переходе. Определена равновесная ориентация вектора намагниченности при изменении поля, перпендикулярного к ОЛН, в интервале полей, меньших поля анизотропии. Получена матрица преобразования, соответствующая переходу от лабораторной системы координат к системе, связанной с намагниченностью. В такой системе координат получены уравнения движения намагниченности и выполнена их линеаризация. Получена резонансная частота свободной прецессии и показано, что она определяется квадратным корнем из разности между квадратами поля анизотропии и внешнего поля. Рассмотрены условия резонанса при ориентации внешнего поля перпендикулярно ОЛН, при внешнем поле большем поля анизотропии. Получены линеаризованные уравнения движения и найдена резонансная частота свободной прецессии. Показано, что в этом случае она определяется квадратным корнем из произведения внешнего поля на разность между внешним полем и полем анизотропии. Полученные два решения обобщены на полный интервал изменения поля от нуля до бесконечности. Показано, что по мере увеличения поля, при его значении меньшем поля анизотропии, резонансная частота понижается вплоть до нуля в точке фазового перехода, после чего, в поле, большем поля анизотропии, увеличивается по закону, асимптотически стремящемуся к линейному возрастанию. Отмечен постоянный, не зависящий от величины поля сдвиг асимптоты вниз по сравнению с линейной зависимостью, соответствующей прямой пропорциональности резонансной частоты величине поля. Конечная величина сдвига определена путем раскрытия неопределенности между асимптотой и линейной зависимостью, имеющей место при стремлении поля к бесконечности.

5. Рассмотрена вынужденная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода. Представлена формулировка задачи о получении тензора динамической восприимчивости для ферромагнитного резонанса в пластине с нормальной одноосной анизотропией, намагничиваемой полем, перпендикулярным оси анизотропии. Показано, что решение такой задачи для случая внешнего поля, меньшего поля анизотропии, требует последовательной реализации двух этапов.

Первый этап состоит в рассмотрении вынужденных колебаний в системе, связанной с намагниченностью, линеаризации уравнений движения и получении тензора восприимчивости в этой системе. Второй этап состоит в преобразовании полученного тензора восприимчивости к лабораторной системе координат, связанной с полем. В рамках первого этапа получены линеаризованные уравнения вынужденной прецессии намагниченности, из решения которых найден тензор динамической восприимчивости, имеющий антисимметричный характер. В рамках второго этапа выполнено преобразование полученного тензора к лабораторной системе координат. Приведены два возможных способа выполнения такого преобразования, показана их эквивалентность и найдены матрицы прямого и обратного преобразований. Показано, что полученный тензор восприимчивости в системе, связанной с полем, не является полностью ни симметричным, ни антисимметричным. Так, компоненты, расположенные в непосредственной близости от главной диагонали матрицы тензора, являются антисимметричными, а более удаленные от той же диагонали — симметричными. Высказано предположение о важности специфической симметрии полученного тензора в формировании дисперсии и характеристик невзаимности волновых процессов в ферритах.

6. Рассмотрено решение той же задачи для случая внешнего поля, большего поля анизотропии. Показано, что здесь, благодаря ориентации вектора намагниченности точно вдоль направления поля, задача может быть полностью решена в один этап в системе, связанной с полем. Получены линеаризованные уравнения движения для вынужденной прецессии намагниченности. Из решения уравнений получен тензор динамической восприимчивости, показано, что он является полностью антисимметричным. Отмечен резонансный характер компонент тензора, отличающийся от классического лишь наличием разности между полем анизотропии и внешним полем.

Глава 7

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В ПЛЕНКАХ С НАКЛОНОМ ОСИ ЛЕГКОГО НАМАГНИЧИВАНИЯ

Настоящая глава посвящена описанию явления ферромагнитного резонанса в пленках с отклонением оси магнитной анизотропии от нормали к плоскости пленки. Рассмотрены условия ферромагнитного резонанса при намагничивании пленок с наклонной одноосной анизотропией полями различных направлений. Отмечена возможность и приведены условия раздельного измерения поля анизотропии и намагниченности насыщения в случае отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пленки. Кратко рассмотрены результаты экспериментов по ферромагнитному резонансу в реальных пленках ферритов-гранатов.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать работам [6–8, 20, 22–25], остальные ссылки указаны в тексте.

7.1. Общие положения расчета ферромагнитного резонанса в пленках с наклоном оси легкого намагничивания

7.1.1. Общая методология расчета

В предыдущих разделах рассмотрен ферромагнитный резонанс в одноосных пленках, ось анизотропии которых ориентирована перпендикулярно их плоскости. Однако в практике часто встречаются пленки с осью анизотропии, составляющей с нормалью к плоскости пленки значительный угол [25, 30, 40, 42, 275, 278, 355–358]. Рассмотрим некоторые особенности ФМР в таких пленках.

При расчете частоты ФМР в таких пленках часто используется метод Смита–Сула, представляющий собой решение линеаризованного уравнения Ландау–Лифшица в сферической системе координат [6–8, 31, 267]. Этот метод в ряде случаев позволяет измерить частоту ФМР в условиях ориентационного перехода [31], а также определить константу анизотропии и ориентацию ОЛН относительно плоскости пленки [23–25]. Имеется также возможность определения ориентации осей и величины константы кубической анизотропии [22]. Другим достоинством метода можно считать возможность раздельного измерения

константы одноосной анизотропии и намагниченности насыщения материала пленки [23, 25].

Однако, несмотря на определенное удобство, позволяющее обойтись без вычисления громоздких определителей, этот метод имеет существенный недостаток, состоящий в расходимости получаемого значения резонансной частоты при ориентации постоянного поля вблизи полярной оси сферической системы координат. Поэтому для успешного использования метода следует ориентировать полярную ось таким образом, чтобы избежать ее близости с направлением постоянного поля. Если в эксперименте поле все время ориентировано в одной плоскости, то в качестве полярной оси следует выбирать нормаль к этой плоскости.

Именно к такому случаю относятся эксперименты, описанные в работах [22–25], где поле вращалось по кругу в одной плоскости. Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

7.1.2. Общая геометрия задачи

Общая геометрия задачи показана на рис. 7.1. Предполагается, что внешнее поле **H** в процессе своего изменения всегда остается в одной плоскости, причем направление поля в пределах этой плоскости может быть произвольным. Декартова система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, чтобы с плоскостью изменения магнитного поля совпадала координатная плоскость Oxy. При этом ось Oz получается перпендикулярной к плоскости изменения поля.

Такая ориентация осей декартовой системы необходима для того, чтобы при переходе к сферической системе координат полярная ось

Рис. 7.1. Общая геометрия задачи о ферромагнитном резонансе в пленках с наклоном оси легкого намагничивания. В левом верхнем углу — схема ориентации пленки

которой будет ориентирована вдоль оси Oz, угол между направлением поля и полярной осью всегда был достаточно удален от нуля. В данном случае этот угол составляет 90°, что для устранения отмеченной выше расходимости вполне достаточно.

Поскольку поле задает только ориентацию оси Oz, то ориентация плоскостей Oxz и Oyz может быть выбрана произвольной. Удобно совместить одну из этих плоскостей с плоскостью пленки, например плоскость Oyz. При этом плоскость Oxz будет проходить через нормаль к плоскости пленки перпендикулярно самой этой плоскости.

По условию задачи пленка обладает одноосной анизотропией, ось которой отклонена от нормали к плоскости пленки, то есть от оси Ox. Как отмечено выше, ориентация поля предполагается только в плоскости Oxy. Далее для простоты будут рассмотрены два частных случая ориентации оси легкого намагничивания (ОЛН):

1) ОЛН лежит в плоскости Oxy и составляет с осью Ox угол ψ_1, то есть ОЛН лежит в плоскости изменения поля;

2) ОЛН лежит в плоскости Oxz и составляет с осью Ox угол ψ_2, то есть ОЛН лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля.

7.1.3. Введение сферических координат

Введем сферическую систему координат, полярная ось которой совпадает с осью Oz, а азимутальная — с осью Ox. При этом компоненты вектора намагниченности будут иметь вид (индекс «m» для простоты опускаем):

$$M_x = M_0 \sin\theta \cos\varphi; \tag{7.1}$$

$$M_y = M_0 \sin\theta \sin\varphi; \tag{7.2}$$

$$M_z = M_0 \cos\theta. \tag{7.3}$$

В виде, нормированном на M_0, те же компоненты принимают вид:

$$m_x = \sin\theta \cos\varphi; \tag{7.4}$$

$$m_y = \sin\theta \sin\varphi; \tag{7.5}$$

$$m_z = \cos\theta. \tag{7.6}$$

Поле имеет компоненты:

$$H_x = H_0 \cos\varphi_H; \tag{7.7}$$

$$H_y = H_0 \sin\varphi_H; \tag{7.8}$$

$$H_z = 0. \tag{7.9}$$

В виде, нормированном на H_0, компоненты поля принимают вид:

$$h_x = \cos\varphi_H; \tag{7.10}$$

$$h_y = \sin\varphi_H; \tag{7.11}$$

$$h_z = 0. \tag{7.12}$$

7.1.4. Плотности энергии различных видов

В такой постановке задачи полная плотность энергии имеет три составляющих: энергию размагничивания U_p, энергию взаимодействия намагниченности с внешним полем U_m и энергию анизотропии U_a. Рассмотрим эти виды энергии последовательно.

Плотность энергии размагничивания. Энергия размагничивания определяется формой образца, то есть в данном случае — тонкой пленки, плоскость которой перпендикулярна оси Ox. В соответствии с (2.5), эта энергия имеет вид

$$U_p = -\frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{H}_m, \tag{7.13}$$

где $\mathbf{H}_m$ — магнитное поле, имеющее место внутри образца и обусловленное его формой, обычно называемое «полем размагничивания». В частном случае эллипсоида это поле является однородным и может быть определено формулой

$$\mathbf{H}_m = -\overleftrightarrow{N}\mathbf{M}, \tag{7.14}$$

где $\overleftrightarrow{N}$ — тензор размагничивающих факторов эллипсоида

$$\overleftrightarrow{N} = \left(\begin{array}{c|c|c} N_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & N_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & N_z \end{array}\right). \tag{7.15}$$

Тонкую пленку (или безграничную пластину) можно рассматривать как частный случай эллипсоида. При ориентации плоскости такой пленки перпендикулярно оси Ox тензор размагничивающих факторов принимает вид

$$\overleftrightarrow{N} = \left(\begin{array}{c|c|c} 4\pi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{7.16}$$

Подставляя (7.16) в (7.14), выполняя умножение и подставляя полученное выражение в (7.13), с учетом (7.1)–(7.3), получаем плотность энергии размагничивания в виде, аналогичном (4.204):

$$U_m^{(1)} = 2\pi M_0^2 m_x^2 = 2\pi M_0^2 \sin^2\theta\cos^2\varphi. \tag{7.17}$$

Учитывая условие сохранения длины вектора намагниченности (4.205), получаем другое, аналогичное (4.206), эквивалентное (7.17), выражение для плотности энергии размагничивания:

$$U_m^{(2)} = -2\pi M_0^2(m_y^2 + m_z^2) = -2\pi M_0^2(\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta). \tag{7.18}$$

Замечание. Следует отметить, что приведенный вид тензора размагничивающих факторов (7.15) имеет место только для эллипсоида

в декартовой системе координат, оси которой ориентированы вдоль главных осей эллипсоида. То же касается вида тензора (7.16), который является частным случаем (7.15) в той мере, в которой безграничную в плоскости тонкую пленку можно считать частным случаем эллипсоида, две оси которого бесконечно велики. В общем же случае, когда форма образца не соответствует форме эллипсоида, выражение для плотности энергии (7.13) сохраняет свой вид, однако поле размагничивания является неоднородным, так что все (или почти все) компоненты тензора размагничивающих факторов $\overleftrightarrow{N}$ становятся отличными от нуля.

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с полем. Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем U_h, согласно (4.207), имеет вид

$$U_h = -\mathbf{MH}, \tag{7.19}$$

или в записи через нормированные компоненты

$$U_h = -M_0 H_0 (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z). \tag{7.20}$$

Подставляя (7.4)–(7.6) и (7.10)–(7.12), после небольших тригонометрических преобразований, получаем:

$$U_h = -M_0 H_0 \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_H). \tag{7.21}$$

Плотность энергии анизотропии. Как следует из раздела 4.2, плотность энергии анизотропии при произвольной ориентации ОЛН относительно исходной системы координат может иметь довольно сложный вид. Поэтому рассмотрим этот вопрос постепенно, переходя от более простой ситуации к более сложной.

7.2. Параллельно-перпендикулярная геометрия

Из сравнения рис. 7.1 с рис. 4.5 можно видеть, что в данной задаче (в обоих ее вариантах) ориентация ОЛН относительно исходной декартовой системы координат представляет собой как бы частный случай более общего, показанного на рис. 4.5, поэтому имеется возможность вычисления несколько упростить. Рассмотрим сначала наиболее простой случай ориентации ОЛН точно по нормали к плоскости пленки, то есть при $\psi = 0$. Поскольку при этом любые геометрические элементы структуры находятся только в параллельном или перпендикулярном соотношении, то будем условно называть этот случай «параллельно-перпендикулярной геометрией».

Как показано в разделе 4.5, плотность энергии одноосной анизотропии, а также энергии размагничивания допускают два различных вида записи, переходящие один в другой при условии сохранения длины вектора намагниченности. Рассмотрим здесь оба варианта.

7.2.1. Эквивалентность двух выражений для плотности энергии

В этом случае в геометрии рис. 7.1, с учетом физического содержания различных видов записи (разделы 4.5.1, 4.5.2), плотность энергии анизотропии имеет вид

$$U_a^{(1)} = K(m_y^2 + m_z^2), \tag{7.22}$$

а плотность энергии размагничивания имеет вид

$$U_m^{(1)} = 2\pi M_0^2 m_x^2. \tag{7.23}$$

Полная плотность энергии равна сумме этих двух выражений:

$$U = U_a^{(1)} + U_m^{(1)} = K(m_y^2 + m_z^2) + 2\pi M_0^2 m_x^2. \tag{7.24}$$

Из условия сохранения длины вектора намагниченности

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1, \tag{7.25}$$

получаем

$$m_y^2 + m_z^2 = 1 - m_x^2. \tag{7.26}$$

Подставляя это выражение в первое слагаемое (7.24), получаем

$$U = K - (K - 2\pi M_0^2)m_x^2 \to -K_a m_x^2. \tag{7.27}$$

Такая запись при $K > 2\pi M_0^2$, с точностью до постоянного слагаемого, эквивалентна одноосной анизотропии с константой

$$K_a = K - 2\pi M_0^2, \tag{7.28}$$

где ось такой анизотропии ориентирована вдоль координатной оси Ox. При $K < 2\pi M_0^2$ это же выражение описывает легкоплоскостную анизотропию, плоскость которой параллельна координатной плоскости Oyz.

С другой стороны, из (7.25) можно получить

$$m_x^2 = 1 - (m_y^2 + m_z^2). \tag{7.29}$$

Подставляя это выражение во второе слагаемое (7.24), получаем

$$U = 2\pi M_0^2 + (K - 2\pi M_0^2)(m_y^2 + m_z^2) \to K_a(m_y^2 + m_z^2), \tag{7.30}$$

что также при $K > 2\pi M_0^2$ дает одноосную или при $K < 2\pi M_0^2$ — легкоплоскостную анизотропию с той же константой K.

При противоположных видах записи той же одноосной анизотропии и того же размагничивания (разделы 4.5.1, 4.5.2), получаем

$$U = U_a^{(2)} + U_m^{(2)} = -Km_x^2 - 2\pi M_0^2(m_y^2 + m_z^2), \tag{7.31}$$

откуда, подставляя (7.26) или (7.29), получаем те же виды легкоосной или легкоплоскостной анизотропии.

Таким образом, в случае одноосной анизотропии, ось которой перпендикулярна плоскости пленки, суммарная анизотропия эквивалентна одноосной или легкоплоскостной анизотропии, причем вклады того

и другого видов анизотропии неразличимы, а характер определяется разностью между соответствующими константами.

Замечание. Упомянутое обстоятельство (эквивалентность вкладов в плотность энергии от той и другой анизотропии) приводит к невозможности в эксперименте по классическому ферромагнитному резонансу различить одну анизотропию от другой. Если бы такое различие было возможно, то это позволило бы в эксперименте измерить по отдельности константу одноосной анизотропии и намагниченность насыщения материала пленки.

В известных автором настоящей монографии экспериментах различие между вкладами той и другой анизотропии проявляется в двух случаях:

1) ось анизотропии отклонена от нормали к плоскости пленки;

2) размагничивание пленки неоднородно, например, в ее плоскости приложено небольшое поле, периодическое по пространству (например, поле магнитостатической волны [1]).

Раздельное измерение констант анизотропии и намагниченности в соответствии с первым случаем реализовано в работах [22–25], в соответствии со вторым — в работе [66]. Несколько далее (в разделах 7.5 и частично 7.6) будет более подробно рассмотрен именно первый случай.

7.2.2. Два характерных варианта наклонной геометрии

В реальных пленках ось анизотропии часто отклоняется от нормали к плоскости пленки [25, 30, 40, 42, 275, 278, 355–358]. Согласно исторически сложившейся традиции, такое отклонение именуется «наклоном оси анизотропии», поэтому будем этот случай условно называть «наклонной геометрией».

Поскольку эксперименты по ФМР, как правило, проводятся при вращении пленки в каком-то достаточно сильном постоянном поле [6–8, 22–25], то относительно системы координат, связанной с пленкой, поле как бы испытывает поворот на определенные углы, оставаясь все время в одной плоскости.

Если считать, что плоскость поворота поля проходит через нормаль к плоскости пленки, то принципиально различными можно считать два случая. Первый — когда ОЛН лежит в этой же плоскости, второй — когда плоскость, проходящая через ОЛН и нормаль к плоскости пленки, перпендикулярна плоскости поворота поля. Эти случаи как раз соответствуют двум различным ориентациям ОЛН относительно плоскости изменения поля, которые отмечались при рассмотрении рис. 7.1. С целью наглядности приведем здесь их формулировки еще раз:

1) ОЛН лежит в плоскости Oxy и составляет с осью Ox угол ψ_1, то есть ОЛН лежит в плоскости изменения поля;

2) ОЛН лежит в плоскости Oxz и составляет с осью Ox угол ψ_2, то есть ОЛН лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля.

Рассмотрим эти случаи последовательно.

7.3. Вариант первый: ось легкого намагничивания лежит в плоскости изменения поля

В этом случае в геометрии рис. 7.1 полярный и азимутальный углы ОЛН (точнее — ОЛН-1) равны:

$$\theta_a = 90^\circ; \tag{7.32}$$

$$\varphi_a = \psi_1. \tag{7.33}$$

В пределах рассмотрения настоящего случая (до конца раздела 7.3) с целью упрощения дальнейшей записи индекс «1» при ψ далее опускаем, то есть полагаем:

$$\varphi_a = \psi. \tag{7.34}$$

Из общей геометрии (рис. 7.1) можно видеть, что при вращении поля $\mathbf{H}$ в плоскости Oxy оно проходит положение, точно соответствующее ориентации ОЛН, то есть такое, при котором $\varphi_H = \varphi_a$.

В разделах 4.2.4 и 4.2.6 получены два варианта общего выражения для плотности энергии одноосной анизотропии с произвольным направлением оси: $U_a^{(1)}$ (4.68) и $U_a^{(2)}$ (4.86). Сначала обратимся к выражению для $U_a^{(1)}$:

$$\begin{aligned} U_a^{(1)} = K\{&m_x^2(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) + m_y^2(\cos^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) + \\ &+ m_z^2\sin^2\theta_a - 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - \\ &- 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a - 2m_zm_x\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a\}. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Подставляя θ_a и φ_a в соответствии с (7.32), (7.34), а также m_x, m_y, m_z в соответствии с (7.4)–(7.6), получаем

$$\begin{aligned} U_a^{(1)} = K(&\sin^2\psi\sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\psi\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ &+ \cos^2\theta - 2\sin\psi\cos\psi\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) = \\ &= K\left[\sin^2\theta\sin^2(\varphi-\psi) + \cos^2\theta\right]. \end{aligned} \tag{7.36}$$

Рассмотрим теперь выражение U_a^2:

$$\begin{aligned} U_a^{(2)} = -K\{&m_x^2\sin^2\theta_a\cos^2\varphi_a + m_y^2\sin^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \\ &+ m_z^2\cos^2\theta_a + 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a + \\ &+ 2m_xm_z\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a + 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\}. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Подставляя θ_a и φ_a в соответствии с (7.32), (7.34), а также m_x, m_y, m_z в соответствии с (7.4)–(7.6), получаем

$$\begin{aligned} U_a^{(2)} = K(&\cos^2\psi\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\psi\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ &+ 2\sin\psi\cos\psi\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi) = \\ &= -K[\sin^2\theta\cos^2(\varphi-\psi)]. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Выражая второй сомножитель в скобках через синус, получаем

$$U_a^{(2)} = -K + K[\sin^2\theta\sin^2(\varphi-\psi) + \cos^2\theta]. \tag{7.39}$$

Можно видеть, что это выражение совпадает с (7.36) с точностью до постоянного слагаемого, которое при последующем дифференцировании пропадает. Поэтому для дальнейшего рассмотрения в качестве плотности энергии анизотропии используем выражение (7.38), как имеющее более простое написание.

Таким образом, полная плотность энергии, с точностью до постоянного слагаемого, равная сумме (7.38), (7.17) и (7.21), принимает вид

$$U = -K\sin^2\theta\cos^2(\varphi-\psi) + \\ + 2\pi M_0^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_H). \tag{7.40}$$

В этом выражении θ и φ — сферические координаты вектора намагниченности $\mathbf{M}$ (рис. 7.1). Согласно общей процедуре нахождения экстремума функции двух переменных [261, 262], равновесное положение вектора намагниченности (φ_0, θ_0), соответствующее минимуму плотности энергии U, находится из решения системы уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0; \tag{7.41}$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0, \tag{7.42}$$

при следующих условиях устойчивости:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} > 0; \tag{7.43}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\,\partial\varphi}\right)^2 > 0. \tag{7.44}$$

Из условия (7.41) сразу находим $\theta_0 = 90^\circ$. Проверять условие (7.43) нет необходимости, так как из симметрии геометрии задачи сразу видно, что при принятой ориентации ОЛН равновесное положение вектора намагниченности всегда лежит в плоскости Oxy.

Подставляя полученное значение $\theta_0 = 90^\circ$ в (7.40), с точностью до постоянного слагаемого, получаем

$$U\big|_{\theta=90^\circ} = K\sin^2(\varphi-\psi) + \\ + 2\pi M_0^2\cos^2\varphi - M_0H_0\cos(\varphi-\varphi_H). \tag{7.45}$$

Дифференцируя это выражение по φ, подставляя в (7.42) и выполняя упрощающие тригонометрические преобразования, получаем уравнение для φ следующего вида:

$$K\sin[2(\varphi-\psi)] - 2\pi M_0^2\sin(2\varphi) + M_0H_0\sin(\varphi-\varphi_H) = 0. \tag{7.46}$$

7.3.1. Равновесное положение намагниченности в отсутствие внешнего поля

Аналитическое решение уравнения (7.46), по-видимому, достаточно просто только при $H = 0$. В этом случае получаем

$$\varphi_0(H=0) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{K\sin 2\psi}{K\cos 2\psi - 2\pi M_0^2}\right) + 90^\circ n, \tag{7.47}$$

где n — целое число, так что последнее слагаемое отражает цикличность арктангенса через 180°.

Проверка условий (7.43)–(7.44) в этом случае также не требуется, так как можно видеть, что при $M_0 \to 0$ угол φ стремится к ψ (так как размагничивающий фактор пленки (пластины) выбывает из игры, и равновесной ориентацией вектора намагниченности управляет только поле анизотропии), то есть решение (7.47) описывает заведомый минимум.

Введем эффективные поля:
поле анизотропии

$$H_a = \frac{2K}{M_0}; \tag{7.48}$$

поле размагничивания

$$H_m = 4\pi M_0, \tag{7.49}$$

а также их отношение

$$Q = \frac{H_a}{H_m} = \frac{K}{2\pi M_0^2}. \tag{7.50}$$

Этот параметр широко используется в технике цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) и носит там название «фактора качества» магнитной пленки [40] (раздел 1.3.1, формула (1.8)). Практический смысл фактора качества особенно явно проявляется для ситуации, когда ось анизотропии точно перпендикулярна плоскости пленки (то есть углы $\psi_{1,2}$ на рис. 7.1 равны нулю). При этом в случае $Q > 1$ равновесным положением вектора намагниченности в отсутствие внешнего поля является нормальное к плоскости пленки, что обеспечивает возможность существования лабиринтной доменной структуры, а также ЦМД. Типичными материалами подобного типа являются некоторые смешанные ферриты-гранаты, ортоферриты или гексаферриты. При $Q < 1$ в равновесном положении вектор намагниченности ориентируется в плоскости пленки, так что доменная структура имеет линейный полосовой характер, и ЦМД не образуются. Типичным материалом подобного типа являемся пермаллой, а также некоторые виды смешанных ферритов-гранатов [40]. Особым случаем является широко применяемый в технике железоиттриевый гранат (ЖИГ), где наряду с одноосной анизотропией значительную роль играет кубическая, а также магнитоупругое взаимодействие. Так, в зависимости от соотношения констант, доменная структура, а также резонансные свойства в ЖИГ имеют большое разнообразие [333, 363–367]. Более подробно этот вопрос, в первую очередь в применении к свойствам

магнитостатических волн, предполагается рассмотреть в последующих монографиях данной серии.

Возвратимся к формуле (7.47) и с помощью фактора качества (7.50) запишем ее в виде

$$\varphi_0(H=0) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{Q\sin 2\psi}{Q\cos 2\psi - 1}\right) + 90^\circ n. \tag{7.51}$$

При практическом использовании формулы (7.51) в выборе величины n следует руководствоваться физическим смыслом задачи, то есть при малой анизотропии вектор намагниченности ориентируется вблизи плоскости пленки, а при большой — вблизи оси анизотропии. То есть при $Q \to 0$ угол φ_0 стремится к 90°, так что следует брать $n = 1$, а при $Q \to \infty$ угол φ_0 стремится к ψ, так что следует брать $n = 0$. При $\psi = 0^\circ$ и $Q \to 1$ формула (7.51) имеет расходимость. Однако, если положить $Q = 1$, то при стремлении ψ к нулю в скобках возникает неопределенность типа $0/0$, раскрытие которой по правилу Лопиталя [261, 268, 269] дает бесконечность, что соответствует $\varphi_0 = 45^\circ$ (точнее — минус бесконечность, то есть $\varphi_0 = -45^\circ$, что при $n = 1$ дает то же самое). Такое значение угла соответствует равенству сил, стремящихся повернуть вектор намагниченности к плоскости пленки или к оси анизотропии.

В качестве иллюстрации приведем пример зависимости ориентации вектора намагниченности в плоскости Oxy (рис. 7.1) от величины фактора качества Q, для чего обратимся к рис. 7.2, где показаны подобные зависимости для нескольких различных значений угла ψ. В силу зеркальной симметрии геометрии задачи относительно плоскости Oxz, а также двунаправленности одноосной анизотропии (то есть энергия анизотропии не меняется при изменении направления вектора намагниченности на обратное), достаточно рассмотреть только положительный интервал значений угла ψ от нуля до 90°. При этом равновесная ориентация вектора намагниченности всегда будет соответствовать меньшему из двух углов между осью анизотропии и плоскостью пленки.

Кривые на рис. 7.2 построены по следующим формулам:
при $\psi < 45^\circ$ (кривые *1–4*) в интервале $0 < Q < 1/\cos(2\psi)$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{Q\sin 2\psi}{Q\cos 2\psi - 1}\right) + 90^\circ; \tag{7.52}$$

при $\psi < 45^\circ$ (кривые *1–4*) в интервале $1/\cos(2\psi) < Q < +\infty$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{Q\sin 2\psi}{Q\cos 2\psi - 1}\right). \tag{7.53}$$

при $\psi > 45^\circ$ (кривые *5–8*) во всем интервале $0 < Q < +\infty$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{Q\sin 2\psi}{Q\cos 2\psi - 1}\right) + 90^\circ. \tag{7.54}$$

Из рисунка можно видеть, что все кривые в отсутствие поля анизотропии, то есть при $Q = 0$, начинаются при $\varphi_0 = 90^\circ$, что соответствует

Рис. 7.2. Зависимость азимутального угла равновесного положения вектора намагниченности от фактора качества магнитной пленки при различных углах ψ отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки: *1* — 10°; *2* — 20°; *3* — 30°; *4* — 40°; *5* — 50°; *6* — 60°; *7* — 70°; *8* — 80°

ориентации вектора намагниченности точно в плоскости пленки. По мере увеличения Q каждая кривая постепенно стремится к своей горизонтальной точечной линии, соответствующей заданному значения угла ψ, то есть из ориентации в плоскости пленки вектор намагниченности поворачивается в направлении оси анизотропии.

Из рисунка можно видеть, что уже при $Q \sim 2$ отн. ед. все кривые достаточно близко подходят в своим горизонтальным асимптотам. Наибольшее различие — около двух раз, имеет место для кривой *1*, соответствующей $\psi = 10°$, тогда как для кривой *8*, соответствующей $\psi = 80°$, подобное различие не превышает 10 %. При $Q \sim 10$ различие значительно уменьшается и для тех же кривых составляет 10 % и менее 2 % соответственно. Таким образом, для практических целей можно считать, что в пределах точности единиц процентов равновесное направление вектора намагниченности совпадает с направлением оси анизотропии, уже начиная с Q порядка нескольких единиц.

7.3.2. Равновесное положение намагниченности в присутствии внешнего поля

При наличии внешнего поля на вектор намагниченности, кроме двух сил — поля анизотропии и поля размагничивания, действует еще третья сила, обусловленная именно внешним полем. Эта сила, как и сила анизотропии, стремится повернуть вектор в своем направлении,

так что его положение определяется равновесием трех сил. В отличие от поля анизотропии, внешнее поле является однонаправленным, то есть энергия взаимодействия намагниченности с этим полем, при изменении направления вектора намагниченности на обратное, также изменяется. Поэтому здесь уже недостаточно интервала углов от нуля до 90°, а надо рассматривать все углы от нуля до 180°.

При анализе равновесной ориентации вектора намагниченности в присутствии поля будем по-прежнему опираться на выражение для плотности энергии (7.45), минимум которого также получим путем дифференцирования по углу φ, то есть потребуем выполнения условия (7.42). Аналитическое решение этого уравнения относительно угла φ, по-видимому, довольно сложно, если вообще возможно, поэтому обратимся к численному решению на основе алгоритма поиска нуля. Будем искать нуль функции:

$$F(\varphi) = K \sin\left[2(\varphi - \psi)\right] - 2\pi M_0^2 \sin(2\varphi) + M_0 H_0 \sin(\varphi - \varphi_H), \quad (7.55)$$

представляющей собой левую часть уравнения (7.46). Здесь поле H_0, угол ψ и намагниченность M_0 выступают как параметры.

Изменяя значение аргумента φ достаточно малыми шагами, будем следить за изменением знака функции $F(\varphi)$, что и даст искомое значение φ. В случае необходимости, для получения более высокой точности, после регистрации изменения знака $F(\varphi)$ можно вернуться по φ на один шаг назад, после чего уменьшить шаг, например на порядок, и снова пройти интервал углов φ, соответствующий первоначальной длине шага. Такое уменьшение шага можно повторять неоднократно до тех пор, пока требуемая точность не будет достигнута.

7.3.3. Ориентационная зависимость минимума энергии

Вообще говоря, в интервале изменения угла φ от нуля до 360° знак $F(\varphi)$ может меняться не один раз, поэтому для начала полезно рассмотреть общий вид этой функции в зависимости от угла φ при нескольких характерных значения поля. Пример такого рассмотрения приведен на рис. 7.3 при параметрах материала пленки: $K = 1{,}15 \times \times 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, а также при значении угла ψ равном 20°. Для пленок смешанных ферритов-гранатов, используемых в технике ЦМД, такие параметры являются довольно типичными [40] и приняты, например, в экспериментах, описанных в работах [22–25]. Для наглядности рассмотрения угол φ_H положен равным 120°. В силу периодичности функции $F(\varphi)$ равной 360°, достаточно рассмотреть только интервал значений $0° \leqslant \varphi \leqslant 360°$.

Из рисунка видно, что в отсутствие поля (кривая *1*, выделенная утолщением) функция $F(\varphi)$ имеет четыре нуля, соответствующие значениям угла φ равным 26°, 116°, 206°, 296°. При этом первое и третье из этих значений приходятся на возрастающие участки функции $F(\varphi)$, а второе и четвертое — на спадающие. Поскольку функция $F(\varphi)$ является первой производной от плотности энергии (7.45), то касательные

Рис. 7.3. Зависимости функции $F(\varphi)$ от угла ориентации намагниченности φ при $\varphi_H = 120°$ различных значениях поля H_0: *1* — 0 Э; *2* — 500 Э; *3* — 1000 Э; *4* — 1500 Э. Параметры: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $\psi = 20°$

в каждой точке этой функции представляют собой вторые производные. Условием минимума является положительность второй производной, поэтому можно сделать вывод, что точки $\varphi = 26°$ (точка A) и $206°$ (точка F) соответствуют минимумам плотности энергии, то есть равновесным положениям вектора намагниченности в отсутствие поля. При этом углы $\varphi = 116°$ и $296°$ соответствуют максимумам $F(\varphi)$ и для настоящего рассмотрения интереса не представляют.

Количество минимумов равно двум в силу двунаправленности оси анизотропии. Различие по углу между минимумами составляет $180°$, а отличие меньшего значения $26°$ от угла $\psi = 20°$, определяющего направление оси анизотропии, вызвано полем размагничивания формы пленки, равным $4\pi M_0$, стремящимся расположить намагниченность в плоскости пленки. То же касается отличия угла $\varphi = 206°$ от противоположного направления оси анизотропии, для которого угол ψ, отсчитываемый от оси Ox, составляет $200°$.

По мере увеличения поля H кривая $F(\varphi)$ деформируется. Левый из ее максимумов по рисунку уменьшается, а правый увеличивается. Это приводит к тому, что вместо четырех нулей в интервале от нуля до $360°$ (кривые *1*, *2*) остается только два (кривые *3*, *4*). При этом нуль, в отсутствие поля соответствующий точке A, последовательно перемещается к точке B, затем D и после всего C. Нуль, соответствующий в отсутствие поля точке F, перемещается к точке E, затем D и C.

Эти два различных пути соответствуют двум начальным положениям намагниченности вдоль положительного и отрицательного направлений оси анизотропии. При этом перемещение по цепочке F-E-D-C является непрерывным, а по цепочке A-B-D-C претерпевает разрыв между точками B и D. Этот разрыв соответствует резкой переориентации вектора намагниченности с одного направления оси анизотропии на противоположное.

Поскольку конечным результатом перемещения вектора намагниченности является его выстраивание максимально близко к направлению поля $\varphi_H = 120°$, то из начального положения 26° до 120° вектор намагниченности должен повернуться на 94°, а из положения 206° всего на 86°. При этом второй из этих углов (86°) меньше 90°, так что проекция вектора намагниченности на направление поля всегда остается положительной, тогда как первый угол (94°) больше 90°, так что проекция вектора намагниченности на направление поля сначала является отрицательной и только потом становится положительной. То есть в этом случае вектор намагниченности вынужден переориентироваться с одного направления оси анизотропии на противоположное, что и происходит скачкообразным образом.

Более подробно такой перескок можно проследить с помощью рис. 7.4, где показаны зависимости функции $F(\varphi)$ от угла ориентации намагниченности φ в тех же условиях, что и на рис. 7.3 для двух различных значений поля H: *1* — 650 Э; *2* — 700 Э, расположенных

Рис. 7.4. Зависимости функции $F(\varphi)$ от угла ориентации намагниченности φ при $\varphi_H = 120°$ и различных значениях поля H: *1* — 650 Э; *2* — 700 Э. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.3

на равных расстояниях по обе стороны от поля 675 Э, соответствующего перескоку.

Из рисунка можно видеть, что при поле 650 Э (кривая *1*) имеется нуль, соответствующий минимуму при 82° (точка A). При этом знак проекции вектора намагниченности на ось анизотропии противоположен знаку проекции вектора поля на ту же ось. Нуль в точке B при 103° соответствует максимуму и для настоящего рассмотрения не важен.

При поле 700 Э (кривая *2*) зависимость $F(\varphi)$ опускается ниже нулевой линии, и нуль пропадает. Однако намагниченность вынуждена искать минимум, который она и находит при 157° (точка C). В этой точке знаки проекций вектора намагниченности и поля на ось анизотропии совпадают. Вследствие значительного различия между предыдущим и новым минимумами (от 82° до 157°), причем эти минимумы находятся на разных ветвях кривой, переход от одного минимума (точка A) к другому (точка C) происходит скачком.

Изменение величины поля. В качестве иллюстрации рассмотрим типичные зависимости ориентации вектора намагниченности φ от поля H_0, представленные на рис. 7.5. Для наглядности, ориентации поля представлены в интервале φ_H от нуля до 360° с шагом в 20°.

Рис. 7.5. Зависимости азимутального угла равновесного положения вектора намагниченности от величины поля при различных его ориентациях в плоскости Oxy (рис. 7.1). Цифры на кривых соответствуют значениям угла φ_H между вектором поля и осью Ox в градусах. Пунктирные кривые, отмеченные цифрами в скобках, соответствуют перескокам намагниченности с одного направления оси анизотропии на другое. Горизонтальные пунктирные линии соответствуют углам $\varphi = 180°$ и 360°. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.3

Из рисунка видно, что все кривые при переходе через 180° периодически повторяются, что отражает геометрическую симметрию задачи в сочетании с двунаправленностью оси анизотропии.

В интервале от нуля до 180° все кривые при $H_0 = 0$ начинаются в одной точке, соответствующей $\varphi = 26°$, что определяется равновесием между полями анизотропии и размагничивания. В интервале от 180° до 360° кривые начинаются соответственно при 206° (180° + 26°). При увеличении поля H, оно стремится перетянуть вектор намагниченности к своему направлению, в результате чего кривые расходятся веером, стремясь каждая к углу, соответствующему своей ориентации поля. Можно видеть, что уже при поле порядка 1500 Э отклонение вектора намагниченности от направления поля в любом случае не превышает полутора десятков градусов, а при дальнейшем увеличении поля еще более уменьшается. Так например, для кривой, соответствующей $\varphi_H = 100°$ (то есть отклонению поля от направления ОЛН на угол, близкий к прямому), угол φ при поле 1500 Э составляет около 85°, при поле 2000 Э — около 90°, а при поле 3000 Э достигает уже 95°, то есть намагниченность отклоняется от направления поля всего на 5°.

7.3.4. Скачкообразное изменение ориентации вектора намагниченности

При начальной ориентации в 26° кривые, соответствующие полям с углами φ_H выше $26° + 90° = 116°$, испытывают перескок на кривые, начинающиеся при угле в 206°. Одна из таких кривых, соответствующая $\varphi_H = 120°$, показана пунктиром. Перескок происходит при поле около 675 Э в соответствии с механизмом, иллюстрируемым рис. 7.4. Аналогичный перескок испытывает кривая, начинающаяся при 206° и соответствующая $\varphi_H = 300°$.

Кривые, начинающиеся при 26° и соответствующие $\varphi_H = 140°$ и 160°, также испытывают перескок к кривым, соответствующим тем же углам, но начинающимся при 206°. Эти кривые с целью упрощения на рисунке не показаны. Подобные же перескоки имеют кривые, начинающиеся при 206° и соответствующие $\varphi_H = 320°$ и 340° (также не показаны).

Поле, при котором происходит перескок, сильно зависит от ориентации внешнего поля. Примерная зависимость поля перескока H_c от угла φ_H иллюстрируется рис. 7.6, который построен при тех же параметрах, что и рис. 7.5 для начального положения намагниченности $\varphi = 26°$.

Можно видеть, что характер зависимости довольно сложен: имеется два минимума неравной глубины и максимум между ними.

На врезке с помощью единичной окружности показана схема характерных положений ориентации внешнего поля. Окружность изображена в плоскости Oxy (вид со стороны оси Oz). Малый прямоугольник внутри окружности — проекция пленки на плоскость Oxy (вид пленки

Рис. 7.6. Зависимость поля перескока от угла ориентации внешнего поля при начальном положении намагниченности $\varphi = 26°$. Точки — результаты машинного эксперимента. Линия — результат аппроксимации. На врезке — схема основных углов на единичной окружности. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.3

с торца). Наклонная утолщенная линия — проекция ОЛН на ту же плоскость.

Прежде всего следует отметить, что в интервале ориентаций внешнего поля $-10° \leqslant \varphi_H \leqslant 100°$ перескок вообще отсутствует. На единичной окружности концы этого интервала показаны точками A и B. Минимумы соответствуют углам 160° (точка C) и 270° (точка E), максимум — 200° (точка D).

Из врезки можно видеть, что положение максимума (точка D) как раз соответствует ориентации поля вдоль ОЛН, но в направлении, противоположном исходному (26°). В этих условиях поле стремится переориентировать вектор намагниченности с исходного направления на противоположное при почти встречном направлении обоих векторов (намагниченности и поля). При этом, как можно видеть из (7.40), хотя энергия взаимодействия намагниченности с полем и велика, но плечо силы, поворачивающей намагниченность в направлении поля, пропорциональное синусу угла между векторами (близкого к 180°), мало, что и затрудняет этот порог перескока H_c повышается.

В то же время, плечо той же силы в точках C и E, где угол между полем и намагниченностью приближается к прямому, сравнительно велико. При этом намагниченность в направлении поля поворачивается легко, что и обеспечивает минимумы H_c при углах в 160° и 270°.

Минимум при $\varphi_H = 270°$ глубже, чем при $160°$, по-видимому, потому, что этот угол как раз соответствует ориентации поля в плоскости пленки, тогда как при $\varphi_H = 160°$ поле к плоскости пленки почти перпендикулярно.

Заметим, что приведенные здесь соображения о причине характера кривой на рис. 7.6, носят довольно качественный характер, соответствующий принятым значениям параметров. Более точно проследить природу перескока можно на основе анализа плотности энергии (7.40), а также характера кривых, подобных показанным на рис. 7.3 и рис. 7.4.

Резюмируя проведенное рассмотрение, отметим, что равновесное направление вектора намагниченности приближается к направлению поля уже начиная с полей порядка 600–700 Э. Можно видеть, что эта величина поля довольно близка к величине поля размагничивания ($H_m = 4\pi M_0 = 276$ Э), так что превышает его не более чем в два–три раза. Такая близость становится понятной, если учесть, что перескок определяется борьбой между суммарным действием внешнего поля и поля анизотропии с одной стороны и действием поля размагничивания с другой. Так, первое из этих полей при намагничивании вблизи нормали к плоскости пленки стремится отвернуть намагниченность от плоскости пленки, тогда как второе — повернуть намагниченность в эту плоскость. Действие второго проявляется в полях, только сравнимых с величиной поля размагничивания, тогда как действие первого ограничений сверху не имеет. Поэтому перескок возможен только тогда, когда первое поле меньше второго или того же порядка с ним. Когда же внешнее поле достигает достаточно больших величин, действие поля размагничивания становится пренебрежимо малым, и для намагниченности выбора между ориентациями тянущих ее полей уже не остается, так что она асимптотически стремится к равнодействующей внешнего поля и поля анизотропии.

Следует отметить, что при практических расчетах необходимо учитывать возможность перескока вектора намагниченности, избежать которого можно выбором начального направления этого вектора отличающегося от направления поля не более чем на $90°$.

7.3.5. Условия ферромагнитного резонанса

Основной задачей настоящего исследования является рассмотрение резонансных колебаний намагниченности в пленках с одноосной анизотропией, ось которой отклонена от нормали к плоскости пленки. Поскольку условия равновесного положения намагниченности для данного случая (изменения поля в плоскости, содержащей ОЛН) теперь выявлены, рассмотрим собственную частоту ферромагнитного резонанса, для чего воспользуемся методом Смита–Сула (раздел 2.3), согласно которому частота ФМР равна (2.149):

$$\omega = \frac{\gamma}{M_0 \sin\theta_0} \sqrt{U_{\theta\theta} U_{\varphi\varphi} - U_{\theta\varphi}^2}\,, \tag{7.56}$$

где производные от плотности энергии берутся в положении равновесия вектора намагниченности.

Будем исходить из выражения для плотности энергии (7.40):

$$U = -K\sin^2\theta\cos^2(\varphi-\psi)+ \\ + 2\pi M_0^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_H). \quad (7.57)$$

Дифференцируя по θ и φ, получаем производные:

$$U_{\theta\theta} = -2K\cos 2\theta\cos^2(\varphi-\psi)+ \\ + 4\pi M_0^2\cos 2\theta\cos^2\varphi + M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_H); \quad (7.58)$$

$$U_{\varphi\varphi} = 2K\sin^2\theta\cos[2(\varphi-\psi)] - \\ - 4\pi M_0^2\sin^2\theta\cos 2\varphi + M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_H); \quad (7.59)$$

$$U_{\theta\varphi} = K\sin 2\theta\sin[2(\varphi-\psi)] - \\ - 2\pi M_0^2\sin 2\theta\sin 2\varphi + M_0H_0\cos\theta\sin(\varphi-\varphi_H). \quad (7.60)$$

Замечание. Здесь плотность энергии анизотропии использована в виде (7.38). Путем непосредственной проверки можно убедиться, что использование формулы (7.36) приводит к тем же выражениям для производных (7.58)–(7.60). То же касается плотности энергии размагничивания (7.17), которая допускает замену m_x^2 на $1 - m_y^2 - m_z^2$.

Согласно (7.32), в положении равновесия $\theta_0 = 90°$. Подставляя это значение в (7.58)–(7.60), получаем:

$$U_{\theta\theta} = 2K\cos^2(\varphi-\psi) - 4\pi M_0^2\cos^2\varphi + M_0H_0\cos(\varphi-\varphi_H); \quad (7.61)$$

$$U_{\varphi\varphi} = 2K\cos[2(\varphi-\psi)] - 4\pi M_0^2\cos 2\varphi+ \\ + M_0H_0\cos(\varphi-\varphi_H); \quad (7.62)$$

$$U_{\theta\varphi} = 0. \quad (7.63)$$

Для использования метода Смита–Сула в этих выражениях угол φ должен соответствовать равновесному положению намагниченности.

Введем вспомогательные обозначения:

$$A = H_a\cos^2(\varphi-\psi) - H_m\cos^2\varphi; \quad (7.64)$$

$$B = H_a\cos[2(\varphi-\psi)] - H_m\cos 2\varphi, \quad (7.65)$$

где используются стандартные обозначения — поля анизотропии (7.48)

$$H_a = 2K/M_0 \quad (7.66)$$

и поля размагничивания (7.49)

$$H_m = 4\pi M_0. \quad (7.67)$$

С обозначениями (7.64) и (7.65) из (7.61) и (7.62) получаем:

$$U_{\theta\theta} = M_0[A + H_0\cos(\varphi-\varphi_H)]; \quad (7.68)$$

$$U_{\varphi\varphi} = M_0[B + H_0\cos(\varphi-\varphi_H)]. \quad (7.69)$$

Подставляя эти производные в формулу Смита–Сула (7.56) и учитывая, что $\theta_0 = 90°$, получаем частоту ферромагнитного резонанса:

$$\omega = \gamma\sqrt{[A + H_0\cos(\varphi - \varphi_H)][B + H_0\cos(\varphi - \varphi_H)]}\,. \qquad (7.70)$$

Изменение ориентации поля. Рассмотрим теперь, как зависит частота ферромагнитного резонанса ω от поля H_0 при различных его ориентациях в плоскости Oxy (рис. 7.1). Соответствующие зависимости с шагом по ориентации поля в 20° показаны на рис. 7.7. Кривые построены в интервале φ_H от нуля до 180°, причем кривая для 180° совпадает с кривой для $\varphi_H = 0°$, а при дальнейшем увеличении угла все кривые по частоте периодически повторяются.

Из рисунка можно видеть, что все кривые исходят из одной точки, соответствующей углу $\varphi = 26°$, который определяется равновесием между полями анизотропии и размагничивания. Далее, при достаточно больших значениях поля (здесь — более 1000 Э) кривые имеют возрастающий характер, что соответствует линейному росту частоты резонанса от поля типа $\omega \sim \gamma H$, когда это поле преобладает по величине над всеми остальными, в данном случае над полями анизотропии

Рис. 7.7. Зависимости частоты ферромагнитного резонанса от поля H_0 при различных его ориентациях в плоскости Oxy (рис. 7.1). Цифры на кривых соответствуют значениям угла φ_H между вектором поля и осью Ox в градусах. Слева вверху на врезке — схема расположения кривых при малых углах. По вертикальной оси отложена линейная частота, связанная с круговой соотношением: $f = \omega/2\pi$, при этом $\gamma = 2{,}8$ МГц/Э. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.3: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $\psi = 20°$

и размагничивания. В тех случаях, когда ориентация поля близка к начальной ориентации вектора намагниченности ($0° \leqslant \varphi_H \leqslant 80°$ и $140° \leqslant \varphi_H \leqslant 180°$), кривые на всем их протяжении только возрастают. Если ориентация поля отличается от начальной для намагниченности, что имеет место для кривых с $\varphi_H = 100°$ и $120°$ (то есть различие близко к $90°$), рост кривых на начальном участке замедляется и вообще может становиться отрицательным, как для кривой $\varphi_H = 0°$, что соответствует снижению частоты в области «мягкой моды» (раздел 6.3.5, рис. 6.6) [6–8, 31, 133, 134].

Взаимное расположение кривых дополнительно иллюстрируется рис. 7.8, где показаны зависимости частоты ферромагнитного резонанса от угла φ_H при некоторых характерных значениях поля H_0.

Из рисунка можно видеть, что при фиксированных значениях поля в области средних углов (более $30°$) по мере увеличения угла φ_H частота до $\varphi_H = 120°$ сначала убывает, после чего, пройдя через минимум, вплоть до $\varphi_H = 180°$ возрастает, стремясь к значению при $\varphi_H = 0°$. Такой минимум частоты соответствует ее снижению в процессе приближения к условиям «мягкой моды». В области малых углов (менее $30°$) частота сначала возрастает до $\varphi_H = 20°$, после чего убывает (как это показано на врезке в рис. 7.7). Такое локальное возрастание соответствует ориентации поля вблизи начального положения ($\varphi = 26°$), определяемого равновесием между полями анизотропии и размагничивания.

Рис. 7.8. Зависимости частоты ферромагнитного резонанса от угла φ_H при различных значениях поля H_0: *1* — 1000 Э; *2* — 2000 Э; *3* — 3000 Э. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.7

При поле порядка 1000 Э минимум зависимости частоты f от угла φ_H наиболее глубокий, так как здесь еще заметно проявляется отклонение вектора намагниченности от поля, а при больших полях (2000–3000 Э) глубина минимума снижается, и кривые становятся подобными друг другу.

7.3.6. Резонансное поле

Приведенные на рис. 7.7 и рис. 7.8 кривые, а также формула (7.70) отражают изменение резонансной частоты при различных вариациях поля. Однако в эксперименте при использовании стандартных резонансных спектрометров частота, как правило, остается постоянной, а резонансные условия достигаются путем изменения поля. Например в спектрометре ЭПА-2М, эксперименты с которым описаны в работах [22–25], частота составляет 10 ГГц, а поле меняется от 0 до 5000 Э.

Чтобы найти значение резонансного поля при неизменной частоте, надо формулу (7.70) разрешить относительно поля. После возведения в квадрат, эта формула приобретает вид квадратного уравнения, решение которого имеет вид (сохранен только положительный корень)

$$H_0 = \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi_H)} \left[-\frac{A+B}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2} \right], \qquad (7.71)$$

где A и B определяются формулами (7.64)–(7.65), в которых угол φ соответствует равновесной ориентации намагниченности (и здесь — также).

В таком виде формула (7.71) является как бы «самосогласованной», так как для ее использования надо сначала найти равновесное положение намагниченности, которое само определяется значением приложенного поля через входящее в A и B значение угла φ. То есть (7.71) по сути дела представляет собой уравнение относительно H_0, которое содержит в себе решение уравнения (7.46). Как отмечено выше, решение уравнения (7.46) в аналитическом виде вряд ли возможно, поэтому и уравнение (7.71) разрешить тоже не удается. При численном решении, по-видимому, можно воспользоваться методом итераций [261,351,352], то есть на первом шаге задать какое-то более или менее близкое к реальности значение поля, после чего из уравнения (7.46) найти равновесное положение намагниченности, которое использовать для нахождения поля по формуле (7.71). Далее это полученное значение поля надо снова подставить в (7.46), найти новое значение угла φ, найти по нему H_0 и так далее до достижения желаемой точности.

С другой стороны, для практики можно воспользоваться формулой (7.70), с помощью которой, задавая поле с определенным шагом, получить зависимость частоты от поля. При этом равновесное значение φ уже будет входить в полученную зависимость в качестве необходимого предшествующего этапа использования формулы (7.70). По полученной зависимости частоты от поля можно определить то значение поля, которое соответствует желаемой частоте. Такую процедуру

следует проделать для всех требуемых значений ориентации поля (угла φ_H), что и даст в результате искомую зависимость резонансного поля от угла φ_H при заданной частоте.

Полученные в результате такой процедуры зависимости резонансного поля от угла φ_H при заданных значениях частоты показаны на рис. 7.9. Точки — результаты машинного эксперимента, кривые построены по следующим эмпирическим формулам:
кривая *1* — частота 10 ГГц,

$$H = 630\sin[2(\varphi_H - 70^\circ)] + 3400; \tag{7.72}$$

кривая *2* — частота 8 ГГц,

$$H = 630\sin[2(\varphi_H - 70^\circ)] + 2700; \tag{7.73}$$

кривая *3* — частота 6 ГГц,

$$H = 630\sin[2(\varphi_H - 70^\circ)] + 1980; \tag{7.74}$$

кривая *4* — частота 4 ГГц,

$$H = 630\sin[2(\varphi_H - 70^\circ)] + 1260, \tag{7.75}$$

где угол φ_H — берется в градусах, а поле получается в эрстедах.

Рис. 7.9. Зависимость резонансного поля от угла его ориентации при заданных значениях частоты: *1* — 10 ГГц; *2* — 8 ГГц; *3* — 6 ГГц; *4* — 4 ГГц. Точки — результаты машинного эксперимента. Кривые построены по формулам (7.72)–(7.75), приведенным в тексте. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.7

Из рисунка видно, что все кривые имеют периодичность через 180°, что и требует коэффициента «2» под знаком синуса в формулах (7.72)–(7.75). Все кривые имеют первый минимум при $\varphi_H = 26°$, что соответствует равновесной ориентации намагниченности в отсутствие поля. Максимумы кривых приходятся на $\varphi_H = 116°$, что соответствует перпендикуляру к равновесной ориентации. С увеличением частоты кривые поднимаются вверх по полю довольно равномерно с шагом около 350 Э на 1 ГГц.

Можно видеть, что машинные кривые довольно близки к синусоидам, однако имеется некоторое отличие на склонах по обе стороны от максимума, где точки лежат несколько ниже кривых, построенных по формулам (7.72)–(7.75). Такое рассогласование с уменьшением частоты увеличивается. Так на серединах склонов различие на частоте 10 ГГц не превышает 6 %, а на частоте 4 ГГц достигает 36 %. Можно полагать, что такое увеличение рассогласования обусловлено увеличением отклонения вектора намагниченности от направления поля с понижением частоты, так как при этом требуемое для резонанса поле уменьшается.

7.3.7. Приближение сильного поля

Проведенное выше рассмотрение не содержит каких-либо предположений относительно взаимной величины входящих в формулу (7.71) составляющих, так что эта формула пригодна для любого соотношения между полем анизотропии и намагниченностью пленки.

Однако весьма важными для практики, особенно в технике ЦМД, являются пленки смешанных ферритов-гранатов, типичные значения параметров для которых следующие [40]:

$$M_0 \sim 10 \ldots 100 \text{ Гс}; \quad K \sim 10^3 \ldots 10^5 \text{ эрг см}^{-3}; \quad \psi \sim 5° \ldots 30°.$$

При таких параметрах на частотах порядка 10 ГГц второе слагаемое под знаком радикала, как правило, на два порядка меньше первого, так что им можно пренебречь.

Далее, при полях анизотропии не более 1000 Э, можно считать, что внешнее поле, соответствующее резонансу на частоте порядка 10 ГГц, составляет 3000–4000 Э, так что оно достаточно сильное, чтобы повернуть намагниченность в своем направлении. То есть можно положить $\varphi = \varphi_H$. При этих предположениях формула (7.71) значительно упрощается и принимает вид

$$H_0 = \frac{\omega}{\gamma} + \frac{A+B}{2}, \tag{7.76}$$

где A и B определяются формулами (7.64) и (7.65), которые при сделанном предположении (то есть $\varphi = \varphi_H$) имеют вид:

$$A = H_a \cos^2(\varphi_H - \psi) - H_m \cos^2 \varphi_H; \tag{7.77}$$

$$B = H_a \cos[2(\varphi_H - \psi)] - H_m \cos 2\varphi_H. \tag{7.78}$$

Подставляя (7.77) и (7.78) в (7.76), получаем:

$$H_0 = \frac{\omega}{\gamma} + \frac{1}{2}(H_a - H_m) - \frac{3}{2}[H_a \cos^2(\varphi_H - \psi) - H_m \cos^2 \varphi_H]. \qquad (7.79)$$

Зависимости резонансного поля от угла φ_H в приближении достаточно сильного поля иллюстрируются рис. 7.10. Здесь линии построены по формуле (7.79).

Из рисунка можно видеть, что зависимость, подобно приведенной на рис. 7.9, имеет синусоидальный характер с периодичностью через 180°. Амплитуда зависимости также близка к таковой на рис. 7.9. Величина резонансного поля по мере уменьшения частоты также уменьшается линейно по полю, что обеспечивается первым слагаемым в формуле (7.79). Более подробное рассмотрение показывает, что линии на этом рисунке с высокой степенью точности совпадают с таковыми на рис. 7.9 (отличие составляет не более единиц процентов, особенно на участках возрастания кривых), поэтому и точность приближения — примерно та же самая.

Таким образом, точность приближения сильного поля тем лучше, чем частота выше и совпадает с точностью кривых, построенных на рис. 7.9 по эмпирическим формулам (7.72)–(7.75).

Рис. 7.10. Зависимость резонансного поля от угла его ориентации при заданных значениях частоты: *1* — 10 ГГц; *2* — 8 ГГц; *3* — 6 ГГц; *4* — 4 ГГц. Кривые построены по формуле (7.79). Параметры — те же, что приняты при построении рис. 7.7

Замечание. Приведенное в настоящем разделе приближение сильного поля ориентировано именно на пленки смешанных ферритов-гранатов с упомянутыми выше параметрами. Однако в других материалах эти параметры могут значительно отличаться. Так ортоферриты, широко изучавшиеся в начале развития техники ЦМД [40], имеют поля анизотропии до десятков тысяч эрстед, так что в практически достижимых полях до 20 тысяч эрстед равновесное направление вектора намагниченности может отличаться от направления поля весьма сильно. Гексаферрит бария, исследовавшийся в работе [31] по величине поля анизотропии, занимает промежуточное положение между ортоферритами и смешанными гранатами (H_a около 19 000 Э), однако и там авторам пришлось использовать магнит, дающий поле до 25 000 Э. С другой стороны, для смешанных ферритов-гранатов в работах [22–25], приближение сильного поля дало результаты, довольно хорошо согласующиеся с экспериментом (с точностью до 10 %). Поэтому для таких материалов его можно считать вполне пригодным, тогда как для других материалов применимость метода требует отдельной проверки с учетом корректности сделанных приближений.

7.4. Вариант второй: ось легкого намагничивания лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля

В этом случае в обозначениях раздела 7.3, полярный и азимутальный углы ОЛН равны:

$$\theta_a = 90^\circ - \psi_2; \tag{7.80}$$

$$\varphi_a = 0^\circ. \tag{7.81}$$

Из общей геометрии (рис. 7.1) можно видеть, что при вращении поля **H** в плоскости Oxy оно проходит положение, точно соответствующее проекции ОЛН на эту плоскость, то есть такое, при котором $\varphi_H = \varphi_a = 0^\circ$.

Учитывая двойственный характер выражений для плотности энергии анизотропии и размагничивания (разделы 4.5.1, 4.5.2), будем использовать те выражения, которые более соответствуют раскрываемому далее качественному физическому смыслу рассматриваемой задачи, а именно: для плотности энергии одноосной анизотропии с произвольным направлением оси (4.86):

$$\begin{aligned} U_a^{(2)} = -K\{&m_x^2 \sin^2\theta_a \cos^2\varphi_a + m_y^2 \sin^2\theta_a \sin^2\varphi_a + \\ &+ m_z^2 \cos^2\theta_a + 2m_x m_y \sin^2\theta_a \sin\varphi_a \cos\varphi_a + \\ &+ 2m_x m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \cos\varphi_a + 2m_y m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \sin\varphi_a\}, \end{aligned} \tag{7.82}$$

и для плотности энергии размагничивания (4.206):

$$U_m^{(2)} = -2\pi M_0^2(m_y^2 + m_z^2). \tag{7.83}$$

Подставляя в эти формулы (7.80)–(7.81) и записывая компоненты намагниченности через сферические переменные (7.4)–(7.6), а также учитывая, что полная энергия, кроме U_a, содержит также энергии размагничивания (7.83) и взаимодействия с внешним полем (4.208), получаем полную энергию в виде (как и в предыдущем разделе, здесь индекс «2» при угле ψ опускаем, не забывая однако о том, что углы ψ_1 и ψ_2 между собой различаются в соответствии с геометрией, показанной на рис. 7.1)

$$U = -K(\cos\psi\sin\theta\cos\varphi + \sin\psi\cos\theta)^2 - \\ - 2\pi M_0^2(\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta) - M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H). \tag{7.84}$$

7.4.1. Равновесное положение намагниченности в отсутствие внешнего поля

Рассмотрим сначала равновесное положение намагниченности в отсутствие внешнего поля ($H_0 = 0$). Будем полагать, что поле анизотропии превышает поле размагничивания. В этом случае из геометрической симметрии задачи (рис. 7.1) можно видеть, что вектор намагниченности всегда находится в плоскости Oxz, так что $\varphi = 0$.

Положим далее, что ОЛН перпендикулярна плоскости пленки, то есть ориентирована вдоль оси Ox, так что $\psi = 0$. В этом случае плотность энергии (7.84) с точностью до постоянного слагаемого принимает вид

$$U = -(K - 2\pi M_0^2)\sin^2\theta. \tag{7.85}$$

В соответствии с (7.48) и (7.49), переходя от констант K и M_0 к полям анизотропии H_a и размагничивания H_m, можно записать (7.85) в виде

$$U = -\frac{M_0}{2}(H_a - H_m)\sin^2\theta. \tag{7.86}$$

Можно видеть, что при $H_a > H_m$ минимум энергии, то есть равновесное положение намагниченности, соответствует $\theta = 90°$, так что намагниченность перпендикулярна плоскости пленки и по направлению совпадает с ОЛН. При $H_a < H_m$ минимум энергии соответствует $\theta = 0°$, так что вектор намагниченности лежит в плоскости пленки.

При $\psi \neq 0$, аналогично (7.85), с точностью до постоянного слагаемого, получаем

$$U = -\left(K\frac{\sin^2(\psi+\theta)}{\sin^2\theta} - 2\pi M_0^2\right)\sin^2\theta, \tag{7.87}$$

или в записи через поля

$$U = -\frac{M_0}{2}\left(H_a\frac{\sin^2(\psi+\theta)}{\sin^2\theta} - H_m\right)\sin^2\theta. \tag{7.88}$$

Можно видеть, что при $\psi = 0$ эти выражения переходят в (7.85) и (7.86) соответственно.

Замечание. Важно отметить, что при $\psi = 0$ (то есть ОЛН точно перпендикулярна плоскости пленки) зависимости плотности энергии размагничивания и одноосной анизотропии от угла θ полностью эквивалентны, так как оба слагаемые в скобках входят в выражения (7.85) и (7.86) одинаково. Однако при $\psi \neq 0$ (то есть, когда ОЛН отклонена от нормали к плоскости пленки) такая эквивалентность нарушается, так как в первых слагаемых выражений (7.87) и (7.88) появляется зависимость от угла θ. Эквивалентность вкладов K и M_0 в плотность энергии (7.85), имеющая место в пленках с нормальной ОЛН, препятствует возможности в эксперименте различить эти параметры по отдельности, то есть измерить отдельно намагниченность и константу анизотропии. Однако в пленках с отклонением ОЛН от нормали, то есть при $\psi \neq 0$, благодаря отмеченной неэквивалентности вкладов K и M_0, такое разделение возможно, причем эксперименты по раздельному определению намагниченности и константы анизотропии проходят тем успешнее, чем угол ψ больше.

Найдем теперь равновесное положение вектора намагниченности в отсутствие поля при произвольном значении угла ψ. Как отмечено выше, при $H_a > H_m$ должно быть $\varphi = 0$. Плотность энергии (7.84) в этом случае принимает вид

$$U = -K \sin^2(\psi + \theta) - 2\pi M_0^2 \cos^2 \theta. \tag{7.89}$$

Дифференцируя по θ и приравнивая производную к нулю (в соответствии с условием (7.41)), получаем

$$-K \sin[2(\psi + \theta)] + 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta = 0. \tag{7.90}$$

Преобразуя первое слагаемое по формуле синуса суммы, приводя подобные члены, разрешая уравнение относительно θ и учитывая, что, согласно геометрии сферической системы координат, всегда должно быть $\theta \geqslant 0$, получаем

$$\theta_0 = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{K \sin 2\psi}{K \cos 2\psi - 2\pi M_0^2} \right) + 90^\circ \cdot n, \tag{7.91}$$

где $n = 0$ при $K \cos 2\psi \leqslant 2\pi M_0^2$ и $n = 1$ при $K \cos 2\psi > 2\pi M_0^2$.

Записывая то же через поля, получаем

$$\theta_0 = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{H_a \sin 2\psi}{H_a \cos 2\psi - H_m} \right) + 90^\circ \cdot n, \tag{7.92}$$

где $n = 0$ при $H_a \cos 2\psi \leqslant H_m$ и $n = 1$ при $H_a \cos 2\psi > H_m$.

Подобно (7.50), вводя «фактор качества» пленки

$$Q = H_a / H_m, \tag{7.93}$$

получаем

$$\theta_0 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{Q\sin 2\psi}{Q\cos 2\psi - 1}\right) + 90^\circ \cdot n, \tag{7.94}$$

где $n = 0$ при $Q \leqslant 1/\cos 2\psi$ и $n = 1$ при $Q > 1/\cos 2\psi$.

Замечание. Приведенное здесь определение полярного угла равновесного положения намагниченности базируется на выражении для плотности энергии анизотропии вида (4.206) (или здесь — (7.83)). В то же время, как показано в разделе 4.5.2, равное право на существование имеет выражение для плотности энергии вида (4.204). Однако выполнение действий, аналогичных приведенным в настоящем разделе, показывает, что выражение (4.204) приводит к тому же значению равновесного угла θ_0, что и формулы (7.91), (7.92) и (7.94).

Зависимость полярного угла равновесного положения намагниченности θ_0 от величины отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки ψ показана на рис. 7.11. Различные кривые соответствуют различным значениям фактора качества.

Из рисунка можно видеть, что кривые, соответствующие $Q > 1$ (*1*, *2*, *3*), начинаются при $\theta_0 = 90^\circ$ (намагниченность перпендикулярна плоскости пленки), кривая 4, соответствующая $Q = 1$, начинается при $\theta_0 = 45^\circ$ (намагниченность наклонена посередине между ОЛН и плоскостью пленки), а все кривые, соответствующие $Q < 1$ (*5*, *6*, *7*), начинаются при $\theta_0 = 0^\circ$ (намагниченность лежит в плоскости пленки).

Рис. 7.11. Зависимость равновесного угла θ_0 от угла ψ в отсутствие поля при различных значениях фактора качества пленки Q: *1* — 20; *2* — 2; *3* — 1,2; *4* — 1,0; *5* — 0,8; *6* — 0,4; *7* — 0,1

При этом все кривые заканчиваются при $\theta_0 = 0°$ (намагниченность — в плоскости пленки).

При большом факторе качества (кривая *1*, $Q = 20$), зависимость представляет собой почти прямую линию, вектор намагниченности практически всегда ориентирован вдоль ОЛН, поле размагничивания сказывается мало.

При уменьшении фактора качества на зависимости θ_0 от ψ в области средних значений ψ появляется провал (кривая *2*, $Q = 2$) тем более глубокий, чем фактор качества меньше (кривая *3*, $Q = 1{,}2$). Однако все кривые еще начинаются при $\theta_0 = 90°$, так как при малых углах ψ плечо силы, действующей на вектор намагниченности со стороны размагничивающего поля, еще недостаточно для того, чтобы развернуть вектор в своем направлении.

Критическое значение фактора качества, при котором силы со стороны поля анизотропии и размагничивающего поля пленки между собой сравниваются, соответствует $Q = 1$ (кривая *4*, показана утолщенной линией).

В этом случае при $\psi = 0°$ вектор намагниченности устанавливается точно посередине между направлением ОЛН и плоскостью пленки под 45° к каждому из них. Далее, по мере увеличения ψ, равновесное положение намагниченности смещается ближе к плоскости пленки, а при $\psi = 90°$ точно ложится в эту плоскость.

При значении фактора качества меньше единицы (кривые *5*, *6*, *7*) оба конца зависимости приходятся на $\theta_0 = 0°$. Положение нижнего конца здесь определяется малостью плеча силы со стороны размагничивающего поля, а положение верхнего — ориентацией ОЛН точно в плоскости пленки.

Однако между этими положениями полю анизотропии все же удается вытянуть вектор намагниченности из нулевой ориентации, в результате чего на кривых *5*, *6*, *7* появляется максимум, тем менее выраженный, чем фактор качества меньше.

При $Q = 0{,}1$ (кривая *7*) вектор намагниченности уже практически всегда остается вблизи плоскости пленки при любых значениях угла ψ, так как здесь поле размагничивания превосходит поле анизотропии на целый порядок.

Приведенные на рис. 7.11 кривые отражают равновесную ориентацию намагниченности в зависимости от нормированного параметра Q. Однако на практике часто полезно знать эту ориентацию, выраженную через абсолютные параметры пленки, такие, как намагниченность насыщения M_0 и константа анизотропии K. При этом достаточно сначала по формуле (7.93) найти нормированный параметр Q, после чего по заданному значению угла ψ с помощью формулы (7.94) найти значение θ_0. Так при принятых в предыдущих разделах значениях параметров пленки: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс получаем поле анизотропии $H_a = 1046$ Э, поле размагничивания $H_m = 276$ Э, откуда $Q = 3{,}78$. В случае $\psi = 20°$ из (7.94) получаем $\theta_0 = 64°$, то есть значение,

как раз дополняющее полученное в предыдущих разделах значение 26° до 90°. Такое совпадение происходит из-за того, что геометрия задачи (рис. 7.1) относительно оси Ox в отсутствие внешнего поля имеет цилиндрическую симметрию. При этом поворот пленки вокруг этой оси на 90° (из положения 1 в положение 2) ориентации равновесного положения намагниченности относительно оси анизотропии не меняет.

Замечание. Приведенные здесь формулы (7.91)–(7.92), (7.94), а также построенный по ним рис. 7.11 получены в предположении $\varphi = 0$, которое безусловно выполняется при $H_a > H_m$, то есть $Q > 1$. Обобщение этих формул на случай $H_a < H_m$, то есть $Q < 1$ не вполне правомерно, так как при этом может быть $\varphi \neq 0$, так что здесь приведено главным образом для иллюстрации поведения угла θ в этом случае. Более корректное решение, то есть обращение к полной системе уравнений для θ и φ, получаемой путем дифференцирования выражения для плотности энергии (7.84), в аналитическом виде, если и возможно, то, по-видимому, крайне громоздко. Поэтому здесь уместнее использовать численное решение методом установления (раздел 5.1.4). Пример такого решения, в том числе в присутствии внешнего поля, приведен в следующих разделах.

7.4.2. Равновесное положение намагниченности в присутствии внешнего поля

Как и в предыдущем случае, при наличии внешнего поля на вектор намагниченности, кроме двух сил — поля анизотропии и поля размагничивания, действует еще третья сила, обусловленная внешним полем. Эта сила, как и две первые, стремится повернуть вектор к своему направлению, так что его положение определяется равновесием трех сил. В отличие от поля анизотропии, внешнее поле является однонаправленным, то есть энергия взаимодействия намагниченности с этим полем, при изменении направления вектора намагниченности на обратное, также изменяется. Поэтому здесь уже недостаточно интервала углов от нуля до 90°, а надо рассматривать все углы от нуля до 180°.

При анализе равновесной ориентации вектора намагниченности в присутствии поля будем по-прежнему опираться на выражение для плотности энергии (7.84), минимум которого, в отличие от предыдущего случая, требует выполнения сразу двух условий (7.41) и (7.42). То есть плотность энергии (7.84) надо теперь дифференцировать по двум переменным, θ и φ, после чего полученные производные приравнять нулю.

Выполняя дифференцирование по θ и приравнивая результат нулю, получаем уравнение

$$-K(\cos^2\psi\sin 2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\psi\sin 2\theta + \sin 2\psi\cos 2\theta\cos\varphi) + \\ + 2\pi M_0^2\sin 2\theta\cos^2\varphi - M_0H_0\cos\theta\cos(\varphi-\varphi_H) = 0. \quad (7.95)$$

Аналогичное дифференцирование по φ дает уравнение

$$-K(-\cos^2\psi\sin^2\theta\sin 2\varphi - \sin\psi\cos\psi\sin 2\theta\sin\varphi)- \\ -2\pi M_0^2\sin^2\theta\sin 2\varphi + M_0H_0\sin\theta\sin(\varphi-\varphi_H) = 0. \quad (7.96)$$

Эти два уравнения образуют систему относительно θ и φ, которая должна быть решена совместно.

Выражение из первого уравнения θ через φ приводит к полному уравнению четвертой степени относительно $\cos\theta$, коэффициенты которого содержат синусы и косинусы от φ также в четвертой степени. Аналитическое разрешение полученного уравнения относительно $\cos\theta$ хотя и возможно (например, методом Феррари или другим эквивалентным [261, 262]), однако крайне громоздко. Более того, подстановка полученного решения во второе уравнение приведет к настолько сложному его виду, что возможность аналитического решения вообще становится под большим вопросом. Альтернативой аналитическому решению здесь может явиться численное решение методом установления, рассмотренное в следующем разделе.

Замечание. В настоящем разделе для вычисления равновесного положения намагниченности использовано выражение для плотности энергии вида (7.84), полученное в свою очередь из базовых выражений $U_a^{(2)}$ (4.182) или (7.72), а также и $U_m^{(2)}$(4.206) или (7.83). Однако, как показано в разделах 4.5.1 и 4.5.2, наряду с (4.182) и (4.206) для плотности энергии существуют эквивалентные выражения $U_a^{(1)}$ (4.184) и $U_m^{(1)}$ (4.204). Использование этих выражений для минимизации энергии приводит к системе, хотя и несколько отличной от (7.95)–(7.96), но также аналитически трудно разрешимой. Поэтому и здесь имеет смысл использовать численное решение методом установления.

7.4.3. Решение методом установления

В случае неразрешимости в аналитическом виде системы (7.95)–(7.96) равновесное положение намагниченности можно найти численным путем с помощью метода установления (раздел 5.1.4).

Напомним, что метод установления представляет собой ряд последовательных однотипных шагов, в результате прохождения которых происходит приближение рассчитываемого положения вектора намагниченности к его равновесному положению.

При этом на первом шаге направление намагниченности задается произвольным, исходя из чего определяется поле анизотропии. Это полученное поле складывается с внешним полем и направление их векторной суммы принимается за новое направление намагниченности. Исходя из этого, направления намагниченности, снова определяется поле анизотропии, вновь складывается с внешним полем и все процедуры повторяются до тех пор, пока рассчитываемое направление намагниченности не перестает меняться (с заданной степенью точности).

Полученное таким образом направление намагниченности принимается за равновесное.

Покажем, как можно применить метод установления к рассматриваемой здесь задаче.

Поскольку в процессе реализации метода установления приходится выполнять векторное суммирование, удобнее все вычисления провести в декартовой системе координат (рис. 7.1).

Итак, плотность энергии анизотропии, согласно (4.182) (или здесь (7.82)), с учетом (7.80)–(7.81), принимает вид

$$U_a^{(2)} = -K(m_x^2 \cos^2\psi + m_z^2 \sin^2\psi + 2m_x m_z \sin\psi\cos\psi). \tag{7.97}$$

Плотность энергии размагничивания, в соответствии с (4.206) (или здесь — (7.83)), имеет вид

$$U_m^{(2)} = -2\pi M_0^2(m_y^2 + m_z^2). \tag{7.98}$$

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем (7.20) с учетом (7.10)–(7.12) имеет вид

$$U_h = -M_0 H_0(m_x \cos\varphi_H + m_y \sin\varphi_H). \tag{7.99}$$

Поскольку здесь против внешнего поля работают поле анизотропии и размагничивания одновременно, то надо искать равновесия между, с одной стороны, энергией внешнего поля U_h и, с другой стороны, суммой энергий анизотропии и размагничивания $U_a^{(2)} + U_m^{(2)}$.

Эффективные поля при этом определяются по классической формуле (1.2), для нормированной намагниченности приобретающей вид

$$\mathbf{H}_e = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{m}}. \tag{7.100}$$

Выполняя дифференцирование выражений (7.97)–(7.99) и вводя поля анизотропии (7.48) $H_a = 2K/M_0$ и размагничивания (7.49) $H_m = 4\pi M_0$, находим компоненты суммарного поля анизотропии и размагничивания:

$$H_{px} = H_a \cos^2\psi m_x + H_a \sin\psi\cos\psi m_z; \tag{7.101}$$

$$H_{py} = H_m m_y; \tag{7.102}$$

$$H_{pz} = H_a \sin^2\psi m_z + H_a \sin\psi\cos\psi m_x + H_m m_z. \tag{7.103}$$

При этом компоненты внешнего поля, в соответствии с геометрией задачи (рис. 7.1), равны:

$$H_x = H_0 \cos\varphi_H; \tag{7.104}$$

$$H_y = H_0 \sin\varphi_H; \tag{7.105}$$

$$H_z = 0. \tag{7.106}$$

Находя компоненты векторной суммы и нормируя их на полную длину составляющего эту сумму вектора, получаем:

$$h_{Sx} = \frac{H_{px} + H_x}{\sqrt{H_{Sx}^2 + H_{Sy}^2 + H_{Sz}^2}}; \tag{7.107}$$

$$h_{Sy} = \frac{H_{py} + H_y}{\sqrt{H_{Sx}^2 + H_{Sy}^2 + H_{Sz}^2}}; \tag{7.108}$$

$$h_{Sz} = \frac{H_{pz} + H_z}{\sqrt{H_{Sx}^2 + H_{Sy}^2 + H_{Sz}^2}}. \tag{7.109}$$

Эти компоненты полей вычисляются в предположении, что на момент получения формул (7.101)–(7.103) были известны компоненты намагниченности $m_{x,y,z}$. Так, на первом этапе вычисления можно задать эти компоненты произвольно, не забывая однако, что суммарная длина нормированного вектора намагниченности $\mathbf{m}$ должна равняться единице.

