

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

---

Б.М. СМИРНОВ

ФИЗИКА  
ФРАКТАЛЬНЫХ  
КЛАСТЕРОВ

*Серия выпускается под общим руководством  
редакционной коллегии журнала  
"Успехи физических наук"*



МОСКВА "НАУКА"  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1991

ББК 22.365  
C50  
УДК 533.15

*Серия "Современные проблемы физики"  
издается с 1948 года*

Смирнов Б.М. **Физика фрактальных кластеров.** — М.: Наука.  
Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 10 л. — (Соврем. пробл. физики). —  
ISBN 5-02-014629-3. — 136 с.

Представлены общие свойства фрактальных систем. Дан обзор моделей роста и эволюции фрактальных кластеров, состоящих из связанных твердых частиц. Рассмотрены свойства фрактальных кластеров, представлены методы их диагностики и результаты экспериментальных исследований. Изучены аэро-гели и другие пористые вещества, составленные из фрактальных кластеров. Информация по фрактальным кластерам использована для анализа проблем шаровой молнии.

Для научных работников, аспирантов, студентов физических специальностей, интересующихся современными проблемами физики.

Табл. 16. Ил. 34. Библиогр. 350 назв.

Р е ц е н з е н т  
доктор физико-математических наук *Д.Д. Соколов*

C 1604030000-017 79-91  
053 (02)-91

ISBN 5-02-014629-3

© "Наука".  
Физматлит, 1991

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
§ 1. Введение . . . . .	5
§ 2. Фрактальные системы . . . . .	7
2.1. Фрактальная структура и фрактальная размерность (7). 2.2. Свойства геометрических фрактальных систем (11). 2.3. Фрактальные структуры в физических процессах и явлениях (15).	
§ 3. Объемный фрактальный кластер . . . . .	17
3.1. Моделирование роста (17). 3.2. Строение (24). 3.3. Оптические свойства (28). 3.4. Экспериментальные исследования (33). 3.5. Гидродинамические свойства и стабильность (38).	
§ 4. Поверхностный фрактальный кластер . . . . .	40
4.1. Экспериментальные исследования (40). 4.2. Шершавая поверхность как поверхностный фрактальный кластер (43). 4.3. Модели роста фрактального кластера на подложке (44). 4.4. Проекция фрактального кластера на плоскость (47).	
§ 5. Динамика роста и эволюция кластеров . . . . .	50
5.1. Скейлинг в процессе роста (50). 5.2. Времена образования кластеров с фрактальной структурой (57). 5.3. Особенности процесса роста (64).	
§ 6. Аналоги фрактальных кластеров . . . . .	67
6.1. Физические процессы, подобные процессу роста фрактального кластера (67). 6.2. Пористые вещества и фрактальные структуры (72).	
7. Аэрогели . . . . .	75
7.1. Аэрогель как физический объект (75). 7.2. Применение (79). 7.3. Получение (81). 7.4. Физические свойства (85).	
§ 8. Свойства шаровой молнии . . . . .	90
8.1. Наблюдательные свойства (90). 8.2. Структура (94). 8.3. Энергетика (96). 8.4. Излучательные свойства (101). 8.5. Теплообмен и газодинамика (109). 8.6. Электрические свойства (115). 8.7. Моделирование (119).	
Заключение . . . . .	123
Список литературы . . . . .	125
Побавление при корректуре. Фрактальные нити . . . . .	133

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Фрактальные системы образуют целый мир объектов и явлений, которые в отличие от непрерывных систем имеют рваную структуру. Природа дает нам больший набор процессов и объектов с фрактальной структурой. Мир этот широк и разнообразен. Его нельзя рассматривать в отрыве от истории изучения фрактальных систем. Если в математику концепция фрактальных систем вошла много десятков лет назад, то в физике ценность подобных идей была осознана лишь в 70-е годы нашего столетия. Использование этих концепций в физике привело к пониманию новой группы свойств неупорядоченных систем, дало дополнительную информацию о них, установило связи между, казалось бы, абсолютно разными физическими объектами и явлениями.

За короткое время в физике возник целый ряд новых направлений, включающих как исследование некоторых наборов физических систем, так и развитие эффективных методов их анализа. Одно из таких новых направлений связано с исследованием фрактальных кластеров. Фрактальные кластеры (или фрактальные агрегаты) составляют один из классов фрактальных объектов, образующихся при слипании движущихся по определенному закону твердых частиц. За фрактальным кластером стоит определенный класс физических процессов роста, протекающих в растворах и газах, содержащих твердые частицы (например, в дымах, туманах). Тем самым фрактальные кластеры вопреки своему емкому названию имеют отношение к весьма ограниченному, выделенному классу физических объектов и явлений. В то же время системы эти достаточно разнообразны и каждая из них имеет свои аналоги в различных областях физики.

Цель настоящей книги – познакомить читателя с новым классом физических объектов – фрактальными кластерами, дать анализ современной информации, относящейся к свойствам фрактальных кластеров и процессам, протекающим с их участием.

Основу изложения составляют обзоры автора [2, 3], относящиеся к 1986–1987 гг. Однако за последнее время наши представления о ряде проблем в этой области значительно углубились, получена достаточно большая дополнительная информация. В связи с этим появление монографии на эту тему можно считать вполне оправданным.

## § 1. Введение

Фрактальные системы, согласно своему определению, обладают размерностью, не совпадающей с размерностью пространства, в котором они существуют. Такое определение требует пояснения, и для этой цели мы используем следующий наглядный пример. Возьмем озеро. Ему сопоставим некоторый линейный размер — характерное расстояние между противоположными точками, и площадь поверхности озера пропорциональна квадрату этого линейного размера. Измерим периметр озера. Для этого проведем по его берегу ломаную линию с одной и той же длиной каждого звена так, что вершины ломаной находятся на границе раздела воды и суши. Полную длину ломаной будем считать периметром озера. Ясно, что по мере того, как мы будем увеличивать точность измерения, т.е. уменьшать длину звена ломаной, длина берега будет увеличиваться, ибо при этом увеличиваются неровности берега, не включенные при измерениях с более крупным масштабом. Таким образом, периметр озера зависит от масштаба измерения. Показатель, учитывающий связь между периметром озера и масштабом его измерения, характеризует нецелую размерность береговой линии.

Проанализируем данный пример с других позиций. Допустим, мы имеем последовательность озер, расположенных в порядке возрастания площади их водной поверхности. Пусть мы измеряем длину береговой линии каждого из этих озер одинаковым образом, например проходя по берегу шагами. Если бы береговая линия была гладкой, то ее длина в среднем оказалась бы пропорциональной корню квадратному из величины площади поверхности. Однако реальная, изрезанная форма береговой линии приведет к тому, что зависимость длины береговой линии озера от его площади окажется более резкой.

Приведенный пример позволяет получить представление о том, в чем состоит идея фрактальной системы. При анализе фрактальных систем математики и физики интересуются разными проблемами. Для математика представляют интерес принципиальные свойства таких систем, тогда как для физика важен в первую очередь сам конкретный физический объект и понимание его фрактальных свойств помогает более детально проанализировать свойства этого объекта.

Важную роль в распространении фрактальных идей в физике сыграла замечательная книга Мандельброта "Фрактали в природе" [1]. Эта книга показала красоту фрактальных свойств для разных симметричных геометрических систем, распространенность фрактальных систем в реальном

мире, наличие благодаря фрактальным свойствам некоторого скрытого порядка в беспорядочных системах. Однако при поверхностном анализе этих свойств возникает неправильное впечатление, что фрактальные свойства — это один из основных свойств физических объектов с фрактальной структурой. К сожалению, такой взгляд на вещи получил широкое распространение. При таком отношении возникает желание с единых позиций проанализировать разные объекты с фрактальной структурой. И поскольку фрактальные свойства являются их главными свойствами, эти объекты будут иметь близкую физическую природу.

Однако опыт исследования физических объектов с фрактальной структурой показывает ошибочность такого подхода. Понимание фрактальных свойств объекта помогает более глубоко понять природу физического объекта и более детально описать свойства этого объекта, но основу его природы составляют другие физические свойства. Поэтому разные классы физических объектов и явлений с фрактальной структурой различаются своей природой, и нет смысла анализировать их природу с единых позиций.

Предметом последующего анализа является один из физических объектов с фрактальной структурой, получивший название "фрактальный агрегат" или "фрактальный кластер". Такая система имеет рыхлую и ветвистую структуру и образуется в большом наборе физических процессов, сопровождающихся ассоциацией твердых частиц близких размеров. Эти процессы имеют место, в частности, при релаксации паров металлов, при образовании гелей в растворах, при коагуляции частиц в дымах. Такие процессы принято называть процессами роста.

Фрактальный кластер, или фрактальный агрегат, является одним из объектов с фрактальной структурой. Для сравнения рассмотрим другой физический объект с фрактальными свойствами — переколяционный кластер. Построим его следующим образом. Возьмем кристаллическую решетку и соединим линией те из ближайших ее узлов, между которыми осуществляется проводимость. Переколяционным кластером будем называть кластер, составленный из соединительных линий. Начиная с некоторой плотности вещества в переколяционном кластере, он становится бесконечным.

Одним из свойств фрактального кластера является то, что по мере его роста падает средняя плотность вещества в объеме, занимаемом кластером. Это связано с характером процесса образования такого кластера. Как видно, переколяционный и фрактальный кластеры отличаются по своей природе. В то время как плотность бесконечного переколяционного кластера должна превышать некоторую критическую величину, в случае фрактального кластера она может быть сколь угодно малой. Это различие является отражением разной физики данных объектов.

Представленный далее материал отражает современное состояние исследования фрактальных кластеров. В последнее десятилетие выполнены интенсивные исследования фрактальных кластеров методами вычислительной физики. Модельные вычислительные эксперименты позволили получить достаточно полное представление о таких структурах и характере их образования. Поскольку фрактальные кластеры представляют собой набор ряда типов конкретных физических систем, информация о них может быть получена и на основании прямых экспериментальных исследований. Однако теоретические исследования оказались намного

мобильнее, и основные экспериментальные исследования фрактальных кластеров были проведены вслед за моделированием соответствующих процессов вычислительными методами и с использованием полученных там результатов. Расширение представлений о фрактальных кластерах будет способствовать и последующему развитию экспериментальных исследований в этой области.

Если соединять большое число фрактальных кластеров, то получим кластер, который обладает фрактальными свойствами на малых размерах и однороден на больших размерах. Такими кластерами с фрактальной структурой являются пористые вещества, ибо их малые элементы являются фрактальными кластерами. Наиболее ярким представителем таких объектов является аэрогель — разреженное пористое вещество, составленное из твердых частиц нанометровых размеров. Поскольку малые элементы аэрогеля и других пористых веществ являются фрактальными кластерами, то исследование таких систем интересно и с точки зрения изучения фрактального кластера. Свойства аэрогеля будут рассмотрены в § 7.

Наряду с фрактальными кластерами представляет интерес целый ряд геометрических фрактальных систем, которые обладают подобными им свойствами. Сюда относятся: диэлектрический пробой; гидродинамические фрактальные системы, образующиеся при "неустойчивости вязкого пальца"; фигуры, формируемые при выделении вещества во время электролиза; пленки, получаемые при осаждении вещества на подложку из паровой или газовой фазы, а также при кристаллизации вещества на аморфной подложке, полимерные системы. Хотя каждая из этих систем имеет свою физическую природу, общие представления о геометрических фрактальных системах создают позиции, с которых можно проводить более глубокий анализ этих систем. Именно некоторые свойства этих систем и фрактального кластера управляются одинаковыми законами. Поэтому при анализе таких свойств можно опираться на модели, единые для всех перечисленных систем. Все это отвечает более высокому уровню проводимых исследований и более глубокому пониманию физической природы систем и явлений.

Кластеры с фрактальной структурой интересны в плане понимания природы шаровой молнии. Среди существующих в настоящее время гипотез о строении шаровой молнии способностью объяснить сферическую форму у шаровой молнии и сохранение ее размера в процессе эволюции об

лишь модель, согласно которой шаровая молния имеет жесткий каркас и фрактальную структуру. Следствия, вытекающие из фрактальной структуры шаровой молнии, существенны также и для понимания природы самой шаровой молнии. Все эти вопросы обсуждаются в § 8.

## § 2. Фрактальные системы

**2.1. Фрактальная структура и фрактальная размерность.** В соответствии с одним из свойств, составляющих основу определения фрактальных систем, фрактальная структура есть система с дробной размерностью. Такие системы стали объектом изучения в конце прошлого века; в физику же они впервые вошли относительно недавно, фактически лишь после выхода прекрасной монографии Мандельброта [1], привлекшей внимание

физиков к этим системам. Использование фрактальных представлений в физике оказалось плодотворным – им посвящен целый ряд обзоров, сборников статей, монографий (см., например, [2–19]). Здесь же основное внимание будет уделено одному из классов систем с фрактальной структурой – геометрическим фрактальным системам, состоящим из отдельных частиц. Такие системы называют фрактальными агрегатами или фрактальными кластерами; их свойства рассмотрены в многочисленной литературе (см., например, [2–5, 8, 9, 11–16] и т.д.).

Сначала дадим определение фрактальной размерности. Используем для этой цели пример, представленный в § 1, выбрав в качестве фрактальной системы непрерывную линию, являющуюся берегом реки, озера, моря (рис. 2.1). Измерим расстояние между двумя точками, аппроксимируя ее ломаной с одинаковыми размерами звеньев. По мере уменьшения звеньев длина ломаной, которая аппроксимирует рассматриваемую береговую линию, будет возрастать.

Представим длину ломаной линии в виде

$$L = a(R/a)^D, \quad (2.1)$$

где  $L$  – расстояние между концами линии по прямой,  $a$  – размер звена ломаной линии. Параметр  $D$  принято называть фрактальной размерностью линии. Из определения этой величины в соответствии с формулой (2.1) следует, что фрактальная размерность вводится в определенной области масштабов и характеризуется определенной погрешностью, при которой остается справедливой аппроксимация (2.1).

Значение фрактальной размерности непрерывной линии без узлов, которая случайным образом изрезана и аппроксимирует береговую линию реки, озера, моря, близко к 1,3 (см. рис. 2.1). Такая линия включает в себя разные масштабы случайным образом. Рассмотрим другой тип фрактальной линии, близкий по своей природе к рассмотренному. Построим проекцию облака на плоскость и исследуем кривую, которая ограничивает контур проекции облака. Можно придать этой картине физический смысл, если построить ее на основе данных по отражению электромагнитных сигналов от облаков. Такая кривая, построенная с помощью сигналов радиоэха, характеризуется значением фрактальной размерности, равной  $1,36 \pm 0,10$  [323, 324]. В пределах точности оно совпадает с фрактальной размерностью береговой линии, что свидетельствует о близкой к рассматриваемым линий. При этом пограничная линия конвективного облака имеет фрактальную структуру только для больших размеров, превышающих несколько километров. Дрейф под действием ветра заывает границу облака на малых размерах, и в этом пределе фрактальная размерность пограничной линии равна 1.

Другую природу имеет фрактальная линия, которая является траекторией броуновского движения частицы [20]. У этой линии нет гладких отрезков больших масштабов, в ней представлены только масштабы порядка длины свободного пробега частицы. Проанализируем траекторию броуновского движения частицы с точки зрения ее фрактальных свойств. Будем считать, что в процессе броуновского движения частица смещается за каждый шаг на одинаковое расстояние  $a$ , но направление движения в ка-

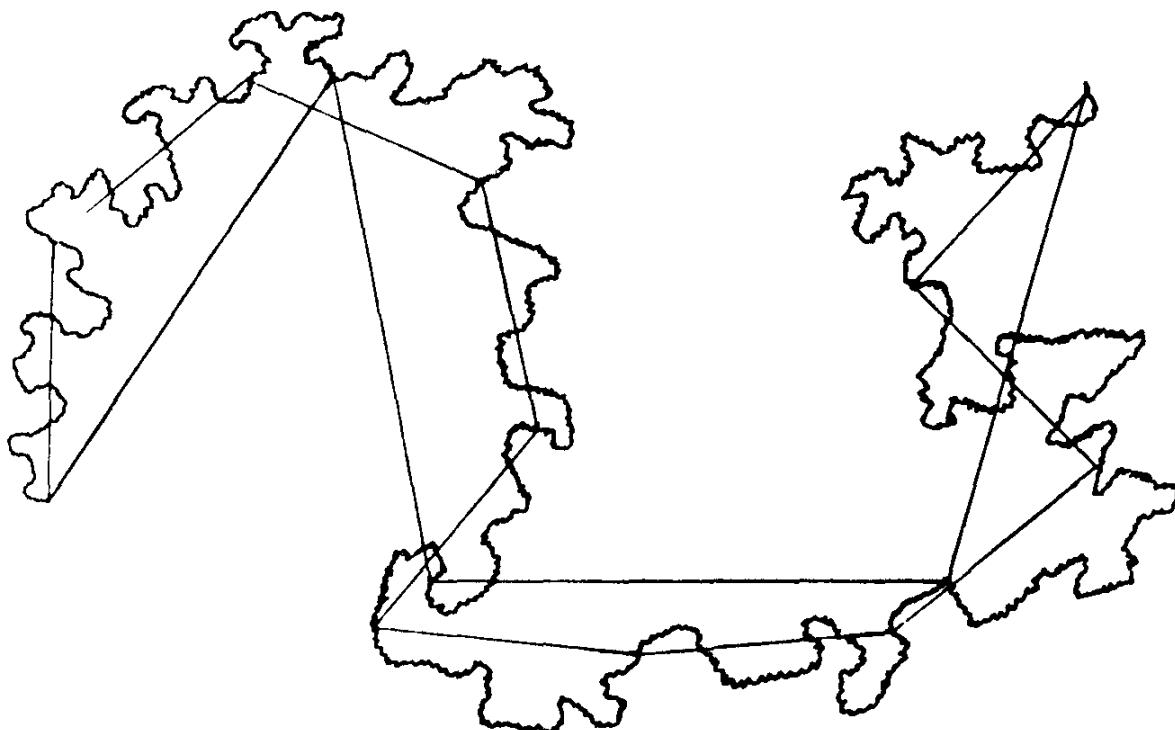


Рис. 2.1. Кривая с фрактальной структурой, не имеющая узлов. Такой вид имеет береговая линия реки, озера, моря. Показан способ измерения длины кривой, который основан на аппроксимации ее ломаной линией с одной и той же длиной отрезков.

Фрактальная размерность данной кривой в соответствии с формулой (2.1) равна  $1,3 \pm 0,1$

аге случайно. Тогда квадрат смещения частицы за большое число  $n$  шагов равен

$$R^2 = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^2 + \sum_{\substack{i, k=1 \\ i \neq k}}^n \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k = na^2 + \sum_{i \neq k} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го перемещения и было использовано условие  $\mathbf{r}_i = a$ . Так как направление каждого перемещения случайно, то второе слагаемое в среднем равно нулю. Отсюда получаем известную формулу броуновского движения  $R^2 = na^2$ . Вводя полную длину траектории частицы  $L = na$ , из предыдущей формулы получаем

$$L = a(R/a)^2, \quad (2.3)$$

т.е. фрактальная размерность траектории броуновского движения равна 2. Отметим, что этот результат не зависит от размерности пространства.

Примером симметричной фрактальной линии является фигура Коха (см. [1]). Для построения фигуры Коха берется отрезок прямой, который по определенному закону преобразуется в ломаную, состоящую из отрезков одинаковой длины. На рис. 2.2 представлены ряд примеров такого преобразования и соответствующая этому фрактальная размерность. Следующая операция состоит в преобразовании каждого из полученных отрезков в соответствии с тем же алгоритмом и характеризуется дроблением масштаба. Далее по тому же закону преобразуем каждый из новых отрезков, тем самым переходя к более мелкому масштабу. Эта операция может продолжаться многократно и создаст ажурную линию с мелкой структурой.

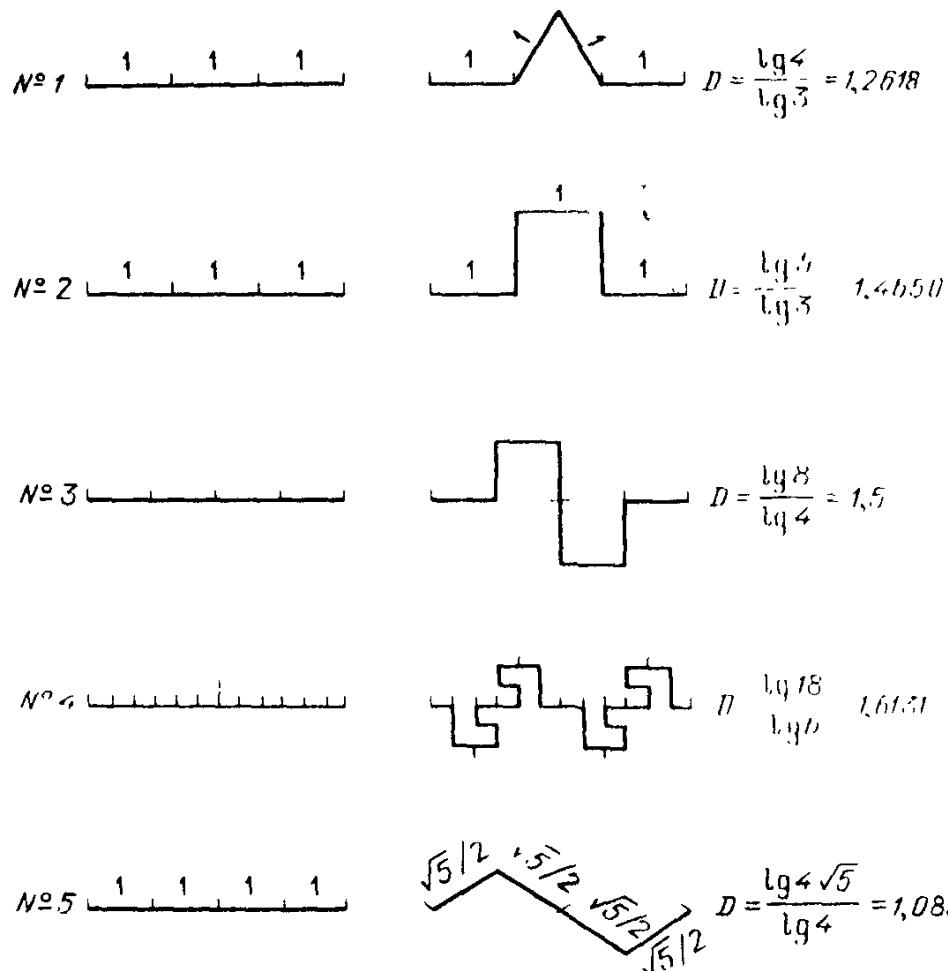


Рис. 2.2. Различные варианты алгоритмов преобразования отрезков при построении фигур Коха и соответствующая им фрактальная размерность.