Теперь положим, что новые нормированные компоненты намагниченности как раз равны этим значениям (7.107)–(7.109), то есть:

$$m_x = h_{Sx}; \tag{7.110}$$

$$m_y = h_{Sy}; \tag{7.111}$$

$$m_z = h_{Sz}. \tag{7.112}$$

Очевидно, нормировка при этом не нарушается, так что полная длина вектора $\mathbf{m}$ остается равной единице.

Таким образом, первый шаг метода установления завершен, то есть из произвольных значений компонент намагниченности получены уточненные значения.

Следующий шаг метода установления состоит в подстановке этих уточненных значений в формулы (7.101)–(7.103), после чего вся процедура повторяется, так что находятся новые, еще более уточненные значения, которые опять могут быть использованы для подстановки в формулы (7.101)–(7.103), и так далее. Процедуру имеет смысл повторять до тех пор, пока новые получаемые значения компонент намагниченности уже не будут далее меняться в пределах заданной точности. Таким образом, в результате будет получено требуемое равновесное положение вектора намагниченности при заданном значении и ориентации внешнего поля.

7.4.4. Выбор выражений для плотности энергии

Здесь для вычисления эффективных полей анизотропии и размагничивания использовались плотности энергии в виде $U_a^{(2)}$ (4.184) или (7.97) и $U_m^{(2)}$ (4.206) или (7.98). В то же время, как показано в разделах 4.5.1 и 4.5.2, для тех же энергий имеются эквивалентные выражения $U_a^{(1)}$ (4.182) и $U_m^{(1)}$ (4.204).

Однако, как показано в разделах 4.2.4 и 4.2.6, использование эквивалентных выражений для энергии приводит к неэквивалентным

выражениям для полей. Так для поля анизотропии $U_a^{(1)}$ вида (4.182) (или в развернутом виде — (4.70)) получаются поля (4.72)–(4.74), а для поля анизотропии $U_a^{(2)}$ вида (4.184) (или в развернутом виде — (4.87)) — поля (4.88)–(4.90). Из сравнения таких двух вариантов выражений для полей видно их явное различие. Аналогичная картина имеет место и для полей размагничивания.

В настоящей работе выбор между теми и другими выражения для плотности энергии проводился, исходя из качественного физического смысла получающихся результатов.

Так например, при принятых здесь параметрах материала $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, а также при $\psi = 0°$ и поле $H_0 = 1000$ Э, можно видеть, что равновесный вектор намагниченности заведомо должен лежать вдоль оси Ox (так как $H_a > H_m$), то есть должен быть $\theta_0 = 0°$. Это значение и получается при использовании выражений $U_a^{(2)}$ и $U_m^{(2)}$. Однако использование при тех же значениях параметров вместо $U_a^{(2)}$ и $U_m^{(2)}$ выражений $U_a^{(1)}$ и $U_m^{(1)}$, приводит к значению $\theta_0 = 49°$, что качественному физическому смыслу явно противоречит. Поэтому выбор останавливается именно на $U_a^{(2)}$ и $U_m^{(2)}$.

Авторы настоящей монографии на данный момент затрудняются дать корректный физический вывод целесообразности в приведенных здесь расчетах выбора именно $U_a^{(2)}$ и $U_m^{(2)}$, однако могут указать простое эмпирическое правило. Так, в случае анизотропии типа «легкая ось» (то есть для оси легкого намагничивания) следует использовать выражение для энергии, содержащее только одну компоненту намагниченности вдоль этой оси (типа (4.184)), а в случае анизотропии типа «легкая плоскость» (то есть для анизотропии формы пленки) следует использовать выражение для энергии, содержащее обе компоненты намагниченности, лежащие в этой плоскости (типа (4.182)).

Однако, для предотвращения возможных физических ошибок при использовании метода установления, во всех случаях рекомендуется обязательно следить за качественным физическим смыслом получаемого решения.

7.4.5. Некоторые особенности метода установления

Реализуемый здесь метод установления пригоден при любой ориентации оси анизотропии, любом значении ее константы, при любой намагниченности насыщения, а также при любом заданном значении и ориентации внешнего поля (разумеется, все это — в разумных с физической стороны пределах).

Метод не критичен к заданию начальных значений компонент вектора намагниченности. Однако при алгоритмизации рассматриваемой задачи в случае многократного запуска процесса установления, такие значения следует обновлять (то есть восстанавливать исходные) при каждом новом запуске (так как в противном случае могут получаться нереализуемые решения гистерезисного характера).

Критичным относительно получаемых решений в рассматриваемой геометрии (рис. 7.1) является только знак исходной компоненты намагниченности m_z, то есть при задании того или иного знака получаются два решения, соответствующие положительной или отрицательной ориентации намагниченности относительно оси анизотропии. Так, в рассматриваемых далее расчетах начальные значения полагались следующими: задание первое: $m_{x0} = 0{,}1$, $m_{y0} = 0{,}1$, $m_{z0} = +1{,}0$; задание второе: $m_{x0} = 0{,}1$, $m_{y0} = 0{,}1$, $m_{z0} = -1{,}0$. Примеры таких решений будут приведены далее.

Практический опыт показывает, что метод сходится довольно быстро. Так в реальных случаях, рассматриваемых в рамках настоящей работы, как правило, было достаточно не более десяти шагов, чтобы получить равновесную ориентацию намагниченности с точностью до нескольких градусов. Однако для получения наиболее плавных на вид зависимостей все же следует брать число шагов несколько больше. Практика показала, что оптимальным с точки зрения соотношения достаточной точности и малости времени счета является число шагов порядка 1000. В рассматриваемой здесь задаче точность составляла десятые доли градуса при времени счета порядка десятка секунд.

7.4.6. Равновесная ориентация намагниченности

Обратимся теперь к исследованию методом установления равновесной ориентации вектора намагниченности. Как и ранее, будем полагать, что плоскость пленки совпадает с координатной плоскостью Oyz, ось анизотропии составляет угол ψ с нормалью к плоскости пленки и лежит в плоскости Oxz, а поле меняется в плоскости Oxy, составляя угол φ_H с осью Ox (рис. 7.1, случай 2, то есть $\psi = \psi_2$).

На рис. 7.12 приведены зависимости равновесного азимутального угла φ_0 и равновесной компоненты m_{z0} вектора намагниченности от азимутального угла внешнего поля φ_H при различных значениях этого поля. Выбор компоненты m_{z0} вместо угла θ_0 сделан в пользу наглядности рассмотрения, так как именно эта компонента характеризует отклонение вектора намагниченности от плоскости изменения поля. При желании читателя работать с полярным углом намагниченности θ_0, его можно легко получить из m_{z0} с помощью формулы

$$\theta_0 = \arccos(m_{z0}). \tag{7.113}$$

Из рисунка можно видеть, что по мере изменения ориентации поля, угол φ_0, в основном, следует за φ_H, причем, чем больше поле, тем точнее зависимость φ_0 от φ_H приближается к прямой линии, соответствующей $\varphi = \varphi_H$.

Компонента намагниченности m_{z0} отклоняется от плоскости пленки в ту же сторону, что и ОЛН, то есть при $x > 0$ вверх, а при $x < 0$ — вниз, так что отклонение меняет знак при переходе φ_H через 90° и 270° (как и ОЛН).

Рис. 7.12. Зависимости азимутального угла (*а*) и z-компоненты (*б*) вектора намагниченности от азимутального угла внешнего поля при различных его значениях: *1* — 1000 Э; *2* — 4000 Э. Параметры: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $\psi = 20°$

Отклонение тем меньше, чем больше поле, и при поле 4000 Э (то есть как раз в области ФМР при частоте 10 ГГц) нормированная величина z-компоненты не превышает 0,07, что соответствует отклонению намагниченности от плоскости пленки всего на 4°.

Из последнего положения можно сделать вывод, что при поле порядка 4000 Э для нахождения частоты ФМР по методу Смита–Сула можно пользоваться приближением сильного поля. Если считать величину отклонения z-компоненты мерой точности, то она в этом случае составляет 0,07, то есть 7 %.

7.4.7. Особенности ориентации намагниченности при малом поле

Рассмотренные выше свойства равновесной ориентации намагниченности относятся к случаю, когда поле достаточно велико, чтобы заставить намагниченность, в основном следовать за собой. Однако, как показано в разделе 7.3.3, при полях менее 1000 Э намагниченность

уже не всегда безусловно следует за полем, а в некоторых случаях может существенно отклоняться, в том числе при малых изменениях поля перескакивать на большие углы (рис. 7.5).

Хотя ситуации, показанной на рис. 7.5, соответствует расположение ОЛН в плоскости Oxy, но и в рассматриваемой здесь геометрии, то есть при ОЛН лежащей в плоскости Oxz, скачкообразное изменение ориентации намагниченности тоже имеет место, причем проявляется тем сильнее, чем угол ψ больше.

При $\psi = 20°$ критическое значение поля, ниже которого имеют место перескоки намагниченности, а выше отсутствуют, составляет около 700–900 Э. Поэтому возьмем далее поле H_0 равным 500 Э и рассмотрим, как меняется намагниченность при изменении его ориентации в плоскости Oxy.

Обратимся к рис. 7.13, где показаны зависимости равновесного азимутального угла φ_0 и равновесной компоненты m_{z0} вектора намагниченности от азимутального угла внешнего поля φ_H при различных значениях угла ψ.

Из рисунка можно видеть, что по мере изменения угла φ_H намагниченность не только монотонно следует за полем, но и при некоторых его значениях испытывает скачкообразное изменение на значительные углы.

Так в пределах положительного значения ОЛН (то есть где она находится выше плоскости Oxy), намагниченность по мере увеличения φ_H сначала монотонно следует за полем с некоторым отставанием, тем большим, чем больше ориентация поля отходит от проекции ОЛН на плоскость Oxy, после чего испытывает скачок, перебрасывающий ее вперед по отношению к полю, причем при дальнейшем увеличении φ_H это опережение уменьшается, обращаясь в нуль при $\varphi_H = 180°$. При дальнейшем увеличении φ_H намагниченность снова отстает от поля, затем испытывает скачок, приводящий ее к опережению поля, после чего опережение далее уменьшается, падая до нуля при $\varphi_H = 360°$. Таким образом, зависимость равновесного угла намагниченности φ_0 от угла поля φ_H относительно значения $\varphi_H = 180°$ является симметричной.

Скачок намагниченности до $\varphi_H = 180°$ происходит при тем большем значении φ_H, чем угол ψ больше, причем обратный скачок происходит симметрично относительно значения $\varphi_H = 180°$.

При значениях угла ψ в 0° и 20° (кривые *1* и *2*) перескок намагниченности всего один, однако при значении угла ψ равном 40° (кривая *3*) перескоков два: вблизи угла 170° — обратный, и при 180° — опять в прямую сторону (то есть «двухступенчатый»). То есть вблизи $\varphi_H = 180°$ внешнее поле как бы «компенсирует» поле анизотропии.

Компонента намагниченности m_{z0} при $\psi = 0°$ равна нулю при любом значении φ_H, а при увеличении ψ тем более отклоняется от нуля, чем этот угол больше.

При увеличении φ_H до перескока намагниченность m_{z0} медленно увеличивается, а при перескоке резко меняет знак — переориентируется

Рис. 7.13. Зависимости азимутального угла (*а*) и z-компоненты (*б*) вектора намагниченности от азимутального угла внешнего поля при его величине, равной 500 Э, и различных значениях угла ψ: *1* — 0°; *2* — 20°; *3* — 40°. Параметры: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $H_0 = 500$ Э

относительно плоскости Oxy на противоположное направление. После перескока до $\varphi_H = 180°$ немного уменьшается, а после $\varphi_H = 180°$ меняется зеркально относительно $\varphi_H = 180°$. При двухступенчатом перескоке намагниченность выходит почти на перпендикуляр к плоскости пленки.

Вообще при всех значениях угла ψ отклонение намагниченности от плоскости изменения поля (Oxy) значительно больше, чем в первом случае (рис. 7.12), когда поле достаточно сильное, чтобы почти уложить намагниченность в свою плоскость.

7.4.8. Влияние начальной ориентации намагниченности

При полях выше критического поведение равновесного положения намагниченности при изменении ориентации поля от начальной ориентации намагниченности, соответствующей $\varphi_H = 0°$, никак не зависит. Однако в полях ниже критического такая зависимость появляется, тем более выраженная, чем значение угла ψ больше.

Определенное представление о такой зависимости дают рис. 7.14 и рис. 7.15, первый из которых соответствует $\psi = 20°$, а второй $\psi = 40°$. В обоих случаях рассмотрены две начальные ориентации: при $m_{z0} = +1{,}0$ (кривые *1*) и $m_{z0} = -1{,}0$ (кривые *2*).

Можно видеть, что в первом случае ($\psi = 20°$, рис. 7.14) при изменении начальной ориентации с положительной на отрицательную перескок на отрицательное направление ОЛН (вниз относительно плоскости Oxy) происходит при меньших углах φ_H, чем ранее, так как теперь для поля нет необходимости переворачивать намагниченность

Рис. 7.14. Зависимости азимутального угла (*а*) и z-компоненты (*б*) вектора намагниченности от азимутального угла внешнего поля при его величине, равной 500 Э, и различной начальной ориентации намагниченности: *1* — начальная ориентация — в положительном направлении оси Oz: $m_{x0} = 0{,}1$, $m_{y0} = 0{,}1$, $m_{z0} = +1{,}0$; *2* — начальная ориентация — в отрицательном направлении оси Oz: $m_{x0} = 0{,}1$, $m_{y0} = 0{,}1$, $m_{z0} = -1{,}0$. Параметры: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $H_0 = 500$ Э, $\psi = 20°$. Кривые *1* здесь совпадают с кривыми *2* на рис. 7.13

из положительно направления в отрицательное, ибо она изначально находится в отрицательном направлении.

Важно отметить, что здесь перескок при изменении начального отклонения происходит несимметрично относительно плоскости изменения поля, так как при малом угле ψ поле «пересиливает» анизотропию, и намагниченность при малых углах φ_H всегда ориентируется в положительном направлении, задаваемом суммой полей анизотропии и внешнего.

При изменении значения ψ на отрицательное, вся картинка отражается в плоскости изменения поля. То есть можно сказать, что здесь имеет место определенный «гистерезис». Обратный перескок происходит симметрично относительно $\varphi_H = 180°$.

Во втором случае ($\psi = 40°$, рис. 7.15), где перескок является двухступенчатым, вектор намагниченности при начальном отрицательном положении сразу устанавливается в отрицательную сторону относительно плоскости Oxy. Далее, по мере увеличения φ_H вектор намагниченности приближается к этой плоскости, резко перескакивает на другую сторону, после чего вскоре перескакивает обратно и далее уже все время остается на отрицательной стороне плоскости Oxy вплоть до $\varphi_H = 180°$. После окончания этих перескоков, то есть при прохождении φ_H значения 180°, вся картина симметрично повторяется. Таким образом, большая часть движения намагниченности происходит в отрицательном полупространстве относительно плоскости изменения поля.

7.4.9. Замечание о потенциальном характере наблюдаемых зависимостей

Проведенное рассмотрение показывает, что выше и ниже критического значения внешнего поля поведение намагниченности имеет принципиально разный характер. Можно полагать, что удобной интерпретацией такого разнообразия поведения был бы анализ полученных зависимостей на основе конфигурации потенциальной энергии, аналогичный проведенному в разделе 7.3.3. Однако следует отметить, что там равновесная ориентация вектора намагниченности при любой ориентации внешнего поля не выходила из плоскости изменения этого поля, то есть полярный угол намагниченности всегда равнялся точно 90° (рис. 7.1, случай № 1). Поэтому в выражении для плотности энергии (7.40) можно было сразу положить полярный угол равным 90°, что привело к выражению (7.45), зависящему только от азимутального угла. Так что минимизацию можно было проводить только по этому углу, что дало выражение (7.46), анализ которого и выполнялся далее. Такой анализ был проведен на основе одномерных потенциальных кривых, приведенных на рис. 7.3 и рис. 7.4.

В рассматриваемом здесь случае (рис. 7.1, случай № 2) полярный угол вектора намагниченности по мере изменении ориентации внешнего поля может меняться, что обусловлено выходом ОЛН из плоскости изменения поля. При этом в выражении для плотности энергии (7.84)

Рис. 7.15. Зависимости азимутального угла (*а*) и z-компоненты (*б*) вектора намагниченности от азимутального угла внешнего поля при его величине, равной 500 Э, и различной начальной ориентации намагниченности: *1* — начальная ориентация — в положительном направлении оси Oz: $m_{x0} = 0{,}1$, $m_{y0} = 0{,}1$, $m_{z0} = +1{,}0$; *2* — начальная ориентация — в отрицательном направлении оси Oz: $m_{x0} = 0{,}1$, $m_{y0} = 0{,}1$, $m_{z0} = -1{,}0$. Параметры: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $H_0 = 500$ Э, $\psi = 40°$. Кривые *1* здесь совпадают с кривыми *3* на рис. 7.13

полярный угол намагниченности нельзя положить равным 90°, то есть упрощения, подобного проведенному при выводе выражения (7.45), здесь не получается. Необходимость выполнения минимизации по обоим углам приводит к системе двух уравнений (7.95), (7.96), совместное решение которых в аналитическом виде, если и возможно, то крайне затруднительно.

Таким образом, здесь потенциальные кривые, подобные приведенным на рис. 7.3 и рис. 7.4, должны строиться в зависимости не от одной, а от двух переменных, то есть потенциал должен быть представлен в виде определенной трехмерной поверхности. На такой потенциальной

поверхности, в зависимости от параметров построения, должны проявляться более или менее локализованные минимумы, так что переход рабочей точки из одного минимума в другой, вызванный изменением поля, как раз будет отражать скачкообразный характер кривых на рис. 7.13–7.15.

В настоящей работе такой анализ не проводится, однако авторы полагают положить его в основу самостоятельной работы. В качестве примера подобного анализа скачкообразных зависимостей на основе поверхности трехмерного потенциала можно отметить например работы [335, 368–374].

7.4.10. Условия ферромагнитного резонанса

Обратимся теперь к рассмотрению условий ферромагнитного резонанса в данной геометрии (рис. 7.1, случай 2). Будем искать резонансную частоту и резонансное поле, для чего, как и ранее, воспользуемся методом Смита–Сула (раздел 2.3).

В разделе 4.5.1 показано, что в зависимости от формы записи (определяемой условием постоянства длины вектора намагниченности) плотность энергии анизотропии может быть представлена в виде двух эквивалентных выражений (4.182) и (4.184). То же касается представления плотности энергии размагничивания в виде (4.204) и (4.206) (раздел 4.5.2).

Однако в начале раздела 7.4 сделан выбор в пользу выражений $U_a^{(2)}$ (7.82) и $U_m^{(2)}$ (7.83), как более соответствующих физическому содержанию задачи. Приведем здесь эти выражения в виде, записанном через компоненты намагниченности:

$$\begin{aligned} U_a^{(2)} = -K\{&m_x^2 \sin^2\theta_a \cos^2\varphi_a + m_y^2 \sin^2\theta_a \sin^2\varphi_a + \\ &+ m_z^2 \cos^2\theta_a + 2m_x m_y \sin^2\theta_a \sin\varphi_a \cos\varphi_a + \\ &+ 2m_x m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \cos\varphi_a + 2m_y m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \sin\varphi_a\}; \end{aligned} \tag{7.114}$$

$$U_m^{(2)} = -2\pi M_0^2 (m_y^2 + m_z^2). \tag{7.115}$$

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с внешним полем имеет единственный вид (7.20)

$$U_h = -M_0 H_0 (m_x h_x + m_y h_y + m_z h_z). \tag{7.116}$$

Согласно (7.80), (7.81), в рассматриваемой геометрии можно положить:

$$\theta_a = 90^\circ - \psi; \tag{7.117}$$

$$\varphi_a = 0^\circ. \tag{7.118}$$

При этом компоненты поля имеют вид (7.10)–(7.12):

$$h_x = \cos\varphi_H; \tag{7.119}$$

$$h_y = \sin\varphi_H; \tag{7.120}$$

$$h_z = 0. \tag{7.121}$$

С учетом (7.117)–(7.118), плотности энергии анизотропии (7.114) и взаимодействия намагниченности с полем (7.116) принимают вид:

$$U_a^{(2)} = -K(m_x^2\cos^2\psi + m_z^2\sin^2\psi + 2m_x m_z \sin\psi\cos\psi); \tag{7.122}$$

$$U_h = -M_0 H_0(m_x\cos\varphi_H + m_y\sin\varphi_H). \tag{7.123}$$

Складывая (7.122), (7.115), (7.123) и записывая компоненты намагниченности через полярный и азимутальный углы, получаем полную плотность энергии в виде

$$\begin{aligned} U = U_a^{(2)} + U_m^{(2)} + U_h = -K(\cos^2\psi\sin^2\theta\cos^2\varphi + \\ + \sin^2\psi\cos^2\theta + 2\sin\psi\cos\psi\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) - \\ - 2\pi M_0^2(\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta) - M_0 H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H). \end{aligned} \tag{7.124}$$

Выполняя тригонометрические преобразования, а также принимая во внимание постоянство угла ψ и намагниченности насыщения M_0, приведем (7.124) к более простому виду:

$$\begin{aligned} U = -K[\sin^2\theta(\cos^2\psi\cos^2\varphi - \sin^2\psi) + \sin\psi\cos\psi\sin 2\theta\cos\varphi] + \\ + 2\pi M_0^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - M_0 H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H). \end{aligned} \tag{7.125}$$

Дифференцируя по θ и φ, получаем производные:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta} = -2(K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2)\cos 2\theta\cos^2\varphi + \\ + 2K(\sin^2\psi\cos 2\theta + \sin 2\psi\sin 2\theta\cos\varphi) + \\ + M_0 H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H); \end{aligned} \tag{7.126}$$

$$\begin{aligned} U_{\varphi\varphi} = 2(K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2)\sin^2\theta\cos 2\varphi + \\ + K\sin\psi\cos\psi\sin 2\theta\cos\varphi + \\ + M_0 H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H); \end{aligned} \tag{7.127}$$

$$\begin{aligned} U_{\theta\varphi} = (K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2)\sin 2\theta\sin 2\varphi + \\ + K\sin 2\psi\cos 2\theta\sin\varphi + \\ + M_0 H_0\cos\theta\sin(\varphi - \varphi_H). \end{aligned} \tag{7.128}$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{M_0}[-2(K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2)\cos 2\theta\cos^2\varphi + \\ + 2K(\sin^2\psi\cos 2\theta + \sin 2\psi\sin 2\theta\cos\varphi)]; \end{aligned} \tag{7.129}$$

$$B = \frac{1}{M_0}[2(K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2)\sin^2\theta\cos 2\varphi + \\ + K\sin\psi\cos\psi\sin 2\theta\cos\varphi]; \quad (7.130)$$

$$C = \frac{1}{M_0}[(K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2)\sin 2\theta\sin 2\varphi + K\sin 2\psi\cos 2\theta\sin\varphi]. \quad (7.131)$$

Будучи записанными через стандартные обозначения для поля анизотропии H_a (7.48) и размагничивания H_m (7.49), эти выражения имеют вид:

$$A = [-(H_a\cos^2\psi - H_m)\cos 2\theta\cos^2\varphi + \\ + 2H_a(\sin^2\psi\cos 2\theta + \sin 2\psi\sin 2\theta\cos\varphi)]; \quad (7.132)$$

$$B = [(H_a\cos^2\psi - H_m)\sin^2\theta\cos 2\varphi + \\ + \frac{1}{2}H_a\sin\psi\cos\psi\sin 2\theta\cos\varphi]; \quad (7.133)$$

$$C = \frac{1}{2}[(H_a\cos^2\psi - H_m)\sin 2\theta\sin 2\varphi + H_a\sin 2\psi\cos 2\theta\sin\varphi]. \quad (7.134)$$

С введенными обозначениями A, B и C, производные (7.126)–(7.128) принимают вид:

$$U_{\theta\theta} = M_0[A + H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H)]; \quad (7.135)$$

$$U_{\varphi\varphi} = M_0[B + H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H)]; \quad (7.136)$$

$$U_{\theta\varphi} = M_0[C + H_0\cos\theta\sin(\varphi - \varphi_H)]. \quad (7.137)$$

Подставляя эти производные в формулу Смита–Сула (2.148), получаем частоту в виде:

$$\omega = \frac{\gamma}{\sin\theta}\{H_0^2[\sin^2\theta\cos^2(\varphi - \varphi_H) + \cos^2\theta\sin^2(\varphi - \varphi_H)] + \\ + H_0[(A + B)\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H) - 2C\cos\theta\sin(\varphi - \varphi_H)] + \\ + (AB) - C^2\}^{1/2}. \quad (7.138)$$

Здесь значения θ и φ должны соответствовать равновесному положению вектора намагниченности в заданном поле H_0, азимутальная ориентация которого определяется углом φ_H. То есть первым этапом решения задачи должно быть определение такого равновесного положения по обеим координатам, примерно так, как это показано в разделе 7.3.

7.4.11. Резонансное поле

В реальных экспериментах по ФМР, в связи с конструкцией обычно используемых спектрометров, частота задается постоянной, а условия резонанса достигаются путем изменения поля [22–25]. В этом случае выражение (7.138) должно быть разрешено относительно H_0 путем решения соответствующего квадратного уравнения, примерно таким же

образом, как это было сделано в разделе 7.3. Для такого разрешения введем вспомогательные обозначения:

$$a = \sin^2\theta\cos^2(\varphi - \varphi_H) + \cos^2\theta\sin^2(\varphi - \varphi_H); \tag{7.139}$$

$$b = (A + B)\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H) - 2C\cos\theta\sin(\varphi - \varphi_H); \tag{7.140}$$

$$c = (AB) - C^2. \tag{7.141}$$

При этом из (7.138) получаем относительно H_0 квадратное уравнение

$$aH_0^2 + bH_0 + \left[c - \left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \sin^2\theta\right] = 0, \tag{7.142}$$

решение которого имеет вид

$$H_0 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 \sin^2\theta + b^2 - 4ac}\,. \tag{7.143}$$

Как и в предыдущем случае, полученная здесь формула (7.143) является самосогласованной, то есть правая часть должна вычисляться при равновесных значениях полярного и азимутального углов, которые определяются значением поля, поэтому к ней относятся те же замечания, что и приведены в разделе 7.3.6 относительно формулы (7.71).

7.4.12. Приближение сильного поля

Поскольку в случае 1 (рис. 7.1) при принятых там частотах и параметрах пленки приближение сильного поля дало довольно приемлемые результаты (раздел 7.3.7), то можно ожидать, что и здесь (то есть в случае 2) при тех же параметрах точность приближения сильного поля будет иметь примерно такую же величину. Поэтому не будем здесь усложнять задачу определения условий резонанса предварительным нахождением равновесного положения намагниченности методом установления, а сразу ограничимся приближением сильного поля.

Итак, будем считать, что вектор намагниченности в равновесном состоянии выстраивается точно вдоль поля, то есть в формулах (7.139), (7.140), а также во входящих в них формулах (7.129)–(7.131), можно положить $\theta = 90^\circ$ и $\varphi = \varphi_H$. Удобно также, подобно (7.48) и (7.49), ввести эффективные поля анизотропии

$$H_a = 2K/M_0 \tag{7.144}$$

и размагничивания:

$$H_m = 4\pi M_0. \tag{7.145}$$

Далее, полагая, что второе и третье слагаемые под корнем в (7.143) значительно меньше первого, можно привести (7.143) к виду

$$H_0 = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{A + B}{2}, \tag{7.146}$$

где A и B принимают вид:

$$A = (H_a \cos^2 \psi - H_m) \cos^2 \varphi_H - H_a \sin^2 \psi; \tag{7.147}$$

$$B = (H_a \cos^2 \psi - H_m) \cos(2\varphi_H). \tag{7.148}$$

Заметим, что выражение (7.146) подобно (7.76), однако значения A и B, в отличие от (7.77) и (7.78), здесь другие.

Подставляя (7.147) и (7.148) в (7.146), получаем резонансное поле в виде

$$H_0 = \frac{\omega}{\gamma} + \frac{H_a}{2} \sin^2 \psi - \frac{1}{2}(H_a \cos^2 \psi - H_m)(3 \cos^2 \varphi_H - 1). \tag{7.149}$$

На рис. 7.16 показана зависимость резонансного поля от угла его ориентации, построенная по формуле (7.149) при тех же параметрах пленки и заданных значениях частоты, что и в случае 1 (рис. 7.9).

Из рисунка можно видеть, что зависимость, подобно приведенной на рис. 7.10, имеет синусоидальный характер с периодичностью 180°. Амплитуда зависимости также близка к таковой на рис. 7.10. Величина резонансного поля по мере уменьшения частоты также уменьшается линейно, что обеспечивается первым слагаемым в формуле (7.149). Однако здесь, в отличие от рис. 7.10, сдвиг кривой как целого по гори-

Рис. 7.16. Зависимость резонансного поля от угла его ориентации при заданных значениях частоты: *1* — 10 ГГц; *2* — 8 ГГц; *3* — 6 ГГц; *4* — 4 ГГц. Кривые построены по формуле (7.149). Параметры: $K = 1{,}15 \cdot 10^4$ эрг см$^{-3}$, $M_0 = 22$ Гс, $\psi = 20°$

зонтальной оси отсутствует. минимумы кривой приходятся точно на углы: 0°, 180°, 360°, а максимумы на 90° и 270°.

Такое отсутствие сдвига можно понять из рассмотрения рис. 7.1, откуда видно, что проекция ОЛН на плоскость пленки, то есть на ту плоскость, в которой поворачивается вектор поля **H**, приходится как раз на ось Ox, от которой отсчитывается угол φ_H. То есть зависимость резонансного поля от этого угла относительно оси Ox является полностью симметричной.

Замечание. Проведенное здесь рассмотрение выполнено при тех же условиях, что и аналогичное рассмотрение случая 1 в разделе 7.3. Поэтому относительно корректности подобного рассмотрения следует руководствоваться теми же соображениями, что изложены в заключительном замечании раздела 7.3. То есть для смешанных ферритов-гранатов на частоте порядка 10 ГГц и выше ошибка приближения сильного поля составляет не более нескольких процентов, тогда как для ортоферритов и даже для гексаферрита бария в полях менее 20 кЭ следует использовать полное решение. То есть к использованию приближения сильного поля следует подходить с определенной осторожностью, учитывая рабочую частоту и конкретные параметры материала.

7.5. О возможности раздельного экспериментального определения константы одноосной анизотропии и намагниченности

Выше рассмотрены два случая принципиально различных ориентационных зависимостей частоты ФМР от поля в пленках с отклонением оси анизотропии от нормали к плоскости пленки. Рассмотрим эти случаи с точки зрения возможности экспериментального определения константы анизотропии и намагниченности. Сохраним нумерацию случаев, принятую при их первоначальном рассмотрении.

Случай № 1. Согласно (7.57), полная плотность энергии имеет вид

$$U = -K\sin^2\theta\cos^2(\varphi-\psi)+ \\ + 2\pi M_0^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_H). \quad (7.150)$$

Введем вспомогательный параметр

$$K_{a1} = K\cos^2(\varphi-\psi) - 2\pi M_0^2\cos^2\varphi. \quad (7.151)$$

С этим параметром (7.150) принимает вид

$$U = -K_{a1}\sin^2\theta - M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_H). \quad (7.152)$$

Можно видеть, что здесь ориентационные зависимости анизотропии и размагничивания (первые два слагаемые в (7.150), сгруппированные вместе в выражении (7.151), за вычетом общего коэффициента $\sin^2\theta$)

являются одинаковыми. Отличие по фазе между первым и вторым слагаемыми в (7.151) роли не играет, так как обе зависимости пропорциональны квадрату косинуса φ, так что суммарная зависимость также будет пропорциональна квадрату косинуса того же угла.

Случай № 2. Согласно (7.125), полная плотность энергии имеет вид:

$$U = -K[\sin^2\theta(\cos^2\psi\cos^2\varphi - \sin^2\psi) + \sin\psi\cos\psi\sin 2\theta\cos\varphi] + \\ + 2\pi M_0^2\sin^2\theta\cos^2\varphi - M_0H_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H). \quad (7.153)$$

Введем вспомогательный параметр:

$$K_{a2} = K\cos^2\psi - 2\pi M_0^2. \quad (7.154)$$

Этот параметр учитывает суммарный вклад энергии размагничивания и той части энергии анизотропии, которая имеет такую же ориентационную зависимость, как и энергия размагничивания.

При этом полная плотность энергии (7.125) принимает вид:

$$U = -K_{a2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + K\sin\psi(\sin\psi\sin^2\theta - \cos\psi\sin 2\theta\cos\varphi) - \\ - MH_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_H). \quad (7.155)$$

Здесь первое слагаемое также описывает одинаковую ориентационную зависимость для анизотропии и размагничивания, однако второе слагаемое соответствует той части энергии анизотропии, которая имеет ориентационную зависимость, отличную от таковой для намагниченности. Так, по углу φ первое слагаемое пропорционально квадрату косинуса, то есть соответствует периодичности через π, тогда как второе слагаемое пропорционально лишь косинусу в первой степени, то есть соответствует периодичности через 2π.

Таким образом, в первом случае, благодаря тождественности ориентационных зависимостей анизотропии и размагничивания, экспериментальное разделение вкладов той и другой энергии, а следовательно и раздельное измерение констант анизотропии и намагниченности, возможным не представляется.

Во втором же случае, кроме тождественной части ориентационных зависимостей, за счет энергии анизотропии присутствует добавка, имеющая другую периодичность, что делает возможным определение в эксперименте констант анизотропии и намагниченности по отдельности.

Проще всего выполнить такое измерение, пользуясь расчетными формулами для резонансных полей в приближении сильного поля, такими как (7.79) и (7.149). Значение угла ψ между ОЛН и нормалью к плоскости пленки должно быть известно заранее из независимых измерений, например, по исчезновению доменов в достаточно сильном поле, как это описано в разделе 5.3.

Для определения анизотропии и намагниченности следует в эксперименте на фиксированной частоте измерить поле ферромагнитного

резонанса при двух различных ориентациях внешнего поля в плоскости пленки: когда это поле параллельно и когда оно перпендикулярно проекции ОЛН на плоскость пленки.

Далее, используя два полученных значения, из двух выражений для резонансных полей (7.79) и (7.149) при заданном значении угла ψ следует составить систему двух уравнений, содержащую в качестве неизвестных поля анизотропии и размагничивания. Разрешение такой системы даст значения этих полей, откуда искомые значения константы анизотропии и намагниченности насыщения пленки получаются путем обращения соотношений (7.48) и (7.49).

Описание реализации такого измерения содержится в работе [23]. Согласно приведенным там данным, для пленок смешанных ферритов-гранатов с наклоном оси от 3° до 30° точность раздельного измерения анизотропии и намагниченности составляла около 20 %. Если же один из этих параметров был известен из независимых измерений, то точность определения другого возрастала до единиц процентов.

7.6. Экспериментальное исследование ферромагнитного резонанса в пленках ферритов-гранатов

В этом разделе кратко перечислим результаты экспериментов по исследованию ферромагнитного резонанса в пленках смешанных ферритов-гранатов, обладающих значительным отклонением оси одноосной анизотропии от нормали к плоскости пленки. Эксперименты были выполнены в 1972–1980 годах с участием одного из авторов настоящей монографии и подробно описаны в работах [22–25]. Здесь приведем их основные результаты, не вдаваясь в излишние подробности.

Экспериментальное исследование ферромагнитного резонанса, описанное в упомянутых работах, проводилось на тех же пленках смешанных ферритов–гранатов, что и описанное в разделе 5.3 изучение свойств ориентационных переходов,

Измерения проводились с помощью резонансного спектрометра ЭПА-2М на частоте 9500 МГц в полях от 0 до 5000 Э.

В качестве образцов использовались выпиленные дисковой алмазной пилой небольшие кусочки пленок на подложках размером 2–3 на 3–4 мм. Столь малый размер образцов был обусловлен необходимостью их размещения внутри двухполуволнового проходного резонатора трехсантиметрового диапазона, представлявшего собой отрезок стандартного волновода сечением 18 на 10 мм, огороженный двумя диафрагмами, размещенными на расстоянии около 35 мм друг от друга. Поле от регулируемого электромагнита было ориентировано перпендикулярно широкой стенке волновода. Образец закреплялся на тонком диэлектрическом стержне, который вводился в резонатор через окно диаметром 6 мм в его узкой стенке посередине между диафрагмами.

Образец можно было закреплять (с помощью клея) на стержне в двух положениях, так что плоскость пленки была параллельна или перпендикулярна оси стержня. Поворот стержня вокруг его оси соответствовал повороту поля вокруг образца в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Дополнительный поворот образца вокруг оси, перпендикулярной оси стержня, осуществлялся путем его переклеивания в новое положение. Таким образом, можно было менять ориентацию образца в его плоскости с точностью до 10° и перпендикулярно его плоскости с точностью до 5°. При таком изменении ориентации образца направление поля относительно лабораторной системы координат оставалось неизменным, то есть поворот образца был как бы эквивалентен повороту поля во всем возможном интервале полярного и азимутального углов.

Основные результаты экспериментов приведены в работах [22, 23, 25]. Были измерены ориентационные зависимости резонансных полей при вращении пленки вокруг оси, лежащей в ее плоскости (путем поворота диэлектрического стержня). Исследовались два варианта: когда наклонная ОЛН лежала в плоскости вращения поля (случай 1 на рис. 7.1) и когда в этой плоскости лежала проекция ОЛН на плоскость пленки (случай 2 на рис. 7.1). Теоретическая интерпретация проводилась в приближении сильного поля.

Приведенные в работах [22, 23, 25] значения резонансных полей при характерных ориентациях пленки, по форме записи несколько отличаются от приведенных здесь в разделах 7.3–7.5, что связано с иной принятой там системой обозначений. Однако конечные результаты расчетов полностью совпадают. Сравнение расчетных результатов с экспериментальными значениями, выполненное в работах [22, 23, 25] выявило хорошее соответствие.

Была наглядно продемонстрирована возможность раздельного измерения константы одноосной анизотропии и намагниченности насыщения, выполненного в соответствии с методикой намагничивания пленки вдоль и поперек проекции ОЛН на плоскость пленки, как это описано в разделе 7.5.

В работах [23, 25] выполнено измерение константы магнитоупругого взаимодействия. Константа определялась путем регистрации изменения резонансного поля при механическом давлении на образец. Дозированное давление осуществлялось с помощью вводимого в резонатор поверх образца вертикального диэлектрического штока, на верхнем конце которого помещалась грузовая площадка с размещенной на ней емкостью с водой, уровень которой определял степень механической нагрузки.

Было выявлено, что в исследованных образцах отклонение ОЛН от нормали к плоскости пленки превышает отклонение оси [111] подложки от той же нормали в 3–5 раз (до 20° по сравнению с 4° для подложки). Для интерпретации такого усиления отклонения выполнена оценка роли магнитострикционного механизма (раздел 5.2.1). Было

показано, что измеренное значение константы магнитоупругости может объяснить значительную часть наблюдаемого отклонения.

В качестве дополнительных результатов, полученных в работах [22,23,25], можно отметить наблюдение тонкой структуры резонансной линии, обусловленной неоднородностью пленок, а также измерение константы затухания ферромагнитного резонанса.

Отдельно следует отметить работу [24] (а также соответствующую часть работы [25]), выполненную на пленках состава $(YGdYb)_3(FeGa)_5O_{12}$, не имеющих заметного отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки (раздел 5.2.1).

В этих пленках резонансные измерения выявили сильно проявлявшую себя кубическую анизотропию. Некоторая одноосная анизотропия также имела место, однако усиление отклонения ее оси от нормали к плоскости пленки отсутствовало. Более того, измерения магнитооптическим методом по исчезновению доменной структуры при намагничивании пленки полем в ее плоскости кубической анизотропии не выявили, тогда как значение одноосной почти в два раза превышало значение, измеренное резонансным методом. То есть был сделан вывод о более высокой чувствительности и объективности резонансного метода по сравнению с оптическим.

Была измерена ориентационная зависимость резонансного поля от угла в плоскости, проходящей через ось [111], перпендикулярную плоскости пленки, и проекцию другой оси типа [111] на плоскость той же пленки. Теоретическая интерпретация выполнялась по методу Смита–Сула в приближении сильного поля. Поскольку константы кубической и одноосной анизотропии заранее не были известны, то сначала независимым методом (по полям коллапса и эллиптической неустойчивости ЦМД, как это описано в [25,42,375]) была определена намагниченность насыщения пленки. Далее, на основе теоретической интерпретации ориентационной зависимости резонансного поля были отмечены три значения поля, соответствующие характерным кристаллографическим ориентациям. С использованием этих трех значений поля в качестве параметров, с учетом измеренного ранее значения намагниченности, была составлена система уравнений, содержащая константы анизотропии и гиромагнитную постоянную, входящую в уравнение Ландау–Лифшица.

Разрешение этой системы позволило определить константы одноосной и кубической анизотропии по отдельности, а также гиромагнитную постоянную, которая оказалась несколько (приблизительно на 3,7 %) выше традиционного значения (2,91 МГц/Э вместо 2,80 МГц/Э). Построенная с помощью полученных таким образом параметров теоретическая зависимость резонансного поля от ориентации пленки показала превосходное согласие с экспериментом во всем интервале исследованных углов (от нуля до 360°).

В качестве дополнительного результата также можно отметить измерение ширины линии резонанса (100–150 Э), а также оценку параметра затухания прецессии намагниченности.

Выводы по главе 7

Настоящая глава посвящена описанию явления ферромагнитного резонанса в пленках с отклонением оси магнитной анизотропии от нормали к плоскости пленки.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Рассмотрены условия возбуждения ферромагнитного резонанса в пленке из одноосного магнетика, ось легкого намагничивания которого отклонена от нормали к плоскости пленки. Приведена общая геометрия задачи, из всего многообразия возможных ориентаций поля относительно пленки и ОЛН выбрано изменение поля в единой плоскости, проходящей через нормаль к плоскости пленки. В качестве наиболее характерных ориентаций ОЛН относительно поля выделены два случая: первый — когда ОЛН лежит в плоскости изменения поля, второй — когда ОЛН лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля. В качестве довольно удобного метода расчета резонансной частоты отмечен метод Смита–Сула в сферической системе координат и выявлены условия его применимости. В выбранной геометрии получены выражения для плотностей энергии анизотропии, размагничивания и взаимодействия намагниченности с внешним полем, записанные через сферические переменные — полярный и азимутальный углы вектора намагниченности. Приведены две эквивалентные формы записи энергии одноосной анизотропии, выявлено их соотношение с плотностью энергии размагничивания и отмечено принципиальное различие такого соотношения для случаев намагничивания параллельно и перпендикулярно проекции ОЛН на плоскость пленки.

2. Рассмотрен первый из упомянутых выше случаев, а именно — намагничивание пленки полем, плоскость изменения которого проходит через нормаль к плоскости пленки, причем пленка ориентирована таким образом, что ОЛН лежит в плоскости изменения поля. Путем минимизации выражения для полной плотности энергии определено равновесное положение вектора намагниченности как в отсутствие поля, так и в полях различной ориентации. Показано, что в отсутствие поля для характеристики равновесного положения намагниченности удобным параметром является фактор качества пленки, представляющий собой отношение поля анизотропии к полю размагничивания. Отмечено, что в случае, когда фактор качества меньше единицы, вектор намагниченности в свободном состоянии ориентируется вблизи плоскости пленки, а когда фактор качества единицу превышает, преимущественным направлением намагниченности является нормаль к плоскости пленки. Приведены примеры реальных материалов того и другого вида. Так фактор качества меньший единицы свойственен пермаллою и некоторым смешанным ферритам-гранатам, а больший единицы — ортоферритам, гексаферритам и подавляющему большинству смешанных ферритов-гранатов. На основе численного анализа

выражения для первой производной от суммарной плотности энергии выявлен скачкообразный характер изменения ориентации вектора намагниченности, имеющий место при изменении значения поля. Отмечено, что такой характер ориентации проявляется заметно лишь при полях, меньших или порядка поля размагничивания (превышающего это поле не более чем в два-три раза). Построена модель, объясняющая скачки ориентации намагниченности наличием двух минимумов энергетического потенциала пленки, глубина которых, по мере изменения величины или ориентации внешнего поля, также изменяется, что приводит к перескоку рабочей точки системы из одного минимума в другой. Приведена качественная трактовка перескока намагниченности, наглядно поясняющая ограничение интервала полей, в пределах которого этот перескок возможен, величиной, близкой к полю размагничивания.

3. Для первого из упомянутых выше случаев, то есть при ориентации ОЛН в плоскости изменения поля, на основе полученной равновесной ориентации намагниченности, с использованием метода Смита–Сула, рассчитана частота ферромагнитного резонанса. Рассмотрена зависимость частоты резонанса от величины внешнего поля при различных его ориентациях в плоскости, проходящей через ОЛН и нормаль к плоскости пленки. Показано, что при сильном отличии ориентации поля от направления ОЛН частота резонанса сначала понижается, после чего, пройдя через минимум, увеличивается, асимптотически стремясь к линейной зависимости, проходящей через точку, соответствующую резонансу в нулевом поле. Минимум зависимости приходится на поле, превышающее поле размагничивания в два-три раза. При малом отличии ориентации поля от направления ОЛН зависимость частоты от поля имеет монотонно возрастающий характер, асимптотически стремясь к той же прямой, что и при сильном отличии. Минимум наблюдаемой зависимости интерпретирован на основе физики простого и частично затянутого ориентационного перехода, имеющего место при намагничивании пленки вблизи направления, перпендикулярного ОЛН. Для случая фиксированной частоты рассмотрена зависимость величины поля ферромагнитного резонанса от ориентации внешнего поля. Показано, что характер такой зависимости близок к синусоидальному с периодом в 180° и некоторым сдвигом по фазе относительно направления, соответствующего нормали к плоскости пленки. Отмечено, что такой сдвиг определяется углом отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки с учетом добавки, вносимой полем размагничивания. С целью упрощения полученных выражений рассмотрена та же зависимость в приближении сильного поля. На основе сравнения с полным решением оценена корректность такого приближения, причем показано, что его точность возрастает по мере увеличения как величины внешнего поля, так и частоты, на которой определяется поле резонанса.

4. Рассмотрен второй из упомянутых выше случаев, а именно — намагничивание пленки полем, плоскость изменения которого проходит

через нормаль к плоскости пленки, причем ОЛН лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля. Путем минимизации выражения для полной плотности энергии определено равновесное положение вектора намагниченности как в отсутствие поля, так и в полях различной ориентации. Отмечено, что в отсутствие поля для характеристики равновесного положения намагниченности удобным параметром является фактор качества пленки. Рассмотрена зависимость равновесного значения полярного угла вектора намагниченности от величины отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки при различных значениях фактора качества. Выявлено критическое значение фактора качества, при котором действующие на намагниченность силы со стороны поля анизотропии и размагничивающего поля пленки между собой сравниваются. Показано, что при таком значении зависимость равновесного полярного угла от величины фактора качества представляет собой прямую линию, соответствующую изменению полярного угла от 45° до нуля. При значениях фактора качества, большем и меньшем критического, зависимости равновесной величины полярного угла от фактора качества, начинаясь при 0° и 90° соответственно, стремятся к своим критическим значениям. Рассмотрена равновесная ориентация вектора намагниченности в присутствии внешнего поля. Отмечено, что в отличие от предыдущего случая, когда минимизацию плотности энергии было достаточно выполнить лишь по азимутальному углу, здесь необходимо проводить минимизацию по обоим углам — полярному и азимутальному одновременно. Такое отличие обусловлено выходом ОЛН из плоскости изменения внешнего поля, что вызывает отклонение равновесной намагниченности от этой плоскости. Обсуждены два возможных варианта записи выражений для плотности энергии, связанные через постоянство длины вектора намагниченности, даны практические рекомендации выбора оптимального выражения. Получена система из двух уравнений для азимутального и полярного углов, отмечена ее эквивалентность весьма сложному полному уравнению четвертой степени, в результате чего сделан вывод о большей целесообразности ее численного решения методом установления. Приведены аналитические выражения для полей, требуемые для реализации метода установления. Оценена сходимость итерационного процесса установления. Показано, что для рассматриваемой здесь задачи оптимальным с точки зрения соотношения достаточной точности с малостью времени счета является число итераций порядка 1000. При этом точность составляет десятые доли градуса при времени счета порядка десятка секунд. Методом установления получены зависимости равновесного азимутального угла и равновесной нормальной к плоскости пленки компоненты намагниченности от азимутального угла изменения поля в его плоскости. Выявлено критическое значение поля, выше и ниже которого полученные зависимости имеют принципиально различный характер. Величина критического поля определена как превышающая поле размагничивания в два–три раза. Показано, что в поле, большем

критического, по мере изменения ориентации поля вектор намагниченности в основном следует за направлением поля, а нормальная компонента намагниченности отклоняется от плоскости пленки в ту же сторону, что и ОЛН. В поле, меньшем критического, зависимости как азимутального угла, так и нормальной компоненты намагниченности от ориентации поля имеют сильно выраженный скачкообразный характер. Установлено, что в формировании характера скачков важную роль играет как величина поля, так и начальная ориентация вектора намагниченности. Отмечена возможность анализа скачков намагниченности на основе модели трехмерной поверхности энергетического потенциала, приведены ссылки на работы, где подобный анализ выполняется для решения сходных задач.

5. Для второго из упомянутых выше случаев, то есть при ориентации ОЛН в плоскости, перпендикулярной плоскости изменения поля, на основе полученной равновесной ориентации намагниченности, с использованием метода Смита–Сула, рассчитана частота ферромагнитного резонанса. Рассмотрены два эквивалентных варианта записи плотности энергии, связанные постоянством длины вектора намагниченности, выполнен выбор того из них, который наиболее соответствует качественному физическому содержанию задачи. Получена формула для зависимости частоты резонанса от величины и ориентации внешнего поля, выраженная через полярный и азимутальный углы равновесного положения вектора намагниченности. Показано, что формула для частоты может быть представлена в виде квадратного уравнения относительно внешнего поля. Из решения этого уравнения получена зависимость поля ферромагнитного резонанса от полярного и азимутального углов вектора намагниченности при условии заданного значения частоты. В приближении сильного поля получена ориентационная зависимость величины поля резонанса от азимутального угла внешнего поля. Показано, что характер такой зависимости близок к синусоидальному с периодом в 180°, без какого-либо сдвига по фазе относительно направления, соответствующего нормали к плоскости пленки. Отмечено, что отсутствие сдвига определяется совпадением проекции ОЛН на плоскость изменения поля с направлением нормали к плоскости пленки, так что ориентация равновесного положения намагниченности относительно плоскости изменения поля, является полностью симметричной.

6. Рассмотренные случаи изменения внешнего поля в плоскости, проходящей через нормаль к плоскости пленки при двух различных ориентациях ОЛН относительно этой нормали, проанализированы с точки зрения возможности раздельного измерения намагниченности насыщения и константы одноосной анизотропии. Описана методика реализации такого измерения в эксперименте, включающая в себя определение двух значений резонансного поля, соответствующих намагничиванию пленки в ее плоскости полем, параллельным и перпендикулярным проекции ОЛН на плоскость пленки, с последующим

использованием этих значений для составления системы уравнений, разрешение которой дает искомые величины намагниченности и константы анизотропии.

7. Выполнен краткий обзор результатов ранее выполненных экспериментов по исследованию ферромагнитного резонанса в пленках смешанных ферритов-гранатов, обладающих значительным отклонением оси одноосной анизотропии от нормали к плоскости пленки. Описана методика измерений с краткими характеристиками применявшейся аппаратуры, а также способами закрепления и ориентации образца. Приведены составы и основные параметры исследованных образцов, в том числе измеренные независимыми методами. Приведены результаты исследования ориентационных зависимостей резонансных полей для двух рассмотренных выше ориентаций внешнего поля относительно ОЛН и нормали к плоскости пленки, теоретическая интерпретация которых выполнена в приближении сильного поля. Отмечено хорошее соответствие экспериментальных результатов с ориентационными зависимостями, полученными теоретически на основе метода установления и решения Смита–Сула. Продемонстрировано раздельное измерение константы одноосной анизотропии и намагниченности насыщения, выполненное в соответствии с методикой, приведенной выше. Описана методика и приведены результаты измерения константы магнитоупругого взаимодействия пленок, в том числе оценена роль магнитострикционного механизма в формировании отклонения ОЛН от нормали к плоскости пленки. Кратко перечислены результаты наблюдения тонкой структуры линии и измерения параметра затухания ферромагнитного резонанса. Приведены результаты исследования ориентационных зависимостей поля ферромагнитного резонанса от ориентации внешнего поля в пленках, обладающих наряду с одноосной также кубической анизотропией. Приведена методика и описаны результаты измерения констант одноосной и кубической анизотропии при условии известности намагниченности насыщения из независимых источников. Отмечена более высокая чувствительность измерения параметров кубической анизотропии резонансным методом по сравнению с подобными измерениями, выполняемыми магнитооптическим методом.

Глава 8

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В КОМПОЗИЦИОННОЙ СРЕДЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ ФЕРРИТОВЫХ ЧАСТИЦ

Настоящая глава посвящена описанию явления ферромагнитного резонанса в композиционной среде, состоящей из сферических ферритовых частиц, обладающих одноосной магнитной анизотропией. Рассмотрен общий случай, когда оси анизотропии в отдельных частицах ориентированы хаотическим образом, так что при намагничивании такой среды однородным постоянным полем векторы намагниченности в отдельных частицах поворачиваются по направлению поля. Методом усреднения по полярному и азимутальному углам получен тензор динамической магнитной восприимчивости среды в целом. Рассмотрена возможность формирования заданных частотных свойств тензора путем частичной ориентации осей анизотропии в отдельных частицах.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать работам [6–8, 22–25, 78–117, 376–395], остальные ссылки указаны в тексте.

8.1. Общая постановка задачи

Рассмотрим композиционную среду, представляющую собой совокупность ферритовых частиц, вкрапленных в виде решетки в жесткую немагнитную матрицу. Будем считать, что материал матрицы является изотропным и обладает диэлектрическими свойствами, причем диэлектрическую проницаемость положим равной единице. Для простоты расчета предположим, что частицы имеют одинаковую сферическую форму и их магнитные параметры совпадают. Пусть все частицы обладают одинаковой одноосной анизотропией, поле которой того же порядка, что и намагниченность насыщения их материала. Ориентации осей анизотропии в отдельных частицах распределены в пространстве произвольным хаотическим образом, причем все направления осей анизотропии равновероятны. Положим расстояния между частицами столь большими, что взаимодействие между ними отсутствует (аналогично модели «независимых зерен» для поликристалла [6–8, 376]). Среда намагничена постоянным однородным полем, величина которого достаточна для уничтожения доменов внутри частиц.

Рис. 8.1. Возможная геометрия структуры композиционной среды

Один из возможный вариантов геометрии структуры предлагаемой среды показан на рис. 8.1. В качестве примера выбрана кубическая решетка, однако, поскольку взаимодействие между частицами отсутствует, то вид решетки не имеет значения и в дальнейшем расчете не учитывается. Сферические частицы схематически изображены в виде кружков, расположенных в ее узлах. Утолщенным линиями внутри кружков показано расположение осей анизотропии отдельных сфер, ориентированных произвольным хаотическим образом.

Так как ферритовые сферы занимают только часть пространства, то для получения электродинамических параметров среды в целом надо соответствующие параметры частиц умножить на коэффициент заполнения, равный отношению объемов заполненной и пустой частей пространства.

Оценим коэффициент заполнения для структуры, показанной на рис. 8.1. Пусть радиус сферы равен r, а расстояние между соседними узлами решетки равно d. Очевидно, одной ячейке соответствует одна сфера. Тогда коэффициент заполнения, равный отношению объема сферы к объему ячейки равен:

$$N_p = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{d}\right)^3. \tag{8.1}$$

При этом общее число частиц в единице объема равно:

$$N_0 = d^{-3}. \tag{8.2}$$

8.1.1. Системы координат

Основной задачей настоящей работы является вычисление динамической восприимчивости, то есть тензора, связывающего динамическую намагниченность с переменным полем. Поскольку среда состоит из совокупности одинаковых невзаимодействующих частиц, ориентированных различным образом, то динамическая восприимчивость среды в целом определяется суммой восприимчивостей входящих в нее частиц. Так как частицы по ориентации распределены равномерно, то сумму можно заменить произведением восприимчивости одной частицы, усредненной по всем возможным ориентациям, на общее число частиц в единице объема среды. Таким образом, в качестве первой задачи можно выделить определение восприимчивости для одной частицы с заданной ориентацией оси анизотропии.

Для решения этой задачи используем системы координат, показанные на рис. 8.2.

Рис. 8.2. Системы координат используемые для получения тензора восприимчивости одной частицы с осью анизотропии ОЛН, ориентированной под углами θ_a и φ_a

На рис. 8.2, *а* показано общее расположение оси анизотропии ОЛН (ОЛН — аббревиатура выражения «ось легкого намагничивания»), заданной углами θ_a и φ_a в лабораторной системе координат, связанной с постоянным полем, а также ориентация вектора намагниченности $\mathbf{M}$, заданная углами θ_m и φ_a в той же системе. Заметим, что здесь для азимутального угла вектора намагниченности не вводится собственное значение φ_m, отличное от φ_a, так как из симметрии задачи следует, что равновесная намагниченность ориентируется в плоскости, проходящей через ОЛН и вектор внешнего поля (то есть в плоскости zOz''').

На рис. 8.2, *б* показаны ориентации тех же величин при $\varphi_a = 0$. Укрупненные точки, означающие пересечение соответствующих линий, на рисунке даны для того, чтобы показать взаимное расположение осей, лежащих в плоскости, проходящей через ось Oz и вектор намагниченности $\mathbf{M}$.

Итак при решении задачи используются следующие системы координат.

Система № 1 — $Oxyz$ — лабораторная, связанная с направлением внешнего поля.

Система имеет оси Ox, Oy, Oz. Ось Oz — направлена вдоль внешнего поля $\mathbf{H}$, то есть совпадает с направлением оси Or сферической системы, связанной с полем. Оси Ox и Oy — перпендикулярны внешнему полю. Плоскость Oxz соответствует $\varphi = 0$.

Система предназначена для получения тензора восприимчивости в виде, удобном для его использования в задачах о распространении электромагнитных волн.

В этой системе должен быть получен тензор восприимчивости в конечном виде.

Система № 2 — $Ox'y'z'$ — связанная с осью анизотропии — ОЛН в случае, когда эта ось лежит в плоскости Oxz системы № 1.

Система имеет оси Ox', Oy', Oz'. Ось Oz' — направлена вдоль ОЛН. Ось Oy'совпадает с осью Oy системы № 1. Угол между осями Oz' и Oz (или Oz' и Or) равен θ_a. Угол между осями Ox' и Ox также равен θ_a. Плоскость $Ox'z'$ совпадает с плоскостью Oxz системы № 1, соответствующей $\varphi = 0$.

Система соответствует случаю нулевого значения азимутального угла ОЛН.

Эта система используется при нахождении равновесного положения вектора намагниченности.

Система № 3 — $Ox''y''z''$ — связанная с равновесной ориентацией вектора намагниченности $\mathbf{M}_S$.

Система имеет оси Ox'', Oy'', Oz''. Ось Oz'' направлена вдоль равновесного направления вектора намагниченности. Ось Oy'' совпадает с осью Oy системы № 1. Плоскость $Ox''z''$ совпадает с плоскостью Oxz системы № 1. Угол между осями Oz'' и Oz (или Oz'' и Or) равен θ_m. Угол между осями Ox'' и Ox также равен θ_m. Сферические координаты вектора $\mathbf{M}_S$ соответствуют θ_m и φ_m. В силу осевой симметрии задачи относительно оси Oz (то есть относительно направления поля $\mathbf{H}$), можно положить $\varphi_m = \varphi_a$.

Система соответствует случаю нулевого значения азимутального угла ОЛН (то есть $\varphi_a = 0$).

В этой системе записывается, линеаризуется и решается уравнение движения вектора намагниченности для случая $\varphi_a = 0$.

Система № 4 — $Ox'''y'''z'''$ — связанная с осью анизотропии, когда ОЛН ориентирована относительно плоскости Oxz системы № 1

произвольным образом, то есть повернута вокруг оси Oz системы № 1 на угол φ_a.

Система имеет оси Ox''', Oy''', Oz'''. Ось Oz''' направлена вдоль ОЛН. Проекция оси Oz''' (то есть и ОЛН) на плоскость Oxy составляет с осью Ox системы № 1 угол φ_a. Проекция оси Ox''' на плоскость Oxy составляет с осью Ox системы № 1 угол φ_a. Проекция оси Oy''' на плоскость Oxy составляет с осью Oy системы № 1 угол φ_a. Так как равновесный вектор намагниченности $\mathbf{M}$ лежит в плоскости, проходящей через ОЛН и направление постоянного поля, то есть через оси Oz''' и Oz, то проекция вектора $\mathbf{M}$ на плоскость Oxy составляет с осью Ox угол φ_a (то есть $\varphi_m = \varphi_a$, как отмечено при рассмотрении системы № 3).

Система соответствует случаю произвольного значения азимутального угла ОЛН.

В этой системе записывается плотность энергии одноосной анизотропии в наиболее простом виде.

Система № 5 — $Ox''''y''''z''''$ — связанная с равновесной намагниченностью, когда ОЛН ориентирована относительно плоскости Oxz системы № 1 произвольным образом, то есть повернута вокруг оси Oz системы № 1 на угол φ_a.

Система имеет оси Ox'''', Oy'''', Oz''''. Ось Oz'''' — направлена вдоль вектора равновесной намагниченности $\mathbf{M}_S$, то есть составляет с осью Oz системы №1 угол θ_m. Проекция оси Oz'''' (то есть и вектора $\mathbf{M}_S$) на плоскость Oxy составляет с осью Ox системы № 1 угол φ_a. Проекция оси Ox'''' на плоскость Oxy составляет с осью Ox системы № 1 угол φ_a. Проекция оси Oy'''' на плоскость Oxy составляет с осью Oy системы № 1 угол φ_a.

Система соответствует случаю произвольного значения азимутального угла ОЛН, обозначаемого как φ_a.

В этой системе записывается, линеаризуется и решается уравнение движения вектора намагниченности для случая произвольного значения угла φ_a.

Из приведенного описания видно, что ориентация осей систем $Ox'y'z'$ (№ 2) и $Ox'''y'''z'''$ (№ 4) относительно лабораторной системы $Oxyz$ (№ 1) полностью определяется заданием полярного и азимутального углов оси анизотропии (ОЛН) θ_a и φ_a. Для определения же ориентации осей систем $Ox''y''z''$ (№ 3) и $Ox''''y''''z''''$ (№ 5), кроме азимутального угла φ_a, необходимо знание полярного угла θ_m, определяющего равновесную ориентацию вектора намагниченности $\mathbf{M}_S$.

Таким образом, первой задачей становится нахождение равновесного положения вектора $\mathbf{M}_S$, определяемого взаимодействием намагниченности с полем анизотропии и постоянным полем.

8.1.2. Равновесная ориентация намагниченности

Найдем равновесную ориентацию вектора намагниченности в среде с одноосной анизотропией (ОЛН), помещенной в постоянное однородное

Рис. 8.3. Вспомогательные системы координат, используемые для нахождения равновесного положения вектора намагниченности

в пространстве поле $\mathbf{H}$. Геометрия задачи показана на рис. 8.3. Система координат $Oxyz$ выбрана таким образом, что ось Oz параллельна вектору поля $\mathbf{H}$, а плоскость Oxz проходит через вектор поля и ось анизотропии. При этом ось Oy ориентирована перпендикулярно вектору поля и оси анизотропии (на рис. 8.3 от плоскости рисунка к читателю). Так как на вектор намагниченности $\mathbf{M}$ действуют силы только со стороны поля и анизотропии, то в равновесном состоянии он располагается в той же плоскости Oxz, что и вектор поля и ось анизотропии, то есть задача сводится к двумерной в этой плоскости.

Для пояснения существа задачи полезно рассмотреть в плоскости Oxz две вспомогательные системы координат: $Ox'z'$, ось Oz' которой параллельна оси анизотропии, и $Ox''z''$, ось Oz'' которой параллельна вектору намагниченности. Угол между осями Oz и Oz' будет равен углу θ_a, а угол между осями Oz и Oz'' — углу θ_m. В такой постановке системы Oxz, $Ox'z'$ и $Ox''z''$ являются частными случаями систем $Oxyz$ (№ 1), $Ox'y'z'$ (№ 2) и $Ox''y''z''$ (№ 3), введенными в предыдущем разделе, при $\varphi_a = 0$. При этом угол θ_a, поле $\mathbf{H}$ и поле анизотропии предполагаются известными, а угол θ_m подлежит определению.

Вектор постоянного поля в системе $Oxyz$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \{0, 0, H_0\}; \tag{8.3}$$

вектор намагниченности $\mathbf{M}$ в системе $Oxyz$ имеет вид

$$\mathbf{M}_S = \{M_0 \sin\theta_m, 0, M_0 \cos\theta_m\}; \tag{8.4}$$

тот же вектор в системе $Ox'y'z'$ имеет вид

$$\mathbf{M}_S = \{M_0 \sin(\theta_a - \theta_m), 0, M_0 \cos(\theta_a - \theta_m)\}. \tag{8.5}$$

Плотность энергии одноосной анизотропии в системе $Ox'y'z'$ имеет вид

$$U_a = -\frac{K}{M_0^2} M_{z'}^2, \tag{8.6}$$

где K — константа анизотропии ($K \geqslant 0$).

Плотность энергии взаимодействия намагниченности с постоянным полем в системе $Oxyz$ имеет вид:

$$U_H = -\mathbf{MH} = -H_0 M_z. \tag{8.7}$$

Полная плотность энергии системы в целом имеет вид

$$U = -\frac{K}{M_0^2} M_{z'}^2 - H_0 M_z. \tag{8.8}$$

Для нахождения равновесного состояния намагниченности надо выразить M_z и $M_{z'}$ через θ_m, подставить в (8.8), продифференцировать полученное выражение для плотности энергии U по θ_m и приравнять первую производную нулю, что в результате даст уравнение для определения θ_m.

Итак, из (8.4) и (8.5) получаем:

$$M_z = M_0 \cos\theta_m; \tag{8.9}$$

$$M_{z'} = M_0 \cos(\theta_a - \theta_m). \tag{8.10}$$

Подставляя (8.9) и (8.10) в (8.8), получаем плотность энергии в виде

$$U = -K\cos^2(\theta_a - \theta_m) - H_0 M_0 \cos\theta_m. \tag{8.11}$$

Дифференцируя (8.11) по θ_m и приравнивая производную нулю, получаем уравнение для определения θ_m:

$$K\sin[2(\theta_a - \theta_m)] - H_0 M_0 \sin\theta_m = 0. \tag{8.12}$$

Согласно определению поля анизотропии (4.55)

$$H_a = \frac{2K}{M_0}. \tag{8.13}$$

С помощью (8.13) можно записать уравнение (8.12) в виде:

$$H_a \sin[2(\theta_a - \theta_m)] - 2H_0 \sin\theta_m = 0. \tag{8.14}$$

Раскрывая скобки в первом слагаемом, выражая в полученном выражении $\cos\theta_m$ через $\sin\theta_m$, а также вводя обозначение

$$h = \frac{H_0}{H_a}, \tag{8.15}$$

это уравнение можно привести к следующему виду:

$$4\sin^4\theta_m + 8h\sin 2\theta_a \sin^3\theta_m + 4(h^2 - 1)\cdot\sin^2\theta_m - \\ - 4h\sin 2\theta_a \sin\theta_m + \sin^2 2\theta_a = 0. \tag{8.16}$$

Можно видеть, что полученное уравнение (8.16) по структуре весьма подобно уравнению (5.34), отражающему равновесную ориентацию вектора намагниченности при изменении ориентации внешнего поля. Некоторое различие обусловлено лишь тем обстоятельством, что там относительно лабораторной системы координат поворачивается поле, а здесь — ось анизотропии. В остальном характер уравнений (8.16) и (5.34) полностью идентичен, так что можно ожидать и сходного поведения равновесного положения намагниченности.

Относительно разрешимости этого уравнения можно сказать то же, что было сказано относительно уравнения (5.34). То есть, в аналитическом виде решение, по-видимому, возможно, например методом Феррари (или другим подобным), разрешающим уравнением для которого явится уравнение Кардано [261, 262]. Схема аналитического решения подобных уравнений приведена в настоящей монографии в разделе 2.4. Однако, как можно видеть из работ [297, 334, 362], где подобные уравнения решены аналитическими методами, общий вид решения получается несколько громоздким. Поэтому для одной частицы, то есть для однократного решения уравнения (8.16) или (8.14) численное решение, по-видимому, является более удобным. При этом, как и при решении уравнения (5.34), можно воспользоваться методом поиска нуля, применив его не к уравнению (8.16), а непосредственно к уравнению (8.14).

Такое решение уравнения (8.14) относительно полярного угла вектора равновесной намагниченности θ_m иллюстрируется рис. 8.4, где показаны зависимости θ_m от постоянного поля, построенные при различных значениях поля анизотропии и ориентациях ее оси.

В силу четности (двунаправленности) одноосной анизотропии относительно z-компоненты намагниченности, реальный физический смысл имеет рассмотрение полярного угла оси анизотропии только в интервале $0^\circ \leqslant \theta_a \leqslant 90^\circ$. При этом значение полярного угла вектора намагниченности в равновесном состоянии θ_m также приходится на этот

Рис. 8.4. Зависимости полярного угла вектора равновесной намагниченности θ_m от постоянного поля при различных значениях полей H_a и ориентациях оси θ_a анизотропии. Кривые *1*, *1′*, *1″* соответствуют полю $H_a = 50$ Э, *2*, *2′*, *2″* — полю $H_a = 100$ Э, *3*, *3′*, *3″* — полю $H_a = 150$ Э, *4*, *4′*, *4″* — полю $H_a = 200$ Э. Кривые без штрихов соответствуют $\theta_a = 90^\circ$, кривые с одним штрихом — $\theta_a = 60^\circ$, с двумя штрихами — $\theta_a = 30^\circ$

интервал. Ориентация оси анизотропии в интервале $90° \leqslant \theta_a \leqslant 180°$ эквивалентна ориентации в интервале $0° \leqslant \theta_a \leqslant 90°$ и приводит к тем же равновесным значениям полярного угла вектора намагниченности.

Из рисунка видно, что характер кривых полностью подобен таковому, имеющему место при затянутом ориентационном переходе (раздел 5.1.2). Сходные кривые изображены на рис. 5.5 и рис. 5.6. Различие состоит лишь в том, что там менялось направление поля, тогда как ориентация оси анизотропии оставалась неизменной, здесь же положение обратное — меняется ориентация оси анизотропии, а направление поля остается неизменным. То есть различие сводится только к выбору системы координат, а физика процесса полностью сохраняется.

Итак здесь, по мере увеличения постоянного поля, вектор намагниченности поворачивается в направлении поля, причем этот поворот происходит тем быстрее, чем меньше поле анизотропии. Если ось анизотропии ориентирована перпендикулярно постоянному полю, то поворот вектора намагниченности заканчивается при постоянном поле, равном полю анизотропии, после чего вектор намагниченности ориентируется точно вдоль направления поля (кривые *1–4*).

Если ось анизотропии отклонена от нормали к постоянному полю, то вектор намагниченности стремится повернуться в направлении поля, тем скорее, чем ближе направление оси анизотропии к направлению поля. При этом вектор намагниченности точно вдоль поля никогда не выстраивается, причем даже при превышении постоянного поля над полем анизотропии в несколько раз (например для кривых *1′* и *1″*) отклонение вектора анизотропии от направления поля может быть довольно значительным и составлять до 10 градусов.

8.2. Последовательный порядок решения задачи

Для расчета динамической восприимчивости композиционной среды будем пользоваться системами координат, показанными на рис. 8.2. При переходе от одной системы координат к другой используем метод матриц перехода [261], подробно описанный в главе 3.

Для получения тензора восприимчивости в системе $Oxyz$, связанной с постоянным полем, при произвольной ориентации ОЛН относительно этого поля, то есть при произвольных значениях углов θ_a и φ_a, сначала надо найти тензор восприимчивости в системе, связанной с равновесным положением вектора намагниченности $Ox''''y''''z''''$, после чего преобразовать полученный тензор в систему $Oxyz$.

Так как на вектор намагниченности $\mathbf{M}$ в стационарном состоянии действуют только две силы — со стороны постоянного поля и со стороны одноосной анизотропии, то в равновесном состоянии он лежит в плоскости, проходящей через направляющие векторы поля и оси анизотропии, то есть в плоскости Ozz'''. Направлением вектора намагниченности $\mathbf{M}$ однозначно задается ориентация оси Oz'''', которая

с осью Oz составляет угол θ_m. При этом также выполняется равенство $\varphi_m = \varphi_a$.

Ориентация осей Ox'''' и Oy'''' относительно поворота вокруг оси Oz'''' не определена. Поэтому, исходя из удобства расчета, будем считать, что ось Ox'''' лежит в той же плоскости Ozz'''. При этом угол между осью Ox'''' и проекцией вектора намагниченности $\mathbf{M}$ на плоскость Oxy получается равным θ_m, а ось Oy'''' лежит в плоскости Oxy и составляет с осью Oy угол φ_a.

Таким образом, если считать углы θ_a и φ_a заданными, а углы θ_m и φ_m известными, то первым шагом расчета становится нахождение тензора восприимчивости в системе $Ox''''y''''z''''$. Для этого надо все силы, действующие на вектор намагниченности $\mathbf{M}$, перевести в эту систему. В стационарном состоянии таких сил две: сила постоянного поля и сила поля анизотропии. Но постоянное поле задано в системе $Oxyz$, а поле анизотропии — в системе $Ox'''y'''z'''$. Поэтому нужны две матрицы перехода: от системы $Oxyz$ к системе $Ox''''y''''z''''$ и от системы $Ox'''y'''z'''$ к системе $Ox''''y''''z''''$.

Так как тензор восприимчивости определяется динамической реакцией системы, находящейся в стационарном состоянии, на переменное поле, заданное в системе $Oxyz$, то вектор переменного поля $\mathbf{h}$ также надо перевести из системы $Oxyz$ в систему $Ox''''y''''z''''$, для чего можно использовать первую из упомянутых матриц перехода.

Далее в системе $Ox''''y''''z''''$ надо записать уравнение движения для намагниченности, решение которого и даст тензор восприимчивости в системе $Ox''''y''''z''''$. После того как тензор восприимчивости в системе $Ox''''y''''z''''$ будет найден, следующим шагом расчета будет перевод его в систему $Oxyz$. Для этого нужны матрицы прямого и обратного переходов от системы $Ox''''y''''z''''$ к системе $Oxyz$.

8.2.1. Матрицы переходов

Таким образом нужны три матрицы переходов:

1) $\overleftrightarrow{A}_{04}$ — от системы $Oxyz$ к системе $Ox''''y''''z''''$;

2) $\overleftrightarrow{A}_{40}$ — от системы $Ox''''y''''z''''$ к системе $Oxyz$;

3) $\overleftrightarrow{A}_{34}$ — от системы $Ox'''y'''z'''$ к системе $Ox''''y''''z''''$.

Эти матрицы выражаются через косинусы углов между осями координат соответствующих систем и имеют вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{04} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos(x, x'''') & \cos(x, y'''') & \cos(x, z'''') \\ \hline \cos(y, x'''') & \cos(y, y'''') & \cos(y, z'''') \\ \hline \cos(z, x'''') & \cos(z, y'''') & \cos(z, z'''') \end{array}\right); \tag{8.17}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{40} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos(x'''', x) & \cos(x'''', y) & \cos(x'''', z) \\ \hline \cos(y'''', x) & \cos(y'''', y) & \cos(y'''', z) \\ \hline \cos(z'''', x) & \cos(z'''', y) & \cos(z'''', z) \end{array}\right); \tag{8.18}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{34} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos(x''', x'''') & \cos(x''', y'''') & \cos(x''', z'''') \\ \hline \cos(y''', x'''') & \cos(y''', y'''') & \cos(y''', z'''') \\ \hline \cos(z''', x'''') & \cos(z''', y'''') & \cos(z''', z'''') \end{array}\right), \tag{8.19}$$

где индексы в обозначениях матриц соответствуют количеству штрихов в обозначениях координат.

Для получения косинуса угла между какими-либо двумя осями надо задать единичный вектор по начальной оси и найти его проекцию на конечную ось. Если начальная и конечная оси расположены в разных координатных плоскостях, то предварительным этапом является нахождение проекции исходного единичного вектора на линию пересечения этих плоскостей, после чего полученная проекция еще раз проектируется на конечную ось. Найденная в результате такой процедуры проекция начального единичного вектора на конечную ось равна косинусу угла между осями.

Полученные таким путем матрицы переходов имеют вид:

$$\overleftrightarrow{A}_{04} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta_m \cos\varphi_a & -\sin\varphi_a & \sin\theta_m \cos\varphi_a \\ \hline \cos\theta_m \sin\varphi_a & \cos\varphi_a & \sin\theta_m \sin\varphi_a \\ \hline -\sin\theta_m & 0 & \cos\theta_m \end{array}\right); \tag{8.20}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{40} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta_m \cos\varphi_a & \cos\theta_m \sin\varphi_a & -\sin\theta_m \\ \hline -\sin\varphi_a & \cos\varphi_a & 0 \\ \hline \sin\theta_m \cos\varphi_a & \sin\theta_m \sin\varphi_a & \cos\theta_m \end{array}\right); \tag{8.21}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{34} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos(\theta_a - \theta_m) & 0 & -\sin(\theta_a - \theta_m) \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \sin(\theta_a - \theta_m) & 0 & \cos(\theta_a - \theta_m) \end{array}\right). \tag{8.22}$$

При этом векторы намагниченности преобразуются по формулам:

$$\mathbf{m} = \overleftrightarrow{A}_{04}\, \overleftrightarrow{m}''''; \tag{8.23}$$

$$\mathbf{m}'''' = \overleftrightarrow{A}_{40}\, \overleftrightarrow{m}; \tag{8.24}$$

$$\mathbf{m}''' = \overleftrightarrow{A}_{34}\, \overleftrightarrow{m}''''. \tag{8.25}$$

Тензор восприимчивости преобразуется по формуле, подобной (6.197):

$$\overleftrightarrow{\chi} = \overleftrightarrow{A}_{04}\, \overleftrightarrow{\chi}''''\, \overleftrightarrow{A}_{40}. \tag{8.26}$$

8.2.2. Представление полной задачи в виде последовательности отдельных шагов

Таким образом, полный ход решения задачи можно записать в виде следующей последовательности шагов:

1) перевести постоянное поле, заданное в системе $Oxyz$, в систему $Ox''''y''''z''''$;

2) записать переменное поле в системе $Ox''''y''''z''''$;

3) перевести плотность энергии анизотропии, заданную в системе $Ox'''y'''z'''$, в систему $Ox''''y''''z''''$;

4) записать полную плотность энергии в системе $Ox''''y''''z''''$;

5) найти эффективные поля, действующие на вектор намагниченности в системе $Ox''''y''''z''''$;

6) записать систему из трех уравнений движения для компонент вектора намагниченности $M_{x''''}$, $M_{y''''}$, $M_{z''''}$ под действием эффективных полей в системе $Ox''''y''''z''''$;

7) выполнить линеаризацию полученной системы уравнений в предположении: $M_{x''''} \sim M_{y''''} \ll M_{z''''} \approx M_0$, в результате чего будет получена система из двух линейных уравнений для компонент намагниченности $M_{x''''}$ и $M_{y''''}$;

8) решить линеаризованную систему уравнений, в результате чего будут найдены компоненты тензора восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}''''$ в системе $Ox''''y''''z''''$;

9) перевести тензор восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}''''$, полученный в системе $Ox''''y''''z''''$, в систему $Oxyz$.

8.2.3. Реализация последовательных шагов решения задачи

ШАГ № 1.

Перевести постоянное поле, заданное в системе $Oxyz$, в систему $Ox''''y''''z''''$.

* * *

Вектор постоянного поля (сумма векторов внешнего поля и поля размагничивания) в системе $Oxyz$ имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ \hline H_0 \end{pmatrix}. \tag{8.27}$$

Формула перехода:

$$\mathbf{H}'''' = \overleftrightarrow{A}_{40}\,\mathbf{H}. \tag{8.28}$$

Матрица перехода (8.21):

$$\overleftrightarrow{A}_{40} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta_m \cos\varphi_a & \cos\theta_m \sin\varphi_a & -\sin\theta_m \\ \hline -\sin\varphi_a & \cos\varphi_a & 0 \\ \hline \sin\theta_m \cos\varphi_a & \sin\theta_m \sin\varphi_a & \cos\theta_m \end{array}\right); \tag{8.29}$$

В результате перехода получаем вектор постоянного поля в виде

$$\mathbf{H}'''' = \begin{pmatrix} -H_0 \sin\theta_m \\ \hline 0 \\ \hline H_0 \cos\theta_m \end{pmatrix}. \tag{8.30}$$

~~~
~~~

ШАГ № 2.

Записать переменное поле в системе $Ox''''y''''z''''$.

* * *

Переменное поле $\mathbf{h}$ входит в выражение для плотности энергии в качестве сомножителя в скалярном произведении на намагниченность вида $\mathbf{Mh}$. Поскольку величина скалярного произведения не зависит от выбора системы координат, а в конечное выражение для восприимчивости переменное поле не входит, то поле $\mathbf{h}$ можно сразу задать в системе $Ox''''y''''z''''$.

В этой системе вектор переменного поля имеет вид

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_{x''''} \\ \hline h_{y''''} \\ \hline h_{z''''} \end{pmatrix}. \tag{8.31}$$

~~~
~~~

намагниченности с постоянным полем U_H и плотность энергии взаимодействия намагниченности с переменным полем U_h:

$$U = U_a + U_H + U_h. \tag{8.35}$$

Входящие в выражение (8.35) слагаемые в системе $Ox''''y''''z''''$ имеют вид:

– плотность энергии одноосной анизотропии

$$U_a = -\frac{K}{M_0^2} M_{z''''}^2 = -\frac{K}{M_0^2}[M_{x''''}\sin(\theta_a - \theta_m) + M_{z''''}\cos(\theta_a - \theta_m)]^2 = \\ = -\frac{K}{M_0^2}[M_{x''''}^2 \sin^2(\theta_a - \theta_m) + M_{z''''}^2 \cos^2(\theta_a - \theta_m) + \\ + 2M_{x''''}M_{z''''}\sin(\theta_a - \theta_m)\cos(\theta_a - \theta_m)]; \tag{8.36}$$

– плотность энергии взаимодействия намагниченности с постоянным полем

$$U_H = -\mathbf{MH} = -\mathbf{M}''''\mathbf{H}'''' = -M_{x''''}H_0 \sin\theta_m + M_{z''''}H_0\cos\theta_m; \tag{8.37}$$

– плотность энергии взаимодействия намагниченности с переменным полем

$$U_h = -\mathbf{Mh} = -\mathbf{M}''''\mathbf{h}'''' = \\ = -M_{x''''}h_{x''''} - M_{y''''}h_{y''''} - M_{z''''}h_{z''''}. \tag{8.38}$$

Подставляя (8.36)–(8.38) в (8.35), получаем полную плотность энергии в виде

$$U = -\frac{K}{M_0^2}[M_{x''''}^2 \sin^2(\theta_a - \theta_m) + M_{z''''}^2 \cos^2(\theta_a - \theta_m) + \\ + 2M_{x''''}M_{z''''}\sin(\theta_a - \theta_m)\cos(\theta_a - \theta_m)] + \\ + M_{x''''}H_0\sin\theta_m - M_{z''''}H_0\cos\theta_m - \\ - M_{x''''}h_{x''''} - M_{y''''}h_{y''''} - M_{z''''}h_{z''''}. \tag{8.39}$$

Для укорочения дальнейшей записи введем обозначения:

$$A_1 = -\frac{K}{M_0^2}\sin^2(\theta_a - \theta_m); \tag{8.40}$$

$$A_2 = -\frac{K}{M_0^2}\cos^2(\theta_a - \theta_m); \tag{8.41}$$

$$A_3 = -\frac{2K}{M_0^2}\sin(\theta_a - \theta_m)\cos(\theta_a - \theta_m); \tag{8.42}$$

$$A_4 = H_0 \sin\theta_m \tag{8.43}$$

$$A_5 = -H_0\cos\theta_m. \tag{8.44}$$

В этих обозначениях выражение (8.39) для полной плотности энергии принимает вид

$$U = A_1 M_{x''''}^2 + A_2 M_{z''''}^2 + A_3 M_{x''''} M_{z''''} + \\ + (A_4 - h_{x''''}) M_{x''''} - h_{y''''} M_{y''''} + (A_5 - h_{z''''}) M_{z''''}. \quad (8.45)$$

~~~
~~~

Подставляя эффективные поля (8.48)–(8.50) в (8.51)–(8.53), получаем уравнения движения в виде:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \gamma[A_3 M_x M_y + 2A_2 M_y M_z + (A_5 - h_z)M_y + h_y M_z] + \\ + \frac{\alpha}{M_0}\left(M_y \frac{\partial M_z}{\partial t} - M_z \frac{\partial M_y}{\partial t}\right); \quad (8.54)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma[A_3 M_x^2 - A_3 M_z^2 + 2(A_2 - A_1)M_x M_z + \\ + (A_5 - h_z)M_y + (A_4 - h_x)M_z] + \\ + \frac{\alpha}{M_0}\left(M_z \frac{\partial M_x}{\partial t} - M_x \frac{\partial M_z}{\partial t}\right); \quad (8.55)$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma[2A_1 M_x M_y + A_3 M_y M_z + h_y M_x + (A_4 - h_x)M_y] + \\ + \frac{\alpha}{M_0}\left(M_x \frac{\partial M_y}{\partial t} - M_y \frac{\partial M_x}{\partial t}\right). \quad (8.56)$$

~~~
~~~

учитывая, что в равновесном состоянии ориентация вектора намагниченности подчиняется уравнению (8.14)

$$H_a \sin[2(\theta_a - \theta_m)] - 2H_0 \cdot \sin\theta_m = 0, \tag{8.61}$$

получаем

$$A_3 M_0 + A_4 = -\frac{2K}{M_0}\sin(\theta_a - \theta_m)\cos(\theta_a - \theta_m) + H_0 \sin\theta_m = \\ = \frac{1}{2}\left\{H_a \sin[2(\theta_a - \theta_m)] - 2H_0 \sin\theta_m\right\} = 0. \tag{8.62}$$

С учетом (8.62) линеаризованные уравнения движения (8.58)–(8.60) принимают вид

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} - \gamma(2A_2 M_0 + A_5)m_y + \alpha\frac{\partial M_y}{\partial t} = \gamma M_0 h_y; \tag{8.63}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} + \gamma[2(A_2 - A_1)M_0 + A_5]m_x - \alpha\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma M_0 h_x. \tag{8.64}$$

Введем обозначения:

$$B_1 = -(2A_2 M_0 + A_5); \tag{8.65}$$

$$B_2 = -[2(A_2 - A_1)M_0 + A_5]. \tag{8.66}$$

Подставляя (8.65) и (8.66) в (8.63) и (8.64), получаем уравнения движения в виде

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} + \gamma B_1 m_y + \alpha\frac{\partial M_y}{\partial t} = \gamma M_0 h_y; \tag{8.67}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} - \gamma B_2 m_x - \alpha\frac{\partial M_x}{\partial t} = -\gamma M_0 h_x. \tag{8.68}$$

Положим далее зависимость от времени в виде $e^{i\omega t}$, то есть:

$$m_x = m_{x0}\, e^{i\omega t}; \tag{8.69}$$

$$m_y = m_{y0}\, e^{i\omega t}; \tag{8.70}$$

$$h_x = h_{x0}\, e^{i\omega t}; \tag{8.71}$$

$$h_y = h_{y0}\, e^{i\omega t}. \tag{8.72}$$

Подставляя (8.69)–(8.72) в (8.67)–(8.68) и разделяя на $e^{i\omega t}$, получаем:

$$i\omega m_x + (\gamma B_1 + i\omega\alpha)m_y = \gamma M_0 h_y; \tag{8.73}$$

$$(\gamma B_2 + i\omega\alpha)m_x - i\omega m_y = \gamma M_0 h_x. \tag{8.74}$$

Разделим все на $4\pi\gamma M_0$ и введем обозначения:

$$\Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0}; \tag{8.75}$$

$$\Omega_1 = \frac{B_1}{4\pi M_0}; \tag{8.76}$$

$$\Omega_2 = \frac{B_2}{4\pi M_0}. \tag{8.77}$$

При этом из (8.73)–(8.74) получаем систему уравнений движения в окончательном виде:

$$i\Omega m_x + (\Omega_1 + i\Omega\alpha)m_y = \frac{1}{4\pi}h_y; \tag{8.78}$$

$$(\Omega_2 + i\Omega\alpha)m_x - i\Omega m_y = \frac{1}{4\pi}h_x. \tag{8.79}$$

~~~
~~~

Таким образом, тензор восприимчивости в системе $Ox''''y''''z''''$ принимает вид

$$\overleftrightarrow{\chi}'''' = \left(\begin{array}{c|c|c} G_1 & H & 0 \\ \hline -H & G_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{8.90}$$

где G_1, G_2, H определяются выражениями (8.83)–(8.85).

ШАГ № 9.

Перевести тензор восприимчивости $\overleftrightarrow{\chi}''''$, *полученный в системе* $Ox''''y''''z''''$, *в систему* $Oxyz$.

* * *

Для перевода тензора восприимчивости из системы $Ox''''y''''z''''$ в систему $Oxyz$ воспользуемся формулой (8.26)

$$\overleftrightarrow{\chi} = \overleftrightarrow{A}_{04}\, \overleftrightarrow{\chi}''''\, \overleftrightarrow{A}_{40}, \tag{8.91}$$

где матрицы переходов определяются формулами (8.20) и (8.21):

$$\overleftrightarrow{A}_{04} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta_m \cos\varphi_a & -\sin\varphi_a & \sin\theta_m \cos\varphi_a \\ \hline \cos\theta_m \sin\varphi_a & \cos\varphi_a & \sin\theta_m \sin\varphi_a \\ \hline -\sin\theta_m & 0 & \cos\theta_m \end{array}\right); \tag{8.92}$$

$$\overleftrightarrow{A}_{40} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta_m \cos\varphi_a & \cos\theta_m \sin\varphi_a & -\sin\theta_m \\ \hline -\sin\varphi_a & \cos\varphi_a & 0 \\ \hline \sin\theta_m \cos\varphi_a & \sin\theta_m \sin\varphi_a & \cos\theta_m \end{array}\right); \tag{8.93}$$

Выражение (8.91) вычисляется в два этапа: сначала находится произведение матриц $\overleftrightarrow{\chi}'''' \cdot \overleftrightarrow{A}_{40}$, после чего полученная матрица умножается слева на $\overleftrightarrow{A}_{04}$.

Тензор восприимчивости. В результате выполнения приведенных шагов получаем тензор восприимчивости в системе $Oxyz$ в виде

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \hline \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \hline \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{array}\right), \tag{8.94}$$

где:

$$\chi_{xx} = G_1 \cos^2\varphi_a \cos^2\theta_m + G_2 \sin^2\varphi_a; \tag{8.95}$$

$$\chi_{xy} = G_1 \sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m - G_2 \sin\varphi_a \cos\varphi_a + H\cos\theta_m; \tag{8.96}$$

$$\chi_{xz} = -G_1 \cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - H \sin\varphi_a \sin\theta_m; \tag{8.97}$$

$$\chi_{yx} = G_1 \sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m - G_2 \sin\varphi_a \cos\varphi_a - H\cos\theta_m; \tag{8.98}$$

$$\chi_{yy} = G_1 \sin^2\varphi_a \cos^2\theta_m + G_2 \cos^2\varphi_a; \tag{8.99}$$

$$\chi_{yz} = -G_1 \sin\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m + H \cos\varphi_a \sin\theta_m; \tag{8.100}$$

$$\chi_{zx} = -G_1 \cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m + H \sin\varphi_a \sin\theta_m; \tag{8.101}$$

$$\chi_{zy} = -G_1 \sin\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - H \cos\varphi_a \sin\theta_m; \tag{8.102}$$

$$\chi_{zz} = G_1 \sin^2\theta_m. \tag{8.103}$$

На этом основное вычисление компонент тензора восприимчивости по шагам заканчивается.

8.2.4. Компоненты тензора восприимчивости в комплексном виде

Запишем полученные компоненты тензора в комплексном виде, то есть как сумму действительной и мнимой частей. Для этого выделим в детерминанте (8.80) системы (8.78)–(8.79) действительную и мнимую части, после чего запишем величины G_1, G_2, H, определяемые выражениями (8.83)–(8.85), в виде суммы таких частей.

В результате для детерминанта (8.80) получаем

$$D = A + iB, \tag{8.104}$$

где:

$$A = (1+\alpha^2)\Omega^2 - \Omega_1\Omega_2; \tag{8.105}$$

$$B = -\alpha\Omega(\Omega_1 + \Omega_2). \tag{8.106}$$

При этом получаем:

$$G_1 = G_1' + iG_1'', \tag{8.107}$$

$$G_2 = G_2' + iG_2'', \tag{8.108}$$

$$H = H' + iH'', \tag{8.109}$$

где:

$$G_1' = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\Omega_1 A + \alpha\Omega B}{A^2 + B^2}; \tag{8.110}$$

$$G_1'' = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\Omega_1 B - \alpha\Omega A}{A^2 + B^2}; \tag{8.111}$$

$$G_2' = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\Omega_2 A + \alpha\Omega B}{A^2 + B^2}; \tag{8.112}$$

$$G_2'' = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\Omega_2 B - \alpha\Omega A}{A^2 + B^2}; \tag{8.113}$$

$$H' = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\Omega B}{A^2 + B^2}; \tag{8.114}$$

$$H'' = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\Omega A}{A^2 + B^2}. \tag{8.115}$$

В результате получаем компоненты тензора восприимчивости в комплексном виде:

$$\chi_{xx} = (G_1' \cos^2\varphi_a \cos^2\theta_m + G_2' \sin^2\varphi_a) + \\ + i(G_1'' \cos^2\varphi_a \cos^2\theta_m + G_2'' \sin^2\varphi_a); \tag{8.116}$$

$$\chi_{xy} = (G_1' \sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m - G_2' \sin\varphi_a \cos\varphi_a + H' \cos\theta_m) + \\ + i(G_1'' \sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m - G_2'' \sin\varphi_a \cos\varphi_a + H'' \cos\theta_m); \quad (8.117)$$

$$\chi_{xz} = (-G_1' \cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - H' \sin\varphi_a \sin\theta_m) + \\ + i(-G_1'' \cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - H'' \sin\varphi_a \sin\theta_m); \quad (8.118)$$

$$\chi_{yx} = (G_1' \sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m - G_2' \sin\varphi_a \cos\varphi_a - H' \cos\theta_m) + \\ + i(G_1'' \sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m - G_2'' \sin\varphi_a \cos\varphi_a - H'' \cos\theta_m); \quad (8.119)$$

$$\chi_{yy} = (G_1' \sin^2\varphi_a \cos^2\theta_m + G_2' \cos^2\varphi_a) + \\ + i(G_1'' \sin^2\varphi_a \cos^2\theta_m + G_2'' \cos^2\varphi_a); \quad (8.120)$$

$$\chi_{yz} = (-G_1' \sin\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m + H' \cos\varphi_a \sin\theta_m) + \\ + i(-G_1'' \sin\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m + H'' \cos\varphi_a \sin\theta_m); \quad (8.121)$$

$$\chi_{zx} = (-G_1' \cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m + H' \sin\varphi_a \sin\theta_m) + \\ + i(-G_1'' \cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m + H'' \sin\varphi_a \sin\theta_m); \quad (8.122)$$

$$\chi_{zy} = (-G_1' \sin\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - H' \cos\varphi_a \sin\theta_m) + \\ + i(-G_1'' \sin\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - H'' \cos\varphi_a \sin\theta_m); \quad (8.123)$$

$$\chi_{zz} = (G_1' \sin^2\theta_m) + i(G_1'' \sin^2\theta_m). \quad (8.124)$$

8.3. Представление компонент тензора восприимчивости через параметры материала и постоянного поля

Представим компоненты тензора восприимчивости, определяемые формулами (8.116)–(8.124), через параметры материала и постоянного поля. Для этого подставим в (8.116)–(8.124) выражения для G_1, G_2 и H, даваемые формулами (8.107)–(8.109) с учетом (8.110)–(8.115), в которых в свою очередь величину D выразим в соответствии с формулой (8.104) с учетом (8.105), (8.106). При этом получим компоненты тензора восприимчивости в виде:

$$\chi_{xx} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\cos^2\varphi_a \cos^2\theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)\sin^2\varphi_a}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \quad (8.125)$$

$$\chi_{xy} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)\sin\varphi_a \cos\varphi_a + i\Omega\cos\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \quad (8.126)$$

$$\chi_{xz} = \frac{-(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\cos\varphi_a \sin\theta_m \cos\theta_m - i\Omega\sin\varphi_a \sin\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \quad (8.127)$$

$$\chi_{yx} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin\varphi_a \cos\varphi_a \cos^2\theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)\sin\varphi_a \cos\varphi_a - i\Omega\cos\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \quad (8.128)$$

$$\chi_{yy} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin^2\varphi_a\cos^2\theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)\cos^2\varphi_a}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \tag{8.129}$$

$$\chi_{yz} = \frac{-(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin\varphi_a\sin\theta_m\cos\theta_m + i\Omega\cos\varphi_a\sin\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \tag{8.130}$$

$$\chi_{zx} = \frac{-(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\cos\varphi_a\sin\theta_m\cos\theta_m + i\Omega\sin\varphi_a\sin\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \tag{8.131}$$

$$\chi_{zy} = \frac{-(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin\varphi_a\sin\theta_m\cos\theta_m - i\Omega\cos\varphi_a\sin\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \tag{8.132}$$

$$\chi_{zz} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin^2\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}. \tag{8.133}$$

Входящие в эти выражения величины Ω_1, Ω_2 и Ω выразим в соответствии с формулами (8.75)–(8.77), где B_1 и B_2 задаются формулами (8.65) и (8.66), причем входящие в (8.65), (8.66) выражения A_1, A_2 и A_5 задаются формулами (8.40), (8.41) и (8.44). Введем также обозначения для поля анизотропии (4.55), (8.13):

$$H_a = \frac{2K}{M_0}, \tag{8.134}$$

и поля, соответствующего резонансу однородной прецессии на частоте ω [6–8]:

$$H_p = \frac{\omega}{\gamma}. \tag{8.135}$$

В результате получаем для Ω_1, Ω_2 и Ω следующие формулы:

$$\Omega_1 = \frac{1}{4\pi M_0}[H_a\sin^2(\theta_a - \theta_m) + H_0\cos\theta_m]; \tag{8.136}$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{4\pi M_0}\{H_a\cos[2(\theta_a - \theta_m)] + H_0\cos\theta_m\}; \tag{8.137}$$

$$\Omega = \frac{H_p}{4\pi M_0}, \tag{8.138}$$

которые, будучи подставленными в формулы (8.125)–(8.133), в совокупности с условием равновесия (8.12) или (8.14), полностью определяют компоненты тензора восприимчивости при заданной ориентации оси анизотропии относительно направления постоянного поля.

Следует отметить, что в частном случае ориентации осей анизотропии всех частиц вдоль полярной оси, а также вектора постоянного поля вдоль той же оси, то есть при $\theta_a = 0$, $\varphi_a = 0$, а также $\theta_m = 0$, формулы (8.125)–(8.133) переходят в компоненты тензора восприимчивости в изотропной среде вида (2.38) или (2.49), с учетом (2.58)–(2.61), а также (2.56)–(2.57).

Замечание. Из общей геометрии задачи (рис. 8.2, *а*) можно видеть, что поворот ОЛН вокруг оси Oz (вокруг направления постоянного поля) при сохранении постоянным угла θ_a, то есть при изменении только угла φ_a, условий для возбуждения ферромагнитного резонанса

не меняет. При этом взаимное расположение равновесного вектора намагниченности, оси легкого намагничивания, а также вектора переменного поля никак не меняется. Поэтому следует ожидать, что и тензор восприимчивости при таком повороте меняться не должен, то есть какая-либо его зависимость от угла φ_a должна отсутствовать. Однако из формул (8.125)–(8.132) видно, что такая зависимость имеет место везде, кроме формулы (8.133). Так получается из-за того, что ориентация ОЛН записывается в сферической системе координат, тогда как компоненты вектора намагниченности и переменного поля, входящие в уравнения движения (8.51)–(8.53), и следующие из них выражения (8.81)–(8.82), непосредственно определяющие компоненты восприимчивости (8.83)–(8.85), записаны в декартовой системе координат. Поэтому и компоненты тензора восприимчивости (8.125)–(8.132) получаются записанными в той же декартовой системе, тогда как ориентация ОЛН относительно той же системы остается записанной через сферические координаты. То есть при задании в декартовой системе какого-то фиксированного значения угла φ_a получаются декартовы компоненты тензора восприимчивости, записанные для ОЛН, повернутой относительно той же декартовой системы именно на этот угол φ_a. Отсюда и получается зависимость компонент тензора (8.125)–(8.132) от φ_a. Для компоненты χ_{zz} (8.133) такой зависимости нет по той причине, что направление полярной оси сферической системы как раз совпадает с осью Oz декартовой системы, так что при повороте ОЛН вокруг этой оси равновесное направление намагниченности относительно той и другой систем координат никак не меняется.

8.4. Процедура усреднения

В предыдущем разделе найден тензор восприимчивости для одной частицы, направление оси анизотропии которой относительно постоянного поля определяется фиксированными значениями полярного и азимутального углов θ_a и φ_a. Реальная среда содержит большое количество частиц, оси анизотропии которых ориентированы в произвольных направлениях. Поэтому для получения тензора восприимчивости среды в целом надо компоненты тензора, полученные для одной частицы, усреднить по всем возможным ориентациям оси анизотропии, то есть по всем возможным значениям углов θ_a и φ_a.

8.4.1. Общая схема процедуры усреднения

Общая схема процедуры усреднения иллюстрируется рис. 8.5, основу которого составляет связанная с внешним полем система координат $Oxyz$ ($Oz \parallel \mathbf{H}_0$). На рисунке построена вспомогательная сфера произвольного заданного радиуса R_0, на поверхности которой укрупненными точками показаны пересечения с возможными направлениями осей анизотропии отдельных частиц.

Рис. 8.5. Иллюстрация общей схемы процедуры усреднения. ОЛН — ось легкого намагничивания, проходящая через поверхность сферы в точке A

На рисунке в качестве примера показан отсчет азимутального и полярного углов для оси, проходящей через одну из укрупненных точек, обозначенную буквой A. Точки пересечения осей анизотропии с поверхностью сферы распределены таким образом, чтобы расстояния по угловым координатам между каждыми двумя соседними точками равнялись одной и той же заданной величине a. Таким образом, задача рассматривается на дискретном множестве ориентаций осей анизотропии, распределенных равномерно по поверхности сферы с центром в точке O.

8.4.2. Усреднение по полярному углу

Первой частью задачи является нахождение совокупности таких ориентаций. Рассмотрим сначала процедуру усреднения по углу θ, которая иллюстрируется рис. 8.6. В силу цилиндрической симметрии задачи достаточно рассмотреть изменение угла θ в интервале от 0 до π, а угол φ положить равным нулю. На рисунке в плоскости Oxz радиусом R_0 построена вспомогательная полуокружность, представляющая собой сечение этой плоскостью поверхности сферы на рис. 8.5. Радиально расположенными сплошными прямыми линиями показаны возможные направления осей анизотропии, отстоящие друг от друга на равные углы θ_0. Укрупненными точками показаны пересечения этих направлений с окружностью радиуса R_0. Видно, что по дуге

окружности эти точки разделены равными расстояниями

$$a = R_0\theta_0, \tag{8.139}$$

то есть условие равномерного распределения осей анизотропии по углу θ выполнено.

Пронумеруем направления осей анизотропии целыми числами n. Очевидно, в интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ величина n принимает значения от 0 до π/θ_0. На рисунке в качестве примера показано одно из возможных направлений оси анизотропии, проходящее через точку A и составляющее с осью Oz угол

$$\theta_n = n\theta_0. \tag{8.140}$$

Видно, что проекция точки A на ось Ox отстоит от точки O на расстояние

$$R_n = R_0 \sin(n\theta_0). \tag{8.141}$$

Рис. 8.6. Иллюстрация процедуры усреднения по полярному углу

8.4.3. Усреднение по азимутальному углу

Теперь перейдем к распределению точек пересечения по углу φ, схема которого иллюстрируется рис. 8.7. Здесь показана координатная плоскость Oxy, на которую спроектированы сечения поверхности сферы плоскостями, параллельными Oxy, проходящими через точки пересечения, показанные на рис. 8.6 для различных значений n.

Внешняя окружность на рис. 8.7, имеющая радиус R_0, соответствует экватору сферы, лежащему в плоскости Oxy. Положим здесь расстояния между точками пересечения по дуге окружности равными a. Остальные окружности, соответствуют различным значениям n и имеют радиусы R_n. На каждой из таких окружностей положим расстояния между точками пересечения по дуге окружности также равными a. При этом на каждой окружности, соответствующей номеру n, будет умещаться m точек, где максимальное значение

$$m_{n\max} = \frac{2\pi R_n}{a} = \frac{2\pi R_0 \sin(n\theta_0)}{a}. \tag{8.142}$$

При этом шаг по азимутальному углу для окружности с номером n равен

$$\varphi_{n0} = \frac{2\pi}{m_{n\max}} = \frac{a}{R_0 \sin(n\theta_0)}. \tag{8.143}$$

Учитывая, что $a = R_0\theta_0$, получаем азимутальные углы точек пересечения:

$$\varphi_{mn} = \frac{m\theta_0}{\sin(n\theta_0)}. \tag{8.144}$$

Рис. 8.7. Иллюстрация процедуры усреднения по азимутальному углу

Таким образом, угловые координаты возможных направлений осей анизотропии определяются в полярной плоскости n значениями полярного угла

$$\theta_n = n\theta_0, \tag{8.145}$$

меняющимся с шагом θ_0, причем:

$$0 \leqslant n \leqslant \frac{\pi}{\theta_0}. \tag{8.146}$$

В азимутальной плоскости с номером n координаты определяются m значениями азимутального угла

$$\varphi_{mn} = \frac{m\theta_0}{\sin(n\theta_0)}, \tag{8.147}$$

меняющимися с шагом

$$\varphi_{n0} = \frac{\theta_0}{\sin(n\theta_0)}, \tag{8.148}$$

причем

$$0 \leqslant m_n \leqslant \frac{2\pi \sin(n\theta_0)}{\theta_0}. \tag{8.149}$$

Таким образом, задание шага полярного угла θ_0 позволяет однозначно определить все возможные значения как полярного, так и азимутального углов осей анизотропии. При этом максимальные значения n и m_n соответствуют правым частям неравенств (8.146) и (8.149):

$$n_{\max} = \frac{\pi}{\theta_0}; \tag{8.150}$$

$$m_{n\max} = \frac{2\pi \sin(n\theta_0)}{\theta_0}. \tag{8.151}$$

8.4.4. Суммирование по всем возможным направлениям

Дальнейший ход определения полной восприимчивости системы из частиц с произвольно ориентированными осями анизотропии состоит в вычислении восприимчивости для всех возможных ориентаций этих осей (то есть при всех допустимых значениях n и m) с последующим суммированием и делением на общее количество возможных ориентаций.

Суммирование по всем возможным ориентациям анизотропии для компоненты тензора восприимчивости χ_{ik} (где $i, k = x, y, z$), дает:

$$S_{ik} = \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^{\substack{n_{\max} \\ m_{n\max}}} \chi_{ik}^{(n,m)} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum_{m=0}^{m_{n\max}} \chi_{ik}^{(n,m)} \right). \tag{8.152}$$

При этом общее число ориентаций равно

$$N = 2\pi \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{\sin(n\theta_0)}{\theta_0}. \tag{8.153}$$

Отсюда получаем усредненное значение компоненты восприимчивости χ_{ik} в виде

$$\chi_{ik} = \frac{S_{ik}}{N} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum\limits_{m=0}^{m_{n\max}} \chi_{ik}^{(n,m)} \right)}{2\pi \sum\limits_{n=0}^{n_{\max}} \dfrac{\sin(n\theta_0)}{\theta_0}}. \tag{8.154}$$

Заметим, что полученный таким образом тензор восприимчивости никак не учитывает долю суммарного объема материала частиц во всем объеме среды. Здесь предполагается, что объем одной ячейки среды равен объему одной частицы. Для получения реального значения восприимчивости надо все полученные компоненты χ_{ik} умножить на коэффициент заполнения N_p, даваемый формулой (8.1). В результате из (8.154) получаем:

$$\chi_{ik} = N_p \frac{S_{ik}}{N} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{r}{d}\right)^3 \frac{\sum\limits_{n=0}^{n_{\max}} \left(\sum\limits_{m=0}^{m_{n\max}} \chi_{ik}^{(n,m)} \right)}{2\pi \sum\limits_{n=0}^{n_{\max}} \dfrac{\sin(n\theta_0)}{\theta_0}}. \tag{8.155}$$

8.4.5. О порядке численного расчета тензора восприимчивости

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что общий порядок расчета тензора восприимчивости включает в себя множество более или менее одинаковых циклически повторяющихся действий. По-видимому, аналитическое выполнение подобного расчета было бы

крайне громоздким, поэтому кратко остановимся на возможном алгоритме его численной реализации.

Итак, прежде всего следует задать параметры среды, общие для всех частиц. Это — намагниченность насыщения, поле или константа анизотропии, размеры частиц и расстояний между ними. Также следует задать приложенное постоянное поле и частоту, на которой будут определяться компоненты тензора. Кроме того надо определить интервалы изменения полярного и азимутального углов ориентации осей анизотропии частиц, а также значение шага по полярному углу θ_0. Следует учитывать, что предельные значения азимутального угла зависят от величины полярного угла в соответствии с формулой (8.147), то есть эти значения (а с ними и требуемое число шагов m по азимутальному углу φ_a) должны определяться в ходе расчета при каждом заданном значении полярного угла θ_a. Полное же число n как количество допустимых значений полярного угла θ_a может быть найдено на начальном этапе расчета, так как зависит от шага θ_0 и при изменении этого угла от нуля до 180° определяется правым равенством в формуле (8.146). Если же условия задачи требуют меньшего, чем 180° интервала изменения полярного угла, то число n определяется путем деления заданного интервала на величину шага θ_0.

Первым шагом вычисления собственно компонент тензора восприимчивости должно быть задание какого-то начального значения полярного угла θ_a, сначала — на краю изменения его диапазона. Одновременно должно быть найдено начальное значение азимутального угла φ_a по формуле (8.147) при $n = 1$ и $m = 1$ (из рис. 8.5 и 8.7 можно видеть, что при $n = 0$ значение m не определено, так что в этой точке усреднять нечего и для полноты картины ее можно учесть один раз, не выполняя суммирования по азимутальному углу).

Далее при этих параметрах надо найти равновесную ориентацию вектора намагниченности в одной частице, то есть определить угол θ_m с помощью уравнения (8.12) или (8.14). Для численного решения, по-видимому, является более удобным уравнение (8.16), которое можно решить, например, методом поиска нуля.

Полученное значение θ_m следует подставить в формулы (8.136)–(8.138), откуда будут получены частоты Ω_1, Ω_2, Ω (последняя частота от параметров среды не зависит, поэтому ее можно определить на этапе задания начальных параметров). С помощью этих частот определяются компоненты тензора восприимчивости χ_{ik} по формулам (8.125)–(8.133).

Эти компоненты будут получены для одного заданного значения полярного и азимутального углов одной частицы на заданной частоте.

Следующим этапом должно быть задание нового значения азимутального угла φ_a при том же значении полярного угла θ_a, отстоящего от начального значения φ_a на шаг φ_{n0}, определяемый формулой (8.143). При этом значении азимутального угла и прежнем

значении полярного угла снова находятся все компоненты тензора восприимчивости по формулам (8.125)–(8.133).

Далее значение азимутального угла снова увеличивается на тот же шаг и снова вычисляются компоненты тензора восприимчивости. Такое циклическое вычисление производится до тех пор, пока не будет пройден весь интервал допустимых значений азимутального угла φ_a, соответствующий заданному значению полярного угла θ_a, то есть до номера $m_{n\max}$, определяемого формулой (8.151). Все полученные значения компонент тензора восприимчивости суммируются в соответствии с внутренней суммой формулы (8.152).

Следующим шагом должно быть увеличение значения полярного угла θ_a на величину того же шага, после чего по этому значению определяется интервал допустимых значений азимутального угла φ_a в соответствии с формулой (8.149). Из этого интервала выбирается первое значение, при котором находится равновесное значение полярного угла вектора намагниченности θ_m, после чего — частоты Ω_1 и Ω_2, по которым затем находятся компоненты тензора восприимчивости по формулам (8.125)–(8.133). То есть вся процедура вычисления этих компонент повторяется. Далее выполняется следующий шаг по азимутальному углу с вычислением компонент тензора восприимчивости и так далее, пока весь интервал изменения азимутального угла не будет исчерпан. Полученные значения компонент тензора снова суммируются в соответствии с внутренней суммой формулы (8.152).

Следующим этапом является увеличение значения полярного угла еще на один шаг, после чего все повторяется до тех пор, пока весь интервал значений полярного угла не будет пройден. На каждом этапе получаемые значения внутренних сумм формулы (8.152) суммируются в соответствии с внешней суммой этой формулы.

Последним этапом является вычисление полного числа ориентаций по формуле (8.153) (заметим, что такое вычисление может быть выполнено еще на начальном этапе решения задачи, когда только будет задано значение θ_0).

Полученная по формуле (8.152) сумма делится на это число ориентаций в соответствии с формулой (8.154), откуда после учета размеров частиц и расстояния между ними получаются компоненты результирующего тензора восприимчивости для единицы среды в целом в соответствии с формулой (8.155).

Приведенный здесь алгоритм расчета подразумевает, что восприимчивость определяется на одной заданной частоте, входящей в (8.125)–(8.133) через посредство нормированной частоты Ω, соответствующей формуле (8.138). При необходимости получить зависимость тензора восприимчивости от частоты следует пройти требуемый интервал частот с заданным шагом, на каждом шаге выполняя все приведенные здесь вычисления заново.

Выполнение численного расчета в соответствии с приведенным алгоритмом позволяет определить как действительную, так и мнимую части

компонент тензора, для чего при проведении вычислений по формулам (8.125)–(8.133) следует учитывать комплексный характер переменных.

Дальнейшие разделы настоящей главы посвящены описанию расчетов тензора восприимчивости композиционной среды, выполненных в соответствии с описанным алгоритмом при различных заданных условиях.

8.5. Зависимости компонент тензора от частоты

Рассмотрим теперь некоторые свойства полученного тензора восприимчивости. Прежде всего, из формул (8.125)–(8.133) видно, что все девять его компонент отличны от нуля. Тензор не является диагональным, симметричным или антисимметричным. Все его компоненты являются комплексными, то есть имеют отличными от нуля действительную и мнимую части. Напомним, что в аналогичном тензоре для однородной изотропной среды (формулы (2.49), (2.58)–(2.61) в главе 2) отличны от нуля только χ_{xx}, χ_{xy}, χ_{yx}, χ_{yy} и в некоторых случаях χ_{zz}, а все остальные компоненты равны нулю, причем $\chi_{xx} = \chi_{yy}$, $\chi_{xy} = -\chi_{yx}$. При этом в отсутствие затухания χ_{xx} и χ_{yy} являются чисто действительными, а χ_{xy} иχ_{yx} чисто мнимыми [6–8]. Всего этого в полученном тензоре не наблюдается. Надо полагать, что перечисленные отличия полученного тензора от известного вызваны анизотропным характером частиц композиционной среды.

Несмотря на сказанное, из сравнения полученных здесь выражений с приведенными в главе 2, можно видеть известное сходство структуры тех и других выражений, соответствующих одинаковым по положению в столбцах и строках компонентам тензоров. Такое соответствие наиболее ярко проявляется при $\varphi_a = 0$ и $\theta_m = 0$, так что с точностью до обозначений имеют место соотношения: $\chi_{xx} \to \chi$, $\chi_{xy} \to i\chi_a$, $\chi_{zz} \to \chi_{||}$.

Заметим далее, что необходимым этапом вычисления компонент тензора для композиционной среды является усреднение по всем возможным направлениям ориентации осей анизотропии. При этом для каждого направления получается своя собственная резонансная частота, на которой компоненты тензора в отсутствие затухания стремятся к бесконечности. Такое обстоятельство может привести к стремлению компонент результирующего тензора к бесконечности во всем диапазоне изменения резонансных частот отдельных частиц, что порождает некоторую неопределенность, особенно при машинном счете. Наиболее простым выходом из положения, по-видимому, является прямой учет затухания, присутствующего во всех полученных выражениях.

Обратимся теперь к зависимости компонент тензора от частоты. Для простоты и сохранения общности решения коэффициент заполнения будем считать равным единице. Для рассмотрения выберем следующие параметры: намагниченность насыщения материала частиц: $4\pi M_0 = 1750$ Гс; константу одноосной анизотропии:

$K = 7000$ эрг см$^{-3}$, что соответствует полю анизотропии $H_a = 100$ Э; гиромагнитную постоянную: $\gamma = 2{,}8$ МГц Э$^{-1}$; константу затухания: $\alpha = 0{,}01$. Постоянное поле возьмем равным $H = 500$ Э. Заметим, что это поле соответствует внутреннему полю в частице, то есть для перехода к внешнему полю надо учитывать размагничивающий фактор, для сферы равный $4\pi/3$, или поле размагничивания равное $H_d = 4\pi M_0/3 = 583$ Э, то есть для создания внутри сферы поля, равного 500 Э, к ней извне должно быть приложено поле, равное $H_s = H + H_d = 1083$ Э. Усреднение по углу θ_a будем проводить с шагом θ_0, равным $0{,}1°$.

8.5.1. Крайние частоты резонансов восприимчивости

В соответствии со сказанным относительно зависимости компонент тензора (8.125)–(8.133) от угла φ_a, сначала рассмотрим частный случай при $\varphi_a = 0$, то есть на данном этапе проводить усреднение по этому углу не будем. Этот случай соответствует тому, как если бы разориентация осей легкого намагничивания отдельных частиц происходила лишь в одной плоскости и эта плоскость совпадала бы с координатной плоскостью Oxz на рис. 8.2, *а*.

При этих условиях крайние частоты резонансов, соответствующие ориентации оси анизотропии поперек и вдоль постоянного поля, равны соответственно:

$$f_{1p} = \gamma\sqrt{H(H - H_a)} = 1252 \text{ МГц}; \tag{8.156}$$

$$f_{2p} = \gamma(H + H_a) = 1680 \text{ МГц}, \tag{8.157}$$

а полная ширина резонансной линии одной частицы на половине высоты, определяемая по формуле $\Delta f_r = \alpha f_{1,2}$, составляет 80–100 МГц.

В качестве иллюстрации сказанного на рис. 8.8 показаны зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей компоненты восприимчивости χ_{xx} от частоты при параллельной (1) и перпендикулярной (2) ориентации поля относительно оси анизотропии. При построении этого рисунка какое-либо усреднение по углам не проводилось, так что полученные здесь кривые соответствуют просто крайним случаям параллельной и перпендикулярной ориентаций оси анизотропии относительно поля.

Из рисунка виден ярко выраженный резонансный характер всех зависимостей, сходный с таковым, приведенным на рис. 2.1 (глава 2), с точностью до значений резонансных частот, которые здесь определяются наличием анизотропии. Частоты резонансов совпадают с полученными по формулам (8.156) и (8.157) (на рисунке показаны вертикальными точечными линиями).

Поскольку здесь представлены две крайние возможные ориентации оси анизотропии относительно направления поля, то есть два крайние значения угла θ_a, а именно: 0° и 90°, то следует ожидать, что при всех промежуточных углах резонансные частоты будут располагаться

Рис. 8.8. Зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей компоненты восприимчивости χ_{xx} от частоты при параллельной (1) и перпендикулярной (2) ориентациях поля относительно оси анизотропии. Вертикальные точечные линии (показаны стрелками) — предельные частоты f_{1p} и f_{2p}, соответствующие формулам (8.156) и (8.157). Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $H = 500$ Э, $H_a = 100$ Э, $\alpha = 0{,}01$, $\gamma = 2{,}8$ МГц Э$^{-1}$

между этими крайними. То есть полный спектр восприимчивости будет заключен между частотами f_{1p} и f_{2p}, определяемыми формулами (8.156) и (8.157).

Изменение угла θ_a в пределах от 90° до 180° ничего нового не внесет, так как вследствие двунаправленности оси анизотропии вектор намагниченности в равновесном положении всегда будет ориентирован как можно ближе к направлению поля, то есть в интервале от 0° до 90°.

Замечание. Заметим, что изменение ориентации поля в полном интервале углов θ_a от 0° до 180° в случае достаточной магнитной жесткости материала сфер, особенно, если их размер допускает образование

доменной структуры, может привести к явлениям гистерезисного характера. То есть ориентация вектора намагниченности в положительном и отрицательном направлениях относительно оси анизотропии будет зависеть от предыстории процесса перемагничивания, так что частоты резонансов могут выйти за пределы отмеченного интервала. Однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения и в настоящей монографии затрагиваться не будет, то есть мы будем считать, что материал сфер в магнитном отношении является полностью мягким, а поле полностью достаточным для его насыщения.

8.5.2. Особенности процедуры усреднения при изменении величины шага

Рассмотрим теперь, как меняется полная частотная зависимость восприимчивости при учете различной ориентации осей анизотропии в составляющих среду сферических частицах. В качестве иллюстрации обратимся к рис. 8.9, где показаны зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей компоненты восприимчивости χ_{xx} от частоты при различном шаге усреднения по углу θ_a. При этом угол φ_a, как и ранее, положен равным нулю. Левый столбец рисунка (*а*) соответствует действительной части χ'_{xx}, правый столбец (*б*) — мнимой части χ''_{xx}. Сверху вниз по обоим столбцам рисунка шаг усреднения уменьшается.

Из рисунка можно видеть, что при достаточно большом шаге, равном 100° (фрагменты рисунка *1* и *5*), то есть фактически в отсутствие усреднения, зависимости как действительной, так и мнимой частей практически совпадают с приведенными на рис. 8.8. Различие по амплитуде в два раза обусловлено тем, что при построении кривых на рис. 8.8 полагались начальное и конечное значений угла θ_a равными, в одном случае по 0° (кривые *2* на рис. 8.8), в другом — по 90° (кривые *1* на рис. 8.8). При этом процедура усреднения проводилась в полном объеме, так что оба эти значения, начальное и конечное, учитывались дважды (как начало и конец счета). При построении кривых на рис. 8.9 начальное и конечное значения угла θ_a полагались равными 0° и 180°, так что все значения углов, в том числе 0° и 90°, учитывались только один раз, поэтому здесь амплитуда получилась вдвое меньше, чем на рис. 8.8. Надо полагать, что той же причиной обусловлено и небольшое (на ~10 МГц) изменение резонансной частоты, наблюдаемое на низкочастотном резонансе.

Главной особенностью кривых, представленных на рис. 8.9, можно считать их дискретный, резко изрезанный пилообразный характер, особенно ярко проявляющийся при средней величине шага 10° и 20° (фрагменты рисунка *3*, *4*, а также *6*, *7*). Такой дискретный характер обусловлен суперпозицией резонансных кривых отдельных частиц, соответствующих разным направлениям осей анизотропии. То есть вследствие дискретной ориентации осей и расположение резонансных частот также получилось дискретным.

Рис. 8.9. Зависимости действительной (*а*) и мнимой (*б*) частей компоненты восприимчивости χ_{xx} от частоты при различном шаге усреднения θ_0 по углу θ_a: *1, 5* — 100°; *2, 6* — 20°; *3, 7* — 10°; *4, 8* — 1°. Вертикальные точечные линии — предельные частоты f_{1p} и f_{2p}, соответствующие формулам (8.156) и (8.157). Параметры — те же, что приняты при построении рис. 8.8

Можно видеть, что по мере уменьшения шага зубцы пилы как по высоте, так и по длине уменьшаются. При этом их число увеличивается, а при достаточно малом шаге, равном 1° (фрагменты рисунка *4* и *8*), все зубцы сливаются настолько, что кривые в целом приобретают совершенно плавный характер.

Таким образом, поскольку зубцы формируются из достаточно узких резонансных выбросов, подобных таковым на фрагментах рисунка *1* и *5*, то дискретный характер состоящих из них кривых может проявляться только до тех пор, пока ширина этих выбросов будет меньше расстояния между ними. То есть причиной дискретности является малая по сравнению с величиной шага по частоте ширина линии ферромагнитного резонанса. Когда сдвиг кривой на одном шаге усреднения будет меньше ширины линии ферромагнитного резонанса, все кривые от отдельных частиц должны слиться в единое целое, как это и наблюдается при шаге равном 1° (фрагменты рисунка *4* и *8*).

Заметим, что амплитуда результирующих кривых по мере уменьшения шага (то есть по рисунку сверху вниз) также уменьшается. Причиной такого уменьшения является равномерное распределение резонансных кривых по частоте при условии сохранения полного числа частиц в единице объема (формула (8.2)). То есть при большом шаге

ориентации осей анизотропии частиц сосредоточены при углах, соответствующих обоим концам этого шага, в результате чего их амплитуды складываются. При малом же шаге эти ориентации распределяются более или менее равномерно по всему интервалу изменения угла θ_a, вследствие чего амплитуды «размазываются» по значительному интервалу углов, так что суммарная амплитуда падает.

8.5.3. Зависимости компонент тензора от частоты при усреднении по полярному углу

Рассмотрим теперь полные зависимости всех компонент восприимчивости от частоты, для чего обратимся к рис. 8.10. Приведенные на этом рисунке зависимости представляют собой пары (по вертикали), геометрически расположенные таким же образом, как располагаются компоненты тензора восприимчивости при матричной записи (8.94):

$$\overleftrightarrow{\chi} = \left(\begin{array}{c|c|c} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \hline \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \hline \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{array}\right), \tag{8.158}$$

причем верхняя зависимость каждой пары соответствует действительной части компоненты тензора, а нижняя — мнимой части той же компоненты.

Из рис. 8.10 видно, что все компоненты тензора отличны от нуля, в основном, в пределах между f_{1p} и f_{2p}, причем вблизи крайних частот f_{1p} и f_{2p} имеются экстремумы. Между экстремумами величины компонент тензора принимают сравнительно небольшие конечные значения. Такой ход кривых (два экстремума на крайних частотах с пологим участком между ними), обусловлен тем, что результирующая кривая получается путем суммирования резонансных вкладов отдельных частиц, сдвинутых по частоте относительно друг друга. При этом, благодаря тому, что резонансная кривая каждой частицы на резонансной частоте меняет знак, внутри интервала крайних частот положительные и отрицательные вклады взаимно уничтожаются, давая в результате сравнительно небольшие значения суммарной восприимчивости. На краях интервала такой компенсации нет, поэтому резонансные кривые дают краевые экстремумы общей кривой.

Рассмотрим, например, компоненту χ_{xx} как результат расчета восприимчивости с помощью усреднения. Из рис. 8.10, *а* видно, что частотная зависимость действительной части восприимчивости $\chi'_{xx}(f)$ имеет два экстремума разных знаков — максимум высотой 2,1126 на частоте 1244 МГц и минимум величиной −1,9206 на частоте 1690 МГц, между которыми кривая проходит через нуль на частоте 1614 МГц. Частотная зависимость мнимой части восприимчивости $\chi''_{xx}(f)$ также имеет два экстремума, но одинакового знака — минимумы на частоте 1259 МГц, величиной — 2,0188 и на частоте 1670 МГц, величиной −2,1323. Между этими минимумами кривая идет плавно,

Рис. 8.10. Зависимости компонент тензора восприимчивости от частоты. Усреднение производится только по углу θ_a с шагом в 1°, угол φ_a положен постоянным, равным нулю. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 8.8

но имеет еще один слабо выраженный экстремум — максимум величиной −1,1000 на частоте 1389 МГц. Из приведенных значений видно, что частоты экстремумов зависимостей $\chi'_{xx}(f)$ и $\chi''_{xx}(f)$ совпадают со значениями частот $f_{1p} = 1252$ МГц и $f_{2p} = 1680$ МГц, соответствующих крайним ориентациям осей анизотропии, с точностью не хуже 1 %.

Обратим теперь внимание на сравнительные величины отдельных компонент полученного тензора. Из рис. 8.10 видно, что наибольшую абсолютную величину имеют диагональные компоненты χ_{xx} (рис. 8.10, *а*), χ_{yy} (рис. 8.10, *д*), а также симметрично расположенные относительно главной диагонали компоненты χ_{xy} (рис. 8.10, *б*), χ_{yx} (рис. 8.10, *г*). Все остальные компоненты χ_{xz}, χ_{zx}, χ_{yz}, χ_{zy} (рис. 8.10, *в*, *е*, *ж*, *з*) а также χ_{zz} (рис. 8.10, *и*) имеют величину значительно меньшую (приблизительно на два порядка). С другой стороны кривые для компонент χ_{xx} (рис. 8.10, *а*) и χ_{yy} (рис. 8.10, *д*) весьма похожи друг на друга и отличаются не более чем на 10–15 %. Кривые для компонент χ_{xy} (рис. 8.10, *б*), χ_{yx} (рис. 8.10, *г*) также весьма похожи и отличаются друг от друга довольно мало с точностью до знака. Таким образом, в общем, сравнительные величины компонент усредненного тензора композиционной среды ведут себя весьма подобно компонентам тензора для изотропной среды (формулы (2.58)–(2.61)), а наблюдаемые отличия не превосходят 10–15 %. Это означает, что композиционная среда в основном сохраняет гиротропные свойства, близкие к аналогичным свойствам однородной изотропной среды.

Тем не менее, важнейшими отличиями является ненулевой характер всех девяти компонент тензора, а также значительно более широкий диапазон перекрываемых частот (в приведенном примере — 400 МГц по сравнению с 80 МГц для изотропной среды). Серьезным отличием является также наличие значительных мнимых составляющих компонент тензора χ_{xx} и χ_{yy}, а также действительных составляющих компонент χ_{xy} и χ_{yx}.

Несколько слов можно сказать о свойствах симметрии тензора. Из сравнения кривых на рис. 8.10, *б* и рис. 8.10, *г* видно, что компоненты χ_{xy} и χ_{yx} являются антисимметричными с точностью 10–15 %. То же можно сказать и о компонентах χ_{yz} (рис. 8.10, *е*), χ_{zy} (рис. 8.10, *з*). Из сравнения кривых на рис. 8.10, *в* и 8.10, *ж* видно, что компоненты χ_{xz} и χ_{zx} с той же точностью являются симметричными. Таким образом, тензор восприимчивости композиционной среды частично проявляет свойства как симметрии, так и антисимметрии.

8.5.4. Зависимости компонент тензора от параметров среды

Отметим теперь некоторые особенности изменения компонент тензора при изменении параметров среды.

Дополнительные исследования показали, что при увеличении постоянного поля в 10 раз величина χ_{xx} уменьшается в 3 раза, а частота увеличивается примерно пропорционально полю. Крайние экстремумы сходятся вместе, как для единичного резонанса.

При увеличении анизотропии в 10 раз частота увеличивается, а величина χ_{xx} уменьшается, обе примерно в 10 раз.

При уменьшении затухания положения экстремумов по частоте не меняются, но их величины по абсолютной величине возрастают, стремясь к бесконечности.

При уменьшении затухания в 10 раз кривые проявляют дискретный характер, пропадающий при уменьшении шага усреднения в 10 раз. При этом величина χ_{zz} уменьшается в 2 раза.

При увеличении затухания в 10 раз все сглаживается, кривые для χ_{zz} приобретают вид единичного резонанса, величина χ_{zz} уменьшается в 5 раз.

При уменьшении намагниченности в 10 раз увеличивается частота: частоты крайних экстремумов становится 2400 и 4200 МГц. Кривая для действительной части χ_{zz} становится резко несимметричной: со стороны низких частот — резкий пик с амплитудой 0,02, со стороны высоких — тупой пик с амплитудой −0,01. Кривая для мнимой части χ_{zz} также становится резко несимметричной: со стороны низких частот — резкий бросок вниз до амплитуды −0,015, затем — плавный подъем до нуля на краю диапазона со стороны высоких частот, при этом пик отсутствует.

При увеличении намагниченности в 10 раз частота χ_{zz} уменьшается и становится равной 1400 МГц, крайние пики сходятся, кривые становятся подобными единичному резонансу. Высота пиков слегка уменьшается и становится для действительной части 0,008, для мнимой −0,010. Кривая для мнимой части имеет только один пик (вниз). Расстояние между пиками по действительной части составляет около 80 МГц.

При увеличении намагниченности в 10 раз действительная часть χ_{xx} увеличивается до амплитуды 55, то есть около 25–30 раз, действительная часть χ_{xz} увеличивается до 0,5, то есть более чем в 20 раз. Крайние пики всех кривых сходятся, и кривые приобретают вид одиночного резонанса. Расстояние между крайними пиками действительной части составляет около 40 МГц.

8.5.5. Усреднение по азимутальному углу

До этого места рассматривалось равномерное распределение осей анизотропии только по полярному углу θ_a от 0° до 180°, а азимутальный угол φ_a полагался постоянным, равным нулю. То есть оси анизотропии всех частиц располагались в произвольном направлении, но только в одной плоскости. Рассмотрим теперь, как меняются компоненты тензора восприимчивости при произвольной ориентации осей анизотропии частиц по всему трехмерному пространству, то есть кроме изменения θ_a от 0° до 180°, также изменения φ_a от 0° до 360°.

Чтобы более подробно выяснить роль угла φ_a в формировании компонент восприимчивости, будем считать, что угол θ_a по-прежнему меняется в полном интервале от 0° до 180°, а для угла φ_a будем

задавать интервал от нуля до определенного фиксированного значения, величину которого будем обозначать через φ_s.

Прежде всего отметим, что изменение азимутального угла от нуля до значения φ_s при любых значениях φ_s для главных компонент тензора восприимчивости χ_{xx}, χ_{xy}, χ_{yz}, χ_{yy} не приводит к какому-либо их изменению. В то же время компоненты χ_{xz}, χ_{yz}, χ_{zx}, χ_{zy}, а также χ_{zz} значительно изменяются. То есть, те компоненты, которые в классической записи матрицы тензора восприимчивости (формулы (2.38), (2.49)) отличны от нуля, остаются неизменными, а те, которые в той же записи равны нулю — изменяются. При этом, как отмечено при рассмотрении рис. 8.10, величины неизменных компонент превышают таковые для компонент изменяющихся, примерно на два порядка. То есть во всех случаях тензор восприимчивости по величине своих компонент сохраняет свойства, подобные тензору для изотропной среды.

Замечание. Заметим, что такое сходство имеет место только для величин компонент, но не их частотных свойств. Так при рассмотрении того же рис. 8.10 было показано, что во всех случаях частотный диапазон компонент восприимчивости остается заключенным между характерными частотами f_{1p} и f_{2p}, определяемыми формулами (8.156) и (8.157), который может значительно превышать частотный диапазон компонент, соответствующих одной фиксированной ориентации оси анизотропии.

Рассмотрим теперь, что происходит при изменении азимутального угла с остальными компонентами, а именно: χ_{xz}, χ_{yz}, χ_{zx}, χ_{zy}, χ_{zz}. Подробное исследование показывает, что характер изменения всех этих компонент примерно одинаков, поэтому ограничимся рассмотрением только одной компоненты χ_{xz}. Обратимся к рис. 8.11, где показаны зависимости действительной (*1*, *3*) и мнимой (*2*, *4*) частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xz} от величины интервала усреднения по азимутальному углу φ_s на разных частотах: *1*, *2* — 1400 МГц, *3*, *4* — 1600 МГц. Усреднение по θ_a проводилось в интервале от 0° до 180° с шагом в 1°. Усреднение по φ_a — в интервале от 0° до φ_s с шагом в 5°.

Из рисунка можно видеть, что при изменении интервала усреднения по углу φ_a все зависимости компонент тензора от предельного угла φ_s плавно изменяются, причем характер изменения близок к синусоидальному. Во всем интервале изменения φ_s от нуля до 360° амплитуды кривых остаются достаточно малыми, примерно того же порядка, что и при отсутствии усреднения по φ_a (то есть при $\varphi_s = 0°$).

Однако совершенно четко можно видеть, что все кривые, начинаясь при $\varphi_s = 0°$ на различающихся уровнях, при $\varphi_s = 360°$ сходятся к одной точке, соответствующей нулевому уровню (на рисунке этот уровень показан горизонтальной точечной кривой).

То есть можно утверждать, что при распределении ориентаций осей анизотропии отдельных частиц равномерно по всему трехмерному

Рис. 8.11. Зависимости действительной (*1, 3*) и мнимой (*2, 4*) частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xz} от величины интервала усреднения по азимутальному углу φ_s на разных частотах: *1, 2* — 1400 МГц, *3, 4* — 1600 МГц. Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $H = 500$ Э, $H_a = 100$ Э, $\alpha = 0{,}01$, $\gamma = 2{,}8$ МГц Э$^{-1}$

пространству, компоненты тензора восприимчивости χ_{xz}, χ_{yz}, χ_{zx}, χ_{zy}, χ_{zz} стремятся к нулю, как это имеет место для изотропной среды.

Заметим, что обращение в нуль этих компонент с физической точки зрения представляется вполне естественным, так как при равномерном распределении ориентации осей анизотропии по всему трехмерному пространству выделение каких-либо направлений в среде в целом пропадает, что и роднит ее с изотропным случаем.

Не следует однако забывать, что отличие такой среды от изотропной остается в значительном диапазоне частот, перекрываемом основными компонентами, то есть среда по восприимчивости становится широкополосной, что в прикладном отношении может быть весьма полезным.

8.6. Возможный случай аналитического усреднения

В частном случае равномерного распределения осей анизотропии частиц по азимутальному углу, формулы (8.125)–(8.133) допускают удобное аналитическое упрощение.

Так из их структуры можно видеть, что угол φ_a присутствует во всех формулах под знаками синуса или косинуса в одинаковых сочетаниях, выступающих в роли коэффициентов при других выражениях. Учитывая равномерность распределения осей анизотропии по этому углу, можно произвести усреднение входящих в эти формулы тригоно-

метрических функций по углу φ_a от 0 до 2π с помощью следующей формулы:

$$\overline{f(\varphi_a)\big|_0^{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi_a)\,d\varphi_a. \tag{8.159}$$

При этом получаем усредненные значения:

$$\overline{\sin\varphi_a} = \overline{\cos\varphi_a} = \overline{\sin\varphi_a\cos\varphi_a} = 0; \tag{8.160}$$

$$\overline{\sin^2\varphi_a} = \overline{\cos^2\varphi_a} = \frac{1}{2}. \tag{8.161}$$

Подставляя эти значения в формулы (8.125)–(8.133) получаем компоненты тензора восприимчивости в виде:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\cos^2\theta_m + (\Omega_2 + i\Omega\alpha)}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \tag{8.162}$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx} = \frac{i\Omega\cos\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}; \tag{8.163}$$

$$\chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy} = 0; \tag{8.164}$$

$$\chi_{zz} = \frac{(\Omega_1 + i\Omega\alpha)\sin^2\theta_m}{4\pi[\Omega_1\Omega_2 - (1+\alpha^2)\Omega^2 + i\alpha\Omega(\Omega_1+\Omega_2)]}. \tag{8.165}$$

В этом случае свойства симметрии тензора восприимчивости — те же, что и для однородной изотропной среды:

$$\chi_{xx} = \chi_{yy}; \tag{8.166}$$

$$\chi_{xy} = -\chi_{yx}; \tag{8.167}$$

$$\chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy} = 0. \tag{8.168}$$

Заметим, что равенство нулю компонент тензора χ_{xz}, χ_{yz}, χ_{zx}, χ_{zy}, имеющее место согласно формуле (8.164), совпадает с обращением в нуль этих компонент при $\varphi_s = 360°$, как это показано на рис. 8.11.

Можно видеть, что при $\theta_a = \theta_m = 0$, а также $H_a = 0$, формулы (8.162)–(8.165) переходят в известные выражения для компонент тензора восприимчивости изотропной среды (2.58)–(2.59), а также (2.60)–(2.61) с учетом (2.56)–(2.57).

8.7. Формирование заданных свойств магнитной восприимчивости среды

В рамках рассмотренной выше модели произвольной ориентации осей анизотропии отдельных частиц основные частотные параметры среды не являются независимыми. Так, при заданном внешнем поле значение поля анизотропии частиц определяет одновременно как максимальную (или минимальную) рабочую частоту, так и ширину перекрываемого диапазона частот, что связано с хаотическим характером ориентации

осей анизотропии. Взаимозависимость параметров среды сужает возможности ее технического применения, поэтому представляет интерес выявление возможности независимого управления ее свойствами.

Рассмотрим теперь важную для практики возможность формирования заданных свойств магнитной восприимчивости среды путем частичного упорядочения ориентации осей анизотропии отдельных частиц.

8.7.1. Упорядочение ориентации частиц

Рассмотрим такую среду, в которой ориентация осей анизотропии отдельных частиц близка к какому-то выделенному направлению. Возможные варианты геометрии структуры среды показаны на рис. 8.12. В качестве примера для рисунка выбрана кубическая решетка, однако, поскольку взаимодействие между частицами отсутствует, то вид решетки не имеет значения и в дальнейшем расчете не учитывается. Сферические частицы схематически изображены в виде кружков, расположенных в ее узлах. Утолщенным линиями внутри кружков показано расположение осей анизотропии отдельных сфер. Рис. 8.12, *а* соответствует произвольной ориентации осей анизотропии частиц, рис. 8.12, *б* — частично упорядоченной ориентации осей анизотропии вдоль вертикали по рисунку. Ниже показаны схемы ориентации осей анизотропии различных частиц для тех же случаев. Внизу посередине показана схема отсчета углов ориентации осей легкого намагничивания (ОЛН) в декартовой и сферической системах координат.

Рис. 8.12. Геометрия структуры композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц. *а* – произвольная ориентация осей анизотропии; *б* — частично упорядоченная ориентация осей анизотропии

Среда с выделенным направлением ориентации осей анизотропии технологически может быть изготовлена путем помещения сферических ферритовых частиц в первоначально жидкую постепенно густеющую матрицу в присутствии постоянного магнитного поля, ориентирующего частицы в процессе затвердевания. При этом поле одного направления приведет к частичному упорядочению ориентации осей анизотропии частиц вокруг этого направления. Плавное квазистатическое вращение поля по конусу или качание его в плоскости приведет к выделению преимущественной ориентации в пределах определенных интервалов по полярному и азимутальному углам.

Будем обозначать границы интервала упорядочения по углам: полярному — через θ_{1s} и θ_{2s}, азимутальному — через φ_{1s} и φ_{2s}. Благодаря четности одноосной анизотропии неупорядоченному состоянию соответствует $0^\circ \leqslant \theta_a \leqslant 90^\circ$, то есть $\theta_{1s} = 0^\circ$, $\theta_{2s} = 90^\circ$, а полностью упорядоченному вдоль полярной оси $\theta_a = 0^\circ$, то есть $\theta_{1s} = \theta_{2s} = 0^\circ$.

8.7.2. Упорядочение по полярному углу

Рассмотрим сначала, как зависят свойства восприимчивости от упорядоченности полярного угла θ_a в отсутствие упорядочения по азимутальному углу φ_a (то есть при $\varphi_\alpha = 0^\circ$). Характер поведения восприимчивости при различных степенях упорядочения по θ_a иллюстрируется рис. 8.13, где приведены зависимости от частоты действительной $\chi'_{xx} = \operatorname{Re}\chi_{xx}$ (сплошные линии — *1′*, *2′*, *3′*) и мнимой $\chi''_{xx} = \operatorname{Im}\chi_{xx}$ (пунктир — *1″*, *2″*, *3″*) частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xx} при различных интервалах упорядочения угла θ_a. Кривые *1′*, *1″* соответствуют неупорядоченному состоянию, то есть $0^\circ \leqslant \theta_a \leqslant 90^\circ$, кривые *2′*, *2″* — частичному упорядочению при $0^\circ \leqslant \theta_a \leqslant 45^\circ$, кривые *3′*, *3″* — полному упорядочению, то есть $\theta_a = 0^\circ$.

Параметры построения рис. 8.13 приведены в его подписи. При этом частоты резонансов, соответствующие ориентации оси анизотропии вдоль и поперек постоянного поля, определяемые формулами (8.156) и (8.157), соответственно равны: $f_{1p} = 1252$ МГц; $f_{2p} = 1680$ МГц. Ширина резонансной линии одной частицы составляет $\Delta f = 80$–100 МГц.

Из рисунка видно, что в неупорядоченном состоянии (кривые *1′*, *1″*) граничные выбросы обеих компонент зависимости $\chi_{xx}(f)$ приходятся на предельные частоты резонансов f_{1p} и f_{2p}. По мере увеличения упорядочения (кривые *2′*, *2″*) частота нижнего выброса повышается, а верхнего остается близкой к f_{2p}. В полностью упорядоченном состоянии (кривые *3′*, *3″*) частоты обоих выбросов приближаются к f_{2p}, отличаясь друг от друга на ширину линии резонанса Δf. Амплитуда выбросов χ'_{xx} по мере упорядочения увеличивается по модулю с 1,5 до 3,0, а выбросов χ''_{xx} — с 1,5 до 5,7.

Замечание. Представленные на рис. 8.13 кривые *1′*, *1″* построены при тех же параметрах, что и обе кривые на рис. 8.10, *а*. Однако можно видеть, что там амплитуда кривых вдвое больше, чем здесь. Такое

Рис. 8.13. Зависимости действительной χ'_{xx} и мнимой χ''_{xx} частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xx} от частоты при различных интервалах упорядочения по углу θ_a: *1* — $0^\circ \leqslant \theta_a \leqslant 90^\circ$; *2* — $0^\circ \leqslant \theta_a \leqslant 45^\circ$; *3* — $\theta_a = 0^\circ$. Параметры: $4\pi M_0 = 1750$ Гс, $H = 500$ Э, $H_a = 100$ Э, $\alpha = 0{,}01$, $\gamma = 2{,}8$ МГц Э$^{-1}$

различие происходит из-за того, что там усреднение по θ_a проводилось в интервале от 0° до 180°, а здесь — от 0° до 90°. То есть в первом случае учитывалось вдвое больше частиц, что и привело к увеличению амплитуды восприимчивости в два раза. Следует заметить, что здесь усреднение проводилось в половинном интервале в расчете на то, что ось анизотропии является двунаправленной, то есть равновесное положение намагниченности всегда ориентируется в положительном направлении оси анизотропии. То есть, даже если в начальный момент вектор намагниченности был ориентирован в отрицательном направлении, то под действием поля он все равно устанавливается в положительном направлении той же оси, хотя, возможно, и с некоторым гистерезисом, для настоящего рассмотрения несущественным. Таким образом, если считать, что в начальном состоянии угол θ_a имеет все возможные значения от 0° до 180, то под действием поля он сразу переориентируется в интервал углов от 0° до 90°. Однако не следует забывать, что при этом число частиц, где вектор намагниченности ориентируется в положительном направлении оси анизотропии, удваивается, то есть амплитуды кривых, представленных на рис. 8.13 должны быть удвоены. В этом случае они по амплитуде будут подобны представленным на рис. 8.10. При построении кривых на рис. 8.13 и последующих такое удвоение не проводилось для того, чтобы яснее

выявить роль величины интервала по θ_a, когда он составляет доли от полного угла в 90°.

Характер поведения восприимчивости при упорядочении в пределах одного и того же интервала по углу θ_a, но начинающегося при разных начальных углах, в отсутствие упорядочения по φ_a, иллюстрируется рис. 8.14, построенным при тех же параметрах, что и рис. 8.13. На этом рисунке показаны зависимости от частоты действительной $\chi'_{xx} = \mathrm{Re}\,\chi_{xx}$ (сплошные линии — *1′*, *2′*, *3′*) и мнимой $\chi''_{xx} = \mathrm{Im}\,\chi_{xx}$ (пунктир — *1″*, *2″*, *3″*) частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xx} при различных интервалах упорядочения угла θ_a (указаны в подписи к рисунку).

Из рис. 8.14 видно, что изменение положения интервала упорядочения по полярному углу меняет общий вид частотной зависимости восприимчивости довольно мало. При смещении интервала θ_a вверх от 0° до 90°, кривая восприимчивости, в основном, оставаясь подобной самой себе, смещается вниз по частоте с 1700 до 1300 МГц. Такое сильное изменение обусловлено изменением преимущественного положения оси анизотропии основной массы частиц с параллельного внешнему полю на перпендикулярное.

Рис. 8.14. Зависимости действительной χ'_{xx} и мнимой χ''_{xx} частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xx} от частоты при различных интервалах упорядочения по углу θ_a: *1* — $0° \leqslant \theta_a \leqslant 30°$; *2* — $30° \leqslant \theta_a \leqslant 60°$; *3* — $60° \leqslant \theta_a \leqslant 90°$. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 8.13

8.7.3. Упорядочение по азимутальному углу

В обоих рассмотренных случаях упорядочение по азимутальному углу φ_a отсутствовало, то есть отличными от нуля были только компоненты тензора восприимчивости χ_{xx}, χ_{xy}, χ_{yx}, χ_{yy}, χ_{zz}, а компоненты $\chi_{xz} = \chi_{yz} = \chi_{zx} = \chi_{zy}$ равнялись нулю. Рассмотрим теперь случай частичного упорядочения по углу φ_a, когда все девять компонент тензора отличны от нуля. Для примера ограничимся компонентой χ_{xz}, частотные зависимости действительной $\chi'_{xz} = \operatorname{Re}\chi_{xz}$ (сплошные линии *1′–5′*) и мнимой $\chi''_{xz} = \operatorname{Im}\chi_{xz}$ (пунктир *1″–5″*) частей которой при различных интервалах упорядочения угла φ_a показаны на рис. 8.15. Все кривые построены при тех же параметрах, что и на предыдущих рисунках, причем упорядочение по полярному углу отсутствует — $0° \leqslant \theta_a \leqslant 90°$. Кривые *1′*, *1″* соответствуют отсутствию изменения азимутального угла, то есть состоянию по этому углу полностью упорядоченному. Кривые *5′*, *5″* — изменению азимутального угла в полном возможном интервале от 0° до 360°, то есть состоянию полностью разупорядоченному. Остальные интервалы упорядочения по φ_a, являющиеся промежуточными между этими двумя, указаны в подписи к рисунку.

Из рис. 8.15 видно, что границы частотного интервала, в котором компонента восприимчивости χ_{xz} заметно отличается от нуля,

Рис. 8.15. Зависимости действительной χ'_{xz} и мнимой χ''_{xz} частей компоненты тензора восприимчивости χ_{xz} от частоты при различных интервалах упорядочения по углу φ_a: *1* — $\varphi_a = 0°$; *2* — $0° \leqslant \varphi_a \leqslant 90°$; *3* — $0° \leqslant \varphi_a \leqslant 180°$; *4* — $0° \leqslant \varphi_a \leqslant 270°$; *5* — $0° \leqslant \varphi_a \leqslant 360°$. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 8.13

от степени упорядочения по углу φ_a не зависят. Действительная компонента χ'_{xz} принимает максимальные значения $\pm 0{,}080$ вблизи краев частотного интервала при максимальном упорядочении $\varphi_a = 0°$ (кривая *1′*). По мере уменьшения упорядочения максимальные значения χ'_{xz} уменьшаются и при $0° \leqslant \varphi_a \leqslant 270°$ составляют 0,010 и $-0{,}025$ (кривая *4′*), а при полном разупорядочении $0° \leqslant \varphi_a \leqslant 360°$ везде $\chi'_{xz} = 0$ (кривые *5′*, *5″*). Мнимая компонента χ''_{xz} ведет себя подобным образом: по мере уменьшения упорядочения по амплитуде уменьшается, а при полном разупорядочении обращается в нуль, что и соответствует нулевому значению в формуле (8.164).

8.7.4. Общие возможности формирования параметров среды

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что частичное упорядочение ориентации осей анизотропии отдельных частиц обеспечивает возможность независимого формирования заданных параметров композиционной среды, таких, как рабочая частота и перекрываемый частотный интервал. Так, из рис. 8.13 видно, что изменение величины интервала упорядочения ориентации частиц по полярному углу позволяет менять диапазон частот без изменения верхней рабочей частоты, а из рис. 8.14 видно, что изменение углового положения интервала упорядочения по полярному углу позволяет менять рабочую частоту без изменения ширины интервала перекрываемых частот. Из рис. 8.15 видно, что изменение упорядочения ориентации частиц по азимутальному углу приводит к появлению дополнительных компонент тензора восприимчивости, что может представлять интерес для расширения функциональных возможностей СВЧ устройств.

Выводы по главе 8

Настоящая глава посвящена получению и изучению свойств тензора динамической магнитной восприимчивости для композиционной среды, состоящей из сферических анизотропных магнитных частиц, в случаях как произвольной, так и упорядоченной ориентации осей анизотропии в отдельных частицах.

Основные результаты, полученные в настоящей главе, сводятся к следующему.

1. Предложена композиционная среда, представляющая собой решетку из анизотропных ферритовых сфер, вкрапленных в немагнитную матрицу. Поставлена задача исследования параметров такой среды, а первую очередь динамической магнитной восприимчивости.

2. Отмечено, что вследствие отсутствия взаимодействия между частицами полная задача может быть решена в две стадии: первая — нахождение тензора восприимчивости для одной частицы в случае произвольной ориентации ее оси анизотропии, вторая — суммирование восприимчивостей отдельных частиц с последующим усреднением по всем возможным ориентациям осей анизотропии отдельных частиц.

3. Установлено, что для решения задачи о восприимчивости одной частицы необходимо введение пяти вспомогательных систем координат. Первая — лабораторная, связанная с направлением внешнего поля; вторая — связанная с осью анизотропии, соответствующая нулевому значению азимутального угла ОЛН; третья — связанная с равновесной намагниченностью, также соответствующая нулевому значению азимутального угла ОЛН; четвертая — связанная с осью анизотропии, соответствующая произвольному значению азимутального угла ОЛН; пятая — связанная с равновесной намагниченностью, также соответствующая произвольному значению азимутального угла ОЛН,

4. Установлено, что в качестве первого этапа решения задачи необходимо нахождение равновесной ориентации вектора намагниченности, определяемой взаимодействием намагниченности с полем анизотропии и постоянным полем. Для решения этой задачи введены две вспомогательные системы координат: одна — связанная с полем и другая — связанная с намагниченностью Путем минимизации плотности энергии получено уравнение для определения полярного угла равновесного положения вектора намагниченности. Решение этого уравнения, выполненное численным методом, характеризует поведение полярного угла вектора намагниченности, свойственное затянутому ориентационному переходу.

5. Установлен общий порядок действий при расчете восприимчивости одной частицы, состоящий в последовательном преобразовании восприимчивости, полученной в системе, связанной с намагниченностью, к системе, связанной с полем. Выявлена необходимость использования для такого преобразования трех матриц перехода. Получены требуемые матрицы перехода, компоненты которых выражены через полярные и азимутальные углы равновесного положения вектора намагниченности и заданную ориентацию оси анизотропии.

6. Полный ход решения задачи представлен в виде выполняемых последовательно девяти шагов, включающих в себя решение уравнения движения намагниченности в системе, связанной с равновесной намагниченностью, линеаризацию полученного решения и его преобразование к системе, связанной с полем. Для такого преобразования использованы матрицы переходов, полученные на предыдущем этапе. Результатом выполнения полной последовательности шагов явился тензор динамической магнитной восприимчивости для одной частицы, записанный в лабораторной системе координат, связанной с полем. Компоненты тензора восприимчивости представлены в комплексном виде и выражены через параметры материала и постоянного поля. В качестве основных определяющих параметров компонент тензора восприимчивости выделены полярный и азимутальный углы ориентации оси анизотропии данной частицы.

7. Отмечено, что для получения восприимчивости для композиционной структуры, состоящей из большого числа частиц с хаотически ориентированными в пространстве осями анизотропии, следует

выполнить усреднение полученных компонент тензора по всем возможным значениям полярного и азимутального углов таких осей. Представлена процедура усреднения компонент тензора по полярному и азимутальному углам с постоянным шагом по угловым координатам. С целью обеспечения равномерного пространственного распределения фиксированных значений полярного и азимутального углов построена вспомогательная сфера, на поверхность которой наложена сетка из параллелей и меридианов. В качестве меры, обеспечивающей равномерность распределения угловых координат, использована неизменность расстояний вдоль параллелей сетки между ее соседними узлами как на экваторе, так и по мере приближения к полюсам сферы. Отмечено, что нахождение полной усредненной восприимчивости состоит в вычислении восприимчивости для всех полученных на сфере возможных значений угловых координат, задающих ориентации осей анизотропии, с последующим суммированием полученных значений и делением на общее количество возможных ориентаций. Приведена схема алгоритма численного расчета компонент тензора восприимчивости.