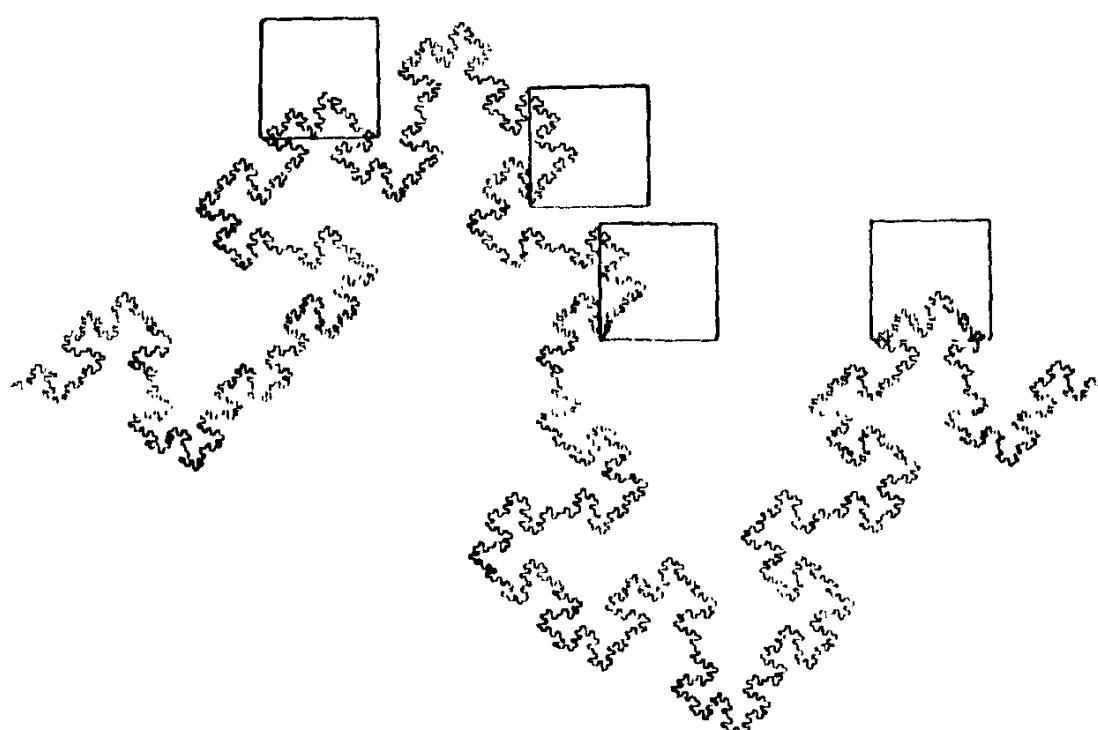


Рис. 2.3. Фигура Коха, полученная в результате четырехкратного преобразования отрезка на основе алгоритма, отвечающего варианту № 3 (см. рис. 2.2).

Внутри каждого квадрата заключены одинаковые куски клюстера

Пример такой линии при четырехкратном преобразовании отрезка приведен на рис. 2.3. В соответствии с выбранным алгоритмом каждая операция соответствует выбору масштаба, который в четыре раза меньше предыдущего, и после преобразования из одного отрезка образуется восемь. После четырехкратного преобразования на рис. 2.3 происходит увеличение длины ломаной в  $2^4 = 16$  раз, а масштаб уменьшается в  $4^4 = 256$  раз.

Рассмотренные линии с фрактальной размерностью представляют собой один из примеров геометрических фрактальных систем. Темой данной книги является фрактальный агрегат или фрактальный кластер \*). Такой физический объект представляет собой набор макроскопических частиц, так что между соседними частицами, которые касаются друг друга, существует жесткая связь, а сам объект имеет рыхлую и ветвистую структуру. При этом, если выделить объем, занимаемый фрактальным кластером, основная часть его будет находиться на пустоты.

**2.2. Свойства геометрических фрактальных систем.** Фрактальные кластеры обладают общими свойствами фрактальных систем, которые удобно продемонстрировать на примере ломаной фрактальной линии, составленной из проволоки с элементами одинаковой длины. Для этого возьмем проволоку, разобьем ее на большое число одинаковых участков длиной  $a$  и пронумеруем эти участки. Построим из проволоки фигуру Коха. Введем корреляционную функцию

$$C(r) = \frac{1}{N} \sum_i \rho(r_i) \rho(r_i + r) = \frac{\langle \rho(r') \rho(r' + r) \rangle}{\langle \rho(r') \rangle}, \quad (2.4)$$

где  $N$  – число участков,  $i$  – номер участка,  $\rho$  – плотность, значение которой равно единице в занятой точке и нулю в точке, не занятой проволокой. В дальнейшем при рассмотрении кластера участки проволоки мы заменим частицами, из которых он составлен.

Если немного нарушить правильную структуру фигуры Коха и провести усреднение в формуле (2.4) по направлениям вектора  $r$ , то корреляционная функция будет соответствовать средней плотности проволоки на расстоянии  $r$  от занятых точек. Поскольку масса проволоки в сфере радиуса  $r$ , проведенной из занятой точки ( $r \gg a$ ), пропорциональна  $r^D$ , то средняя плотность на этом расстоянии пропорциональна  $r^{D-d}$  (здесь  $d$  – размерность пространства, в которое помещена проволока). Таким образом, корреляционная функция имеет вид

$$C(r) = \text{const}/r^\alpha, \quad (2.5)$$

причем  $r$  много больше длины минимальной структуры линии и

$$D_\alpha = d - \alpha. \quad (2.6)$$

Перейдем к исследуемому фрактальному кластеру. Он состоит из набора "склеенных" частиц, размеры которых (или размер ячеек, в кото-

\*) Отметим, что кластером (от англ. *cluster* – гвоздь) принято называть систему большого числа связанных атомов или молекул, которые внутри этой системы сохраняют свою индивидуальность. В последнее время этот термин распространяется и на системы, состоящие из большого числа связанных макроскопических частиц.

рых они находятся) значительно меньше размеров кластера. Такой кластер представляет собой набор ветвистых связанных линий (рис. 2.4), минимальный масштаб структуры которых порядка размера частицы  $a$ . Поэтому в области размеров

$$R \gg r \gg a, \quad (2.7)$$

где  $R$  – размер кластера, корреляционная функция (2.4) кластера удовлетворяет соотношению (2.5). На рис. 2.5 приведена корреляционная функция фрактального кластера, который построен на основе модели агрегации, ограниченной диффузией (или модели Виттена–Сандера [21], о которой пойдет речь ниже). Как видно, эта функция удовлетворяет условию (2.5) в некоторой области расстояний, что свидетельствует о принадлежности рассматриваемого кластера к фрактальным системам.

Корреляционную функцию (2.4) можно рассматривать как среднюю плотность кластера на расстоянии  $r$  от некоторой точки кластера. Если вокруг произвольной точки кластера провести сферу радиуса  $r$ , то на основе формулы (2.3) найдем, что средняя плотность материала кластера внутри этой сферы дается зависимостью

$$\rho(r) = \text{const}/r^\alpha. \quad (2.8)$$

Отсюда получаем следующую связь между размером кластера\*)  $R$  и числом частиц в нем  $N$  (или массой кластера):

$$N \sim R^{D_\beta}, \quad R \sim N^\beta, \quad \beta = 1/D_\beta, \quad (2.9)$$

причем введенная таким образом фрактальная размерность  $D_\beta$  должна совпадать с величиной  $D_\alpha$ , введенной на основании формулы (2.6). Отметим, что в качестве  $R$  может быть выбран размер фигуры заданной формы, которая вырезает кусок кластера (например, радиус сферы). Тогда  $N$  является числом частиц кластера, находящихся внутри этой фигуры, или же массой вырезанного куска кластера.

Из формулы (2.5) следует важное свойство фрактальной системы – свойство самоподобия. Оно формулируется следующим образом. Если в окрестности точки, занятой кластером, выделить область относительно небольшого объема, то попадающие в нее участки кластера будут подобными в физическом смысле этого слова. Именно для кластера правильной формы по этому закону можно выделить одинаковые участки. В подтверждение этого на рис. 2.3 выделено несколько областей – квадратов, в которых находятся одинаковые куски кластера. Для кластера со случайным расположением частиц свойство самоподобия следует понимать статистически: если в разных частях кластера мы вырежем большое число кусков, находящихся в одинаковом объеме, то в среднем они будут содержать одинаковое число частиц. Такое утверждение следует непосредственно из соотношений (2.4) и (2.5), если мы их применим к отдельным частям кластера.

\*) Часто в качестве параметра размера кластера используют радиус гирации  $R_g$ . Он вводится соотношением  $R_g = (\langle R^2 \rangle)^{1/2}$ , где  $R$  – расстояние от рассматриваемой точки кластера до его центра масс, угловые скобки означают усреднение по распределению частиц в кластере.

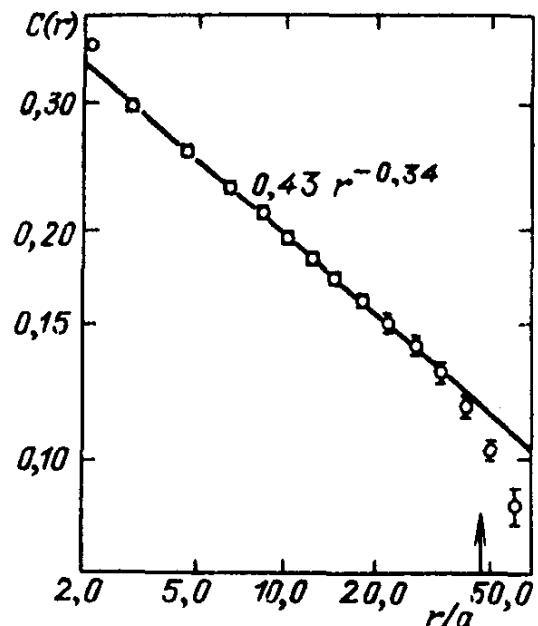


Рис. 2.4 Гипотетический фрактальный кластер, полученный в компьютерном эксперименте при стимулировании процесса ассоциации твердых частиц в рамках модели Виттена–Сандера [21].

Рис. 2.5 Корреляционная функция (2.4), усредненная по шести кластерам, которые получены в рамках модели Виттена–Сандера [21].

Величины выражены в единицах постоянной решетки, стрелка указывает положение среднего радиуса гирации, а пределы ошибки отвечают средней статистической величине ошибки для шести кластеров.

Отметим, что свойство самоподобия фрактального кластера находится в кажущемся противоречии с вытекающим из формулы (2.5) утверждением, что по мере роста размеров кластера средняя плотность частиц в нем падает в соответствии с законом (2.8). При более внимательном рассмотрении это противоречие устраняется. Действительно, по мере роста размеров кластера увеличиваются объемы пустот. Пустоты больших размеров, не влияющие на среднюю плотность частиц в небольшом занятом объеме кластера, вносят существенный вклад в его среднюю плотность.

Существенно, что фрактальный кластер, построенный по случайному закону и поэтому выглядящий как неупорядоченная система, все же имеет внутренний порядок. Параметром, характеризующим этот порядок, является фрактальная размерность кластера. Понимание этого факта дает экспериментаторам возможность более детально исследовать такие системы, что подтверждается опытом последних лет.

Как следует из полученных ранее формул, фрактальная размерность кластера может быть найдена двумя способами – на основе корреляционной функции из соотношения (2.5), а также на основе формул (2.9) по числу частиц, содержащихся в кластерах разных размеров или же в отдельных частях кластера разного размера. Поскольку соотношения (2.5) и (2.9) справедливы в среднем, их использование для реальной системы дает результат с некоторой погрешностью, причем эти два способа приведут к несколько различающимся результатам.

Для демонстрации этого мы приведем результат определения таким образом фрактальной размерности кластера, представленного на рис. 2.6.

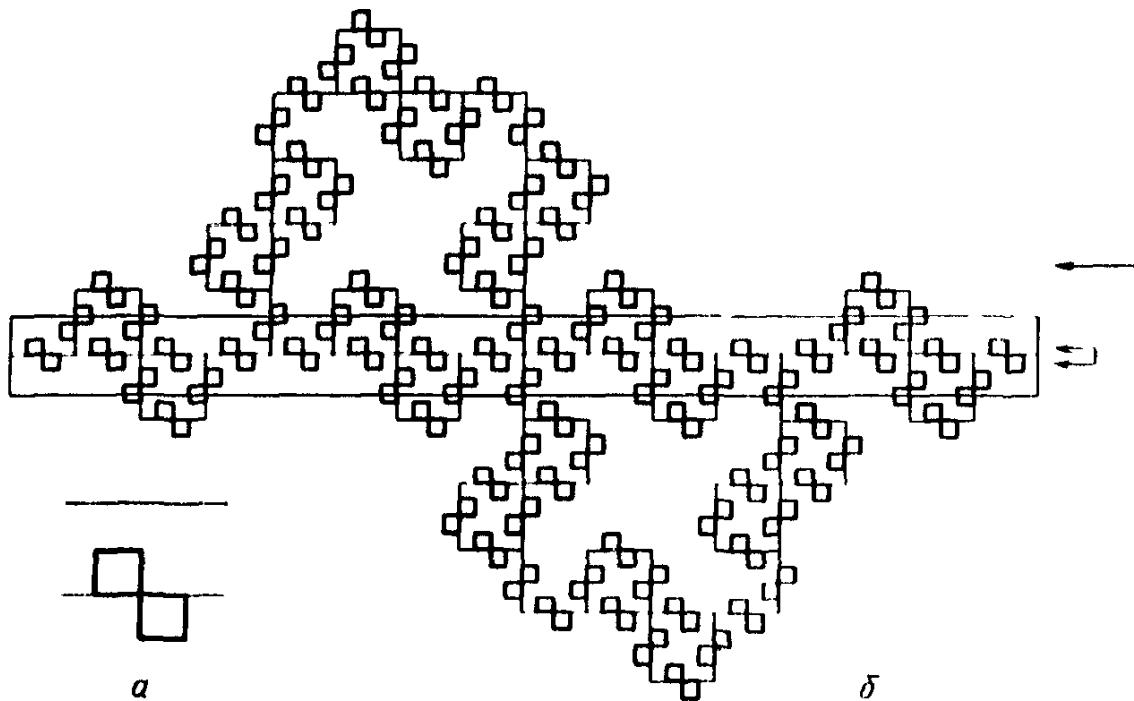
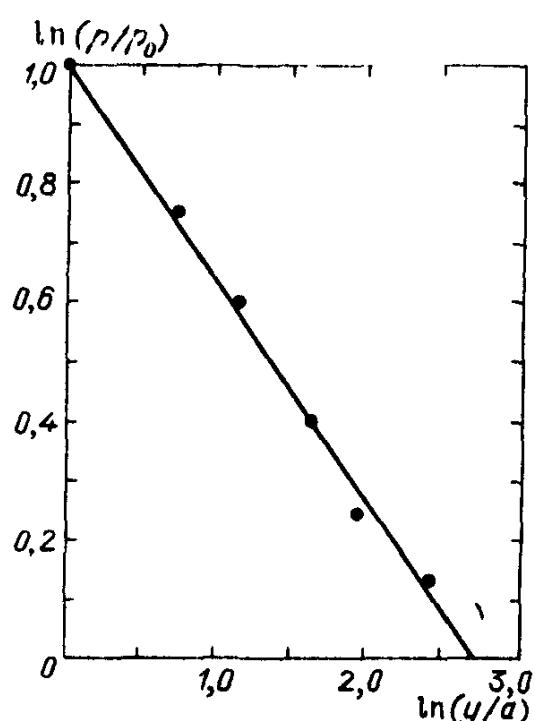


Рис. 2.6. Фигура Коха с фрактальной размерностью  $D = 1,66$ , близкой к фрактальной размерности двумерного кластера в модели Виттена-Сандера [21]. а – алгоритм преобразования отрезка, б – фигура Коха, получаемая после трехкратного преобразования отрезка в соответствии с этим алгоритмом.

Стрелками отмечена область поперечного размера прямоугольников, с помощью которых вырезаются куски кластера для определения его фрактальной размерности с помощью формулы (2.7). Один из таких прямоугольников показан на рисунке

Рис. 2.7. Зависимость плотности куска кластера, представленного на рис. 2.6, который попадает в прямоугольник, от ширины прямоугольника.

Плотность куска кластера  $\rho$  – отношение полной длины куска кластера в прямоугольнике к площади прямоугольника – дана в произвольных единицах; ширина прямоугольника  $y$  – в единицах минимального масштаба; точка – результат обработки по указанному алгоритму. Линия соответствует фрактальной размерности кластера, равной 1,64



Его фрактальная размерность в соответствии с формулой (2.1) равна  $D = \ln 10 / \ln 4 = 1,66$  (специально подобран кластер, фрактальная размерность которого близка к соответствующему параметру кластера, полученному в рамках модели Виттена–Сандера). Очевидно, если алгоритм рис. 2.6, а применить к выделенному отрезку многократно, а затем рассмотреть большое число участков кластера, занимающих в пространстве разные площади, то с учетом формулы (2.9) найдем фрактальную размерность, близкую к искомой. В рассматриваемом случае мы получаем

клuster после трехкратного преобразования прямого отрезка в соответствии с алгоритмом рис. 2.6, а.

Далее мы сравниваем длину той части, которая находится внутри прямоугольников, одна сторона которых параллельна первоначальному отрезку, а длина совпадает с длиной этого отрезка. Результаты обработки по формуле (2.9) представлены на рис. 2.7. Статистическая обработка этих данных дает для фрактальной размерности значение  $D = 1,64$  со статической погрешностью  $6 \cdot 10^{-4}$ . Как видно, расхождение с точным значением фрактальной размерности несколько превышает 1 %. Того же масштаба погрешности возникают при анализе конкретных моделей современными вычислительными способами (см. ниже табл. 3.1 и 3.2).

**2.3. Фрактальные структуры в физических системах и явлениях.** Понятие о фрактальной структуре, а также физические представления, относящиеся к фрактальным системам, могут быть полезными при анализе различных физических объектов и явлений, где такие структуры реализуются. Например, фрактальные представления упрощают анализ турбулентного движения жидкости или газа [22–28]. В частности, корреляционная функция для удельной энергии, перерабатываемой в вихрях, имеет вид, аналогичный корреляционной функции (2.4):

$$\langle \epsilon(r')\epsilon(r' + r) \rangle = \epsilon^2(l_0/r)^{d-D}. \quad (2.10)$$

Здесь  $\epsilon$  – средняя энергия жидкости или газа, приходящаяся на единицу массы и перерабатываемая в единицу времени, причем  $l_d \ll r \ll l_0$ , где  $l_d$  – размер, на котором происходит диссипация энергии, а размер  $l_0$  ответствен за перемешивание газа. В формуле (2.10)  $d$  – размерность пространства. Анализ показывает, что в трехмерном пространстве фрактальная размерность, входящая в формулу (2.10), равна  $D = 2,50 \div 2,75$ . При этом фрактальные представления удобны не только при анализе перехода энергии от одних масштабов к другим. Они также позволяют построить простую физическую картину турбулентности, включающую пространственное распределение флюктуации для скорости и давления [22–28].

Другой круг физических задач, где фрактальные представления занимают заметное место, относится к процессам протекания. Перколяционный характер, обеспечивающий проводимость системы или другие переносные свойства, обладает фрактальными свойствами [7, 10, 29–33]. При анализе процессов протекания на перколяционном кластере возникают специфические задачи, отвечающие процессам переноса на фрактальных системах. По этой причине, несмотря на близость перколяционного кластера к фрактальному кластеру, по своим физическим задачам направление, связанное с исследованием процессов протекания, во многом отлично от физики фрактальных кластеров.

Наоборот, имеется целый ряд других фрактальных систем, которые мы считаем родственными фрактальному кластеру, хотя внешнее различие между ними может быть существеннее, чем между фрактальным и перколяционным кластерами. Это родство определяется аналогиями в процессах формирования таких кластеров, которые могут быть описаны в рамках сходных моделей. Далее мы более подробно проанализируем такие системы, а сейчас перечислим их. Сюда относятся диэлектрический

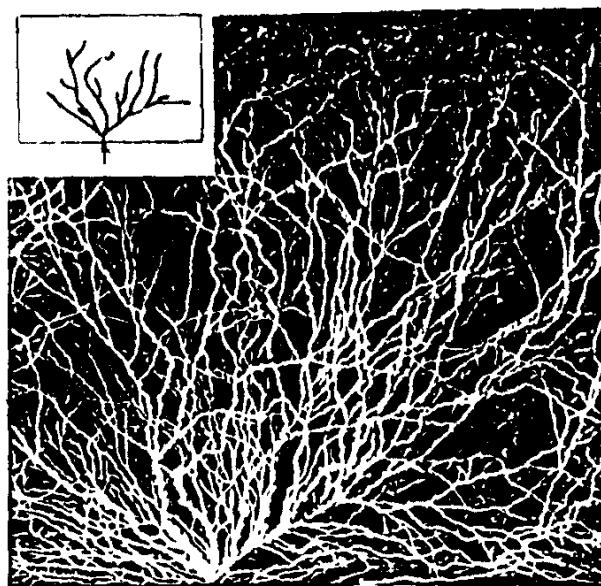


Рис. 2.8. Структура сечения при электрическом пробое на поверхности диэлектрика [37]

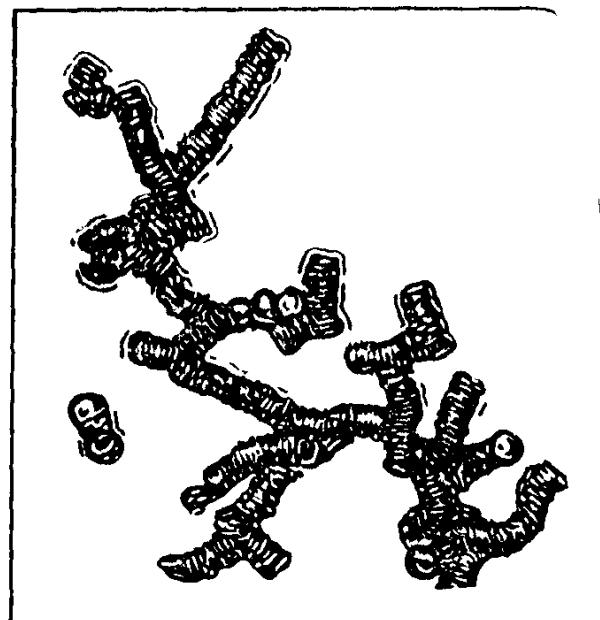


Рис. 2.9. Структура столбика эритроцитов, образующегося в суспензии крови при слипании красных кровяных телец [35]

пробой [37–39] (рис. 2.8) и гидродинамические структуры, возникающие при неустойчивости вязкого пальца [36, 41–43], а также при протоке активной жидкости через растворимую пористую среду [176] и при развитии механических разрушений в результате эволюции трещин в тонких пленках [33, 34] и т.д.