8. Рассмотрены свойства такого, полученного путем усреднения, тензора восприимчивости композиционной среды. Основное внимание уделено его частотным свойствам. Показано, что частотный диапазон всех компонент одинаков и заключен между двумя частотами, соответствующими частотам ферромагнитного резонанса при намагничивании частицы вдоль и поперек оси анизотропии. Вблизи этих крайних частот компоненты имеют выбросы, по высоте ограниченные тем более, чем затухание ферромагнитного резонанса выше. Между этими выбросами имеется более или менее плавный участок, имеющий уровень в несколько раз ниже, чем максимальная амплитуда выбросов.

9. Рассмотрена зависимость формирования плоского участка от величины шага по полярной координате. Показано, что если на величине одного шага частота ферромагнитного резонанса частицы меняется на величину, превышающую ширину линии резонанса в этой частице, то плоский участок компоненты восприимчивости приобретает пилообразный дискретный характер. Отмечено, что такой характер обусловлен суперпозицией резонансных кривых отдельных частиц, соответствующих разным направлениям осей анизотропии, то есть вследствие дискретной ориентации осей расположение резонансных частот также получается дискретным.

10. Исследованы полные зависимости всех компонент тензора от частоты. Отмечено, что в случае усреднения только по одной полярной координате все девять компонент тензора отличны от нуля. Тензор не является диагональным, симметричным или антисимметричным. Все его компоненты являются комплексными, то есть имеют отличные от нуля действительную и мнимую части. По амплитуде значительными являются только те компоненты тензора, которые по своему расположению

соответствуют компонентам тензора для изотропной среды, то есть расположенные на главной диагонали и антисимметричные относительно нее в непосредственной близости. Все остальные компоненты, хотя и отличны от нуля, но имеют величины, меньшие упомянутых примерно на два порядка. Рассмотрены зависимости компонент тензора от поля и величины затухания. Показано, что изменение поля приводит, в основном, к сдвигу крайних частот компонент тензора в соответствии с обычными законами ферромагнитного резонанса. Изменение затухания меняет амплитуду компонент тензора, в первую очередь выбросов на краях частотного диапазона, и в несколько меньшей, хотя и довольно заметной степени — плоских участков.

11. Рассмотрено формирование компонент тензора при усреднении по азимутальному углу ориентаций осей анизотропии частиц. Показано, что при полном равномерном усреднении в полном интервале азимутальных углов от нуля до 360 градусов тензор по свойствам симметричности приобретает вид, полностью совпадающий с видом тензора для изотропной среды. То есть те компоненты, которые при неполном усреднении по азимутальному углу или его отсутствии были на два порядка меньше основных, теперь обращаются в нуль с высокой точностью (до пяти порядков). Рассмотрены характеристики компонент тензора при частичном усреднении по полярному и азимутальному углам. Выявлено нарушение симметрии компонент тензора по частоте при изменении степени упорядоченности, проявляющееся в изменении взаимной высоты и ширины выбросов на краях частотного диапазона. Показана возможность аналитического расчета формирования компонент тензора в частном случае равномерного распределения ориентации осей анизотропии в полном интервале изменения азимутального угла от нуля до 360 градусов.

12. Рассмотрена динамическая восприимчивость композиционной среды, состоящей из специальным образом ориентированных невзаимодействующих анизотропных ферритовых частиц. Показано, что частичное упорядочение ориентации осей анизотропии отдельных частиц обеспечивает возможность формирования граничных частот и перекрываемого частотного интервала тензора восприимчивости. Выявлены условия, при которых такое формирование можно осуществлять независимо по обоим параметрам. Так, изменение величины интервала упорядочения ориентации осей анизотропии частиц по полярному углу позволяет менять диапазон частот без изменения верхней рабочей частоты, а изменение углового положения того же интервала упорядочения позволяет менять рабочую частоту без изменения ширины интервала перекрываемых частот. Показано, что изменение упорядочения ориентации анизотропии частиц по азимутальному углу приводит к появлению дополнительных компонент тензора восприимчивости, отсутствующих в полностью упорядоченной или разупорядоченной среде. Отмечена важность полученных результатов для расширения функциональных возможностей СВЧ устройств.

Глава 9

ПРЕЦЕССИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

Рассмотрение ферромагнитного резонанса в условиях ориентационного перехода в предыдущих главах настоящей монографии ограничивалось чисто линейными задачами, то есть такими, при которых амплитуда колебаний вектора намагниченности предполагались малой по сравнению с его полной длиной. В этой и следующей за ней главах такое ограничение отсутствует, амплитуда колебаний вектора намагниченности может быть произвольной, так что рассматриваемые здесь явления являются заведомо нелинейными.

Настоящая глава посвящена описанию вынужденной нелинейной прецессии вектора намагниченности, имеющей место в условиях ориентационного перехода. Равновесная ориентация намагниченности предполагается обусловленной балансом сил между внешним поем и полем размагничивания. Показано, что при воздействии на такую систему переменным магнитным полем определенной поляризации возможно прецессионное движение равновесного положения намагниченности. Такое движение накладывается на обычную прецессию намагниченности, то есть является как бы прецессией намагниченности второго порядка. Рассмотрены различные характеристики такой прецессии, выявлено несколько принципиально различных нелинейных режимов ее возбуждения. Исследовано влияние несимметричности постоянного и переменного полей, выявлены возможные варианты совместного их взаимно компенсирующего действия.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать работам [266, 297–332], а также монографии [3]. Остальные необходимые ссылки указываются в тексте.

9.1. Общая иллюстрация прецессии положения равновесия

Чтобы по возможности быстро ввести читателя в курс дела, рассмотрим сначала общую картину проявления прецессии положения равновесия, а также простейшую ее качественную интерпретацию на основе векторной модели.

9.1.1. Геометрия задачи и основные уравнения

Рассмотрим безграничную изотропную ферритовую пластину, намагниченную по нормали к ее плоскости. Будем использовать геометрию задачи, введенную в работах [3, 264].

В такой геометрии резонансная частота колебаний намагниченности соответствует дну спектра обменных спиновых волн, когда их параметрическое возбуждение исключается, и прецессия вектора намагниченности может происходить с отклонением от нормали к плоскости пленки на углы в десятки градусов [3, 119–130, 264]. Выбор таких условий позволяет корректно рассматривать прецессию намагниченности при ориентационном переходе, состоящем в повороте вектора намагниченности на углы до 90 градусов, что и сделано далее в настоящей работе.

Итак, общая геометрия задачи показана на рис. 9.1. В ее основе лежит плоскопараллельная магнитная пластина толщины d. Материал пластины имеет кубическую кристаллографическую симметрию, плоскость (100) которой совпадает с плоскостью пластины (слева показана схема ориентации кубической ячейки). Кроме кубической в пластине присутствует одноосная магнитная анизотропия с осью легкого намагничивания (ОЛН) перпендикулярной плоскости пластины. Внешнее постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ приложено перпендикулярно плоскости пластины. В плоскости пластины действует переменное магнитное поле $\mathbf{h}$.

Задача решается в декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью пластины, а оси Ox, Oy и Oz параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат O находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам $z = \pm d/2$.

Рис. 9.1. Геометрия задачи о прецессии положения равновесия намагниченности

Замечание. Следует отметить, что в следующем далее рассмотрении прецессия по толщине пластины предполагается однородной, поэтому точное значение этой толщины в расчетах явно не участвует, используется лишь размагничивающий фактор, равный 4π. Учет точной толщины пластины становится важным, когда в рассмотрение вводятся граничные условия, что, например, необходимо при расчете упругих колебаний [3, 264]. Такое рассмотрение авторы предполагают провести в одной из последующих монографий настоящей серии, посвященной магнитоупругим явлениям. Здесь же толщина введена лишь для общности, чтобы не очень отступать от геометрии задачи, принятой в работах [3, 264].

Будем считать, что внешнее поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \{H_{0x} + h_x; H_{0y} + h_y; H_{0z}\}, \tag{9.1}$$

где $H_{0x,y,z}$ — постоянное подмагничивающее поле, $h_{x,y}$ — компоненты переменного поля, причем положим, что $h_{x,y} < H_{0z}$, а также $H_{0x,y} < H_{0z}$.

Плотность энергии пластины с учетом размагничивающего фактора равна

$$U = -M_0 h_x m_x - M_0 H_{0x} m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_{0y} m_y - \\ - M_0 H_{0z} m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2, \tag{9.2}$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ — нормированный вектор намагниченности, M_0 — намагниченность насыщения.

При $H_{0z} = 0$ вектор намагниченности в равновесном состоянии ориентирован в плоскости пластины, а при $H_{0z} \geqslant 4\pi M_0$ и $H_{0x,y} = 0$ — перпендикулярен этой плоскости. В интервале полей $0 \leqslant H_{0z} \leqslant 4\pi M_0$ при начальной ориентации вектора намагниченности, отличной от равновесной, происходит квазистатическое установление намагниченности путем ориентационного перехода [266, 297]. В равновесии, при $h_x = h_y = 0$, ориентация вектора намагниченности определяется путем минимизации энергии по компонентам намагниченности, в результате чего получаем:

$$m_z = \frac{H_0}{4\pi M_0}, \tag{9.3}$$

откуда, полагая $m_y = 0$, что в силу симметрии задачи всегда можно сделать путем поворота системы координат вокруг оси Oz, находим

$$m_x = \sqrt{1 - m_z^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{4\pi M_0}\right)^2}. \tag{9.4}$$

Угол θ_0 отклонения вектора намагниченности от оси Oz определяется формулой

$$\theta_0 = \arccos(m_z) = \arccos\left(\frac{H_0}{4\pi M_0}\right). \tag{9.5}$$

Для решения задачи о динамическом поведении вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода воспользуемся уравнениями движения намагниченности Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта (2.97)–(2.99):

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_y + \alpha m_x m_z)H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x)H_{ey} - \\ - \alpha(m_y^2 + m_z^2)H_{ex}]; \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_z + \alpha m_y m_x)H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y)H_{ez} - \\ - \alpha(m_z^2 + m_x^2)H_{ey}]; \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_x + \alpha m_z m_y)H_{ey} - (m_y - \alpha m_x m_z)H_{ex} - \\ - \alpha(m_x^2 + m_y^2)H_{ez}], \quad (9.8)$$

где γ — гиромагнитная постоянная ($\gamma > 0$), α — параметр затухания прецессии намагниченности. Входящие в эти уравнения эффективные поля в соответствии с (9.2), имеют вид:

$$H_{ex} = H_{0x} + h_x; \quad (9.9)$$

$$H_{ey} = H_{0y} + h_y; \quad (9.10)$$

$$H_{ez} = H_{0z} - 4\pi M_0 m_z. \quad (9.11)$$

В работах [306–308] показано, что в условиях ориентационного перехода при возбуждении системы переменным полем круговой поляризации

$$h_x = h_0 \sin(2\pi f t); \quad (9.12)$$

$$h_y = -h_0 \cos(2\pi f t), \quad (9.13)$$

где f — частота переменного поля, h_0 — его амплитуда, в определенных обстоятельствах возможна ***прецессия положения равновесия***, состоящая в том, что положение равновесия, вокруг которого прецессирует вектор намагниченности с частотой возбуждения, само прецессирует вокруг направления постоянного поля с частотой, значительно более низкой.

Прецессия положения равновесия не является единственным видом прецессии в условиях ориентационного перехода, однако, ввиду сложности такой прецессии и важности для дальнейшего рассмотрения, остановимся на ней более подробно.

9.1.2. Иллюстрация прецессии положения равновесия

Приведем простейшую иллюстрацию прецессии положения равновесия в условиях ориентационного перехода на основе решения системы уравнений (9.6)–(9.8). Главным условием реализации такой прецессии будет установление величины постоянного поля несколько меньшей величины поля размагничивания, так что вектор намагниченности

в равновесном состоянии ориентирован не точно вдоль поля, а отклонен от него на некоторый угол.

Будем исходить из численного решения система (9.6)–(9.8), выполненного методом Рунге–Кутта. Рассмотрим развитие вынужденных колебаний намагниченности во времени. Результаты расчета иллюстрируются рис. 9.2.

На рис. 9.2, *а*, 9.2, *б* показаны зависимости поперечных компонент намагниченности m_x (сплошная линии) и m_y (пунктир) от времени, на рис. 9.2, *в*, 9.2, *г* — аналогичные зависимости для продольной компоненты намагниченности m_z. На рис. 9.2, *д*, 9.2, *е* приведены прецессионные портреты, как зависимости компоненты m_y от компоненты m_x, когда время является параметром.

Левый столбец (рис. 9.2, *а*, 9.2, *в*, 9.2, *д*) соответствует постоянному полю $H_0 = 265$ Э, то есть на 15 Э меньше поля размагничивания формы $H_m = 4\pi M_0 = 280$ Э, при этом вектор намагниченности в равновесном состоянии отклоняется от оси Oz на 19,46°. Горизонтальные пунктирные линии на рис. 9.2, *а* и 9.2, *в* соответствуют равновесным значениям компонент намагниченности: $m_{xc,yc} = \pm 0{,}34$, $m_{zc} = 0{,}94$, при этом: $m_{xc}^2 + m_{yc}^2 + m_{zc}^2 = 1{,}00$.

Правый столбец (рис. 9.2, *б*, 9.2, *г*, 9.2, *е*) соответствует полю $H_0 = 295$ Э, что на 15 Э больше поля размагничивания формы, то есть вектор намагниченности в равновесном состоянии ориентирован вдоль оси Oz.

Замечание. Следует отметить, что на этом рисунке и везде далее в пределах этой и последующей глав авторы, с целью уменьшения громоздкости обозначений, не приводят наименования единиц «норм. ед.» при компонентах намагниченности $m_{x,y}$, так как подразумевается, что это — нормированные на намагниченность насыщения M_0 полные компоненты вектора намагниченности $M_{x,y}$, то есть $m_{x,y} = M_{x,y}/M_0$, являющиеся безразмерными.

Из рис. 9.2, *а–г*, иллюстрирующих развитие колебаний во времени, видно, что собственные колебания намагниченности, вызванные начальным толчком, затухают при временах порядка $(4\text{–}5) \cdot 10^{-8}$ с, после чего вынужденные колебания принимают стационарный характер. То же относится к рис. 9.2, *д* и 9.2, *е*, где после нескольких начальных витков, обусловленных собственными колебаниями, траектории становятся стационарными. Из сравнения левого и правого столбцов рисунка видно, что в полях, меньшем и большем поля размагничивания, формы колебания намагниченности имеют принципиально различный характер.

Рассмотрим сначала случай $H_0 < 4\pi M_0$ (левый столбец). Из рис. 9.2, *а* видно, что после установления стационарного режима (при $t > 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ с) средние положения поперечных компонент намагниченности m_x и m_y совершают относительно медленные колебания большой амплитуды с периодом $T_c = 4{,}50 \cdot 10^{-7}$ с,

Рис. 9.2. Иллюстрация прецессии положения равновесия. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс; $\alpha = 0{,}3$ (с целью наглядности взяты параметры, типичные для тербиевого феррита-граната); частота переменного поля — $f = 10^8$ Гц; амплитуда переменного поля $h_{0x} = h_{0y} = 3$ Э (поле круговое); начальные значения компонент намагниченности $m_x = m_y = 0$, $m_z = 1$

на которые накладываются более быстрые колебания малой амплитуды с частотой вынуждающей силы, имеющие период $T_0 = 10^{-8}$ с.

Медленные колебания компонент m_x и m_y сдвинуты по фазе относительно друг друга на 90°. Из сравнения быстрых колебаний с пунктирными линиями видно, что амплитуда медленных колебаний определяется положением равновесия намагниченности. Дополнительная проверка показывает, что амплитуда быстрых колебаний определяется амплитудой переменного поля. Размах колебаний m_x на максимуме медленных колебаний (например, при $t = 0{,}97 \cdot 10^{-7}$ с) вверх равен 0,39, вниз — 0,24. Учитывая, что равновесное значение m_x в этой точке равно 0,34, получаем, что вектор намагниченности в процессе быстрых колебаний отклоняется вверх на 0,061, вниз — на 0,097. Отклонения m_y на максимуме медленных колебаний (например при $t = 2{,}09 \cdot 10^{-7}$ с) — те же самые. Отклонения обеих компонент на минимумах медленных колебаний — также те же самые, но симметричные относительно оси Oz (то есть те же с обратным знаком). Таким образом, вектор намагниченности в процессе быстрых колебаний приближается к оси Oz сильнее, чем отклоняется от нее. Учитывая, что угол равновесного отклонения составляет 19,46°, получаем наибольшее удаление от оси Oz: 23,22°, отклонение от равновесия — 3,76°, наибольшее приближение к оси Oz: 13,66°, отклонение от равновесия — 5,79°.

Из рис. 9.2, *в* видно, что при этом продольная компонента намагниченности m_z в стационарном режиме также колеблется с постоянной амплитудой вокруг стационарного равновесного значения (пунктир) с периодом вынуждающей силы $T_0 = 10^{-8}$ с. Амплитуда колебаний этой компоненты также определяется амплитудой переменного поля. Крайние значения компоненты m_z равны 0,97 и 0,92, а отклонения от равновесного значения 0,94 равны 0,029 и 0,024 соответственно.

Из рис. 9.2, *д* видно, что при таком движении равновесное положение вектора намагниченности прецессирует по большому кругу, а сам вектор прецессирует вокруг этого прецессирующего положения по малому кругу. При этом радиус большого круга определяется равновесным отклонением вектора намагниченности от оси Oz, а радиус малого — амплитудой переменного поля. Прецессия равновесного положения по большому кругу происходит с постоянной скоростью, что видно из равномерности заполнения малым кругом пространства своего перемещения, а также следует из синусоидального характера медленных колебаний поперечных компонент намагниченности на рис. 9.2, *а*. Постоянство скорости прецессии равновесного положения обусловлено тем, что равновесное положение вектора намагниченности является безразличным в пределах кругового конуса, ось которого совпадает с осью Oz, а угол раскрыва определяется равновесным отклонением вектора намагниченности от этой оси (здесь — 19,46°), то есть перемещение вектора намагниченности по поверхности этого конуса энергии системы не меняет. Явление напоминает прецессию

гироскопа в поле тяжести с той разницей, что роль вращения маховика гироскопа вокруг собственной оси здесь играет прецессия вектора намагниченности вокруг равновесного положения, то есть происходит как бы «прецессия прецессии», которую можно назвать «прецессией положения равновесия» или «прецессией второго порядка».

Замечание. В рамках настоящей монографии авторы предпочитают пользоваться первым из двух последних наименований, то есть «прецессией положения равновесия». Следует заметить однако, что в литературе выражение «прецессия второго порядка» также встречается достаточно часто. Однако, по мнению авторов, наименование «прецессия положения равновесия» отражает физический смысл явления более конкретно, что и определяет их предпочтение.

Чтобы более наглядно выявить особенности явления, в правом столбце рис. 9.2 для сравнения приведены аналогичные зависимости при постоянном поле, превышающем поле анизотропии формы, то есть при $H_0 > 4\pi M_0$, когда равновесное положение вектора намагниченности совпадает с осью Oz. Из рис. 9.2, *б* и 9.2, *г* видно, что компоненты m_x и m_y в стационарном режиме колеблются на частоте возбуждающей силы с постоянной амплитудой равной 0,15 вокруг нулевого значения, а компонента m_z принимает стационарное значение равное 0,99. Из рис. 9.2, *е* видно, что прецессия вектора намагниченности в стационарном режиме является чисто круговой (утолщенная линия с центром в нуле). При этом угол отклонения вектора намагниченности от оси Oz в процессе прецессии остается постоянным и равным 8,74°.

Таким образом, можно считать, что в поле, большем поля анизотропии формы, характер прецессии вектора намагниченности полностью соответствует классическим представлениям [6–8].

9.1.3. Схема образования прецессии положения равновесия

Рассмотрим теперь общую схему образования прецессии положения равновесия на качественном уровне. Такая схема иллюстрируется рис. 9.3. Слева показана ориентация векторов постоянного $\mathbf{H}_0$ и переменного $\mathbf{h}$ полей. Постоянное поле направлено вдоль оси Oz, переменное — имеет круговую поляризацию и вращается в плоскости Oxy.

В статическом состоянии вектор намагниченности $\mathbf{M}$ ориентируется под полярным углом θ_0 к оси Oz. Это направление задается вектором $\mathbf{L}$, причем в отсутствие переменного поля ориентация этого вектора по азимутальному углу φ произвольна.

При включении переменного поля вектор намагниченности $\mathbf{M}$ начинает прецессировать вокруг своего положения равновесия, определяемого вектором $\mathbf{L}$. Прецессия происходит по малому эллипсу с центром в точке O'', определяемой концом вектора $\mathbf{L}$.

Благодаря различию гироскопических сил, действующих на вектор намагниченности в положениях наибольшего и наименьшего удаления от оси Oz по полярному углу θ, положение равновесия смещается

Рис. 9.3. Общая схема образования прецессии положения равновесия

в сторону, и вектор **L** начинает прецессировать по большому кругу с центром в точке O', то есть происходит прецессия положения равновесия.

При этом конец проекции вектора намагниченности **M** на плоскость Oxy, имеющий длину $\sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, описывает малый эллипс, центр которого движется вокруг точки O по круговой траектории, причем диаметр этой траектории определяется проекцией вектора **L** на плоскость Oxy. В качестве примера некоторые последовательные положения малого эллипса на круговой траектории показаны точечными линиями. Таким образом, на плоскости OM_xM_y образуется прецессионный портрет $M_y(M_x)$, состоящий из малых эллипсов, расположенных в виде кольца по образующей большого круга.

Благодаря неизменности длины M_0 вектора намагниченности **M**, удобно выполнить нормировку его компонент: $m_x = M_x/M_0$, $m_y = M_y/M_0$, в результате чего прецессионный портрет приобретает вид $m_y(m_x)$.

9.1.4. Векторная модель

Рассмотрим теперь схему образования гироскопических сил, действующих на прецессирующий вектор намагниченности в положении, показанном на рис. 9.3. Рассмотрение проведем на основе векторной модели, подобной построенной в работах [396, 397].

Общая схема образования гироскопических сил показана на рис. 9.4. На этом рисунке слева показана магнитная пластина и ориентированное по нормали к ней постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$, а также система координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой параллельна плоскости пластины. Предполагается, что постоянное поле меньше поля размагничивания формы пластины, то есть $H_0 < 4\pi M_0$. Равновесное направление вектора намагниченности в этом случае определяется вектором $\mathbf{L}$, составляющим с осью Oz угол θ, определяемый формулой (9.5). Переменное поле $\mathbf{h}$ приложено в плоскости Oxy, причем предполагается, что это поле поляризовано по кругу, то есть длина вектора $\mathbf{h}$ сохраняется постоянной. При таком возбуждении, в силу сохранения длины вектора намагниченности, прецессия является круговой, то есть конец вектора $\mathbf{M}$ описывает круг в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{L}$, причем сам вектор $\mathbf{M}$ перемещается по поверхности конуса с углом α при вершине. На рисунке показаны два крайних положения вектора намагниченности $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, где $\mathbf{M}_1$ — положение, наиболее удаленное от вектора постоянного поля $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{M}_2$ — наименее удаленное от того же вектора. Для раскачки прецессии переменное поле должно быть направлено наружу относительно конуса прецессии, как это показано соответствующими векторами $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Согласно уравнению Ландау–Лифшица, обусловленные переменным полем производные от намагниченности по времени (скорости изменения намагниченности) $\dfrac{d\mathbf{M}_1}{dt}$ и $\dfrac{d\mathbf{M}_2}{dt}$ в крайних положениях вектора намагниченности направлены в противоположные стороны, то есть результирующая скорость изменения намагниченности по модулю равна:

$$\left|\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right| = \left|\frac{d\mathbf{M}_1}{dt}\right| - \left|\frac{d\mathbf{M}_2}{dt}\right|. \tag{9.14}$$

Рис. 9.4. Схема образования гироскопических сил

В правую часть уравнения Ландау–Лифшица входит векторное произведение вектора намагниченности на вектор поля, модуль которого определяется синусом угла между этими векторами. Углы между векторами намагниченности и поля в крайних положениях вектора намагниченности разные. Схема образования этих углов показана на рис. 9.5.

Рис. 9.5. Схема углов между векторами намагниченности и переменного поля

Рис. 9.5, *а* соответствует векторам $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{h}_1$, угол $\angle OAC$ между которыми равен $90^\circ + (\theta + \alpha)$. Рис. 9.5, *б* соответствует векторам $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{h}_2$, угол $\angle OBD$ между которыми равен $90^\circ - (\theta - \alpha)$. Таким образом, результирующая скорость изменения намагниченности получается пропорциональной

$$v_m \propto \left|\frac{d\mathbf{M}}{dt}\right| \propto M_0 h\{\sin[90^\circ + (\theta + \alpha)] - \sin[90^\circ - (\theta - \alpha)]\}. \qquad (9.15)$$

Преобразуя это выражение, получаем:

$$v_m \propto M_0 h[\cos(\theta + \alpha) - \cos(\theta - \alpha)] = -2M_0 h \sin\theta \sin\alpha. \qquad (9.16)$$

Из общих свойств прецессии, при небольших углах α, по крайней мере в линейном приближении [6–8], следует, что: $\alpha \sim M_{x,y}h$. Подставляя это выражение в формулу для скорости и опуская множитель, пропорциональный намагниченности (так как он определяется свойствами статического равновесия намагниченности), получаем

$$v_m \propto h^2 \sin\theta. \qquad (9.17)$$

Тот факт, что скорость v_m отлична от нуля, можно расценивать как подтверждение того, что весь конус прецессии смещается как целое в направлении, перпендикулярном плоскости, проходящей через вектор постоянного поля $\mathbf{H}_0$ и вектор статического положения намагниченности $\mathbf{L}$. Это и означает что равновесное положение вектора намагниченности прецессирует вокруг направления постоянного поля.

Период прецессии, как время полного оборота конуса вокруг направления постоянного поля, обратно пропорционален скорости v_m, то есть с точностью до постоянного множителя A, зависящего от параметров материала, определяется формулой

$$T = \frac{A}{h^2 \sin\theta}. \tag{9.18}$$

Учитывая (9.5), получаем:

$$T = \frac{A}{h^2 \sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{4\pi M_0}\right)^2}}. \tag{9.19}$$

Из проведенного рассмотрения можно видеть, что векторная модель удовлетворительно объясняет основные особенности движения вектора намагниченности, приведенного в левом столбце рис. 9.2, а именно: участие поперечных компонент m_x и m_y в двух движениях — быстром по малому кругу с частотой переменного поля и медленном по большому кругу со значительно более низкой частотой, а также колебания компоненты m_z с частотой переменного поля. При этом, благодаря сохранению длины вектора намагниченности, медленные колебания m_x и m_y сдвинуты по фазе относительно друг друга на 90°. Видно также, что амплитуда медленных колебаний m_x и m_y определяется равновесным значением намагниченности в постоянном поле, а амплитуда быстрых пропорциональна амплитуде переменного поля.

Можно видеть, что прецессия равновесного положения является беспороговой, то есть происходит при любой сколь угодно малой амплитуде переменного поля, однако при стремлении этой амплитуды к нулю период прецессии стремится к бесконечности, то есть возможность ее наблюдения определяется продолжительностью эксперимента.

9.2. Основные свойства прецессии положения равновесия

Рассмотрим теперь основные свойства прецессии положения равновесия методом машинного моделирования, для чего будем численно решать систему уравнений (9.6)–(9.8) при различных параметрах задачи.

9.2.1. Зависимости периода от постоянного и переменного полей

Рассмотрим сначала зависимости периода прецессии положения равновесия от величин постоянного и переменного полей. Некоторые полученные результаты иллюстрируются рис. 9.6, 9.7.

На рис. 9.6 приведены зависимости периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля $h_{0x,y}$ при различных значениях постоянного поля H_0, рассчитанные по формуле (9.19) (линии) и полученные путем машинного эксперимента (точки).

На врезке точками показаны значения параметра A при различных значениях постоянного поля, полученные из измеренных в ходе машинного эксперимента продолжительностей периода прецессии равновесного положения. Сплошная горизонтальная линия соответствует значению $A = 1{,}45$, которое получено как среднее арифметическое из измеренных значений A в интервале полей от 0 до 240 Э. Полученное значение $A = 1{,}45$ использовано при построении кривых *1–4*.

Из рисунка видно, что кривые *1–4* хорошо совпадают с экспериментальными точками. Кривая *5*, соответствующая полю 272 Э, построена при $A = 1{,}03$. Такой выбор значения параметра A необходим из-за того, что при $A = 1{,}45$ и поле 272 Э расчетная зависимость идет выше экспериментальных точек, как это показано кривой *6*. Соответствующее значение параметра A, требующее совпадения формулы (9.19)

Рис. 9.6. Зависимости периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля при различных значениях постоянного поля H_0: *1* — 0 Э; *2* — 80 Э; *3* — 160 Э; *4* — 240 Э; *5* — 272 Э; *6* — 272 Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс; $\alpha = 0{,}3$; $f = 10^8$ Гц; $h_{0x} = h_{0y} = 3$ Э

Рис. 9.7. Зависимости периода прецессии положения равновесия от величины постоянного поля при различных значениях амплитуды переменного поля $h_{0x,y}$: *1* — 1,50 Э; *2* — 2,25 Э; *3* — 3,00 Э; *4* — 4,50 Э; *5* — 6,00 Э. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.6

с экспериментом, отмечено крайней правой точкой в нижней части врезки в рис. 9.6.

Соответствие экспериментальных точек с расчетными кривыми говорит о том, что все зависимости периода от переменного поля спадают обратно пропорционально квадрату этого поля, как это и следует из общей структуры формулы (9.19). Однако эта формула довольно хорошо (с точностью не менее 5 %) описывает зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля в постоянных полях только до 0,86 от поля анизотропии формы ($4\pi M_0 = 280$ Э), а далее, с той же точностью отражая общий ход кривых, дает несколько завышенные абсолютные значения.

На рис. 9.7 приведены зависимости периода прецессии положения равновесия от величины постоянного поля при различных значениях переменного поля $h_{0x,y}$, рассчитанные по формуле (9.19) (линии) и полученные путем машинного эксперимента (точки). Все расчетные кривые построены при $A = 1{,}45$, что соответствует зависимостям, приведенным на рис. 9.6. Точки при $H_0 = 272$ Э, полученные путем эксперимента, удовлетворяют формуле (9.19) при $A = 1{,}03$. Вертикальная пунктирная линия соответствует $H_0 = 280$ Э (то есть полю анизотропии формы).

Из рисунка видно, что все зависимости периода от постоянного поля возрастают тем быстрее, чем ближе H_0 подходит к полю анизотропии

формы. Такой их ход вполне соответствует обратной зависимости от синуса угла отклонения вектора намагниченности от постоянного поля. При этом формула (9.19) описывает зависимость периода прецессии положения равновесия от постоянного поля также довольно хорошо (не хуже 5 %) в тех же постоянных полях (до 0,86 от поля анизотропии формы), а далее дает значения, также несколько завышенные (как это видно из кривых *3–5*).

9.2.2. Соотношение вынуждающей частоты с собственной

Рассмотрим теперь более тонкие особенности прецессии положения равновесия, выходящие за рамки векторной модели.

Прежде всего, обратим внимание на соотношение частот вынуждающей силы и собственной прецессии вектора намагниченности в отсутствие возбуждения. Если частота возбуждения более чем на 20–30 % превышает частоту собственных колебаний, то при небольшой амплитуде переменного поля период прецессии положения равновесия обратно пропорционален квадрату этой амплитуды, в полном согласии с векторной моделью. Однако, если амплитуда возбуждения увеличивается, то при достижении некоторого порога происходит срыв прецессии положения равновесия и она заменяется на простую круговую прецессию вектора намагниченности с большой амплитудой вокруг направления постоянного поля. Порог срыва прецессии положения равновесия по амплитуде переменного поля является достаточно резким и составляет менее 1–2 % по амплитуде переменного поля. Если теперь зафиксировать амплитуду переменного поля и менять его частоту, начиная с самых низких частот, то сначала наблюдается обычная прецессия с большой амплитудой, но при достижении некоторой критической частоты обычная прецессия заменяется прецессией положения равновесия, причем порог по частоте также довольно резкий (единицы МГц).

Причина такого поведения вектора намагниченности следующая. Предположим, что частота переменного поля выше резонансной частоты линейной собственной прецессии намагниченности. Тогда при малой амплитуде возбуждения колебания вектора намагниченности являются линейными и, так как постоянное поле меньше поля размагничивания пластины, то возбуждается прецессия положения равновесия. При увеличении амплитуды переменного поля резонансная кривая вынужденных колебаний намагниченности за счет расстроечного механизма расширяется и наклоняется в сторону высоких частот. При этом ее высокочастотный край становится резким, приобретает скачкообразный вид и при увеличении поля смещается вверх по частоте. Когда резкий край резонансной кривой достигает частоты переменного поля, эта частота попадает в резонанс и создаются условия для возбуждения простой резонансной круговой прецессии намагниченности. Амплитуда этой прецессии может превосходить равновесное отклонение намагниченности от постоянного поля. В этом случае прецессия положения

равновесия срывается и заменяется простой чисто круговой прецессией намагниченности с большой амплитудой.

Сказанное иллюстрируется рис. 9.8, где показаны зависимости периода колебаний положения равновесия (*а*) и размаха колебаний намагниченности (*б*) от частоты переменного поля при различных его величинах. Рассматриваемый здесь размах колебаний представляет собой сумму максимальных отклонений намагниченности с частотой возбуждающей силы в плоскости Oxy в обе стороны от прецессирующего или неподвижного положения равновесия. Поскольку эти отклонения по величине различаются, имеет смысл рассматривать именно размах колебаний вместо традиционно используемой амплитуды. В определенном приближении можно считать, что в отсутствие прецессии положения равновесия этот размах определяется диаметром движения намагниченности вокруг направления постоянного поля. Когда же прецессия положения имеет место, то размах определяется диаметром прецессии вокруг прецессирующего положения равновесия. То есть, например, на рис. 9.2, *а* первый размах соответствует амплитуде большой синусоиды, а второй — малой.

Кривые на рис. 9.8, *а* ниже определенной критической частоты F_c, различной для каждой кривой, уходят на бесконечность, что означает стационарное во времени положение равновесия. То есть в этих случаях прецессия положения равновесия при $F < F_c$ отсутствует, а вместо

Рис. 9.8. Зависимости периода прецессии положения равновесия (*а*) и размаха колебаний намагниченности (*б*) от частоты переменного поля при различных значениях его амплитуды $h_{0x,y}$: *1* — 1,5 Э; *2* — 3,0 Э; *3* — 4,5 Э; *4* — 6,0 Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_0 = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$

нее имеется обычная круговая прецессия с равновесным положением намагниченности вдоль поля. Выше критической частоты положение равновесия прецессирует, причем период его прецессии с повышением частоты увеличивается.

Из рисунка видно, что значение критической частоты тем выше, чем больше амплитуда переменного поля.

Кривые на рис. 9.8, *б* в определенной степени представляют собой резонансные характеристики вынужденных колебаний намагниченности в нелинейном режиме. Видно, что эти резонансные характеристики со стороны высоких частот имеют резкий спад, обусловленный расстроечным механизмом ограничения амплитуды нелинейных колебаний [6–8, 398]. Хотя надо сказать, что здесь расстройка проявляется не столько в простом изменении частоты, сколько в замене спокойной прецессии вихреобразной, соответствующей прецессии второго порядка. Из рисунка видно, что частота спада тем выше, чем больше амплитуда переменного поля.

Из сравнения рис. 9.8, *а* и 9.8, *б* видно, что частота, при которой на смену обычной прецессии приходит прецессия положения равновесия (рис. 9.8, *а*) точно совпадает с частотой спада резонансной кривой вынужденных колебаний (рис. 9.8, *б*), что и подтверждает описанную выше картину срыва прецессии положения равновесия при увеличении амплитуды переменного поля или при уменьшении его частоты.

Замечание. Следует заметить, что пороги срыва прецессии при изменении как амплитуды, так и частоты переменного поля не являются бесконечно резкими. В ближайшей окрестности обоих порогов наблюдается переходный режим, при котором положение равновесия совершает сложные, нерегулярные, близкие к хаотическим движения, скачкообразно переходя от одного состояния колебаний к другому. Как по амплитуде, так и по частоте такая окрестность составляет не более 2–3 % от самого порогового значения.

9.2.3. Критическое значение частоты возбуждения

Из проведенного рассмотрения следует, что возбуждение прецессии равновесия имеет место только при превышении частотой возбуждения некоторого критического значения, определяемого минимумом кривых на рис. 9.8, *а*. Можно видеть, что по мере увеличения уровня возбуждения критическое значение частоты возрастает (это показано далее на рис. 9.10 и описывается формулой (9.20)).

Таким образом, если при заданном уровне частота возбуждения ниже критической, то имеет место простая круговая прецессия намагниченности вокруг направления постоянного поля по конусообразной траектории. При этом положение равновесия всегда остается на месте, в полном соответствии с направлением постоянного поля. Амплитуда прецессии может ограничиваться расстроечным механизмом, как это отмечалось при рассмотрении левых ветвей кривых на рис. 9.8, *б*.

Если при том же уровне возбуждения частота возбуждения превышает критическую, то такое ровное спокойное прецессионное движение намагниченности по конусу вокруг стационарного положения равновесия нарушается, положение равновесия само начинает прецессировать по своему собственному конусу, а вектор намагниченности продолжает описывать свой первичный конус вокруг такого прецессирующего положения равновесия.

То есть стационарное движение вектора намагниченности претерпевает возмущение вихревого характера, что и проявляется как появление малых колец вокруг большого на прецессионном портрете (рис. 9.2, *д*). Заметим, что факт существования такого возмущения определяется как амплитудой возбуждающего сигнала, так и его частотой, которая при заданном уровне должна быть выше критической. Однако для амплитуды возбуждения критический характер ее уровня здесь не просматривается. При малой амплитуде возбуждения период прецессии положения равновесия стремится к бесконечности (как это отмечено при рассмотрении формулы (9.19) и видно из рис. 9.6), то есть возможность наблюдения такой прецессии определяется доступной экспериментатору реальной продолжительностью эксперимента.

Рассмотрим еще несколько подробнее качественную сторону формирования критического значения частоты.

Из рис. 9.8, *а* видно, что область существования прецессии положения равновесия при увеличении частоты смещается в сторону больших амплитуд переменного поля.

Такое смещение можно объяснить тем, что факт существования прецессии положения равновесия определяется движением вектора намагниченности по энергетической поверхности, то есть зависит только от размаха колебаний вектора намагниченности, но не от частоты. Можно полагать, что при увеличении частоты вектор намагниченности не успевает следовать за переменным полем, поэтому для достижения того же размаха колебаний требуется увеличивать амплитуду переменного поля. То есть, для достижения одного и того же размаха более высокая частота требует большей амплитуды переменного поля.

Можно полагать, что имеет место и обратное соотношение. То есть при фиксированной амплитуде переменного поля вектор намагниченности при низкой частоте возбуждения вполне хорошо успевает следовать в точности за вращающимся переменным полем, образуя правильный конус с гладкими стенками, соответствующий большому кольцу прецессии. Однако по мере увеличения частоты вектор намагниченности, вследствие собственной инерционности, начинает отставать от вращающегося поля, причем отставание становится тем больше, чем частота выше. Наконец частота становится настолько высокой, что вектор намагниченности не успевает совершить даже половину полного оборота за время периода переменного поля, так что еще до прохождения этой половины переменное поле снова начинает его тянуть в обратную сторону, возвращая к прежнему положению. Под действием такой тяги

вектор намагниченности совершает неполный виток, не захватывающий в себя ось, соответствующую направлению постоянного поля. Такой виток и проявляется на прецессионном портрете как малое кольцо на периферии большого.

Вследствие цикличности действия переменного поля за первым малым витком следует второй, затем третий и так далее. Вектор намагниченности все же сохраняет некоторую тенденцию перемещаться по большому кольцу, то есть каждый «рывок» переменного поля все же продвигает его в какой-то степени вперед. Однако такое поступательное движение теперь происходит медленно, так как главенствующую роль приобретает вихреобразное движение вектора намагниченности по следующим друг за другом малым виткам. Эти малые витки и дают малые кольца на прецессионном портрете, а большое кольцо образуется за счет теперь уже замедленного перемещения вектора намагниченности по тому конусу, раствор которого определяется отклонением равновесного положения намагниченности от направления постоянного поля.

Таким образом, частота, при которой вектор намагниченности за время периода изменения переменного поля не успевает пройти по большому конусу половину полного круга прецессии, так что образует в своем движение своеобразное «завихрение», как раз и является критической частотой, при которой простая прецессия переходит в прецессию положения равновесия.

При увеличении амплитуды переменного поля оно в какой-то степени преодолевает инерционность вектора намагниченности и «гоняет» его по большому кругу успешнее, вследствие чего отставание вектора от вращающегося поля уменьшается и начавшее было образовываться завихрение пропадает. То есть теперь уже для формирования завихрения требуется более быстрое вращение поля, то есть более высокая частота.

Таким образом, критическое значение частоты по мере увеличения амплитуды поля также увеличивается, что и отражает сдвиг кривых в правую сторону по рис. 9.8, *а*.

Падение размаха колебаний, наблюдаемое на рис. 9.8, *б* обусловлено тем, что до возбуждения прецессии положения равновесия этот размах определяется диаметром больших колец прецессионного портрета, а после возбуждения — уже диаметром малых.

Замечание. Следует отметить, что аналитический анализ критической частоты возбуждения в рамках представленных здесь моделей, по-видимому, требует более углубленного их совершенствования или даже создания каких-то новых моделей, что авторы настоящей монографии оставляют в качестве предмета для будущих исследований. Здесь же далее будут рассмотрены другие свойства прецессии положения равновесия в предположении, что частота возбуждения свое критическое значение заведомо превышает.

9.2.4. Влияние диссипации на параметры прецессии положения равновесия

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает диссипация колебаний намагниченности на основные характеристики прецессии положения равновесия.

Обратимся к рис. 9.9, где показаны зависимости времени затухания собственных колебаний τ и периода прецессии положения равновесия T от величины параметра затухания α, входящего в уравнения (9.6)–(9.8).

Врезка в этот рисунок иллюстрирует схему определения времени затухания собственных колебаний намагниченности. Показаны зависимости компоненты намагниченности m_x от времени (зависимость для m_y аналогична со сдвигом по фазе). Верхний рисунок врезки соответствует собственным колебаниям намагниченности при $H_0 = 295$ Э, то есть в случае $H_0 > 4\pi M_0$ (где $4\pi M_0 = 280$ Э). Нижний рисунок врезки соответствует вынужденным колебаниям намагниченности при $H_0 = 265$ Э, то есть в случае $H_0 < 4\pi M_0$. Видно, что в обоих случаях собственные колебания прекращаются при времени $t \approx 0{,}2$ мкс, после чего в первом случае намагниченность устанавливается вдоль направления поля, а во втором начинается прецессия положения равновесия.

Рис. 9.9. Зависимости времени затухания собственных колебаний τ (кривая *1*, левая шкала) и периода прецессии положения равновесия T (кривая *2*, правая шкала) от величины параметра затухания α. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_0 = 265$ Э, $h_{0x,y} = 3$ Э, $f = 100$ МГц. Изображение на врезке поясняется в тексте

Из основного рисунка видно, что период прецессии положения равновесия при значениях параметра затухания α меньше 0,2 от величины этого параметра не зависит, а при дальнейшем увеличении параметра затухания увеличивается тем быстрее, чем параметр затухания больше. При этом время затухания собственных колебаний по мере увеличения параметра затухания при его значениях меньше 0,2 резко спадает, после чего спад замедляется и, начиная с величины параметра 0,6, выходит на горизонтальный участок. Проверка показала, что, начиная с $\alpha \approx 0{,}2$, собственная прецессия совершает не более одного полного оборота, а начиная с $\alpha \approx 0{,}4$, прецессия становится полностью апериодической, то есть в процессе собственных колебаний знаки компонент намагниченности $m_{x,y}$ не меняются. Таким образом, можно видеть, что период прецессии положения равновесия при малом затухании ($\alpha < 0{,}2$), когда прецессия является периодической, от величины параметра затухания не зависит, а при увеличении затухания ($\alpha > 0{,}2 \ldots 0{,}4$), когда прецессия становится апериодической, увеличивается тем быстрее, чем параметр затухания больше. Такое поведение аналогично увеличению периода простой колебательной системы при увеличении затухания, то есть, чем труднее становится двигаться маятнику, тем он движется медленнее [398–400].

9.2.5. Влияние намагниченности на параметры прецессии положения равновесия

Рассмотрим теперь, как зависят свойства прецессии положения равновесия от такого важного параметра среды, как намагниченность насыщения M_0.

Все до сих пор описанные результаты относятся к намагниченности равной $M_0 = 22$ Гс ($4\pi M_0 = 280$ Гс), близкой к таковой для тербиевого феррита-граната (ТбФГ) [259]. Такой выбор был обусловлен удобством машинного счета в реальном масштабе времени и сравнительно небольшим требуемым объемом машинной памяти. Однако, с прикладной стороны, по-видимому, наиболее интересен железоиттриевый гранат (ЖИГ), для которого $M_0 = 139{,}26$ Гс ($4\pi M_0 = 1750$ Гс) [6–8,259,296]. Очевидно, при изменении намагниченности резонансная частота собственных колебаний также меняется, что должно привести к изменению соотношения между критическими значениями частоты и амплитуды переменного поля, необходимыми для перехода от обычной круговой прецессии к прецессии положения равновесия.

Полученные зависимости критической частоты f_c от амплитуды переменного поля $h_{0x,y}$ при различных намагниченностях насыщения M_0 показаны на рис. 9.10. При построении этих кривых поле H_0 подбиралось таким, чтобы равновесный угол отклонения намагниченности от оси Oz был одним и тем же, равным $19{,}1^\circ \pm 0{,}4^\circ$. Параметры кривой *1* близки к таковым для ТбФГ, кривой *4* — для ЖИГ. Для каждой кривой выше нее располагается область, где возбуждается прецессия положения равновесия, ниже — область с обычной круговой прецессией.

Рис. 9.10. Зависимости критической частоты, выше которой наблюдается прецессия положения равновесия, от амплитуды переменного поля при различных значениях намагниченности насыщения и постоянного поля: 1 — $M_0 = 20$ Гс ($4\pi M_0 = 251$ Гс), $H_0 = 237$ Э; 2 — $M_0 = 60$ Гс ($4\pi M_0 = 754$ Гс), $H_0 = 711$ Э; 3 — $M_0 = 100$ Гс ($4\pi M_0 = 1257$ Гс), $H_0 = 1186$ Э; 4 — $M_0 = 140$ Гс ($4\pi M_0 = 1760$ Гс), $H_0 = 1660$ Э. Параметр затухания: $\alpha = 0{,}3$. Изображение на врезке поясняется в тексте

Из рисунка видно, что критическая частота с увеличением амплитуды переменного поля увеличивается тем сильнее, чем больше намагниченность насыщения. Можно отметить, что зависимости критической частоты от амплитуды переменного поля с точностью порядка 10% пропорциональны квадратному корню из амплитуды переменного поля:

$$f_c \propto \sqrt{h_{0x,y}}\,. \tag{9.20}$$

Приведенные на рис. 9.10 кривые построены при параметре затухания $\alpha = 0{,}3$. Однако для монокристаллического ЖИГ этот параметр может быть более чем на порядок меньше. Дополнительное исследование показало, что при изменении параметра затухания α критическая частота f_c также несколько меняется. Для иллюстрации этого эффекта на врезке показана зависимость критической частоты от параметра затухания при $M_0 = 140$ Гс ($4\pi M_0 = 1760$ Гс), $H_0 = 1660$ Э, $h_{0x,y} = 10$ Э. Видно, что при стремлении α к нулю критическая частота принимает постоянное значение, а при увеличении α — уменьшается тем быстрее, чем больше α. Так при $\alpha = 0{,}01$ критическая частота при том же значении $h_{0x,y}$ равна 267 МГц, при $\alpha = 0{,}10$ — 260 МГц, при $\alpha = 0{,}40$ — 170 МГц.

9.3. Мультирежимный характер прецессии положения равновесия

В процессе исследования прецессии положения равновесия было выявлено, что по мере увеличения амплитуды переменного поля h_0 наблюдаются последовательно сменяющие друг друга пять принципиально различных режимов прецессии: малоамплитудная круговая прецессия, прецессия положения равновесия без охвата центра, незатухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, затухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, развернутая круговая прецессия.

9.3.1. Развитие колебаний во времени и прецессионные портреты для различных режимов

Развитие колебаний во времени и соответствующие прецессионные портреты $m_y(m_x)$ для всех пяти режимов иллюстрируются рис. 9.11–9.15, при построении которых использовались параметры материала типичные для тербиевого феррита-граната. Постоянное поле, обеспечивающее условия ориентационного перехода, было ниже поля размагничивания на 20 Э. Амплитуда переменного поля круговой поляризации h_0 менялась от нуля до 100 Э, его частота была выше критической и составляла $f = 200$ МГц. Рисунки относятся к наиболее простому, симметричному относительно оси Oz случаю, когда постоянное поле направлено точно перпендикулярно плоскости пластины, то есть $H_{0x,y} = 0$ Э.

На всех рисунках 9.11–9.15 буквой «*а*» (левый рисунок) обозначено происходящее после включения переменного поля развитие во времени колебаний компонент намагниченности $m_x(t)$ (сплошные линии) и $m_y(t)$ (пунктирные линии). При этом быстрые колебания отражают прецессию вектора намагниченности с частотой переменного поля, медленные — прецессию положения равновесия, частота которых значительно ниже. На тех же рисунках буквой «*б*» (правый рисунок) обозначены соответствующие прецессионные портреты $m_y(m_x)$, построенные в том же интервале времени. На рис. 9.11 масштаб по компонентам намагниченности m_x и m_y укрупнен с целью наглядности.

Рассмотрим различные режимы прецессии по отдельности, следуя рис. 9.11–9.15.

Режим № 1 — *малоамплитудная круговая прецессия* (рис. 9.11). Этот режим является предельным случаем прецессии намагниченности при амплитуде переменного поля, стремящейся к нулю, $h_0 \to 0$. Рис. 9.11 построен при $h_0 = 1$ Э (то есть при $h_0 \ll H_0$).

Вектор намагниченности прецессирует по малому кругу вокруг положения равновесия, которое определяется окончанием процесса установления со временем релаксации около $0{,}4 \cdot 10^{-7}$ с. Результирующая ориентация положения равновесия по азимутальному углу определяется

Рис. 9.11. Развитие колебаний во времени (*а*) и прецессионный портрет (*б*) при амплитуде возбуждающего поля $h_0 = 1$ Э. Режим № 1 — малоамплитудная круговая прецессия. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $\alpha = 1{,}2$; $H_{0z} = 260$ Э; $f = 200$ МГц

начальными условиями и может быть произвольной. В отсутствие составляющей постоянного поля в плоскости пластины эта ориентация является вырожденной, то есть никак не закреплена, поэтому равновесное положение вектора намагниченности начинает прецессировать при сколь угодно малой амплитуде переменного поля, причем период прецессии положения равновесия при $h_0 \to 0$ стремится к бесконечности. Для наглядной иллюстрации этого режима при построении рис. 9.11 амплитуда переменного поля была выбрана столь малой (1 Э), чтобы за время наблюдения ($2{,}5 \cdot 10^{-7}$ с) кольцо на прецессионном портрете не успело сместиться на заметную величину (период прецессии равновесия при $h_0 = 1$ Э составляет $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ с). Поэтому портрет на рис. 9.11, *б* представлен малым кольцом с центром при $m_x = -0{,}23$, $m_y = 0{,}29$. По прошествии достаточного времени (соизмеримого с 10^{-4} с) это малое кольцо перемещается по кругу радиусом $m_s = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = 0{,}37$, что соответствует режиму № 2. Таким образом, рассматриваемый режим является неустойчивым и представляет собой предельный случай режима № 2 при $h_0 \to 0$.

Однако в более сложном несимметричном случае, когда постоянное поле имеет составляющую в плоскости пластины, вырождение ориентации равновесного положения намагниченности снимается, и в отсутствие переменного поля ориентация вектора намагниченности становится вполне определенной. Благодаря этому режим малоамплитудной круговой прецессии № 1 перестает быть предельным случаем режима № 2, становится устойчивым и реализуется в определенном ненулевом интервале амплитуд переменного поля, тем большем, чем больше составляющая постоянного поля в плоскости пластины.

Режим № 2 — *прецессия положения равновесия без охвата центра* (рис. 9.12). Этот режим реализуется при амплитуде переменного поля в интервале: $0 < h_0 < 28$ Э. Рис. 9.12 соответствует $h_0 = 20$ Э.

Рис. 9.12. Развитие колебаний во времени (*а*) и прецессионный портрет (*б*) при амплитуде возбуждающего поля $h_0 = 20$ Э. Режим № 2 — прецессия положения равновесия без охвата центра. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.11

Положение равновесия прецессирует вокруг направления поля, средняя линия быстрых колебаний намагниченности периодически колеблется вокруг нулевой линии, причем при максимальных отклонениях быстрые колебания нулевой линии не достигают. Прецессионный портрет имеет вид широкого кругового кольца, заполненного по образующей малыми кольцами, радиусы которых меньше внешнего радиуса основного кольца. Свободная от траекторий незаполненная сердцевина основного кольца, образованная касательной к малым кольцам, расположена вне малых колец.

Режим № 3 — *прецессия положения равновесия с охватом центра* (рис. 9.13). Этот режим реализуется при амплитуде переменного поля в интервале: 28 Э $< h_0 < 37$ Э. Рис. 9.13 соответствует $h_0 = 35$ Э.

Амплитуда колебаний прецессии стационарна во времени. Положение равновесия прецессирует вокруг направления постоянного поля, средняя линия быстрых колебаний намагниченности периодически колеблется вокруг нулевой линии, причем быстрые колебания всегда пересекают нулевую линию. Прецессионный портрет имеет вид широкого основного кругового кольца, заполненного по образующей малыми кольцами, радиусы которых больше внутреннего радиуса основного кольца. Свободная от траекторий незаполненная сердцевина основного кольца, образованная касательной к малым кольцам, расположена внутри малых колец.

Рис. 9.13. Развитие колебаний во времени (*а*) и прецессионный портрет (*б*) при амплитуде возбуждающего поля $h_0 = 35$ Э. Режим № 3 — незатухающая прецессия положения равновесия с охватом центра. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.11

Режим № 4 — *прецессия положения равновесия с охватом центра, амплитуда колебаний которой затухает во времени* (рис. 9.14). Этот режим реализуется при амплитуде переменного поля в интервале: 37 Э $< h_0 <$ 43 Э. Рис. 9.14 соответствует $h_0 = 38$ Э.

Положение равновесия в начальный момент времени после включения переменного поля сначала прецессирует с затуханием, после чего постепенно останавливается, средняя линия быстрых колебаний намагниченности совпадает с нулевой линией. Прецессионный портрет начального этапа колебаний имеет вид широкого кругового кольца,

Рис. 9.14. Развитие колебаний во времени (*а*) и прецессионный портрет (*б*) при амплитуде возбуждающего поля $h_0 = 38$ Э. Режим № 4 — затухающая прецессия положения равновесия с охватом центра. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.11

заполненного вдоль образующей малыми кольцами, радиусы которых больше внутреннего радиуса основного кольца и приближаются к нему, в результате чего основное кольцо имеет как бы размазанную образующую. С течением времени ширина размазанной образующей основного кольца уменьшается и прецессионный портрет стремится к стационарному состоянию в виде большого основного кольца с небольшой размазкой. Свободная от траекторий незаполненная сердцевина основного кольца, образованная касательной к малым кольцам, расположена внутри малых колец.

Режим № 5 — *развернутая круговая прецессия вектора намагниченности* (рис. 9.15). Этот режим реализуется при амплитуде переменного поля в интервале: $43\ Э < h_0 < \infty$. Рис. 9.15 соответствует $h_0 = 70$ Э.

Рис. 9.15. Развитие колебаний во времени (*а*) и прецессионный портрет (*б*) при амплитуде возбуждающего поля $h_0 = 70$ Э. Режим № 5 — развернутая круговая прецессия вектора намагниченности. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.11

Положение равновесия неподвижно и ориентировано вдоль оси Oz, средняя линия быстрых колебаний совпадает с нулевой линией. Прецессионный портрет имеет вид узкого кругового кольца, ширина образующей которого стремится к нулю, а диаметр по мере увеличения амплитуды переменного поля плавно увеличивается. Предельным случаем этого режима, реализуемым при амплитудах переменного поля более 150–200 Э, является полностью развернутая круговая прецессия, при которой вектор намагниченности прецессирует по кругу вблизи плоскости пластины.

9.3.2. Некоторые особенности отдельных режимов

Основные результаты, описанные в предыдущих разделах 9.1 и 9.2, относятся к режимам № 2 и № 3, причем различие между ними, хотя

и упоминается, но подробно не рассматривается, режим № 4 вообще не рассмотрен, а режим № 5 характеризуется как «срыв прецессии положения равновесия».

Добавим небольшое замечание, чтобы точнее охарактеризовать соотношение между режимами № 2 и № 3. В обоих случаях прецессионный портрет представляет собой большое кольцо, заполненное спиралью, образованной последовательно смещающимися малыми кольцами. В зависимости от соотношения амплитуд прецессии положения равновесия и прецессии вектора намагниченности возможны два различных случая:

а — диаметр малых колец меньше радиуса большого кольца, при этом внутренняя сторона большого кольца касается малых колец извне;

б — диаметр малых колец больше радиуса большого кольца, при этом внутренняя сторона большого кольца касается малых колец изнутри.

В обоих случаях на прецессионном портрете в середине большого кольца имеется круглая незаполненная сердцевина, которая при точном равенстве диаметра малых колец радиусу большого кольца вырождается в точку. Выражения «без охвата центра» и «с охватом центра» введены здесь для удобства, однако принципиальной разницы между этими режимами немного. То есть в значительной степени различие между режимами соответствует различию амплитуд прецессии по малым кольцам, тогда как физика процесса остается единой. Поэтому переход от одного режима к другому при изменении амплитуды переменного поля происходит плавно, какие-либо скачки и гистерезис полностью отсутствуют. Более подробно такой переход объясняется далее в разделе, посвященном модели потенциала.

9.4. Механическая аналогия прецессии положения равновесия

Изложенный выше материал позволяет уже в общих чертах понять основные свойства прецессии положения равновесия. Явление с физической стороны на первый взгляд представляется несколько необычным, поэтому сделаем небольшое отступление и обратимся к интерпретации сходной механической модели, позволяющей понять основные свойства прецессии на интуитивном уровне.

9.4.1. Плоский маятник с боковым пружинным подвесом

Рассмотрим сначала механический маятник, представляющий собой груз, подвешенный на жестком стержне, один из концов которого закреплен шарнирным образом. Схема маятника показана на рис. 9.16. Груз обозначен буквой M, жесткий стержень закреплен в точке A с возможностью качания в одной плоскости. Система координат Oxz выбрана в этой плоскости и ориентирована таким образом, что ось Oz совпадает с направлением действия силы тяжести. К грузу прикреплен пружинный подвес, другой конец которого шарнирно закреплен

Рис. 9.16. Плоский механический маятник с боковым пружинным подвесом

в точке B, находящейся выше точки A, причем линия AB параллельна оси Oz.

В свободном состоянии на маятник действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{P}$, направленная вниз вдоль оси Oz и сила натяжения пружинного подвеса $\mathbf{T}$, направленная вверх вдоль линии, соединяющей точки B и M. Взаимное противодействие этих сил, в сочетании с жесткостью стержня AM, в состоянии покоя маятника вызывает его отклонение от оси Oz на угол θ. Благодаря симметрии геометрии системы, имеются два симметричных относительно оси Oz устойчивых положения равновесия — в точках M и M' (второе показано слева пунктиром).

Такое отклонение оси маятника от направления силы тяжести аналогично отклонению вектора намагниченности от оси анизотропии под действием поля, перпендикулярного этой оси. То есть ситуация с физической стороны полностью подобна состоянию ориентационного перехода (раздел 5.1).

В процессе колебаний маятник при переходе от положения M к положению M' должен пройти через ориентацию стержня AM, параллельную оси Oz, то есть пружина подвеса BM при таком пересечении должна несколько растянуться. То есть сила $\mathbf{T}$ в этом случае несколько возрастает. Такое растяжение пружины вызывает увеличение ее потенциальной энергии. Так что потенциал U системы в целом, в зависимости от координаты x имеет вид, показанный ниже на этом же рисунке. Таким образом, к обычному возрастанию потенциала по обе стороны при удалении от оси симметрии системы, связанному с подъемом груза M

в поле силы тяжести, добавляется центральный максимум, обусловленный дополнительным растяжением пружины подвеса. Так что потенциал приобретает вид двух минимумов, расположенных симметрично от центрального максимума. В состоянии покоя маятник занимает одно из двух возможных равновесных положений, так что значение потенциала соответствует одному из двух минимумов.

Будем полагать теперь, что на маятник в направлении оси Ox действует сила $\mathbf{F}$, знак которой периодически меняется во времени. Эта сила выталкивает маятник из того или иного положения устойчивого равновесия, так что потенциал в такт действию силы периодически увеличивается. Такая сила, в зависимости от своей величины, может вызвать колебания двух видов.

Во-первых, если сила слабая, так что вызываемый ею периодический рост уровня потенциала не достигает высоты центрального максимума, как например показанный на рисунке уровень U_1, то колебания происходят в потенциальной яме между точками G_1 и G_2. Амплитуда таких колебаний остается достаточно малой и система колеблется только вокруг одного единственного из двух возможных положений равновесия.

Во-вторых, если сила настолько велика, что уровень потенциала превышает высоту центрального максимума, как например U_2, то колебания происходят в более широкой потенциальной яме между точками H_1 и H_2. Амплитуда таких колебаний значительно больше, чем в первом случае, так что система колеблется от одного положения равновесия до другого.

Оба эти вида колебаний аналогичны описанным выше режимам прецессии положения равновесия намагниченности (раздел 9.3). Так, первый вид аналогичен режиму № 1 — малоамплитудной круговой прецессии, а второй — аналогичен режиму № 5 — развернутой круговой прецессии. Режимы № 2–№ 4, представляющие собой собственно прецессию положения равновесия, в рассматриваемом плоском маятнике не реализуются, что связано с его чисто плоскостным характером. Для реализации этих режимов необходим выход маятника из плоскости, аналогичный выходу из плоскости прецессирующего вектора намагниченности. То есть маятник должен иметь цилиндрическую симметрию. Рассмотрение такого маятника будет выполнено в следующем разделе.

9.4.2. Цилиндрический маятник с боковым пружинным подвесом

Рассмотрим теперь механический маятник, аналогичный предыдущему, но в отличие от него допускающий свободное вращение вокруг вертикальной оси, на которой закреплены концы стержня и пружинного подвеса. Схема такого маятника показана на рис. 9.17. Основные обозначения совпадают с приведенными на рис. 9.16. Система координат $Oxyz$ теперь является трехмерной, то есть имеет третью ось Oy, перпендикулярную двум первым.

Главное отличие от предыдущего случая состоит в том, что теперь маятник может свободно вращаться вокруг оси Oz. При этом

Рис. 9.17. Цилиндрический механический маятник с боковым пружинным подвесом

в свободном состоянии у него имеется не два устойчивых положения равновесия, а бесчисленное множество, располагающихся на окружности, плоскость которой совпадает с плоскостью Oxy, а радиус равен равновесному отклонению маятника на рис. 9.16 от оси Oz.

Соответственно потенциал теперь является не плоскостным, а объемным, имеющим цилиндрическую симметрию, то есть он образован вращением плоскостного потенциала на рис. 9.16 вокруг оси Oz. Такой потенциал имеет не два минимума, а целую кольцевую «канаву»

минимумов одинаковой глубины, окружающую единый осесимметричный «холм», возвышающийся посередине кольца, образованного такой канавой. Вид потенциала сверху (при взгляде вдоль оси Oz) показан на рис. 9.17 внизу. Можно видеть, что этот вид представляет собой систему концентрических колец, соответствующих разным уровням потенциала.

Важнейшим отличием от плоскостного случая является здесь ориентация возбуждающей силы $\mathbf{F}_P$ не вдоль оси Ox, как на рис. 9.16, а по касательной к кольцу, образованному вращением равновесного положения груза маятника вокруг оси Oz. Эта сила теперь имеет постоянную величину, но направление ее меняется в соответствии с изменением направления касательной к упомянутому кольцу.

В отсутствие затухания такая сила вызвала бы ускоренное движение груза маятника, поэтому, чтобы обеспечить равномерное движение (необходимое для аналогии с движением намагниченности), следует ввести силу трения $\mathbf{F}_C$, которая в общем случае должна быть пропорциональна скорости движения груза. Схема расположения этих сил показана несколько ниже основной орбиты на рисунке, что сделано для ясности изображения. При этом надо учитывать, что точка M' по своей физической сущности тождественна точке M. Таким образом, на груз действует непрерывная по времени сила, равная разности $\mathbf{F}_P - \mathbf{F}_C$, сохраняющая постоянную величину и вращающаяся вокруг оси Oz вместе с грузом.

В случае магнитной задачи такая сила создается перпендикулярным постоянному переменным магнитным полем круговой поляризации. Такое поле, будучи направленным по радиусу кольца, благодаря гиротропии вектора намагниченности (в соответствии с уравнением Ландау–Лифшица), заставляет конец этого вектора двигаться по образующей кольцевой траектории, что и представляет собой прецессию намагниченности в самом общем случае.

Если положить далее, что кольцевое движение силы является достаточно медленным, как бы квазистатическим, то есть груз движется за силой с такой же скоростью, что и поворачивается сама сила, то для потенциала остаются те же свойства, что и в предыдущем случае. Для этого надо к поворачивающейся силе добавить переменную во времени составляющую, перпендикулярную образующей кольца, направленную по его радиусу. Тогда при низком уровне потенциала возможны малоамплитудные колебания в узкой, движущейся по кругу потенциальной яме. При высоком уровне потенциала — колебания в полной широкой яме, амплитуда которых будет достаточно высокой. На рис. 9.17 показана схема таких двух уровней потенциала U_1 и U_2. В отличие от рис. 9.16, здесь обозначения точек $B_{1,2}$ и $D_{1,2}$ не имеют смысла границ размаха колебаний по оси Ox, а просто отражают концентрический характер потенциала в трех измерениях.

Замечание. Следует заметить, что в описанных в настоящей монографии ситуациях прецессии намагниченности какая-либо периодическая сила, действующая на вектор намагниченности по радиусу

образующей большого кольца, не рассматривалась, так что этот вопрос авторы оставляют для будущих исследователей.

О возможной реализации возбуждающей силы в эксперименте. В проделанном выше рассмотрении природа возбуждающей силы $\mathbf{F}_P$, направленной по касательной к большому кольцу, оставлена без внимания.

С другой стороны, очевидно, что реализация такой силы в эксперименте вполне возможна. Ее мог бы создать, например, воздушный винт или реактивный двигатель, подобный самолетному, закрепленный на грузе таким образом, что сила тяги этого двигателя была бы направлена как раз по касательной к большому кольцу.

Однако можно полагать, что еще более близким приближением к магнитному случаю было бы рассмотрение механического маятника не в качестве простого груза на жестком стержне, а подобного же груза, совершающего вдоль оси этого стержня вращательное движение. То есть вместо простой линейной инерции маятник обладал бы еще гироскопическими свойствами, подобными механическому волчку (гироскопу [401–403]) с осью, совпадающей с осью жесткого стержня (AM по рис. 9.17). При этом действие на волчок силы, направленной по радиусу большого кольца, вызывало бы движение волчка по касательной к этому кольцу, то есть было бы эквивалентным действию силы $\mathbf{F}_P$ на рис. 9.17.

То есть в качестве возбуждающей силы можно было бы использовать не касательную к большому кольцу силу $\mathbf{F}_P$, вращающуюся вместе с грузом, а радиальную к этому же кольцу силу, также вращающуюся, но уже вокруг оси AB маятника и направленную всегда по радиусу большого кольца, то есть остающуюся перпендикулярной к этой оси.

Можно полагать, что с конструктивной стороны создание такой вращающейся радиальной силы было бы проще, чем реализация касательной силы с помощью реактивного двигателя.

Создать радиальную вращающуюся силу можно было бы например с помощью системы неподвижных радиально расположенных электромагнитов, питаемых с задержкой по фазе относительно друг друга, подобно тому, как это делается в широко распространенных электродвигателях.

На данном этапе авторы настоящей монографии предпочитают ограничиться приведенным замечанием, а более подробное рассмотрение механической модели на основе гироскопа оставляют для будущих исследований.

9.4.3. Формирование колебаний маятника при различных частотах возбуждающей силы

Важным обстоятельством является тот факт, что груз, как физическое тело, обладающее массой, имеет определенную инерцию, то есть

его движение может не успевать за кругообразным движением возбуждающей силы. Такое отставание может проявляться тем сильнее, чем скорость кругового движения силы больше.

Таким образом, в формировании траектории движения маятника значительную роль приобретает частота вращения возбуждающей силы. Для иллюстрации характера движения маятника при изменении частоты возбуждающей силы, рассмотрим рис. 9.18.

Рис. 9.18. Формирование режимов движения маятника при различных частотах возбуждающей силы: *а* — частота низкая; *б* — частота средняя; *в* — частота высокая

Здесь представлены траектории движения груза маятника в плоскости Oxy при разных частотах вращения возбуждающей силы, то есть при разных ее скоростях при движении по кругу с центром в точке O.

Предположим, что движение груза начинается в точке A_0. Пусть в этой точке на груз действует касательная к траектории сила $\mathbf{F}_1$. Здесь она направлена вверх по рисунку, то есть вдоль оси Oy. В квазистатическом случае, то есть когда груз совсем не отстает от вращения силы, он перемещается по окружности, последовательно проходя точки $A_1, A_2, \ldots, A_7$, после чего возвращается в точку A_0, откуда движение повторяется по той же круговой траектории. Частота вращения силы задается независимым источником (в магнитном случае — генератором вращения поля), скорость же движения груза определяется его инерционностью в сочетании с трением. Если скорость вращения силы невелика, то груз может следовать за ней с достаточной точностью (квазистатический режим). При большой же скорости вращении силы груз может не успевать за движением силы, то есть отставать от нее. На рис. 9.18 показаны три возможных варианта такого отставания, соответствующие различным частотам вращения силы.

Рассмотрим сначала рис. 9.18, *а*. Это рисунок соответствует низкой частоте вращения силы, то есть малому отставанию груза. Сила делает полный оборот в плоскости в тот момент, когда груз достигает точки A_7. Сила $\mathbf{F}_2$, действующая на него в этот момент, направлена уже опять вдоль оси Oy, тогда как груз до точки A_0 немного не дошел. Касательная к траектории в этой точке еще несколько отклонена

от оси Oy, так что появляется составляющая силы $\mathbf{F}_1$, направленная к центру траектории (к точке O). Эта составляющая заставляет груз отклоняться к центру, в результате чего он не попадает в точку A_0, а вместо этого приходит в точку B_1, затем в точку B_2 и продолжает движение по траектории, показанной пунктиром. Однако отставание еще очень мало, так что новая траектория отличается от квазистатической также мало, поэтому груз движется по кругу, диаметр которого тем меньше отличается от квазистатического, чем частота ниже.

В магнитом случае этот режим практически ничем не отличается от простой круговой прецессии вектора намагниченности по конусу с гладкими стенками, то есть можно полагать, что он аналогичен режиму № 5 — развернутой круговой прецессии.

Обратимся теперь к рис. 9.18, *б*. Этот рисунок соответствует средней частоте вращения силы, то есть груз движется уже с заметным отставанием. Сила делает полный оборот в тот момент, когда груз достигает точки A_5. Сила $\mathbf{F}_2$, действующая на него в этот момент, также направлена вдоль оси Oy, то есть составляющая этой силы, направленная к центру, довольно велика. В результате траектория движения груза заметно отклоняется в сторону центра, проходя последовательно точки B_1, B_2 и далее следуя по кривой, показанной пунктиром. Важно отметить, что здесь центр (точка O) остается по левую сторону от новой траектории, так что диаметр такой новой траектории превышает радиус квазистатической окружности. После завершения полного оборота траектория проделывает другой подобный оборот, смещенный по азимутальному углу относительно первого и так далее. В результате вдоль образующей квазистатического кольца плоскость покрывается последовательно смещенными друг относительно друга кольцевыми траекториями, причем центральная точка O всегда остается внутри каждой такой траектории.

В магнитном случае такое движение соответствует режиму № 3 — прецессии положения равновесия с охватом центра.

Замечание. Следует отметить, что здесь имеется соответствие также с режимом № 4, который отличается от режима № 3 лишь затуханием во времени. Однако более подробно различие этих режимов в рамках предложенной здесь механической модели авторами настоящей монографии не рассматривалось, хотя, вполне возможно, подобная аналогия также может быть найдена.

Рассмотрим теперь рис. 9.18, *в*. Этот рисунок соответствует высокой частоте вращения силы, то есть груз движется за силой со значительным отставанием. Сила делает полный оборот в тот момент, когда груз достигает точки A_3. Сила $\mathbf{F}_2$, действующая на него в этот момент, по-прежнему направлена вдоль оси Oy. Однако, еще далеко не доходя до точки A_3, на полпути между точками A_1 и A_2, то есть когда груз находится в районе точки D, сила совершает половину оборота, так что становится направленной вниз по оси Oy. На рисунке эта сила обозначена как $\mathbf{F}_D$. Действующая в таком направлении сила

отклоняет траекторию груза к центру, так что он попадает в точку B_1. При дальнейшем движении груза сила поворачивается еще дальше, так что когда груз приходит в точку B_2 (что по времени в квазиклассическом случае соответствует точке A_3), сила $\mathbf{F}_2$ опять становится направленной вверх. В результате траектория, минуя последовательно точки D, B_1 и B_2, заворачивается в кольцо, диаметр которого теперь уже меньше, чем радиус квазистатической окружности, так что центральная точка O остается по правую сторону от такой кольцевой траектории. После возвращения траектории на квазистатическую окружность, поворачивающаяся сила формирует новое кольцо, продвинутое по азимутальному углу несколько дальше первого. В результате вдоль образующей квазистатического кольца плоскость покрывается последовательно смещенными друг относительно друга кольцевыми траекториями, причем центральная точка O всегда остается снаружи от каждого кольца такой траектории.

В магнитном случае такое движение соответствует режиму № 2 — кольцевой прецессии положения равновесия без охвата центра.

Можно полагать, что дальнейшее еще большее увеличение частоты вращения силы приведет к тому, что груз вообще будет очень мало сдвигаться, то есть будет испытывать «толчею» в области положения равновесия, то есть вблизи образующей квазистатического кольца, со слабой тенденцией смещаться вдоль этой образующей, которая с увеличением частоты вращения силы будет ослабевать, стремясь к нулю.

В магнитном случае такое движение будет аналогично режиму № 1 — малоамплитудной круговой прецессии, которая является предельным случаем режима № 2 — кольцевой прецессии без охвата центра.

9.4.4. Особенности мультирежимного характера колебаний цилиндрического маятника

Итак, из проведенного рассмотрения можно сделать вывод, что цилиндрический маятник с боковым пружинным подвесом имеет те же основные режимы колебаний, что и прецессия положения равновесия в магнитном случае.

Следует отметить однако определенное отличие. В разделе 9.3 эти режимы сменяют друг друга в порядке от № 1 до № 5. Здесь же порядок обратный, то есть сначала идет режим № 5, затем № 3 (или № 4), после чего режимы № 2 и № 1. Такое различие обусловлено тем, что в разделе 9.3 смена режимов рассматривалась по мере увеличения амплитуды возбуждающего поля. Здесь же режимы сменяют друг друга по мере увеличения частоты возбуждающей силы. Характеристики частотных свойств прецессии положения равновесия вектора намагниченности рассмотрены в разделах 9.2.2, 9.2.3 и иллюстрируются рис. 9.8. Там же отмечен факт существования критической частоты, выше которой прецессия положения равновесия имеет место, а ниже отсутствует. В механическом случае также можно говорить о наличии

критической частоты, находящейся где-то в промежутке между частотами, соответствующими рис. 9.18, *а* и рис. 9.18, *б*.

Добавим также, что эквивалентом увеличения амплитуды возбуждения в магнитном случае является увеличение силы, действующей на маятник в механическом случае. Предварительное качественное исследование показало, что при этом также наблюдаются те же режимы, однако теперь они по мере увеличения силы следуют в порядке от № 1 до № 5. Таким образом, можно полагать, что здесь аналогия между магнитным и механическим случаями становится еще более полной.

Замечание. В рамках настоящей монографии авторы не ставили себе задачи подробного аналитического или численного расчета характеристик режимов колебаний цилиндрического маятника, так как основным предметом рассмотрения полагали физику именно магнитных явлений. Поэтому авторы ограничились лишь довольно поверхностным качественным описанием поведения механической модели, в первую очередь, делая упор на соответствие с магнитным случаем. Приведение механической модели именно здесь, по мнению авторов, является наиболее уместным, так как дальнейшее изложение будет посвящено значительно более сложным аспектам прецессии намагниченности. Применение механической модели к таким случаям, по-видимому, также возможно, однако потребовало бы значительного ее усложнения, что, по мнению авторов, на данном этапе вряд ли целесообразно. Тем не менее, авторы полагают, что более подробное решение чисто механической задачи также было бы довольно интересным, поэтому оставляют такое решение в качестве предмета для отдельных исследований.

9.5. Специфические свойства мультирежимного характера прецессии положения равновесия намагниченности

Вернемся теперь обратно к изучению прецессии положения равновесия намагниченности и обратимся к моделям, позволяющим интерпретировать ее свойства с учетом специфики магнитной природы явления.

9.5.1. Переходы между режимами прецессии намагниченности на основе модели потенциала

Прежде всего рассмотрим переходы между различными режимами прецессии на основе модели, учитывающей зависимость потенциала от амплитуды переменного поля. Общая схема переходов иллюстрируется рис. 9.19, *а*, *б*. Кривые сняты при установившихся значениях амплитуды, то есть после того, как нестационарные колебания прецессии равновесия уже затухли. По времени это соответствует приблизительно $(2\ldots4)\cdot10^{-7}$ с.

На рис. 9.19, *а* показаны зависимости максимального (*1*) и минимального (*2*) значений потенциала от амплитуды переменного поля.

Рис. 9.19. Зависимость потенциала от амплитуды переменного поля (*а*) и схемы зависимостей при различных амплитудах переменного поля (*б*). Пояснение врезки и номеров кривых — в тексте. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 260$ Э; $\alpha = 1{,}2$; $f = 200$ МГц

Вертикальные пунктирные линии соответствуют границам переходов между различными режимами прецессии положения равновесия: при 0 Э $< h_0 < 28$ Э — режим № 2 — прецессия без охвата центра; при 28 Э $< h_0 < 37$ Э — режим № 3 — прецессия с охватом центра без затухания; при 37 Э $< h_0 < 43$ Э — режим № 4 — прецессия с охватом центра с затуханием; при 43 Э $< h_0 < 60$ Э — режим № 5 — развернутая круговая прецессия. Укрупненные точки соответствуют значениям потенциала при характерных амплитудах переменного поля, использованных при построении кривых на рис. 9.11–9.15. На врезке вверху слева показана зависимость потенциала от времени и схема отсчета максимального и минимального значений.

На рис. 9.19, *б* показаны зависимости потенциала, построенные в плоскости Oxz, от поперечной компоненты намагниченности m_x (при $m_y = 0$), при некоторых характерных амплитудах переменного поля, приведенных в столбце справа от соответствующих зависимостей (эти амплитуды полей соответствуют значениям укрупненных точек на рис. 9.19, *а*). Выбор в качестве поперечной компоненты намагниченности именно m_x (при $m_y = 0$) общности не ограничивает, так как построение имеет цилиндрическую симметрию относительно оси Oz.

Потенциал на рис. 9.19, *б* рассчитывался по формуле

$$U = -H_0\sqrt{1 - m_x^2 - m_y^2} - 2\pi M_0(m_x^2 + m_y^2), \qquad (9.21)$$

которая с точностью до постоянного слагаемого и нормировки на M_0 получена из формулы

$$U = -\mathbf{MH} - \frac{1}{2}\mathbf{MH}_p, \tag{9.22}$$

где: $\mathbf{H}_p = -4\pi M_z \mathbf{n}_z$ — поле размагничивания пластины, $\mathbf{n}_z$ — единичный вектор вдоль оси Oz. Номера укрупненных точек на рис. 9.19, *б* соответствуют номерам кривых на рис. 9.19, *а*. Пунктирные линии, соединяющие укрупненные точки на рис. 9.19, *б*, соответствуют значениям потенциала при переходе от одной точки к другой (между кривыми *1* и *2* на рис. 9.19, *а*). При этом переход происходит не в плоскости Oxz, а с выходом в трехмерное пространство, то есть прецессирующая намагниченность не перескакивает через холм, соответствующий оси Oz (где $m = 0$), а обходит его сбоку через ось Oy, причем намагниченность в процессе такого обхода приобретает компоненту m_y, что и отражается на прецессионном портрете в виде колец.

Потенциал $U(m_x, m_y)$ относительно плоскости Oxy является трехмерным и имеет вид высокого центрального пика (холма) с плавной вершиной, вытянутого вдоль оси Oz, соответствующего $m_x = 0$, $m_y = 0$, окруженного кольцевой канавой, внешний край которой стремится к бесконечности. Благодаря перпендикулярности постоянного поля к плоскости пластины, канава имеет осевую симметрию относительно оси Oz, то есть трехмерная форма потенциала образуется путем вращения плоской кривой, соответствующей $U(m_x, 0)$ вокруг оси Oz. При малой амплитуде переменного поля (10 Э) намагниченность прецессирует по малому кругу, целиком умещающемуся внутри соседних противоположных склонов канавы, причем этот малый круг сам катается вдоль канавы, повторяя ее кольцевую форму. Такое движение соответствует режиму № 2 — прецессии положения равновесия без охвата центра. При увеличении амплитуды переменного поля (20 Э) малый круг прецессии постепенно расширяется, его внутренняя точка налезает на центральный пик потенциала, прецессия без охвата центра (режим № 2) переходит в прецессию с охватом (поле 28 Э, переход к режиму № 3), после чего малый круг прецессии, все более расширяясь, надевается на центральный пик потенциала, съезжает по нему вниз (режим № 4 вплоть до поля 37 Э) и занимает относительно оси Oz симметричное положение (переходная точка от режима № 4 к режиму № 5, поле 43 Э). Дальнейшее увеличение амплитуды переменного поля приводит к прецессии намагниченности, соответствующей движению по внешнему склону канавы потенциала, которое, благодаря правильной кольцевой форме канавы, происходит по правильному кругу (режим № 5, поле больше 43 Э).

9.5.2. Условия возбуждения режимов прецессии при различных параметрах затухания и амплитудах переменного поля

Из проведенного рассмотрения видно, что амплитуда колебаний потенциала зависит от амплитуды переменного поля h_0, но, как и всякое

колебание диссипативной системы, она должна зависеть также от параметра затухания α. Такая двухпараметрическая зависимость иллюстрируется рис. 9.20, где на плоскости «параметр затухания — амплитуда переменного поля» $O\alpha h_0$ представлены границы областей с различными режимами прецессии для различных значений h_0 и α для двух значений частот переменного поля.

Таким образом, при симметричном поле ($H_{0x} = 0$ Э): в пределе при $h_0 \to 0$ на кривой *1*, а также *5*, реализуется режим № 1, между кривыми *1* и *2*, а также *5* и *6* — режим № 2, между кривыми *2* и *3*, а также *6* и *7* — режим № 3, между кривыми *3* и *4*, а также *7* и 8 — режим № 4, выше кривой *4*, а также *8* — режим № 5. При несимметричном поле ($H_{0x} = 0{,}20$ Э): между кривыми *1* и *1′*, а также *5* и *5′* реализуется режим № 1, между кривыми *1′* и *2*, а также *5′* и *6* — режим № 2, между кривыми *3* и *4*, а также *7* и *8* — режим № 4, выше кривой *4*, а также *8* — режим № 5.

Рис. 9.20. Зависимости границ областей с различными режимами прецессии от параметра затухания при различных частотах f и значениях поперечной компоненты постоянного поля H_{0x}. Параметры кривых следующие: *1, 1′, 2–4* (сплошные линии) — $f = 200$ МГц; *5, 5′, 6–8* (пунктирные линии) — $f = 400$ МГц; *1–8* — поле симметричное: $H_{0x} = 0$ Э; *1′, 5′* — поле несимметричное: $H_{0x} = 0{,}20$ Э; *1, 1′, 5, 5′* — границы между областями с режимами № 1 и № 2; *2, 6* — границы между областями с режимами № 2 и № 3; *3, 7* — границы между областями с режимами № 3 и № 4; *4, 8* — границы между областями с режимами № 4 и № 5. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $\alpha = 1{,}2$; $H_{0z} = 260$ Э

При $\alpha > 0{,}2$ различные режимы выражены четко и границы между областями с различными режимами являются резкими. Эти границы показаны сплошными и пунктирными линиями. При $\alpha < 0{,}2$ различие между режимами сглаживается, границы между областями с различными режимами не являются резкими, переходы между режимами — плавные. Эти границы показаны точечными линиями.

Из рисунка видно, что при повышении частоты переменного поля все границы между областями с различными режимами повышаются (при переходе от 200 МГц к 400 МГц — в полтора–два раза), что, по-видимому, связано с изменением резонансных условий возбуждения нелинейной прецессии при изменении частоты. Границы между областями с режимами № 2 и № 3, № 3 и № 4, № 4 и № 5 (кривые *2–4* и *6–8*) от величины компоненты постоянного поля H_{0x} не зависят. При изменении H_{0x} меняются только границы между областями с режимами № 1 и № 2 (кривые *1* и *1′*, *5* и *5′*). При $H_{0x} = 0$ Э область с режимом № 1 отсутствует (кривые *1* и *5*). Это означает, что положение равновесия прецессирует уже при самых малых амплитудах переменного поля, то есть в полностью симметричных условиях прецессия положения равновесия является беспороговой. При $H_{0x} = 0{,}20$ Э область с режимом № 1 существует и ограничена сверху кривой *1′* или *5′*, то есть прецессия положения равновесия (режим № 2) имеет определенный порог по амплитуде переменного поля.

При увеличении параметра затухания границы между областями с режимами № 2 и № 3, № 3 и № 4, № 4 и № 5 повышаются, независимо от наличия или отсутствия поперечной компоненты постоянного поля. Такое повышение границ, по-видимому, связано с требованием увеличения затрат энергии на возбуждение колебаний достаточной амплитуды при увеличении затухания. Включение поперечной компоненты постоянного поля при параметре затухания $\alpha < 0{,}25$ границу между областями с режимами № 1 и № 2 не меняет, а при $\alpha > 0{,}25$ эту границу резко повышает (кривые *1* и *5* заменяются кривыми *1′* и *5′*). Такая зависимость от параметра затухания, по-видимому, связана с возрастанием роли резонансных условий при уменьшении затухания.

9.5.3. Свойства поперечной компоненты намагниченности при различных режимах прецессии

Остановимся теперь на некоторых особенностях переходов между режимами прецессии при изменении амплитуды переменного поля. Прежде всего отметим, что все переходы по переменному полю являются достаточно резкими с точностью не менее 1 % от поля перехода. Переходы между режимами № 1 и № 2, № 2 и № 3, а также № 3 и № 4 являются плавными, то есть не сопровождаются резким изменением поперечной компоненты намагниченности, тогда как переход между режимами № 4 и № 5 происходит резким скачком.

Общий характер изменения поперечной компоненты намагниченности при изменении амплитуды переменного поля иллюстрируется

Рис. 9.21. Зависимости максимального и минимального значений поперечной компоненты намагниченности от амплитуды переменного поля при различных параметрах затухания α: *1*, *1′* — 0,4; *2*, *2′* — 0,8; *3*, *3′* — 1,2. Пояснение врезок — в тексте. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0x} = 0$ Э, $H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 260$ Э, $f = 200$ МГц

рис. 9.21, где показаны зависимости максимального и минимального значений поперечной компоненты намагниченности от амплитуды переменного поля при различных параметрах затухания.

На врезке слева вверху показана схема отсчета минимального m_1 и максимального m_2 значений поперечной компоненты намагниченности. На врезке справа внизу показана схема хода зависимостей $m_{1,2}(h_0)$ при различных режимах прецессии. Сплошные линии и цифры без штрихов соответствуют максимальным значениям поперечной компоненты намагниченности $m_2(h_0)$; пунктир и цифры со штрихами — минимальным значениям поперечной компоненты намагниченности $m_1(h_0)$. Значения поперечной составляющей намагниченности измерены по внешнему и внутреннему радиусам основного кольца на прецессионном портрете в установившемся режиме, как показано на врезке слева вверху.

Режимы прецессии, показанные на врезке справа внизу — следующие: в точке A — режим № 1, между точками A и B, а также A и C — режим № 2, между точками B и D, а также C и D — последовательно сменяющие друг друга режимы № 3 и № 4, от точки D к точке E — скачок перехода от режима № 4 к режиму № 5, от точки E до точки F — режим № 5.

Из рисунка видно следующее. Кривые без штрихов (*1*, *2*, *3*) и со штрихами (*1′*, *2′*, *3′*), соответствующие максимальному и минимальному значениям поперечной компоненты намагниченности, при $h_{x,y} = 0$

начинаются в точке $m_1 = m_2 = 0{,}30$, которая соответствует равновесному положению вектора намагниченности в отсутствие переменного поля. При увеличении амплитуды переменного поля положение равновесия начинает прецессировать, причем амплитуда прецессии вектора намагниченности вокруг прецессирующего положения равновесия увеличивается, что проявляется в уменьшении внутреннего радиуса кольца и увеличении внешнего радиуса и приводит к увеличению расстояния между кривыми *1*, *2*, *3* и *1′*, *2′*, *3′*. При этом осуществляется режим № 2, то есть происходит прецессия положения равновесия без охвата центра. Когда радиус прецессии вектора намагниченности становится равным отклонению положения равновесия от оси Oz, внутреннее кольцо стягивается в точку, соответствующую $m_{r1} = 0$, в результате чего режим № 2 без охвата центра сменяется режимом № 3 с охватом центра. При дальнейшем увеличении амплитуды переменного поля внутренний радиус кольца m_{r1} увеличивается, а внешний радиус m_{r2} слегка уменьшается вплоть до перехода к режиму № 4, когда прецессия положения равновесия становится затухающей. Далее затухание прецессии положения равновесия увеличивается вплоть до перехода к режиму № 5, когда равновесное положение намагниченности перестает прецессировать и выстраивается вдоль оси Oz, то есть прецессия положения равновесия заменяется развернутой круговой прецессией. При этом различие между внутренним и внешним радиусами колец стремится к нулю $(m_2 - m_1) \to 0$.

Таким образом, можно сказать, что при увеличении амплитуды переменного поля ширина образующей основного кольца прецессионного портрета при режиме № 2 увеличивается от нуля до величины, несколько превышающей радиус этого кольца, в режиме № 3 уменьшается, а в режимах № 4 и № 5 стремится к нулю. При этом радиус середины образующей основного кольца в режимах № 2, № 3 и № 4 остается почти постоянным, соответствующим равновесному положению вектора намагниченности в отсутствие переменного поля, а в режиме № 5 постепенно увеличивается, стремясь к единице.

Из общего хода кривых на рис. 9.21 можно видеть, что переход от режима № 4 к режиму № 5, в отличие от остальных переходов, является весьма резким, происходит при изменении амплитуды переменного поля менее чем на 0,1 % и сопровождается значительным изменением амплитуды прецессии (до полутора–двух раз). Это означает, что при плавном изменении возбуждения в весьма малых пределах резко меняется раскрыв конуса прецессии, то есть можно считать, что в этих условиях для прецессирующего вектора намагниченности происходит скачкообразный динамический ориентационный переход.

9.5.4. Зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля

Из рис. 9.11–9.15 видно, что период прецессии положения равновесия значительно превышает период колебаний приложенного

переменного поля. Это же обстоятельство отмечалось в разделе 9.1.4, где на основе векторной модели была получена связь между периодом прецессии положения равновесия и амплитудой переменного поля в виде (9.19):

$$T = \frac{A}{h_0^2\sqrt{1-(H_0/4\pi M_0)^2}}, \tag{9.23}$$

где A — постоянный коэффициент. Там же было отмечено, что приведенная формула в режиме № 2 с точностью $\sim$5 % описывает зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля h_0 в постоянных полях H_{0z} до 0,86 от поля анизотропии формы $4\pi M_0$.

Для рассматриваемого случая различных режимов зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля иллюстрируется рис. 9.22. На этом рисунке точки соответствуют периоду, измеренному по зависимости поперечной компоненты намагниченности от времени, сплошные линии построены по формуле (9.23). Кривая *1* соответствует $\alpha = 0{,}4$, при этом $A = 10{,}4$ Э^2 мкс, поле перехода от режима № 2 к режиму № 3 — $h_{c23} = 21{,}0$ Э, поле перехода от режима № 3 к режиму № 4 — $h_{c34} = 23{,}8$ Э; кривая *2* соответствует $\alpha = 0{,}8$, при этом $A = 20{,}0$ Э^2 мкс, $h_{c23} = 23{,}0$ Э, $h_{c34} = 29{,}2$ Э; кривая *3* соответствует $\alpha = 1{,}2$, при этом $A = 30{,}4$ Э^2 мкс, $h_{c23} = 27{,}6$ Э,

Рис. 9.22. Зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля. Основные параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0x} = 0$ Э, $H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 260$ Э, $f = 200$ МГц. Специфические параметры указаны в тексте

$h_{c34} = 36{,}0$ Э. Вертикальными точечными линиями отмечены поля перехода между режимами № 2 и № 3, стрелками на горизонтальной оси — поля перехода между режимами № 3 и № 4. Таким образом, левее точечных линий (при $h_0 < h_{c23}$) для каждой соответствующей кривой наблюдается режим № 2, между точечными линиями и стрелками (при $h_{c23} < h_0 < h_{c34}$) — режим № 3, правее стрелок (при $h_0 > h_{c34}$) — режим № 4. Здесь прецессия положения равновесия затухает, поэтому участки кривых, построенных по формуле (9.23), изображены пунктиром.

Из рисунка видно следующее. Период прецессии положения равновесия в отсутствие переменного поля бесконечно велик, так как положение равновесия при этом пребывает в покое. При включении переменного поля положение равновесия начинает прецессировать тем быстрее, чем больше амплитуда поля, то есть период прецессии положения равновесия уменьшается. При этом отмеченная формулой (9.23) обратная пропорциональность периода квадрату амплитуды переменного поля правдоподобно выполняется в интервале от $\sim$10 Э до поля перехода h_{c34}. Переход от режима № 2 к режиму № 3 при h_{c23} никаких особенностей не имеет. В области $h_0 \leqslant 10$ Э при любых значениях параметра затухания α реально наблюдаемые значения периода прецессии положения равновесия становятся меньше даваемых формулой (9.23), причем эта разница тем сильнее, чем параметр затухания больше. С увеличением α период увеличивается, что связано с затруднением раскачки колебательной системы при увеличении затухания.

9.6. Прецессия положения равновесия в условиях нарушения симметричности

Все описанные выше свойства прецессии положения равновесия проявляются в чистом виде только при полностью симметричных условиях ее реализации. Это означает, во-первых, симметричность возбуждения, то есть постоянное поле должно быть перпендикулярно плоскости пластины, а переменное — ориентировано в плоскости пластины и должно иметь круговую поляризацию. Во-вторых, все возможные ориентации вектора намагниченности в плоскости пластины должны быть равновероятны, то есть какая-либо магнитная анизотропия в плоскости пластины должна отсутствовать.

9.6.1. Общие замечания о нарушении симметричности

Прежде чем исследовать этот вопрос более подробно, приведем некоторые общие замечания, касающиеся нарушения такой симметричности.

Если нарушена симметричность ориентации постоянного поля относительно пластины, то есть оно отклонено от нормали к пластине на некоторый угол, то на прецессионном портрете появляется сгущение малых колец, положение которого зависит от азимутального угла

ориентации постоянного поля. Развитие прецессии во времени перестает быть точно синусоидальным, так что на синусоиде появляются довольно протяженные плоские участки, соответствующие задержке во времени при образовании сгущений малых колец.

Если нарушена симметричность возбуждения, то есть поляризация переменного поля является не чисто круговой, а эллиптической, то есть компоненты h_x и h_y различны, то развитие во времени прецессии положения равновесия также перестает быть чисто синусоидальным и приближается к импульсной со срывами. При этом период прецессии с увеличением несимметрии возбуждения увеличивается, то есть расстояние по времени между отдельными импульсами и срывами становится больше.

Прецессионный портрет $m_y(m_x)$ (рис. 9.2, *д*) сохраняет вид правильного кругового кольца, однако заполнение большого кольца маленькими кольцами становится неравномерным, на большом кольце появляются два сгущения малых колец, расположенные диаметрально противоположно друг от друга. При дальнейшем увеличении несимметричности возбуждения прецессия положения равновесия срывается и заменяется обычной чисто круговой прецессией вокруг направления постоянного поля. Допустимые пределы несимметрии, в которых возможна прецессия положения равновесия, довольно невелики. Так, компоненты переменного поля h_x и h_y могут различаться друг от друга не более чем в 1,2 ... 1,3 раза. При большем различии прецессия положения равновесия заменяется обычной круговой прецессией.

Что касается анизотропии, то прежде всего следует отметить, что введение нормальной одноосной анизотропии в свойствах прецессии положения равновесия ничего особенно не меняет, кроме добавки к полю анизотропии формы. Наклонная одноосная анизотропия производит трансформацию прецессии подобную вызываемой несимметричностью постоянного поля.

Если как постоянное поле, так и возбуждение остаются симметричными, но имеется анизотропия в плоскости пластины, то развитее во времени прецессии положения равновесия перестает быть чисто синусоидальным и приближается к импульсному со срывами. При этом период прецессии с увеличением анизотропии также увеличивается. Общая картина близка к упомянутой выше для несимметричного возбуждения. Однако теперь сгущения малых колец на прецессионном портрете определяются ориентацией осей анизотропии.

В качестве примера отметим случай кубической анизотропии с ориентацией кристаллографической оси типа [100] по нормали к плоскости пластины и типичными для пленок ЖИГ двумя константами анизотропии первого K_1 и второго K_2 порядков, обе из которых являются отрицательными. Введение кубической анизотропии с константой K_1 дает несимметричность прецессии, подобную вызываемой несимметричностью переменного поля, то есть синусоидальный режим сменяется импульсным. При этом на прецессионном портрете наблюдаются четыре

сгущения малых колец, положения которых определяются ориентацией осей анизотропии. Эти сгущения сдвинуты по большому кругу прецессии друг относительно друга на 90°, но их положения не совпадают с положениями проекций осей кубической анизотропии на плоскость пленки, а повернуты по азимутальному углу на несколько десятков градусов. Сгущения выражены тем лучше, чем больше амплитуда переменного поля. Добавление второй константы кубической анизотропии K_2 приводит к более сильному выражению сгущений. Увеличение константы K_1 приводит к срыву прецессии положения равновесия и замене ее на обычную прецессию вокруг направления постоянного поля.

Теперь, после общего обзора характера прецессии положения равновесия при нарушении симметрии, рассмотрим этот вопрос более подробно и начнем с изменения ориентации постоянного поля.

9.7. Нарушение симметричности по постоянному полю

Рассмотрим сначала более простой случай нарушения симметричности системы, а именно — нарушение по постоянному полю. Такое нарушение соответствует отклонению направления постоянного поля от первоначального при условии сохранения той же плоскости поляризации переменного поля. Поэтому, оставаясь в рамках той же системы координат, где переменное поле поляризовано в плоскости Oxy по кругу, добавим к основному постоянному полю, ориентированному вдоль оси Oz, небольшую добавку, направленную по оси Ox.

9.7.1. Влияние несимметричности постоянного поля на характер прецессии положения равновесия

Итак, рассмотрим общий характер изменения прецессии положения равновесия в случае нарушения симметричности постоянного поля. Как и ранее, будем рассматривать развитие колебаний во времени и получающийся при этом прецессионный портрет. Будем считать, что основное постоянное поле, обеспечивающее условия ориентационного перехода, как и ранее, направлено вдоль оси Oz, но теперь к нему добавлено сравнительно небольшое поле в перпендикулярном направлении. То есть имеется составляющая поля вдоль оси Ox, тогда как составляющая по оси Oy по-прежнему равна нулю.

Результаты расчета иллюстрируются рис. 9.23. На рис. 9.23, *а* и рис. 9.23, *в* показаны зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности m_x (сплошные линии) и m_y (пунктирные линии) от времени, а на рис. 9.23, *б* и рис. 9.23, *г* — отвечающие им прецессионные портреты $m_y(m_x)$. Рис. 9.23, *а* и рис. 9.23, *б* соответствуют полностью симметричному случаю ($H_{0x} = 0{,}000$ Э), рис. 9.23, *в* и рис. 9.23, *г* — несимметричному: $H_{0x} = 0{,}055$ Э) (везде $H_{0y} = 0$ Э).

Рис. 9.23. Зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности от времени (*а, в*) и прецессионные портреты (*б, г*) в симметричном случае $H_{0x} = 0$ Э (*а, б*) и при несимметричном постоянном поле $H_{0x} = 0{,}055$ Э (*в, г*). Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс; $H_{0y} = 0$ Э; $h_0 = 3$ Э; $f = 100$ МГц

Из рис. 9.23, *б* и рис. 9.23, *г* видно, что как в симметричном, так и в несимметричном случаях положение равновесия прецессирует по кругу вокруг оси Oz, однако при несимметричном постоянном поле средние значения зависимостей поперечных компонент намагниченности m_x и m_y от времени перестают быть чисто синусоидальными, как на рис. 9.23, *а*, а принимают вид неправильной формы импульсов, представленный на рис. 9.23, *в*. Можно видеть также, что период таких импульсов значительно (в данном случае в два раза) превышает период синусоиды при симметричном возбуждении.

Прецессионный портрет $m_y(m_x)$ (рис. 9.23, *г*) сохраняет вид правильного кругового кольца, подобного кольцу при симметричном постоянном поле (рис. 9.23, *б*), однако заполнение большого кольца малыми кольцами становится неравномерным, на большом кольце появляется

сгущение малых колец, расположенное в положительном направлении оси Oy.

Положение сгущения, наблюдаемое на прецессионном портрете, определяется характером несимметричности постоянного поля. При $H_{0x} > 0$, $H_{0y} = 0$ сгущение расположено вверху на вертикальной оси, как показано на рис. 9.23, *б*. При $H_{0x} < 0$, $H_{0y} = 0$ сгущение расположено внизу на той же оси. При $H_{0x} = 0$, $H_{0y} > 0$ сгущение расположено слева на горизонтальной оси. При $H_{0x} = 0$, $H_{0y} < 0$ сгущение расположено справа на той же оси. Такое расположение сгущения означает, что оно повернуто относительно направления поперечного постоянного поля на 90° против часовой стрелки.

9.7.2. Критичность несимметричности постоянного поля

Факт возбуждения прецессии положения равновесия весьма критичен к степени несимметричности постоянного поля. Если поперечная компонента постоянного поля $H_{0x,y}$ превышает определенную критическую величину $H_{0x,y}^{(c)}$, то положение равновесия при повороте вокруг оси Oz не совершает полного оборота, а останавливается где-то на его части, причем вектор намагниченности продолжает прецессировать по эллипсу вокруг этого остановившегося направления положения равновесия. Можно сказать, что при поле, большем критического, прецессия положения равновесия срывается, поэтому далее будем называть такое поле «критическим полем срыва» прецессии положения равновесия. Допустимые пределы несимметрии поперечного поля, в которых возможна прецессия положения равновесия, довольно невелики. Так, при выбранных параметрах критическое поле срыва $H_{0x}^{(c)}$ составляет 0,060 Э (при $H_{0y} = 0$ Э).

Характер прецессии при поперечном поле выше критического иллюстрируется рис. 9.24, где на рис. 9.24, *а* показаны соответствующие $H_{0x} = 0{,}070$ Э зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности m_x(сплошные линии *1*) и m_y (пунктирные линии *1′*) от времени, а на рис. 9.24, *б* приведен прецессионный портрет $m_y(m_x)$ (кривая *1*). Для сравнения на тех же рисунках приведены зависимости компонент намагниченности (рис. 9.24, *а*) m_x (сплошная линия *2*) и m_y (пунктирная линия *2′*) от времени, и прецессионный портрет (рис. 9.24, *б*) $m_y(m_x)$ (утолщенная линия *2*) в случае свободного при $h_{0x} = h_{0y} = 0$ Э установления намагниченности от значений $m_x = m_y = 0$, $m_z = 1$.

На рис. 9.24, *б* точка A — центр эллиптического цикла вынужденной простой прецессии, ее координаты: $m_x = 0{,}147$, $m_y = 0{,}262$, точка B — конечная точка установления свободной прецессии намагниченности, ее координаты: $m_x = 0{,}325$, $m_y = 0{,}000$. Ось конуса установившейся прецессии отклонена от координатной оси Oz на угол 17,5°, а угол отклонения от той же оси вектора намагниченности в статическом состоянии равен 18,9°, то есть отклонение оси

Рис. 9.24. Зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности от времени (*а*) и прецессионные портреты (*б*) в случае несимметричности постоянного поля больше критической: $H_{0x} = 0{,}070$ Э. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.23

прецессии от нормали к плоскости пластины, в основном, определяется соотношением между постоянным полем и полем размагничивания формы пластины. Однако в плоскости пластины ось конуса установившейся прецессии повернута относительно направления поперечного постоянного поля на 60,7° против часовой стрелки, что аналогично наблюдаемому на рис. 9.23, *г* повороту сгущения на прецессионном портрете при поле H_{0x}, меньшем критического.

9.7.3. Левая прецессия

Отметим попутно одну общую особенность прецессии намагниченности в условиях ориентационного перехода.

Из хода кривой *2* (утолщенной) на рис. 9.24, *б* видно, что свободная прецессия без возбуждающей силы сначала является левой — на участке от начала координат до точки C, координаты которой: $m_{0x} = 0{,}030$, $m_{0y} = -0{,}321$. В этой точке отклонение вектора намагниченности от оси Oz составляет 18,8°, что близко к отклонению в статическом состоянии. После прохождения точки C прецессия становится правой и остается таковой на участке от точки C до точки B.

При вынужденных колебаниях (кривая *1* на рис. 9.24, *б*) на начальном участке, где прецессионная траектория представляет собой петлеобразную развивающуюся кривую, прецессия в каждой малой петле является правой, но прецессия траектории в целом совершается по левому кругу. После того как угол отклонения вектора намагниченности достигает величины равновесного статического значения, прецессия становится правой, и положение равновесия также прецессирует по правому кругу. Эти же особенности видны на прецессионных портретах на рис. 9.23, *б* и рис. 9.23, *г*.

Проверка показывает, что наличие на прецессионном портрете участка с левой прецессией с симметрией поля никак не связано и обусловлено только начальным положением вектора намагниченности. Если начальное положение находится внутри круга, радиус которого равен поперечной компоненте статического равновесного положения, то участок с левой прецессией есть, если вне этого круга, то участка с левой прецессией нет.

Причина такого поведения намагниченности состоит в том, что на вектор намагниченности действует постоянное эффективное поле, образованное суммой внешнего поля и поля размагничивания пластины. Если отклонение вектора намагниченности меньше равновесного, то z-компонента этого поля направлена в отрицательном направлении оси Oz, если отклонение больше равновесного, то в положительном направлении той же оси. При этом, в соответствии с уравнением Ландау–Лифшица, в первом случае вектор намагниченности движется по левому кругу, а во втором — по правому. То есть замена правой прецессии на левую происходит так, как если бы направление постоянного поля изменилось на противоположное.

9.7.4. Механизмы формирования прецессионного портрета

Теперь, после описания общего круга явлений, сопровождающих нарушение симметричности постоянного поля, перейдем к рассмотрению физических механизмов, ответственных за изменение характера прецессии положения равновесия. Рассмотрение проведем на основе двух дополняющих друг друга моделей: энергетической и векторной.

Энергетическая модель. Из (9.2) с учетом (9.5) можно видеть, что положение минимума потенциальной ямы для вектора намагниченности, определяющего его равновесное положение, зависит от величины поперечной компоненты постоянного поля H_{0x}. Иллюстрацией такому изменению служит рис. 9.25, где показаны зависимости плотности энергии U от угла θ между вектором намагниченности и нормалью к плоскости пластины при различных значениях H_{0x}.

На врезке показаны последовательные во времени $A \to B \to C \to \to D \to A$ положения поперечной компоненты переменного поля с амплитудой 3 Э в течение одного периода колебаний. Слева показано вращение поля в отсутствие постоянной составляющей H_{0x}; видно, что оно имеет круговой характер, то есть $h_A = h_B = h_C = h_D = 3$ Э. Справа показано вращение поля при $H_{0x} = 1{,}5$ Э, постоянная величина которого соответствует точке M. Видно, что в этом случае поле не является круговым, причем компоненты h_B и h_D сохраняются теми же самыми $h_B = h_D = 3$ Э, тогда как компонента h_A возрастает до $h_A = 4{,}5$ Э, а компонента h_C уменьшается до $h_C = 1{,}5$ Э.

Кривая *1* на основном рисунке отражает плотность энергии в отсутствие поля H_{0x}, что соответствует намагничиванию пластины точно по нормали к ее плоскости. Эта кривая имеет два симметричных

Рис. 9.25. Зависимости плотности энергии от полярного угла отклонения вектора намагниченности от нормали к плоскости пластины при различных значениях поля H_{0x}: *1* — 0 Э; *2* — 1,5 Э; *3* — 3,0 Э; *4* — 1,91 Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс; $H_{0y} = 0$ Э; $H_{0z} = 265$ Э. Плотность энергии отсчитывается от значения $U_0 = -2720{,}0$ эрг см$^{-3}$. Пояснение врезки приведено в тексте

минимума при $\theta_{1,2} = \pm 18{,}8°$, соответствующих $U - U_0 = 54{,}2$ эрг см$^{-3}$. Все ориентации намагниченности по азимутальному углу φ по энергиям равны, то есть вектор намагниченности по углу φ может перемещаться свободно.

Пусть теперь включено поперечное переменное поле круговой поляризации, амплитуда которого недостаточна для развития прецессии на углы, сравнимые с величиной статического отклонения намагниченности от нормали. При этом вектор намагниченности прецессирует с малой амплитудой вокруг положения равновесия, причем, благодаря различию гироскопических сил, действующих на вектор намагниченности в положениях максимального и минимального полярных углов, положение равновесия смещается в сторону. Таким образом происходит прецессия этого положения по кругу, радиус которого определяется величиной равновесного отклонения от нормали, а период — амплитудой переменного поля (как это показано в работе [306]). Вследствие независимости энергии от ориентации равновесного положения по азимутальному углу φ, движение равновесного положения по кругу является равномерным. На прецессионном портрете это выглядит как равномерное заполнение большого кольца малыми кольцами (рис. 9.23, *б*).

При задании поперечной компоненты поля $H_{0x} = 1{,}5$ Э, кривая *1* заменяется кривой *2*, имеющей два несимметричных минимума:

первый — при $\theta_1 = 21{,}1°$ и $\varphi = 0°$, соответствующий $U - U_0 = -65{,}6$ эрг см$^{-3}$, второй — при $\theta_2 = -14{,}7°$ и $\varphi = 180°$, соответствующий $U - U_0 = -44{,}3$ эрг см$^{-3}$. Как видим, первый минимум значительно глубже второго, поэтому прецессия равновесного положения задерживается в области этого минимума на большее время, чем вблизи второго. Такая задержка во времени приводит к сгущению малых колец прецессионного портрета, показанному на рис. 9.23, *г*.

При задании поперечной компоненты поля $H_{0x} = 3{,}0$ Э, кривая *1* заменяется кривой 3, имеющей всего один минимум при $\theta = 22{,}9°$ и $\varphi = 0°$, соответствующий $U - U_0 = -98{,}2$ эрг см$^{-3}$. В этом случае прецессия равновесного положения может происходить только в области этого единственного минимума и большое кольцо на прецессионном портрете размыкается, подобно показанному на рис. 9.24, *б*, то есть имеет место срыв прецессии положения равновесия.

При выбранных параметрах критическое поле срыва равно $H_{0x}^{(c)} = 1{,}91$ Э, при этом зависимость $U(\theta)$ изображается кривой *4* (пунктир). Эта кривая имеет единственный минимум при $\theta = 21{,}7°$ и $U - U_0 = -89{,}0$ эрг см$^{-3}$. Вместо другого минимума имеется перегиб, соответствующий $\theta = -10{,}5°$, $U - U_0 = -62{,}2$ эрг см$^{-3}$. Плоский участок в окрестности перегиба располагается по θ от $-13{,}1°$ до $-8{,}0°$ и соответствует $U - U_0 = -(62{,}2 \pm 0{,}1)$ эрг см$^{-3}$.

Векторная модель. Исходя из рис. 9.25, сгущение должно образовываться там, где энергетическая поверхность имеет наиболее глубокий минимум, то есть вдоль оси Ox, где действует поле H_{0x}. Однако, как уже отмечалось, при рассмотрении рис. 9.23, *г*, сгущение соответствует оси Oy, то есть сдвинуто по азимутальному углу на 90°.

Такой сдвиг положения сгущения можно объяснить на основе векторной модели, подобной построенной в работах [307, 396].

Рассмотрим рис. 9.26, где показана схема образования сдвига сгущения. Будем рассматривать положение равновесия как самостоятельный вектор, который прецессирует вокруг направления поля. Так можно считать, если период прецессии положения равновесия намного превышает период переменного поля, в такт с которым прецессирует вектор намагниченности, то есть положение вектора намагниченности за несколько периодов можно усреднить, и тогда результирующий усредненный вектор будет перемещаться как вектор

Рис. 9.26. Схема образования сдвига сгущения колец на прецессионном портрете

положения равновесия. На рисунке усредненный вектор положения равновесия обозначен через $\mathbf{L}$. Этот вектор прецессирует по конусу, ось которого совпадает с осью Oz (или близка к этой оси), вдоль которой направлена основная составляющая постоянного поля H_{0z}. По аналогии с механикой [401] можно рассмотреть вектор $\mathbf{L}$ как жесткий стержень с распределенной массой, для которого можно ввести момент количества движения по формуле

$$\mathbf{N} = \sum_i m_i[\mathbf{R}_i \times \mathbf{v}_i], \tag{9.24}$$

где m_i, $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{v}_i$ — масса, радиус-вектор и скорость i-го элемента стержня. Введенный таким образом момент количества движения будет направлен вдоль оси Oz, как это показано на рисунке. Далее учтем, что компонента постоянного поля H_{0x} действует на вектор намагниченности, а следовательно, и на усредненный вектор положения равновесия $\mathbf{L}$ в направлении, которое совпадает с направлением этой компоненты, то есть вдоль оси Ox, образуя силу $\mathbf{F}$. Момент этой силы относительно точки O закрепления вектора $\mathbf{L}$, пропорционален векторному произведению:

$$\mathbf{P} \propto [\mathbf{L} \times \mathbf{F}]. \tag{9.25}$$

При этом, согласно основному закону динамики твердого тела, изменение момента количества движения $\mathbf{N}$ определяется формулой

$$d\mathbf{N}/dt = \mathbf{P}, \tag{9.26}$$

или

$$d\mathbf{N}/dt \propto [\mathbf{L} \times \mathbf{F}], \tag{9.27}$$

то есть направлено вдоль оси Oy. В результате момент количества движения $\mathbf{N}$ под действием компоненты поля H_{0x} наклоняется к оси Oy, принимая положение $\mathbf{N}_1$. Такое изменение ориентации момента количества движения $\mathbf{N}$ влечет за собой аналогичное изменение ориентации вектора положения равновесия $\mathbf{L}$ также в сторону наклона к оси Oy до положения $\mathbf{L}_1$, что при достаточной величине H_{0x} приводит к переносу сгущения малых колец на прецессионном портрете с оси Ox на ось Oy против часовой стрелки.

Таким образом, рассмотрение, проведенное на основе энергетической модели, позволяет качественно объяснить появление сгущения малых колец на прецессионном портрете, а также явление срыва прецессии положения равновесия при поле, большем критического. Предложенная векторная модель позволяет также качественно объяснить поворот области сгущения против часовой стрелки. Отметим однако, что полученное на основе энергетической модели значение поля срыва по сравнению с наблюдаемым в динамическом режиме является несколько завышенным.

9.7.5. Проверка формулы для периода

Как сказано выше (раздел 9.1.4), в работе [306] была предложена формула (9.19), связывающая период прецессии положения равновесия T с величиной постоянного поля H_0 и амплитудой переменного поля $h_{0x,y}$:

$$T = \frac{A}{h_0^2\sqrt{1-\left(\dfrac{H_0}{4\pi M_0}\right)^2}}. \tag{9.28}$$

С целью выявления применимости этой формулы в несимметричном случае проводилась проверка для $4\pi M_0 = 280$ Гс на двух частотах 100 и 500 МГц при постоянном поле от 80 до 240 Э и амплитуде переменного поля от 2 до 70 Э. При этом поперечная компонента постоянного поля, будучи ограниченной сверху полем срыва, менялась в пределах от 0,02 до 0,20 Э.

Проверка показала, что поперечная компонента постоянного поля $H_{0x,y}$, будучи малой по сравнению с продольной компонентой H_{0z}, существенного влияния на зависимость периода от H_{0z}, не оказывает, причем приведенная формула (9.28) выполняется во всем интервале изменения параметров по постоянному полю с точностью не менее 9,4 %, по переменному — не менее 6,5 %.

9.7.6. Области существования прецессии положения равновесия

Рассмотрим теперь, как сказывается несимметричность постоянного поля, определяемая его поперечной компонентой H_{0x}, на характере областей существования прецессии положения равновесия по постоянному H_{0x} и переменному $h_{0x,y}$ полям.

Общий характер областей существования иллюстрируется рис. 9.27, где показаны зависимости критического поля срыва прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля при различных частотах.

Каждая кривая *1–5*, соответствующая определенной частоте, состоит из сплошного и пунктирного участков. При этом сплошным линиям соответствует режим без охвата центра, пунктирным — с охватом центра. Укрупненные точки и исходящие из них вертикальные прямые точечные линии соответствуют границам перехода от одного режима к другому. Для каждой частоты прецессия положения равновесия существует только ниже соответствующей кривой линии *1–5*, причем левее укрупненной точки с вертикальной точечной линией реализуется режим без охвата центра, правее — режим с охватом центра.

Из рисунка видно, что на каждой частоте при любой заданной амплитуде переменного поля $h_{0x,y}$ существует критическое значение поля срыва $H_{0x}^{(c)}$, ниже которого прецессия положения имеется, а выше — отсутствует. Все кривые *1–5* подобны друг другу, причем каждая кривая

Рис. 9.27. Зависимости критического поля срыва прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля при различных частотах f: *1*, *1′* — 100 МГц; *2*, *2′* — 200 МГц; *3*, *3′* — 300 МГц; *4*, *4′* — 400 МГц; *5*, *5′* — 500 МГц. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс; $\alpha = 0{,}3$; $H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 265$ Э. Параметры врезки указаны в тексте

имеет максимум, и состоит из плавно восходящего и резко спадающего участков. Максимум соответствует амплитуде переменного поля $h_{0x,y}^{(m)}$ и полю срыва $H_{0x}^{(cm)}$. При увеличении частоты максимум становится больше и смещается в сторону большего переменного поля. Все кривые начинаются вблизи амплитуды поля $h_{0x,y} = 0{,}00$ Э и заканчиваются при значении поля $h_{0x,y}^{(e)}$, своем для каждой частоты. При превышении переменным полем определенного критического значения $h_{0x,y}^{(c)}$ режим без охвата центра заменяется режимом с охватом.

Критические значения максимального поля срыва и амплитуд переменного поля следующие:
при частоте $f = 100$ МГц: $h_{0x,y}^{(m)} = 7{,}0$ Э; $H_{0x}^{(cm)} = 0{,}141$ Э; $h_{0x,y}^{(c)} = 8{,}4$ Э; $h_{0x,y}^{(e)} = 9{,}65$ Э;
при частоте $f = 200$ МГц: $h_{0x,y}^{(m)} = 16{,}0$ Э; $H_{0x}^{(cm)} = 0{,}245$ Э; $h_{0x,y}^{(c)} = 17{,}0$ Э; $h_{0x,y}^{(e)} = 23{,}25$ Э;
при частоте $f = 300$ МГц: $h_{0x,y}^{(m)} = 34{,}0$ Э; $H_{0x}^{(cm)} = 0{,}460$ Э; $h_{0x,y}^{(c)} = 0{,}27$ Э; $h_{0x,y}^{(e)} = 40{,}55$ Э;

при частоте $f = 400$ МГц: $h_{0x,y}^{(m)} = 51{,}0$ Э; $H_{0x}^{(cm)} = 0{,}710$ Э; $h_{0x,y}^{(c)} = 35{,}0$ Э; $h_{0x,y}^{(e)} = 61{,}25$ Э;
при частоте $f = 500$ МГц: $h_{0x,y}^{(m)} = 69{,}0$ Э; $H_{0x}^{(cm)} = 1{,}600$ Э; $h_{0x,y}^{(c)} = 46{,}0$ Э; $h_{0x,y}^{(e)} = 85{,}05$ Э.

Разреженными точечными линиями *1′–5′* показаны границы между двумя режимами при поле, большем критического поля срыва. Эти границы являются вертикальными прямыми с точностью не менее 5 %. По обе стороны от этих границ прецессия равновесного положения отсутствует и происходит прецессия, близкая к круговой, однако характеры прецессии по разные стороны от границы различаются. Прецессионный портрет слева от этих линий имеет вид слегка размазанного частично вытянутого вдоль оси Oy кольца, центр которого близок к точке статического равновесия. Прецессионный портрет справа от этих линий имеет вид узкого четко очерченного кольца, форма которого приближается к круговой, а центр совпадает с началом координат.

Из различной высоты максимумов кривых *1–5* следует, что при определенной величине поперечного постоянного поля прецессия положения равновесия может существовать только на частотах, превышающих некоторое критическое значение. Это обстоятельство дополнительно иллюстрируется врезкой, где схематически показаны зависимости критической частоты от амплитуды переменного поля при различных значениях поперечного постоянного поля. Цифровые обозначения кривых на врезке соответствуют значениям поперечного поля $H_{0x}^{(c)}$: *1* — 0,0 Э; *2* — 0,2 Э; *3* — 0,4 Э; *4* — 0,6 Э; *5* — 0,8 Э. Прецессия положения равновесия существует только внутри треугольников, углы при нижних вершинах которых, образованных наклонной и вертикальной линиями, заштрихованы.

Замечание. Таким образом, из врезки в рис. 9.27 видно, что при увеличении амплитуды переменного поля область существования прецессии положения равновесия смещается выше по частоте. Следует заметить, что подобное смещение уже отмечалось в разделе 9.2.2 при рассмотрении рис. 9.8, из которого видно, что по мере увеличения амплитуды переменного поля от 1,5 Э до 6,0 Э резкий спад кривых *1–4*, правее которого возбуждение прецессии положения равновесия имеет место, смещается от частоты 32 МГц до частоты 66 МГц. То есть, несмотря на различие интервалов изменения поля и частоты на рис. 9.27 и рис. 9.8, факт существования критической частоты, соответствующей заданному значению поля, в обоих случаях полностью сохраняется. Таким образом, можно полагать, что приведенный здесь рис. 9.27 служит дополнительным подтверждением высказанного в разделе 9.2.2 положения об определенном отставании вектора намагниченности от вращения вектора переменного поля, которое и является причиной существования критической частоты, повысить значение которой можно только путем увеличения амплитуды переменного поля.

9.7.7. Объяснение вида областей существования на основе энергетической модели

Общий характер приведенных на рис. 9.27 кривых можно качественно пояснить с помощью описанной выше (раздел 9.7.4) энергетической модели.

Рассмотрим рис. 9.28, где показаны зависимости плотности энергии U от полярного угла θ отклонения вектора намагниченности от нормали к плоскости пластины для трех различных значений поперечной компоненты постоянного поля H_{0x}. Рис. 9.28, *а* соответствует $H_{0x} = 0$. В этом случае зависимость $U(\theta)$ относительно линии $\theta = 0$ симметрична и имеет два минимума одинаковой глубины при $U = U_1$ с максимумом между ними при $U = U_2$. В отсутствие переменного поля уровень энергии системы в целом соответствует минимумам при $U = U_1$ и прецессия намагниченности отсутствует.

При увеличении амплитуды переменного поля уровень энергии системы в целом повышается и вблизи минимумов возникает прецессия намагниченности. В интервале $U_1 < U < U_2$ благодаря равенству энергетических минимумов происходит симметричная прецессия положения равновесия (условно уровень для этого случая энергии показан двойной волнистой линией). На прецессионном портрете диаметр малых колец определяется шириной минимумов зависимости $U(\theta)$, а диаметр большого кольца — расстоянием между ними.

При дальнейшем увеличении переменного поля уровень энергии повышается и при $U > U_2$ вектор намагниченности начинает прецессировать по большому кругу, определяемому расстоянием между боковыми ветвями зависимости $U(\theta)$ (тройная волнистая линия). На прецессионном портрете малые кольца исчезают и остается только одно узкое большое кольцо, что означает срыв прецессии положения равновесия. Таким образом, прецессия положения равновесия существует в интервале переменного поля от нуля до конечного значения, соответствующего $U = U_2$. На рис. 9.27 это соответствует нижнему краю областей

Рис. 9.28. Зависимости плотности энергии от полярного угла отклонения вектора намагниченности от нормали к плоскости пластины, для различных значений поперечной компоненты постоянного поля

существования прецессии положения равновесия, изображаемых кривыми *1–5*.

Рассмотрим теперь рис. 9.28, *б*, соответствующий $0 < H_{0x} < H_{0x}^{(c)}$. В этом случае зависимость $U(\theta)$ несимметрична и имеет два минимума при $U = U_1$ и $U = U_2$ с максимумом между ними при $U = U_3$. В отсутствие переменного поля уровень энергии системы в целом соответствует минимуму при $U = U_1$ и какая-либо прецессия отсутствует. При увеличении амплитуды переменного поля уровень энергии системы в целом повышается и вблизи первого минимума возникает прецессия намагниченности. В интервале $U_1 < U < U_2$ эта прецессия имеет круговой характер вокруг положения статического равновесия вектора намагниченности, определяемого несимметричным постоянным полем (одинарная волнистая линия). На прецессионном портрете имеется одно малое кольцо, смещение центра которого относительно начала координат определяется несимметричностью постоянного поля. В интервале $U_2 < U < U_3$ возникают условия для прецессии положения равновесия (уровень энергии для этого случая показан двойной волнистой линией). Прецессионный портрет имеет вид большого кольца, заполненного малыми кольцами со сгущением, интенсивность которого определяется разницей между уровнями минимумов U_1 и U_2. При $U > U_3$ прецессия положения равновесия срывается и на прецессионном портрете остается одно узкое большое кольцо (в соответствии с тройной волнистой линией), центр которого находится вблизи начала координат. На рис. 9.27 такой характер поведения прецессии положения равновесия соответствует интервалу переменного поля, определяемому пересечением кривых типа *1–5* с горизонтальными линиями, соответствующими заданному значению поперечной компоненты постоянного поля в интервале $0 < H_{0x} < H_{0x}^{(c)}$.

Рис. 9.28, *в* соответствует $H_{0x} > H_{0x}^{(c)}$. При этом зависимость $U(\theta)$ имеет всего один минимум при $U = U_1$ и прецессия положения равновесия отсутствует. В интервале $U_1 < U < U_2$ происходит прецессия по малому кругу, центр которого на прецессионном портрете находится вблизи положения равновесия намагниченности. При $U > U_2$ прецессия происходит по большому кругу, центр которого на прецессионном портрете находится вблизи начала координат.

9.7.8. Зависимость периода прецессии положения равновесия от несимметричности постоянного поля

Рассмотрим теперь, как отражается несимметричность постоянного поля на периоде прецессии положения равновесия.

На рис. 9.29 показаны зависимости периода прецессии положения равновесия T от поперечной компоненты постоянного поля H_{0x} при различных амплитудах переменного поля $h_{0x,y}$.

Вертикальные точечные линии соответствуют критическим значениям поля срыва прецессии положения равновесия $H_{0x}^{(c)}$ при тех же

Рис. 9.29. Зависимости периода прецессии положения равновесия от поперечной компоненты постоянного поля при различных амплитудах переменного поля $h_{0x,y}$: *1* — 10 Э; *2* — 20 Э; *3* — 30 Э; *4* — 35 Э; *5* — 40 Э; *6* — 50 Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $\alpha = 0{,}3$, $H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 265$ Э, $f = 400$ МГц. Параметры врезки приведены в тексте

значениях амплитуды переменного поля $h_{0x,y}$. Укрупненные точки соответствуют значениям периода прецессии положения равновесия при поле меньшем поля срыва на 0,001 Э. Для кривых *1* и *2* эти точки находятся за рамкой рисунка и соответствуют:

кривая *1* — $T = 3{,}14$ мкс при $H_{0x} = 0{,}039$ Э (при $H_{0x}^{(c)} = 0{,}040$ Э);

кривая *2* — $T = 3{,}00$ мкс при $H_{0x} = 0{,}136$ Э (при $H_{0x}^{(c)} = 0{,}137$ Э).

Для остальных кривых значения укрупненных точек следующие:

3 — $T = 0{,}300$ мкс при $H_{0x} = 0{,}22326$ Э (при $H_{0x}^{(c)} = 0{,}22327$ Э);

4 — $T = 0{,}105$ мкс при $H_{0x} = 0{,}300$ Э (при $H_{0x}^{(c)} = 0{,}350$ Э);

5 — $T = 0{,}080$ мкс при $H_{0x} = 0{,}440$ Э (при $H_{0x}^{(c)} = 0{,}450$ Э);

6 — $T = 0{,}038$ мкс при $H_{0x} = 0{,}600$ Э (при $H_{0x}^{(c)} = 0{,}660$ Э).

Пунктирная кривая, проходящая через укрупненные точки, соответствует границе области существования прецессии положения равновесия. Ниже и левее этой кривой прецессия положения равновесия имеется, выше и правее — отсутствует. При $H_{0x} \to 0$ пунктирная кривая стремится к бесконечности. Только в этом единственном случае период прецессии положения равновесия стремится к бесконечности, то есть при $H_{0x} > 0$ он всегда ограничен тем сильнее, чем больше H_{0x}. При $H_{0x} \to \infty$ пунктирная кривая стремится к значению периода возбуждающего переменного поля, равному $T_h = 0{,}0025$ мкс (при частоте

возбуждения $F = 400$ МГц). Кривые *1–3* соответствуют режиму без охвата центра, кривые *5*, *6* — режиму с охватом центра. Кривая *4* (утолщенная линия) соответствует переходу от режима без охвата центра к режиму с охватом центра, то есть является граничной между областями с различными режимами: выше этой кривой реализуется режим без охвата центра, ниже — режим с охватом центра.

Из рисунка видно, что при режиме без охвата центра (кривые *1–3*) период прецессии положения равновесия с увеличением компоненты поля H_{0x} увеличивается сначала медленно, а затем по мере приближения к полю срыва — резко идет вверх. Увеличение периода по сравнению со значением при $H_{0x} = 0$ Э наибольшее при $h_{0x,y} = 20$ Э (кривая *2*) — около 15 раз, несколько меньше — при $h_{0x,y} = 10$ Э (кривая *1*) — в 4 раза и еще меньшее при $h_{0x,y} = 30$ Э (кривая *3*) — около 3 раз. При дальнейшем увеличении амплитуды переменного поля $h_{0x,y}$ увеличение периода прецессии положения равновесия по мере увеличения поля H_{0x} замедляется, и к границе между областями с разными режимами (кривая *4*) период увеличивается менее чем в 1,5 раза, причем на правом конце зависимости T от H_{0x} появляется плоский горизонтальный участок, который далее переходит в слегка спадающий (кривая *5*). При дальнейшем увеличении $h_{0x,y}$, начиная с $h_{0x,y} = 50$ Э, зависимость периода T от поля H_{0x} становится крайне малой или даже совсем отсутствует (кривая *6*).

Переход от прецессии положения равновесия к простой прецессии при режиме без охвата центра (кривые *1–3*) происходит с резким изменением периода и амплитуды колебаний намагниченности. Медленные колебания, отвечающие прецессии положения равновесия, полностью исчезают, остаются только быстрые, период которых равняется периоду возбуждающего переменного поля, а амплитуда быстрых колебаний скачком увеличивается в два раза и более, как правило, несколько превышая амплитуду бывших до этого медленных колебаний. Какие-либо следы прецессии положения равновесия полностью пропадают, вектор намагниченности прецессирует по стационарной круговой (или близкой к круговой) орбите без каких-либо отклонений.

Переход от прецессии положения равновесия к простой прецессии при режиме с охватом центра (кривые *5*, *6*) происходит довольно плавно. Амплитуда быстрых колебаний, происходящих с периодом возбуждающего поля, возрастает незначительно, но амплитуда прецессии положения равновесия перестает быть стационарной во времени и постепенно уменьшается, то есть прецессия положения равновесия становится затухающей, и положение равновесия постепенно принимает новое стационарное положение. В результате этого по прошествии некоторого времени остается только стационарная круговая (или близкая к круговой) прецессия вектора намагниченности вокруг нового стационарного положения равновесия. В процессе затухания период колебаний прецессии положения равновесия остается близким к тому

значению, которое было в незатухающем режиме, а амплитуда спадает тем быстрее, чем больше величина поля H_{0x}.

В качестве примера на врезке приведена зависимость времени затухания τ (по амплитуде до 0,1 от начального значения) от поля H_{0x} при $h_{0x,y} = 40$ Э. Внизу горизонтальной точечной линией показано время затухания собственных колебаний намагниченности в отсутствие возбуждения, равное 0,05 мкс. Из рисунка видно, что прецессия положения равновесия затухает значительно медленнее свободных колебаний, причем это превышение тем больше, чем меньше поле H_{0x} отстоит от своего критического значения. Незатухающая прецессия положения равновесия при любой амплитуде переменного поля $h_{x,y}$ существует только при поле $H_{0x} < H_{0x}^{(cm)}$, где значение $H_{0x}^{(cm)} = 0{,}710$ Э показано стрелкой. Затухающая прецессия положения равновесия после включения возбуждения может существовать и при полях H_{0x}, больших чем $H_{0x}^{(cm)}$, причем время затухания с увеличением H_{0x} уменьшается в соответствии с зависимостью, показанной на врезке. Затухающая прецессия положения равновесия исчезает полностью только в поле H_{0x}, таком, что время ее затухания становится меньше времени затухания собственных колебаний, что при $\alpha = 0{,}3$ соответствует приблизительно $H_{0x} \sim 1{,}60$ Э.

Отметим, что время затухания прецессии положения равновесия при неизменном поле H_{0x} с увеличением поля $h_{x,y}$ также уменьшается. Так при $H_{0x} = 0{,}4$ Э критическое значение переменного поля $h_{0x,y}$, выше которого происходит срыв прецессии положения равновесия, составляет 54 Э. Вблизи этого поля время затухания прецессии равно $\tau = 0{,}50$ мкс. При $h_{0x,y} = 56$ Э время затухания составляет 0,24 мкс, при 58 Э — 0,16 мкс, при 60 Э — 0,10 мкс. Здесь также прецессия положения равновесия затухает значительно медленнее свободных колебаний.

9.7.9. Частотные свойства периода прецессии при несимметричности постоянного поля

Рассмотрим теперь рис. 9.30, где показаны зависимости периода прецессии положения равновесия T от поперечной компоненты постоянного поля H_{0x} при различных частотах переменного поля $h_{x,y}$. Вертикальные точечные линии соответствуют критическим значениям поля срыва прецессии положения равновесия $H_{0x}^{(c)}$ при тех же значениях частоты переменного поля. Левее этих линий прецессия положения равновесия является стационарной во времени, правее — для кривых *2–4* и *8* — отсутствует, для кривых *1* и *5–7* является затухающей (на протяжении 2–5 периодов), причем затухает тем быстрее, чем выше частота. Укрупненные точки на кривых *1*, *6* и *7* соответствуют смене режимов прецессии положения равновесия со стационарного на затухающий. Для кривой *5* критическое поле срыва и смены режимов находится за правым краем рисунка и соответствует 1,10 Э.

Рис. 9.30. Зависимости периода прецессии положения равновесия от поперечной компоненты постоянного поля при различных частотах f переменного поля $h_{x,y}$: *1* — 300 МГц; *2* — 400 МГц; *3* — 500 МГц; *4* — 600 МГц; *5* — 500 МГц; *6* — 600 МГц; *7* — 700 МГц; *8* — 800 МГц. Сплошные кривые *1–4* соответствуют $h_{0x,y} = 30$ Э. Пунктирные кривые *5–8* соответствуют $h_{0x,y} = 60$ Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $\alpha = 0{,}3$, $H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 265$ Э

Из рисунка видно, что в зависимости от соотношения между частотой и амплитудой переменного поля возможны два вида зависимости периода прецессии от величины поперечной компоненты постоянного поля.

Зависимость первого вида (кривые *1*, *5–7*) — при увеличении поперечной компоненты постоянного поля период увеличивается до определенного конечного значения, после чего спадает. Максимум периода соответствует критическому полю срыва, ниже которого прецессия является стационарной, а выше — затухающей.

Зависимость второго вида (кривые *2–4*, *8*) — при увеличении поперечной компоненты постоянного поля вблизи поля срыва период стремится к бесконечности, ниже поля срыва прецессия является стационарной, а выше — отсутствует.

При заданной амплитуде переменного поля имеется критическая частота, ниже которой наблюдаются зависимости первого вида, а выше — второго. При амплитуде $h_{0x,y} = 30$ Э (кривые *1–4*) критическая частота приблизительно равна $f_c \approx 350$ МГц, при амплитуде $h_{0x,y} = 60$ Э (кривые *5–8*) критическая частота $f_c \approx 750$ МГц.

Из общего характера зависимостей, приведенных на рис. 9.29 и рис. 9.30, можно сделать вывод, что при приближении поперечного поля к полю срыва период прецессии положения равновесия

увеличивается (в некоторых случаях — до бесконечности). Это можно объяснить тем, что приближение поперечного поля к полю срыва означает увеличение несимметричности постоянного поля. Такое увеличение несимметричности приводит к увеличению времени задержки основной прецессии, что на прецессионном портрете проявляется в увеличении концентрации малых колец в области сгущений. Увеличение времени задержки приводит к увеличению периода прецессии положения равновесия, что и наблюдается на рис. 9.29 и рис. 9.30.

9.8. Нарушение симметричности по поперечному переменному полю

В предыдущем разделе прецессия положения равновесия изучалась в условиях несимметричности по постоянному полю. Обратимся теперь к более подробному рассмотрению несимметричного возбуждения, состоящего в неравенстве поперечных компонент переменного поля, а также в наличии продольной его составляющей. В качестве дополнительного фактора в этих условиях учтем также несимметричность постоянного поля. Рассмотрение ограничим случаем режима № 2 — прецессией положения равновесия без охвата центра.

9.8.1. Симметричные условия возбуждения

В качестве отправного эталона для следующего далее анализа несимметричного возбуждения, обратимся к рис. 9.31, где показано развитие во времени компонент намагниченности m_x (*а*) и m_y (*б*), а также соответствующий прецессионный портрет $m_y(m_x)$ (*в*).

На рис. 9.31, *а* и рис. 9.31, *б* частые колебания соответствуют прецессии намагниченности с частотой возбуждения, редкие — прецессии

Рис. 9.31. Прецессия положения равновесия при симметричном возбуждении: $h_{0x} = 7{,}00$ Э, $h_{0y} = 7{,}00$ Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 267$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц

положения равновесия. Видно, что прецессия положения равновесия имеет синусоидальный характер со сдвигом фазы между компонентами на 90°. Прецессионный портрет представляет собой большое кольцо, соответствующее прецессии положения равновесия, равномерно заполненное малыми кольцами, соответствующими прецессии намагниченности вокруг положения равновесия с частотой возбуждения.

Далее параметры возбуждения и постоянного поля будут варьироваться относительно параметров, принятых на этом рисунке.

9.8.2. Несимметричное поперечное переменное поле

В ходе настоящих исследований было выявлено, что несимметричное возбуждение, в сравнении с симметричным случаем, резко меняет характер прецессии положения равновесия.

Рассмотрим сначала случай поперечно несимметричного возбуждения, когда переменное поле имеет не круговую, а эллиптическую поляризацию. Пусть переменное поле имеет вид:

$$h_x = h_{0x} \sin(2\pi f t), \tag{9.29}$$

$$h_y = -h_{0y} \cos(2\pi f t), \tag{9.30}$$

где F — частота переменного поля, $h_{0x,y}$ — его амплитуда. Симметричное возбуждение соответствует круговой поляризации переменного поля при которой $h_{0x} = h_{0y}$. Поперечно несимметричным возбуждением будем называть случай поля эллиптической поляризации, то есть такой, когда $h_{0x} \neq h_{0y}$.

Проверка показывает, что характер колебаний при различном уровне возбуждения, даже при сохранении одной и той же степени несимметричности, заметно различается. Предварительная проверка показывает, что существенное различие характера колебаний имеет место при переходе через амплитуду возбуждения $h_{0x,y}$ порядка $2 \ldots 4$ Э.

Замечание. Более точное значение, а также его критичность, то есть резкость изменения, приводящая к значительному изменению характера колебаний, авторам настоящей монографии на момент ее написания не известны, так как в статьях, на которые опирается настоящее изложение, подобные данные отсутствуют. Таким образом, авторы оставляют этот вопрос в качестве предмета для дальнейших исследований.

Итак, сначала рассмотрим как более характерный случай, при котором уровень возбуждения уже достаточен для проявления наиболее сильного отличия колебаний от симметричного случая. Обратимся к рис. 9.32, где показаны те же процессы, что и на рис. 9.31, имеющие место при примерно таком же уровне возбуждения, но при существенной его несимметричности.

Из рисунка видно, что в этом случае прецессия положения равновесия имеет характер импульсов неправильной формы (*а*, *б*), со сдвигом

Рис. 9.32. Прецессия положения равновесия при несимметричном возбуждении: $h_{0x} = 7{,}00$ Э, $h_{0y} = 6{,}12$ Э. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.31

фазы между компонентами на те же 90°. На прецессионном портрете (*в*) заполнение большого кольца малыми резко неравномерное и имеются два кольцеобразных сгущения вблизи оси Ox.

В приведенном примере нарушение симметричности переменного поля составляет около 12,5 %. Однако предварительная проверка показывает, что здесь также (как и при изменении амплитуды) имеются два четко различающихся режима колебаний. Граница между ними соответствует нарушению симметричности примерно на 15 ... 20 %.

Чтобы выявить другой, отличный от иллюстрируемого рис. 9.32 режим, рассмотрим теперь более значительную степень нарушения симметричности при том же уровне амплитуды возбуждения. Обратимся к рис. 9.33, соответствующем нарушению симметричности около 25 %. Можно видеть, что в этом случае периодическая прецессия положения равновесия отсутствует, а происходят только колебания намагниченности с частотой возбуждения (*а*, *б*), то есть с начального момента времени происходит установление положения равновесия в стационарное состояние, и намагниченность далее прецессирует вокруг этого положения с частотой возбуждения. На прецессионном портрете (*в*) это выглядит как образование устойчивого цикла, центр которого относительно нуля смещен.

Итак, в отличие от случая симметричного возбуждения, приведенная картина резко критична к величине несимметричности переменного поля. Так в интервале $0 < h_{0y} < 0{,}86h_{0x}$ характер прецессии соответствует рис. 9.33, в интервале $0{,}86h_{0x} < h_{0y} < 0{,}90h_{0x}$ — рис. 9.32, в интервале $0{,}90h_{0x} < h_{0y} < 1{,}00h_{0x}$ — рис. 9.31.

9.8.3. Случаи малой и большой амплитуды

Наконец обратимся к рассмотрению характера прецессии положения равновесия при небольшой степени несимметричности возбуж-

Рис. 9.33. Прецессия намагниченности при сильной несимметричности переменного поля: $h_{0x} = 7{,}00$ Э, $h_{0y} = 5{,}25$ Э. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.31

дения (менее критической) в случаях малого и большого его уровней. Рассмотрим рис. 9.34, где показаны зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности от времени и соответствующие прецессионные портреты при двух уровнях возбуждения.

Из рисунка можно видеть, что в зависимости от амплитуды возбуждения колебания происходят в двух существенно различных режимах. Наиболее характерными признаками, отличающими оба эти режима от симметричного случая (рис. 9.31), по-видимому, можно считать изменение периода колебаний (рис. 9.34, *а*, *в*), а также сгущение малых колец, как более или менее равномерное при низком уровне возбуждения (рис. 9.31, *б*), так и характерно раздвоенное при высоком его уровне (рис. 9.31, *г*). Рассмотрим эти признаки по отдельности более подробно.

Период колебаний. Из разверток по времени в левых частях рисунка (*а*, *в*) видно, что период колебаний прецессии положения равновесия при увеличении амплитуды возбуждения уменьшается: при малой амплитуде он составляет $T_1 = 4{,}4 \cdot 10^{-6}$ с, при большой — $T_2 = 0{,}52 \times \times 10^{-6}$ с. Для зависимости периода от амплитуды переменного поля в работе [306] была прендложена формула (9.19):

$$T = \frac{A}{h_0^2 \sqrt{1 - \left(\dfrac{H_0}{4\pi M_0}\right)^2}}. \qquad (9.31)$$

Для симметричного возбуждения в этой работе было получено значение $A = 1{,}45$ Э^2 с, откуда при малой амплитуде, исходя из среднего значения несимметричного поля 1,59 Э и его крайних значений 1,43 Э и 1,75 Э, период получается равным: $T_1 = (1{,}90 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-6}$ с,

Рис. 9.34. Зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности от времени (*а, в*) и прецессионные портреты (*б, г*) при несимметричном возбуждении (*в, г*) малой (*а, б*) и большой (*в, г*) амплитуды. Малая амплитуда (*а, б*) соответствует: $h_{0x} = 1{,}75$ Э, $h_{0y} = 1{,}43$ Э. Большая амплитуда (*в, г*) соответствует: $h_{0x} = 7{,}00$ Э, $h_{0y} = 6{,}12$ Э. Остальные параметры — те же, что приняты при построении рис. 9.31

а при большой амплитуде при среднем поле 6,56 Э и крайних значениях 6,120 Э и 7,000 Э, получаем: $T_2 = (0{,}112 \pm 0{,}014) \cdot 10^{-6}$ с.

Таким образом, видно, что при любой амплитуде при несимметричном возбуждении период колебаний прецессии положения равновесия получается значительно большим (в 2 ... 5 раз), чем при симметричном. Найдем соответствующие значения параметра A. Из формулы (9.31) получаем

$$A = Th_0^2\sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{4\pi M_0}\right)^2}. \qquad (9.32)$$

Для малой амплитуды с точностью до округления получаем: $A_1 = (3{,}35 \pm 0{,}13)$ Э^2 с. Аналогично для большой амплитуды получаем: $A_2 = (6{,}76 \pm 0{,}16)$ Э^2 с. То есть значение постоянной A здесь также получается значительно большим.

Прецессионный портрет. Из прецессионных портретов видно, что при малой амплитуде малые кольца размазаны, накладываются друг на друга, образуя в первой координатной четверти между 20° и 90° относительно оси Ox сплошную замазанную область. Центры колец распределены более или менее равномерно между углами от 30° до 80°. В третьей четверти имеется такая же замазанная область, симметричная первой относительно поворота на 180° (то есть между 200° и 270° от той же оси) с центрами колец между 210° и 260°. При большой амплитуде малые кольца резкие и сосредоточены главным образом в первой, с частичным заходом во вторую, координатной области между 10° и 210° (по касательным к краям колец) относительно оси Ox. Центры колец сосредоточены в узкой области $80° \pm 3°$. В третьей четверти имеется такая же область резких колец, симметричная первой относительно поворота на 180° (то есть между 190° и 300° от той же оси). Центры колец сосредоточены в области $260° \pm 3°$.

Из рис. 9.34, *г* также можно видеть, что при большой амплитуде прецессионный портрет получается слегка сплюснутым по вертикали ($|m_y|_{\max} < |m_x|_{\max}$). Эта сплюснутость особенно сильно проявляется на внутренней огибающей большого кольца. Так, на внешней огибающей: $|m_y|_{\max} = 0{,}370$, $|m_x|_{\max} = 0{,}395$, откуда: $|m_y|_{\max}/|m_x|_{\max} = 0{,}94$. При этом на внутренней огибающей: $|m_y|_{\max} = 0{,}45$, $|m_x|_{\max} = 0{,}10$, откуда: $|m_y|_{\max}/|m_x|_{\max} = 4{,}50$.

Заметим также, что из разверток по времени (*а*, *в*) видна дополнительная особенность колебаний: импульсы при любой амплитуде получаются сильно несимметричными, содержат плавные почти плоские участки, разделенные резкими крутыми перепадами. Плоские участки импульсов на развертках по времени (*а*, *в*) соответствуют сгущениям малых колец на прецессионных портретах (*б*, *г*), а резкие перепады между импульсами — участкам разрежения тех же колец.

9.8.4. Схема образования сгущений малых колец на прецессионном портрете

Рассмотрим теперь качественную схему образования сгущений малых колец на прецессионном портрете при поперечном несимметричном возбуждении, иллюстрируемую рис. 9.35.

На рис. 9.35 показана схема образования сгущений малых колец на прецессионном портрете при несимметричном возбуждении в случае $h_x > h_y$. На рис. 9.35, *а* показана общая схема образования прецессионного портрета. Плоскость чертежа совпадает с плоскостями Oxy и Om_xm_y, то есть с плоскостью прецессионного портрета. Постоянное поле ориентировано перпендикулярно плоскости рисунка

Рис. 9.35. Схема образования сгущений малых колец на прецессионном портрете при несимметричном возбуждении ($h_x > h_y$). *а* — схема образования прецессионного портрета; *б* — зависимость потенциала от координаты x при $y = 0$; *в* — зависимость потенциала от координаты x при $y = y_B$

по направлению к наблюдателю, переменное поле с компонентами h_x и h_y вращается в плоскости Oxy. Пунктирными (штриховыми) линиями показаны границы большого кольца прецессии при симметричном возбуждении. Точки A, B, C, D — последовательные положения центров малых колец прецессионного портрета, показанных сплошными утолщенными линиями. Векторы $\mathbf{M}_A$ и $\mathbf{M}_B$ — мгновенные положения проекций вектора намагниченности $\mathbf{M}$ на плоскость Oxy при его прецессии вокруг точек A и B. Тонкое сплошное кольцо между пунктирными (штриховыми) линиями — геометрическое место конца вектора намагниченности в отсутствие возбуждения. Эта линия проходит через точки A, B, C, D. Стрелками показаны направления прецессии вектора намагниченности и положения равновесия.

На рис. 9.35, *б* и рис. 9.35, *в* показаны зависимости статического потенциала от координаты x при $y = 0$ (*б*) и $y = y_B$ (*в*). Двойными волнистыми линиями показаны уровни равного потенциала, соответствующие максимальному возможному размаху прецессии вектора намагниченности. Статический потенциал — фигура вращения вокруг оси Oz (перпендикулярной плоскости чертежа), вид сверху которой соответствует рис. 9.35, *а*. Сплошная линия на рис. 9.35, *а*, проходящая через точки A, B, C, D — линия, на которой потенциал имеет минимум (потенциал имеет вид «кольцевой канавы» с «холмом» посередине).

Благодаря тому, что обе потенциальные ямы на сечении поверхности потенциала при $y = 0$ (*б*) значительно уже потенциальной ямы на сечении при $y = y_B$ (*в*), размах колебаний вектора намагниченности вдоль оси Ox при точке B значительно больше, чем при точке A

(эллипс в окрестности точки B по горизонтали сильно вытянут). Это означает, что кинетическая энергия прецессии в окрестности точки B значительно больше, чем в окрестности точки A. Таким образом, чтобы прецессирующему вектору намагниченности переместиться от точки A к точке B, ему надо набрать дополнительную энергию, которую он получает от возбуждающего переменного поля. Благодаря одинаковому характеру потенциала в окрестности точек A и C, при перемещении намагниченности от точки B к точке C эта энергия высвобождается и уходит через процессы релаксации в решетку. Таким образом, суммарная энергия колебаний намагниченности в точках A и C меньше, чем в точках B и D.

Образно говоря, в процессе движения от точки A через точку B к точке C, система под действием возбуждающего переменного поля, выйдя из точки A, сначала забирается на энергетическую горку в точку B, после чего, перевалив через вершину, скатывается с нее к точке C под действием того же поля. Поскольку при подъеме возбуждающая и скатывающая силы действуют в разные стороны, а при спуске их действие однонаправленно, то подъем происходит значительно труднее и дольше, чем спуск. Таким образом, продвижение на участке между точками A и B требует значительно больше времени, чем продвижение между точками B и C, в результате чего на участке AB накапливается значительно больше малых циклов, чем на участке BC, что и проявляет себя как сгущение малых колец на участке AB прецессионного портрета. Далее система снова поднимается на горку в точке D и спускается с нее к точке A, после чего процесс повторяется, давая сгущение малых колец на участках AB и CD с разрежением на участках BC и DA. Некоторая сплюснутость прецессионного портрета по оси Oy обусловлена эллиптичностью малых колец в окрестностях точек B и D. На временных развертках медленному подъему на горку соответствуют плавные участки импульсов, быстрому спуску — резкие перепады между импульсами.

9.8.5. Различие между низким и высоким уровнями возбуждения

Из рис. 9.34 следует, что при низком (*а*, *б*) и высоком (*в*, *г*) уровнях возбуждения характер колебаний и прецессионного портрета заметно различается. Как показано в предыдущем разделе, сгущение малых колец обусловлено различием в скоростях подъема на энергетическую горку и спуска с нее. Однако можно полагать, что при увеличении уровня возбуждения система начнет двигаться быстрее. То есть подъем и спуск с горки будут происходить за меньшее время. Это объясняет причину уменьшения величины периода колебаний на рис. 9.34, *в* по сравнению с периодом на рис. 9.34, *а*. С другой стороны, поскольку прохождение горки будет осуществляться за меньший промежуток времени, то и весь полный оборот прецессии по большому кольцу будет требовать времени также меньшего. Поэтому сменяющие друг друга малые кольца на прецессионном портрете будут расставлены

по образующей большого кольца на большие расстояния. На рис. 9.34, *г* это проявляется как значительно более редкое расположение малых колец, чем на рис. 9.34, *б*.

Далее, при большем уровне возбуждения амплитуда колебаний, соответствующих частоте возбуждения, будет увеличиваться, как это видно из сравнения рис. 9.12, *а*, рис. 9.13, *а*. На рис. 9.34, *а* и рис. 9.34, *в* имеет место также значительное увеличение амплитуды таких колебаний, то есть ширина образующих импульсов увеличивается. Такое увеличение соответствует увеличению диаметра малых колец, как это видно из сравнения рис. 9.34, *б* и рис. 9.34, *г*.

Малые кольца столь большого диаметра, как на рис. 9.34, *г* уже перестают помещаться в пределах четвертей плоскости прецессионного портрета, более или менее симметрично располагаются теперь лишь их середины. Сгущение малых колец происходит теперь вокруг этих середин, в результате чего сгущения теперь представляют собой не замазывание части большого кольца, как на рис. 9.34, *б*, а собираются в две группы, размазанные в довольно небольшой степени. Примечательно отметить, что центры этих групп по азимутальной координате (около 70°) находятся довольно близко к середине сгущений малых колец на рис. 9.34, *б* (около 50°). Некоторый сдвиг по углу вперед (примерно на 20°), по-видимому, обусловлен более быстрым движением вектора намагниченности по большому кольцу из-за более высокого уровня возбуждения.

Таким образом, можно полагать, что различие режимов, показанных на рис. 9.34, *а, б* и рис. 9.34, *в, г* не является принципиальным, то есть не содержит каких-либо других механизмов, отличных от представленных в предыдущем разделе (рис. 9.35). То есть наблюдаемое различие обусловлено лишь большей скоростью движения вектора намагниченности при более высоком уровне возбуждения. При этом трансформация рис. 9.34, *а, б* в рис. 9.34, *в, г* также должна происходить непрерывным образом.

Замечание. Вообще говоря, утверждение о полностью единой природе режимов, показанных на рис. 9.34, *а, б* и рис. 9.34, *в, г*, авторам настоящей монографии не представляется абсолютно бесспорным. Однако в известной авторам литературе этот вопрос оставлен без внимания, так что, по мнению авторов, тоже может представить интерес для более подробного исследования.

9.8.6. Период прецессии положения равновесия при различной степени несимметричности переменного поля

Рассмотрим теперь некоторые свойства прецессии положения равновесия при несимметричности поперечного поля. На рис. 9.36 показана зависимость периода прецессии положения равновесия от компоненты переменного поля h_{0y} при $h_{0x} = 7$ Э, причем переход к режиму с охватом центра соответствует $h_{0y} = 8$ Э.

Рис. 9.36. Зависимость периода прецессии положения равновесия от степени несимметричности переменного поля. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 267$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц

На рисунке точки — значения периода, полученные путем машинного эксперимента. Сплошная линия построена по эмпирической формуле обратной пропорциональной зависимости

$$y = \frac{1}{30(x-6)} + 0{,}1. \tag{9.33}$$

Из рисунка видно, что при увеличении степени несимметричности переменного поля (то есть при уменьшении h_{0y} по сравнению с постоянной величиной h_{0x}), период прецессии положения равновесия увеличивается, причем скорость увеличения периода с увеличением несимметричности (уменьшением h_{0y}) возрастает. При $h_{0y} = 6{,}1$ Э (вертикальная пунктирная линия) период стремится к бесконечности, что соответствует разрыву большого кольца прецессионного портрета. Можно видеть, что эмпирическая формула отражает реальную зависимость с точностью порядка 10 %.