Наряду с указанными выше системами и явлениями фрактальные кластеры имеют аналоги и с другими системами и процессами. На рис. 2.9 приведен один из примеров [35] фрактальных структур, наблюдавшихся в мире живого. Фрактальной структурой обладают также полимеры и пористые вещества.

Особое внимание привлекают фрактальные свойства пористых веществ [45–51]. По сути дела пористое тело является большим кластером, составленным из фрактальных кластеров. Действительно, если из него вырезать малые элементы, то они будут фрактальными кластерами. Функции распределения по размерам пор в пористом веществе определяется формулой (2.5). Как видно, характеристикой пористого вещества является не его пористость, которая в большой степени связана с размером пор, а фрактальная размерность вещества, отвечающая распределению по порам. Как это следует из анализа данных по адсорбционным свойствам отдельных пористых веществ, полный удельный размер поглощающей поверхности как функция размера поглощаемой молекулы может быть представлен в виде формулы, отвечающей фрактальной системе [39].

В природе существует много физических объектов, имеющих фрактальную структуру, а также наблюдаются физические явления, которые удобно анализировать с точки зрения фрактальных представлений. При анализе таких систем и явлений полезной оказывается информация, от-

и сяящаяся к фрактальным кластерам как к одной из систем фрактального типа. И наоборот, анализ других фрактальных систем позволяет получить более полную физическую картину фрактального кластера.

### § 3. Объемный фрактальный кластер

**3.1. Моделирование роста.** Фрактальный кластер образуется в результате слипания твердых частиц. Этот процесс может протекать при разных условиях, что отражается на свойствах образуемого кластера. Совокупность разных физических условий, при которых происходит рост кластера, составляет основу моделей, используемых для анализа процесса роста кластера и его свойств. Компьютерные модели, использующие определенные алгоритмы для описания движения и слипания твердых частиц и кластеров в процессе роста фрактального кластера, позволяют сконструировать фрактальный кластер и проанализировать как его свойства, так и характер роста.

Исследования фрактальных кластеров, проведенные за последние годы с помощью компьютерных методов, составляют основу наших представлений об этих объектах. Такие исследования, кроме того, продемонстрировали и возможности современных численных методов в физике. С одной стороны, используемые модели с варьированием отдельных параметров позволяют правильно аппроксимировать характер образования фрактальных кластеров. С другой стороны, они воссоздают готовый объект со всеми его особенностями, что позволяет производить всесторонний анализ такого объекта и путем сравнения выяснить, какие его свойства являются универсальными. Тем самым компьютерное моделирование процесса образования фрактальных кластеров формирует наше современное представление об этом объекте. Далее мы представим информацию о фрактальном кластере, полученную из анализа компьютерных экспериментов.

Существующие модели сборки фрактального кластера в зависимости от физических условий, при которых она протекает, можно разделить по следующим свойствам:

- 1) характер процесса (кластер – частица или кластер – кластер);
- 2) характер движения частиц или кластеров (прямолинейное или броуновское);
- 3) характер объединения частиц или кластеров в зависимости от вероятности слипания при их соприкосновении.

Характер процесса зависит от реальных физических условий. В некоторых случаях процесс роста кластера происходит в результате присоединения к нему отдельных частиц, в других случаях на первой стадии процесса имеется много частиц, которые объединяются в малые кластеры, а те в свою очередь – в большие кластеры. Так в конечном итоге собирается фрактальный кластер. При этом его компактность и физические свойства зависят как от характера движения частиц и кластеров в пространстве, так и от вероятности слипания частиц и кластеров при их соприкосновении.

Исторически первая компьютерная модель для описания сборки кластера была предложена Виттеном и Сандером в 1981 г. [21] и была названа DLA-моделью (Diffusion Limited Aggregation). В этой модели предполагается, что частицы, совершающие броуновское движение в пространстве,

соприкасаясь с кластером, с определенной вероятностью прилипают к нему. Таким способом осуществляется рост кластера. Эта модель позволяет описать эволюцию кластера и проследить за деталями его роста. Модель Виттена – Сандера сыграла важную роль в исследовании фрактальных кластеров, ибо она предложила простой способ сборки кластера. Создание этой модели привлекло внимание к процессу формирования и роста фрактальных кластеров и послужило началом всестороннему моделированию этих процессов и созданию новых моделей и алгоритмов.

В простейшей постановке в двумерном пространстве модель Виттена – Сандера [21] может быть описана следующим образом. Рассмотрим ограниченное двумерное пространство на множество квадратных ячеек, поместим в него одну частицу и будем добавлять по одной частице. Каждая новая частица передвигается в соседнюю клетку случайным образом – ее путь выбирается методом Монте-Карло. Если частица достигла границы пространства, то она отражается от нее. Движение частицы продолжается до тех пор, пока она не окажется по соседству с одной из частиц кластера. Тогда она останавливается и закрепляется в данной ячейке, а в пространство запускается следующая частица. Таким способом "выращивается" фрактальный кластер. Модель Виттена – Сандера сыграла важную роль в исследовании фрактальных кластеров, ибо она дала простой способ создания фрактального кластера. С появлением модели Виттена – Сандера началось широкое изучение таких структур, которое в течение относительно небольшого промежутка времени позволило создать четкое физическое представление об этих системах.

Алгоритм рассматриваемой модели может быть изменен. Например, можно отказаться от деления пространства на ячейки и рассматривать каждую частицу как диск в двумерном пространстве или шар в трехмерном пространстве, задав траекторию движения частицы в виде ломаной линии. Столкновение частицы с частицей кластера с определенной вероятностью приводит к их склеиванию. Тогда пробная частица закрепляется на кластере в соответствующем положении и в пространство запускается следующая частица. Этот вариант DLA-модели называется нерешеточной моделью [53], тогда как модель Виттена – Сандера называется решеточной DLA-моделью. Анализ показывает, что в исследованных случаях результаты данных моделей совпадают в пределах их точности.

Физические условия, принципиально отличающиеся от случая DLA-модели, отвечают ССА-модели (Cluster–Cluster Aggregation) [54, 55]. В этом случае на начальной стадии в рассматриваемой области пространства находятся частицы, которые, двигаясь по определенным траекториям, сталкиваются друг с другом и слипаются в кластеры. На первой стадии процесса образуется большое число кластеров малых размеров, которые далее объединяются в кластеры больших размеров. Со временем число кластеров в пространстве будет падать, а их размеры расти. Ясно, что в этом случае образуются более рыхлые кластеры, чем в рамках DLA-модели, ибо при таком способе сборки кластера труднее заполнить пустоты.

В рассмотренных моделях предполагалось, что соприкосновение частиц ведет к их слипанию с вероятностью порядка единицы. Другая физическая ситуация отвечает случаю, когда вероятность слипания при касании частиц мала. Тогда при кластер-кластерной агрегации кластеры глубже проникают

друг в друга и в результате этого образуется более компактный кластер. Модель, отвечающая малой вероятности слияния при кластер-кластерной агрегации, называется RLCA-моделью (Reaction Limited Cluster Aggregation) [56, 57]. Заметим, что в этом предельном случае параметры образующегося кластера не чувствительны к характеру движения ассоциирующих кластеров.

При анализе первых двух моделей мы считали, что ассоциирующие частицы совершают диффузионное движение в пространстве, т.е. длина пробега частиц мала по сравнению с характерными размерами области, ответственной за рост кластера. Физически возможна и другая ситуация, когда длина пробега частицы велика по сравнению с размерами области прилипания. Тогда изменение модели сводится к замене траектории движения на прямолинейную, а сам образуемый кластер становится в этом случае более компактным. Такая модель в случае прилипания частицы к кластеру имеет более давнюю историю (см. [58–60]) и называется моделью Эдена или баллистической моделью\*).

Результаты исследования фрактальных кластеров для перечисленных способов их образования представлены в табл. 3.1 и 3.2. Эти результаты получены при обработке расчетов, основанных на соответствующих моделях. Указанные в таблицах погрешности представляют собой статистические погрешности, полученные при анализе сформированных кластеров. Как видно, эта погрешность, как и в случае рис. 2.7, составляет несколько процентов. В табл. 3.3 приводятся средние значения фрактальных размерностей кластеров, которые получены на основе данных табл. 3.1 и 3.2 и отвечают вероятности прилипания  $P = 1$ . Погрешность в значениях, приведенных в табл. 3.3, характеризует совпадение результатов разных работ, содержащихся в табл. 3.1 и 3.2. Фрактальные кластеры как геометрические системы, образуемые при ассоциации твердых частиц, должны реализовываться при ассоциации аэрозолей в газе (образование кластеров при релаксации металлического пара и осаждения его на поверхности, образование облаков и туманов, коагуляция аэрозолей в дыме), а также при образовании кластеров из частиц, находящихся в суспензиях и коллоидных растворах. К этим проблемам рассматриваемые структуры имеют непосредственное отношение. Однако этим не исчерпывается круг проблем, где представления о фрактальных структурах могут быть полезны. Ниже рис. 3.1 и 3.2 демонстрируют структуры, которые имеют аналогии с фрактальными кластерами.

В рассмотренных выше моделях отражены основные черты процесса роста фрактального кластера. Они описывают предельные физические ситуации. Некоторые предельные случаи могут быть объединены в рамках одной модели. Например, в работе [51] описана модель роста кластера, которая объединяет ССА- и RLCA-модели. Эта модель необратимого процесса роста кластера строится путем модификации ССА-модели в результате введения энергии  $E$  связи между частицами. Тогда в за-

\*.) В представленном беглом описании существующих моделей сборки кластеров мы разделили эти модели по их принципиальным особенностям, не останавливаясь на отдельных деталях модели, используемых при реализации модели в конкретных работах.

Таблица 3

Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации твердых частиц в динамическом пространстве

Модель агрегации	Вероятность прилипания $P$	Фрактальная размерность кластера	
		$D_\alpha$	$D_\beta$
Прямолинейная траектория, кластер-частица	1	$1.92 \pm 0.10$ [61, 62] $1.99 \pm 0.01$ [63] $2.00 \pm 0.02$ [64]	$1.95 \pm 0.02$ [61, 62]
Броуновское движение, кластер-частица	1	$1.657 \pm 0.004$ [21] $1.68 \pm 0.07$ [53] $1.68 \pm 0.05$ [65] $1.65 \pm 0.02$ [66] $1.63$ [67]	$1.70 \pm 0.02$ [21] $1.68 \pm 0.04$ [53] $1.69 \pm 0.05$ [65] $1.71 \pm 0.04$ [64] $1.660 \pm 0.004$ [68] $1.71$ [69, 70]
	0,25	$1.71 \pm 0.05$ [53] $1.74 \pm 0.03$ [53] $1.70 \pm 0.03$ [53] $1.73 \pm 0.03$ [65]	$1.73 \pm 0.04$ [53] $1.73 \pm 0.05$ [65] $1.73 \pm 0.06$ [71] $1.71 \pm 0.06$ [65] $1.78 \pm 0.06$ [71] $1.69 \pm 0.06$ [71]
		Захват на четырех диаметрах частицы	
Прямолинейная траектория, кластер-кластер	1	$1.55 \pm 0.02$ [72] $1.54 \pm 0.03$ [73]	$1.50 \pm 0.05$ [72] $1.56 \pm 0.02$ [72]
Броуновское движение, кластер – кластер	1	$1.48 \pm 0.03$ [54] $1.39 \pm 0.05$ [55] $1.48 \pm 0.02$ [72] $1.46 \pm 0.02$ [73] *) $1.479 \pm 0.017$ [74] *)	$1.45 \pm 0.05$ [54] $1.37 \pm 0.08$ [55] $1.42 \pm 0.03$ [75, 76] $1.44 \pm 0.02$ [72] $1.44 \pm 0.01$ [73] *) $1.442 \pm 0.014$ [74] *)
	0,1	$1.45 \pm 0.04$ [73]	$1.46 \pm 0.03$ [73]
Кластер – кластер (RLCA-модель)	$P \rightarrow 0$	–	$1.53 \pm 0.04$ [77] $1.53 \pm 0.01$ [78] $1.59 \pm 0.01$ [78] **) $1.54$ [86] $1.60$ [86] **)

\*) Усреднено не нескольким моделям.

\*\*) Для полидисперской смеси.

Таблица 3.2

Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации частиц в трехмерном пространстве

Модель агрегации	Вероятность прилипания $P$	Фрактальная размерность кластера	
		$D_\alpha$	$D_\beta$
Прямолинейная траектория, кластер – частица	1	–	$2,97 \pm 0,08$ [61] 3,0 [64]
Броуновское движение, кластер – частица	1	$2,49 \pm 0,06$ [65] $2,45 \pm 0,2$ [73, 79] $2,39 \pm 0,2$ [79] $2,39 \pm 0,19$ [80]	$2,51 \pm 0,06$ [65] $2,54 \pm 0,02$ [64] $2,45 \pm 0,10$ [79] $2,49 \pm 0,19$ [81]
	0,25	–	$2,48 \pm 0,12$ [65]
Прямолинейная траектория, кластер – кластер	1	$1,95 \pm 0,05$ [72] $1,98 \pm 0,04$ [72]	$1,81 \pm 0,03$ [72] $2,00 \pm 0,05$ [72]
Броуновское движение, кластер – кластер	1	$1,8 \pm 0,1$ [82] $1,76 \pm 0,08$ [61] $1,83 \pm 0,05$ [61]	$1,75 \pm 0,5$ [72] $1,72 \pm 0,10$ [84] $1,78 \pm 0,05$ [76, 82] $1,76 \pm 0,05$ [61] $1,72 \pm 0,10$ [83]
Кластер – кластер	$P \rightarrow 0$	–	$1,98 \pm 0,04$ [77] $1,98 \pm 0,02$ [78] $2,0 \pm 0,08$ [85] $2,11 \pm 0,03$ [78] *) $2,00$ [86] $2,11$ [86] *)

\*) Для полидисперсной смеси.

Висимости от соотношения между характерным временем броуновского движения и временем разрыва связи между частицами изменяется характерная вероятность слипания частиц. Это отражается на структуре образующего кластера. Изменением указанного отношения времен можно перейти от ССА-модели ( $E \rightarrow \infty$ ) к RLCA-модели.

Удобство компьютерного моделирования процесса образования фрактального кластера связано с возможностью включения в модель различных деталей процесса. Это позволяет выяснить чувствительность структуры образуемой системы к различным факторам, имеющим место в реальной ситуации. Ранее (см. табл. 3.1 и 3.2) выяснилась зависимость фрактальной размерности от вероятности слипания частиц при взаимном касании: чем

Таблица 3.

**Фрактальная размерность кластера, образующегося при ассоциации твердых частиц**

Модель агрегации	Размерность пространства	
	2	3
Прямолинейная траектория, кластер – частица	2	3
Броуновское движение, кластер – частица	$1,68 \pm 0,02$	$2,46 \pm 0,05$
Прямолинейная траектория, кластер – кластер	$1,54 \pm 0,03$	$1,94 \pm 0,08$
Броуновское движение, кластер – кластер	$1,44 \pm 0,04$	$1,77 \pm 0,03$
Кластер – кластер, малая вероятность прилипания (RLCA-модель)	$1,55 \pm 0,03$ $1,60 \pm 0,01^*)$	$2,02 \pm 0,06$ $2,11 \pm 0,02^*)$

\*) Для полидисперсной смеси.

меньше вероятность прилипания, тем глубже может проникать частица внутрь кластера (в модели Виттена – Сандера) и тем выше фрактальная размерность образуемого кластера. Однако расчеты показывают (см. табл. 3.1 и 3.2, а также [76, 85]), что эта зависимость довольно слабая. Другой фактор, влияющий на структуру образуемого кластера, – вращательная диффузия кластера. Увеличение вращательной диффузии кластера приводит к захвату частицы или кластера краями кластера и поэтому способствует уменьшению фрактальной размерности образуемого кластера. Влияние вращательной диффузии на структуру кластера при ассоциации кластер – частица при кластер-кластерной ассоциации исследовалось в работе [111].

Структура кластера, образуемого при кластер-кластерной ассоциации, может зависеть от того, как скорость диффузии кластеров изменяется с изменением размеров. В работе [74] были выполнены расчеты кластер-кластерной ассоциации с разными предположениями о законах зависимости коэффициента диффузии от их массы. Фрактальные размеры кластеров вычисленные при этом, совпадают в пределах точности результатов.

В реальной ситуации рассмотренные модельные предположения могут быть дополнены определенными условиями, которые отражаются как на характере роста кластера, так и на его свойствах. Эти разные условия, при которых протекает процесс роста кластера, могут быть изучены на усло-

ненных моделях. В частности, один из элементов рассмотренных выше моделей кластер-кластерной агрегации сводился к тому, что объединение кластеров осуществлялось при их слиянии в одной точке. Микин и Джульен [110] исследовали другой способ сцепления кластеров, который они назвали реструктурингом. В этом случае первый контакт кластеров является нежестким и жесткие кластеры могут поворачиваться вокруг точки контакта до следующего контакта. Далее возможно вращение вокруг оси, проходящей через две точки контакта, пока кластеры не окажутся связанными в трех точках. Тогда возникает жесткая связь между кластерами.

Реструктуринг приводит к образованию более компактного кластера, характеризующегося и более высокими значениями фрактальной размерности. В случае кластер-кластерной агрегации фрактальная размерность кластера в отсутствие реструктуринга (т.е. когда слипание кластеров происходит в одной точке) согласно [110] равна  $D_\beta = 1,80$  (см. табл. 3.2 и 3.3); при наличии полного реструктуринга (т.е. в конечном состоянии кластеры связываются в трех точках) эта величина равна 2,19. Для баллистической модели агрегации значения этих величин равны соответственно 1,95 и 2,19, а в случае RLCA-модели роста кластеров они составляют 2,09 и 2,24.

В рассмотренные выше модели могут быть введены разные предположения о характере происходящих при этом процессов. Например, в случае кластер-кластерной агрегации будем считать, что образуемая при слиянии частиц связь может вращаться или с определенной вероятностью распасться. Тогда для образования устойчивой связи необходимо соприкосновение кластеров по крайней мере в двух точках. (По сути дела это соответствует настичному учету реструктуринга.) Расчеты показывают [112], что при таких условиях на малых расстояниях образуется более компактный кластер, содержащий большое число петель. Однако на больших расстояниях такой кластер характеризуется тем же значением фрактальной размерности, что и в отсутствие рассматриваемых эффектов.

В представленных выше моделях полагалось, что основу кластера составляют частицы с изотропными параметрами. Возможны, однако, и такие физические условия процесса роста кластера, при которых изотропия объединяемых частиц или кластеров нарушается. Это имеет место, например, при агрегации частиц или кластеров с наведенным электрическим диполем во внешнем электрическом поле, частиц или кластеров с наведенным магнитным моментом во внешнем магнитном поле, для некоторых процессов полимеризации и т.д. Модель агрегации ориентированных анизотропных частиц рассматривалась в работах [84, 260, 261, 333–335], результаты которых свидетельствуют о том, что в этом случае нет принципиальных различий по сравнению со случаем изотропных частиц.

При анализе моделей, описывающих процесс роста фрактального кластера, мы выделили основные режимы агрегации, отвечающие баллистической модели и DLA-, CCA- и RLCA-моделям. Эти основные модели включают в себя и основные физические условия, при которых протекает реальный процесс. Ясно, что в реальных ситуациях могут возникнуть и дополнительные физические особенности процесса, которые иногда в состоянии качественно изменить его. Эти особенности находят отражение в соответ-

ствующих моделях, которые могут принципиально отличаться от указанных ранее основных моделей. Однако в силу меньшей распространенности таких режимов мы их не выделяем.

Ранее был рассмотрен ряд моделей агрегации, которые являлись модификациями основных моделей и были получены из них путем введения дополнительных элементов или условий. Далее представим еще одну модель такого рода [325, 326]. В этой модели вводится конечное время жизни химической связи, так что новая частица может прилипнуть к частице кластера лишь в случае, когда эта частица находится в составе кластера некоторое ограниченное время. При таких условиях повышается относительная вероятность прилипания частицы к концам кластера, т.е. фрактальная размерность кластера понижается. При этом фрактальная размерность большого кластера в двумерном случае равна 1,04 [325], т.е. такой кластер по своей структуре ближе к гладкой кривой, чем к разветвленному DLA-кластеру.

Обобщение этой модели для двумерного случая дается в работе [326]. Предполагается, что лишь часть связей имеет конечное время жизни. Результат сводится к тому, что если эта часть меньше половины, то образуется DLA-кластер; если же она больше половины, то образуемый кластер отвечает предыдущей модели.

Таким образом, моделирование процесса образования фрактального кластера в компьютерном эксперименте позволяет выяснить влияние различных факторов на его структуру, что в свою очередь позволяет получить достаточно полное представление о его возможных структурах в реальной ситуации. Успех в исследовании структуры фрактальных кластеров связан с возможностями современной вычислительной техники, которые позволяют создавать такие объекты в памяти вычислительной машины на основе соответствующих алгоритмов. Искомые параметры фрактальных кластеров получаются прямой обработкой характеристик полученных объектов, а погрешности при найденных значениях этих параметров определяются статистикой результатов. Опыт проведенных исследований свидетельствует о том, что современная вычислительная техника дает погрешности при определении фрактальной размерности образуемых кластеров, равную 1–2%. Тем самым рассматриваемая задача надежно решается "в лоб", и поэтому при ее анализе меньшего интереса заслуживают приближенные аналитические методы, ибо достоверность полученного на их основе результата проблематична. В связи с этим ниже мы не будем останавливаться на аналитических методах нахождения фрактальной размерности кластеров.

**3.2. Строение.** Характер процесса сборки фрактального кластера отражается на структуре и свойствах образуемого кластера. Связь между ними удобно проследить на примере кластера, который формируется в рамках DLA-модели. В этом случае ассоциирующие частицы, двигаясь от периферии кластера к его центру, зацепляются за остов и тем самым прикрепляются к нему. При этом диффузионный характер движения частицы способствует продвижению вглубь по широкой области, что повышает вероятность связывания частицы с кластером из периферийной части кластера. Данный процесс удобно рассмотреть, введя так называемую глубину проникновения новой частицы внутри кластера. Рассмотрим данную задачу на языке глубины проникновения частицы.

Введем функцию  $P(r, R)$  – вероятность того, что рассматриваемая пробная частица прикрепляется к кластеру размером  $R$  на расстоянии  $r$  от центра. Если глубина проникновения частицы внутри кластера  $\Delta r$  значительно меньше размера кластера, то эту величину удобно аппроксимировать зависимостью [64]

$$P(r, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta r} \exp \left[ -\frac{(R - r)^2}{2\Delta r^2} \right]; \quad (3.1)$$

здесь использовано условие нормировки для вероятности

$$\int_0^R P(r, R) dr = 1.$$

При этом выбрано наиболее простое выражение для искомой функции, которое удовлетворяет физическим требованиям задачи.

Формула (3.1) дает вполне определенное выражение для средней плотности частиц в кластере на его внешней стороне. Именно из формулы (3.1) с учетом малой глубины проникновения по сравнению с размером кластера имеем для средней плотности частиц в кластере вблизи его края

$$\rho = \rho(r_0) \Phi \left( -\frac{R - r_0}{\sqrt{2} \Delta r} \right), \quad (3.2)$$

где  $\rho(r_0)$  – средняя плотность частиц в кластере вблизи края, но там, где то формирование закончено, т.е. при  $R \gg R - r_0 \gg \Delta r$ ;  $\Phi(x)$  – интеграл вероятности, так что  $\Phi(x \leq 1) = 2x/\sqrt{\pi}$  и  $\Phi(\infty) = 1$ .

Объединяя формулы (2.6) и (3.2) для средней плотности частиц в кластере, получаем

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^\alpha \Phi \left( -\frac{R - r}{\sqrt{2} \Delta r} \right). \quad (3.3)$$

Отсюда находим для полного числа частиц в кластере, учитывая, что  $\Delta r \ll R$ ,

$$N = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \rho_0 r_0^\alpha \frac{R^D}{D} \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} D \frac{\Delta r}{R} \right); \quad (3.4)$$

здесь  $D = d - \alpha$  есть фрактальная размерность кластера и выражение для плотности состояний относится к трехмерному случаю ( $d = 3$ ), хотя с точностью до постоянного множителя полученное выражение годится для кластера в пространстве произвольной размерности.

Проведенный анализ позволяет проанализировать точность способа восстановления фрактальной размерности кластера  $D_\beta$  в том случае, когда для этой цели используется соотношение (2.9) между размером кластера и числом частиц в нем (или его массой). Действительно, согласно формуле (3.4) имеем

$$\frac{dN}{N} = D \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta r}{R} \right) \frac{dR}{R}. \quad (3.5)$$

В пределе  $\Delta r/R \rightarrow 0$  из этого соотношения можно получить фрактальную

размерность кластера. Реально оно дает несколько завышенное значение для этой величины

$$D_\beta = D \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta r}{R} \right). \quad (3.6)$$

Как видно, погрешность определения фрактальной размерности указанным методом будет порядка  $\Delta r/R$ , и поскольку эта погрешность не должна превышать нескольких процентов, то для анализа фрактальной размерности требуются кластеры больших размеров. Такое же требование возникает и при построении корреляционной функции (2.4), ибо кластеры малых размеров отвечают большие флуктуации в распределении плотности материала частиц.

Оценим зависимость глубины проникновения частицы  $\Delta r$  при соединении с кластером от параметров задачи. Поскольку частица совершает броуновское движение, то  $\Delta r^2 \sim \mathcal{D}t$ , где  $\mathcal{D}$  – коэффициент диффузии частицы, а  $t$  – ее время жизни внутри кластера. При этом  $\mathcal{D} \sim v\lambda$ . Здесь  $v$  – характерная скорость частицы,  $\lambda$  – длина свободного пробега частицы, т.е. длина, на которой изменяется ее направление движения; в рассматриваемом случае  $\lambda$  порядка размера отдельной ячейки, т.е. порядка размера частицы. Далее,  $\lambda/t \sim \rho v \sigma$ , где  $\rho$  – средняя плотность частиц, и сечение прилипания  $\sigma$  не зависит от  $R$ . Учитывая, что в основной области кластер  $\rho \sim R^d/N$  (где  $d$  – размерность пространства), получаем отсюда

$$\Delta r \sim R^{\frac{d-D}{2}} \sim N^{\frac{d-D}{2D}}. \quad (3.7)$$

Вводя параметр  $\nu$  на основе соотношения

$$\Delta r \sim N^\nu, \quad (3.8)$$

находим с учетом формулы (3.7) в двумерном и трехмерном случаях (см. табл. 3.1 и 3.2)  $\nu \approx 0,1$ . Этот результат расходится с результатами прямого анализа характера роста кластера в рамках модели Виттена – Сандера даёт в двумерном случае  $\nu = 0,48 \pm 0,01$  [63], в трехмерном случае  $\nu = 0,32 \pm 0,05$  [87]. Причина расхождения состоит в том, что при вычислении вероятности прилипания пробной частицы к кластеру мы приняли, что частицы кластера случайным образом распределены в пространстве. Как видно, это предположение неверно. Ветвистая структура кластера позволяет ассоциируемым частицам гораздо глубже проникать в кластер, нежели в случае, если бы частицы кластера были случайным образом распределены в пространстве с соответствующей средней плотностью.

Как следует из приведенных результатов, с ростом фрактального кластера глубина зоны проникновения частиц растет медленнее, чем его размер. Действительно, в приведенных расчетах отношение показателя роста глубины проникновения  $\nu$  к показателю роста размера кластера  $D_\beta$  с увеличением числа частиц в нем составляет  $p = \nu D_\beta = 0,82 \pm 0,04$  в двумерном случае и  $p = 0,80 \pm 0,14$  в трехмерном случае. В работе [87] утверждается, что отношение этих показателей стремится к единице для большого кластера. Увеличение на порядок величины числа частиц в кластере (до 50 000 частиц) приводит для данного соотношения в двумерном случае к значению  $p = 0,93 \pm 0,01$  [87].

Отметим еще одну особенность DLA-кластера. Введем функцию распределения  $P_s(R)$ , которая определяет вероятность того, что кластер размером  $R$  включает в себя  $s$  частиц (или имеет соответствующую массу). Тогда было бы можно ожидать, что  $\langle s^n \rangle \sim \langle s \rangle^n \sim R^{nD}$ .

Оказывается [256–258], что для DLA-кластера такое соотношение не выполняется; это свидетельствует о больших флуктуациях параметров кластера на границе и требует для описания его граничной области дополнительной информации. В случае же ССА-кластера [250] флуктуации на границе не столь существенны. Функция распределения  $P_s(R)$  для ССА-кластера экспоненциально убывает при больших  $s$ , что допускает простой скейлинг для моментов  $\langle s^n \rangle$ .

Детальные исследования других свойств DLA-кластера также показали сложный характер его структуры. Было установлено [88, 89], что зависимости от расстояния корреляционной функции (2.4) для DLA-кластера в радиальном и тангенциальном направлениях разные (неоднородность двумерного DLA-кластера исследовалась в работе [90]). Эти факты свидетельствуют об анизотропном характере роста фрактального кластера.

Анизотропия DLA-кластера существенна на первой стадии процесса его роста [81, 91]. Действительно, на первой стадии его сборки новые частицы присоединяются с большой вероятностью к концам кластера, что приводит к усилению анизотропии кластера. Однако, когда кластер становится большим, т.е. глубина проникновения частиц становится меньше его размеров, кластер растет равномерно в разные стороны. Тем самым анизотропия кластера пропадает по мере его роста.

Несферичность кластера, образованного в модели Виттена – Сандера, подробно исследована в работе [81]. Путем диагонализации тензора плотности определялись главные оси кластера  $x, y, z$ . Наиболее сильно анизотропия роста проявляется в кластере, образуемом в двумерном пространстве. Например, отношение размеров кластера в направлении главных осей для двумерного кластера, содержащего 200 частиц, составляет

$$R_x/R_y = 0,69 \pm 0,13,$$

а для кластера, состоящего из 50 000 частиц,

$$R_x/R_y = 0,78 \pm 0,07.$$

Соответствующие фрактальные размерности для кластера из 2000 частиц равны

$$D_x = 1,61 \pm 0,05, \quad D_y = 1,80 \pm 0,06,$$

а для 50 000 частиц

$$D_x = 1,69 \pm 0,03, \quad D_y = 1,75 \pm 0,03.$$

Видно, что по мере роста кластера нарушение его сферической симметрии уменьшается. Несферичность трехмерного фрактального кластера менее заметна. Так, для кластера Виттена–Сандера, содержащего 12 500 частиц,  $D_x = 2,36 \pm 0,19$ ,  $D_y = 2,54 \pm 0,19$ ,  $D_z = 2,58 \pm 0,20$  [81], т.е. фрактальные размерности совпадают с точностью до соответствующих им погрешностей. Следует отметить, что в случае анизотропного потенциала взаимодействия между соседними частицами в кластере, а следовательно, и анизотропного закона слипания частиц при сборке кластера и в пределе

большого числа частиц кластер оказывается существенно анизотропным [92].

Одной из особенностей реальных моделей роста DLA-кластера является зависимость его структуры от свойств подложки, на которой производится его сборка. Болл и Брэди [93] обнаружили, что характер роста и число его ветвей – "рук" зависит от симметрии подложки, на которой прорастает кластер. Далее, небольшая степень аксиальной симметрии вводимая в модель, вызывает усиленное прорастание шеек в выделенном направлении [92]. При этом длина шейки  $l$  растет скорее, чем ее ширина  $w$ . Если зависимости этих величин от массы кластера  $M$  представить в виде  $l \sim M^{\nu_{\parallel}}$ ,  $w \sim M^{\nu_{\perp}}$ , то показатели этих зависимостей в двухмерном случае в пределе больших масс кластера равны соответственно [92]  $\nu_{\parallel} = 2/3$ ,  $\nu_{\perp} = 1/3$ . В работе [70] найдено, что эти величины зависят от структуры решетки, на которой собирается кластер, от параметра анизотропии и параметра беспорядка в выбранной модели. В пределе большой массы кластера параметр  $\nu_{\parallel}$  находится в пределах 0,585–0,610, а значение параметра  $\nu_{\perp}$  с ростом массы кластера спадает примерно до 0,48.

Свойства подложки, на которой собирается кластер (или особенности пространства в используемой математической модели), проявляются тем сильнее, чем больше размер кластера или чем в большей степени подавлены флуктуации в процессе роста кластера. Чтобы полнее выделить особенности такого кластера, была разработана модель агрегации, ограниченной диффузией, с низкими шумами (noise-reduced DLA). Эта модель анализируется в работах [94, 336–340]. В частности, в работе [338] показано, что параметры кластера, прорастающего на двумерной квадратной ячейке, равны  $\nu_{\parallel} = 0,65$ ,  $\nu_{\perp} = 0,61$ .

Интересной информацией о фрактальном кластере является найденное в работе [56] среднее координационное число, которое представляет собой среднее число ближайших соседей у входящих в состав кластера частиц. Это среднее координационное число получено для случая, когда кластер образуется в результате прилипания к искуму последовательно по одной частице, каждая из которых совершает диффузионное движение в пространстве. Для вероятности прилипания частицы, равной единице, среднее координационное число составляет  $2,202 \pm 0,017$  для двумерного пространства и  $2,251 \pm 0,006$  для трехмерного пространства. Для вероятности прилипания  $P = 0,25$  в трехмерном пространстве среднее координационное число равно  $2,514 \pm 0,018$ . Эта величина слабо зависит от деталей модели. В случае единичной вероятности прилипания в двумерном пространстве среднее координационное число равно  $2,191 \pm 0,007$  для решеточной модели и  $2,216 \pm 0,019$  для нерешеточной модели. Полученные значения свидетельствуют о том, что очередное ветвление в рассматриваемых кластерах происходит в среднем через каждые четыре–пять частиц.

**3.3. Оптические свойства.** Взаимодействие излучения с фрактальным кластером интересно как с точки зрения оптических свойств фрактального кластера, так и в плане его диагностики, которая основана главным образом на исследовании рассеяния на малые углы для рентгеновского и нейтронного излучений. Остановимся сначала на второй проблеме.

Точные методики измерения фрактальной размерности фрактальных объектов основаны на анализе рассеяния на малые углы для рентгеновско-

и нейтронного излучений, направленных на исследуемые объекты. При этом имеют место два предельных случая для рассеяния излучения на объектах, которые соответствуют разным измеряемым параметрам объекта. В первом случае объект прозрачен, и излучение свободно проходит через него. Пусть изменение волнового вектора при рассеянии излучения на рассматриваемых угол равно  $q$ , причем  $qR \ll 1$ , где  $R$  – размер объекта. Интенсивность излучения, рассеянного на малый угол, определяется формулой

$$I(q) \sim \int r^2 C(r) \frac{\sin qr}{qr} dr,$$

где  $C(r)$  – корреляционная функция (см. (2.4)). Для фрактального кластера с фрактальной размерностью  $D$  на основании формул (2.5) и (2.6) имеем (см. [96–98])

$$I(q) \sim q^{-D}. \quad (3.9)$$

Физический смысл этого результата состоит в том, что рассеянное излучение с волновым вектором  $q$  "чувствует" структуры размера порядка  $1/q$ . На порах такого размера происходит наиболее эффективное рассеяние, что и отражено в проделанных выкладках.

Другой предельный случай отвечает непрозрачному рассеиваемому объекту, так что рассеяние происходит в поверхностных областях мишени. Если приповерхностный слой имеет фрактальную структуру, то когерентное рассеяние дает информацию о ней. Следует отметить, что в этом случае имеется и некогерентное рассеяние от образца, которое может быть сильнее когерентного рассеяния, но не содержит резкой зависимости от угла рассеяния при малых углах. Интенсивность рассеянного излучения в зависимости от изменения волнового вектора  $q$  при рассеянии имеет вид (см. [98–100])

$$I(q) = A/q^{6-D_S} + B. \quad (3.10)$$

Здесь  $A$  и  $B$  – константы,  $D_S$  – фрактальная размерность поверхностного слоя объекта, которая определяется на основании зависимости  $S \sim R^{D_S}$ , где  $S$  – площадь поверхности,  $R$  – размер объекта.

Из представленных формул видно, что измерение зависимости интенсивности рассеянного излучения от углового вектора рассеяния позволяет понять, какой области объекта соответствует информация по рассеянию. В случае, если значение показателя  $\alpha = -d \ln I(q) / d \ln q$  находится в пределах 3–4, то за рассеяние ответственна поверхностная область объекта, и результаты измерений позволяют найти фрактальную размерность поверхности:  $D_S = 6 - \alpha$  (для трехмерного объекта  $2 < D_S < 3$ ). В случае, если  $\alpha < 3$ , рассеяние обусловлено всем объемом объекта, фрактальная размерность которого равна  $D = \alpha$ .

Рассмотрим еще один метод диагностики фрактального кластера, осуществляемый на основе измерений в оптической и прилегающих к ней областях спектра. В этом случае имеет место уширение спектральной линии рассеянного света в результате движений кластера. Проанализируем этот эффект. Электрическое поле испускаемой электромагнитной

волны равно

$$E = E_0 \exp[iq(x - z) - i\omega t]; \quad (3.11)$$

здесь  $E_0$  – амплитуда электромагнитной волны,  $q$  и  $\omega$  – ее волновой вектор и частота соответственно,  $x$  – координата пространства,  $z$  – координаты кластера,  $t$  – время. Это выражение следует усреднить по положению кластера. Введем вероятность  $W(z, t)$  того, что кластер находится в точке  $z$  в момент времени  $t$ . Поскольку кластер совершает диффузионное движение, эта вероятность удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

( $\mathcal{D}$  – коэффициент диффузии кластера). Усреднение поля электромагнитной волны по положению излучающего кластера дает

$$E(x, t) = E_0 \exp(iqx - i\omega t) f(t),$$

где

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iqz) W(z, t) dz$$

и условие нормировки вероятности имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(z, t) dz = 1, \text{ т.е. } f(0) = 1.$$

Как видно, искомая функция  $f(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{df}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqz} \frac{dW}{dt} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqz} \mathcal{D} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} dz = -\mathcal{D} q^2 f.$$

Здесь последний интеграл взят по частям и использовалось, что при  $z \rightarrow \pm \infty$   $W(z, t) \rightarrow 0$ . Отсюда, учитывая, что  $f(0) = 1$ , получаем

$$f(t) = \exp(-\mathcal{D} q^2 t). \quad (3.13)$$

Введем корреляционную функцию

$$g(t) = \langle E(0) E^*(t) \rangle / \langle E(0) E^*(0) \rangle,$$

где  $E$  берется в заданной точке пространства и угловые скобки означают усреднение по разным моментам времени. Эта корреляционная функция равна

$$g(t) = f(t) = \exp(-\mathcal{D} q^2 t). \quad (3.14)$$

Таким образом, получаем, что диффузионное движение кластера приводит к уширению спектральной линии для рассеянной им электромагнитной волны, причем ширина спектральной линии равна  $\Gamma = \mathcal{D} q^2$ . Тем самым исследование уширения спектральной линии позволяет найти коэффициент диффузии кластера, который взаимодействует с излучением.

Полученные соотношения справедливы, если за время, в течение которого формируется излучение, кластер много раз успевает изменить

направление движения, т.е.

$$\Gamma \tau_{\phi} \ll 1, \quad (3.15)$$

где  $\tau_{\phi}$  – характерное время изменения направления движения. Эта величина дается оценкой  $\tau_{\phi} \sim \lambda_{\text{eff}}/v$ , где  $\lambda_{\text{eff}}$  – эффективная длина свободного пробега кластера, т.е. длина пути, на котором он изменяет направление движения,  $v$  – тепловая скорость кластера. Поскольку коэффициент диффузии кластера  $\mathcal{D}$  пропорционален произведению  $\lambda_{\text{eff}} v$ , то условие (3.15) имеет вид

$$\lambda_{\text{eff}} q \ll 1. \quad (3.16)$$

Таким образом, формула (3.14) справедлива при условии, когда длина свободного пробега кластера мала по сравнению с длиной волны излучения. Поэтому полученный результат относится к длинноволновому излучению и случаю, когда исследуемый кластер находится в плотной среде, например в растворе. Как правило, в качестве источника излучения для таких измерений используется лазер, излучающий в оптической и прилегающей к ней инфракрасной областях спектра. Измерение коэффициента диффузии позволяет определить гидродинамический радиус кластера, что дает возможность исследовать рост и эволюцию кластера (см. [101–103]).

Отметим, что формула (3.14) получена в предположении, что кластер изотропен и не вращается. Если это предположение не выполняется, то картина рассеяния окажется более сложной, ибо наряду с трансляционной диффузией определенный вклад в рассеяние может вносить и вращательная диффузия. В работах [109, 349] рассматриваемый метод рассеяния света был расширен и позволил выяснить роль вращательной диффузии рассеяния. В этих работах исследовались кластеры, состоящие из частиц лота радиусом 7,5 нм. Измерения проводились для разных значений параметра  $qR_g$ , где  $R_g$  – радиус гирации кластера. Если  $qR_g \ll 1$ , то анизотропия кластера не отражается на рассеянии света и ширина линии Г выражается через трансляционный коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  в соответствии с формулой (3.14):  $\Gamma = \mathcal{D}q^2$ . В другом предельном случае, а именно  $qR_g \gg 1$ , в рассеяние света будут вносить вклад и случайные повороты кластера, если он не является изотропным. Поэтому в формуле (3.14) вместо трансляционного коэффициента диффузии следует использовать сумму, состоящую из трансляционного и эффективного вращательного коэффициентов диффузии. Согласно данным рассматриваемых работ отношение  $\Gamma/\mathcal{D}q^2$  при больших значениях параметра  $qR_g$  равно 1,8 (при малых значениях этого параметра оно равно единице).

Взаимодействие излучения с фрактальным кластером представляет интерес в случае, когда длина волны излучения велика по сравнению с размерами частиц, из которых составлен кластер:

$$qr_0 \ll 1. \quad (3.17)$$

Это взаимодействие определяет свойства кластера в области размеров порядка  $1/q$ , в которой находится много частиц. Так как структура кластера в этой области известна, можно построить теорию рассеяния света, основываясь на его взаимодействии с отдельной частицей. Такая концеп-

ция составляет основу теории по взаимодействию излучения с фрактальными системами.

В работах [104, 105, 262, 263] разработана теория взаимодействия излучения с фрактальным кластером в случае, когда каждая из частиц входящих в его состав, обладает свойствами диполя, что определяет суммарный эффект. Ясно, что если парида с условием (3.17) выполнится условие  $qR \gg 1$ , где  $R$  – размер кластера, то суммарный эффект не зависит от размера кластера и определяется внутренними областями, включающим в себя большое число частиц. Таким способом были исследованы разные процессы при взаимодействии излучения с фрактальным кластером. При этом рассматриваемое приближение отвечает резонансному взаимодействию излучения с каждой из частиц.

Противоположный предельный случай слабого нерезонансного взаимодействия электромагнитного поля с отдельной частицей был рассмотрен Бэрри и Персивалем [106]. Основной вклад в сечение рассеяния излучения на отдельной частице вносит  $s$ -рассеяние и из-за интерференционных эффектов, приводящих к сложению амплитуд рассеяния. Сечение рассеяния излучения на кластере, деленное на число частиц в нем, может сильно преувеличить сечение рассеяния излучения на отдельной частице. Сечение рассеяния излучения на кластере, отнесенное к отдельной частице кластера, зависит от размера кластера и его фрактальной размерности. Сечение поглощения нерезонансного излучения кластером является суммой сечений поглощения для отдельных частиц.