Увеличение периода при увеличении несимметричности соответствует увеличению времени подъема колебательной системы на потенциальную горку, когда на прецессионном портрете происходит сгущение малых колец.

9.8.7. Критическая степень несимметричности переменного поля

Прецессия положения равновесия критична к степени несимметричности переменного поля. Так, если несимметричность превышает определенную критическую величину, то прецессирующий вектор

намагниченности уже не описывает полный круг вокруг оси Oz, так как не может преодолеть энергетическую «горку», образованную суммой потенциальной и кинетической энергий, ибо его кинетической энергии не хватает. На прецессионном портрете в этом случае большой круг разрывается. Добавить кинетическую энергию можно или повышением амплитуды переменного поля или увеличением его частоты.

Происходящие при этом явления иллюстрируются рис. 9.37, где показаны зависимости критической степени несимметричности переменного поля от относительной амплитуды поля h_{0x} при различных частотах. Точки получены в ходе машинного эксперимента. Сплошная прямая линия построена по эмпирической формуле:

$$\frac{h_{0y}}{h_{0x}} = 0{,}0934\frac{h_{0x}}{h_{0c}} + 0{,}7916, \tag{9.34}$$

где h_{0c} — критическое значение переменного поля круговой поляризации, при котором режим прецессии положения равновесия без охвата центра (№ 2) переходит в режим с охватом центра (№ 3). По рисунку выше экспериментальных точек прецессия положения равновесия описывает полный круг, ниже — этот круг разрывается. По горизонтальной оси отложены относительные величины для того, чтобы совместить зависимости для разных частот. При этом, чем выше частота,

Рис. 9.37. Зависимость критической степени несимметричности переменного поля h_{0y}/h_{0x} от относительной амплитуды поля h_{0x}/h_{0c} при различных частотах f: *1* — 100 МГц; *2* — 200 МГц; *3* — 400 МГц. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 267$ Э, $\alpha = 0{,}3$

тем значения h_{0c} больше. Так, для частоты 100 МГц $h_{0c}^{(100)} = 8{,}0$ Э, для частоты 200 МГц $h_{0c}^{(200)} = 16{,}0$ Э, для частоты 400 МГц $h_{0c}^{(400)} = 33{,}0$ Э.

Из рисунка видно, что линия, построенная по формуле (9.34), ограничивает снизу область существования прецессии положения равновесия для частот 100 и 200 МГц с точностью не хуже 1 %. То же можно сказать и о частоте 400 МГц до $h_{0x}/h_{0c} \leqslant 0{,}6$. Такое поведение вполне укладывается в рамки рассмотренной выше качественной модели. Однако на частоте 400 МГц правее значения $h_{0x}/h_{0c} = 0{,}6$ экспериментальные точки довольно резко уходят вниз (пунктир), что означает расширение области существования прецессии положения равновесия в сторону увеличения несимметричности переменного поля вплоть до значений $h_{0y}/h_{0x} = 0{,}82$. Можно предположить, что такое снижение связано с довольно большим временем релаксации прецессии намагниченности, то есть вектор намагниченности при большой амплитуде на столь высокой частоте уже не успевает полностью следовать за изменением переменного поля, вследствие чего он несколько задерживается, и большой круг прецессии не успевает разорваться до того, как он должен закрутиться снова. В пользу такого предположения говорит и тот экспериментально (машинным путем) установленный факт, что нижняя граница области существования прецессии положения равновесия при увеличении параметра затухания также понижается на любых исследованных частотах. Так, даже на частоте 100 МГц увеличение параметра затухания α на 10 % (с 0,30 до 0,33) приводит к снижению критического значения величины h_{0y}/h_{0x} на $1\ldots2$ % (то есть, например, экспериментальная точка при $h_{0x}/h_{0c} = 0{,}53$ вместо значения 0,836 принимает значение 0,825).

Дополнительные измерения показывают, что с увеличением частоты область существования еще больше расширяется. Так на частоте 1000 МГц при $h_{0c}^{(1000)} = 210{,}0$ Э значению $h_{0x} = 50$ Э соответствует $h_{0y}/h_{0x} = 0{,}68$, а значению $h_{0x} = 100$ Э — величина $h_{0y}/h_{0x} = 0{,}54$. С другой стороны, при столь больших переменных полях режим прецессии без охвата центра (№ 2) становится неустойчивым и имеет склонность через несколько периодов обращения переходить в режим развернутой круговой прецессии (№ 5), то есть критическое значение степени несимметричности становится неоднозначным.

Замечание. Все описанные выше эффекты относятся к режиму без охвата центра (№ 2 по [308]). При повышении амплитуды переменного поля вплоть до значения h_c период прецессии положения равновесия увеличивается вплоть до стремления к бесконечности. Однако при дальнейшем увеличении амплитуды переменного поля режим без охвата центра (№ 2) сменяется режимом с охватом центра (№ 3), в котором период прецессии снова уменьшается вплоть до перехода к режиму с охватом центра с затуханием (№ 4). При этом несимметричность переменного поля также вызывает сгущение малых колец прецессионного портрета,

однако теперь диаметр этих колец превышает радиус большого кольца, в результате два диаметрально противоположно расположенных кольца сгущения частично перекрываются друг с другом. В этом режиме сгущение выражено менее четко, чем в режиме без охвата центра, однако проявляет довольно похожие свойства, с точностью до зеркального отражения, относительно поля перехода между режимами.

9.9. Нарушение симметричности по продольному переменному полю

Рассмотрим теперь случай продольно несимметричного возбуждения, когда к поперечному переменному полю круговой поляризации добавляется продольная переменная компонента, параллельная постоянному полю.

9.9.1. Общая картина колебаний намагниченности при продольной несимметричности переменного поля

Будем полагать, что зависимость переменного поля от времени имеет вид:

$$h_x = h_{0x}\sin(2\pi ft), \tag{9.35}$$

$$h_y = -h_{0y}\cos(2\pi ft), \tag{9.36}$$

$$h_z = -h_{0z}\sin(2\pi ft). \tag{9.37}$$

Общая картина наблюдаемых явлений иллюстрируется рис. 9.38. Здесь слева показано развитие колебаний во времени (сплошные линии — m_x, пунктир — m_y), справа — получающийся при этом прецессионный портрет.

Приведенная пара рисунков 9.38, *а* и 9.38, *б* соответствует продольной несимметрии переменного поля при сохранении симметрии постоянного: $h_{0x} = h_{0y}$, но $h_{0z} \neq 0$, при условии $H_{0x} = H_{0y} = 0$. Параметры по сравнению с предыдущими рисунками выбраны несколько другими с целью повышения наглядности. Видно, что в этом случае синусоидальные колебания заменяются неправильными импульсами, а на прецессионном портрете в нижней его части появляется сильно выраженное сгущение малых колец.

9.9.2. Механизм образования сгущения малых колец

Механизм образования сгущения малых колец прецессионного портрета при продольной несимметричности переменного поля иллюстрируется рис. 9.39, где показана динамическая схема взаимной ориентации постоянного и переменного полей для этого случая.

Общая схема взаимной ориентации полей показана на рис. 9.39, *а*. Постоянное поле $\mathbf{H}_0$, направленное вдоль оси Oz, соответствует отрезку OM. Поперечное переменное поле с компонентами h_x и h_y вращается вокруг оси Oz таким образом, что конец вектора $\mathbf{h}$ перемещается

Рис. 9.38. Развитие колебаний во времени (*а*) и соответствующий прецессионный портрет (*б*) при продольной несимметричности переменного поля. Параметры полей: постоянного: $H_{0x} = 0$ Э, $H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 267$ Э; переменного: $h_{0x} = 3$ Э, $h_{0y} = 3$ Э, $h_{0z} = 1{,}5$ Э. Остальные параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц

Рис. 9.39. Общая схема взаимной ориентации постоянного и переменного полей при продольной несимметричности переменного поля (*а*), а также взаимное расположение векторов постоянного и переменного полей при симметричной (*б*) и несимметричной (*в*) ориентации постоянного поля

по окружности $ABCD$, лежащей в плоскости $Mx'y'$, параллельной координатной плоскости Oxy. Продольное переменное поле направлено вдоль оси Oz, причем его напряженность во времени меняется в противофазе с компонентой симметричного поля h_x. При этом вектор суммарного переменного поля $\mathbf{h}$ (отрезок MF) вращается в плоскости $EBFD$, составляющей с плоскостью $ABCD$ угол α, где $\alpha = \operatorname{arctg}(h_{0z}/h_{0x})$.

Можно видеть, что вектор постоянного поля составляет с плоскостью $EBFD$ тот же угол α. То есть ситуация взаимного расположения плоскости вращения переменного поля и вектора постоянного поля полностью аналогична случаю несимметричности постоянного поля, рассмотренному в работе [307]. Там показано, что несимметричность постоянного поля вызывает сгущение малых колец прецессионного портрета, образование и положение которого объяснено на основе энергетической и векторной моделей. Таким образом, можно полагать, что причина образования сгущения малых колец при продольной несимметричности переменного поля та же, что и причина образования аналогичного сгущения при несимметричности постоянного поля [307], подробно разобранная в разделе 9.7, то есть здесь останавливаться на ней нет необходимости.

На рис. 9.39, *б* показана взаимная ориентация постоянного и переменного полей, когда постоянное поле направлено точно вдоль оси Oz. Этот случай соответствует рис. 9.38.

На рис. 9.39, *в* показана взаимная ориентация постоянного и переменного полей, когда постоянное поле отклонено от оси Oz на угол β. Этот случай рассматривается в следующем разделе.

9.9.3. Некоторые общие свойства прецессии при несимметричности переменного поля

Основные свойства прецессии положения равновесия при продольной несимметричности переменного поля подобны аналогичным свойствам прецессии при несимметричности поперечного поля. Так, при увеличении несимметричности имеется определенное критическое значение переменного поля, выше которого большое кольцо прецессионного портрета разрывается, причем период прецессии по мере приближения к этому значению поля также увеличивается, стремясь к бесконечности.

Критическое значение несимметричности при увеличении амплитуды переменного поля также увеличивается, а с повышением частоты имеет тенденцию к понижению. Качественное объяснение этих свойств — то же, что и для случая поперечной неоднородности.

9.9.4. Компенсирующее воздействие несимметричного постоянного поля

Одинаковая природа образования сгущения малых колец прецессионного портрета в случае несимметричности постоянного и продольной несимметричности переменного полей ставит вопрос о возможном взаимодействии этих двух несимметричностей. Иллюстрацией такого взаимодействия является рис. 9.40, где слева показано развитие колебаний во времени (сплошные линии — m_x, пунктир — m_y), справа — получающиеся при этом прецессионные портреты. Основные параметры задачи совпадают с предыдущими.

Рис. 9.40. Развитие колебаний во времени и соответствующие прецессионные портреты при несимметричности постоянного (*а, б*), переменного (*в, г*) и обоих сразу (*д, е*) полей. Параметры полей: постоянного: $H_{0z} = 265$ Э, $H_{0y} = 0$ Э; *а, б, д, е* — $H_{0x} = 0{,}055$ Э, *в, г* — $H_{0x} = 0$ Э; переменного: $h_{0x} = 3$ Э, $h_{0y} = 3$ Э, *а, б* — $h_{0z} = 0$ Э, *в, г, д, е* — $h_{0z} = 1{,}5$ Э. Остальные параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц

Первая пара рисунков 9.40, *а* и 9.40, *б* соответствует постоянному полю с несимметричной компонентой H_{0x}. Видно, что в этом случае синусоидальные колебания также заменяются неправильными импульсами, а на прецессионном портрете, как и на рис. 9.23, *г*, имеется сгущение малых колец в его верхней части.

Вторая пара рис. 9.40, *в* и рис. 9.40, *г* соответствует продольному переменному полю с несимметричной компонентой h_{0z}. В этом случае синусоидальные колебания также заменяются неправильными импульсами, а на прецессионном портрете, как и на рис. 9.38, *б*, имеется сгущение малых колец в его нижней части.

Таким образом, под действием постоянного поля (рис. 9.40, *б*) сгущение малых колец располагается наверху, а под действием продольного переменного поля (рис. 9.40, *г*) — внизу прецессионного портрета. Можно ожидать, что при одновременном воздействии обоих таких полей оба сгущения будут взаимно компенсироваться.

Такая ситуация как раз реализуется в третьей паре рисунков — рис. 9.40, *д* и рис. 9.40, *е*, которые соответствуют одновременной несимметричности постоянного и переменного полей, то есть с отличными от нуля полями H_{0x} и h_{0z}. Видно, что в этом случае импульсы опять заменяются синусоидальными колебаниями (рис. 9.40, *д*), а на прецессионном портрете сгущения отсутствуют, и большое кольцо заполняется малыми кольцами равномерно (рис. 9.40, *е*), подобно случаю симметричных полей, рассмотренному в предыдущих разделах 9.1–9.5 (рис. 9.2 или рис. 9.12), а также в работе [306].

Таким образом, можно сказать, что в этом случае происходит взаимная компенсация особенностей прецессии, обусловленных несимметричностью того и другого полей.

Схема взаимной ориентации векторов постоянного и переменного полей иллюстрируется рис. 9.39, *б* и рис. 9.39, *в*. При этом рис. 9.39, *б* соответствует прецессионному портрету, показанному на рис. 9.38, *б*, а рис. 9.39, *в* — портрету, показанному на рис. 9.40, *г*. Видно, что во втором случае векторы постоянного и переменного полей практически взаимно перпендикулярны (перпендикулярность соответствует $\alpha = \beta$), как и в случае полностью симметричного расположения полей (то есть при $H_{0x} = 0$ и $h_{0z} = 0$), что и объясняет компенсацию сгущений на прецессионном портрете.

Более подробное дополнительное исследование показывает, что критичность такой компенсации весьма высока и составляет сотые доли процента от полной величины постоянного поля. Так, компенсация, показанная на рис. 9.40, *г* происходит при постоянном поле $H_{0x} = 0{,}055$ Э, что составляет от поля вдоль оси Oz, равного $H_{0z} = 265$ Э, величину порядка 0,02 %. Критичность компенсации по переменному полю также высока и составляет единицы процентов от его полной величины (так при уменьшении h_{0z} от 1,5 Э до величины 1,4 Э компенсация уже полностью нарушается).

Выводы по главе 9

Данная глава посвящена специфической форме прецессии намагниченности в условиях ориентационного перехода — прецессии положения равновесия или прецессии второго порядка, при которой вектор намагниченности прецессирует вокруг своего положения равновесия, которое в свою очередь прецессирует вокруг направления постоянного поля. Рассмотрение ограничено случаем изотропной среды, однако вопросы нарушения симметрии системы рассмотрены с определенной подробностью.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующему.

1. Рассмотрена вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в нормально намагниченной магнитной пластине в условиях ориентационного перехода. Показано, что в поле, меньшем поля размагничивания формы, когда ориентация стационарного равновесного положения вектора намагниченности отклонена от направления постоянного поля, переменное поле круговой поляризации вызывает прецессию положения равновесия вектора намагниченности. При этом вектор намагниченности прецессирует с частотой переменного поля по малому конусу вокруг равновесного положения, а само равновесное положение прецессирует по большому конусу с частотой, значительно (до нескольких порядков) меньшей.

2. Построены временные зависимости и прецессионные портреты колебаний намагниченности, показано, что прецессионный портрет в наиболее общем виде представляет собой большое кольцо, заполненное по образующей малыми кольцами, причем большое кольцо отражает прецессию положения равновесия, а малые кольца — прецессию вектора намагниченности вокруг этого положения равновесия.

3. Построена векторная модель рассматриваемого явления, показано, что период прецессии положения равновесия обратно пропорционален квадрату амплитуды переменного поля и синусу угла отклонения равновесного положения намагниченности от постоянного поля. Методом машинного моделирования выполнена проверка полученной зависимости. Показано, что теория на основе векторной модели хорошо (с точностью не хуже 5 %) описывает машинный эксперимент в интервале полей ориентационного перехода от нуля до 0,86 от поля анизотропии формы, а далее для периода прецессии дает несколько завышенные значения.

4. Показано, что критическими параметрами возбуждения прецессии положения равновесия, являются амплитуда и частота переменного поля. Для возбуждения прецессии необходимо, чтобы амплитуда переменного поля была меньше критического значения, а частота переменного поля превышала критическое значение. При невыполнении критических условий прецессия положения равновесия заменяется простой круговой прецессией вектора намагниченности вокруг направления постоянного поля. Показано, что при изменении параметров переменного

поля переход от одного вида прецессии к другому происходит скачкообразным образом и имеет пороговый характер. Установлено, что причиной такого поведения прецессии намагниченности является возбуждение нелинейного резонанса магнитной колебательной системы в сочетании с расстроечным механизмом ограничения амплитуды, причем порог изменения характера прецессии соответствует совпадению частот нелинейного резонанса магнитной системы и переменного поля.

5. На плоскости в координатах амплитуда–частота переменного поля построены диаграммы, определяющие области существования прецессии положения равновесия и простой круговой прецессии при различных значениях намагниченности насыщения магнитной среды. Показано, что критическая частота с увеличением амплитуды переменного поля увеличивается тем сильнее, чем больше намагниченность насыщения.

6. Рассмотрена роль диссипации колебаний намагниченности. Показано, что период прецессии положения равновесия при малом затухании, когда прецессия является периодической, от величины параметра затухания не зависит, а при увеличении затухания, когда прецессия становится апериодической, увеличивается тем быстрее, чем параметр затухания больше. Критическая частота возбуждения прецессии положения равновесия при малом параметре затухания от его величины не зависит, а при большом, когда колебания становятся апериодическими, уменьшается тем быстрее, чем больше величина параметра затухания.

7. На основе анализа временных зависимостей и прецессионных портретов выявлены пять различных режимов прецессии, сменяющие друг друга при изменении амплитуды переменного поля: режим № 1 — малоамплитудная круговая прецессия, режим № 2 — прецессия положения равновесия без охвата центра, режим № 3 — незатухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, режим № 4 — затухающая прецессия положения равновесия с охватом центра, режим № 5 — развернутая круговая прецессия.

8. Для интерпретации мультирежимного характера прецессии положения равновесия предложена механическая модель маятника с пружинным боковым подвесом. Отмечена аналогия между равновесным положением маятника при действии боковой силы с равновесным положением вектора намагниченности при ориентационном переходе. Предложена интерпретация такого поведения на основе модели потенциала, имеющего два минимума равной глубины, расположенные симметрично относительно центрального максимума.

9. На основе модели плоского механического маятника с боковым пружинным подвесом проиллюстрирована возможность существования двух режимов механических колебаний, аналогичных режимам колебаний намагниченности: № 1 — малоамплитудной круговой прецессии и № 5 — развернутой круговой прецессии. Отмечено, что реализации режимов № 2–№ 4 препятствует плоскостной характер маятника. С целью преодоления такого недостатка предложена модель

цилиндрического маятника, представляющего собой плоский маятник, могущий свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точки основного и бокового подвеса. Показано, что потенциал такого маятника имеет вид кольцевой «канавы», окружающей центральный максимум в виде осесимметричного «холма». В качестве аналога переменного поля круговой поляризации предложено действие силы, направленной по касательной к круговой траектории движения груза цилиндрического маятника.

10. Отмечено, что при круговом движении, вызываемом круговой касательной силой, груз маятника может двигаться по кольцу как синхронно, так и, благодаря своей инерционности, отставать от вращения силы в большей или меньшей степени. Показано, что рост отставания по мере увеличения частоты вращения силы приводит к последовательной смене режимов колебаний, аналогичных режимам прецессии намагниченности, а именно: от режима № 5 — развернутой круговой прецессии через режимы № 4 и № 3 — прецессии с охватом центра к режиму № 2 — прецессии без охвата центра и далее к режиму № 1 — малоамплитудной круговой прецессии.

11. Формирование этих режимов проиллюстрировано на основе анализа траекторий движения груза под действием циркулярной силы различной частоты. Выявлено отличие от магнитного случая, состоящее в обратном порядке следования режимов. Установлено, что обратный порядок следования режимов в механическом случае обусловлен изменением частоты, тогда как прямой порядок в магнитном случае обусловлен изменением амплитуды возбуждения. Отмечена эквивалентность обоих подходов, подтверждающая обоснованность применения механической модели для интерпретации магнитных явлений.

12. Переходы между режимами прецессии намагниченности рассмотрены на основе трехмерной модели потенциала, имеющего вид осесимметричного центрального пика, окруженного кольцевой канавой, внешний край которой уходит на бесконечность. На основе динамической модели движения конца прецессирующего вектора намагниченности по трехмерной потенциальной поверхности выявлена необходимость учета зависимости потенциала от амплитуды переменного поля и наглядно продемонстрирован механизм образования прецессионных портретов для разных режимов. Рассмотрены условия возбуждения всех режимов прецессии при различных параметрах затухания и амплитудах переменного поля. На плоскости «параметр затухания — амплитуда переменного поля» определены границы областей с отдельными режимами прецессии при различных частотах и значениях поперечной компоненты постоянного поля. Рассмотрены свойства поперечной компоненты намагниченности в условиях переходов между различными режимами прецессии при изменении амплитуды переменного поля.

13. Показано, что в процессе переходов между режимами № 1–№ 4 амплитуда колебаний поперечной компоненты намагниченности меняется плавно, а переход от режима № 4 к режиму № 5 является весьма

резким, происходит при изменении амплитуды переменного поля менее чем на 0,1 % и сопровождается значительным изменением амплитуды прецессии (до полутора–двух раз), то есть представляет собой скачкообразный динамический ориентационный переход. Рассмотрена зависимость периода прецессии положения равновесия от амплитуды переменного поля, выявлено резкое изменение периода в режимах № 2 и № 3, соответствующее обратной пропорциональности квадрату амплитуды переменного поля.

14. Рассмотрена вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в нормально намагниченной магнитной пластине в условиях ориентационного перехода при несимметричной ориентации постоянного поля. Выявлены условия, при которых переменное поле круговой поляризации вызывает прецессию положения равновесия вектора намагниченности. Показано, что при несимметричном постоянном поле средние значения зависимостей поперечных компонент намагниченности от времени перестают быть чисто синусоидальными, а принимают вид неправильной формы импульсов, период которых значительно превышает период синусоиды при симметричном возбуждении. Прецессионный портрет сохраняет вид правильного кругового кольца, подобного кольцу при симметричном постоянном поле, однако заполнение большого кольца маленькими кольцами становится неравномерным, на большом кольце появляется сгущение малых колец, положение которого определяется характером несимметричности постоянного поля.

15. Обнаружена весьма высокая критичность возбуждения прецессии положения равновесия к степени несимметричности постоянного поля. Выявлено существование критического значения поперечной компоненты постоянного поля, выше которого прецессия равновесия срывается и заменяется на простую круговую прецессию большой амплитуды. Величина критического поля срыва не превышает единиц процентов от намагниченности насыщения материала пластины.

16. Исследованы области существования прецессии положения равновесия в постоянном и переменном полях при различных частотах переменного поля. Показано, что на плоскости «амплитуда переменного поля — поперечная компонента постоянного поля» области существования имеют вид неправильных треугольников, имеющих максимум, и состоящих из плавно растущего и резко спадающего участков. С увеличением частоты области существования увеличиваются и смещаются в сторону больших амплитуд переменного поля.

17. Исследованы зависимости периода прецессии положения равновесия от поперечной компоненты постоянного поля при различных амплитудах и частотах переменного поля. Показано, что вблизи поля срыва период прецессии положения равновесия стремится к бесконечности или достаточно большому конечному значению, в зависимости от частоты переменного поля. Основные особенности наблюдаемых явлений качественно объяснены на основе взаимно дополняющих друг друга энергетической и векторной моделей.

18. Рассмотрена прецессия положения равновесия при несимметричной ориентации поперечного и продольного переменных полей. Показано, что в этом случае синусоидальный характер прецессии положения равновесия заменяется импульсным, а прецессионный портрет колебаний, сохраняя вид правильного кругового кольца, заполненного малыми кольцами, приобретает неравномерные сгущения малых колец. Положение сгущений определяется характером несимметричности поля. В случае поперечной несимметричности переменного поля на прецессионном портрете наблюдаются два сгущения, расположенные диаметрально противоположно друг другу, в случае продольной несимметричности — только одно сгущение, расположенное на периферии большого кольца.

19. Показано, что приложение продольного постоянного поля позволяет скомпенсировать аномальный характер прецессии при продольной несимметричности переменного поля, приводя к восстановлению синусоидального характер колебаний в сочетании с равномерным заполнением большого кольца малыми кольцами. Отмечена весьма высокая критичность компенсации по постоянному полю, составляющая сотые доли процента от его полной величины. Наблюдаемые явления объяснены на основе динамической векторной модели.

Глава 10

ПРЕЦЕССИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Настоящая глава посвящена дальнейшему развитию материала, изложенного в предыдущей главе. Основное внимание уделено свойствам прецессии положения равновесия в среде с наклонной одноосной и кубической анизотропией для ряда наиболее характерных кристаллографических ориентаций. Даны рекомендации для наблюдения прецессии положения равновесия намагниченности в эксперименте, а также обсуждены некоторые прикладные возможности. В заключение приведены некоторые возможные вопросы для дальнейших исследований.

При рассмотрении перечисленных вопросов будем в основном следовать тем же работам, что и в предыдущей главе [266, 297–332], а также монографии [3]. Остальные необходимые ссылки указываются в тексте.

10.1. Прецессия положения равновесия намагниченности в среде с одноосной анизотропией

В главе 9 прецессия положения равновесия рассматривалась в изотропной среде, обладающей аксиальной симметрией, создаваемой однородным постоянным полем, в сочетании с переменным полем круговой поляризации. Однако из работы [307] следует, что даже небольшое нарушение аксиальной симметрии приводит к сильному изменению характера прецессии. Можно ожидать, что в анизотропной среде характер прецессии также будет отличен от изотропного случая. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

10.1.1. Геометрия задачи

Рассмотрим нормально намагниченную ферритовую пластину, обладающую одноосной магнитной анизотропией, ось которой отклонена от нормали к плоскости пластины на произвольный угол.

Замечание. Заметим, что выбор феррита как материала для пластины здесь принципиального значения не имеет и принят лишь для удобства терминологии, исходя из его наиболее частого применения

Рис. 10.1. Общая геометрия задачи о прецессии положения равновесия в анизотропной среде

на практике. Для дальнейшего рассмотрения важны лишь свойства анизотропии магнитной пластины, в том числе анизотропия ее формы.

Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 10.1. Ферритовая пластина намагничена постоянным полем **H**, перпендикулярным ее плоскости, переменное поле **h** приложено в плоскости пластины. Плоскость Oxy декартовой системы координат $Oxyz$ совпадает с плоскостью пластины, ось Oz ей перпендикулярна. Направление оси анизотропии или оси легкого намагничивания (ОЛН) задается единичным вектором **G**, проекции которого на оси системы $Oxyz$ равны соответственно G_x, G_y, G_z. Вектор **G** составляет с осью Oz угол θ_a. Проекция вектора **G** на плоскость пластины составляет с осью Ox угол φ_a. Прямая AB, проходящая через точку O, лежит в плоскости Oxy и образует угол 90° с осью анизотропии.

Для описания одноосной анизотропии введена вспомогательная декартова система координат $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена вдоль оси анизотропии, а плоскость $Ox'y'$, пересекая плоскость Oxy по прямой AB, повернута вокруг оси Oz' таким образом, что угол между осью Ox' и линией OA равен ε.

10.1.2. Матрица перехода

Задачу о динамическом поведении вектора намагниченности будем решать в системе координат, связанной с постоянным полем, то есть $Oxyz$. С другой стороны, плотность энергии одноосной анизотропии имеет наиболее простой вид в системе $Ox'y'z'$, ось Oz' которой направлена вдоль оси анизотропии. Таким образом, в исходном состоянии плотность энергии анизотропии записана через компоненты нормированного на намагниченность насыщения M_0 единичного вектора намагниченности $m_{x'}$, $m_{y'}$, $m_{z'}$, тогда как задача должна решаться в компонентах аналогичного единичного вектора m_x, m_y, m_z, через

которые и следует записать плотность энергии. Для этого достаточно выразить компоненты $m_{x'}$, $m_{y'}$, $m_{z'}$ через компоненты m_x, m_y, m_z, после чего подставить их в выражение для плотности энергии в системе $Ox'y'z'$. В результате будет получено являющееся искомым выражение для плотности энергии анизотропии, записанное через компоненты m_x, m_y, m_z.

Итак, надо компоненты нормированного вектора намагниченности $\mathbf{m}'$, определенные в системе $Ox'y'z'$, выразить через компоненты вектора намагниченности $\mathbf{m}$, определенные в системе $Oxyz$, то есть осуществить преобразование:

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{m}, \tag{10.1}$$

где $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ — матрица перехода от системы $Ox'y'z'$ к системе $Oxyz$.

Для получения матрицы перехода воспользуемся аппаратом, подробно описанным в главе 3. Учитывая, что компоненты матрицы перехода представляют собой косинусы углов между соответствующими осями исходной и повернутой систем координат, а также пользуясь системой углов Эйлера [261], для которой главной осью является Oz', а линией узлов — прямая AB, получаем матрицу перехода в виде

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos\theta\cos\varphi\sin\varepsilon + & \cos\theta\sin\varphi\sin\varepsilon - & \\ + \sin\varphi\cos\varepsilon & - \cos\varphi\cos\varepsilon & -\sin\theta\sin\varepsilon \\ \hline \cos\theta\cos\varphi\cos\varepsilon - & \cos\theta\sin\varphi\cos\varepsilon + & \\ - \sin\varphi\sin\varepsilon & + \cos\varphi\sin\varepsilon & -\sin\theta\cos\varepsilon \\ \hline \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{array}\right). \tag{10.2}$$

Можно видеть, что полученная матрица перехода с точностью до обозначений подобна (4.61), что обусловлено тождественностью геометрии обеих задач (рис. 4.5 и рис. 10.1).

10.1.3. Полная плотность энергии, эффективные поля и уравнения движения в исходной (лабораторной) системе координат

Плотность энергии анизотропии и внешнего поля. Плотность энергии одноосной анизотропии в системе $Ox'y'z'$ имеет вид (4.57)

$$U_a = K(m_{x'}^2 + m_{y'}^2), \tag{10.3}$$

где в случае легкой оси $K > 0$.

В соответствии с формулой (10.1), с учетом (10.2) находим:

$$\begin{aligned} m_{x'} &= (\cos\theta_a\cos\varphi_a\sin\varepsilon + \sin\varphi_a\cos\varepsilon)m_x + \\ &+ (\cos\theta_a\sin\varphi_a\sin\varepsilon - \cos\varphi_a\cos\varepsilon)m_y - \sin\theta_a\sin\varepsilon m_z; \end{aligned} \tag{10.4}$$

$$\begin{aligned} m_{y'} &= (\cos\theta_a\cos\varphi_a\cos\varepsilon - \sin\varphi_a\sin\varepsilon)m_x + \\ &+ (\cos\theta_a\sin\varphi_a\cos\varepsilon + \cos\varphi_a\sin\varepsilon)m_y - \sin\theta_a\cos\varepsilon m_z. \end{aligned} \tag{10.5}$$

Подставляя эти выражения в (10.3), получаем плотность энергии одноосной анизотропии в системе $Oxyz$, записанную через компоненты вектора $\mathbf{m}$:

$$U_a = K\{m_x^2(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) + m_y^2(\cos^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) + \\ + m_z^2\sin^2\theta_a - 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - \\ - 2m_xm_z\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a - 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\}, \quad (10.6)$$

где углы θ_a и φ_a определяют ориентацию оси анизотропии в системе $Oxyz$.

Заметим, что независимость полученного выражения от угла ε обусловлена аксиальной симметрией плотности энергии одноосной анизотропии относительно оси Oz'.

Положим теперь, что внешнее магнитное поле имеет вид

$$\mathbf{H} = \{H_{0x} + h_x, H_{0y} + h_y, H_{0z}\}, \quad (10.7)$$

где $H_{0x,y,z}$ — постоянное поле, h_x, h_y — компоненты переменного поля частоты f:

$$h_x = h_0\sin(2\pi ft), \quad (10.8)$$

$$h_y = -h_0\cos(2\pi ft). \quad (10.9)$$

Полагаем, что $h_{x,y} < H_{0z}$, а также $H_{0x,y} < H_{0z}$.

Полная плотность энергии. Полная плотность энергии пластины с учетом размагничивания и анизотропии принимает вид

$$U = -M_0h_xm_x - M_0H_{0x}m_x - M_0h_ym_y - M_0H_{0y}m_y - \\ - M_0H_{0z}m_z + 2\pi M_0^2m_z^2 + \\ + K\{m_x^2(\cos^2\theta_a\cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) + m_y^2(\cos^2\theta_a\sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) + \\ + m_z^2\sin^2\theta_a - 2m_xm_y\sin^2\theta_a\sin\varphi_a\cos\varphi_a - \\ - 2m_xm_z\sin\theta_a\cos\theta_a\cos\varphi_a - 2m_ym_z\sin\theta_a\cos\theta_a\sin\varphi_a\}, \quad (10.10)$$

где M_0 — намагниченность насыщения.

Уравнения движения намагниченности. Для расчета прецессии намагниченности, аналогично главе 2, воспользуемся уравнениями Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта (2.97)–(2.99):

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_y + \alpha m_xm_z)H_{ez} - \\ - (m_z - \alpha m_ym_x)H_{ey} - \alpha(m_y^2 + m_z^2)H_{ex}]; \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_z + \alpha m_ym_x)H_{ex} - \\ - (m_x - \alpha m_zm_y)H_{ez} - \alpha(m_z^2 + m_x^2)H_{ey}]; \quad (10.12)$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_x + \alpha m_z m_y)H_{ey} - \\ - (m_y - \alpha m_x m_z)H_{ex} - \alpha(m_x^2 + m_y^2)H_{ez}], \quad (10.13)$$

где γ — гиромагнитная постоянная ($\gamma > 0$), α — параметр затухания прецессии намагниченности.

Вычисляя эффективные поля из (10.10) по формуле (1.2) или (2.81), (2.84):

$$H_{ei} = -\frac{\partial U}{\partial M_i} = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U}{\partial m_i}, \quad (10.14)$$

получаем:

$$H_{ex} = H_{0x} + h_x + \frac{2K}{M_0}[-m_x(\cos^2\theta_a \cos^2\varphi_a + \sin^2\varphi_a) + \\ + m_y \sin^2\theta_a \sin\varphi_a \cos\varphi_a + m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \cos\varphi_a]; \quad (10.15)$$

$$H_{ey} = H_{0y} + h_y + \frac{2K}{M_0}[m_x \sin^2\theta_a \sin\varphi_a \cos\varphi_a - \\ - m_y(\cos^2\theta_a \sin^2\varphi_a + \cos^2\varphi_a) + m_z \sin\theta_a \cos\theta_a \sin\varphi_a]; \quad (10.16)$$

$$H_{ez} = H_{0z} - 4\pi M_0 m_z + \frac{2K}{M_0}[m_x \sin\theta_a \cos\theta_a \cos\varphi_a + \\ + m_y \sin\theta_a \cos\theta_a \sin\varphi_a - m_z \sin^2\theta_a]. \quad (10.17)$$

Как и ранее, численное решение системы (10.11)–(10.13) с учетом (10.15)–(10.17) позволяет найти развитие вынужденных колебаний намагниченности во времени, к рассмотрению которых и перейдем далее.

10.1.4. Прецессионные портреты

Результаты расчета прецессии равновесного положения намагниченности в среде с одноосной анизотропией иллюстрируются рис. 10.2, где показано развитие колебаний во времени и соответствующие прецессионные портреты.

Рис. 10.2, *а*, *б* соответствует отсутствию анизотропии ($K = 0$) и приведен здесь для сравнения. В этом случае колебания средних положений компонент намагниченности m_x и m_y представляют собой одинаковые синусоиды с периодом $0{,}50 \cdot 10^{-6}$ с, сдвинутые по фазе на 90°. Прецессионный портрет представляет собой большое кольцо, заполненное вдоль образующей малыми кольцами полностью равномерно.

Рис. 10.2, *в*, *г* соответствует случаю одноосной анизотропии с константой $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, ось которой ориентирована под углами: $\theta_a = 10°$, $\varphi_a = 0°$, то есть проекция оси анизотропии на плоскость ферритовой пластины параллельна координатной оси Ox, а сама ось составляет с нормалью к пластине угол 10°. В этом случае колебания средних положений компонент намагниченности имеют характер растянутых импульсов с периодом $1{,}72 \cdot 10^{-6}$ с, причем колебания m_x близки к пилообразным, а m_y — к прямоугольным импульсам со скруглен-

Рис. 10.2. Развитие колебаний намагниченности во времени (*а, в*) и соответствующие прецессионные портреты (*б, г*). *а, б* — анизотропия отсутствует: *в, г* — одноосная анизотропия с наклонной осью: $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $\theta_a = 10°$, $\varphi_a = 0°$. На рисунке: *а, в* — сплошные линии — m_x, пунктирные — m_y. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э

ными фронтами. Большое кольцо на прецессионном портрете заполнено малыми сильно неравномерно: имеется значительное сгущение малых колец, повернутое в положительном направлении относительно оси Ox на угол α_c, отсчитываемый от оси Om_x, близкий к 90°, а диаметрально противоположно этому сгущению, то есть в окрестности $\alpha_c \approx 270°$, малые кольца сильно разрежены.

Замечание. Принятое здесь значение константы анизотропии $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$ на первый взгляд кажется крайне малым, особенно в сравнении с константами анизотропии в смешанных ферритах–гранатах, где они составляют порядка 10^4 эрг см$^{-3}$ (разделы 5.3, 7.6).

При этом поле анизотропии составляет около 0,35 Э, тогда как в смешанных гранатах такое поле достигает 1000 Э и более. Следует заметить однако, что рассматриваемое здесь явление прецессии положения равновесия к нарушению симметрии системы в целом крайне чувствительно. Так например, из рис. 9.23 можно видеть, что сильное сгущение малых колец наблюдается при величине поперечного поля H_{0x} равной всего 0,055 Э. Увеличение такого поля хотя бы в два–три раза приводит к срыву прецессии положения равновесия. Поэтому и здесь порядок величины константы анизотропии выбран таким, чтобы соответствующее ему поле анизотропии для срыва прецессии было недостаточным. Более подробно вопрос о критичности величины анизотропии обсуждается далее.

10.1.5. Модель образования сгущений и разрежений

Для интерпретации наблюдаемых явлений будем пользоваться энергетической моделью потенциала, введенной разделе 9.7.7.

Рассмотрим сначала, как влияет одноосная анизотропия на плотность энергии системы в целом. Будем характеризовать ориентацию вектора намагниченности в той же сферической системе координат, что и для оси анизотропии, полярным и азимутальным углами θ_m и φ_m. Таким образом, будем полагать, что компоненты вектора намагниченности, имеют вид:

$$m_x = \sin\theta_m \cos\varphi_m; \tag{10.18}$$

$$m_y = \sin\theta_m \sin\varphi_m; \tag{10.19}$$

$$m_z = \cos\theta_m. \tag{10.20}$$

Статическое состояние намагниченности соответствует минимуму потенциала (10.10) при $H_{0x,y} = 0$ и $h_{x,y,z} = 0$. Соответствующие зависимости потенциала U от полярного угла вектора намагниченности θ_m при различных его азимутальных углах иллюстрируются рис. 10.3.

Из рисунка видно, что потенциал имеет минимум по полярному углу, положение которого от азимутального угла почти не зависит. Плотность энергии минимальна при азимутальном угле $\varphi_m = 0°$ (кривая *1*) и максимальна при $\varphi_m = 270°$ (кривая *4*). Значения плотности энергии при $\varphi_m = 90°$ (кривая *2*) и $\varphi_m = 180°$ (кривая *3*) совпадают.

Таким образом, при прецессии положения равновесия по большому кругу прецессионного портрета, вектор намагниченности последовательно проходит от области малого потенциала (*1*) через область среднего потенциала (*2*) к области большого потенциала (*4*), после чего опять проходит в область среднего потенциала (*3*) и возвращается в область малого потенциала (*1*).

Рассмотрим теперь плавное изменение потенциала при изменении азимутального угла вектора намагниченности φ_m и связанные с этим особенности движения этого вектора. В частности, обратим внимание

Рис. 10.3. Зависимость потенциала (плотности энергии) от полярного угла вектора намагниченности θ_m при различных его азимутальных углах φ_m: *1* — 0°; *2* — 90°; *3* — 180°; *4* — 270°. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $\theta_a = 10°$, $\varphi_a = 0°$. Начальное значение потенциала: $-2794{,}1$ эрг см$^{-3}$

на зависимость скорости движения прецессирующего положения равновесия от характера изменения потенциала.

На рис. 10.4 показаны соответствующие зависимости потенциала (*а*) и скорости прецессии по большому кругу (*б*) от азимутального угла вектора намагниченности.

Разброс точек на рис. 10.4, *б* обусловлен трудностью точного измерения скорости прецессии по большому кругу из-за наложения на нее прецессии по малому кругу. Пунктирная кривая проведена в среднем по измеренным точкам.

Из рис. 10.4, *а* видно, что потенциал в интервале углов от 0° до 180° возрастает, а в интервале углов от 180° до 360° убывает. Скорость увеличения потенциала максимальна вблизи 90°, а скорость уменьшения потенциала максимальна вблизи 270°.

Из рис. 10.4, *б* видно, что скорость прецессии по большому кругу минимальна вблизи 90° и максимальна вблизи 270°.

Таким образом, скорость прецессии по большому кругу уменьшается тогда, когда потенциал по азимутальному углу растет и увеличивается тогда, когда этот потенциал убывает. То есть минимум скорости прецессии приходится на максимум роста потенциала, а ее максимум — на максимум его убывания.

Рис. 10.4. Зависимости потенциала (*а*) и скорости прецессии по большому кругу (*б*) от азимутального угла вектора намагниченности. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $\theta_a = 10°$, $\varphi_a = 0°$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э. Начальное значение потенциала: $-2794{,}1$ эрг см$^{-3}$

По аналогии с механикой можно сказать, что прецессия замедляется тогда, когда системе приходится взбираться на «горку» потенциала и ускоряется тогда, когда система с этой «горки» скатывается, как это показано стрелками на рис. 10.4, *а*.

При замедлении скорости прецессии по большому кругу на прецессионном портрете появляется сгущение малых колец, при ее ускорении — разрежение.

Таким образом, сгущение малых колец на прецессионном портрете обусловлено ростом потенциала на пути движения прецессирующего вектора намагниченности, а их разрежение — спадом потенциала в процессе того же движения.

10.1.6. Критичность нарушения симметрии системы

Наклонная одноосная анизотропия нарушает осевую симметрию системы, в результате чего при достаточной ее величине происходит срыв круговой прецессии положения равновесия, то есть положение равновесия в процессе прецессии полного круга не описывает, а стремится со временем к стационарному устойчивому положению, причем вектор намагниченности продолжает прецессировать вокруг этого стационарного положения.

На прецессионном портрете такой срыв проявляется в виде разрыва большого кольца и выходе малых колец на стационарную орбиту.

Чем больше величина константы одноосной анизотропии и больше угол ее отклонения от нормали к плоскости пластины, тем значительнее нарушается симметрия системы.

Поэтому представляет интерес проследить влияние величины константы и угла ориентации оси анизотропии на срыв прецессии положения равновесия.

На рис. 10.5 показана зависимость критического значения константы анизотропии K_c, соответствующего срыву прецессии равновесия, от угла θ_a между осью анизотропии и нормалью к плоскости пластины.

Из рисунка видно, что минимальную величину критическое значение константы принимает вблизи $\theta_a = 45°$ и $\theta_a = 135°$. Эти два значения углов отличаются на 90° и соответствуют одинаковому наклону оси относительно плоскости магнитной пластины.

Вблизи $\theta_a = 90°$ ось анизотропии лежит в плоскости магнитной пластины, то есть система является симметричной относительно этой плоскости, поэтому критическое значение константы увеличивается.

Вблизи $\theta_a = 0°$ нарушение осевой симметрии системы относительно нормали к плоскости пластины сходит на нет, в результате чего влияние одноосной анизотропии уменьшается и критическое значение константы также увеличивается.

При этом критическое значение константы по мере уменьшения угла θ_a растет весьма значительно. Так при $\theta_a = 10°$ величина K_c составляет 3,9 эрг см$^{-3}$, при $\theta_a = 1°$ становится равной 30 эрг см$^{-3}$, а при $\theta_a = 0{,}1°$ достигает 101 эрг см$^{-3}$.

Рис. 10.5. Критическое значение константы одноосной анизотропии, при котором происходит срыв прецессии положения равновесия, в зависимости от угла отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пластины. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $\varphi_a = 0°$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э

При дальнейшем уменьшении угла θ_a критическое значение константы K_c становится столь значительным, что поле анизотропии $H_a = 2K/M_0$, складываясь с постоянным полем H_{0z}, начинает превышать поле размагничивания $4\pi M_0 = 280$ Э, в результате чего равновесное положение вектора намагниченности выстраивается вдоль направления постоянного поля, то есть условия ориентационного перехода нарушаются и прецессия положения равновесия переходит в простую круговую прецессию вектора намагниченности вокруг направления поля.

10.1.7. Трансформация сгущения колец при изменении наклона оси анизотропии

Изменение симметрии системы при изменении угла наклона оси анизотропии проявляется в некотором изменении положения сгущения малых колец на прецессионном портрете.

Поворот сгущения малых колец прецессионного портрета при изменении угла наклона оси одноосной анизотропии иллюстрируется рис. 10.6.

Рис. 10.6 иллюстрирует последовательную трансформацию прецессионного портрета при увеличении полярного угла θ_a оси одноосной анизотропии.

Рис. 10.6. Изменение положения сгущения малых колец при изменении наклона оси одноосной анизотропии θ_a: *а* — 10°; *б* — 87°; *в* — 92,5°; *г* — 170°. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $\varphi_a = 0°$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э

Рис. 10.6, *а* соответствует малому отклонению оси анизотропии от нормали к плоскости пластины: $\theta_a = 10°$. При этом сгущение малых колец соответствует $\alpha_c \approx 90°$.

Рис. 10.6, *б* соответствует $\theta_a = 87{,}5°$, то есть ось анизотропии почти ложится в плоскость пластины. При этом наблюдается хорошо выраженное основное сгущение при $\alpha_c \approx 45°$ и слабо выраженное небольшое сгущение вблизи $\alpha_c \approx 225°$.

Рис. 10.6, *в* соответствует $\theta_a = 92{,}5°$, то есть ось анизотропии уже перевалила через плоскость пластины и та ее часть, которая была в положительном полупространстве относительно плоскости Oxy перешла в отрицательное полупространство, а та часть, которая была в отрицательном полупространстве, перешла в положительное. При этом сгущения как бы поменялись местами относительно центра прецессионного

портрета, то есть теперь имеется хорошо выраженное основное сгущение при $\alpha_c \approx 225°$ и слабо выраженное — при $\alpha_c \approx 45°$.

Рис. 10.6, *г* соответствует $\theta_a = 170°$, то есть опять значительному выходу оси анизотропии из плоскости Oxy и приближению ее к нормали к плоскости пластины. Теперь однако, части оси анизотропии, которые первоначально находились в положительном и отрицательном полупространствах относительно плоскости Oxy, поменялись местами. Поэтому сгущение малых колец наблюдается при $\alpha_c \approx 270°$.

Более подробно плавное изменение положения сгущений малых колец при изменении полярного угла оси анизотропии иллюстрируется рис. 10.7, где в виде непрерывных кривых показана зависимость угла поворота центра сгущения малых колец α_c от угла отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пластины θ_a.

Рис. 10.7. Угол поворота сгущения малых колец прецессионного портрета α_c в зависимости от угла отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пластины θ_a. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 10.6

Из рисунка видно, что вблизи $\theta_a = 0°$ угол поворота сгущения малых колец составляет 90°, а по мере увеличения θ_a до 90° постепенно уменьшается приблизительно до 45°. При превышении θ_a значения 90° угол поворота сгущения резко перескакивает от 45° на 225°, то есть сгущение на прецессионном портрете перескакивает относительно его центра сразу на 180°, то есть его положение меняется на диаметрально противоположное. Такой перескок соответствует переходу оси анизотропии через положение, параллельное плоскости пластины. При этом положительная и отрицательная части оси анизотропии, расположенные выше и ниже плоскости пластины, меняются местами, в результате

чего меняются местами и положения минимумов поверхности потенциала плотности энергии U.

При дальнейшем увеличении угла θ_a вплоть до $180°$ угол поворота сгущения стремится к $270°$, что является диаметрально противоположным к начальному положению при $\theta_a = 0°$ и отвечает взаимной перемене мест участков возрастания и убывания потенциала U.

10.1.8. Компенсация наклона оси постоянным полем

При намагничивании пластины постоянным полем точно перпендикулярно ее плоскости, наклонная ось анизотропии вносит в систему несимметричность, приводящую к сгущению малых колец на прецессионном портрете.

Подобное же сгущение в отсутствие одноосной анизотропии можно создать путем введения несимметричности в постоянное поле, в частности, несколько отклоняя его от нормали к плоскости пластины, что эквивалентно введению его поперечной составляющей (раздел 9.7).

Эта составляющая должна быть ориентирована вдоль проекции оси анизотропии на плоскость пластины и иметь знак, противоположный положительному направлению этой проекции, то есть при $\varphi_a = 0°$ ориентация поперечного поля должна совпадать с отрицательным направлением оси Ox.

Таким образом, если несимметричность, создаваемая поперечным постоянным полем, будет противоположна по знаку несимметричности, создаваемой наклоном оси анизотропии, то можно добиться взаимной компенсации несимметричностей, в результате чего сгущение малых колец на прецессионном портрете будет отсутствовать.

Возможность такой компенсации иллюстрируется рис. 10.8, где показаны прецессионные портреты при различных видах несимметричности.

Рис. 10.8, *а* соответствует отсутствию, как анизотропии, так и поперечного постоянного поля, то есть полностью симметричному случаю. Как видно, при этом какое-либо сгущение малых колец полностью отсутствует.

Рис. 10.8, *б* соответствует наличию одноосной анизотропии в отсутствие поперечного поля. В этом случае несимметричность системы приводит к сгущению малых колец в верхней части портрета ($\alpha_c \approx 90°$) и разрежению в нижней ($\alpha_c \approx 270°$).

Рис. 10.8, *в* соответствует наличию поперечного поля в отсутствие одноосной анизотропии. Здесь несимметричность системы, обусловленная отрицательной составляющей поперечного поля вдоль оси Oxz, приводит к сгущению малых колец в нижней части портрета ($\alpha_c \approx 270°$) и разрежению в верхней ($\alpha_c \approx 90°$).

Рис. 10.8, *г* соответствует одновременному действию, как оси анизотропии, так и поперечной составляющей поля. Видно, что при этом, в результате противоположного действия обоих упомянутых факторов, какое-либо сгущение малых колец полностью отсутствует. Таким

Рис. 10.8. Иллюстрация возможности компенсации вызванного анизотропией сгущения колец, путем включения поперечного постоянного поля: *а* — $K = 0$, $H_{0x} = 0$ Э; *б* — $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $H_{0x} = 0$ Э; *в* — $K = 0$, $H_{0x} = -0{,}057$ Э; *г* — $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $H_{0x} = -0{,}057$ Э. Остальные параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $\theta_a = 10^\circ$, $\varphi_a = 0^\circ$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э

образом, поперечная составляющая постоянного поля компенсирует несимметричность системы, обусловленную наклоном оси одноосной анизотропии.

Приведенные особенности компенсации вызванного анизотропией сгущения колец при включении поперечного постоянного поля обусловлены характером поведения потенциала, который для рассмотренных случаев иллюстрируется рис. 10.9. Здесь представлены зависимости потенциала от азимутального угла вектора намагниченности при различных степенях несимметричности системы.

Кривая *1* соответствует отсутствию, как анизотропии, так и поперечного постоянного поля. При этом потенциал при изменении азимутального угла вектора намагниченности φ_m сохраняется постоянным,

Рис. 10.9. Зависимости потенциала от азимутального угла вектора намагниченности при различных степенях несимметричности: *1* — $K = 0$, $H_{0x} = 0$ Э; *2* — $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $H_{0x} = 0$ Э; *3* — $K = 0$, $H_{0x} = -0{,}057$ Э; *4* — $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $H_{0x} = -0{,}057$ Э. Начальное значение потенциала: $-2794{,}1$ эрг см$^{-3}$. Остальные параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $K = 3{,}9$ эрг см$^{-3}$, $\theta_a = 10°$, $\varphi_a = 0°$

в результате чего скорость изменения этого угла также не меняется и сгущения колец не происходит (рис. 10.8, *а*).

Кривая *2* соответствует наличию анизотропии в отсутствие постоянного поля. В этом случае потенциал имеет колоколообразный вид с максимумом при $\varphi_m = 180°$, в результате чего скорость изменения угла φ_m вблизи 90° уменьшается (система карабкается на горку), а вблизи 270° увеличивается (система скатывается с горки). Это изменение скорости приводит к наблюдаемому сгущению колец вблизи $\alpha_c = 90°$ и разрежению вблизи $\alpha_c = 270°$, как это видно на рис. 10.9, *б*.

Кривая *3* соответствует наличию поперечного поля в отсутствие анизотропии. В этом случае потенциал также имеет колоколообразный вид, но теперь — отрицательного знака с минимумом при $\varphi_m = 180°$, то есть про мере увеличения φ_m он сначала уменьшается, а затем нарастает, что приводит к разрежению колец вблизи $\alpha_c = 90°$ и сгущению вблизи $\alpha_c = 270°$, как это видно на рис. 10.8, *в*.

Кривая *4* соответствует одновременному наличию анизотропии и поперечного поля. В этом случае, благодаря различию знаков потенциальных кривых *2* и *3*, их взаимное влияние уничтожается и потенциал сохраняется практически постоянным, что и приводит к отсутствию сгущения колец на прецессионном портрете (рис. 10.8, *г*).

Таким образом, причиной компенсации сгущения колец прецессионного портрета является противонаправленное действие анизотропии и постоянного поля, приводящее к выравниванию зависимости потенциала от азимутального угла вектора намагниченности.

10.1.9. Критичность к константе анизотропии

Проведенное выше количественное рассмотрение свойств прецессии положения равновесия в анизотропной среде выполнено на примере довольно малых значений константы анизотропии, порядка единиц эрг см$^{-3}$, тогда как в некоторых ферритах эта величина может достигать десятков, сотен и даже тысяч эрг см$^{-3}$ [38, 40, 259, 296]. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможность возбуждения прецессии положения равновесия в более широком интервале по константе анизотропии.

Для выяснения такой возможности было проведено исследование зависимости соответствующего срыву критического значения полярного угла оси анизотропии θ_c от величины константы одноосной анизотропии K. Такое критическое значение означает, что при $\theta_a < \theta_c$ большое кольцо на прецессионном портрете полностью замкнуто, а при $\theta_a > \theta_c$ — разомкнуто.

Полученная зависимость, построенная в двойном логарифмическом масштабе, приведена на рис. 10.10.

Следует учитывать, что, так как в рассматриваемых случаях ось анизотропии почти перпендикулярна плоскости пластины, то поле анизотропии, складываясь с внешним полем, дает к эффективному полю положительную добавку. Поэтому, чтобы при неизменной частоте переменного поля и разных значениях константы анизотропии можно было обеспечить равные условия возбуждения, при построении рис. 10.10 внешнее поле H_{0z} уменьшалось на величину поля анизотропии H_a, то есть z-компонента постоянного поля задавалась равной

$$H_{0z} = H_{00z} - H_a, \tag{10.21}$$

где $H_{00z} = 265$ Э; $H_a = 2K/M_0$.

На рисунке точками обозначены результаты машинного эксперимента при заданных значениях константы анизотропии, сплошная линия — прямая, проведенная через эти точки.

Из рисунка видно, что все точки довольно хорошо ложатся на прямую линию, описываемую уравнением:

$$\lg \theta_c = 1{,}6532 - 1{,}0283 \lg K, \tag{10.22}$$

Рис. 10.10. Зависимость критического значения полярного угла оси анизотропии от величины константы анизотропии. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $H_{0x} = 0$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $\varphi_a = 0°$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э

что соответствует степенной зависимости

$$\theta_c = 10^{(1{,}6532 - 1{,}0283 \lg K)}, \tag{10.23}$$

или той же зависимости в экспоненциальном виде

$$\theta_c = \exp(3{,}8067 - 1{,}0283 \ln K). \tag{10.24}$$

Таким образом, можно видеть, что по мере увеличения константы анизотропии критичность возбуждения прецессии положения равновесия по замкнутому кольцу заметно возрастает. Следует заметить, что это обстоятельство накладывает на наблюдение прецессии равновесия в эксперименте довольно жесткие требования. Более подробно этот вопрос обсуждается в разделе 10.6.

10.2. Прецессия положения равновесия намагниченности в среде с кубической анизотропией

В предыдущих разделах рассмотрение прецессия равновесного положения намагниченности в анизотропной среде ограничено только случаем одноосной анизотропии. Однако во многих представляющих интерес для практики ферритах, в том числе в железоиттриевом гранате, присутствует заметная кубическая анизотропия. Обратимся теперь к рассмотрению влияния такой анизотропии на свойства прецессии положения

равновесия в случае различных ориентаций кубических осей легкого намагничивания типа [111] относительно плоскости пластины.

10.2.1. Геометрия задачи

Рассмотрим нормально намагниченную ферритовую пластину, обладающую кубической магнитной анизотропией.

Общая геометрия задачи иллюстрируется рис. 10.11, где показана схема основных ориентаций кубической ячейки относительно плоскости ферритовой пластины (подобная приведенной на рис. 3.7). Ферритовая пластина намагничена постоянным полем **H**, перпендикулярным ее плоскости, переменное поле **h** приложено в плоскости пластины. Плоскость Oxy декартовой системы координат $Oxyz$ совпадает с плоскостью пластины, ось Oz ей перпендикулярна.

Рис. 10.11. Схема основных ориентаций кубической ячейки относительно плоскости ферритовой пластины

Рассмотрены три схематически показанные на рис. 10.11 варианта ориентации кубической кристаллографической ячейки материала пластины относительно ее плоскости:

1) **ориентация [001]:** вдоль нормали к плоскости пластины, то есть вдоль оси Oz направлена одна из осей типа [001], являющаяся ребром куба, при этом оси Ox и Oy ориентируются вдоль двух других ребер куба;

2) **ориентация [011]:** вдоль нормали к плоскости пластины или оси Oz направлена одна из осей типа [011], то есть диагональ грани куба, при этом ось Ox ориентирована вдоль одного из ребер куба, а ось Oy — перпендикулярно этому ребру;

3) **ориентация [111]:** вдоль нормали к плоскости пластины или оси Oz направлена одна из осей типа [111], то есть пространственная диагональ куба, при этом ось Ox ориентирована вдоль проекции одного из ребер куба на плоскость Oxy, а ось Oy — перпендикулярно этой проекции.

Предполагается, что осями легкого намагничивания являются пространственные диагонали куба, то есть оси типа [111], показанные внутри ячеек тонкими линиями.

10.2.2. Основные уравнения

Аналогично разобранному выше случаю одноосной анизотропии будем полагать, что постоянное поле H_0 недостаточно для того, чтобы ориентировать вектор намагниченности в равновесном состоянии перпендикулярно плоскости пластины, а возбуждение системы осуществляется переменным полем круговой поляризации (10.8)–(10.9):

$$h_x = h_0 \sin(2\pi f t), \tag{10.25}$$

$$h_y = -h_0 \cos(2\pi f t). \tag{10.26}$$

Для расчета прецессии намагниченности, аналогично предыдущему, воспользуемся уравнениями Ландау–Лифшица с диссипативным членом в форме Гильберта (2.97)–(2.99):

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_y + \alpha m_x m_z)H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x)H_{ey} - \\ - \alpha(m_y^2 + m_z^2)H_{ex}]; \tag{10.27}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_z + \alpha m_y m_x)H_{ex} - (m_x - \alpha m_z m_y)H_{ez} - \\ - \alpha(m_z^2 + m_x^2)H_{ey}]; \tag{10.28}$$

$$\frac{\partial m_z}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2}[(m_x + \alpha m_z m_y)H_{ey} - (m_y - \alpha m_x m_z)H_{ex} - \\ - \alpha(m_x^2 + m_y^2)H_{ez}], \tag{10.29}$$

где γ — гиромагнитная постоянная ($\gamma > 0$), α — параметр затухания прецессии намагниченности.

Эффективные поля положим в виде:

$$H_{ex} = h_x + H_{ax}; \tag{10.30}$$

$$H_{ey} = h_y + H_{ay}; \tag{10.31}$$

$$H_{ez} = H_{0z} - 4\pi M_0 m_z + H_{az}, \tag{10.32}$$

где H_{ax}, H_{ay}, H_{az} — компоненты поля анизотропии, определяемые ориентацией кристаллографической ячейки.

При такой записи предполагается, что кроме анизотропии в плоскости пластины действуют внешние переменные поля h_x и h_y, а по нормали к пластине приложено постоянное поле H_{0z} и поле размагничивания $4\pi M_0$, направленные в противоположные стороны. Поле размагничивания стремится уложить вектор намагниченности в плоскость пластины, а нормальное постоянное поле H_{0z} вытягивает этот вектор из плоскости в направлении нормали к плоскости пластины, создавая ситуацию ориентационного перехода. Взаимодействие внешнего поля

с полем размагничивания уже рассматривалось достаточно подробно, поэтому остановимся здесь в первую очередь на влиянии кубической анизотропии.

В общем случае эффективные поля кубической анизотропии определяются с помощью формулы (1.2) или (2.19):

$$H_{ai} = -\frac{\partial U_a}{\partial M_i} = -\frac{1}{M_0}\frac{\partial U_a}{\partial m_i}, \tag{10.33}$$

где U_a — плотность энергии кубической анизотропии при заданной ориентации кристаллографической ячейки.

Заметим, что здесь речь идет именно об эффективных полях в смысле (10.33), а не о «поле кубической анизотропии» (4.119), которое является константой материала и равно K_1/M_0, где K_1 — первая константа кубической анизотропии.

Основные уравнения (10.27)–(10.29), используемые для решения задачи, записаны в системе $Oxyz$, связанной с направлением постоянного поля и плоскостью пластины. Однако плотность энергии кубической анизотропии имеет наиболее простой вид в системе координат $Ox'y'z'$, оси которой совпадают с ребрами куба, которая в общем случае как-то повернута относительно системы $Oxyz$.

Для системы $Ox'y'z'$ будем использовать запись плотности энергии кубической анизотропии в виде, подобном (4.120) (при $K_1 > 0$, $K_2 = 0$). То есть, с точностью до обозначений, полагаем:

$$U_a = -K(m_{x'}^2 m_{y'}^2 + m_{y'}^2 m_{z'}^2 + m_{z'}^2 m_{x'}^2), \tag{10.34}$$

где при легких осях типа [111] предполагается, что $K > 0$ (здесь индекс «1» при константе опущен для простоты записи).

Предварительным этапом решения задачи является преобразование плотности энергии анизотропии (10.34), заданной в системе $Ox'y'z'$, к виду записи в системе $Oxyz$, для чего воспользуемся аппаратом матриц перехода, описанным в главе 3. При этом преобразование компонент вектора намагниченности $\mathbf{m}$ производится по формуле, подобной (3.14):

$$\mathbf{m}' = \overleftrightarrow{A}^{-1}\mathbf{m}, \tag{10.35}$$

где $\overleftrightarrow{A}^{-1}$ — матрица перехода от системы $Oxyz$ к системе $Ox'y'z'$, компоненты которой, подобно (3.8), представляют собой косинусы углов между осями этих систем:

$$\overleftrightarrow{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \cos(\angle x'Ox) & \cos(\angle x'Oy) & \cos(\angle x'Oz) \\ \hline \cos(\angle y'Ox) & \cos(\angle y'Oy) & \cos(\angle y'Oz) \\ \hline \cos(\angle z'Ox) & \cos(\angle z'Oy) & \cos(\angle z'Oz) \end{array}\right). \tag{10.36}$$

В главе 3, отмечено, что наиболее важными для практики в случае кубической ячейки являются ориентации типа [001], [011] и [111].

Поскольку для получения эффективных полей (10.33), входящих в уравнения движения намагниченности (10.27)–(10.29) необходимо знание плотности энергии анизотропии U_a, остановимся подробно на выводе выражений плотности энергии для упомянутых выше основных ориентаций.

10.2.3. Ориентация [001]

Рассмотрим сначала ориентацию [001], иллюстрируемую рис. 10.12.

Рис. 10.12. Ориентация кубической ячейки и осей анизотропии типа [111] при ориентации [001]. *а* — кубическая ячейка и системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$; *б* — оси анизотропии в системе $Sxyz$; *в* — проекции осей анизотропии на плоскость Sxy и азимутальный портрет плотности энергии

Здесь на рис. 10.12, *а* в системе координат $Oxyz$ показана кубическая ячейка в положении ориентации [001], ориентированная таким образом, что ребра куба совпадают с осями системы $Oxyz$. Эти ребра показаны утолщенными сплошными и пунктирными линиями. Вершины куба обозначены буквами O (эта вершина помещена в начало координат), A, B, C, D, E, F, G. Пространственные диагонали куба, являющиеся осями анизотропии типа легкого намагничивания,

показаны тонкими сплошными линиями OF, AG, BD, CE. Точка пересечения пространственных диагоналей обозначена буквой S.

На рис. 10.12, *б* в системе, координат $Sxyz$, начало которой помещено в точку пересечения пространственных диагоналей куба, а оси Sx, Sy, Sz параллельны осям Ox, Oy, Oz соответственно, показано расположение частей осей типа [111] в верхнем полупространстве относительно плоскости Sxy. Буквы D, E, F, G соответствуют вершинам куба на рис. 10.12, *а*. Все эти части осей SD, SE, SF, SG лежат выше плоскости Sxy.

На рис. 10.12, *в* показан вид на проекции осей типа [111] на плоскость Sxy со стороны положительного направления оси Sz. Здесь и далее ось Sx направлена вниз, а ось Sy направо — для удобства наглядного сопоставления с рис. 10.12, *б*. Проекции тех же осей со стороны отрицательного направления оси Sz с первыми проекциями совпадают, то есть на плоскости Sxy или параллельной ей плоскости Oxy имеются четыре выделенных направления легкого намагничивания, параллельные осям SF, SG, SD, SE, расположенные под углами в 45° относительно осей Ox и Oy.

Поскольку в данной ориентации оси систем $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ совпадают, то матрица преобразования (10.36) является единичной и плотность энергии анизотропии в системе $Oxyz$ имеет вид, подобный (10.34):

$$U_a^{(001)} = -K(m_x^2 m_y^2 + m_y^2 m_z^2 + m_z^2 m_x^2). \tag{10.37}$$

В соответствии с (10.33), эффективные поля анизотропии имеют вид:

$$H_{ax}^{(001)} = \frac{2K}{M_0} m_x (m_y^2 + m_z^2); \tag{10.38}$$

$$H_{ay}^{(001)} = \frac{2K}{M_0} m_y (m_z^2 + m_x^2); \tag{10.39}$$

$$H_{az}^{(001)} = \frac{2K}{M_0} m_z (m_x^2 + m_y^2). \tag{10.40}$$

Введем сферическую систему координат, полярная ось которой совпадает с осью Oz, а азимутальная — с осью Ox. При этом компоненты нормированного вектора намагниченности, выраженные через полярный и азимутальный углы θ и φ, имеют вид:

$$m_x = \sin\theta\cos\varphi; \tag{10.41}$$

$$m_y = \sin\theta\sin\varphi; \tag{10.42}$$

$$m_z = \cos\theta. \tag{10.43}$$

Плотность энергии (10.37) принимает вид

$$U_a^{(001)} = -K(\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\theta). \tag{10.44}$$

На рис. 10.12, *в* сплошной линией показана зависимость нормированной плотности энергии $U_a^{(001)}/K$ от азимутального угла φ, построенная по формуле (10.44) при $\theta = 20°$. Значение угла θ выбрано

из условия близости направления вектора намагниченности к равновесной ориентации, имеющей место далее при построении прецессионных портретов. Для наглядности рисунка к значению плотности энергии по формуле (10.44) прибавлена постоянная величина 0,109, не меняющая сути построения, так как потенциал определен с точностью до произвольной постоянной.

Видно, что плотность энергии имеет четыре минимума, совпадающие по положению с проекциями осей типа [111] на плоскость Sxy или параллельную ей плоскость Oxy.

10.2.4. Ориентация [011]

Рассмотрим теперь ориентацию [011], иллюстрируемую рис. 10.13.

Рис. 10.13. Ориентация кубической ячейки и осей анизотропии типа [111] при ориентации [011]. *а* — кубическая ячейка и системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$; *б* — оси анизотропии в системе $Sxyz$; *в* — проекции осей анизотропии на плоскость Sxy и азимутальный портрет плотности энергии

Здесь на рис. 10.13, *а* в системе координат $Oxyz$ показана кубическая ячейка в положении ориентации [011], ориентированная таким образом, что одно из ребер куба совпадает с осью Ox, и одна из диагоналей грани, а именно OG, совпадает с осью Oz. Изображение и обозначения ребер и вершин куба, а также пространственных диагоналей и точки их пересечения совпадают с приведенными на рис. 10.12, *а*.

На рис. 10.13, *б* в системе, координат $Sxyz$, начало которой помещено в точку пересечения пространственных диагоналей куба, а оси Sx, Sy, Sz параллельны осям Ox, Oy, Oz соответственно, показано расположение частей осей типа [111] в верхнем полупространстве относительно плоскости Sxy. Буквы B, C, D, E, F, G соответствуют вершинам куба на рис. 10.13, *а*. Две оси типа [111], BD и CE, лежат в плоскости Sxy, части осей SF и SG лежат выше плоскости Sxy.

На рис. 10.13, *в* показан вид на проекции осей типа [111] на плоскость Sxy со стороны положительного направления оси Sz. Проекции частей осей SF и SG, лежащих выше плоскости Sxy, показаны утолщенными сплошными линиями. Оси BD и CE, лежащие в плоскости Sxy, совпадающие со своими проекциями, показаны двойными тонкими линиями.

В принятой ориентации, из осей системы координат $Ox'y'z'$, ось Ox' совпадает с осью Ox, а оси Oy' и Oz' составляют с осями Oy и Oz углы по 45° соответственно.

Матрица преобразования, образованная косинусами углов между осями систем $Ox'y'z'$ и $Oxyz$, имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{(011)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \tag{10.45}$$

Преобразование компонент вектора намагниченности, производится по той же формуле (10.35), из которой получаем:

$$m_{x'} = m_x; \tag{10.46}$$

$$m_{y'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(m_y + m_z); \tag{10.47}$$

$$m_{z'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-m_y + m_z). \tag{10.48}$$

Подставляя эти компоненты в (10.34), получаем плотность энергии анизотропии, выраженную через компоненты вектора намагниченности в системе $Oxyz$, в виде

$$U_a^{(011)} = -K\left(\frac{1}{4}m_y^4 + \frac{1}{4}m_z^4 + m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 - \frac{1}{2}m_y^2 m_z^2\right). \tag{10.49}$$

Эффективные поля анизотропии имеют вид:

$$H_{ax}^{(011)} = \frac{2K}{M_0} m_x (m_y^2 + m_z^2); \tag{10.50}$$

$$H_{ay}^{(011)} = \frac{K}{M_0} m_y (2m_x^2 + m_y^2 - m_z^2); \tag{10.51}$$

$$H_{az}^{(011)} = \frac{K}{M_0} m_z (2m_x^2 - m_y^2 + m_z^2). \tag{10.52}$$

В сферической системе координат при компонентах вектора намагниченности вида (10.41)–(10.43), плотность энергии принимает вид:

$$U_a^{(011)} = -K\left(\frac{1}{4}\sin^4\theta\sin^4\varphi + \frac{1}{4}\cos^4\varphi + \sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \right.$$
$$\left. + \sin^2\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\right). \quad (10.53)$$

На рис. 10.13, *в* сплошной линией показана зависимость нормированной плотности энергии $U_a^{(011)}/K$ от азимутального угла φ, построенная по формуле (10.53) при $\theta = 20°$. Значение угла θ выбрано аналогично рис. 10.12, *в*. Постоянная добавка к плотности энергии составляет также 0,109.

Видно, что в этом случае плотность энергии имеет два минимума, совпадающие по положению с проекциями тех осей типа [111] на плоскость Sxy или Oxy, которые лежат в перпендикулярной ей плоскости Oxz.

10.2.5. Ориентация [111]

Рассмотрим наконец ориентацию [111], иллюстрируемую рис. 10.14.

Здесь на рис. 10.14, *а* в системе координат $Oxyz$ показана кубическая ячейка в положении ориентации [111], ориентированная таким образом, что проекция ребра куба OA на плоскость Oxy совпадает с осью Ox, и пространственная диагональ куба OE, совпадает с осью Oz. Изображение и обозначения ребер и вершин куба, а также пространственных диагоналей и точки их пересечения совпадают с приведенными на рис. 10.12, *а*.

На рис. 10.14, *б* в системе, координат $Sxyz$, начало которой помещено в точку пересечения пространственных диагоналей куба, а оси Sx, Sy, Sz параллельны осям Ox, Oy, Oz соответственно, показано расположение частей осей типа [111] в верхнем полупространстве относительно плоскости Sxy. Буквы B, D, E, F соответствуют вершинам куба на рис. 10.14, *а*. Ось OE перпендикулярна плоскости Sxy, а части осей SB, SD, SF лежат выше плоскости Sxy и составляют с ней угол, равный $\pi/2 - 2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,/2 \approx 19{,}47°$.

На рис. 10.14, *в* показан вид на проекции осей типа [111] на плоскость Sxy со стороны положительного направления оси Sz. Проекции частей осей SB, SD, SF лежащих выше плоскости Sxy, показаны утолщенными сплошными линиями, проекции частей осей SA, SC, SG лежащих ниже плоскости Sxy, показаны двойными пунктирными линиями.

В принятой ориентации ось Ox' лежит в плоскости Oxz и составляет с осью Ox угол, равный $\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}\,/2$. Оси Oy' и Oz' лежат в плоскости, составляющей с осью Ox угол, равный $\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$ и расположены симметрично относительно плоскости Oxz.

Рис. 10.14. Ориентация кубической ячейки и осей анизотропии типа [111] при ориентации [111]. *а* — кубическая ячейка и системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$; *б* — оси анизотропии в системе $Sxyz$; *в* — проекции осей анизотропии на плоскость Sxy и азимутальный портрет плотности энергии

Матрица преобразования, образованная косинусами углов между осями систем $Ox'y'z'$ и $Oxyz$, имеет вид

$$\overleftrightarrow{A}_{(111)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}. \tag{10.54}$$

Преобразуя компоненты вектора $\mathbf{m}$ с помощью формулы (10.35), получаем:

$$m_{x'} = \frac{\sqrt{6}}{3} m_x + \frac{\sqrt{3}}{3} m_z; \tag{10.55}$$

$$m_{y'} = -\frac{\sqrt{6}}{6} m_x + \frac{\sqrt{2}}{2} m_y + \frac{\sqrt{3}}{3} m_z; \tag{10.56}$$

$$m_{z'} = -\frac{\sqrt{6}}{6} m_x - \frac{\sqrt{2}}{2} m_y + \frac{\sqrt{3}}{3} m_z. \tag{10.57}$$

Подставляя эти компоненты в (10.34), получаем плотность энергии анизотропии, выраженную через компоненты вектора намагниченности в системе $Oxyz$, в виде

$$U_a^{(111)} = \\ = -K\left(\frac{1}{4}m_x^4 + \frac{1}{4}m_y^4 + \frac{1}{3}m_z^4 + \frac{1}{2}m_x^2 m_y^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}m_x^3 m_z + \sqrt{2}\, m_x m_y^2 m_z\right). \tag{10.58}$$

Эффективные поля анизотропии имеют вид:

$$H_{ax} = \frac{K}{M_0}(m_x^3 + m_x m_y^2 - \sqrt{2}\, m_x^2 m_z + \sqrt{2}\, m_y^2 m_z); \tag{10.59}$$

$$H_{ay} = \frac{K}{M_0}\left(m_y^3 + m_x^2 m_y + 2\sqrt{2}\, m_x m_y m_z\right); \tag{10.60}$$

$$H_{az} = \frac{K}{M_0}\left(\frac{4}{3}m_z^3 - \frac{\sqrt{2}}{3}m_x^3 + \sqrt{2}\, m_x m_y^2\right). \tag{10.61}$$

В сферической системе координат при компонентах вектора намагниченности вида (10.41)-(10.43), плотность энергии принимает вид:

$$U_a^{(111)} = -K\Bigg(\frac{1}{4}\sin^4\theta\cos^4\varphi + \frac{1}{4}\sin^4\theta\sin^4\varphi + \frac{1}{3}\cos^4\varphi + \\ + \frac{1}{2}\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin^3\theta\cos\theta\cos^3\varphi + \\ + \sqrt{2}\,\sin^3\theta\cos\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\Bigg). \tag{10.62}$$

На рис. 10.14, *в* сплошной линией показана зависимость нормированной плотности энергии $U_a^{(111)}/K$ от азимутального угла φ, построенная по формуле (10.62) при $\theta = 20°$. Значение угла θ выбрано аналогично рис. 10.12, *в*. Постоянная добавка к плотности энергии составляет 0,210.

Видно, что в этом случае плотность энергии имеет три минимума, приходящиеся на проекции на плоскость Sxy или Oxy тех частей осей типа [111], которые лежат выше плоскости Sxy, то есть при углах φ равных 60°, 180° и 300°. Такое положение минимумов обусловлено положительным значением угла θ, отсчитываемого от оси Oz. При значении этого угла равном 160° (то есть при зеркально симметричном положении вектора намагниченности относительно плоскости Sxy) минимумы плотности энергии располагаются ближе к тем частям осей типа [111], которые лежат ниже плоскости Sxy, то есть при углах 0°, 120° и 240°. При $\theta = 90°$ зависимость нормированной плотности энергии $U_a^{(111)}/K$ от угла φ отсутствует.

10.2.6. Прецессионные портреты

Теперь, когда выражения для плотности энергии кубической анизотропии для различных ориентаций кубической ячейки получены,

перейдем к исследованию свойств прецессии положения равновесия при этих ориентациях.

Полная плотность энергии, включающая в себя кроме энергии анизотропии также энергию взаимодействия намагниченности с внешним полем и полем анизотропии, имеет вид:

$$U = -M_0 h_x m_x - M_0 h_y m_y - M_0 H_{0z} m_z + 2\pi M_0^2 m_z^2 + U_a, \qquad (10.63)$$

где U_a — плотность энергии кубической анизотропии, определяемая формулами (10.37), (10.49), (10.58) или их эквивалентами в сферической системе координат (10.44), (10.53), (10.62).

Будем решать уравнения движения намагниченности (10.27)–(10.29) с эффективными полями, определяемыми из плотности энергии в соответствии с формулами (10.14) и (10.33).