В силу интерференционных явлений фрактальный кластер может быть эффективным поглотителем излучения для длины волны, сравнимых с его размерами. Этот факт используется при нанесении покрытий на приемники инфракрасного излучения. Такие покрытия изготавливаются путем испарения металла и осаждения его на поверхность. Осаджение имеет место в форме частиц, и эти частицы образуют фрактальный кластер на поверхности. Такие покрытия сильно поглощают в далекой инфракрасной области спектра (см., например, [107, 108]).

Наиболее интересные оптические свойства фрактальных кластеров могут быть связаны с нелинейными оптическими процессами. Действительно, фрактальный кластер является набором случайно расположенных самостоятельных элементов, причем корреляции в конфигурации этих элементов определяют взаимодействие системы с фотонами. Поскольку конфигурация частиц в кластере не меняется в процессе взаимодействия с фотонами, то корреляция в их расположении проявляется тем сильнее, чем больше фотонов участвует в элементарном акте излучательного процесса. По этой причине нелинейные эффекты при взаимодействии излучения с фрактальными кластерами будут существенно сильнее, чем с газовыми или конденсированными средами [104, 105, 262, 263]. Так, в работе [264] исследовалось параметрическое рассеяние света с длиной волны 532 нм на фрактальных кластерах, образуемых в коллоидном растворе серебра. По результатам измерений делается вывод, что коэффициент преобразования четырехфотонного вынужденного параметрического рассеяния света возрастает на пять-шесть порядков величины после объединения частиц серебра в фрактальные кластеры. Подобный результат получен в работе [85], авторы которой наблюдали увеличение на восемь порядков

величины для интенсивности излучения на второй гармонике при превращении находящихся в растворе частиц серебра в кластеры.

Другой интересный факт обнаружен в работе [256] и связан с выжиганием провала в спектре поглощения кластеров серебра под действием лазерного излучения. Время жизни этого провала тем больше, чем выше вязкость среды, в которой находится кластер. В частности, для желатиновой матрицы провал сохраняется сутками. Интересно, что провал относится к свету строго определенной поляризации, и существует пороговая энергия лазерного излучения, которая приводит к образованию провала. Судя по представленным данным, выжигание провала связано с разрушением связей или конфигураций фрактального кластера, ответственных за поглощение фотонов данной длины волны и поляризации.

Как видно, фрактальный кластер обладает интересными свойствами в плане взаимодействия с излучением. Можно ожидать, что представленная информация является началом таких исследований, и в будущем можно рассчитывать на новые результаты, интересные как в научном, так и в прикладном аспекте.

**3.4. Экспериментальные исследования.** Как указывалось ранее, основная информация по фрактальным кластерам была получена на основе математического моделирования процессов образования фрактальных кластеров и анализа образующихся при этом структур. В этом случае роль эксперимента состоит в понимании реальности таких структур и их свойств. Далее будут представлены результаты, относящиеся к получению и исследованию фрактальных кластеров небольших размеров. При этом следует отметить, что историю изучения фрактальных кластеров следует начинать с эксперимента Фореста и Виттена [113], где исследовались структуры, образуемые при релаксации паров испаренного материала.

Анализируя полученные с помощью электронного микроскопа фотографии агрегатов частиц, которые образуются после релаксации испаренного материала, авторы указанной работы открыли фрактальную структуру этих агрегатов. Фотография обычного кластера (рис. 3.1) охватывала площадь в несколько квадратных микрометров и включала часть кластера, в которой находилось большое число частиц. Разбив эту фотографию на ячейки с помощью сетки, авторы считали ее либо пустой, либо полностью заполненной в зависимости от степени заполнения соответствующей ячейки. Такая информация о фотографии (в виде нулей или единиц) вводилась в компьютер и в таком виде там обрабатывалась. Фрактальная размерность кластера определялась либо на основе зависимости корреляционной функции (2.3), либо по числу занятых ячеек в зависимости от площади выделенного участка фотографии. Приведем некоторые результаты [113] :

	Fe	Fe	Zn	Zn	SiO <sub>2</sub>
$D_\alpha$	$1,69 \pm 0,02$	$1,68 \pm 0,01$	$1,67 \pm 0,02$	$1,68 \pm 0,02$	$1,55 \pm 0,02$
$D_\beta$	$1,52 \pm 0,04$	$1,56 \pm 0,02$	$1,50 \pm 0,04$	$1,60 \pm 0,04$	$1,55 \pm 0,06$

Значение фрактальной размерности кластера, усредненной по этим данным, составляет  $1,60 \pm 0,07$ . Использованные в этой работе подходы легли в основу модели Виттена–Сандера [21], которая перевела исследование фрактальных кластеров на новый уровень.

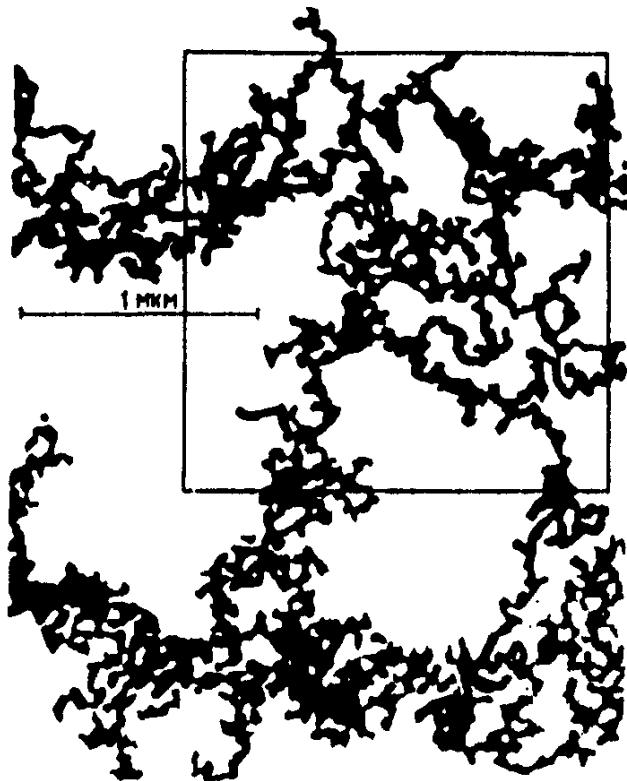


Рис. 3.1. Проекция фрактального кластера железа, полученная с помощью электронного микроскопа [113].

Радиус отдельных частиц равен 3,5 нм со стандартным отклонением 1,5 нм. Рамка ограничивает часть кластера. Подсчетом массы кластера, находящейся в рамках разных размеров, определялась фрактальная размерность кластера  $D_B$ . Кроме того, строилась корреляционная функция кластера, позволяющая восстановить фрактальную размерность кластера  $D_\alpha$ . Фрактальная размерность представляемого кластера составляет  $1,61 \pm 0,08$ .

Наряду с принципиальным значением данной работы с точки зрения последующего изучения фрактальных кластеров существенно и то, что в данной работе были представлены и практические методы нахождения фрактальной размерности конкретных кластеров, которые далее использовались при обработке как результатов математического моделирования, так и экспериментальных данных.

Удобно проводить испарение металлов для получения твердых металлических частиц в атмосфере инертного газа. Это позволяет задержать пары металла в зоне релаксации и тем самым повысить эффективность процесса. Образуемые металлические частицы используются в качестве покрытий болометров и приемников теплового излучения. Из металлических частиц образуются фрактальные кластеры, находящиеся на поверхности этих приборов, а они эффективно поглощают тепловое излучение.

В качестве примера такого типа приведем работу [114], где изучалось образование кластеров кобальта. Малые частицы кобальта образовывались в атмосфере аргона при испарении металла традиционным способом [115] при использовании нагретой вольфрамовой спирали в условиях конвективного переноса пара. Давление аргона находилось в интервале 0,25–10 Торр. Частицы металла, подобные саже, собирались на медной сетке, покрытой углеродом, и исследовались с помощью электронного микроскопа. Средняя толщина металлического осадка составляла 10–200 мкм, причем относительный объем кобальта в этом слое оценивается порядком  $10^{-4}$ – $10^{-2}$ , т.е. осадок имел пористую структуру и основной его объем занимали поры. Средний радиус частиц в этих образованиях увеличивался с ростом давления аргона, фрактальная размерность образованных агрегатов составляла 1,75–1,90 для давлений аргона 0,9–8 Торр, средний радиус частиц – менее 8 мкм. При давлениях аргона более 8 Торр радиус частиц в агрегате превышал 8 нм, а фрактальная размерность агрегата составляла 1,90–2,05.

Отметим, что фрактальная размерность кластеров, образованных при испарении металла в инертный газ, несколько выше, чем в случае его испарения в вакууме. Соответственно измерениям [116–118] фрактальная размерность кластеров алюминия, никеля, кобальта, полученных при испарении этих металлов в атмосфере аргона, составляет 1,75–1,85. Испарение металла в инертный газ задерживает процесс формирования кластера по сравнению со случаем его испарения в вакуум и поэтому приводит к созданию более плотных образований.

Фрактальный кластер образуется при ассоциации частиц в газовой и жидкой фазах. Такой процесс имеет место, если на первой стадии из вещества, находящегося в газе или растворе в виде отдельных атомов или молекул, образуются твердые макроскопические частицы. На следующей стадии процесса из этих частиц в результате их слипания образуется фрактальный кластер. В ранее приведенном примере испарение вещества происходило в результате взрыва проволочек при разогревании за счет прохождения по ним электрического тока. В работе [119] испарение вещества (железа, титана) осуществлялось под действием лазерного импульса и кластеры образовывались в парово-плазменном факеле вблизи испаряемой поверхности. При этом, как и в предыдущем случае, образуются кластеры микронных размеров, однако размер отдельной частицы в кластере или лазерном испарении материала выше, чем при электрическом (средний радиус частиц составляет при лазерном способе 20 нм, при электрическом 3–4 нм). Фрактальная размерность кластера, образуемого при лазерном испарении материала, близка к 1,8.

Еще один метод получения кластеров в газовой фазе состоит в сжижании тетрахлорида кремния в водородном или водородо-кислородном пламени [120–122]. В результате этого процесса образуется порошок, состоящий из слабо связанных кластеров. Такой порошок называется кремниевой сажей или кремниевым дымом. Его плотность находится в интервале  $0,008\text{--}0,45 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ . Детальные исследования таких образований показывают [122], что их свойства зависят от режима их получения. В указанной работе найдено, что фрактальная размерность полученных кластеров составляет 1,8–2,0 и типичный кластер включает в себя  $10^3$  отдельных частиц радиусом 8–10 нм. Этот радиус слабо зависит от режима горения. Однако удельная поверхность кластера, определяемая по адсорбционным свойствам системы, зависит от режима горения. При этом отношение максимальной удельной поверхности кластеров к поверхности входящих в него частиц лежит в интервале 1,81–3,05 и зависит от режима горения. На основе этого авторы приходят к выводу, что поверхность частиц, входящих в состав кластеров, не гладкая. При этом поверхностная фрактальная размерность кластеров в этих экспериментах составляет 2,0–2,5 и зависит от режима горения.

В газовой фазе наличие двух необходимых стадий в образовании фрактального кластера, связанных с образованием твердых частиц и ассоциаций в кластер, создается изменением температуры газа. В растворах эти стадии создаются за счет изменения плотности раствора. Как демонстрацию этого факта приведем результаты работы [123], где исследовалось образование фрактальных кластеров золота. Частицы золота получаются из соединения  $\text{NaAuCl}_4$ , помещенного в тринатриевую соль лимонной кислоты. На первой

стадии образуются сферические частицы золота диаметром 14,5 нм\*). Это связано с тем, что поверхностно сорбированный ион лимонной кислоты создает заряд на частице, что приводит к отталкиванию от поверхности частицы подходящих к ней атомных ионов золота и препятствует дальнейшему росту частиц. Добавление малого количества пиридина в раствор снимает поверхностный заряд частиц и способствует их слипанию. В результате этого из отдельных частиц золота образуются кластеры, которые и исследовались в работе [123] (рис. 3.2). Эти кластеры осаждались на сетку и далее фотографировались с помощью электронного микроскопа. По этим фотографиям восстанавливалось число частиц  $N$  в зависимости от размера кластера  $L$ . Поскольку оптическая толщина кластера мала, эта связь может быть восстановлена с хорошей точностью. Анализ 100 кластеров на сетке ( $L \approx 1$  мкм) дает для фрактальной размерности кластера значение  $D = 1,77 \pm 0,10$  (рис. 3.3). В пределах точности эксперимента масса образуемого кластера может аппроксимироваться формулой

$$m = m_0(R/r_0)^D, \quad (3.18)$$

где  $m_0 = 3 \cdot 10^{-17}$  г – масса отдельной частицы,  $r_0$  – ее радиус,  $R$  – радиус кластера.

Последующие экспериментальные исследования процесса образования фрактальных кластеров в растворах [124–128, 350] позволили получить важную информацию о процессе роста кластера и его свойствах. Эти исследования относились к изучению характера образования кластеров в соответствующих растворах, содержащих частицы золота и двуокиси кремния радиусом 8–11 нм. Время образования кластера регулировалось степенью кислотности раствора. Результаты этих исследований свидетельствуют о том, что в тех случаях, когда образование кластера происходит относительно быстро (несколько минут и менее), кластер обладает фрактальной размерностью  $1,75 \pm 0,05$ . Этот режим соответствует ССА-модели, т.е. кластер-кластерной ассоциации частиц с диффузионным характером движения частиц в растворе.

В другом режиме, когда за счет кислотности раствора частицы обладают электрическим зарядом и их объединение затруднено, рост кластера происходит относительно долго (часы и сутки). Фрактальная размерность кластера в этом случае составляет  $2,05 \pm 0,05$ . Рост кластера отвечает RLCA-модели, когда процесс ограничен скоростью реакции объединения частиц. В работе [128] показано, что кластеры с фрактальной размерностью 1,75, образуемые в свежем растворе, через несколько дней меняют свою фрактальную размерность до 2,2. Это приводит к выводу, что кластеры, образуемые при условиях RLCA-модели, являются более устойчивыми, чем кластеры, формируемые при кластер-кластерной ассоциации.

Таким образом, экспериментальные исследования позволили понять и изучить RLCA-режим образования кластера. Переход от RLCA-режима к ССА-режиму определяется временем образования кластера и зависит от размера ассоциирующих частиц. Так, в работах [102, 103] исследова-

---

\* ) Для сравнения отметим, что диаметр этих частиц примерно в 60 раз превышает диаметр атома золота, и отдельная частица содержит примерно  $10^5$  атомов золота.

Рис. 3.2. Проекция фрактального кластера золота, полученная с помощью электронного микроскопа [123]

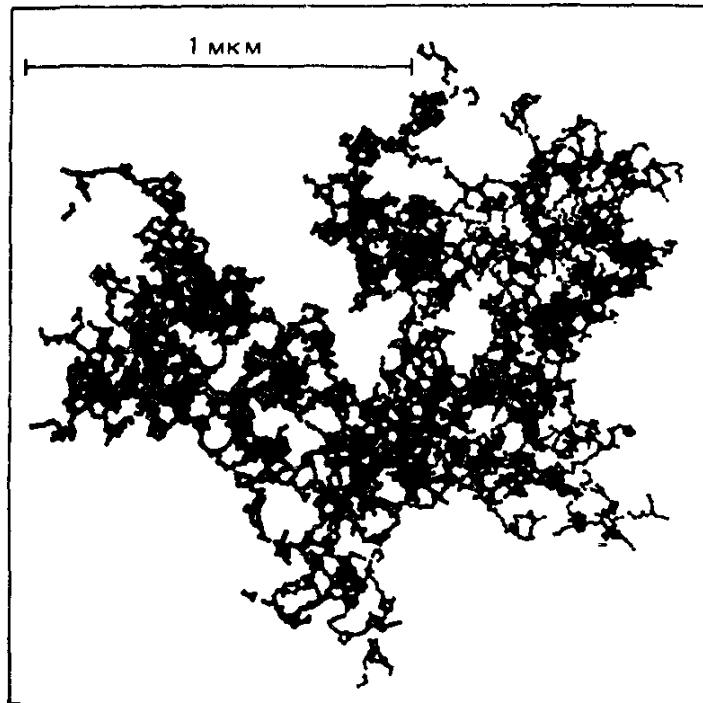
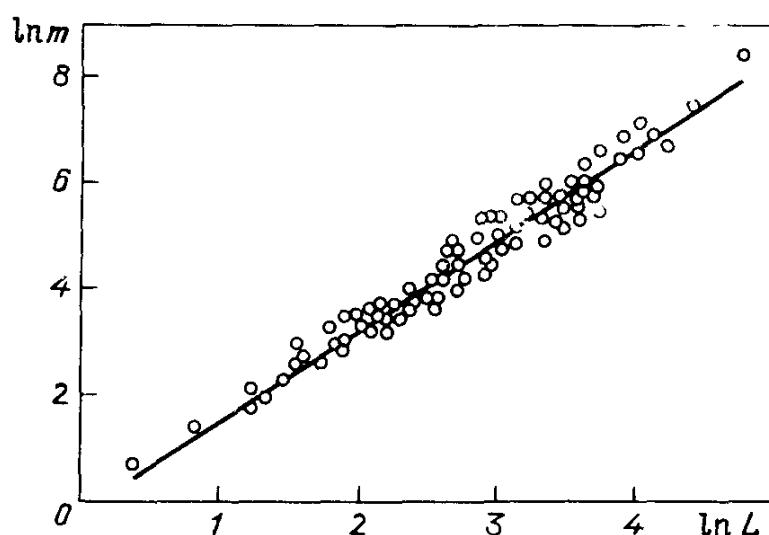


Рис. 3.3. Зависимость массы кластера, составленного из частиц золота, от его размеров [123]. Масса кластера  $m$  выражена в единицах  $10^{-17}$  г, размер кластера  $L$  – в размерах отдельной частицы, т.е. за единицу принял размер 14,5 нм. Сплошная линия соответствует фрактальной размерности кластера  $D = 1,75$



лось образование кластеров из частиц полистирена диаметром 481 нм. Фрактальная размерность образуемого кластера составляла  $1,75 \pm 0,03$ , и его рост описывался на основании ССА-модели. Время формирования кластера составляло несколько часов, что при размерах частиц в растворе порядка нескольких нанометров должно соответствовать RLCA-режиму. Однако при рассматриваемых размерах ассоциируемых частиц времена их движения оказываются существенно большими и указанные времена процесса соответствуют вероятности объединения частиц порядка единицы.

В случае RLCA-режима роста кластера вероятность слипания кластеров при их соприкосновении мала. Поэтому в процессе ассоциации кластеры глубже внедряются друг в друга, образуя более компактную по сравнению с ССА-режимом структуру. Согласно накопленному опыту возможен переход от ССА-кластера к RLCA-кластеру, но не наоборот. В табл. 3.4 приведены результаты экспериментальных исследований RLCA-кластеров.

В случае, когда концентрация твердых частиц в газе или растворе достаточно велика, фрактальные свойства образуемого кластера зависят

Таблица 3.4

## Эксперименты по изучению RLCA-режима формирования кластеров

Вещество кластеров	Радиус частиц, нм	Среда	Фрактальная размерность	Литература
Двуокись кремния	2,7	раствор	$2,12 \pm 0,05$	[96]
—”	—	—”-	$2,0 \pm 0,1$	[97]
Золото	7,5	—”-	$2,05 \pm 0,05$	[126]
Двуокись кремния	11	—”-	$2,08 \pm 0,05$	[127]
Золото	7,5	—”-	2,20	[128]
Двуокись кремния	3–5	газ	1,8–1,9	[120]
—”	7,0	раствор	$2,05 \pm 0,06$	[121]
—”	24–33	—”-	$2,1 \pm 0,1$	[183]

от концентрации частиц. Для роста кластеров в RLCA-режиме можно ожидать, что фрактальная размерность кластера будет расти по мере увеличения концентрации частиц. Действительно, RLCA-режим соответствует малой вероятности слипания частиц при их соприкосновении. По мере повышения этой вероятности имеет место переход к ССА-режиму с меньшим значением фрактальной размерности. При большой концентрации твердых частиц наряду с парными столкновениями определенную роль будут играть тройные столкновения частиц и кластеров, которые повышают вероятность слипания, приходящую на одно парное столкновение. Поэтому росту концентрация ассоциирующих твердых частиц должно отвечать некоторое понижение фрактальной размерности образуемого кластера. Эта тенденция демонстрируется данными рис. 3.4, где представлена зависимость фрактальной размерности кластера, образуемого в растворе из частиц двуокиси кремния, от части объема раствора, занимаемой этими частицами [182].

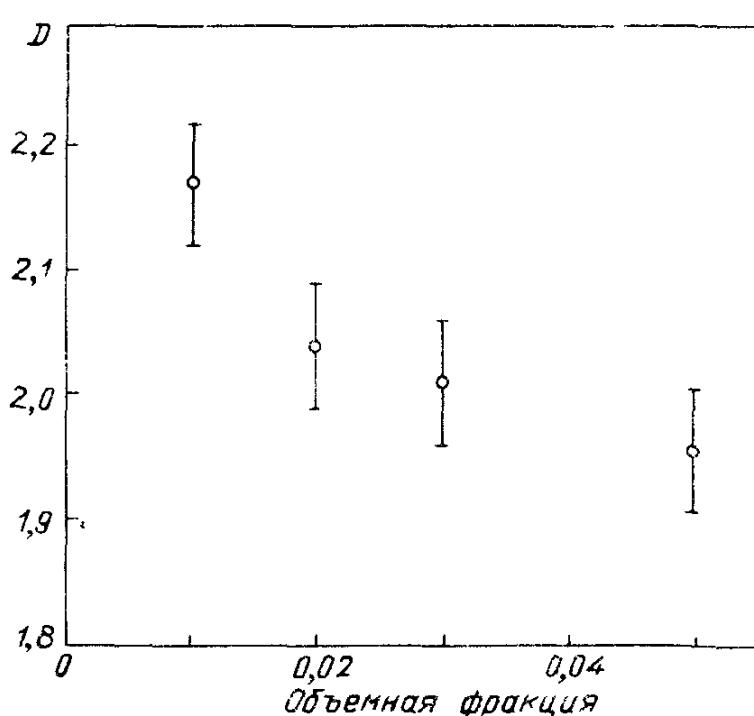


Рис. 3.4. Зависимость фрактальной размерности кластера двуокиси кремния от количества вещества в растворе

**3.5. Гидродинамические свойства и стабильность.** Рассмотрим сначала движение сферической частицы радиусом  $R$  в вязкой жидкости или газе. На нее действует сила

трения  $F$ , определяемая формулой Стокса (см. [143, 166]):

$$F = 6\pi R \eta v, \quad (3.19)$$

где  $v$  – скорость движения частицы,  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости или газа, в котором она движется. Отсюда находим подвижность  $b$  частицы, которая определяется из соотношения  $v = bF$ :

$$b = \frac{1}{6\pi R \eta}.$$

Используя соотношение Эйнштейна ( $D = Tb$ ), получаем для коэффициента диффузии частицы соотношение

$$D = \frac{1}{6\pi R \eta}. \quad (3.20)$$

Вернемся к фрактальному кластеру. Допустим, мы измерили силу трения или коэффициент диффузии для фрактального кластера и на основе формулы (3.19) или (3.20) определяем его эффективный радиус. Этот радиус, относящийся к движению фрактального кластера, назовем гидродинамическим радиусом и обозначим через  $R_H$ . Ясно, что он может отличаться от радиуса гирации  $R_g$  фрактального кластера.

Введем фрактальную размерность  $d_f$ , обеспечивающую связь между массой кластера  $M$  и его гидродинамическим радиусом  $R_H$ , в полном соответствии с формулой (2.9):

$$M \sim R_H^{d_f} \quad (3.21)$$

Расчеты показывают, что обычно значение  $d_f$  близко к фрактальной размерности кластера. Согласно [130] для трехмерного DLA-кластера значение  $\beta = 1/d_f$  составит  $0,47 \pm 0,01$  и согласно [131] для трехмерного ССА-кластера  $\beta = 0,544 \pm 0,014$ . Эти значения можно сравнить с данными табл. 3.2 и 3.1. Зададим связь между гидродинамическим радиусом и радиусом гирации в виде

$$R_H \sim R_g^\delta. \quad (3.22)$$

Расчеты [131] дают для ССА-модели  $\delta = 0,9 \pm 0,4$ , и согласно расчетам [132] для RLCA-модели отношение  $R_H/R_g$  находится в интервале 0,90–0,95 и в широкой области размеров кластера не зависят от его размера. Таким образом, совокупность расчетов свидетельствует о том, что в нулевом приближении гидродинамический радиус фрактального кластера можно отождествить с его радиусом гирации.

Экспериментальное исследование изменения гидродинамического радиуса путем измерения его коэффициента диффузии позволяет изучить характер эволюции фрактального кластера. Комплексные измерения дают возможность одновременно измерять величины  $R_H$  и  $R_g$ . Такие измерения в случае частиц окиси кремния, находящихся в водных растворах, были выполнены Виллиусом [101]. Частицы двуокиси кремния радиусом 3,5 нм вводились в воду с концентрацией 0,8% по массе. Соленость воды соответствовала 0,5 моль по NaCl. При таких условиях рост фрактального кластера с размерами несколько микрометров продол-

жался в течение 7 сут. Фрактальные размерности образованных кластеров с размерами  $0,5 < R_H < 7$  мкм составляли  $D = 2,10 \pm 0,03$  и  $d_f = 2,13 \pm 0,07$ . Отношение  $R_H/R_g$  соответствовало  $0,72 \pm 0,02$  в области размеров  $0,6 < R_H < 8$  мкм. Для кластеров с меньшими размерами эта величина несколько больше\*). Следует отметить, что отношение  $R_H/R_g$  близко к значению этой величины для раствора случайно расположенных в нем полимерных цепей, которое равно  $0,79 \pm 0,04$  [151].

Представленные результаты относятся к RLCA-режиму роста кластера. В работах [102, 103] были исследована эволюция значения коэффициента диффузии кластера в процессе его роста, когда условия формирования и роста кластера отвечают ССА-модели. Для этого частицы полистерена диаметром 481 нм вводились в раствор электролита, где они объединялись в кластер. Рассеяние света в этом кластере позволило определять его гидродинамический радиус. Фрактальная размерность исследуемых кластеров была равна  $d_f = 1,75 \pm 0,03$ , что соответствует ССА-режиму роста кластера (см. табл. 3.2 и 3.3).

Таким образом, согласно проведенным исследованиям значения фрактальных размерностей  $D$  и  $d_f$  близки друг другу. Теоретические исследования демонстрируют близость гидродинамического радиуса фрактального кластера к его радиусу гирации. Однако более детальные исследования (см., например, [101]) показывают, что отношение этих радиусов зависит от размера фрактального кластера и, вообще говоря, отличаются от единицы.

Опыт исследования фрактальных кластеров показывает, что в большинстве экспериментально исследованных случаев размер частиц, составляющих фрактальный кластер, оказывается порядка единиц или десятка нанометров, а размер самого кластера обычно составляет несколько микрометров. Это свидетельствует о нестабильности больших размеров. Кантор и Виттен [152] специально проанализировали эту проблему и установили, что нестабильность фрактального кластера определяется двумя причинами. Одна из них – тепловые флуктуации создают напряжение в кластере, другая – напряжения возникают под действием гравитационных эффектов. Реально оба механизма вносят сравнимый вклад в разрушение кластера и приводят к тому, что максимальный размер кластера на три-четыре порядка величины превышает размер входящих в него частиц. Это означает, что средняя плотность вещества ограничена снизу значением, которые на четыре – шесть порядков величины ниже плотности материала в конденсированной фазе.

## § 4. Поверхностный фрактальный кластер

**4.1. Экспериментальные исследования.** Наряду с рассматриваемыми фрактальными кластерами, которые собираются из отдельных частиц, находящихся в трехмерном пространстве, определенный интерес представляют фрактальные кластеры, образующиеся на поверхности, или двумерные фрактальные кластеры. Чтобы понять практическое значение таких

---

\* ) В работе [109] исследовалось образование кластеров золота в растворе из частиц радиусом 7,5 нм. Отношение  $R_H/R_g$  для кластера составляло 0,87.

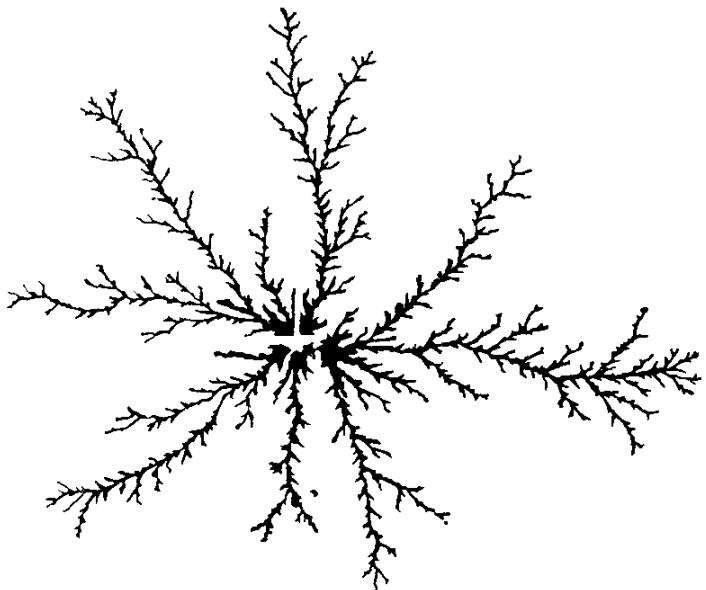


Рис 4.1. Поверхностный кластер  $\text{NbGe}_2$ , образуемый на кварцевой подложке при высокочастотном вбрывгивании ниобия в пары германия [153]

Рис 4.2. Фрактальный кластер цинка на поверхности электрода, образуемый при электролизе.

Фрактальная размерность кластера равна  $1,66 \pm 0,03$  [152]

кластеров, представим сначала некоторые экспериментальные работы, где такие кластеры наблюдались.

Пример поверхностного фрактального кластера приведен на рис. 4.1 [153]. Это – пленка  $\text{NbGe}_2$ , образованная на кварцевой подложке. В процессе эксперимента кварц нагрет до температуры 1130 К, над ним находится смесь галлия с парами германия, полное давление газа составляет менее 0,1 Торр. В газовую мишень вводится высокочастотным разбрызгиванием ниобий. При взаимодействии германия с ниобием образуются аэрозоли, представляющие химическое соединение этих компонентов. Осаждаясь на подложке, эти аэрозоли создают пленку в виде фрактальных кластеров. Толщина пленки составляет 0,2–0,5 мкм, размер малых зерен равен 0,1 мкм, размер больших зерен, которые образуются на периферии кластеров, около 1 мкм.

Фрактальная размерность наблюдаемых поверхностных кластеров  $D$  равна  $1,88 \pm 0,06$ . Если убрать утолщения на концах кластеров, то это приведет к уменьшению значения  $D$  до  $1,73 \pm 0,08$ , что в пределах погрешности эксперимента совпадает с результатами модели Виттена – Сандера [21]. Расчеты показывают, что образование наблюдаемых кластеров может быть описано в рамках модели Виттена – Сандера, если использовать двухстадийную схему. На первой стадии вероятность прилипания частицы к кластеру при их касании равна единице, так что образуется кластер с фрактальной размерностью около 1,7. На второй стадии принимает участие примерно такое же число отдельных частиц, что и на первой стадии. Вероятность прилипания отдельной частицы к кластеру, равная  $1/10$  соответствует утолщению ветвей кластера и повышению его фрактальной размерности по сравнению со случаем, когда эта вероятность равна единице. Получаемая в такой модели структура кластера соответствует наблюдаемой в экспери-

менте. Это свидетельствует о сложном характере рассматриваемого реального процесса образования кластера.

Следует отметить, что рассматриваемый случай может быть описан и более простой моделью. Именно в объеме происходит сначала образование твердых частиц, а затем эти частицы объединяются в кластер в результате кластер-кластерной агрегации (ССА-режим). Сформированный таким способом ССА-кластер далее прилипает к поверхности, так что наблюдаемый поверхностный кластер является проекцией трехмерного ССА-кластера на плоскость. Эта версия хорошо оправдывается физикой протекающих процессов, а также величиной фрактальной размерности кластера (см. табл. 3.2 и 3.3). Другой тип поверхностного фрактального кластера образуется на электроде при электроосаждении металла [154–156]. Пример такого кластера показан на рис. 4.2 [154]. На подложке, которая одновременно служит электродом и помещена в электролит, под действием приложенного к электродам напряжения выделяется металл – цинк. До тех пор, пока разность потенциалов между электродами не превышает некоторой критической величины, осаждение цинка на подложку происходит в виде фрактального кластера с фрактальной размерностью  $1,66 \pm 0,03$ , которая соответствует модели Виттена – Сандера. Если разность потенциалов превышает некоторую критическую величину, то характер осаждения металлических частиц на подложке изменяется, что приводит к увеличению фрактальной размерности образуемого кластера.

В работе [40] исследовался процесс кристаллизации аморфной пленки  $\text{GeSe}_2$ . Пленку такого соединения толщиной примерно 70 нм наносили на тонкую графитовую подложку путем испарения поликристаллического  $\text{GeSe}_2$ . Температура подложки в процессе формирования пленки поддерживалась комнатной, так что пленка имела аморфную структуру. Нагревание отдельных элементов пленки вызывает ее кристаллизацию, которая распространяется в виде волны кристаллизации со скоростью около  $1 \text{ нм} \cdot \text{с}^{-1}$ . На фронте волны кристаллизации кристаллическая фаза образует фрактальные структуры с размером порядка 10 мкм и с размером элементов, из которых они построены, примерно 2–5 нм. Фрактальная размерность этих фрактальных структур близка к 1,7, что соответствует модели Виттена – Сандера.

Появление поверхностных фрактальных структур можно ожидать в биологических системах на границе раздела фаз, ибо многие биологические системы содержат богатый набор компонентов, находящихся в физическом растворе в состоянии разных фаз. В качестве одного из таких примеров приведем результаты работы [157], где изучалось поведение одного и фосфолипидов в растворе воды на границе раздела фаз вода – воздух. В конечном итоге фосфолипид собирался в небольшие домены, которые объединялись друг с другом, образуя фрактальную структуру. Соединение отдельных элементов в домены происходило как вследствие взаимодействия этих элементов, так и в результате изменения поверхностного натяжения воды в области их нахождения. Фрактальная размерность образованной фосфолипидом фрактальной структуры составляла  $1,5 \pm 0,1$ .

В большей части представленных примеров фрактальные кластеры формируются из отдельных частиц на поверхности. При этом характер взаимодействия атомов или молекул материала пленки таков, что вызы-

вает выделение материала (или новой фазы) на поверхности в виде частиц. При достаточной плотности материала эти частицы объединяются в кластер. Как видно, в данных случаях понимание фрактальной структуры пленки существенно для анализа характера процессов при образовании или эволюции пленки. Однако возможен и другой путь формирования фрактальных кластеров, когда они образуются в объеме и далее садятся на поверхность. Необходимо отметить, что двумерному DLA-кластеру и трехмерному ССА-кластеру отвечают близкие значения фрактальных размерностей (см. табл. 3.3). Поэтому, основываясь лишь на значении фрактальной размерности фрактального кластера, трудно сделать вывод, какой именно механизм привел к образованию данного кластера.

**4.2. Шершавая поверхность как поверхностный фрактальный кластер.** Другим типом поверхностного фрактального кластера является шершавая поверхность пористого тела. В тех случаях, когда объект является непрозрачным для рентгеновского излучения или потока нейтронов, рассеяние на малые углы (см. п. 3.3) дает информацию о его поверхности. Таким способом исследовалась фрактальная размерность поверхности многих объектов (см., например, [99, 100, 158–160]).

Шершавая поверхность является поверхностью твердых тел. Простые вещества образуются в природе из жидкой фазы в результате медленных физических и химических процессов. Одной из удобных моделей для формирования является модель SOS (solid on solid – твердое на твердом). Согласно этой модели рассматриваемая система, являющаяся связанным состоянием отдельных частиц, образуется присоединением к поверхности этих частиц. Система формируется при термодинамических равновесных условиях, так что при описании этого процесса энергия связи соседних частиц и температура системы задаются как внешние параметры, и далее новые частицы присоединяются к поверхности в рамках модели Монте-Карло с учетом вероятности связывания частицы в данной ячейке в соответствии со статистическими законами.

Такая модель использовалась в ряде расчетов [98, 121, 245–247]. При этом площадь образуемой шершавой поверхности  $S$  зависит от масштаба измерения  $L$  согласно формуле

$$S(L) \sim L^{d-D-1}, \quad (4.1)$$

где  $d$  – размерность пространства,  $D$  – фрактальная размерность поверхности. Следует отметить, что результаты расчетов фрактальной размерности шершавой поверхности, выполненные в рамках указанной модели разными авторами [98, 121, 245–247], расходятся. Что касается измерений, то фрактальная размерность шершавой поверхности исследуемого образца зависит от материала, его составляющего (см. [98–100, 129, 158]), так что вряд ли процесс формирования шершавой поверхности твердого тела можно описать, основываясь на простой модели.

Отметим еще один удобный способ определения фрактальной размерности шершавой поверхности, который может быть использован наряду с соотношением (3.12). Превратим рассматриваемую шершавую поверхность в гладкую поверхность, радиус кривизны которой превышает величину  $L$ . Пусть характерное расстояние между точками шершавой поверхности и ближайшими к ним точками гладкой поверхности равно  $w$ . С изме-

нением масштаба гладкой поверхности  $L$  будет изменяться величина  $w$ , причем их связь дается соотношением (см. [248])

$$w \sim L^{d-D}. \quad (4.2)$$

Величина  $L$  может быть фиксирована по рассеянию рентгеновского или нейтронного излучения на малые углы, а величина  $w$  – по рассеянию на большие углы. Это дает метод для определения фрактальной размерности шершавой поверхности.

**4.3. Модели роста фрактального кластера на подложке.** Имеется группа физических процессов, когда кластер прорастает при прилипании твердых частиц к подложке и растущему на ней кластеру. Эти процессы описываются соответствующими компьютерными моделями роста таких кластеров. В простых моделях, рассмотренных Микином [249], растущий двумерный или трехмерный кластер образуется на плоской подложке, к которой последовательно добавляются новые частицы, или – в двумерном случае – на нити, к которой также последовательно добавляются частицы. При этом поперечный размер кластера значительно меньше размеров подложки, а присоединяемые частицы совершают движение в пространстве.

В случае прорастания кластера с плоскости будем характеризовать его параметром  $T$  – квадратным корнем из среднего квадрата высоты кластера. Связь этого параметра с числом частиц  $N$  в кластере зададим в виде

$$T \sim N^\epsilon. \quad (4.3)$$

Для компактного кластера  $\epsilon = 1$ , т.е. в этом случае значение  $\epsilon$  равно размерности пространства в направлении, перпендикулярном подложке. В общем случае фрактальная размерность рассматриваемого кластера дается соотношением

$$D = d - 1 + 1/\epsilon, \quad (4.4)$$

где  $d$  – размерность пространства, в котором кластер растет.

Для двумерного случая при прорастании кластера с плоскости параметры формул (4.3) и (4.4) равны:  $\epsilon = 1,300 \pm 0,075$  (т.е.  $D = 1,77 \pm 0,04$ ) согласно [249] и  $\epsilon = 1,36 \pm 0,05$  (т.е.  $D = 1,74 \pm 0,02$ ) согласно [250]. В трехмерном случае прорастания кластера с плоскости имеем:  $\epsilon = 1,7 \pm 0,2$  (т.е.  $D = 2,59 \pm 0,07$ ) согласно [249] и  $\epsilon = 1,69 \pm 0,06$  (т.е.  $D = 2,59 \pm 0,02$ ) согласно [250]. При этом отметим, что степенная зависимость (4.3) для характерной высоты кластера от числа частиц в нем имеет место только для массивного кластера. На первом этапе он имеет более рыхлую структуру. С учетом этого вместо формулы (4.3) в [125] предлагается зависимость

$$T = 1,42 + 2,55 \cdot 10^{-4} N^{1,297} \quad (4.5)$$

в двумерном случае и зависимость

$$T = 0,806 + 4,27 \cdot 10^{-6} N^{1,602} \quad (4.6)$$

в трехмерном случае. Подобные зависимости были получены и в работе [250].

Другой характеристикой рассматриваемого кластера, которая связана с его фрактальной размерностью, является плотность кластера  $\rho(x)$  как

функция  $x$  — высоты над поверхностью. Эта зависимость дается формулой (2.8). Суммируя результаты, полученные для кластера, прорастающего с плоскости [249, 250], для фрактальной размерности имеем в двумерном случае  $D = 1,69 \pm 0,05$  и в трехмерном случае  $D = 2,56 \pm 0,05$ .

Наряду с прорастанием кластера на плоскости в работе [125] исследовалось прорастание кластера на нити. Двумерный кластер формируется в результате присоединения к нему или к нити отдельных твердых частиц, совершающих броуновское движение в пространстве. При этом поперечный размер кластера полагается малым по сравнению с длиной нити. Связем радиус гирации кластера  $R_g$  с числом  $N$  частиц в нем соотношением

$$R_g \sim N^\delta. \quad (4.7)$$

Согласно проведенным расчетам [249] показатель степени в формуле (4.7) равен  $\delta = 0,665 \pm 0,031$ . Это отвечает фрактальной размерности кластера  $D = 1/\delta = 1,50 \pm 0,07$ .

Данная модель описывает определенный круг физических процессов, связанных с образованием фрактальных структур на нити. Один из них (см. п. 6.2) отвечает химическому растворению пористого вещества активной жидкости, когда это растворение имеет цилиндрическую симметрию и начинается с оси, где протекает жидкость.

Другой вариант модели, описывающий рост кластера на плоскости, был рассмотрен в работе [135]. Согласно условиям этой модели рост кластера разрешен на главном стволе кластера. Авторы работы [135] называли свою модель DLA-моделью без ветвления. Образуемый кластер подобен песку отдельных усов, прорастающих с плоскости. Данная модель приводит к фрактальной размерности образуемого кластера, совпадающей с фрактальной размерностью DLA-кластера. В указанных расчетах фрактальная размерность кластера составляет  $1,66 \pm 0,04$  и  $1,72 \pm 0,015$ . Использование модификаций с введением ограниченного ветвления практически не отражается на фрактальной размерности кластера.

В рассмотренных моделях присоединяемая частица жестко фиксировалась на поверхности и в последующем процессе не могла изменить своего положения. Возможна также другая физическая ситуация, когда частица может свободно перемещаться по поверхности и, встречая другую частицу или кластер на поверхности, присоединяться к ним. Такая модель для случая, когда частицы и кластеры совершают диффузионное движение на поверхности, была развита в работе [251]\*). Характер процесса определяется зависимостью коэффициента диффузии  $\mathcal{D}$  от массы  $M$  кластера, которая задается в виде  $\mathcal{D}(M) \sim M^a$ . При этом фрактальная размерность кластера  $D$  определяется зависимостью  $M \sim R^D$ , где  $R$  — характерный размер или радиус гирации кластера. Кроме того, введем массу частиц  $M_S$ , находящихся на поверхности. Соответствующая фрактальная размерность  $D_S$  определяется соотношением

$$M_S \sim R^{D_S}.$$

Значения фрактальной размерности поверхностного кластера зависят от

---

\* В этой работе рассмотрено движение частиц и кластеров как в двумерном (на поверхности), так и в трехмерном пространстве.

величины параметра  $a$ . Так, для  $a = -2$  имеют место значения  $D = 2 \pm 0,06$  и  $D_S = 1,60 \pm 0,08$ , для  $a = -1$  – значения  $D = 1,85 \pm 0,09$  и  $D_S = 1,51 \pm 0,15$ , а для  $a = 2$  кластер становится плотным и сплошным, так что  $D = 2 \pm 0,1$  и  $D_S = 1 \pm 0,12$ . Вид функции распределения кластеров по массам также зависит от параметра  $a$ .