В качестве объекта исследования рассмотрим прецессионные портреты при различных ориентациях осей анизотропии, построенные путем численного решения нелинейных уравнений Ландау–Лифшица (10.27)–(10.29) методом Рунге–Кутта четвертого порядка [261], подобно тому, как это было сделано в работах [307, 308, 312, 323, 324].

Полученные портреты представлены на рис. 10.15. Для сравнения портретов с характером анизотропии, на рис. 10.15, *б–г* утолщенными линиями показаны проекции осей типа (111) на плоскость Sxy (здесь оси координат Ox и Oy ориентированы традиционным образом, то есть повернуты относительно их положения на рис. 10.12, *в*–рис. 10.14, *в* на 90°). На внутренних вставках в каждый из этих портретов показаны азимутальные портреты плотности энергии, построенные при тех же условиях, что и на рис. 10.12, *в*–рис. 10.14, *в*. Направление движения положения равновесия (вдоль центральной линии большого кольца) происходит против часовой стрелки, что соответствует его правому характеру. Сплошные линии портретов плотности энергии соответствуют росту потенциала по мере продвижения положения равновесия, пунктирные — его убыванию.

Рис. 10.15, *а* соответствует отсутствию анизотропии и приведен здесь для сравнения. Видно, что в этом случае большое кольцо заполнено малыми кольцами совершенно равномерно.

Рис. 10.15, *б* соответствует ориентации [001]. Видно, что в этом случае прецессионный портрет имеет четыре сгущения малых колец с расположенными между ними разрежениями, причем положения тех и других хорошо коррелируют с проекциями осей типа [111].

Из сопоставления с азимутальным портретом плотности энергии можно видеть, что сгущения приходятся на те же значения азимутального угла, что и области роста потенциала (от 45° до 90° и далее между 135° и 180°, 225° и 270°, 315° и 360°).

Рис. 10.15, *в* соответствует ориентации [011]. В этом случае прецессионный портрет имеет всего два сгущения малых колец с расположенными между ними разрежениями, также хорошо коррелирующими с проекциями осей типа [111]. Здесь центры сгущений также

Рис. 10.15. Прецессионные портреты и плотности энергии анизотропии при различных ориентациях кубических осей. Параметры: *а* — анизотропия отсутствует: $K = 0$; *б* — ориентация [001], $K = 221$ эрг см$^{-3}$; *в* — ориентация [011], $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$; *г* — ориентация [111], $K = 12{,}9$ эрг см$^{-3}$. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц, $h_0 = 3$ Э

приходятся на середины тех же интервалов азимутального угла, что и области роста потенциала (от 0° до 90° и от 180° до 270°).

Рис. 10.15, *г* соответствует ориентации [111]. Теперь прецессионный портрет имеет три сгущения малых колец с промежуточными разрежениями, также коррелирующими с проекциями осей типа [111]. И в этом случае сгущения приходятся на те же интервалы азимутального угла, что и области роста потенциала (от 60° до 120°, от 180° до 240° и от 300° до 360°).

Таким образом, как и в случае одноосной анизотропии, сгущение малых колец соответствует торможению положения равновесия из-за его подъема на потенциальную горку, а разрежение — ускорению движения из-за скатывания с этой горки.

10.2.7. Критичность нарушения симметрии системы

Кубическая анизотропия нарушает осевую симметрию системы, в результате чего при достаточной величине ее константы происходит срыв круговой прецессии положения равновесия, на прецессионном портрете проявляющийся в виде разрыва большого кольца и выходе малых колец на стационарную орбиту.

Как можно видеть из предыдущего рассмотрения, при различной ориентации осей куба вид прецессионного портрета различен, то есть симметрия нарушается различным образом и в различной степени.

Все прецессионные портреты на рис. 10.15 построены в условиях, предшествующих срыву, с точностью порядка 0,01, то есть срыв наступает уже при увеличении константы на $1\ldots2\,\%$. В то же время рис. 10.15, *б* соответствует $K = 221$ эрг см$^{-3}$, рис. 10.15, *в* — $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$, рис. 10.15, *г* — $K = 12{,}9$ эрг см$^{-3}$.Столь сильное различие между значениями констант срыва при различной ориентации кубической ячейки определяется резкостью ориентационной зависимости потенциала, иллюстрируемой рис. 10.16.

На этом рисунке представлены зависимости нормированной на величину константы потенциала U/K (плотности энергии) от азимуталь-

Рис. 10.16. Зависимости нормированного потенциала (плотности энергии) от азимутального угла вектора намагниченности при различных ориентациях осей кубической анизотропии: *1* — ориентация [001], сдвиг нуля: +0,105; *2* — ориентация [011]; сдвиг нуля: +0,223; *3* — ориентация [111]; сдвиг нуля: +0,263. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\theta_a = 20^\circ$

ного угла вектора намагниченности при различных ориентациях осей кубической анизотропии, построенные по формулам (10.44), (10.49) и (10.62). Для удобства сравнения нули всех кривых совмещены с помощью введения постоянных добавок к потенциалу.

Из рисунка видно, что при ориентации [001] зависимость потенциала от азимутального угла крайне мала, имеет среднее значение при ориентации [111] и достигает наибольшей величины при ориентации [011]. То есть ориентация [001] нарушает симметрию в наименьшей степени, а ориентация [011] — в наибольшей. Это соответствует тому обстоятельству, что при ориентации [011] срыв наступает уже при столь малом значении константы как $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$, то есть при поле анизотропии, определенном как $H_a = K/M_0$, равном $H_a = 0{,}247$ Э, тогда как при ориентации [001] для срыва требуется значение константы $K = 221$ эрг см$^{-3}$, что соответствует $H_a = 9{,}92$ Э. Таким образом, соотношение критических значений констант, соответствующих срыву, для ориентаций [001] и [011] составляет 40,2.

Из сравнения расположения осей типа [111] относительно плоскости пластины, иллюстрируемого рис. 10.12, *б*, рис. 10.13, *б*, рис. 10.14 *б*, можно видеть, что при ориентациях [001] и [111] все оси отклонены от плоскости пластины на одинаковые углы, тогда как при ориентации [011] две оси лежат в этой плоскости, а две другие отклонены от нее на весьма значительный угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx 54{,}74°$.

Таким образом, можно полагать, что симметрия системы нарушается наибольшим образом тогда, когда углы, которые оси анизотропии составляют с плоскостью пластины, являются различными. С другой стороны, при ориентации [001] расположение осей типа [111] можно перевести само в себя путем поворота кубической ячейки вокруг нормали к плоскости пластины на 90°, то есть нормаль является осью симметрии четвертого порядка. При ориентации [111] такой перевод возможен при повороте вокруг той же нормали на 120°, то есть в этом случае нормаль является осью симметрии уже третьего порядка. Ориентация [011] для такого перевода требует поворота уже на 180°, то есть здесь нормаль к плоскости пластины является осью симметрии всего второго порядка. Таким образом, можно видеть, что с понижением степени симметрии амплитуда азимутальной зависимости потенциала растет, а критическое значение константы падает.

10.3. Особенности дополнительного воздействия постоянного и переменного полей в случае кубической анизотропии

Подобно случаю одноосной анизотропии, свойства прецессии положения равновесия в среде с кубической анизотропией также существенным образом меняются при воздействии дополнительных

постоянного и переменного полей. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

10.3.1. Постоянное поле в плоскости пластины

Как показано в работах [307, 323, 324], приложение постоянного поля в плоскости пластины, нарушая симметрию системы, изменяет характер прецессии.

В рассматриваемом случае кубической анизотропии, как и в предыдущих ситуациях, приложение постоянного поля в плоскости пластины при достаточной его величине приводит к срыву прецессии положения равновесия, то есть большое кольцо прецессионного портрета разрывается, а малые кольца выходят на стационарную орбиту. При этом ориентация постоянного поля в плоскости существенной не является, остается важной лишь его величина. Перед срывом развертка колебаний намагниченности во времени приобретает вид импульсов неравной длительности, причем это неравенство, по мере приближения поля к значению, достаточному для срыва, увеличивается. При этом на прецессионном портрете положения сгущений не меняются, несколько возрастает лишь густота заполнения траекториями того из сгущений, на которое приходится более длительный импульс.

Явление срыва отличается высокой критичностью по полю: срыв происходит при полях H_{0x} или H_{0y}, весьма малых по сравнению с полем H_{0z}, нормальным к плоскости пластины. Так, при $H_{0z} = 265$ Э и остальных параметрах, соответствующих прецессионным портретам на рис. 10.15, при ориентации [001] срыв происходит при постоянном поле в плоскости $8{,}7 \cdot 10^{-4}$ Э, при ориентации [011] при поле $2{,}6 \times \times 10^{-3}$ Э и при ориентации [111] при поле $1{,}9 \cdot 10^{-3}$ Э.

Как видим, прецессия положения равновесия наиболее критична к поперечному полю тогда, когда амплитуда азимутальной зависимости потенциала минимальна (рис. 10.16, кривая *1*), то есть при ориентации [001], соответствующей наиболее высокой степени симметрии. Наименьшая критичность наблюдается для ориентации [011], то есть при наибольшей амплитуде азимутальной зависимости потенциала (рис. 10.16, кривая *2*) и наименьшей степени симметрии, а ориентация [111] по критичности, как и по степени симметрии, занимает промежуточное положение (рис. 10.16, кривая *3*).

10.3.2. Переменное поле в плоскости пластины

Воздействие постоянным полем в плоскости пластины является статическим фактором, никак не связанным во времени с прецессионным движением вектора намагниченности. Рассмотрим теперь приложение в плоскости пластины кроме возбуждающего еще и дополнительного переменного поля, которое может как-то согласовываться с движением прецессии.

Поскольку при прецессии положения равновесия вектор намагниченности участвует сразу в двух движениях прецессионного характера:

с частотой возбуждающего поля и с частотой прецессии положения равновесия, то воздействие переменного поля, в зависимости от его частоты, может синхронизироваться как с тем, так и с другим движением. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

10.3.3. Синхронизм с частотой возбуждения

Рассмотрим ориентацию [011], для которой прецессионный портрет содержит всего два сгущения малых колец (рис. 10.15, *в*), расположенных диаметрально противоположно друг относительно друга, то есть имеет наиболее простой вид.

В работе [312] для случая изотропной среды показано, что в несимметричном поле возбуждения, при достаточной степени его несимметричности, на прецессионном портрете также возможно появление двух диаметрально противоположных сгущений. Рассмотрим теперь одновременное действие обоих факторов: кубической анизотропии при ориентации [011] и несимметричности возбуждающего поля.

Происходящие при этом явления иллюстрируются рис. 10.17, где показаны развертки колебаний намагниченности во времени и прецессионные портреты при различных сочетаниях анизотропии и компонент переменного поля.

Рис. 10.17, *а* соответствует отсутствию анизотропии и полной симметрии переменного поля. Колебания компонент намагниченности m_x и m_y являются чисто синусоидальными со сдвигом фаз на 90°, что соответствует строго круговой поляризации возбуждающего поля. Период колебаний составляет $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ с. На прецессионном портрете какие-либо сгущения малых колец отсутствуют.

Рис. 10.17, *б* соответствует наличию кубической анизотропии с ориентацией [011], однако переменное поле остается симметричным. В этих условиях колебания компонент намагниченности имеют вид близких к прямоугольным импульсов, синфазной полярности, то есть не имеют заметного сдвига фазы. При этом однако амплитуды протяженных участков импульсов, соответствующих m_x в течение длительности каждого импульса несколько (примерно на треть) спадают, а амплитуды протяженных участков импульсов, соответствующих m_y, в той же степени нарастают. Период импульсов составляет $2{,}0 \cdot 10^{-6}$ с, то есть значительно (в четыре раза) превышает период синусоидальных колебаний в отсутствие анизотропии. На прецессионном портрете наблюдаются два диаметрально противоположных сгущения малых колец, расположенные в первой и третьей четвертях азимутальной плоскости. Соответственно во второй и четвертой четвертях той же плоскости наблюдаются разрежения малых колец.

Рис. 10.17, *в* соответствует отсутствию кубической анизотропии, однако переменное поле является несимметричным. Соотношения его компонент выбраны таким образом, чтобы местоположения сгущений на прецессионном портрете максимально отличались от предыдущего случая, а именно: амплитуда компоненты h_{0x} составляет 0,8

Рис. 10.17. Развертки колебаний намагниченности во времени и прецессионные портреты при различных сочетаниях анизотропии и компонент переменного поля: *а* — $K = 0$, $h_{0x} = 3{,}0$ Э, $h_{0y} = 3{,}0$ Э; *б* — $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$, $h_{0x} = 3{,}0$ Э, $h_{0y} = 3{,}0$ Э; *в* — $K = 0$, $h_{0x} = 2{,}4$ Э, $h_{0y} = 3{,}0$ Э; *г* — $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$, $h_{0x} = 2{,}4$ Э, $h_{0y} = 3{,}0$ Э; Ориентация [011]. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $f = 100$ МГц

Рис. 10.17. Продолжение

от амплитуды компоненты h_{0y}. В этих условиях колебания намагниченности также близки к прямоугольным импульсам с наклонной протяженной вершиной, однако теперь их полярность является антифазной. Характер наклона протяженных участков импульсов для обеих компонент намагниченности подобен предыдущему случаю, однако теперь нарастание и спад меняются местами. Период импульсов составляет $1{,}8 \cdot 10^{-6}$ с и близок к периоду импульсов, обусловленных анизотропией (в 3,6 раз превышает период синусоидальных колебаний). На прецессионном портрете наблюдаются два диаметрально противоположных сгущения малых колец, расположенных во второй и четвертой четвертях азимутальной плоскости (благодаря упомянутому выбору соотношения компонент переменного поля). Соответственно в первой и третьей четвертях той же плоскости наблюдаются разрежения малых колец.

Рис. 10.17, *г* соответствует одновременному сочетанию кубической анизотропии с несимметричностью переменного поля. Видно, что в этом случае оба перечисленные фактора действуют в противоположные стороны. Так, вид колебаний намагниченности утрачивает импульсный характер и приближается к синусоидальному, хотя и несколько деформированному. Сдвиг фазы также стремится к 90°. Период колебаний составляет $0{,}8 \cdot 10^{-6}$ с, то есть приближается к периоду колебаний в отсутствие возмущений. На прецессионном портрете в этом случае большое кольцо заполняется малыми почти равномерно, то есть значительно однороднее, чем на рис. 10.17, *б* и рис. 10.17, *в*. При этом, хотя некоторые сгущения в интервалах углов от $-10°$ до 80° и от 170° до 260° все же остаются, однако интенсивность их значительно меньше сгущений на рис. 10.17, *б* и рис. 10.17, *в*. В это же время происходит и значительное ослабление наблюдаемых разрежений.

Таким образом, можно видеть, что надлежащим выбором несимметричности переменного поля можно в значительной степени компенсировать вызванное анизотропией нарушение равномерного движения прецессии положения равновесия.

Условия такой компенсации весьма критичны к выбору обоих параметров, как величины константы анизотропии, так и степени несимметричности переменного поля. Так, уменьшение константы анизотропии от значения $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$ до 4,0 эрг см$^{-3}$, то есть уменьшение поля анизотропии от 0,24 Э до 0,17 Э приводит к рассасыванию сгущений, а увеличение той же константы до величины 5,6 эрг см$^{-3}$, то есть на 2 %, вызывает срыв прецессии с соответствующим разрывом большого кольца. Уменьшение степени несимметричности поля путем увеличения его компоненты h_{0x} от 2,4 Э до 2,7 Э уже не позволяет получить видимого рассасывания сгущений, а увеличение той же степени несимметричности путем уменьшения h_{0x} до 2,2 Э (то есть менее чем на 10 %) приводит опять-таки к срыву прецессии. То есть, для возможности наблюдения компенсации надо выбирать значения параметров с точностью в единицы процентов.

Напомним, что описанная компенсация рассмотрена для случая ориентации [011], когда прецессионный портрет имеет всего два сгущения. Дополнительное рассмотрение показывает, что в случае ориентаций [001] и [111], когда такой портрет имеет четыре или три сгущения, удается частично скомпенсировать лишь не более чем одно или два сгущения, тогда как остальные, хотя и деформируются, но все же остаются.

10.3.4. Синхронизм с частотой прецессии положения равновесия

Рассмотрим ту же ориентацию [011], причем будем считать, что амплитуда возбуждающего поля такова, что на прецессионном портрете сгущения выражены достаточно явно, то есть развертка колебаний компонент намагниченности m_x и m_y во времени имеет импульсный характер, подобный показанному на рис. 10.17, *б*. Будем считать, что в плоскости пластины приложено дополнительное переменное поле правой круговой поляризации, частота которого близка к частоте прецессии положения равновесия. То есть к возбуждающему прецессию полю (10.25) прибавляется поле вида:

$$h_{px} = h_{p0}\sin(2\pi f_p t), \tag{10.64}$$

$$h_{py} = -h_{p0}\cos(2\pi f_p t), \tag{10.65}$$

где f_p — частота дополнительного переменного поля, h_{p0} — его амплитуда. Таким образом, в плоскости пластины имеется вращающееся магнитное поле, скорость вращения которого может быть как больше, так и меньше скорости движения прецессирующего положения равновесия. Введение такого поля приводит к появлению движущегося по кругу «холма» и диаметрально противоположной ему «впадины» потенциала U, что при достаточной его величине может ускорять или замедлять прецессионное движение положения равновесия. При этом вектор намагниченности будет задерживаться в области сгущений

большее или меньшее время, то есть длительность импульсов развертки во времени колебаний компонент m_x и m_y будет изменяться.

Наблюдаемые при этом явления иллюстрируются рис. 10.18, где показана зависимость длительности τ второго импульса развертки во времени колебаний компоненты m_x от частоты f_p дополнительного переменного поля в плоскости пластины. Врезка иллюстрирует схему регистрации длительности импульса компоненты намагниченности m_x (компонента m_y ведет себя аналогично). Здесь сплошные и пунктирные линии отражают трансформацию импульсов при изменении фазы переменного поля. Для показанных двух случаев фазы отличаются на 90°. Видно, что сдвиг фазы переменного поля приводит к изменению длительности первого импульса, после чего длительность всех последующих импульсов стабилизируется и становится постоянной. То есть сразу после включения переменного поля система какое-то время «приспосабливается» к его фазе, после чего движется с ним

Рис. 10.18. Зависимость длительности второго импульса развертки во времени колебаний компоненты от частоты дополнительного переменного поля в плоскости пластины. На врезке — схема измерения длительности второго импульса. *1* — точки — результат машинного эксперимента; *2* — зависимость длительности полупериода переменного поля от частоты; *3* — длительность второго импульса в отсутствие дополнительного переменного поля. Ориентация [011], амплитуда дополнительного переменного поля: $h_{p0} = 0{,}004$ Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$, $f = 100$ МГц, $h_{0x} = 3{,}0$ Э, $h_{0y} = 3{,}0$ Э

синхронно. Для устранения помех от переходного режима в экспериментах измерялась длительность именно второго импульса τ, схематически показанная на врезке.

На рисунке сплошными точками *1* показаны результаты машинного эксперимента по измерению длительности импульса, пунктирная кривая *2* отражает зависимость полупериода дополнительного переменного поля от его частоты, уровень длительности импульса в отсутствие переменного поля показан точечной линией *3*. Амплитуда дополнительного поля в этом случае задана на уровне $h_{p0} = 0{,}004$ Э.

Из рисунка видно, что в интервале частот от 0,1 МГц до 1,2 МГц длительность второго импульса в точности равна половине периода дополнительного поля, то есть имеет место полный синхронизм прецессии положения равновесия с этим переменным полем. Ниже этого интервала частот длительность второго импульса остается близкой к таковой в отсутствие переменного поля, то есть к величине $0{,}9 \times \times 10^{-6}$ с, после чего на границе интервала скачком возрастает до величины $6{,}2 \cdot 10^{-6}$ с (то есть почти на порядок), далее по частоте следуя за половиной периода переменного поля. К концу интервала синхронизма длительность второго импульса, следуя за половиной периода переменного поля, становится меньше величины $0,9 \cdot 10^{-6}$ с почти в два раза, после чего, вырываясь из условий синхронизма и испытывая плавные постепенно затухающие осцилляции, стремится к этой величине. Совпадение длительности импульса в условиях синхронизма с его длительностью в отсутствие дополнительного переменного поля происходит вблизи частоты 0,5 МГц, то есть чуть ниже середины интервала синхронизма. Из почти точной симметрии этой частоты относительно краев интервала синхронизма, можно полагать, что условия захвата и выхода из синхронизма для прецессии положения равновесия происходят в близких условиях, то есть при близкой величине крутизны потенциала в обоих случаях.

Приведенные на рис. 10.18 кривые получены при амплитуде дополнительного поля равной $h_{p0} = 0{,}004$ Э. На рис. 10.19 показано, как меняются границы области синхронизма при изменении амплитуды этого поля. Область синхронизма заключена между кривыми *1* и *2*. Кривая *3* отражает условие равенства длительности импульса ее величине в отсутствие переменного поля ($0{,}9 \cdot 10^{-6}$ с).

Из рисунка видно, что частотный интервал синхронизма простирается вниз до одного порядка и вверх в два–три раза по отношению к частоте прецессии в отсутствие дополнительного поля. При увеличении амплитуды дополнительного поля частотные границы области синхронизма расширяются, что связано с увеличением высоты вращающейся потенциальной горки (или увеличением глубины противостоящей ей впадины), создаваемой дополнительным полем.

Кривые в области амплитуд ниже $h_{p0} = 0{,}002$ Э показаны пунктиром, так как более точные измерения здесь затруднены из-за значительного расплывания и деформации формы импульса. Более

Рис. 10.19. Границы области синхронизма в зависимости от амплитуды дополнительного переменного поля. *1* — низкочастотная граница области синхронизма; *2* — высокочастотная граница области синхронизма; *3* — линия равенства длительности импульса ее величине в отсутствие переменного поля. Ориентация [011]. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0z} = 265$ Э, $\alpha = 0{,}3$, $K = 5{,}5$ эрг см$^{-3}$, $f = 100$ МГц, $h_{0x} = 3$ Э; $h_{0y} = 3$ Э

подробное исследование в области малых амплитуд показало, что явление синхронизма является пороговым: при амплитуде дополнительного переменного поля ниже $h_{p0} = 0{,}005$ Э синхронизм отсутствует. Следует отметить весьма высокую критичность порога синхронизма к амплитуде поля: отмеченная величина составляет $\sim 2 \cdot 10^{-6}$ от поля, перпендикулярного плоскости пластины.

В области амплитуд выше $h_{p0} = 0{,}006$ Э точные измерения также затруднены, так как на обеих границах области синхронизма импульсы также расплываются, и границы становятся менее определенными.

Причина такого расплывания состоит в том, что за движение равновесного положения вектора намагниченности по большому кругу прецессионного портрета отвечают два механизма. Один обусловлен действием сил гироскопической природы, подробно интерпретированных в работе [306] на основе векторной модели. Движение положения равновесия под действием этого механизма можно назвать «самопроизвольным», так как в этом случае никакой действующей извне силы с круговой поляризацией нет. Другой механизм обусловлен действием

именно дополнительного переменного поля, которое создает движущуюся по кругу определенную «потенциальную яму», за которой и следует положение равновесия. Такое движение положения равновесия можно назвать «вынужденным». При малой амплитуде дополнительного переменного поля преобладает первый механизм, то есть движение положения равновесия является самопроизвольным. При этом форма импульсов выражается достаточно четко, так как их фронты обусловлены резким «соскакиванием» положения равновесия с потенциальной «горки» в потенциальную «ямку». Когда амплитуда дополнительного поля начинает превышать величину $h_{p0} = 0{,}006$ Э, наступает преобладание второго механизма, и движение положения равновесия становится вынужденным. Такое движение следует за потенциальной ямой, образуемой дополнительным полем, то есть происходит достаточно плавно, и фронты импульсов размазываются.

В ходе исследования четко было установлено, что, начиная с этих амплитуд ($h_{p0} = 0{,}006$ Э), синхронное вынужденное движение положения равновесия начинает преобладать над самопроизвольным, в результате чего при $h_{p0} = 0{,}100$ Э вплоть до частоты 4,0 МГц какие-либо следы самопроизвольного движения исчезают, сгущения на прецессионном портрете рассасываются, и прецессия положения равновесия приобретает чисто вынужденный характер. Такое вынужденное движение имеет место в значительно большем (до нескольких раз) диапазоне возбуждающего и постоянного полей, чем в случае самопроизвольного движения, в том числе в тех случаях, когда самопроизвольное движение претерпевает срыв.

10.4. Некоторые дополнительные замечания

Заметим, что проведенное здесь рассмотрение касается только трех весьма специфических ориентаций осей кубической ячейки, являющихся наиболее характерными и изученными. В самом общем случае надо рассматривать произвольную ориентацию осей типа [111] относительно плоскости пластины. При этом симметрия системы будет нарушаться еще больше, чем в случае ориентации [011], то есть возможны зависимости, типа приведенной для одноосной анизотропии на рис. 10.5, где критическое значение константы уже при сравнительно небольшом отклонении от нормали к плоскости пластины (на единицы и доли градуса), резко уменьшается. С другой стороны, как показано в 10.1.8, для одноосной анизотропии такое нарушение симметрии можно скомпенсировать надлежащим отклонением постоянного поля от той же нормали. Можно надеяться, что и в случае кубической анизотропии нарушение симметрии, вызванное разбалансом ориентации осей типа [111] относительно плоскости пластины, удастся скомпенсировать подходящим образом ориентированным постоянным полем.

Приведенные результаты относится к режиму прецессии без охвата центра [308]. Последовательность проявления остальных режимов

при изменении величины переменного поля в случае анизотропной среды, в основном, сохраняется. Однако между режимом с охватом центра и режимом простой круговой прецессии наблюдаются последовательно сменяющие друг друга от двух до четырех режимов, состоящих в локализации прецессионного портрета в направлениях проекций отдельных осей анизотропии.

Замечание. Свойства прецессии положения равновесия существенно зависят и от ряда других факторов. Авторы настоящей монографии ни в коей мере не могут претендовать на всестороннее их исследование. Однако некоторые известные им особенности рассматриваемого явления, по их мнению, представляют определенный интерес, поэтому следующий раздел авторы посвящают краткому обзору одной из таких особенностей — кинетике перехода между некоторыми режимами.

10.5. Кинетика перехода между различными режимами прецессии положения равновесия

В предыдущих разделах рассматривались различные режимы прецессии положения равновесия в полностью установившемся состоянии. То есть, после окончания первоначального развития амплитуда и общий характер колебаний далее не менялся. Однако определенный интерес представляют не только стационарные колебания, но и процесс перехода от одного режима к другому. Особое значение здесь приобретает время таких переходов, в том числе его связь (или ее отсутствие) с временем собственной релаксации системы.

Вообще говоря, исследований динамики как переходов, так и первоначального установления различных режимов прецессии положения равновесия, насколько известно авторам настоящей монографии, до настоящего время не проводилось, то есть составляет возможный предмет для будущего исследования.

Однако, чтобы хоть в какой-то мере пролить незначительный свет на существо вопроса или хотя бы показать, с какой стороны к нему можно придвинуться, в настоящем разделе приведем краткое рассмотрение одного из таких переходов, следуя работе [305].

Итак отметим, что углы прецессия намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине, где параметрическое возбуждение обменных волн исключается, могут достигать 20-40 градусов и более, что обеспечивает возможность реализации сложных регулярных и стохастических режимов [127, 130, 297].

В работе [306] показано, что при постоянном поле, меньшем поля размагничивания, то есть в условиях ориентационного перехода возможна прецессия положения равновесия намагниченности, по характеру которой в работе [308] выделены пять различных режимов (раздел 9.3).

Данный раздел посвящен изучению кинетики перехода между режимами № 3 и № 4, в частности, времени установления динамического стационарного состояния прецессии по обе стороны от точки перехода.

Геометрия задачи совпадает с принятой в [130, 297]. Ферритовая пластина намагничена постоянным полем $\mathbf{H}_0$, направленным по нормали к ее плоскости. Величина постоянного поля несколько меньше поля размагничивания пластины $4\pi M_0$. Переменное поле $\mathbf{h}$ круговой поляризации ориентировано в плоскости пластины. Плоскость Oxy декартовой системы координат $Oxyz$ параллельна плоскости пластины, ось Oz — перпендикулярна и совпадает с направлением постоянного поля.

На рис. 10.20 показаны прецессионные портреты (*а*, *г*) и развитие колебаний во времени для компонент намагниченности m_x (сплошные линии) и m_y (пунктир) (*б*, *д*) и поперечной компоненты намагниченности $m_s = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ (*в*, *е*). Верхний ряд рисунков (*а*, *б*, *в*) соответствует режиму № 3, нижний (*г*, *д*, *е*) — режиму № 4.

Характер установления колебаний намагниченности наиболее ярко проявляется на рис. 10.20, *в* (режим № 3) и рис. 10.20, *д* (режим № 4). В обоих режимах установление стационарного состояния происходит через затухание начальной неустановившейся прецессии, причем в режиме № 3 в стационарном состоянии после установления

Рис. 10.20. Прецессионные (*а*, *г*) портреты и временные зависимости (*б*, *в*, *д*, *е*) при различных амплитудах переменного поля h_0: *а*, *б*, *в* — 35 Э; *г*, *д*, *е* — 38 Э. Точка перехода от режима № 3 к режиму № 4 соответствует $h_0 = 37$ Э. Параметры: $4\pi M_0 = 280$ Гс, $H_{0x} = H_{0y} = 0$ Э, $H_{0z} = 260$ Э, $\alpha = 1{,}2$, $f = 200$ МГц

положение равновесия продолжает прецессировать с постоянной амплитудой (рис. 10.20, *в*), а в режиме № 4 в стационарном состоянии положение равновесия выстраивается вдоль постоянного поля и успокаивается (рис. 10.20, *д*).

Время установления затухающей составляющей прецессии равновесия значительно (во много раз) превышает время релаксации прецессии вектора намагниченности и сильно зависит от амплитуды переменного поля, как это иллюстрируется рис. 10.21. Здесь точки — значения времени установления, полученные из зависимостей от времени, приведенных на рис. 10.20, *в*, *д*, сплошные линии — построенные по эмпирически найденной формуле

$$\tau = \frac{A}{|h - h_c|}, \tag{10.66}$$

где $h_c = 37$ Э, при переменном поле ниже перехода $A = 1{,}4$, выше перехода ($h > h_c$) $A = 3{,}8$.

Из рисунка видно, что по мере изменения амплитуды возбуждающего сигнала время установления меняется от величины порядка времени релаксации вектора намагниченности (вдали от перехода между режимами № 3 и № 4), до величины, стремящейся к бесконечности (вблизи точки перехода).

Это явление внешне напоминает кинетику фазового перехода второго рода, описываемую уравнением Ландау–Халатникова [404, стр. 517, форм. (101.2)].

Рис. 10.21. Зависимость времени установления от амплитуды переменного поля. Параметры — те же, что приняты при построении рис. 10.20

В рассматриваемой задаче о прецессии положения равновесия можно за точку перехода считать амплитуду возбуждающего сигнала, при которой режим № 3 заменяется режимом № 4, а за параметр порядка — отклонение поперечной компоненты намагниченности от величины, соответствующей точке перехода между режимами № 3 и № 4.

Рассмотрим на основании такой аналогии установление намагниченности при переходе между режимами № 3 и № 4.

Будем считать, что скорость установления намагниченности тем больше, чем сильнее зависимость потенциала от намагниченности, то есть выполняется соотношение

$$\frac{dm}{dt} = -\delta \left| \frac{\partial U}{\partial m} \right|, \tag{10.67}$$

где $\delta > 0$ — постоянный коэффициент.

Предположим, что вблизи от точки перехода, где $m = m_0$ (индекс s для простоты опущен) и $h = h_c$, потенциал имеет вид

$$U = U_0 + \beta |h - h_c| (m - m_0)^2, \tag{10.68}$$

где $\beta > 0$ — постоянный коэффициент.

Подставляя (10.68) в (10.66), получаем

$$\frac{dm}{dt} = -2\delta\beta |h - h_c| |m - m_0|. \tag{10.69}$$

Решая это уравнение, получаем

$$|m - m_0| = Ge^{-2\delta\beta|h-h_c|t}, \tag{10.70}$$

где G — постоянный коэффициент.

Полагая, что установление намагниченности происходит по закону

$$|m - m_0| = Ge^{-t/\tau}, \tag{10.71}$$

где $\tau > 0$ — время установления, то есть время, за которое намагниченность уменьшается в $e = 2{,}71828\ldots$ раз, получаем

$$\tau = \frac{B}{|h - h_c|}, \tag{10.72}$$

где $B = 2\delta\beta > 0$ — постоянный коэффициент. Полученная формула с точностью до постоянного коэффициента совпадает с (10.66).

Таким образом, из рис. 10.21 можно видеть, что в обоих режимах в не очень малой окрестности перехода зависимость времени установления от амплитуды переменного поля хорошо (с точностью порядка 2 %) описывается законом обратной пропорциональности (10.72). Такое совпадение подтверждает правомерность использования соотношения (10.67), а также разложения (10.68).

В окрестности порядка 1 Э, что составляет около 3 % от поля перехода, точность формулы (10.72) падает до 50% и более, особенно выше перехода. Заметим, что теория переходов второго рода Ландау [404]

обладает вблизи перехода таким же свойством потери точности, что там традиционно объясняется отсутствием учета флуктуаций.

На этом краткий экскурс в область кинетики переходов между различными режимами прецессии положения равновесия авторы позволяют себе закончить, оставляя практически нетронутое поле деятельности для будущих исследований.

10.6. Условия наблюдения прецессии положения равновесия в эксперименте

В предыдущих разделах рассмотрены многочисленные теоретические аспекты прецессии положения равновесия, однако условия наблюдения такой прецессии в эксперименте не оговариваются. Рассмотрим теперь условия, необходимые для такого наблюдения. В первую очередь остановимся на случаях полностью симметричных полей и анизотропии, как менее критичных к условиям возбуждения, а также оценим возможности наблюдения различных режимов прецессии по отдельности. Приведем также некоторые качественные соображения, касающиеся нарушению симметричности. В качестве дополнения остановимся кратко на технике создания требуемых полей

10.6.1. Частотно-полевые и энергетические параметры

В разделе 9.2.5 (рис. 9.10) показано, что при полностью симметричных условиях по постоянному и переменному полям режим прецессии положения равновесия без охвата центра (№ 2) является по переменному полю беспороговым, то есть возбуждается при любых сколь угодно малых его значениях. При этом период прецессии равновесия при переменном поле 1,5 ... 6,0 Э, постоянном поле 10 ... 280 Э и $\alpha = 0{,}3$ (ТбФГ) составляет 1,5 ... 6,0 мкс (рис. 9.6, рис. 9.7).

Далее, из рис. 9.10 можно видеть, что прецессия положения равновесия при $\alpha = 0{,}3$ (ТбФГ) возбуждается при поле $h_c = 10$ Э на частотах выше критической $f_c = 116$ МГц. При $\alpha = 0{,}03$ (ЖИГ) при поле $h_c = 10$ Э критическая частота составляет $f_c = 203$ МГц. При поле $h_c = 20$ Э те же частоты равны соответственно 170 МГц и 310 МГц. Там же дана приближенная эмпирическая формула (9.20)

$$f_c = \beta\sqrt{h_c}\,, \tag{10.73}$$

в которой при $\alpha = 0{,}3$ (ТбФГ): $\beta = 37{,}4$ МГц Э$^{-1/2}$, при $\alpha = 0{,}03$ (ЖИГ): $\beta = 66{,}8$ МГц Э$^{-1/2}$. Из этой формулы можно при заданном значении частоты f_c найти критическое значение переменного поля, выше которого прецессия положения равновесия переходит в развернутую круговую прецессию

$$h_c = (f_c/\beta)^2. \tag{10.74}$$

При этом для $f_c = 1000$ МГц получаем: при $\alpha = 0{,}3$ $h_c = 715$ Э; при $\alpha = 0{,}03$ $h_c = 224$ Э. Аналогично при $f_c = 10\,000$ МГц получаем: при $\alpha = 0{,}3$ $h_c = 71\,500$ Э; при $\alpha = 0{,}03$ $h_c = 22\,400$ Э.

Сказанное относится к переходу от режима затухающей прецессии с охватом центра (№ 4) к развернутой круговой прецессии (№ 5). Из раздела 9.7.8 (рис. 9.29) можно видеть, что переходы между режимами без охвата центра (№ 2), с охватом центра без затухания (№ 3) и с охватом центра с затуханием (№ 4) происходят при переменных полях, в 2 ... 3 раза меньших приведенных выше критических значений полей перехода к режиму развернутой прецессии (№ 5), то есть требуют меньшего уровня возбуждения, но не более, чем в 2 ... 3 раза. В реальных экспериментах с ферритами на СВЧ, при подводимой мощности не более единиц ватт, переменное поле в прямоугольном полуволновом резонаторе с добротностью порядка 100–200 на частоте 10 000 МГц не превышает 1 ... 2 Э, а на частоте 1000 МГц в подобном резонаторе поле, как правило, еще на порядок меньше. В резонаторе с концентрацией поля (например, коаксиальном со спиральным центральным проводником) эти величины могут быть увеличены на порядок, однако в любом случае они остаются значительно меньше критических значений, требуемых для срыва прецессии положения равновесия.

Итак, можно считать, что как частотно–полевые, так и энергетические условия, необходимые для наблюдения прецессии положения равновесия в режиме без охвата центра, в реальных экспериментах до частот 10 000 МГц и более достижимы чрезвычайно легко с использованием стандартной радиотехнической аппаратуры. Однако для уверенного наблюдения остальных режимов, в первую очередь для наблюдения перехода затухающей прецессии положения равновесия с охватом центра (№ 4) в развернутую круговую прецессию (№ 5), частоты переменного поля не должны превышать 100 ... 200 МГц, при которых поля порядка 5 ... 10 Э достижимы сравнительно простыми радиотехническими средствами.

10.6.2. Геометрические параметры

Все теоретические результаты, описанные в главе 9, а также во всех предыдущих разделах настоящей главы, касаются случая нормально намагниченной пластины, безграничной в ее плоскости. Однако в реальном эксперименте пластина всегда имеет какие-то края, создающие размагничивающие поля, поэтому весьма сильная критичность условий возбуждения и свойств прецессии положения равновесия к несимметричности как постоянного, так и переменного поля требует учета этого фактора. Простейшим вариантом нейтрализации размагничивания краев пластины является выбор ее формы в виде круглого диска, размагничивающие факторы которого относительно его плоскости полностью симметричны.

10.6.3. Доменная структура

Поскольку необходимым условием возбуждения прецессии положения равновесия является величина постоянного поля меньшая, чем $4\pi M_0$, при которой появляется составляющая намагниченности в плоскости пластины, то при этом за счет размагничивающего действия торцов возможно образование доменов. Поэтому диаметр диска должен находиться в таком соотношении с толщиной пластины, чтобы образование доменов было энергетически невыгодным, например, если размер доменов значительно превышает толщину пластины, то можно выбрать диаметр диска близким к ширине одного домена.

В типичных пленках редкоземельных ферритов-гранатов со сквозной доменной структурой, имеющих толщину 5 ... 20 мкм, размер доменов составляет от 5 до 50 мкм [40]. Таким образом, диаметр диска также должен составлять не более 50 ... 100 мкм.

Более удобную возможность дают пленки ЖИГ, где из-за малости полей анизотропии по сравнению с намагниченностью, характер доменной структуры отличен от упомянутого. Так, в работе [333] показано, что по характеру доменной структуры пленки ЖИГ, ориентированные в плоскости (111), могут быть двух типов: при толщине пленок 5 ... 20 мкм ширина доменов в пленках первого типа составляет 2 ... 5 мкм, а в пленках второго типа — 10 ... 20 мкм. Различие между этими типами пленок определяется величиной нормальной одноосной анизотропии, критическая величина которой составляет 90 ... 120 Э. В размагниченном состоянии в пленках первого типа векторы намагниченности в доменах ориентированы под углом 70° ... 90° к плоскости пленки. В пленках второго типа векторы намагниченности ориентированы вблизи плоскости пленки под углом около 20°. Поскольку полная величина намагниченности насыщения ЖИГ равна $M_0 = 140$ Гс, то в пленках первого типа нормальная составляющая вектора намагниченности составляет 131,5 Гс, а в пленках второго типа — 47,9 Гс. Если считать, что для уничтожения доменов поле, перпендикулярное плоскости пленки, должно превышать $4\pi M_\perp$, где $M_\perp$ — нормальная компонента намагниченности в размагниченном состоянии, то в пленках первого типа эта величина составляет 1653,2 Э, а в пленках второго типа — 601,7 Э.

Таким образом, для возможности наблюдения прецессии положения равновесия в пленках первого типа остается интервал полей от 1650 до 1750 Э, а в пленках второго типа — от 600 до 1750 Э. В этом интервале полей пленка пребывает в состоянии насыщения, причем вектор намагниченности отклонен от нормали к плоскости пленки, а его ориентация в плоскости пленки безразлична (с точностью до малости кубической анизотропии). В целом, такая пленка ЖИГ должна иметь форму круглого диска, диаметр которого может быть произвольным и определяется техническими возможностями создания достаточно однородных постоянного и переменного полей по всей площади пленки.

Еще одну дополнительную возможность для наблюдения прецессии положения равновесия открывают пленки железоиттриевого граната субмикронной толщины. В работах [405–407] показано, что в полностью размагниченном состоянии в пленках ЖИГ обычно наблюдается блочная доменная структура, особенно ярко проявляющаяся в пленках субмикронной толщины. В толстых пленках блоки заполнены мелкими полосовыми доменами, а при уменьшении толщины пленок поперечные размеры блоков возрастают, причем находящиеся внутри них полосовые домены имеют тенденцию к исчезновению. Так, в описанной в работе [405] пленке ЖИГ толщиной 0,27 мкм размер блоков достигал 10 мм, причем домены внутри таких блоков отсутствовали. Таким образом, для возможности наблюдения прецессии положения равновесия в подобных условиях следует выбирать пленки ЖИГ толщиной менее 1 мкм, а диаметр диска, вырезанного из такой пленки, должен умещаться в размерах одного блока, то есть может составлять величину порядка 10 мм.

10.6.4. О возможности наблюдения прецессии положения равновесия в несимметричных условиях

Предыдущее рассмотрение относится к наблюдению прецессии положения равновесия в полностью симметричных условиях. Как показано в разделах 9.6–9.9, при любом нарушении симметричности интервал допустимых значений полей, углов и величин констант анизотропии заметно сужается. Так из рис. 10.10 можно видеть, что при одноосной анизотропии с константой порядка 10^2–10^3 эрг см$^{-3}$, типичной для большинства смешанных ферритов–гранатов, угол отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пленки не должен превышать примерно 0,1 градуса. Столь высокую точность в эксперименте контролировать хотя и вполне возможно, но все-таки простыми средствами становится довольно трудно. Заметим, что этот угол отсчитывается от нормали к плоскости пленки, то есть в его формировании участвуют два вида анизотропии. Первый — магнитная анизотропия, определяемая кристаллической структурой пленки. Поле такой анизотропии обратно пропорционально величине намагниченности. Второй — анизотропия формы пленки, поле которой прямо пропорционально величине намагниченности. Между двумя такими вкладами общую анизотропию имеет место определенная конкуренция, то есть имеется какой-то минимум, задающий оптимальное соотношение между величинами константы анизотропии и намагниченности. То есть для наблюдения прецессии намагниченности следует выбирать феррит, в котором это соотношение близко к оптимальному.

Далее следует отметить, что в ряде смешанных ферритов-гранатов ось легкого намагничивания отклоняется от нормали на угол, значительно (до нескольких раз) превышающий угол отклонения соответствующей кристаллографической оси подложки. Подробно такое отклонение разобрано в разделе 5.2. Такое обстоятельство накладывает

повышенные требования на ориентацию кристаллографических осей подложки, выполняемую обычно рентгеновскими методами (по дифракции).

Важнейшим обстоятельством, играющим в пользу наблюдения прецессии положения равновесия, является возможность компенсации отклонения оси анизотропии соответствующим внесением несимметричности в постоянное поле (раздел 10.1.8, рис. 10.8). То есть постоянное поле может служить важным инструментом, обеспечивающим удобство реализации прецессии положения равновесия. Подобной же компенсации за счет постоянного поля можно добиться в случае несимметричности продольного переменного поля (раздел 9.9.4, рис. 9.40). Можно полагать, что несимметричное продольное переменное поле также может помочь компенсировать несимметричность, вызванную наклоном оси анизотропии, однако, по видимому, этот вопрос требует более подробного исследования.

Таким образом, резюмируя сказанное, можно заключить, что для успешного наблюдения прецессии положения равновесия в эксперименте следует выбирать пленки с как можно меньшим отклонением оси анизотропии от нормали, а также весьма желательно предусмотреть включение постоянного или продольного переменного поля.

10.6.5. Техника создания полей

Рассмотрим теперь возможную конфигурацию устройства для создания магнитных полей и регистрации прецессии положения равновесия. Необходимыми условием для возбуждения прецессии является наличие постоянного поля величиной до 2000 Э, перпендикулярного плоскости пленки, а также переменного поля круговой поляризации в плоскости пленки.

Техника создания постоянного поля такой величины на площади до нескольких десятков квадратных сантиметров с неоднородностью менее 0,1 % хорошо известна и широко применяется, например, в устройствах для наблюдения ФМР и особенно — ЭПР [408, 409]. Наиболее простым способом здесь является увеличение площади полюсов магнита и уменьшение зазора между ними. Так в спектрометре ЭПА-2М, использовавшимся в экспериментах, описанных выше в разделе 7.6, достаточно однородное поле напряженностью до 5000 Э достигалось с помощью электромагнита, имевшего круглые полюса диаметром около 12 см с зазором между ними порядка 1 см. Более подробно техника создания таких полей здесь не рассматривается в силу своей тривиальности. Переменное поле частотой в десятки и сотни (тем более тысячи) мегагерц, напряженностью в несколько эрстед, более или менее однородное на заметной площади (хотя бы в несколько квадратных сантиметров) создать значительно труднее, поэтому остановимся на этом вопросе чуть подробнее.

Некоторые возможные варианты создания переменного поля круговой поляризации и регистрации сигнала от прецессии положения равновесия иллюстрируются рис. 10.22.

Рис. 10.22. Схемы создания переменного поля (*а, в*) и регистрации сигнала от прецессии положения равновесия (*б*). *1* — ферритовая пленка, *2–5* — различные катушки, *6* — волновод

На рис. 10.22, *а* показана схема создания переменного поля, пригодная для частот до 100 МГц. Поле создается парой скрещенных катушек *2* и *3*, питаемых переменным током со сдвигом фаз на 90° относительно друг друга. На частотах порядка и выше 100 МГц катушки будут иметь всего по 1 ... 2 витка, то есть их удобнее будет заменить парой скрещенных короткозамкнутых двухпроводных или полосковых линий, подобных описанным в работах [410, 411]. Считывание сигнала от прецессии положения равновесия по двум координатам можно осуществить с помощью налагаемых на пленку скрещенных витков *4* и *5*, показанных на рис. 10.22, *б*. При этом для устранения прямой наводки от возбуждающего сигнала, в приемной цепи должен использоваться достаточно узкополосный фильтр: или полознозапирающий на частоту возбуждения, или полоснопропускающий на частоту прецессии положения равновесия.

На частотах выше 1000 МГц для возбуждения переменного поля можно использовать прямоугольный волновод, вид на который со стороны широкой стенки показан на рис. 10.22, *в*. При прохождении через такой волновод бегущей волны типа H_{10} (TE_{10}) вблизи его узкой стенки формируется область с вращающимся магнитным полем, где и должна быть помещена ферритовая пленка *1*. Считывание сигнала от прецессии положения равновесия может осуществляться той же системой петель, что показана на рис. 10.22, *б*.

Для достаточной однородности переменного поля диаметр ферритовой пленки должен быть значительно меньше ширины волновода. Полагая, что различие должно быть не менее, чем на порядок, получаем, что для частот порядка 10 000 МГц, где типичная ширина волновода составляет около 2 см, диаметр пленки не должен превышать 2 мм, что для реального эксперимента достаточно удобно.

10.7. Возможные технические применения

Рассмотрим теперь некоторые возможности технического применения прецессии положения равновесия. Сгруппируем их по главным признакам в порядке возрастания сложности.

10.7.1. Ферромагнитный резонанс

Прежде всего отметим, что во всех описанных режимах прецессии всегда есть колебания с частотой возбуждающего переменного поля, то есть возможен традиционный ферромагнитный резонанс (ФМР). В соответствии с этим область применений таких колебаний совпадает с областью применения обычного ФМР, например, в невзаимных ферритовых устройствах (вентилях, циркуляторах) или в устройствах обработки аналоговой информации в диапазоне СВЧ (фильтрах, фазовращателях, линиях задержки и других). Преимуществом по сравнению с традиционными устройствами может явиться расширение частотного диапазона в сторону низких частот, обусловленное стремлением к нулю частоты ФМР при ориентационном переходе (мягкая мода). Другим преимуществом может явиться расширение динамического диапазона вплоть до работы на высоких уровнях мощности (киловатты) за счет исключения возбуждения обменных спиновых волн благодаря выбранной геометрии.

10.7.2. Преобразование частоты

Важную особенность рассматриваемых явлений составляет возбуждение прецессии положения равновесия в режимах № 2, № 3 и № 4. При этом частота прецессии положения равновесия значительно ниже частоты возбуждающего переменного поля и весьма сильно зависит от его амплитуды. Например, из рис. 9.22 (раздел 9.5.4) можно видеть, что при частоте переменного поля 200 МГц частота прецессии положения равновесия может составлять от 1,7 МГц до 25 МГц и меняется между этими величинами при изменении амплитуды переменного поля от 10 до 35 Э. Максимальный градиент наблюдаемой зависимости составляет 0,32 МГц $Э^{-1}$ (кривая *3* в области 10 Э). Такая сильная зависимость на столь низких (по сравнению с СВЧ) частотах может служить основой для создания преобразователя частоты диапазона СВЧ в низкую частоту порядка единиц МГц, что полезно для обработки аналоговой информации. Можно также говорить о возможности создания высокоточного датчика амплитуды поля СВЧ на основе

измерения низкой частоты (так как точность измерения на низких частотах, как правило, выше точности измерений в диапазоне СВЧ).

10.7.3. Компенсация несимметричности

Далее следует отметить, что явление компенсации аномального характера несимметричности прецессии поперечным постоянным полем, будучи весьма критичным к величине как постоянного, так и переменного полей, может послужить основой для создания высокоточных датчиков, измерителей и прецизионных систем стабилизации постоянного и переменного поля, а также частоты СВЧ. Действительно, как следует из примера, приведенного в разделе 9.9.4 на рис. 9.40, поперечное постоянное поле равное 0,055 Э полностью компенсирует сгущение, вызванное продольным переменным полем величиной 1,5 Э. Таким образом, включая и выключая постоянное поле в пределах 0,055 Э, можно создавать или уничтожать сгущения, то есть менять период прецессии положения равновесия в два раза, от 0,5 до 1,0 мкс. Отметим, что величина требуемого для переключения постоянного поля (0,055 Э) более чем на порядок меньше ширины линии ФМР в ЖИГ (0,5 ... 1,0 Э), в результате чего чувствительность такого датчика может более чем на порядок превышать чувствительность приборов, в основе которых лежит явление ФМР.

10.7.4. Скачкообразный срыв

Еще одной характерной особенностью наблюдаемых явлений можно считать весьма резкий динамический ориентационный переход между режимами № 4 и № 5. Так из рис. 9.21 можно видеть, что при частоте 200 МГц и параметре затухания α, равном 0,4 или 0,8 (кривые *1* и *2*), изменение амплитуды переменного поля h_0 не более чем на 0,1 Э при значении порядка 25 ... 40 Э приводит к изменению максимальной поперечной компоненты намагниченности m_2 с 0,45 до 0,75. Таким образом, изменение амплитуды переменного поля менее чем на 0,2 ... 0,4 % приводит к изменению амплитуды колебаний намагниченности в 1,67 раза. С повышением частоты переменного поля резкость перехода увеличивается. Так при частоте 400 МГц и параметре затухания $\alpha = 0{,}6$ режим № 4 при $h_0 = 83{,}2$ Э и амплитуде колебаний намагниченности $m = 0{,}50$ переходит в режим № 5 при увеличении h_0 не более чем на 0,1 Э, что сопровождается увеличением амплитуды скачком до значения $m_2 = 0{,}92$. При $\alpha = 1{,}0$ увеличение h_0 с 128,4 Э на 0,1 Э приводит к скачку m_2 со значения 0,69 до 0,92. То есть изменение амплитуды переменного поля менее чем на 0,1 % приводит к скачку намагниченности в 1,84 раза. В относительных числах можно говорить, что градиент изменения намагниченности в области перехода составляет порядка 2000 ед. $Э^{-1}$. Заметим, что числа, приведенные здесь, ограничены использованным в настоящей работе шагом по амплитуде переменного поля равным 0,1 Э, задаваемым реальным масштабом времени машинного счета. Можно полагать, что в пределе

величина упомянутого градиента стремится к бесконечности, то есть скачкообразный переход происходит путем срыва, по-видимому, имеющего гистерезисный характер. Наблюдаемая столь резкая зависимость амплитуды прецессии от амплитуды переменного поля может явиться основой для создания высокоточных датчиков, измерителей и прецизионных систем стабилизации амплитуды переменного поля или частоты СВЧ. Введение такой ячейки в цепь обратной связи может позволить создать бистабильные и автоколебательные устройства, полезные в цепях обработки информации и различных устройствах автоматики.

10.7.5. Одноосная анизотропия

Отмеченные выше возможности применения относятся к случаю полностью изотропной среды. Однако введение анизотропии позволяет усмотреть еще ряд дополнительных тонкостей.

Так, примечателен тот факт, что при увеличении константы одноосной анизотропии интервал допустимых значений полярного угла оси анизотропии сильно сужается (раздел 10.1.9). Так, если при значении константы $K = 4$ эрг см$^{-3}$, которое соответствует полю анизотропии $H_a = 0{,}36$ Э, прецессия положения равновесия существует в пределах отклонения оси анизотропии от нормали к пластине до 10°, то при $K = 100$ эрг см$^{-3}$, что соответствует $H_a = 9{,}0$ Э, допустимое значение угла θ_a составляет 0,40°, а при $K = 1000$ эрг см$^{-3}$, то есть $H_a = 90{,}0$ Э значение θ_c уменьшается до величины 0,037°. Столь малое значение угла θ_c означает весьма высокую критичность возбуждения прецессии положения равновесия к условиям эксперимента. Можно полагать, что столь высокая критичность может оказаться полезной как для исследования параметров материала, так и для создания прецизионного датчика малых вариаций угла ориентации магнитной пластины.

Проведенное исследование возможности компенсации обусловленного наклоном оси анизотропии сгущения колец прецессионного портрета поперечным постоянным полем (раздел 10.1.8) показало, что требуемые для компенсации поля также являются весьма малыми. Так при $K = 4$ эрг см$^{-3}$ поле компенсации составляет около 0,057 Э, при $K = 30$ эрг см$^{-3}$ уменьшается до 0,040 Э, а при $K = 1000$ эрг см$^{-3}$ падает до 0,015 Э. Как видим, условия компенсации выполняются уже при весьма малых значениях постоянного поля. Это обстоятельство также может оказаться полезным для создания прецизионного датчика величины или направления постоянного магнитного поля.

10.7.6. Кубическая анизотропия

Важной особенностью описанных явлений можно считать крайне высокую критичность к параметрам кубической анизотропии материала магнитной пластины и величинам внешних полей (раздел 10.2.7). Критичность к величине поля анизотропии проявляется в том, что размыкание полного большого кольца (срыв прецессии) в случае намагниченности 280 Гс (ТбФГ) и поле $H_0 = 265$ Э, при ориентации (001)

происходит при поле анизотропии около 9,9 Э, при ориентации (011) при поле всего 0,025 Э, а при ориентации (111) — при поле 0,58 Э. Критичность к величине постоянного поля в плоскости также весьма велика: для срыва прецессии при тех же условиях достаточно поля $8{,}7 \cdot 10^{-4}$ Э, что составляет $3{,}3 \cdot 10^{-6}$ от поля, перпендикулярного плоскости пластины. Критичность к условию синхронизма, если смотреть по его порогу, где длительность второго импульса скачком увеличивается в несколько раз, равна $5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Э, что составляет $1{,}9 \cdot 10^{-6}$ от поля, перпендикулярного плоскости пластины.

Можно полагать, что столь высокая критичность может оказаться полезной как для исследования параметров материала, так и для создания прецизионного датчика полей или малых вариаций угла ориентации магнитной пластины.

10.8. Вопросы для дальнейших исследований

В завершение настоящей главы перечислим некоторые вопросы, которые могли бы составить предмет для дальнейшего исследования.

1. Первейшим и главным вопросом является постановка экспериментов для прямого обнаружения прецессии положения равновесия. Здесь даны определенные рекомендации (раздел 10.6), однако несомненно, что при решении реальных экспериментальных задач они окажутся недостаточными. То есть необходимо не только использование данных рекомендаций, но и участие живой мысли и решения ряда задач изобретательского характера.

2. Важным вопросом, в том числе связанным с первым, является поиск условий, при которых прецессия положения равновесия перестает быть столь критичной к параметрам возбуждения и симметричности системы. Здесь можно варьировать намагниченность, а также поле и характер анизотропии с целью нахождения оптимума между ними. Другим возможным путем является поиск оптимальных вариантов компенсации несимметричности за счет надлежащим образом выбранных и ориентированных постоянного и переменного полей.

3. В проведенном рассмотрении мультирежимного характера прецессии положения равновесия (раздел 9.3) рассмотрен только один путь смены режимов — увеличение амплитуды возбуждающего сигнала. В то же время, на примере механической модели (раздел 9.4.4) показано, что подобная смена режимов возможна по мере увеличения частоты. Высказано предположение, что при этом порядок смены режимов меняется на обратный. То есть желательно рассмотреть мультирежимный характер прецессии положении равновесия в зависимости от изменения частоты возбуждения.

4. Выполненное здесь исследование свойств несимметричности системы относится только к одному режиму — прецессии положения равновесия без охвата центра (режим №2 согласно классификации, введенной в разделе 9.3.1). Однако можно ожидать, что для других

режимов проявления несимметричности системы, в том числе условия ее компенсации, будут отличными. Этот вопрос также на данный момент оставлен без должного внимания и требует более подробного рассмотрения.

5. В большей части приведенных здесь примеров частоты возбуждения сравнительно невелики и составляют не более 100–200 МГц. Такой диапазон частот в настоящей работе (и приведенных в ней ссылках) был выбран в первую очередь с целью упрощения счета и уменьшения машинного времени. В то же время, для практики интересен более высокочастотный диапазон, то есть тысячи и десятки тысяч МГц. Предварительная проверка показала, что там свойства прецессии положения равновесия примерно подобны описанным здесь, но в то же время и несколько отличаются, в первую очередь из-за ограничений, обусловленных процессами релаксации. Кроме того проявляются некоторые не отмеченные здесь свойства нелинейности. То есть исследования желательно продолжить на более высокочастотные диапазоны.

6. В проделанном исследовании частота возбуждения принимается такой, как отмечено в предыдущем пункте, то есть порядка 100 ... 200 МГц. При этом возможность ферромагнитного резонанса никак не учитывается. Однако известно, что в условиях ориентационного перехода частота ферромагнитного резонанса может значительно понижаться, вплоть до реализации «мягкой моды» (раздел 6.3.5, рис. 6.6). Можно ожидать, что при близости или совпадении частоты возбуждения с частотой свободного ферромагнитного резонанса в заданном постоянном поле характер прецессии положения будет как-то изменяться. Это вопрос также требует более подробного исследования.

7. В большинстве рассмотренных здесь примеров параметр затухания прецессии (Гильберта) выбран довольно большим, порядка 0,3, что сделано, исходя из удобства развития прецессии за достаточно малый промежуток времени, сокращающий требуемое время машинного счета. В то же время, как отмечено в разделе 9.5.2, характер прецессии положения равновесия в зависимости от величины параметра затухания может меняться заметным образом. Однако проведенное в этом разделе исследование является довольно поверхностным и требует более подробного рассмотрения, особенно с учетом того, что в пленках наиболее распространенного материала, такого как железоиттриевый гранат, параметр затухания имеет значительно меньшую величину и составляет порядка 0,03 и менее.

8. Все приведенные здесь результаты касаются сравнительно малых углов отклонения равновесного положения намагниченности от нормали к плоскости пленки, которые не превышают 20°. В то же время, предварительная проверка показывает, что при больших углах отклонения характер прецессии положения равновесия заметно изменяется, так что наблюдаются новые режимы, здесь не рассмотренные. Более того, в некоторых случаях при приближении угла отклонения к 90°, особенно при достаточно высоких уровнях возбуждения, возникают

режимы автомодуляционного и стохастического характера. Авторы настоящей монографии не берутся утверждать это с полной определенностью, однако полагают исследования в условиях столь сильной нелинейности достаточно интересными.

9. Проведенное здесь рассмотрение, в основном, относится к описанию полностью установившихся во времени режимов прецессии положения равновесия. Однако в разделе 10.5 показано, что переход во времени между некоторыми режимами может иметь довольно неожиданный характер. Отмечена аналогия кинетики такого перехода с кинетическими явлениями, имеющими место при достаточно общем фазовом переходе второго рода. По мнению авторов настоящей монографии, такая аналогия может быть достаточно плодотворной, то есть более подробное исследование кинетики переходов между режимами прецессии положения равновесия может пролить дополнительный свет на общую физику фазовых переходов.

10. Проведенное здесь рассмотрение выполнено в предположении чисто магнитного характера явлений. Однако хорошо известно, что практически все магнитные материалы (кроме, разве что, специально приготовленного пермаллоя) обладают заметными магнитоупругими свойствами. Характер прецессии положения равновесия в магнитоупругой среде частично исследован в работах [319, 330, 332]. Однако проведенное там исследование является недостаточно полным. Так, не рассмотрены различные виды ориентации осей одноосной и кубической анизотропии, оставлены без должного внимания вопросы компенсации нарушения симметрии системы, не затронуты вопросы, отмеченные выше в применении к магнитоупругой среде. Можно полагать, что более подробное исследование прецессии положения равновесия в среде, обладающей магнитоупругостью, дало бы ряд интересных физических и практических результатов.

11. В качестве параллели прецессии положения равновесия для намагниченности, по-видимому, было бы интересно более подробно развить механическую аналогию, частично затронутую в разделе 9.4. Так, проведенное там рассмотрение выполнено на чисто качественном уровне без построения какой-либо математической модели. Можно полагать, что построение подобной модели, в том числе с учетом различных вариантов компенсации, кроме численных удобств, позволило бы для прецессии положения равновесия намагниченности более глубоко понять и подробнее промоделировать наиболее характерные ее свойства.

Перечисленными вопросами, разумеется, возможности исследования прецессии положения равновесия далеко не исчерпываются. Некоторые дополнительные моменты, требующие более подробного рассмотрения, отмечены в тексте. Кроме того, следует заметить, что все приведенные здесь положения относятся к исследованию более или менее установившихся режимов или переходов между режимами квазистатического характера (то есть достаточно медленных). Можно

полагать, что исследование прецессии положения равновесия в переходных во времени условиях, в том числе при импульсном возбуждении или импульсном же воздействии на установившиеся колебания, открыло бы новое огромное поле для деятельности как фундаментального, так и прикладного характера. Так что авторы настоящей монографии желают любознательным исследователям на этом пути всяческих успехов.

Выводы по главе 10

Данная глава посвящена дальнейшему рассмотрению прецессии положения равновесия намагниченности. Основное внимание уделено случаю анизотропной среды. Приведены рекомендации для постановки экспериментов, а также обсуждены некоторые прикладные возможности. В заключение отмечены некоторые вопросы для дальнейших исследований.

Основные результаты настоящей главы сводятся к следующему.

1. Рассмотрена прецессия положения равновесия в нормально намагниченной магнитной пластине, обладающей одноосной анизотропией, ось легкого намагничивания которой отклонена от нормали к плоскости пластины. Получена матрица преобразования плотности энергии от системы координат, связанной с осью анизотропии, к системе, связанной с плоскостью магнитной пластины и направлением постоянного поля. Найденное выражение для плотности энергии использовано для решения уравнения движения вектора намагниченности в поле ориентационного перехода. Получены развертка вынужденных колебаний во времени и их прецессионный портрет, образованный большим кольцом прецессии положения равновесия, сопровождаемым по огибающей малыми кольцами прецессии вектора намагниченности вокруг этого равновесного положения.

2. Показано, что отклонение оси анизотропии от нормали к плоскости магнитной пластины приводит к сгущению малых колец прецессионного портрета, опережающему положение проекции оси анизотропии на плоскость пластины на 90°. Отмечено, что сгущение колец в одном месте портрета сопровождается их разрежением в диаметрально противоположном месте.

3. Наблюдаемое явление объяснено на основе энергетической модели потенциала, ростом которого по мере продвижения прецессирующего положения равновесия обусловлено уменьшение скорости прецессии, приводящее к сгущению колец, а спадом того же потенциала — ее увеличение, приводящее к их разрежению.

4. Показана возможность компенсации сгущения и разрежения колец приложением небольшого постоянного поля в плоскости пластины вдоль проекции оси анизотропии на эту плоскость. Компенсация объяснена выравниванием уровня потенциала за счет поперечного постоянного поля, приводящего к выравниванию скорости прецессии положения

равновесия по всему большому кругу прецессионного портрета с соответствующим рассасыванием сгущений и нормализацией разрежений.

5. Выявлено наличие критического значения угла отклонения оси анизотропии от нормали к плоскости пластины, выше которого происходит срыв прецессии положения равновесия, проявляющийся в размыкании большого кольца прецессионного портрета. Получена связь между значением упомянутого критического угла и величиной константы анизотропии, имеющая показательный или экспоненциальный характер.

6. Рассмотрена прецессия положения равновесия в нормально намагниченной магнитной пластине с кубической анизотропией при ориентациях плоскости пластины относительно кубической ячейки в плоскостях (001), (011) и (111). Получены матрицы перехода от систем координат, связанных с осями кубической ячейки, к системе координат, связанной с магнитной пластиной. Найдены плотности энергии и эффективные поля анизотропии для всех перечисленных ориентаций.

7. На основе численного решения уравнения движения вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода получен прецессионный портрет вынужденных колебаний, образованный большим кольцом, сопровождаемым по огибающей малыми кольцами. Показано, что наличие кубической магнитной анизотропии приводит к образованию на прецессионном портрете сгущений и разрежений малых колец, расположение которых связано с пространственной ориентацией осей легкого намагничивания типа [111]. При ориентации [001] на прецессионном портрете возникает четыре сгущения и столько же разрежений, при ориентации [011] — два сгущения и два разрежения, при ориентации [111] количество сгущений и разрежений равно трем. Такое расположение малых колец интерпретировано на основе энергетической модели потенциала, которая позволяет показать, что сгущение малых колец соответствует движению положения равновесия вектора намагниченности в направлении увеличения потенциала, а разрежение — движению в направлении его уменьшения.

8. Выявлена высокая критичность ориентации кубических осей и величины константы анизотропии к факту существования прецессии второго порядка, а также наличию на прецессионном портрете сгущений и разрежений малых колец. Показано, что кубическая анизотропия нарушает осевую симметрию системы, в результате чего при достаточной величине ее константы происходит срыв круговой прецессии положения равновесия, проявляющийся на прецессионном портрете в виде разрыва большого кольца. Выявлено сильное (до 40 раз) различие между достаточными для срыва значениями константы анизотропии при различной ориентации кубической ячейки, объясненное на основе ориентационной зависимости потенциала. Показано, что требуемое для срыва значение константы анизотропии тем меньше, чем сильнее кубическая анизотропия нарушает осевую симметрию системы.

9. Рассмотрено влияние постоянного поля в плоскости пластины на характер прецессии. Показано, что такое поле уже при весьма малой его величине приводит к срыву прецессии положения равновесия. Так для срыва достаточно поля в плоскости, меньшего на шесть–семь порядков, чем постоянное поле, перпендикулярное плоскости пластины. Столь высокая критичность наиболее сильно проявляется при ориентации [011], несколько меньше — при ориентации [111] и еще меньше при ориентации [001], но и в этом случае составляет пять–шесть порядков.

10. Рассмотрено влияние несимметричности переменного поля в плоскости пластины на характер прецессии. Показано, что для ориентации [011], когда прецессионный портрет имеет два диаметрально противоположно расположенных сгущения малых колец, нарушение симметрии возбуждающего прецессию переменного поля таким образом, что одна из его компонент составляет 0,8 от другой, позволяет в значительной степени компенсировать внесенную анизотропией несимметричность системы, приводя к почти полному рассасыванию сгущений малых колец на прецессионном портрете. При ориентациях [001] и [111] такой компенсации достичь не удается.

11. Рассмотрено влияние дополнительного переменного поля в плоскости пластины, частота которого близка к частоте прецессии положения равновесия по большому кругу прецессионного портрета. Обнаружено явление пространственного синхронизма, состоящее в том, что при определенных условиях положение равновесия прецессирует полностью синхронно с вращением вектора дополнительного переменного поля. При этом длительность пребывания вектора намагниченности в пределах одного сгущения прецессионного портрета соответствует продолжительности одного полупериода переменного поля.

12. Исследован частотный характер явления синхронизма. Показано, что частотный интервал синхронизма простирается вниз до одного порядка и вверх в два–три раза по отношению к частоте прецессии в отсутствие дополнительного поля. При увеличении амплитуды дополнительного поля частотные границы области синхронизма расширяются. Выявлен пороговый характер явления синхронизма, показано, что величина порога весьма мала и почти на шесть порядков меньше поля, перпендикулярного плоскости пластины. При увеличении амплитуды переменного поля до величины порядка $4 \cdot 10^{-4}$ от значения поля, перпендикулярного плоскости пластины, синхронизм становится полным и прецессия положения равновесия приобретает чисто вынужденный характер.

13. Рассмотрена кинетика перехода между различными режимами прецессии положения равновесия. Основное внимание уделено переходу между режимами № 3 — незатухающей прецессией без охвата центра и № 4 — тоже прецессией с охватом центра, но во времени затухающей. Исследовано время установления динамического стационарного состояния прецессии по обе стороны от точки перехода. Показано, что время установления значительно (во много раз) превышает время релаксации свободной прецессии намагниченности и сильно

зависит от амплитуды переменного поля таким образом, что вблизи от поля перехода испытывает расходимость, стремясь к бесконечности. Установлена аналогия наблюдаемой особенности перехода с кинетикой фазового перехода второго рода, описываемой уравнением Ландау–Халатникова.

14. Построена аналитическая модель, предполагающая, что скорость установления намагниченности тем больше, чем сильнее потенциал системы зависит от величины намагниченности. На основе такой модели показано, что вблизи перехода зависимость времени установления от амплитуды переменного поля описывается законом обратной пропорциональности. Из сравнения аналитической зависимости с данными численного расчета выявлена высокая точность предложенной модели, составляющая величину порядка 2 %.

15. Рассмотрены условия, необходимые для наблюдения прецессии положения равновесия в эксперименте. Отмечено, что с практической стороны наиболее удобен полностью симметричный случай, как менее критичный к условиям возбуждения. Оценены геометрические, частотно-полевые и энергетические параметры возбуждения. Даны практические рекомендации для выбора этих параметров в соответствии с параметрами материала и техническими возможностями аппаратуры.

16. Показано, что как частотно-полевые, так и энергетические условия, необходимые для наблюдения прецессии положения равновесия в режиме без охвата центра, в экспериментах до частот 10 000 МГц и более, вполне достижимы с использованием стандартной радиотехнической аппаратуры. Однако для уверенного наблюдения других режимов, в первую очередь для наблюдения перехода затухающей прецессии положения равновесия с охватом центра (№ 4) в развернутую круговую прецессию (№ 5), частоты переменного поля не должны превышать 100 ... 200 МГц, так как при более высоких частотах достижение переменных полей напряженностью порядка 5 ... 10 Э и выше требует применения достаточно сложных технических средств.

17. Обсуждено влияние доменной структуры. Отмечено, что для устранения помех от образования доменов в случае пленок смешанных ферритов-гранатов размер образца следует выбирать меньше ширины одного домена, что составляет порядка долей миллиметра. В пленках железоиттриевого граната отмечено наличие бездоменного диапазона полей, что позволяет устанавливать размер пленки произвольным в рамках возможности создания однородных переменных полей соответствующей площади. Отмечено, что в пленках субмикронной толщины размер бездоменных участков может достигать площади до квадратного сантиметра и более.

18. Рассмотрена техника создания полей, требуемых для экспериментального возбуждения прецессии положения равновесия намагниченности. Для формирования переменного поля, однородного на достаточно большой площади, приведены рекомендации по использованию плоских катушек, надетых на образец, волноводов и полосковых линий.

19. Обсуждены возможности технического применения наблюдаемых явлений для конструирования устройств СВЧ диапазона, а также высокоточных датчиков постоянного и переменного полей. Указана возможность использования прецессии положения равновесия для создания преобразователей частоты СВЧ диапазона в сравнительно низкие частоты вплоть до единиц мегагерц и ниже. Отмечено, что весьма высокая чувствительность прецессии положения равновесия к отклонению оси анизотропии от нормали к плоскости пластины может быть полезной для исследования параметров материала и создания прецизионных датчиков угла и постоянного магнитного поля. Компенсация аномального характера прецессии, вызванного наклоном оси анизотропии, за счет приложения поперечного постоянного поля может служить основой для создания высокоточных датчиков, измерителей и прецизионных систем стабилизации постоянного и переменного полей, а также частоты СВЧ. Резкая скачкообразная зависимость амплитуды прецессии от амплитуды переменного поля при переходе от режима №4 к режиму №5 может явиться основой для создания высокоточных датчиков, измерителей и прецизионных систем стабилизации амплитуды переменного поля или частоты СВЧ. Введение такой ячейки в цепь обратной связи может позволить создать бистабильные и автоколебательные устройства, полезные в цепях обработки информации и различных устройствах автоматики. Крайне высокая критичность явления к параметрам кубической анизотропии может оказаться полезной как для исследования параметров материала, так и для создания прецизионного датчика полей или малых вариаций угла ориентации магнитной пластины.

20. Кратко перечислены некоторые вопросы, представляющие, по мнению авторов настоящей монографии, определенный интерес для дальнейшего исследования. Отмечено, что главным здесь является постановка реальных экспериментов с целью обнаружения и подробного исследования свойств прецессии положения равновесия. При этом важнейшим вопросом является выявление условий снижения критичности прецессии к различным нарушениям симметричности системы, а также поиск оптимальных вариантов компенсации таких нарушений. Отмечена важность проведения исследований прецессии в широком диапазоне частот, в том числе выявление мультирежимного характера, влияния роли резонансных и диссипативных свойств среды. Высказано пожелание о проведении исследований в полном интервале отклонения положения равновесия намагниченности от нормали к плоскости пластины — от нуля до 90°. Отмечена перспективность исследования кинетики переходов между различными режимами прецессии положения равновесия, в том числе на основе аналогии с кинетикой фазовых переходов второго рода. Предложено более подробное рассмотрение прецессии положения равновесия на основе механической модели, а также исследование свойств прецессии в среде, обладающей магнитоупругими свойствами.

Литература

1. *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Магнитостатические волны в неоднородных полях. — М.: Физматлит, 2016.
2. *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. — М.: Физматлит, 2017.
3. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Щеглов В.И.* Нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода. — Сыктывкар: ИПО СыктГУ, 2013.
4. *Вонсовский С.В.*, *Шур Я.С.* Ферромагнетизм. — М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
5. *Landau L.D.*, *Lifshitz E.M.* On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // Phys. Zs. der Sowjetunion. 1935. — V. 8, № 2. — P. 153. Перевод: *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Собрание трудов. — Т. 1. — М.: Наука. 1969. — С. 128–143.
6. *Гуревич А.Г.* Ферриты на сверхвысоких частотах. — М.: Гос. Изд. физ.-мат. лит., 1960.
7. *Гуревич А.Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. — М.: Наука, 1973.
8. *Гуревич А.Г.*, *Мелков Г.А.* Магнитные колебания и волны. — М.: Физматлит, 1994.
9. *Gilbert T.L.* A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials // IEEE Trans. on Magn. — 2004. — V. 40, № 6. — P. 3443.
10. *Моносов Я.А.* Нелинейный ферромагнитный резонанс. — М.: Наука, 1971.
11. *Захаров В.Е.*, *Львов В.С.*, *Старобинец С.С.* Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. — 1974. — Т. 114, № 4. — С. 609.
12. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. — М.: Наука, 1987.
13. *Козлов В.И.* Исследование неоднородности и анизотропии магнитных пленок с помощью гиромагнитных эффектов. — Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. — Москва, 1997.
14. *Sparks M.*, *Tittmann B.R.*, *Mee J.F.*, *Newkirk C.* Ferromagnetic resonance in epitaxial garnet thin films // JAP. — 1969. — V. 40, № 3. — P. 1518.
15. *Laulicht I.*, *Suss J.T.*, *Barak J.* The temperature dependence of the ferromagnetic and paramagnetic resonance spectra in thin yttrium-iron garnet films // JAP. — 1991. — V. 70, № 4. — P. 2251.
16. *Chen H.*, *De Gasperis P.*, *Marcelli R.*, *Pardavi-Horvath M.*, *McMichael R.*, *Wigen P.E.* Wide-band linewidth measurements in yttrium iron garnet films // JAP. — 1990. — V. 67. № 9. — P. 5530.
17. *Помялов А.В.*, *Зильберман П.Е.* Магнитные резонансы в малых тонкопленочных образцах железоиттриевого граната // РЭ. — 1986. — Т. 31, № 1. — С. 94.