Рассматриваемый кластер, прорастающий с плоскости в результате присоединения отдельных твердых частиц, состоит из ряда отдельных ветвей, присоединенных к плоскости. Рассмотрим распределение этих ветвей-кластеров по числу частиц  $s$  в них. Число кластеров  $n$  с данным числом частиц  $s$  в нем обозначим через  $n_s$ ; при малых  $n$  имеем степенную зависимость от  $s$ :

$$n_s \sim s^{-\tau}. \quad (4.8)$$

В работе [252] предложена общая формула для функции распределения:

$$n_s(N) = A s^{-\tau} f(s^\sigma/N). \quad (4.9)$$

Здесь  $A$  – числовой параметр,  $f(x)$  – универсальная функция,  $N$  – полное число частиц во всех кластерах, т.е.

$$N = \sum_s s n_s. \quad (4.10)$$

Из формулы (4.10) вытекает следующее соотношение для параметров функции распределения (4.9):

$$\sigma = 2 - \tau. \quad (4.11)$$

Параметры, входящие в формулу (4.9), зависят от условий модели, описывающей рост кластера. В случае DLA-режима и прорастания кластера на плоскости в двумерном случае согласно расчетам [252]  $\tau = 1,35$  и согласно [250]  $\tau = 1,55 \pm 0,05$ . Как следует из формул (4.9) и (4.11), характер скейлинга для среднего размера кластера  $S$  имеет вид

$$S = \left( \frac{1}{N} \int s^2 n_s ds \right)^{1/2} \sim N^{1/\sigma}. \quad (4.12)$$

Расчеты [252] для двумерного случая прорастания кластера в DLA-режиме дают для параметра формулы (4.12)  $1/\sigma = 1,9^{+0,3}_{-0,1}$ . Суммируя полученную

информацию для двумерной DLA-модели при прорастании кластера на плоскости находим  $D = 1,5 \pm 0,1$ . В трехмерном случае [250] эта величина равна  $D = 1,84 \pm 0,08$ .

Другой режим роста, рассмотренный в работе [253], отвечает случаю, когда рост кластера от плоскости возможен только в направлении, перпендикулярном плоскости. Тогда отдельные кластеры имеют вид "налок", в параметр  $\tau$ , входящий в формулы (4.8) и (4.9), приблизительно равен 1,45. Общее соотношение для параметра  $\tau$  в формулах (4.8) и (4.9) при прорастании кластера на подложке было получено в работе [254]. Этот параметр связывается с фрактальными свойствами кластера.

Действительно, введем связь высоты  $h$  и ширины  $w$  отдельного кластера с числом частиц  $s$  в нем на основе соотношений

$$h_s \sim s^{\nu_{\parallel}}, \quad w_s \sim s^{\nu_{\perp}}. \quad (4.13)$$

Полученная зависимость для скейлинга в формуле (4.9) имеет вид (см. [254])

$$\sigma = \nu_{\parallel}(d - D), \quad (4.14)$$

где  $d$  – размерность пространства,  $D$  – фрактальная размерность кластера. Если считать, что кластеры обладают одинаковыми фрактальными свойствами в продольном и поперечном направлении, т.е.  $\nu_{\parallel} = \nu_{\perp} = 1/D$ , то соотношение (4.14) преобразуется к виду

$$\sigma = d/D - 1. \quad (4.15)$$

В частности, для двумерного DLA-кластера, прорастающего с плоскости, в соответствии с ранее представленными результатами получаем  $D = 1,69 \pm 0,05$ . Отсюда имеем  $\tau = 1,82 \pm 0,03$ , что превышает приведенные выше значения этого параметра.

Экспериментальное исследование роста кластера на плоскости было выполнено в работе [255] в случае выделения цинка на линейном электроде при прохождении электрического тока через электролит. Соотношение между толщиной структуры из выделенного цинка и его массой представлялось в виде зависимости (4.3), причем  $1/\epsilon = 0,70 \pm 0,06$ , и параметр  $\tau$  в формулах (4.8), (4.9) составлял приблизительно 1,54, что соответствует двумерному случаю DLA-модели при прорастании кластера с плоскости. Для сравнения отметим, что в рамках баллистической модели роста кластера при движении частиц под углом к плоскости [190] в двумерном случае имеем  $\tau = 1,3 \div 1,4$  в широком диапазоне углов падения:  $0 \div 85^\circ$ .

**4.4. Проекция фрактального кластера на плоскость.** В некоторых процессах фрактальный кластер образуется в объеме, а затем прилипает к поверхности. При этом на поверхности мы видим проекцию трехмерного кластера на плоскость. Такая же операция проводится при анализе фрактального кластера с помощью электронного микроскопа. В этом случае фотография фрактального кластера представляет собой его проекцию на плоскость. В условиях такой задачи рассмотрим сначала распределение плотности проекции кластера на плоскость. Такая операция разумна для оптически прозрачного кластера, причем мерой, характеризующей прозрачность кластера, является оптическая плотность  $u$  кластера при условии, что кластер подготовлен из абсолютно черного материала и длина волны излучения меньше размера частиц, входящих в состав кластера. Далее мы определим оптическую плотность  $u$  кластера при условии  $u \ll 1$ .

Будем моделировать кластер набором цилиндрических волокон радиусом  $r_0$ , которые образуют некоторую ветвистую структуру, и их средняя плотность отвечает формуле (2.6):

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\alpha}, \quad \alpha = 3 - D. \quad (4.16)$$

здесь  $D$  – фрактальная размерность кластера,  $r_0$  характерный размер

входящих в него частиц,  $\rho_0$  — плотность материала кластера. По определению оптической плотности кластера в направлении  $x$  имеем

$$u = \int dx / \lambda,$$

где

$$\lambda = \frac{dV}{dS} = \frac{dV}{(\pi/2)r_0 dL}$$

есть длина пробега фотона, так что  $dL$  — полная длина нитей в элементе объема. Вводя  $\bar{\rho}$  — среднюю плотность материала в заданной области кластера, для массы материала в выделенном объеме кластера имеем

$$dM = \rho_0 \pi r_0^2 dL = \bar{\rho} dV.$$

Отсюда находим для длины пробега фотона

$$\lambda = 2r_0 \rho_0 / \bar{\rho}.$$

Используя формулу (4.16) для оптической плотности нити, получаем

$$u(b) = \int \frac{dx \bar{\rho}}{2r_0 \rho_0} = \frac{r_0^{2-D}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + b^2)^{\alpha/2}} = C \left( \frac{r_0}{b} \right)^{2-D}, \quad (4.17)$$

где  $b$  — расстояние от луча до центра кластера, и числовой коэффициент в этой формуле, полученной для  $D < 2$ , равен

$$C = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - D/2)}{2 \Gamma(3/2 - D/2)}.$$

В частности, в случае  $D = 1,78$  этот коэффициент равен  $C = 5,2$ , а при  $D \rightarrow 2$  имеем  $C = 1/(2 - D)$ .

Из формулы (4.17) следует, что оптическая толщина кластера будет порядка единицы только при прохождении луча вблизи центра кластера ( $b \approx r_0$ ). Поэтому площадь проекции кластера на плоскость равна сумме площадей проекций его отдельных элементов. Учитывая это, определим фрактальную размерность проекционного кластера. Согласно обычной процедуре в этом случае мы выберем некоторую точку проекционного кластера, проведем вокруг нее окружность радиусом  $b$  и выясним, какая площадь находится внутри этой окружности. Учитывая, что кластер составлен из частиц радиус  $r_0$ , получим, что если плотность кластера  $\rho$ , то плотность его проекции составляет  $4r_0 \rho / 3$ . Тогда для площади проекции кластера внутри окружности радиусом  $b$  с центром в точке кластера получим

$$S(b) = \int_0^b 2\pi \bar{\rho} b' db' dx / \left( \frac{4}{3} r_0 \rho_0 \right). \quad (4.18)$$

Отметим, что в данном случае кусок фрактального кластера вырезается бесконечным цилиндром радиусом  $b$  и полученный кластер проецируется на плоскость.

Воспользовавшись формулой (4.16) для средней плотности кластера, приведем формулу (4.18) к виду

$$S(b) = \int_0^b 3\pi b' db' u(b'),$$

где  $u(b)$  — оптическая плотность кластера на расстоянии  $b$  от выбранной

центра. Воспользовавшись формулой (4.17) для оптической плотности, получаем

$$S(b) = \frac{3\pi C}{4-D} r_0^2 \left( \frac{b}{r_0} \right)^D.$$

Как видно, соотношение  $S(b) \sim b^D$  свидетельствует о том, что фрактальная размерность проекционного кластера та же, что и у начального объемного кластера. Такая закономерность в случае  $D < 2$  ясна из общих соображений.

В работе [65] исследовался проекционный кластер, полученный из трехмерного DLA-кластера. Зададим связь между площадью проекции кластера  $S$  и числом  $N$  частиц в нем соотношением

$$S \sim N^\gamma. \quad (4.19)$$

Если бы трехмерный кластер был оптически прозрачным, т.е. проекции отдельных частиц попадали бы в разные места, то выполнялось бы соотношение  $S \sim N$ , т.е.  $\gamma = 1$ , что имеет место для кластера с низкой плотностью частиц. Однако кластер с большим числом частиц становится оптически непрозрачным в центре, и по мере увеличения числа частиц в нем оптически непрозрачная область вблизи центра растет. Поэтому  $\gamma < 1$ . При этом для компактного кластера  $\gamma = 2/3$ , т.е.

$$2/3 < \gamma < 1. \quad (4.20)$$

В работе [65] найдено, что для кластера, полученного при ограниченной диффузией ассоциации кластер – частица с вероятностью прилипания частицы к кластеру в случае их касания, равной единице, искомый параметр  $\gamma$  равен  $0,864 \pm 0,003$ . При вероятности прилипания частицы к кластеру  $P = 0,25$  кластер становится более компактным, а параметр  $\gamma$  соответственно уменьшается до значения  $0,830 \pm 0,016$ .

Используя эти результаты, проанализируем данный кластер с другой точки зрения, рассматривая его как излучающее тело. В этом случае его эффективная поверхность  $S_{\text{ef}}$ , ответственная за излучение, в четыре раза больше средней проекции на плоскость, т.е.  $S_{\text{ef}} = 4S$ . Сравним эту величину с площадью поверхности сферы  $S_0$ , в которую помещается кластер. Рассмотрим сначала физически предельные случаи. Если система достаточно плотная, т.е. просматриваются только частицы, расположенные на поверхности, то  $S_{\text{ef}} = 4S_0$ . Если ввести параметр  $k$ :

$$S_{\text{ef}}/S_0 \sim N^k, \quad (4.21)$$

где  $N$  – число частиц в кластере, то для оптически толстого кластера  $k = 0$ . Для оптически прозрачной системы, когда можно "просматривать" каждую частицу, т.е. когда она не экранируется другими частицами, имеем  $S_{\text{ef}} \sim N S_0 \sim N^{2/3}$ , или  $k = 1/3$ . Любой реальный случай находится между предельными значениями

$$0 < k < 1/3. \quad (4.22)$$

Теперь рассмотрим реальный кластер. Поскольку  $S_{\text{ef}} \sim N^k$  и  $S_0 \sim R^2 \sim V^{2/D_\beta}$ , для него

$$k = \gamma - 2/D_\beta. \quad (4.23)$$

Учитывая приведенные выше значения параметра  $\gamma$ , а также используя значения фрактальной размерности трехмерного кластера (см. табл. 3.2), для фрактального кластера, образованного при единичной вероятности прилипания к нему частицы при их соприкосновении ( $D = 2,47 \pm 0,03$ ), имеем  $k = 0,054 \pm 0,013$ . Для трехмерного кластера, образованного при прилипании к нему отдельных частиц, совершающих броуновское движение в пространстве, при вероятности прилипания 0,25 ( $D = 2,48 \pm 0,12$ ) имеем  $k = 0,024 \pm 0,045$ . Фрактальный кластер optически плотен вблизи центра и optически прозрачен на периферии. Полученные результаты свидетельствуют о том, что исследованные системы ближе к optически плотным объектам.

## § 5. Динамика роста и эволюция кластеров

**5.1. Скейлинг в процессе роста.** Наряду со значимостью самой структуры фрактальных агрегатов важную роль играют представления о динамике их образования. Поскольку эти системы образуются при слипании отдельных элементов, информативными являются распределение кластеров по размерам в каждый момент времени и характер изменения этого распределения со временем. Очевидно, в этих задачах имеются определенные соотношения между основными параметрами, которые сохраняются со временем. Чтобы разобраться в "скейлинге", характеризующем эти задачи, рассмотрим сначала простейшую из задач такого рода – ассоциацию жидких аэрозолей относительно больших размеров в газе. Хотя эта задача не имеет прямого отношения к исследуемым здесь объектам, она позволяет получить представление об универсальности законов, характеризующих процесс, и о параметрах, которыми его удобно описывать.

В данной задаче мы имеем набор жидких аэрозолей, находящихся в газе и совершающих броуновское движение в нем. При соприкосновении два аэрозоля объединяются в один, который принимает сферическую форму и участвует в дальнейшем процессе. Наша задача состоит в нахождении функции распределения жидких аэрозолей по размерам в произвольный момент времени.

Для этого определим сначала константу скорости ассоциации аэрозоля радиусом  $r_1$  с окружающими его аэрозолями. Будем сначала считать, что рассматриваемый аэрозоль поконится, а все остальные аэрозоли имеют радиус  $r_2$  и совершают броуновское движение в газе с коэффициентами диффузии  $\mathcal{D}_2$ . Плотность этих аэрозолей вдали от пробного аэрозоля равна  $N(\infty) = N_2$  и  $N(r_1 + r_2) = 0$ . Диффузионный поток аэрозолей на рассматриваемый аэрозоль равен  $j = -\mathcal{D}_2 dN/dr$ , где  $r$  – расстояние между центрами аэрозолей. Отсюда следует, что полный ток аэрозолей на пробный равен

$$J = 4\pi r^2 \mathcal{D}_2 \frac{dN}{dr}. \quad (5.1)$$

Поскольку поглощение аэрозолей в объеме ( $r > r_1 + r_2$ ) отсутствует, то  $J$  не зависит от  $r$ . Решая полученное уравнение (5.1) с заданными граничными условиями, получаем в конечном итоге

$$J = 4\pi \mathcal{D}_2 (r_1 + r_2) N_2. \quad (5.2)$$

Эта формула носит название формулы Смолуховского [133]. Отсюда находим константу скорости ассоциации аэрозолей

$$k = J/N_2 = 4\pi \mathcal{D}_2(r_1 + r_2). \quad (5.3)$$

Это выражение получено в предположении, что первый аэрозоль покоятся. Очевидно, учет диффузионного движения первого аэрозоля приводит нас к симметричной формуле

$$k = 4\pi(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2)(r_1 + r_2), \quad (5.4)$$

где  $\mathcal{D}_1$  – коэффициент диффузии первого аэрозоля в газе.

Найдем выражение для коэффициента диффузии первого аэрозоля с относительно большими размерами. Пусть этот аэрозоль имеет заряд  $e$  и движется в электрическом поле напряженностью  $E$ . Тогда он движется с направленной скоростью  $v = KE$ , где  $K$  – подвижность аэрозоля. При этом электрическая сила  $eE$ , действующая на аэрозоль, уравновешивается силой трения, которая определяется формулой Стокса:

$$eE = 6\pi r_0 \eta v.$$

Здесь  $r_0$  – радиус аэрозоля,  $\eta$  – коэффициент вязкости газа. Отсюда получаем выражение для подвижности аэрозоля

$$K = \frac{e}{6\pi r_0 \eta}. \quad (5.5)$$

Из формулы (5.5), используя соотношение Эйнштейна, получаем коэффициент диффузии аэрозоля

$$\mathcal{D} = \frac{KT}{e} = \frac{T}{6\pi r_0 \eta}. \quad (5.6)$$

Поскольку при получении этого выражения мы использовали формулу Стокса, то оно справедливо при условии  $r_0 \gg \lambda$ , где  $\lambda$  – длина пробега молекул газа.

Подставляя формулу (5.6) в (5.4), имеем для константы скорости ассоциации аэрозолей формулу

$$k = \frac{8T}{3\eta} F(r_1, r_2), \quad F(r_1, r_2) = \frac{(r_1 + r_2)^2}{4r_1 r_2}. \quad (5.7)$$

Величина  $F$  равна единице при  $r_1 = r_2$  и не сильно отличается от единицы, если  $r_1$  порядка  $r_2$ . Например, при  $r_1 = 2r_2$  имеем  $F = 9/8$ . Функция  $F$  слабо зависит от отношения радиусов для ассоциирующих аэрозолей, поэтому в дальнейшем будем считать, что константа скорости ассоциации двух жидкых аэрозолей не зависит от их размеров. Это существенно упростит результат и проводимый анализ.

Напишем теперь кинетическое уравнение для функции распределения жидких аэрозолей по массам  $f(m, t)$  – уравнение Смолуховского [133]. Учитывая, что при слиянии двух аэрозолей с массами  $m$  и  $m'$  образуется новый аэрозоль с массой  $m + m'$ , представляем уравнение Смолуховского в виде

$$\frac{df(m, t)}{dt} = -vf(m, t) + v \int_0^m f(m', t)f(m - m', t)dm'. \quad (5.8)$$

Здесь функция распределения нормирована условием

$$\int_0^{\infty} f(m, t) dm = 1, \quad \nu = Nk,$$

где  $N$  – число аэрозолей в единице объема, причем существенно, что константа скорости ассоциации не зависит от размеров ассоциирующих аэрозолей, а следовательно, от их масс.

Представляет интерес автомодельное решение этого уравнения, которое не зависит от начальных условий и к которому система переходит за время  $t \gg 1/\nu$ . Из структуры уравнения следует, что такое решение имеет вид

$$f(m, t) = \frac{1}{\bar{m}} \exp\left(-\frac{m}{\bar{m}}\right), \quad (5.9)$$

где

$$\bar{m}(t) = \int_0^{\infty} m f(m, t) dm$$

есть средняя масса аэрозоля в данный момент времени. Подстановка (5.9) в (5.8) дает

$$d\bar{m}/dt = \bar{m}\nu. \quad (5.10)$$

Это уравнение позволяет установить зависимость  $\bar{m}(t)$  при произвольной зависимости  $\nu(\bar{m}, t)$ . Последняя зависимость определяется газодинамикой газа, содержащего аэрозоли. В простейшем случае неподвижного газа имеем, что масса материала аэрозоля, находящегося в единице объема газа, сохраняется. Отсюда получаем  $N \sim 1/\bar{m}$ , т.е.  $\nu \sim 1/\bar{m}$ , так что решение уравнения (5.10) дает

$$\bar{m} = m_0 N_0 k t, \quad \bar{m} \gg m_0, \quad (5.11)$$

где  $m_0$  – средняя масса аэрозоля в начальный момент времени,  $N_0$  – число аэрозолей в единице объема в начальный момент времени. Решение (5.11), как и (5.9), представляет собой асимптотическое решение при  $t \gg 1/\nu$ . За такие времена устраняется роль начальных условий и устанавливается скейлинг.

Столь простое решение оказалось возможным, поскольку константа скорости ассоциации аэрозолей не зависит от их размеров и, следовательно, от массы\*).

\*.) Отметим, что для полученного распределения входящая в выражение (5.7) для константы скорости ассоциации величина равна

$$F = 1/2 + 1/2 \langle r \rangle \langle 1/r \rangle = 1,105$$

(здесь скобки означают усредненное по распределению аэрозолей); что дает для константы скорости ассоциации аэрозолей (5.7) значение  $k = 2,95 T/\eta$ . Эта величина не зависит не только от размера ассоциирующих аэрозолей, но и от природы аэрозолей. Для воздуха при комнатной температуре константа скорости ассоциации аэрозолей равна  $6,6 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ . Экспериментальные значения  $k$  в единицах  $10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  составляют [134]: 6,0 – для хлорида аммония; 6,6 – для окиси железа; 8,3 – для олеиновой кислоты; 4,9 – для смолы; 5,0 – для парафинового масла; 6,3 – для ксилолазо-нафтанола. Среднее статистическое значение данных эксперимента равно  $(6 \pm 1) \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ , что согласуется с приведенным выше теоретическим значением и свидетельствует о слабой зависимости константы скорости от материала аэрозоля.

Формула (5.9) позволяет сделать общие выводы относительно динамики рассматриваемого процесса, которые должны сохраняться для любого закона ассоциации частиц. Во-первых, через некоторое время система "забывает" о начальных условиях, т.е. имеется асимптотическое распределение, к которому система стремится независимо от начальных условий. Во-вторых, функция распределения по размерам допускает скейлинг, т.е. существует автомодельное решение, так что функцию распределения можно свести к функции от одной комбинации размера кластера и времени. Из "физики" процесса следует, что сделанные выводы должны сохраняться для разных законов слипания частиц при кластеризации. На базе этих представлений мы будем оценивать результаты исследования динамики образования фрактальных кластеров [135].

Основываясь на общих представлениях о процессе ассоциации частиц, остановимся на особенностях этого процесса при образовании фрактального кластера. В рассмотренном выше примере удалось получить решение для функции распределения ассоциирующих частиц (5.9) потому, что константа скорости ассоциации частиц не зависела от размеров сталкивающихся кластеров. В общем случае, представив зависимость константы скорости ассоциации от характерного размера сталкивающихся кластеров в виде

$$k \sim R^{2\omega}, \quad (5.12)$$

можно установить связь параметра  $\omega$  с параметрами, описывающими движение кластеров в пространстве и их структуру. Эта связь имеет вид (см. [136])

$$2\omega = -\gamma + d - D_\omega. \quad (5.13)$$

Здесь параметр  $\gamma$  характеризует зависимость коэффициента диффузии кластеров от его размеров (где  $\mathcal{D} \sim R^{-\gamma}$ ,  $R$  – радиус кластера),  $d$  – размерность пространства,  $D_\omega$  – фрактальная размерность, характеризующая движение кластеров в пространстве. Отметим, что в рассмотренном случае для компактной системы в трехмерном пространстве ( $d = 3$ ), для броуновского движения частиц в пространстве ( $D_\omega = 2$ ) и для коэффициента диффузии, обратно пропорционального размеру частиц ( $\mathcal{D} \sim 1/R$ ), имеем  $\omega = 0$ .

В случае броуновского движения кластеров в пространстве формула (5.13) может быть получена непосредственно из уравнения диффузии (5.1). Действительно, из этого уравнения имеем

$$k \sim \mathcal{D} R^{d-2} \sim R^{-\gamma + d - 2},$$

где  $R$  – радиус кластера. Это и дает формулу (5.13):  $2\omega = -\gamma + d - 2$  (для броуновского движения кластеров  $D_\omega = 2$ ).

Соотношение (5.13) позволяет получить скейлинг в случае кластер-кластерной ассоциации. Действительно, в этом случае (с учетом  $\bar{m} \sim R^D$ ) для характерного размера и массы кластеров [68] из формулы (5.11) имеем

$$R \sim t^{\frac{1}{D-2\omega}}, \quad \bar{m} \sim t^{\frac{D}{D-2\omega}}. \quad (5.14)$$

На основе соотношения (5.13) можем связать эти параметры с характеристиками движения кластеров в пространстве и их фрактальной размерностью.