18. *Archer J.L.. Bongianni W.L., Collins J.H.* Magnetically tunable microwave bandstop filters using epitaxial YIG film resonators // JAP. — 1970. — V. 41, № 3. — P. 1360.
19. *Hansen P., Krumme J.P.* Determination of the local variation of the magnetic properties of liquid-phase epitaxial iron garnet films // JAP. — 1973. — V. 44, № 6. — P. 2847.
20. *Телеснин Р.В., Козлов В.И., Дудоров В.Н.* Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках $Y_3Fe_{5-x}Ga_xO_{12}$ // ФТТ. — 1974. — Т. 16, № 11. — С. 3532.
21. *Algra H.A., Robertson J.M.* A FMR study on horizontally dipped LPE grown (La,Ga):YIG films // JAP. — 1979. — V. 50, № 3. — P. 2173.
22. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И.* Исследование эпитаксиальных пленок смешанных ферритов-гранатов методом ферромагнитного резонанса // ФТТ. — 1975. — Т. 17, № 10. — С. 3045.
23. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // РЭ. — 1976. — Т. 21, № 9. — С. 1894.
24. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Осика В.А., Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // ФТТ. — 1976. — Т. 18, № 12. — С. 3694.
25. *Щеглов В.И.* Исследование динамических явлений и фазовых переходов в магнитных диэлектриках с пространственно-временными неоднородностями. — Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Москва, 1980.
26. *Hsia L.C., Wigen P.E., De Gasperis P., Borghese C.* Enhancement of uniaxial anisotropy constant by introducing oxygen vacancies in Ca-doped YIG // JAP. — 1981. — V. 52. № 3. — P. 2261.
27. *Tsutaoka T., Ueshima M., Tokunaga T., Nakamura T., Hatakeyama K.* Frequency dispersion and temperature variation of complex permeability of Ni-Zn ferrite composite materials // JAP. — 1995. — V. 78, № 6. — P. 3983.
28. *Глущенко А.Г., Курушин Е.П., Кошкин Л.И.* Микроустройства СВЧ на тонких монокристаллических пленках Mg-Mn феррита // Изв. ВУЗов, Радиоэлектроника. — 1975. — Т. 18, № 11. — С. 93.
29. *Глущенко А.Г., Курушин Е.П., Кошкин Л.И.* Использование тонких монокристаллических пленках Mg-Mn феррита в микрополосковых линиях передачи СВЧ // РЭ. — 1974. — Т. 19, № 11. — С. 2397.
30. *Аваева И.Г., Лисовский Ф.В., Щеглов В.И.* О наклоне оси магнитной анизотропии в эпитаксиальных пленках смешанных ферритов-гранатов // ФТТ. — 1975. — Т. 17, № 5. — С. 2102.
31. *Smit J., Beljers H.G.* Ferromagnetic resonance absorption in $BaFe_{12}O_{19}$ a highly anisotropic crystal // Philips Res. Rep. — 1955. — V. 10, № 2. — P. 113.
32. *Туров Е.А.* Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов. — М.: Изд. АН СССР, 1963.
33. *Гуляев Ю.В., Дикштейн И.Е., Шавров В.Г.* Поверхностные магнитоакустические волны в магнитных кристаллах в области ориентационных фазовых переходов // УФН. — 1997. — Т. 167, № 7. — С. 735.
34. *Гуляев Ю.В., Тарасенко С. В., Шавров В.Г.* С спин-волновая акустика антиферромагнитных структур как магнитоакустических метаматериалов // УФН. — 2011. — Т. 181, № 6. — С. 595.

35. *Bobeck A.H.* Properties and device applications of magnetic domains in orthoferrites // Bell Syst. Tech. J. — 1967. — V. 46, № 8. — P. 1901.
36. *Kooy C.*, *Enz U.* Experimental and theoretical study of the domain configuration in thin layers of Ba $Fe_{12}O_{19}$ // Phil. Res. Rep. — 1960. — V. 15, № 1. — P. 7.
37. *Thiele A.A.* Device implications of the theory of cylindrical magnetic domains // Bell Syst. Tech. J. — 1969. — V. 50, № 3. — P. 725.
38. *Лисовский Ф.В.* Физика цилиндрических магнитных доменов. — М.: Сов.Радио, 1979.
39. *Хуберт А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах. — М.: Мир, 1977.
40. *Малоземов А.*, *Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. — М.: Мир, 1982.
41. *О'Делл Т.* Ферромагнитодинамика. Динамика ЦМД, доменов и доменных стенок. — М.: Мир, 1983.
42. *Аваева И.Г.*, *Копылов Ю.Л.*, *Кравченко В.Б.*, *Лисовский Ф.В.*, *Соболев А.Т.*, *Щеглов В.И.* Эпитаксиальные пленки смешанных ферритов-гранатов для ЦМД применений // Микроэлектроника. — 1975. — Т. 4, № 4. — С. 325.
43. *Аваева И.Г.*, *Кравченко В.Б.*, *Лисовский Ф.В.*, *Щеглов В.И.* Невзаимные эффекты при движении доменных границ в неоднородном магнитном поле // ФТТ. — 1976. — Т. 18, № 6. — С. 1780.
44. *Крафтмахер Г.А.*, *Мериакри В.В.*, *Червоненкис А.Я.*, *Щеглов В.И.* Естественный связанный с доменными стенками резонанс в ортоферритах на субмиллиметровых волнах // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 63, № 10. — С. 1353.
45. *Шамсутдинов М.А.*, *Фарзтдинов М.М.*, *Екомасов Е.Г.* Динамический скос магнитных подрешеток в магнитном поле и спиновые волны в редкоземельных ортоферритах с доменной структурой // ФТТ. — 1990. — Т. 32, № 4. — С. 1133.
46. *Dötsh H.*, *Smith H.J.*, *Müller J.* Detection and generation of magnetic bubble domains using ferromagnetic resonance // Appl. Phys. Lett. — 1973. — V. 23, № 11. — P. 639.
47. *Туров Е.А.*, *Шавров В.Г.* Об энергетической щели для спиновых волн в ферро- и анти ферромагнетиках, связанной с магнитоупругой энергией // ФТТ. — 1965. — Т. 7, № 1. — С. 217.
48. *Боровик-Романов А.С.*, *Рудашевский Е.Г.* О влиянии спонтанной стрикции на антиферромагнитный резонанс в гематите // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47, № 6(12). — С. 2095.
49. *Щеглов В.И.* Зависимость скорости звука от магнитного поля в ферро- и антиферромагнетиках // ФТТ. — 1972. — Т. 14, № 7. — С. 2180.
50. *Щеглов В.И.* Способ плавной обратимой перестройки частоты упругого резонанса колебаний твердого тела // Авторское свидетельство СССР № 386262, М.кл.(3) G 01 h 13/00. МКИ: C01h13/00; УДК 534.63. Приоритет от 09.12.1970. Заявка № 1603337.18-10. Публикация: Оф. бюлл. «Открытия, изобретения». 1973, № 26. — С. 141.
51. *Seavey M.H.* Acoustic resonance in the easy-plane weak ferromagnets α-Fe_2O_3 and $FeBO_3$ // Sol. St. Comm. — 1972. — V. 10, № 2. — P. 219.

52. *Максименков П.П.*, *Ожогин В.И.* Исследование магнитоупругого взаимодействия в гематите с помощью антиферромагнитного резонанса // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65, № 2(8). — С. 657.
53. *Дикштейн И.Е.*, *Тарасенко В.В.*, *Шавров В.Г.* Влияние давления на магнитоакустический резонанс в одноосных антиферромагнетиках // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 67, № 2. — С. 816.
54. *Дикштейн И.Е.*, *Тарасенко В.В.*, *Шавров В.Г.* Магнитоупругие волны в ортоферритах // ФТТ. — 1977. — Т. 19, № 4. — С. 1107.
55. *Герус С. В.*, *Тарасенко В.В.* Волны Рэлея в магнитных кристаллах с анизотропией типа «легкая плоскость» и их усиление // ФТТ. — 1975. — Т. 17, № 8. — С. 2247.
56. *Дикштейн И.Е.*, *Тарасенко В.В.* Параметрическое возбуждение звука в ферро-, ферри- и антиферромагнетиках в окрестности точек фазовых переходов // ФТТ. — 1978. — Т. 20, № 10. — С. 2942.
57. *Суху Р.* Магнитные тонкие пленки. — М.: Мир, 1967.
58. *Антонов Л.И.*, *Миронова Г.А.*, *Лукашева Е.В.*, *Малова Т.И.* Изучение явления ферромагнитного резонанса (ФМР) и определение характера магнитной анизотропии ферромагнитного монокристалла. Препринт МГУ № 5/1999. — М.: Москва, 1999.
59. *Goryunov Yu.V.*, *Khaliullin G.G.*, *Garifullin I.A.*, *Tagirov L.R.*, *Schreiber F.*, *Bödeker P.*, *Bröhl K.*, *Morawe Ch.*, *Mühge Th.*, *Zabel H.* FMR studies of magnetic properties Co and Fe thin films on Al_2O_3, and MgO substrates // JAP. — 1994. — V. 76, № 10. — P. 6096.
60. *Dupuis V.*, *Perez J.P.*, *Tuaillon J.*, *Paillard V.*, *Melinon P.*, *Perez A.*, *Barbara B.*, *Thomas L.*, *Fayeulle S.*, *Gay M.* Magnetic properties of nanostructured thin films of transition metal obtained by low energy cluster beam deposition // JAP. — 1994. — V. 76, № 10. — P. 6676.
61. *Мирошников Ю.Ф.*, *Храмов Б.В.* Перпендикулярная анизотропия в двухосных пленках // Изв. ВУЗов. Физика. — 1974. — № 11(150). — С. 119.
62. *Гаврилин В.П.*, *Березин Д.Г.*, *Мирошников Ю.Ф.* Ферромагнитный резонанс и магнитная кристаллографическая анизотропия монокристаллических пленок литиевого феррита // Изв. ВУЗов. Физика. — 1973. — № 9(136). — С. 86.
63. *Meckenstock R.*, *von Geisau O.*, *Peizl J.*, *Wolf J.A.* Conventional and photothermally modulated ferromagnetic resonance investigations of anisotropy fields in an epitaxial Fe (001) film // JAP. — 1995. — V. 77, № 12. — P. 6439.
64. *Komenou K.*, *Zebrowski J.*, *Wilts C.H.* Ferromagnetic resonance study of the anisotropy field and nonmagnetic regions in implanted layers of bubble garnet films // JAP. — 1979. — V. 50, № 8. — P. 5442.
65. *Wilts C.H.*, *Zebrowski J.*, *Komenou K.* Ferromagnetic resonance study of the anisotropy profile in implanted bubble garnets // JAP. — 1979. — V. 50, № 9. — P. 5878.
66. *Вороненко А.В.*, *Герус С.В.*, *Красножен Л.А.* Метод измерения параметров гиромагнитных пленок // Микроэлектроника. — 1989. — Т. 18, № 1. — С. 61.
67. *Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс в упруго деформированных пленках железо-иттриевого граната // Микроэлектроника. — 1987. — Т. 16, № 4. — С. 374.

68. *Щеглов В.И.* Ферромагнитный резонанс в упруго деформированных пленках железоиттриевого граната // Сборник тезисов «II Всесоюзного семинара по функциональной магнитоэлектронике». — Красноярск, 1986. — С. 42.
69. *Щеглов В.И.* Распространение магнитостатических волн в упруго деформированной среде // Сборник тезисов «II Всесоюзного семинара по функциональной магнитоэлектронике». — Красноярск, 1986. — С. 44.
70. *McMichael R.D.* Method for determining both magnetostriction and elastic modulus by ferromagnetic resonance // JAP. — 1994. — V. 75, № 10. — P. 5650.
71. *Oliver S.A.*, *Harris V.G.*, *Vittoria C.* Magnetostriction measurements on thin films by a slot-line ferromagnetic resonance technique // JAP. — 1990. — V. 67, № 9. — P. 5019.
72. *Дикштейн И.Е.*, *Мальцев О.А.* Ферромагнитный резонанс и магнитостатические волны в неоднородно деформированных пленках ферритов-гранатов // РЭ. — 1992. — Т. 37, № 11. — С. 2003.
73. *Smith A.B.*, *Jones R.V.* Magnetostriction constants from ferromagnetic resonance // JAP. — 1963. — V. 34, № 5. — P. 1283.
74. *Morgenthaler F.R.* Two-dimensional magnetostatic resonances in a thin film disk containing a magnetic bubble // JAP. — 1979. — V. 50, № 3. — P. 2209.
75. *Sürig C.*, *Hempel K.A.* Interaction effects in particulate recording media studied by ferromagnetic resonance // JAP. — 1996. — V. 80, № 6. — P. 3426.
76. *Orth Th.*, *Pelzl J.*, *Chantrell R.W.*, *Veitch R.*, *Jakusch H.* Ferromagnetic resonance and transverse susceptibility measurements on particulate recording media // JAP. — 1993. — V. 73, № 10. — P. 6738.
77. *Yu Y.*, *Harrell J.W.*, *Doyle W.D.* Ferromagnetic resonance spectra of oriented barium ferrite tapes // JAP. — 1994. — V. 75, № 10. — P. 5550.
78. *Виноградов А.П.* Электродинамика композитных материалов. — М.: УРСС, 2001.
79. *Казанцева Н.Е.*, *Рывкина Н.Г.*, *Чмутин И.А.* Перспективные материалы для поглотителей электромагнитных волн сверхвысокочастотного диапазона // РЭ. — 2003. — Т. 48, № 2. — С. 196.
80. *Pendry J.B.*, *Holden A.J.*, *Stewart W.J.*, *Youngs I.* Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76, № 25. — P. 4773.
81. *Smith D.R.*, *Padilla W.J.*, *Vier D.C.*, *Nemat-Nasser S.C.*, *Schultz S.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. — 2000. — V. 84, № 18. — P. 4184.
82. *Вендик И.Б.*, *Вендик О.Г.* Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // ЖТФ. — 2013. — Т. 83, № 1. — С. 3.
83. *Strelniker Y.M.*, *Bergman D.J.* Theory of magnetotransport in a composite medium with periodic microstructure for arbitrary magnetic fields // Phys. Rev. B. — 1994. — V. 50, № 19. — P. 14001.
84. *Шевченко В.В.* Киральные электромагнитные объекты и среды // Соросовский образовательный журнал. — 1998. — № 2. — С. 109.
85. *Каценеленбаум Б.З.*, *Коршунова Е.Н.*, *Сивов А.Н.*, *Шатров А.Д.* Киральные электродинамические объекты // УФН. — 1997. — Т. 167, № 11. — С. 1201.

86. *Третьяков С.А.* Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы (обзор) // РЭ. — 1994. — Т. 39, № 10. — С. 1457.
87. *Шустер А.* Введение в теоретическую оптику. — М.-Л.: ОНТИ, 1935.
88. *Веселаго В.Г.* Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ // УФН. — 1967. — Т. 92, № 3. — С. 517.
89. *Lindell I.V.*, *Tretyakov S.A.*, *Nikoskinen K.I.*, *Ilvonen S.* BW media — media with negative parameters, capable of supporting backward waves // Microwave and Optical Technology Letters. — 2001. — V. 31, № 2. — P. 129.
90. *Шевченко В.В.* Прямые и обратные волны: три определения, их взаимосвязь и условия применимости // УФН. — 2004. — Т. 177, № 1. — С. 301.
91. *Блиох К.Ю.*, *Блиох Ю.П.* Что такое левые среды и чем они нитересны? // УФН. — 2004. — Т. 174, № 4. — С. 439.
92. *Бырдин В.М.* Обратные волны: столетие первой работы, истоки и развитие обратноволновой механики и электродинамики // РЭ. — 2005. — Т. 50, № 12. — С. 1413.
93. *Pendry J.B.* Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. — 2000. — V. 85, № 18. — P. 3966.
94. *Агранович В.М.*, *Гартштейн Ю.Н.* Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН. — 2006. — Т. 176, № 10. — С. 1052.
95. *Виноградов А.П.*, *Дорофеенко А.В.*, *Зухди С.* К вопросу об эффективных параметрах метаматериалов // УФН. — 2008. — Т. 178, № 5. — С. 511.
96. *Емкин Н.А.*, *Мерзликин А.М.*, *Виноградов А.П.* Отклонение законов преломления от френелевских в композитных материалах // РЭ. — 2010. — Т. 55, № 5. — С. 601.
97. *Веселаго В.Г.* Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // УФН. — 2011. — Т. 181, № 11. — С. 1201.
98. *Damon R.W.*, *Eshbach J.R.* Magnetostatic modes of a ferromagnet slab // J. Phys. Chem. Solids. — 1961. — V. 19, № 3/4. — P. 308.
99. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Условия существования обратных поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит–диэлектрик–металл // ПЖТФ. — 1998. — Т. 24, № 13. — С. 1.
100. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Распространение обратных поверхностных магнитостатических волн в структуре феррит–диэлектрик–металл, намагниченной линейно неоднородным магнитным полем // ЖТФ. — 1999. — Т. 69, № 2. — С. 70.
101. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Обратные поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит–диэлектрик–металл, намагниченной неоднородным полем типа «долины» // РЭ. — 2000. — Т. 45, № 1. — С. 116.
102. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Дисперсия магнитостатических волн в касательно намагниченной ферритовой пластине с осью анизотропии, перпендикулярной ее плоскости // РЭ. — 2000. — Т. 45, № 4. — С. 471.
103. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Обратные поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит–диэлектрик–металл, намагниченной неоднородным полем типа «вала» // РЭ. — 2001. — Т. 46, № 12. — С. 1471.
104. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Электромагнитные волны в бигиротропной пластине, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном полю подмагничивания // РЭ. — 2002. — Т. 47, № 9. — С. 1101.

105. *Зубков В.И.*, *Епанечников В.А.*, *Щеглов В.И.* Дисперсионные характеристики поверхностных магнитостатических волн в двухслойной ферромагнитной пленке // РЭ. — 2007. — Т. 52, № 2. — С. 192.
106. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Поверхностные магнитостатические волны в структуре феррит–диэлектрик–решетка из металлических полосок // РЭ. — 2006. — Т. 51, № 3. — С. 328.
107. *Лакс Б.*, *Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. — М.: Мир, 1965.
108. *Микаэлян А.Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. — М.: Госэнергоиздат, 1963.
109. *Adam J.D.* Analog signal processing with microwave magnetics // Proc. IEEE. — 1988. — V. 76, № 2. — P. 159.
110. *Адам Дж.Д.* Аналоговая обработка сигналов с помощью СВЧ-ферритов. (Перевод [109]) // ТИИЭР. — 1988. — Т. 76, № 2. — С. 73.
111. *Ishak W.S.* Magnetostatic wave technology: a review // Proc. IEEE. — 1988. — V. 76, № 2. — P. 171.
112. *Исхак В.С.* Применение магнитостатических волн: обзор. (Перевод [111]) // ТИИЭР. — 1988. — Т. 76, № 2. — С. 86.
113. *Schloemann E.F.* Circulators for microwave millimeter wave integrated circuits // Proc. IEEE. — 1988. — V. 76, № 2. — P. 188.
114. *Шлеман Э.Ф.* Циркуляторы для интегральных СВЧ-схем . (Перевод [113]) // ТИИЭР. — 1988. — Т. 76, № 2. — С. 105.
115. *Adam J.D.*, *Davis L.E.*, *Dionne G.F.*, *Schloemann E.F.*, *Stitzer S.N.* Ferrite devices and materials // IEEE Trans. on MTT. — 2002. — V. 50, № 3. — P. 721.
116. *Дикштейн И.Е.*, *Щеглов В.И.* Восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных сферических ферритовых частиц // В кн.: XVII международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ-2000)». — Москва: УРСС. МГУ, 2000. — С. 21.
117. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Восприимчивость композиционной среды из анизотропных ферритовых сфер в условиях ориентационного перехода // В кн.: VIII международный семинар «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2007. — С. 63.
118. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сб. статей под ред. А.Г. Гуревича. — М.: ИЛ, 1961.
119. *Temiryasev A.G.*, *Tikhomirova M.P.*, *Zilberman P.E.* «Exchange» spin waves in nonuniform yttrium iron garnet films // JAP. — 1994. — V. 76, № 9. — P. 5586.
120. *Gulyaev Yu.V.*, *Temiryazev A.G.*, *Tikhomirova M.P.*, *Zilberman P.E.* Magnetoelastic interaction in yttrium iron garnet films with magnetic inhomogeneities through the film thickness // JAP. — 1994. — V. 75, № 10. — P. 5619.
121. *Зильберман П.Е.*, *Темирязев А.Г.*, *Тихомирова М.П.* Возбуждение и распространение обменных спиновых волн в пленках железо-иттриевого граната // ЖЭТФ. — 1995. — Т. 108, № 1. — С. 281.
122. *Гуляев Ю.В.*, *Зильберман П.Е.*, *Темирязев А.Г.*, *Тихомирова М.П.* Основная мода нелинейного спин-волнового резонанса в нормально намагниченных ферритовых пленках // ФТТ. — 2000. — Т. 42, № 6. — С. 1062.

123. *Alvarez L.F.*, *Pla O.*, *Chubykalo O.* Quasiperiodicity, bistability, and chaos in the Landau-Lifshitz equation // Phys. Rev. B. — 2000. — V. 61, № 17. — P. 11613(5).
124. *Шутый А.М.*, *Семенцов Д.И.* Нелинейные эффекты прецессионного движения намагниченности в области ферромагнитного резонанса // ФТТ. — 2000. — Т. 42, № 7. — С. 1268.
125. *Шутый А.М.*, *Семенцов Д.И.* Динамика намагниченности в условиях нелинейного ферромагнитного резонанса в пленке типа (111) // ФТТ. — 2001. — Т. 43, № 8. — С. 1439.
126. *Шутый А.М.*, *Семенцов Д.И.* Динамика нелинейного прецессионного движения намагниченности в феррит-гранатовой пленке типа (100) // ФТТ. — 2002. — Т. 44, № 4. — С. 734.
127. *Семенцов Д.И.*, *Шутый А.М.* Нелинейная регулярная и стохастическая динамика намагниченности в тонкопленочных структурах // УФН. — 2007. — Т. 177, № 8. — С. 831.
128. *Семенцов Д.И.*, *Шутый А.М.* Высокоамплитудная прецессия и динамическая невосприимчивость магнитных моментов двухслойной пленки // ФТТ. — 2003. — Т. 45, № 5. — С. 877.
129. *Gerrits Th.*, *Schneider M.L.*, *Kos A.B.*, *Silva T.J.* Large-angle magnetization dynamics measured by time-resolved ferromagnetic resonance // Phys. Rev. B. — 2006. — V. 73, № 9. — P. 094454(7).
130. *Карпачев С.Н.*, *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.* Нелинейная релаксационная динамика магнитной и упругой подсистем тонкой ферритовой пленки вблизи акустического резонанса // Вестник МГУ. Сер. 3. — 2006. — № 6. — С. 60.
131. *Власов В.С.* Исследование релаксационной и нелинейной динамики магнитных и магнитоупругих колебаний пленок и частиц. — Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Москва: МГУ, 2007.
132. *Кадомцева А.М.* Ориентационные фазовые переходы // Энциклопедия науки и техники (электронный ресурс). www.femto.com.ua/articles/part-2/2661.html
133. *Белов К.П.*, *Звездин А.К.*, *Кадомцева А.М.*, *Левитин Р.З.* Переходы спиновой переориентации в редкоземельных магнетиках // УФН. — 1976. — Т. 110, № 3. — С. 447.
134. *Белов К.П.*, *Звездин А.К.*, *Кадомцева А.М.*, *Левитин Р.З.* Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. — М.: Наука, 1979.
135. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. (Теоретическая физика. — Т. 5). — М.: Наука, 1976.
136. *Ландау Л.Д.* К теории фазовых переходов. I // Собрание трудов. — Т. 1. — М.: Наука, 1969. — С. 234.
137. *Ландау Л.Д.* К теории фазовых переходов. II // Собрание трудов. — Т. 1. — М.: Наука, 1969. — С. 253.
138. *Уайт Р.*, *Джебелл Т.* Дальний порядок в твердых телах. — М.: Мир, 1982.
139. *Паташинский А.З.*, *Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. — М.: Наука, 1982.
140. *Дикштейн И.Е.*, *Лисовский Ф.В.*, *Мансветова Е.Г.*, *Тарасенко*, *Шаповалов В.И.*, *Щеглов В.И.* Доменная структура одноосных ферримагнетиков с точкой компенсации в сильных магнитных полях // ЖЭТФ. — 1980. — Т. 79, № 2(8). — С. 509.

141. *Фарзтдинов М.М.* Структура антиферромагнетиков // УФН. — 1964. — Т. 84, № 4. — С. 611.
142. *Пастушенков Ю.Г.*, *Супонев Н.П.*, *Скоков К.П.*, *Ляхова М.Б.*, *Семенова Л.В.* Магнитокристаллическая анизотропия, доменная структура и ориентационные фазовые переходы в интерметаллидах $Nd_2Fe_{14}B$ и $R(Fe,Co)_{11}Ti$(R = Tb, Dy, Er, Ho) // Вестник ТвГУ, Серия «Физика». — 2004. — № 4(6). — С. 25.
143. *Помялов А.В.*, *Андреев А.С.* Волны связанных колебаний в периодической системе тонкопленочных ферритовых резонаторов // РЭ. — 1986. — Т. 31, № 9. — С. 1739.
144. *Шутый А.М.*, *Семенцов Д.И.* Динамическое перемагничивание и бистабильные состояния в антиферромагнитных многослойных структурах // ФТТ. — 2004. — Т. 46, № 2. — С. 271.
145. *Шутый А.М.* Управление ориентационными переходами в скрещенных дипольных решетках // ЖТФ. — 2015. — Т. 85, № 7. — С. 1.
146. *Звездин А.К.*, *Котов В.А.* Магнитооптика тонких пленок. — М.: Наука, 1988.
147. *Hubert A.*, *Schäfer R.* Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures. — Berlin Heidelberg: Springer, 1998.
148. *Дерюгин А.А.*, *Цыркин В.В.*, *Красовский В.Е.* Применение интегральных микросхем памяти: Справочник. — М.: Радио и связь, 1994.
149. *Раев В.К.* Разработка основ теории и принципов проектирования накопителей информации на цилиндрических магнитных доменах. — Диссертация на соискание ученой степени доктора техн. наук. — Москва, 1989.
150. *Раев В.К.*, *Ходенков Г.Е.* Цилиндрические магнитные домены в элементах вычислительной техники. — М.: Энергоиздат, 1981.
151. *Розенблат М.А.* Внешние запоминающие устройства ЭВМ // Зарубежная электронная техника. — М.: ЦНИИ «Электроника», 1988. — № 8. — С. 50.
152. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965.
153. *Thiele A.A.* Theory of the static stability of cylindrical domains in uniaxial platelets // J. Appl. Phys. — 1970. — V. 41, № 3. — P. 1139.
154. *Thiele A.A.* The theory of cylindrical magnetic domains // Bell Syst. Tech. J. — 1969. — V. 48, № 10. — P. 3287.
155. *Боярченков М.А.*, *Прохоров Н.Л.*, *Раев В.К.*, *Розенталь Ю.Д.* Магнитные доменные логические и запоминающие устройства. — М.: Энергия, 1974.
156. *Смоленский Г.А.*, *Боярченков М.А.*, *Лисовский Ф.В.*, *Раев В.К.* Цилиндрические магнитные домены в магнитоодноосных материалах: физические принципы и основы технических применений // Микроэлектроника. — 1972. — Т. 1, № 1. — С. 26; № 2. — С. 99.
157. *Барьяхтар В.Г.*, *Горобец Ю.И.*, *Филиппов Б.Н.* Теория ЦМД. 1. Статические и динамические свойства изолированного ЦМД // ФММ. — 1977. — Т. 43, № 2. — С. 231.
158. *Барьяхтар В.Г.*, *Ганн В.В.*, *Горобец Ю.И.*, *Смоленский Г.А.*, *Филиппов Б.Н.* Цилиндрические магнитные домены // УФН. — 1977. — Т. 121, № 4. — С. 593.
159. *Розенблат М.А.* Магнитные элементы автоматики и вычислительной техники. — М.: Наука, 1974.

160. *Dorleijn J.W.F.*, *Druyvesteyn W.F.*, *Bartles G.*, *Tolksdorf W.* Magnetic bubbles and stripe domains subjected to in-plane fields. I. Uniaxial anisotropy // Phil. Res. Rep. — 1973. — V. 28, № 2. — P. 133.
161. *Dorleijn J.W.F.*, *Druyvesteyn W.F.*, *Bartles G.*, *Tolksdorf W.* Magnetic bubbles and stripe domains subjected to in-plane fields. II. Contribution of the cubic anisotropy // Phil. Res. Rep. — 1973. — V. 28, № 2. — P. 152.
162. *Bobeck A.H.*, *Bonyhard P.I.*, *Geusic I.E.* Magnetic bubbles — an emerging new memory technology // Proc. IEEE. — 1975. — V. 63, № 8. — P. 1176.
163. *Cohen M.S.*, *Chang H.* The frontiers of magnetic bubble technology // Proc. IEEE. — 1975. — V. 63, № 8. — P. 1196.
164. *Телеснин Р.В.*, *Дудоров В.Н.* Периодичность гексагональной решетки ЦМД в пленках ферритов-гранатов // ФТТ. — 1975. — Т. 17, № 6. — С. 1627.
165. *Балбашов А.М.Червоненкис А.Я.*, *Черкасов А.Н.*, *Бахтеузов В.Е.* Новый тип доменной структуры в эпитаксиальных пленках Y-Bi-Ga граната // ФТТ. — 1974. — Т. 16, № 10. — С. 3102.
166. *Druyvesteyn W.F.*, *DeJonge F.A.* A special kind of magnetic domain: hollow bubble with at its center a bubble // Phys. Lett. — 1971. — V. 36A, № 1. — P. 1.
167. *De Bonte W.J.* The static stability of half-bubbles // Bell Syst. Tech. J. — 1972. — V. 51, № 9. — P. 1933.
168. *Васьковский В.О.*, *Кандаурова Г.С.*, *Балбашов А.М.*, *Червоненкис А.Я.* Наклонные ЦМД в кристаллах Y Fe O_3 // ФТТ. — 1977. — Т. 19, № 1. — С. 20.
169. *Четкин М.В.*, *Шалыгина А.Н.*, *Драчев В.А.* ЦМД в пластинках ортоферритов перпендикулярных оптической оси // Микроэлектроника. — 1974. — Т. 3, № 1. — С. 71.
170. *Лисовский Ф.В.*, *Мансветова Е.Г.* Внутриобъемные ЦМД в эпитаксиальных пленках магнитных гранатов // ПЖТФ. — 1978. — Т. 4, № 21. — С. 1268.
171. *Червоненкис А.Я.*, *Рыбак В.И.* Бистабильные цилиндрические домены в Bi-содержащих гранатовых пленках // ПЖТФ. — 1978. — Т. 4, № 1. — С. 24.
172. *Tabor W.J.*, *Bobeck A.H.*, *Vella-Coleiro G.P.*, *Rosencwaig A.* A new type of cylindrical magnetic domains (bubble isomers) // Bell Syst. Tech. J. — 1972. — V. 51, № 6. — P. 1427.
173. *Malozemoff A.P.* Interacting Bloch lines: a new mechanism for wall energy in bubble domain materials // Appl. Phys. Lett. — 1972. — V. 21, № 4. — P. 149.
174. *Дудоров В.Н.*, *Рандошкин В.В.*, *Телеснин Р.В.* Синтез и физические свойства монокристаллических пленок редкоземельных ферритов-гранатов // УФН. — 1977. — Т. 122, № 2. — С. 253.
175. *Kobayashi T.*, *Nishida H.*, *Sugita J.* Statics of extraordinary bubbles // J. Phys. Soc. Jap. — 1973. — V. 34, № 2. — P. 555.
176. *Thiele A.A.* Application of the gyrocoupling vector and dissipation dyadic in the dynamics of magnetic domains // J. Appl. phys. — 1974. — V. 45, № 1. — P. 377.
177. *Rosencwaig A.*, *Tabor W.J.*, *Nelson T.J.* New domain-wall configuration for magnetic bubbles // Phys. Rev. Lett. — 1972. — V. 29, № 14. — P. 946.

178. *Slonczewski J.C.* Theory of Bloch-line and Bloch-wall motion // J. Appl. phys. — 1974. — V. 45, № 6. — P. 2705.
179. *Tabor W.J.*, *Bobeck A.H.*, *Vella-Coleiro G.P.*, *Rosencwaig A.* A new type of cylindrical magnetic domain (hard bubbles) // AIP Conf. Proc. — 1973. — V. 10. — P. 442.
180. *Ильичева Е.Н.*, *Шишков А.Г.*, *Ильяшенко Е.И.*, *Федюнин Ю.Н.* Изучение структуры междоменной границы с помощью эффекта Фарадея // ФТТ. — 1978. — Т. 20, № 8. — С. 2322.
181. *Grundy P.J.*, *Hothersall D.C.*, *Jones G.A.*, *Middleton B.K.* The formation and structure of cylindrical magnetic domains in thin cobalt crystals // Phys. Stat. Sol. (a). — 1973. — V. 9, № 1. — P. 79.
182. *Grundy P.J.*, *Jones G.A.* Lorentz microscopy of bubble domain structure in cobalt at fields approaching saturation // AIP Conf. Proc. — 1973. — V. 10. — P. 364.
183. *Grundy P.J.*, *Herd S.R.* Lorentz microscopy of bubble domain and charges in domain wall state in hexaferrite // Phys. Stat. Sol. (a). — 1973. — V. 20, № 1. — P. 295.
184. *Suzuki R.*, *Tokahashi M.*, *Kobayashi T.*, *Sugita J.* Planar domains and domain wall structures of bubbles in permalloy-coated garnet films // Appl. Phys. Lett. — 1975. — V. 26, № 6. — P. 342.
185. *Dekker P.J.*, *Slonczewski J.C.* Switching of magnetic bubbles states // Appl. Phys. Lett. — 1976. — V. 29, № 11. — P. 753.
186. *Mac Neal B.E.*, *Humphrey F.B.* Azimuthal angular rotation (ψ) in domain walls during radial motion of bubble domains // J. Appl. phys. — 1979. — V. 50, № 2. — P. 1020.
187. *Hagedorn F.B.* Dynamic conversion during magnetic bubble domain wall motion // J. Appl. phys. — 1974. — V. 45, № 7. — P. 3129.
188. *Schlömann E.* Domain walls in bubble films. I. General theory of static properties // J. Appl. phys. — 1973. — V. 44, № 4. — P. 1837.
189. *Schlömann E.* Domain walls in bubble films. II. Static properties of thick films // J. Appl. phys. — 1973. — V. 44, № 4. — P. 1850.
190. *Schlömann E.* Domain walls in bubble films. III. Wall structure of stripe domains // J. Appl. phys. — 1974. — V. 45, № 1. — P. 369.
191. *Schlömann E.* Domain walls in bubble films. IV. High-speed wall motion in the presence of an in-plane anisotropy // J. Appl. phys. — 1976. — V. 47 № 3. — P. 1142.
192. *Slonczewski J.C.* Theory of domain-wall motion in magnetic films and platelets // J. Appl. phys. — 1973. — V. 44, № 4. — P. 1759.
193. *Соколов Ю.Ф.* К теории доменных границ и полосовой доменной структуры в сильно анизотропных одноосных ферромагнетиках // ФТТ. — 1980. — Т. 22, № 3. — С. 652.
194. *Сметанин Б.М.* Техническое творчество. — М.: Молодая гвардия, 1955.
195. *Костенко И.*, *Микиртумов Э.* Летающие модели. — М.: Детгиз, 1951.
196. *Барьяхтар В.Г.*, *Горобец Ю.И.* Цилиндрические магнитные домены и их решетки. — Киев, Наукова Думка, 1986.
197. *Ганн В.В.*, *Горобец Ю.И.* Колебания решетки цилиндрических магнитных доменов // ФТТ. — 1975. — Т. 17, № 5. — С. 1305.
198. *Барьяхтар В.Г.*, *Ганн В.В.*, *Горобец Ю.И.* Волны в решетке цилиндрических доменов // ФТТ. — 1976. — Т. 18, № 7. — С. 1990.

199. *Дикштейн И.Е., Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г., Чижик Е.С.* Образование рефлексивной доменной структуры при однополярном и циклическом перемагничивании одноосного магнетика // ЖЭТФ. — 1991. — Т. 100, № 5. — С. 1606.
200. *Лисовский Ф.В., Мансветова Е.Г., Николаева Е.П., Николаев А.В.* Динамическая самоорганизация и симметрия распределения магнитного момента в тонких пленках // ЖЭТФ. — 1993. — Т. 103, № 2. — С. 213.
201. *Логунов М.В., Моисеев Н.В.* Формирование сотовой доменной структуры в магнитных пленках // ПЖТФ. — 1997. — Т. 23, № .9. — С. 46.
202. *Логунов М.В., Герасимов М.В.* Формирование и эволюция гигантских динамических доменов в гармоническом магнитном поле // ФТТ. — 2003. — Т. 45, № 6. — С. 1031.
203. *Килшакбаева Ж.А., Русинов А.А., Кандаурова Г.С.* Фазовые диаграммы динамических систем магнитных доменов. Однодоменное состояние // I Объед. конф. по магнитоэлектронике. Тез. докл. 1995. — М.: ИРЭ РАН. — С. 39.
204. *Кандаурова Г.С.* Хаос и порядок в динамической системе магнитных доменов. Ангерное состояние // I Объед. конф. по магнитоэлектронике. Тез. докл. 1995. — М.: ИРЭ РАН. — С. 41.
205. *Кандаурова Г.С.* Новые явления в низкочастотной динамике коллектива магнитных доменов // УФН. — 2002. — Т. 172, № 10. — С. 1165.
206. *Кандаурова Г.С., Свидерский А.Э.* Процессы самоорганизации в многодоменной магнитной среде и образование устойчивых динамических структур // ЖЭТФ. — 1990. — Т. 97, № 4. — С. 1218.
207. *Gerasimov M.V., Logunov M.V., Nikitov S.A., Nozdrin Yu.N., Spirin A.V., Tokman I.D.* Experimental observation of domain wall motion induced by laser pump-pulse // Book of Abstracts of placeCityMoscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow, 2017. Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ». Moscow. — P. 36.
208. *Beaurepaire E., Merle J.C., Daunois A., Bigot J.Y.* Ultrafast spin dynamics in ferromagnetic nickel // Phys. Rev. Lett. — 1996. — V. 76, № 22. — P. 4250.
209. *Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T.* Ultrafast optical manipulation of magnetic order // Rev. Mod. Phys. — 2010. — V. 82, № 3. — P. 2731.
210. *Every A.G.* Measurement of the near-surface elastic properties of solids and thin supported films // Meas. Sci. Technol. (Measurement Science and Technology). — 2002. — V. 13. — P. R21.
211. *Walowski J., Münzenberg M.* Perspective: Ultrafast magnetism and THz spintronics // J. Appl. Phys. — 2016. — V. 120, № 14. — P. 140901(16).
212. *Bigot J.V., Vomir M.* Ultrafast magnetization dynamics of nanostructures // Ann. Phys. (StateplaceBerlin). — 2013. — V. 525, № 1–2. — P. 2.
213. *Ka Shen, Bauer G.E.W.* Laser-induced spatiotemporal dynamics of magnetic films // Phys. Rev. Lett. — 2015. — V. 115, № 19. — P. 197201(5).
214. *Linnik T.I., Scherbakov A.V., Yakovlev D.R., Liu X., Furdina J.K., Bayer M.* Theory of magnetization precession induced by picosecond strain pulse in ferromagnetic semiconductor (Ga,Mn)As // Phys. Rev. B. — 2011. — V. 84, № 21. — P. 214432(11).
215. *Jäger J.V., Scherbakov A.V., Linnik T.I., Yakovlev D.R., Wang M., Wadley P., Holy V., Cavill S.A., Akimov A.V., Rushforth A.W., Bayer M.*

Picosecond inverse magnetostriction in galfenol thin films // Appl. Phys. Lett. — 2013. — V. 103, № 3. — P. 032409(5).
216. *Jäger J. V.*, *Scherbakov A. V.*, *Glavin B. A.*, *Salasyuk A. S.*, *Campion R. P.*, *Rushforth A. W.*, *Yakovlev D. R.*, *Akimov A. V.*, *Bayer M.* Resonant driving of magnetization precession in a ferromagnetic layer by coherent monochromatic phonons // Phys. Rev. B. — 2015. — V. 92, № 2. — P. 020404(5).
217. *Кабыченков А. Ф.* Влияние светового поля на дисперсию магнитодипольных волн в ферромагнетиках // ЖТФ. — 1994. — Т. 64, № 8, с.159.
218. *Чернов А. И.*, *Кожаев М. А.*, *Ветошко П. М.*, *Додонов Д. В.*, *Прокопов А. Р.*, *Шумилов А. Г.*, *Шапошников А. Н.*, *Бержанский В. Н.*, *Звездин А. К.*, *Белотелов В. И.* Локальное зондирование магнитных пленок с помощью оптического возбуждения магнитостатических волн // ФТТ. — 2016. — Т. 58, № 6. — С. 1093.
219. *Dreher L.*, *Weiler M.*, *Pernpeintner M.*, *Huebl H.*, *Gross R.*, *Brandt M. S.*, *Goennenwein S. T. B.* Surface acoustic wave driven ferromagnetic resonance in nickel thin films: theory and experiment // Phys. Rev. B. — 2012. — V. 86, № 13. — P. 134415(13).
220. *Thevenard L.*, *Gourdon C.*, *Prieur J. Y.*, *Von Bardeleben H. J.*, *Vincent S.*, *Becerra L.*, *Largeau L.*, *Duquesne J. Y.* Surface-acoustic-wave-driven ferromagnetic resonance in (Ga,Mn)(As,P) epilayers // Phys. Rev. B. — 2014. — V. 90, № 9. — P. 094401(8).
221. *Koopmans B.*, *Malinovski G.*, *Dalla Longa F.*, *Steiauf D.*, *Fähnle M.*, *Roth T.*, *Cinchetti M.*, *Aeschlimann M.* The paradoxical diversity of ultrafast laser-induced demagnetization reconciled // Nature Materials. Supplementary Information. — 2009. — P. 1.
222. *Koopmans B.*, *Malinovski G.*, *Dalla Longa F.*, *Steiauf D.*, *Fähnle M.*, *Roth T.*, *Cinchetti M.*, *Aeschlimann M.* Explaining the paradoxical diversity of ultrafast laser-induced demagnetization // Nature Materials. — 2010. — V. 9, № 3. — P. 259.
223. *Janusonis J.*, *Chang C. L.*, *Jansma T.*, *Gatilova A.*, *Vlasov V. S.*, *Lomonosov A. M.*, *Temnov V. V.*, *Tobey R. I.* Ultrafast magnetoelastic probing of surface acoustic transients // Phys. Rev. B. — 2016. — V. 94, № 2. — P. 024415(7).
224. *Janusonis J.*, *Jansma T.*, *Chang C. L.*, *Liu Q.*, *Gatilova A.*, *Lomonosov A. M.*, *Shalagatskyi V.*, *Pezeril T.*, *Temnov V. V.*, *Tobey R. I.* Transient grating spectroscopy in magnetic thin films: simultaneous detection of elastic and magnetic dynamics // Scientific reports. — 2016. — 6:29143. DOI: 10.1038/serp29143. www.nature.com/scientificreports. — P. 1–10.
225. *Chang C. L.*, *Lomonosov A. M.*, *Janusonis J.*, *Vlasov V. S.*, *Temnov V. V.*, *Tobey R. I.* Parametric frequency mixing in a magnetoelastically driven linear ferromagnetic oscillator // Phys. Rev. B. — 2017. — V. 95, № 6. — P. 060409(5).
226. *Lomonosov A. M.*, *Vlasov V. S.*, *Janusonis J.*, *Chang C. L.*, *Tobey R. I.*, *Pezeril T.*, *Temnov V. V.* Magneto-elastic symmetry breaking with surface acoustic wsves // Proceedings of “The 7th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics” (META-16 Malaga-Spain). ISSN 2429-1390. Metaconferences.org. — P. 1–2.
227. *Maznev A. A.*, *Every A. G.* Time-domain dynamic surface response of an anisotropic elastic solid to an impulsive line force // Int. J. Engng. Sci. — 1997. — V. 35, № 4. — P. 321.

228. *Власов В.С.*, *Макаров П.А.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Ориентационные характеристики возбуждения магнитоупругих волн фемтосекундным импульсом света // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2017. — № 6. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf.
229. *Druyvesteyn W.F.*, *Dorleijn J.W.F.*, *Rijnierse R.J.* Analysis of a method for measuring the magnetocrystalline anisotropy of bubble materials // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, № 5. — P. 2379
230. *Тарасенко В.В.*, *Ченский Е.В.*, *Дикштейн И.Е.* Теория неоднородных магнитных состояний в ферромагнетиках в окрестности фазовых переходов второго рода // ЖЭТФ. — 1976. — Т. 70, № 6. — С. 2178.
231. *Shimada J.*, *Kojima H.*, *Sakai K.* Determination of the anisotropy field of garnet bubble materials from domain observation // J. Appl. Phys. — 1974. — V. 45, № 10. — P. 4598.
232. *Барьяхтар В.Г.*, *Клепиков В.Ф.* Влияние неоднородных состояний на фазовый переход парамагнетик – ферромагнетик // ПЖТФ. — 1972. — Т. 15, № 7. — С. 411.
233. *Барьяхтар В.Г.*, *Клепиков В.Ф.* Фазовые переходы в поляризованных средах и роль неоднородных состояний // ФТТ. — 1972. — Т. 14, № 5. — С. 1478.
234. *Барьяхтар В.Г.*, *Иванов Б.А.*, *Квирикадзе А.Г.*, *Клепиков В.Ф.* О фазовом переходе ферромагнетика из однодоменного в многодоменной состояние // ФММ. — 1973. — Т. 36, № 1. — С. 18.
235. *Johansen T.R.*, *Norman D.J.*, *Torok E.J.* Variation of stripe-domain spacing in a Faraday effect light deflector // J. Appl. Phys. — 1971. — V. 42, № 4. — P. 1715.
236. *Щеглов В.И.* Некоторые свойства дифракции света на доменной структуре // ФТТ. — 1973. — Т. 15, № 4. — С. 1046.
237. *Лисовский Ф.В.*, *Щеглов В.И.* Влияние доменной структуры на магнитострикционные колебания в эпитаксиальных пленках ферритов-гранатов // ЖТФ. — 1983. — Т. 53, № 3. — С. 596.
238. *Лисовский Ф.В.*, *Щеглов В.И.* Влияние анизотропии на магнитострикционные колебания в пленках ферритов-гранатов при ориентационных фазовых переходах // ФТТ. — 1983. — Т. 25, № 12. — С. 3710.
239. *Звездин А.К.*, *Матвеев В.М.* Особенности физических свойств редкоземельных ферритов-гранатов вблизи температуры компенсации // ЖЭТФ. — 1972. — Т. 62, № 1. — С. 260.
240. *Malozemoff A.P.*, *DeLuca J.C.* Effect of misorientation on growth anisotropy in [111]-oriented garnet films // J. Appl. Phys. — 1974. — V. 45, № 10. — P. 4586.
241. *Muller M.W.* Distribution of the magnetization in a ferromagnet // Phys. Rev. — 1961. — V. 122, № 5. — P. 1485.
242. *Holz A.*, *Kronmüller H.* The nucleation of stripe domains in thin ferromagnetic films // Phys. Stat. Sol. — 1969. — V. 31, № 2. — P. 787.
243. *Goldstein R.M.*, *Muller M.W.* Domain nucleation in uniaxial ferromagnets // Phys. Rev. B. — 1970. — V. 2, № 11. — P. 4585.
244. *Shumate P.W.*, *Smith D.H.*, *Hagedorn F.B.* The temperature dependence of the anisotropy field of mixed rare-earth iron garnets // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, № 1. — P. 449.
245. *Muller M.W.* Theory of stripe-domain nucleation in garnet films // J. Appl. Phys. — 1974. — V. 45, № 11. — P. 5050.

246. *Дикштейн И.Е.*, *Лисовский Ф.В.*, *Мансветова Е.Г.*, *Тарасенко В.В.*, *Шаповалов В.И.*, *Щеглов В.И.* Доменная структура одноосных ферримагнетиков при фазовых переходах второго рода // В кн.: Всесоюзная конференция по физике магнитных явлений. Тезисы докладов. — Харьков, 1979. — С. 439.
247. *Барьяхтар В.Г.*, *Боровик А.Е.*, *Попов В.А.* Теория промежуточного состояния антиферромагнетиков при фазовом переходе второго рода во внешнем магнитном поле // ПЖЭТФ. — 1969. — Т. 9, № 11. — С. 634.
248. *Мицек А.И.*, *Колмакова Н.П.*, *Гайданский П.Ф.* Метастабильные состояния одноосных антиферромагнетиков // ФТТ. — 1969. — Т. 11, № 5. — С. 1258.
249. *Барьяхтар В.Г.*, *Галкин А.А.*, *Ковнер С.И.*, *Попов В.А.* Антиферромагнитный резонанс в дигидрате хлорида меди на низких частотах при опрокидывании магнитных моментов подрешеток // ПЖЭТФ. — 1969. — Т. 10, № 7. — С. 292.
250. *Eremenko V.V.*, *Kharchenko N.F.*, *Gnatchenko S.L.* Magneto-optical study of the phase diagram and structure near the temperature of magnetic compensation in iron-garnets // Dig. Intermag Conf. — 1974. — Toronto. — P. 7.
251. *Лисовский Ф.В.*, *Шаповалов В.И.* Неколлинеарность подрешеток и существование доменной структуры в высоких полях подмагничивания в $Dy_3Fe_5O_{12}$ вблизи точки магнитной компенсации // ПЖЭТФ. — 1974. — Т. 20, № 2. — С. 128.
252. *Барьяхтар В.Г.*, *Яблонский Д.А.* Доменная структура ферритов в окрестности точки компенсации // ФТТ. — 1974. — Т. 16, № 11. — С. 3511.
253. *Лисовский Ф.В.*, *Мансветова Е.Г.*, *Шаповалов В.И.* Фазовая диаграмма и структура доменных границ в одноосном ферримагнетике вблизи точки компенсации // ЖЭТФ. — 1976. — Т. 71, № 4(10). — С. 1443.
254. *Богданов А.Н.*, *Яблонский Д.А.* Теория доменной структуры ферритов в окрестности точки компенсации // В кн.: Всесоюзная конференция по физике магнитных явлений. Тезисы докладов. — Харьков, 1979. — С. 442.
255. *Веселаго В.Г.*, *Максимов Л.П.*, *Прохоров А.М.* Установка «Соленоид» для получения сверхсильных магнитных полей // Вестник АН СССР. — 1968. — № 12. — С. 58.
256. *Кольм Г.*, *Фриман А.* Сильные магнитные поля // УФН. — 1966. — Т. 88, № 4. — С. 703.
257. *Сэмпсон У.*, *Крейг П.*, *Стронгин М.* Успехи в создании сверхпроводящих магнитов // УФН. — 1967. — Т. 93, № 4. — С. 703.
258. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. — М.: Наука, 1971.
259. *Ле-Кроу Р.*, *Комсток Р.* Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках // В кн.: Физическая акустика, под ред. Мэзона У.П. — Т. 3Б. Динамика решетки. — М.: Мир, 1968. — С. 156.
260. БСЭ. — Т. 15. — М.: Советская энциклопедия, 1974. — С. 168. Статья «Магнитная восприимчивость».
261. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.
262. *Сушкевич А.К.* Основы высшей алгебры. — М.Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит, 1941.
263. *Вашковский А.В.*, *Стальмахов В.С.*, *Шараевский Ю.П.* Магнитостатические волны в электронике сверхвысоких частот. — Саратов: Изд.Саратовского университета, 1993.

264. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе // РЭ. — 2009. — Т. 54, № 7. — С. 863.
265. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Возбуждение связанных магнитоупругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва–Фирсановка: Издание МЭИ, 2008. — С. 197.
266. *Щеглов В.И.*, *Шавров В.Г.*, *Зубков В.И.*, *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.* Нелинейная прецессия вектора намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами при ориентационном фазовом переходе // Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие». — Москва–Фирсановка: Издание МЭИ, 2009. — С. 92.
267. *Suhl H.* Ferromagnetic resonance in nickel ferrite between one and two kilomegacycles // Phys. Rev. — 1955. — V. 97, № 2. — P. 555.
268. *Ильин В.А.*, *Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1965.
269. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М.,Л.: Гос. Изд. Техн.-теор. Лит., 1951.
270. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1973.
271. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теория упругости (Теоретическая физика. Т. VII). — М.: Наука, 1965.
272. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978.
273. *Сиротин Ю.И.*, *Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. — М.: Наука, 1979.
274. *Харрисон У.* Теория твердого тела. — М.: Мир, 1972.
275. *Hagedorn F.B.*, *Hewitt B.S.* Growth-induced magnetic anisotropy in variously oriented epitaxial films on Sm-YIGG // J. Appl. Phys. — 1974. — V. 45, № 2. — P. 925.
276. *Hubert A.*, *Malozemoff A.P.*, *DeLuca J.C.* Effect of cubic, tilted uniaxial and orthorhombic anisotropy on homogeneous nucleation in a garnet bubble film // J. Appl. Phys. — 1974. — V. 45, № 8. — P. 3562.
277. *Shumate Jr. P. W.* Extension of the analysis for an optical magnetometer to include cubic anisotropy in detail // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, № 7. — P. 3323.
278. *Ильяшенко Е.И.*, *Лисовский Ф.В.*, *Щеглов В.И.*, *Юрченко С.Е.* О влиянии наклона оси легкого намагничивания на подвижность доменных границ в тонких пленках ферритов-гранатов // ФТТ. — 1977. — Т. 19, № 3. — С. 898.
279. Физическая энциклопедия. Т. 2. — М.: Советская энциклопедия. 1990. — С. 647. Статья «Магнитная атомная структура».
280. *Изюмов Ю.А.*, *Найш В.Е.*, *Озеров Р.П.* Нейтронография магнетиков. — М.: Наука, 1981.
281. БСЭ. Т. 9. — М.: Советская энциклопедия, 1972. — С. 145. Статья «Железо».
282. *Corliss L.M.*, *Hastings J.M.*, *Nathans R.*, *Shirane G.* Magnetic structure of Cr_2O_3 // J. Appl. Phys. — 1965. — V. 36, № 3. Pt.2. — P. 1099.
283. БСЭ. Т. 29. — М.: Советская энциклопедия, 1978. — С. 470. Статья «Шпинель».

284. *Лакс Б.*, *Баттон К.* Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. — М.: Мир, 1965.
285. БСЭ. Т. 15. — М.: Советская энциклопедия, 1974. — С. 158. Статья «Магнетит».
286. БСЭ. Т. 15. — М.: Советская энциклопедия, 1974. — С. 179. Статья «Магнитно-мягкие материалы».
287. БСЭ. Т. 7. — М.: Советская энциклопедия, 1972. — С. 249. Статья «Гранаты».
288. *Geller S.*, *Gilleo M.A.* The crystal structure and ferrimagnetism of yttrium-iron garnet, $Y_3Fe_2(FeO_4)_3$ // Journ. Phys. Chem. Sol. — 1957. — V. 3, № 1/2. — P. 30–36. Перевод: *Геллер С.*, *Гилльо М.* Кристаллическая структура и ферримагнетизм иттриевого граната // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Ред.: Гуревич А.Г. — М.: ИЛ, 1961. — С. 373.
289. *Gilleo M.A.*, *Geller S.* Magnetic and crystallographic properties of substituted yttrium-iron garnet $3Y_2O_3 \cdot xM_2O_3 \cdot (5-x)Fe_2O_3$ // Phys. Rev. — 1958. — V. 110, № 1. — P. 73.
290. *Лонсдэйл К.* Кристаллы и рентгеновы лучи. — М.: ИЛ, 1952.
291. *Шилов Г.Е.* Введение в теорию линейных пространств. — М.Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1952.
292. *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М.Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1952.
293. *Делоне Б.Н.*, *Райков Д.А.* Аналитическая геометрия. Том 1. — М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
294. *Уэрт Ч.*, *Томсон Р.* Физика твердого тела. — М.: Мир, 1969.
295. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. — М.: Наука, 1970.
296. *Штраусс В.* Магнитоупругие свойства иттриевого феррита-граната // В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т. 4Б. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. — М.: Мир, 1970. — С. 247.
297. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Нелинейная динамика установления намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода // РЭ. — 2010. — Т. 55, № 6. — С. 689.
298. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Динамика установления намагниченности в нормально намагниченной ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Москва: Изд. МГУ. — С. 942.
299. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Динамика ориентационного перехода намагниченности в нормально намагниченной пластине из магнитоупругого диэлектрика // Сборник трудов IX Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2009. — С. 71.
300. *Vlasov V.S.*, *Kotov L.N.*, *Shavrov V.G.*, *Shcheglov V.I.* The nonlinear reorientation of magnetization vector in magnetoelastic medium during dynamic magnetization // Book of Abstracts International conference «Functional Materials (ICFM-2009)». Parteni. Crimea. Ucraine. Simferopol: TNU. 2009. — P. 297.

301. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Динамические свойства ориентационного фазового перехода в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами // Тезисы докладов XXXIII Международной зимней школы физиков-теоретиков «Коуровка 2010». — Екатеринбург: ИФМ РАН, 2010. — С. 95.
302. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Нелинейная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода при несимметричном возбуждении // Тезисы докладов XII Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2010)» (электронный сборник на CD). — Звенигород: Изд. Физического факультета МГУ, 2010. Секция 8. — С. 12.
303. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Нелинейная прецессия намагниченности второго порядка в нормально намагниченной ферритовой пластине при ориентационном фазовом переходе // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка (МЭИ): ПЛАНТИ, 2010. — С. 122.
304. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка при ориентационном переходе // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2010. — С. 99.
305. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Кинетика перехода между различными режимами прецессии намагниченности второго порядка // Сборник трудов X Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2010. — С. 103.
306. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Вынужденная нелинейная прецессия вектора намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. — 2011. — Т. 56, № 1. — С. 84.
307. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Несимметричная вынужденная нелинейная прецессия намагниченности в условиях ориентационного перехода // РЭ. — 2011. — Т. 56, № 6. — С. 719.
308. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Мультирежимный характер нелинейной прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. — 2011. — Т. 56, № 9. — С. 1120.
309. *Vlasov V.S.*, *Kotov L.N.*, *Shavrov V.G.*, *Shcheglov V.I.* Second order magnetization precession by reorientation transition // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). — Moscow, 2011. Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ», Moscow. — P. 782.
310. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка при компенсационном воздействии постоянного поля // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. — С. 206.
311. *Власов В.С.*, *Котов Л.Н.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Нелинейная прецессия положения равновесия вектора намагниченности в анизотропной среде // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка: НИУ МЭИ, 2011. — С. 217.

312. *Власов В.С. Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка в условиях ориентационного перехода // РЭ. — 2012. — Т. 57, № 5. — С. 501.
313. *Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка в присутствии компенсирующего постоянного поля // Сборник материалов XV Международной зимней школы-семинара по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. — Саратов: Изд. СГУ, 2012. — С. 38.
314. *Власов В.С., Котов Л.Н., Кирушев М.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Нелинейная прецессия намагниченности в нормально намагниченной пластине в постоянном поле меньшем поля размагничивания // Тезисы докладов XXXIV Международной зимней школы физиков-теоретиков «Коуровка 2012». — Екатеринбург: Изд. ИФМ УрО РАН, 2012. — С. 22.
315. *Гришина М.К., Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Несимметричное возбуждение прецессии намагниченности второго порядка в нормально намагниченной ферритовой пластине // Тезисы докладов XXXIV Международной зимней школы физиков-теоретиков «Коуровка 2012». — Екатеринбург: Изд. ИФМ УрО РАН, 2012. — С. 106.
316. *Кирушев М.С., Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия второго порядка при вынужденных колебаниях намагниченности в условиях ориентационного перехода // Тезисы докладов XXXIV Международной зимней школы физиков-теоретиков «Коуровка 2012». — Екатеринбург: Изд. ИФМ УрО РАН, 2012. — С. 111.
317. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ, 2012. — С. 230.
318. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Особенности временных характеристик прецессии положения равновесия в анизотропной ферритовой пластине // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2012. — С. 214.
319. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия второго порядка в ферритовом слое с магнитоупругими свойствами // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2012. — С. 223.
320. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия намагниченности второго порядка в среде с одноосной магнитной анизотропией // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2012. — С. 257.
321. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия намагниченности второго порядка в среде с кубической анизотропией // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Астрахань: Изд. дом «Астраханский университет», 2012. — С. 260.

322. *Власов В.С., Плешев Д.А., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Исследование нелинейной прецессии намагниченности в перпендикулярно намагниченной пластине в условиях ориентационного перехода // Тезисы докладов XIII Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС-13). — Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2012. — С. 16.
323. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. Часть 1. Одноосная анизотропия // РЭ. — 2013. — Т. 58, № 8. — С. 806.
324. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде. II. Кубическая анизотропия // РЭ. — 2013. — Т. 58, № 9. — С. 857.
325. *Vlasov V.S., Kirushev M.S., Kotov L.N., Shavrov V.G., Shcheglov V.I.* Nonlinear second order magnetization precession in anisotropy medium // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). Saint Petersburg. Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». Moscow. — P. 168.
326. *Vlasov V.S., Kirushev M.S., Pleshev D.A., Kotov L.N., Shcheglov V.I., Shavrov V.G., Varser E.V.* Investigation of regimes of nonlinear magnetoelastic oscillations in the ferrite layer // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). Saint Petersburg. Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». Moscow. — P. 170.
327. *Vlasov V.S., Kirushev M.S., Kotov L.N., Shcheglov V.I., Shavrov V.G.* Investigation of regimes of second order magnetization precession in anisotropy medium // Abstracts of V Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism. Nanomagnetism» (EASTMAG-2013). Russia. Vladivostok. 2013. — P. 101.
328. *Власов В.С., Кирушев М.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Нелинейная прецессия намагниченности второго порядка в анизотропной среде // Сборник материалов X Международной зимней школы-семинара «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013). — Саратов: Изд. центр «Наука», 2013. — С. 80.
329. *Kirushev M.S., Vlasov V.S., Pleshev D.A., Kotov L.N., Shavrov V.G., Shcheglov V.I.* Second order precession in the plate with cubic anisotropy and magnetoelastic properties // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). Moscow, Published by «Изд-во Физ. фак. МГУ». — P. 571.
330. *Власов В.С., Кирушев М.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Прецессия намагниченности второго порядка в магнитоупругой среде // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 4. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/apr15/16/text.pdf.
331. *Kirushev M.S., Vlasov V.S., Pleshev D.A., Asadullin F.F., Kotov L.N., Shavrov V.G., Shcheglov V.I.* Second order precession in the plate with cubic anisotropy and magnetoelastic properties // Solid State Phenomena. — 2015. — Vols. 233–234. P. 73.
332. *Власов В.С., Кирушев М.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* Стационарные режимы прецессии намагниченности второго порядка в среде с магнитоупругими свойствами // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: ИНФРА-М, 2015. — С. 217.

333. *Вашковский А.В.*, *Локк Э.Г.*, *Щеглов В.И.* Влияние наведенной одноосной анизотропии на доменную структуру и фазовые переходы пленок железоиттриевого граната // ФТТ. — 1999. — Т. 41 № 11. — С. 2034.
334. *Ветошко П.М.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Роль упругой диссипации в формировании резонансных свойств прецессии намагниченности в магнитоупругой среде // РЭ. — 2017. — Т. 62, № 4. — С. 364.
335. *Власов В.С.*, *Иванов А.П.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения // РЭ. — 2015. — Т. 60, № 1. — С. 79.
336. *Телеснин Р.В.*, *Козлов В.И.*, *Дудоров В.Н.* Ферромагнитный резонанс в эпитаксиальных пленках $Y_3Fe_{5-x}Ga_xO_{12}$ // ФТТ. — 1974. — Т. 16, № 11. — С. 3532.
337. *Гаврилин В.П.*, *Березин Д.Г.*, *Мирошников Ю.Ф.* Ферромагнитный резонанс и магнитная кристаллографическая анизотропия монокристаллических пленок литиевого феррита // Изв. ВУЗов. Физика. — 1973. — № 9(136). — С. 86.
338. *Hansen P.*, *Schuldt J.*, *Tolksdorf W.* Anisotropy and magnetostriction of iridium-substituted yttrium iron garnet // Phys. Rev. (B). — 1973. — V. 8, № 9. — P. 4274.
339. *Антонов Л.И.*, *Осипов С.Г.*, *Хапаев М.М.* Расчет доменной стенки методом установления // ФММ. — 1983. — Т. 55, № 5. — С. 917.
340. *Антонов Л.И.*, *Терновский В.В.*, *Хапаев М.М.* О расчете периодических доменных структур в ферромагнитных материалах // ФММ. — 1989. — Т. 67, № 1. — С. 57.
341. *Антонов Л.И.*, *Мухина Е.А.*, *Лукашева Е.В.* Магнитное поле двумерного периодического распределения намагниченности // ФММ. — 1994. — Т. 78, № 4. — С. 5.
342. *Лукашева Е.В.* Двумерная микромагнитная структура намагниченности одноосных магнитных пленок. — Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Москва, 1995.
343. *Антонов Л.И.*, *Лукашева Е.В.*, *Миронова Г.А.*, *Скачков Д.Г.* Динамическое установление равновесного периода в структуре намагниченности ферромагнитных пленок // ФММ. — 2000. — Т. 90, № 3. — С. 5.
344. *Антонов Л.И.*, *Лукашева Е.В.*, *Миронова Г.А.*, *Скачков Д.Г.* Динамическое установление распределения намагниченности в ферромагнитных пленках // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2000. — С. 507.
345. *Антонов Л.И.*, *Лукашева Е.В.*, *Миронова Г.А.*, *Скачков Д.Г.* Магнитное поле периодической структуры намагниченности в тонкой магнитной пленке // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2000. — С. 510.
346. *Антонов Л.И.*, *Лукашева Е.В.*, *Миронова Г.А.*, *Скачков Д.Г.* Структурные неоднородности намагниченности в доменных стенках // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2000. — С. 514.
347. *Антонов Л.И.*, *Лукашева Е.В.*, *Попкова М.В.* Идеальная кривая намагничивания тонкой одноосной ферромагнитной пленки // Сборник трудов

XVIII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2000. — С. 147.

348. *Антонов Л.И.*, *Миронова Г.А.*, *Лукашева Е.В.*, *Скачков Д.Г.*, *Паршина Ю.В.* Горизонтальные блоховские линии в доменной стенке тонкой ферромагнитной пленки // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2000. — С. 410.
349. *Лукашева Е.В.*, *Попкова М.В.*, *Синило П.В.* Эволюция доменной структуры тонких магнитных пленок в процессе идеального намагничивания // Сборник трудов XVII Международной конференции «Новые магнитные материалы микроэлектроники (НМММ)». — Москва: Изд-во МГУ, 2000. — С. 510.
350. *Антонов Л.И.*, *Жукарев А.С.*, *Поляков П.А.*, *Скачков Д.Г.* Поле вектора намагниченности одноосной ферромагнитной пленки // ЖТФ. — 2004. — Т. 74, № 3. — С. 83.
351. *Демидович Б.П.*, *Марон И.А.* Основы вычислительной математики. — М.: Физматгиз, 1963.
352. *Демидович Б.П.*, *Марон И.А.*, *Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. — М.: Физматгиз, 1963.
353. *Chikazumi S.* Physics of Magnetism. Wiley. New York, 1964.
354. *Rosencwaig A.*, *Tabor W.J.* Growth-induced noncubic anisotropy in bubble garnets // AIP Conf. Proc. — 1972. — V. 5. — P. 57.
355. *Gyorgy E.M.*, *Sturge M.D.*, *Van Uitert L.G.*, *Heilner E.J.*, *Grodkiewicz W.H.* Growth-induced anisotropy of some mixed rare-earth iron garnets // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, № 1. — P. 438.
356. *Hagedorn F.B.*, *Tabor W.J.*, *Van Uitert L.G.* Growth-induced magnetic anisotropy in seven different mixed rare-earth iron garnets // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, № 1. — P. 432.
357. *Kitamura K.*, *Iyi N.*, *Kimura S.*, *Chevrier F.*, *Devignes J.M.*, *Le Gall H.* Growth-induced optical anisotropy of epitaxial garnet films grown on (110)-oriented substrates // J. Appl. Phys. — 1986. — V. 60, № 4. — P. 1486.
358. *Hagedorn F.B.*, *Blank S.L.*, *Barns R.L.* Growth-induced magnetic anisotropy in Y2.4Eu0.6Ga1.2Fe3.8O12 // Appl. Phys. Lett. 1973. — V. 22, № 5. — P. 209.
359. *Gyorgy E.M.*, *Rosencwaig A.*, *Blount E.I.*, *Tabor W.J.*, *Lines M.E.* General conditions for growth-induced anisotropy in garnets // Appl. Phys. Lett. — 1971. — V. 18, № 11. — P. 479.
360. *Shumate Jr. P.W.*, *Smith D.H.*, *Hagedorn F.B.* The temperature dependence of the anisotropy field and coercivity in epitaxial films of mixed rare-earth iron garnets // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 44, № 1. — P. 449.
361. *Hagedorn F.B.* Instability of an isolated straight magnetic domain wall // J. Appl. Phys. — 1973. — V. 41, № 3. — P. 1161.
362. *Ветошко П.М.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Роль упругой диссипации в формировании затухания прецессии намагниченности в магнитоупругой среде // ПЖТФ. — 2015. — Т. 41, № 21. — С. 1.
363. *Вашковский А.В.*, *Локк Э.Г.*, *Щеглов В.И.* Распространение безобменных спиновых волн в ферритовых пленках с доменной структурой // Письма в ЖЭТФ. — 1996. — Т. 63, № 7. — С. 544.

364. *Вашковский А.В.*, *Локк Э.Г.*, *Щеглов В.И.* Распространение магнитостатических волн в ненасыщенных ферритовых пленках с полосовой доменной структурой // ЖЭТФ. — 1997. — Т. 111, № 3. — С. 1016.
365. *Вашковский А.В.*, *Локк Э.Г.*, *Щеглов В.И.* Гистерезис характеристик магнитостатических волн в ферритовых пленках с полосовыми доменами, векторы намагниченности которых ориентированы вблизи плоскости пленки // ЖЭТФ. — 1998. — Т. 114, № 4(10). — С. 1430.
366. *Вашковский А.В.*, *Локк Э.Г.*, *Щеглов В.И.* Безобменные спиновые волны в пленках железоиттриевого граната с полосовыми доменами, намагниченность внутри которых ориентирована вблизи плоскости пленки // Микроэлектроника. — 1998. — Т. 27, № 5. — С. 393.
367. *Вашковский А.В.*, *Локк Э.Г.*, *Щеглов В.И.* Гистерезис характеристик магнитостатических волн в пленках железоиттриевого граната с доменной структурой // XVI международная школа-семинар «Новые магнитные материалы микроэлектроники». 1998. М.: МГУ. Тезисы докладов. Ч. 1. — С. 75.
368. *Власов В.С.*, *Иванов А.П.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления // РЭ. — 2015. — Т. 60, № 3. — С. 297.
369. *Иванов А.П.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 5. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf.
370. *Иванов А.П.*, *Шавров В.Г.*, *Щеглов В.И.* Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2015. — № 6. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf.
371. *Щеглов В.И.* Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в поле типа «вала» с пространственной модуляцией // Электронный «Журнал радиоэлектроники». — 2014. — № 10. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/oct14/1/text.pdf.
372. *Щеглов В.И.* Бистабильный нелинейный осциллятор, как модель структурного фазового перехода // Сборник трудов VII Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Изд. Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2005. — С. 70.
373. *Щеглов В.И.* Динамическое установление вынужденных колебаний бистабильного нелинейного осциллятора как модель структурного фазового перехода // Сборник трудов VIII Международного семинара «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: Изд. Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2007. — С. 71.
374. *Щеглов В.И.* Бистабильный нелинейный осциллятор как динамическая модель структурного фазового перехода // Сборник материалов X Международной зимней школы-семинара «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС-2013). — Саратов: Изд. центр «Наука», 2013. — С. 103.
375. *Аваева И.Г.*, *Копылов Ю.Л.*, *Кравченко В.Б.*, *Лисовский*, *Мушкаренко Ю.Н.*, *Соболев А.Т.*, *Щеглов В.И.* Эпитаксиальные пленки смешанных ферритов-гранатов для ЦМД-применений // Сборник трудов ИНЭУМ «Устройства автоматики и вычислительной техники с использо-

ванием доменной структуры магнитных кристаллов». — Москва, 1975. — Вып. 46. — С. 27.

376. *Schlomann E.* Ferromagnetic resonance in polycrystalline ferrites with large anisotropy — I: General theory and application to cubic materials with negative anisotropy constant // J. Phys. Chem. Sol. — 1958. — V. 6, № 2–3. — P. 257.
377. *Дикштейн И.Е.*, *Щеглов В.И.* Высокочастотная восприимчивость композиционной среды, выполненной на основе анизотропных сферических ферритовых частиц // В кн.: Международная конференция «Физика и технические применения волновых процессов». Тезисы докладов. Т. 2. — Самара, 2001. — С. 14.
378. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Композиционная среда, содержащая анизотропные ферритовые частицы в немагнитной матрице // В кн.: 18-я Международная Крымская конференция «СВЧ техника и телекоммуникационные технологии (КрыМиКо-2008)». Тезисы докладов. — Севастополь. Украина, 2008. — С. 567.
379. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Динамическая восприимчивость композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XVI Международной конференции «Радиолокация и радиосвязь». — Москва–Фирсановка: Издание МЭИ, 2008. — С. 304.
380. *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XXI Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ)». — Москва, 2009. Изд-во МГУ. — С. 948.
381. *Shcheglov V.I.*, *Zubkov V.I.* Magnetic susceptibility of composite medium consisted of uniaxial ferrite particles embedded in nonmagnetic insulating matrix // International conference «Progress In Electromagnetics Research Symposium (PIERS)». — Moscow, 2009. Book of Abstracts. — P. 896.
382. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // В кн.: IX Международный семинар «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2009. — С. 63.
383. *Shcheglov V.I.*, *Zubkov V.I.* The microwave susceptibility of composite medium consisting of ferrite particles with uniaxial anisotropy // International conference «Functional Materials (ICFM-2009)». — Partenit. Crimea. Ucraine. Book of Abstracts. TNU. Simferopol. 2009. — P. 299.
384. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды с изменяемыми параметрами, состоящей из произвольно ориентированных анизотропных ферритовых частиц // РЭ. — 2010. — Т. 55, № 4. — С. 488.
385. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Формирование заданных свойств магнитной восприимчивости композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц // Сборник трудов XVIII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка (МЭИ): ПЛАНТИ, 2010. — С. 133.
386. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из частично упорядоченных анизотропных ферритовых частиц в условиях ориентационного перехода // В кн.: X Международный

семинар «Магнитные фазовые переходы». — Махачкала: издание Института физики Дагестанского научного центра РАН, 2010. — С. 169.

387. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц // В кн.: XIII Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах (Волны-2011)». Тезисы докладов (электронный сборник на CD). Издание Физического факультета МГУ. 2011. Секция 2 (Электродинамика). — С. 7–11.
388. *Shcheglov V.I.*, *Zubkov V.I.* Magnetic susceptibility of composite medium consisted of uniaxial ferrite particles // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Magnetism (MISM). — Moscow: «Изд-во Физ. фак. МГУ». — P. 783.
389. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей ферритовые элементы в условиях ориентационного перехода // Сборник трудов XIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва–Фирсановка (МЭИ): НИУ МЭИ, 2011. — С. 245.
390. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной среды, содержащей анизотропные ферритовые элементы // В кн.: XV Международная зимняя школа-семинар по электронике сверхвысоких частот и радиофизике. — Саратов: Изд. СГУ, 2012. — С. 56.
391. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Тензор магнитной восприимчивости композиционной среды из анизотропных ферритовых частиц // В кн.: XXXIV Международная зимняя школа физиков-теоретиков — Коуровка, 2012. Тезисы докладов. — Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2012. — С. 139.
392. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Отражение и прохождение электромагнитных волн при падении на трехслойную композиционную структуру, содержащую гиромагнитные элементы // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». — Москва: НИУ МЭИ, 2012. — С. 260.
393. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Отражение электромагнитных волн от композиционной решетки из анизотропных ферритовых сфер // Сборник трудов XXII Международной конференции «Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-2012)». — Астрахань (АГУ): Изд. дом «Астраханский университет», 2012. — С. 277.
394. *Зубков В.И.*, *Щеглов В.И.* Магнитная восприимчивость композиционной среды, состоящей из анизотропных ферритовых частиц с различным упорядочением ориентации осей анизотропии // РЭ. — 2013. — Т. 58, № 2. — С. 143.
395. *Shcheglov V.I.*, *Zubkov V.I.* Electromagnetic waves propagation in multilayer composite structure consist of anisotropic ferrite elements // Book of Abstracts of Moscow International Symposium on Spin Waves 2013 (SW-2013). — Saint Petersburg. Russia. Published by «Изд. ФТИ им. Иоффе». — P. 131.
396. *Щеглов В.И.* Взаимодействие упругих колебаний с прецессирующим магнитным моментом // РЭ. — 1971. — Т. 16, № 12. — С. 2321.
397. *Голдин Б.А.*, *Котов Л.Н.*, *Зарембо Л.К.*, *Карпачев С. Н.* Спин-фононные взаимодействия в кристаллах (ферритах). — Л.: Наука, 1991.
398. *Мигулин В.В.*, *Медведев В.И.*, *Мустель Е.Р.*, *Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.

399. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. — М.: Наука, 1964.
400. *Андронов А.А.*, *Витт А.А.*, *Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
401. *Стрелков С.П.* Механика. — М.: Наука, 1965.
402. БСЭ. Т. 6. — М.: Советская энциклопедия, 1971. — С. 557. Статья «Гироскоп».
403. Физическая энциклопедия. Т. 1. — М.: Советская энциклопедия, 1988. — С. 484. Статья «Гироскоп».
404. *Лифшиц Е.М.*, *Питаевский Л.П.* Физическая кинетика (Теоретическая физика. Т. X). — М.: Наука, 1979.
405. *Зильберман П.Е.*, *Казаков Г.Т.*, *Куликов В.М.*, *Тихонов В.В.* Влияние слабых подмагничивающих полей на распространение магнитостатических волн в пленках железоиттриевого граната субмикронной толщины // РЭ. — 1988. — Т. 33, № .2. — С. 347.
406. *Зильберман П.Е.*, *Куликов В.М.*, *Тихонов В.В.*, *Шеин И.В.* Магнитостатические волны в пленках железоиттриевого граната при слабом подмагничивании // РЭ. — 1990. — Т. 35, № .5. — С. 986.
407. *Зильберман П.Е.*, *Куликов В.М.*, *Тихонов В.В.*, *Шеин И.В.* Нелинейные эффекты при распространении поверхностных магнитостатических волн в пленках железо-иттриевого граната в слабых магнитных полях // ЖЭТФ. — 1991. — Т. 99, № .5. — С. 1566.
408. *Пул Ч.* Техника ЭПР-спектроскопии. — М.: Мир, 1970.
409. *Вертц Дж.*, *Болтон Дж.* Теория и практические приложения метода ЭПР. — М.: Мир. 1975.
410. *Курушин Е.П.*, *Нефедов Е.И.* Электродинамика анизотропных волноведущих структур. — М.: Наука, 1983.
411. *Колотов О.С.*, *Погожев В.А.*, *Телеснин Р.В.* Методы и аппаратура для исследования импульсных свойств тонких магнитных пленок. — М.: Изд. МГУ, 1970.

Научное издание

ШАВРОВ Владимир Григорьевич
ЩЕГЛОВ Владимир Игнатьевич

ФЕРРОМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

Редактор *Е.С. Артоболевская*
Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселёв*

Подписано в печать 22.06.2018. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 35. Уч.-изд. л. 43,5. Тираж 300 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, г. Москва, ул. Бутлерова, д. 17 Б
E-mail: porsova@fml.ru, sale@fml.ru
Сайт: http://www.fml.ru
Интернет-магазин: http://www.fmllib.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru. E-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (499) 270-73-59