Более полная информация об ассоциации кластеров следует из расчетов, где этот процесс моделировался в компьютерном эксперименте. В частности, на рис. 5.1 приводится распределение кластеров по размерам в разные моменты времени, полученное в одной из первых работ по кластер-кластерной агрегации. Из анализа таких распределений с набором подходящей статистики и составляется общая картина динамики процесса. Далее представим результаты таких работ. При этом будем считать, что функция распределения кластеров по размерам удовлетворяет зависимости (см. [137])

$$N_s(t) = t^{-w} s^{-\tau} F(s/t^z). \quad (5.15)$$

Здесь  $N_s(t)$  – число кластеров, содержащих в момент времени  $t$  число частиц, равное  $s$ ,  $F(x)$  – некоторая универсальная функция, которая зависит от характера сближения и слипания отдельных кластеров. Эта функция распределения связана с ранее использованной (в уравнении (5.8) и далее) функцией распределения по массам соотношением

$$f(m, t) \sim s N_s(t),$$

ибо масса кластера  $m$  пропорциональна числу частиц в нем  $s$ .

Из условия нормировки функции распределения (5.15)

$$\sum_s s N_s(t) = N_0$$

(где  $N_0$  – полное число частиц в системе) вытекает следующее соотношение между параметрами формулы (5.15) :

$$z(2 - \tau) - \omega = 0. \quad (5.16)$$

В работе [137] исследовалась динамика ассоциации кластеров в двумерном пространстве, причем считалось, что коэффициент диффузии не зависит от размера кластера ( $\gamma = 0$ ). Движение кластеров в пространстве моделировалось стандартным образом: кластер мог смещаться на постоянную решетку в любую сторону в соответствии с методом Монте-Карло, причем касание кластеров приводит к их слипанию.

В работе [138] был рассмотрен более общий случай, когда коэффициент диффузии кластера зависит от его размеров:

$$\mathcal{D} \sim R^{-\gamma} \sim s^{-\beta}, \quad \gamma = \beta D.$$

Заметим, что формулы (5.9) и (5.14), относящиеся к ассоциации жидких аэрозолей при  $\gamma = 1$ , отвечают следующим значениям параметров формулы (5.15):  $w = 2$ ,  $\tau = 0$ ,  $z = 1$ . Согласно результатам работы [138] для кластер-кластерной агрегации в трехмерном пространстве этому случаю ( $\beta = 1/D$ ) соответствуют  $w = 2,2$ ,  $z \sim 1$ . Формула (5.14) дает значение  $z = 1$ .

Остановимся еще на одной особенности функции распределения. Формула (5.9) соответствует тому, что небольших кластеров всегда больше, чем больших, хотя число малых кластеров убывает со временем. Такое заключение относится и к ассоциации фрактальных кластеров [137],

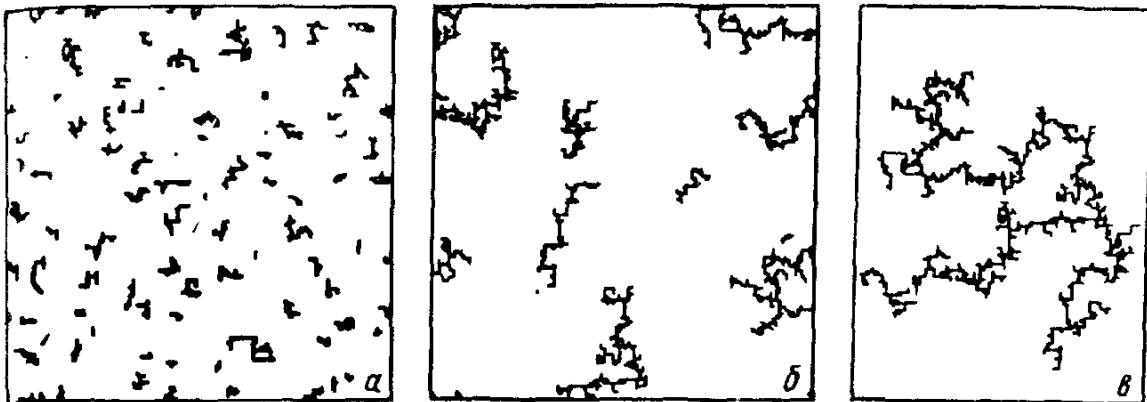


Рис. 5.1. Промежуточные этапы образования кластера ( $a \rightarrow b \rightarrow c$ ) в кластер-кластерной агрегации в соответствии с расчетами [55]. В этой модели частицы объединяются в малые кластеры, а те в свою очередь в кластеры больших размеров

если коэффициент диффузии не зависит от их размеров. Если же коэффициент диффузии кластеров уменьшается с увеличением их размеров, то при достаточно резкой зависимости получится, что малые кластеры исчезают значительно быстрее, чем успевают разрушиться большие. В этом случае функция распределения в формуле (5.15) перестает быть монотонной, т.е. ее максимальное значение не соответствует нулевому значению аргумента. В работе [138] получено, что переход от одной формы к другой происходит в двумерном случае при  $\beta_c = 0,25$ , а в трехмерном случае при  $\beta_c = 0,5$ . Отметим, что в рассмотренном ранее случае ассоциации жидких капель ( $\beta = 1/3$ ) отсутствует максимум в функции распределения. При наличии этого максимума ( $\beta > \beta_c$ ) меняется вид функции распределения (см. [138]):

$$N_s(t) \sim s^{-2} t^{-w} F(s/t^z),$$

и связь между параметрами этого распределения имеет вид  $w = 2z$ .

Имеется два способа установления скейлинга для процесса роста кластера. Один из них состоит в компьютерном моделировании роста кластера. В таком случае в каждый момент времени выясняются параметры кластера. Далее процесс роста кластера повторяется многократно, так что параметры кластера в каждый момент времени являются усредненными по многим случайным процессам. Из сравнения данных по разным моментам времени и устанавливается скейлинг. Другой способ получения скейлинга основан на анализе уравнения Смолуховского, описывающего рост кластера.

Ясно, что каждый из указанных способов имеет свои достоинства и недостатки. Метод, использующий анализ уравнения Смолуховского, более доступный и наглядный, однако использование уравнения Смолуховского для рассматриваемого случайного процесса требует дополнительного обоснования, ибо при этом пренебрегают пространственными флуктуациями в распределении плотности частиц. Последнее тем существенней, чем ниже размерность пространства, так что существует критическая размерность пространства  $d_c$ , ниже которой уравнение Смолуховского не пригодно для описания процесса роста кластера. Анализ [267, 268] показывает, что  $d_c = 2$ , т.е. в реальных случаях уравнение Смолуховского справедливо для описания рассматриваемого процесса.

В случае RLCA-режима агрегации скейлинг для функции распределения кластеров по массам может быть получен из анализа уравнения Смолуховского (5.8), которое для больших размеров кластеров имеет вид

$$\frac{\partial f(m, t)}{\partial t} = -f(m, t) \int_0^\infty v(m, m') f(m', t) dm' + \\ + \int_0^m v(m - m', m') f(m - m', t) f(m', t) dm'.$$

При больших значениях массы по сравнению со средней массой кластера ( $m \gg \bar{m}$ ) функция распределения может быть аппроксимирована зависимостью

$$f(m, t) \sim m^{-\tau},$$

причем параметр  $\tau$  определяется зависимостью ядра уравнения Смолуховского от массы. Задав функцию  $v(m_1, m_2) \sim m^\lambda$ , где  $m_1 \sim m_2 \sim m$ , получим следующую связь между параметрами (см. [95]):

$$\tau = \begin{cases} (3 + \lambda)/2, & \lambda > 1, \\ 3/2, & \lambda = 1. \end{cases}$$

Как видно, случай  $\lambda = 1$  является особой точкой уравнения. В этом случае  $\tau = 1,5$  и средняя масса кластера экспоненциально растет со временем.

Исследования показывают, что реально RLCA-режим находится вблизи этой особой точки. Так, согласно измерениям [129]  $\tau = 1,5 \pm 0,1$ . В соответствии с расчетом [78] имеем  $\lambda = 1,06 \pm 0,02$ , а согласно [269] параметр  $\lambda$  находится в интервале между 1,0 и 1,1 и параметр  $\tau$  скорее ближе к 2,0, чем к 1,5. При этом указанная выше зависимость между параметрами отвечает случаю, когда частицы, входящие в состав кластера, являются жесткими сферами одинакового радиуса. Для полидисперсной смеси или в случае нежестких частиц представленная связь несколько изменится, а поскольку мы находимся вблизи особой точки, изменения для скейлинга могут стать существенными [324]. При этом параметр  $\tau$  находится в интервале между 1 и 2.

Для DLA-режима роста кластера скейлинг устанавливается более простым способом [139]. Скорость измерения числа частиц в кластере  $N$  равна

$$dN/dt = J,$$

причем ток частиц на кластер согласно формуле составляет (5.1)  $J \sim \sim Dn_0 R^{d-2}$ , где  $n_0$  — плотность свободных частиц вдали от кластера,  $d$  — размерность пространства. Отсюда, учитывая, что число частиц в кластере связано с его размером соотношением  $N \sim R^D$ , получаем связь между размером кластера и временем:

$$R^\alpha \sim t, \quad \alpha = D - (d - 2). \quad (5.17)$$

В частности, в трехмерном пространстве  $\alpha = 1,5^*$ ). При этом анализ [140]

---

\*Согласно формулам (5.13), (5.14) при  $\gamma = 0$  имеем  $\alpha = D - 2\omega = D - (d - D\omega)$ , что для броуновского движения частиц ( $D\omega = 2$ ) совпадает с приведенным результатом

показывает, что существует критическая скорость роста кластера, ограниченная плотностью частиц, находящихся в зоне проникновения частиц в кластер. Если скорость роста кластера превысит критическую, изменится характер роста кластера, а соответственно и его структура.

При исследовании процесса кластер-кластерной ассоциации мы считали, что для образующихся кластеров выполняется условие газовости, т.е. объем, приходящийся на один кластер, значительно превышает занимаемый объем. Однако, поскольку по мере роста размера кластера средняя плотность вещества в нем падает, на некоторой стадии процесса условие газовости нарушится. Тогда мы получим набор фрактальных кластеров, среднее расстояние между которыми сравнимо с их размерами. Дальнейший процесс ассоциации кластеров приведет к образованию одного большого кластера. Эта стадия моделирует процесс гелеобразования (затвердевания коллоидной массы в растворе), т.е процесс перехода из золя в гель. (Золем называется отдельная частица в растворе, гелем – состоящий из этих частиц кластер). Процессу гелеобразования свойственна своя специфика [141, 142], и образуемый кластер характеризуется более высокой фрактальной размерностью, чем в случае, когда для ассоциирующих кластеров выполняется условие газовости.

**5.2. Времена образования кластеров с фрактальной структурой.** Наряду с пониманием физической природы формирования кластеров важное значение для анализа этого процесса имеет оценка времен, за которые кластер может сформироваться. На основе таких оценок можно сделать вывод о возможности образования кластера с фрактальной структурой в конкретной физической ситуации при наличии набора конкурирующих процессов. Далее в рамках рассмотренных ранее моделей образования кластеров из частиц будут получены выражения и оценки для времен образования кластеров из частиц.

Будем рассматривать необратимый физический процесс, когда в начальный момент времени рассматриваемое вещество находится в виде газа или пара в бесконечной среде. Далее из этого газа формируются частицы определенных размеров. Наше внимание будет сосредоточено на следующей стадии, когда эти частицы объединяются в кластер. Процесс заканчивается, когда кластер становится бесконечно большим. Например, если имеет место кластер-кластерная ассоциация, то процесс заканчивается, когда отдельные кластеры становятся настолько большими и разреженными, что касаются друг друга и занимают весь объем. Другими словами, средняя плотность материала в кластере равна средней плотности материала в объеме, которая в процессе формирования кластера не меняется. Тем самым кластеры объединяются в один кластер бесконечных размеров.

Отметим, что данная стадия процесса является более медленной по сравнению с первой стадией – образованием макрочастиц из газа или пара. Действительно, формирование кластера из макрочастиц определяется движением макрочастиц в среде, тогда как образование макрочастиц из газа или пара – движением атомов или молекул вещества. Тем самым время образования кластера при релаксации газа или пара определяется скоростью второй фазы – образованием кластера из макрочастиц.

Рассматриваемый процесс объединения макрочастиц в кластер моделирует не только процесс релаксации газа или пара с образованием кластеров, но и процесс превращения золя в гель, который имеет место в растворах. Процесс гелеобразования играет важную роль в коллоидных растворах. Он имеет существенное значение при образовании стекол, ибо формируемая при этом структура влияет на свойства конечного продукта. Этот процесс представляет интерес для биофизики и ответствен за образование появляющихся там структур. При этом процесс образования геля в растворе в этих случаях неотделим от протекающих при этом электрохимических процессов. Именно эти процессы формируют химический состав и структуру новой фазы и определяют время создания геля.

При расчете времени формирования кластеров мы будем считать, что частицы совершают диффузионное движение в среде, и для механизма образования кластера используем две ранее представленные модели (см. § 3). В первой из них кластер растет по мере прилипания к нему отдельных частиц (DLA-модель), а во втором (CCA-модель) частицы объединяются в кластеры и имеет место кластер-кластерная ассоциация. В результате возникает много кластеров, которые соединяются друг с другом, так что со временем характерный размер кластеров растет, а число их падает. Далее мы рассмотрим обе модели, хотя в данном случае предпочтение следует отдать второй из них.

Для упрощения математических выкладок предположим, что все частицы сферические и имеют один и тот же размер, кроме того, будем считать, что соприкосновение частиц или кластеров приводит к их объединению. Следует учитывать диффузионное движение частиц в среде, а также диффузионное движение кластеров и их падение в среде под действием силы тяжести. При этом для простоты будем считать, что сопротивление среды кластеру такое же, как для сферической частицы радиусом, соответствующим размеру кластера. В рамках этих предположений найдем количественные характеристики процесса гелеобразования.

Рассмотрим сначала первый механизм, т.е. когда кластер растет за счет прилипания к нему отдельных частиц. Число частиц в кластере  $n$  удовлетворяет уравнению

$$dn/dt = \nu_0 + \nu_1, \quad (5.18)$$

где  $\nu_0$  — частота прилипания к кластеру частиц, совершающих броуновское движение,  $\nu_1$  — частота захвата кластером частиц в результате его падения в поле сил тяжести. Для простоты далее будем считать, что частицы, составляющие кластер, одинаковы. Радиус кластера  $R$  и число частиц в нем  $n$  в соответствии с формулой (2.9) связаны соотношением

$$n = (R/r_0)^D, \quad (5.19)$$

где  $r_0$  — радиус отдельной частицы,  $D$  — фрактальная размерность кластера

Частота прилипания частиц к кластеру при диффузионном движении частиц определяется формулой Смолуховского [133] и имеет вид

$$\nu_0 = 4\pi DRN, \quad (5.20)$$

где  $\mathcal{D}$  – коэффициент диффузии частиц в среде,  $N$  – их число в единице объема. Коэффициент диффузии в случае, когда размер частиц превышает длину пробега молекул в среде, определяется формулой (5.6). Отсюда с учетом (5.6) получим

$$\nu_0 = k_0 N n^{1/D}, \quad (5.21)$$

где константа скорости  $k_0 = 2T/(3\eta)$  не зависит от материала и размера частиц. Для воздуха при  $T = 300$  К эта величина равна  $1,5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ , а для воды при той же температуре она составляет  $3,2 \cdot 10^{-12} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ .

Частота захвата частиц падающим кластером определяется по формуле

$$\nu_1 = \pi R^2 v N, \quad (5.22)$$

где  $v$  – скорость падения кластера под действием силы тяжести. Моделируя кластер круглой частицей, имеем (см. [143])

$$v = \frac{2\rho r_0^2 g}{9\eta};$$

здесь  $\rho$  – разность плотностей материала частиц и среды. При этом мы неявно используем условие, что поры в кластере заняты материалом среды, в которой он растет. Для частоты захвата частиц кластером получаем

$$\nu_1 = k_1 N n^{\frac{D+1}{D}}, \quad k_1 = \frac{2\pi\rho g r_0^4}{9\eta}. \quad (5.23)$$

Подставляя (5.21) и (5.23) в уравнение (5.18), получаем для времени роста кластера

$$t = \frac{1}{N} \int \frac{dn}{k_0 n^{1/D} + k_1 n^{1+1/D}}. \quad (5.24)$$

Считая, что  $k_0 \gg k_1$ , получаем что этот интеграл в основном сходится при  $n \sim k_0/k_1 \gg 1$ , так что в качестве нижнего и верхнего пределов в (5.24) можно подставить соответственно нуль и бесконечность. Вычисляя интеграл в предположении, что число частиц в образуемом кластере  $n$  значительно превышает отношение  $k_0/k_1$ , получаем для времени его роста уравнение

$$t = \frac{\pi}{N k_0^{1/D} k_1^{1-1/D} \sin(\pi/D)}. \quad (5.25)$$

Более реальная физическая ситуация при превращении золя в гель имеет место, когда частицы объединяются в малые кластеры, которые далее ассоциируют друг с другом [54, 55]. Так же как и в предыдущем случае, со временем происходит укрупнение кластеров, однако процесс развивается по другому сценарию, так что в объеме отсутствуют отдельные частицы. Используя те же механизмы ассоциации, что и в предыдущем случае, преобразуем выражения (5.21) и (5.23) для частот ассоциации, которые в данном случае принимают вид

$$\nu_0 = 4\pi(D_1 + D_2)(R_1 + R_2)N_2, \quad (5.26)$$

$$\nu_1 = \pi(R_1 + R_2)^2 |v_1 - v_2| N_2; \quad (5.27)$$

здесь индексы 1 и 2 относятся к двум ассоциируемым кластерам, а сами частоты характеризуют баланс для кластеров первого сорта. При этом формула (5.27) отвечает случаю, когда более тяжелый кластер находится сверху. В противном случае кластеры не соприкасаются и  $\nu_1 = 0$ .

Используя простую функцию распределения кластеров по размерам  $f \sim \exp(-n/n_0)$ , получаем вместо (5.18) следующее уравнение для среднего числа частиц  $n_0$  в кластере:

$$dn_0/dt = N_0 k_0 a_0 + N_0 k_1 a_1 n_0^{1+1/D}. \quad (5.28)$$

Здесь  $N_0$  – первоначальная плотность частиц, константы скорости  $k_0$  и  $k_1$  даются ранее полученными выражениями ( $k_0 = 2T/(3\eta)$ ,  $k_1 = 2\pi\rho gr_0^4/(9\eta)$ ), а численные параметры  $a_0$  и  $a_1$  определяются характером распределения кластеров по размерам и для простой функции распределения  $f \sim \exp(-n/n_0)$  равны  $a_0 = \pi + 2$ ,  $a_1 = 1,4$ . Отсюда находим время гелеобразования:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^\infty \frac{dn_0}{N_0(k_0 a_0 + k_1 a_1 n_0^{1+1/D})} = \\ &= \frac{\pi D}{(D+1) N_0 \sin\left(\frac{\pi}{D+1}\right) (k_0 a_0)^{1/(D+1)} (k_1 a_1)^{D/(D+1)}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

По мере укрупнения кластера средняя плотность вещества в нем снижается. Когда кластеры достигнут характерных размеров  $\bar{R}$ , при которых средняя плотность вещества в нем станет порядка средней плотности вещества в объеме, они будут занимать весь объем. Последующее объединение кластеров в единый гель определяется их близостью, причем фрактальные свойства геля будут проявляться только на расстояниях, не превышающих размеров  $\bar{R}$ , а размеры пар в образованном геле также будут ограничены этой величиной.

Отметим, что полученные выражения для времени гелеобразования относятся к случаю, когда при малых размерах частиц более быстрый процесс ассоциации связан с диффузией частиц в среде, а при укрупнении кластеров их ассоциация обусловлена движением кластеров в поле сил тяжести. Это имеет место при выполнении условий

$$r_0^4 \ll T/(\rho g) \ll R^{-4}, \quad (5.30)$$

где  $r_0$  – размер первоначальных частиц,  $\rho$  – разность массовых плотностей материала частиц и среды,  $g$  – ускорение свободного падения,  $T$  – выраженная в энергетических единицах температура среды. Если правая часть неравенства не выполняется, то второй механизм ассоциации не существен, и из уравнения (5.28) получим следующую оценку для времени гелеобразования:

$$t \sim \frac{\tilde{n}_0}{N_0 k_0 a_0} \sim \frac{1}{N_0 k_0 a_0} \left( \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \right)^{D/(3D)}, \quad (5.31)$$

где  $\rho_0$  – массовая плотность материала частиц,  $\bar{\rho}$  – средняя массовая плотность вещества в объеме,  $\tilde{n}_0$  – среднее число частиц в кластере, когда кластеры заполняют весь объем.

Таблица 5.1

## Время формирования кластера

$Z, \text{ г/г}$	$t$ (в секундах) при $r_0$ (в нанометрах), равных				
	1	3	10	30	100
0,1	0,26	7,0	25	40	67
0,3	0,017	0,45	8,3	13	22
1,0	$8,2 \cdot 10^{-4}$	0,022	0,82	4,0	6,7

Для получения представлений о реальных величинах проведем числовые оценки. Выберем в качестве фрактальной размерности кластера значение  $D = 1,8$ , которое является средним для кластеров, образованных при кластер-кластерной ассоциации с броуновским законом движения кластеров в среде и при прямолинейной траектории их движения. В качестве материала кластеров возьмем двуокись кремния, плотность которой  $\rho_0 = 2,2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , а в качестве среды — атмосферный воздух при комнатной температуре ( $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ). Тогда время образования большого кластера определяется двумя параметрами:  $r_0$  — размером частиц, из которых формируется кластер, и  $Z$  — отношением массы материала кластера в объеме к отношению массы воздуха в том же объеме. При этом мы считаем, что материал кластера занимает большой объем, размеры которого велики по сравнению с максимальным радиусом корреляции  $\bar{R}$ , и что в процессе образования кластера средняя плотность материала в объеме сохраняется. Тогда образующийся кластер представляет собой пористое вещество с максимальными размерами пор порядка  $\bar{R}$ . Он обладает фрактальными свойствами при  $r \ll \bar{R}$  и является однородным при  $r \gg \bar{R}$ . В табл. 5.1 приводятся времена формирования кластера при указанных условиях и разумных значениях параметров. В каждом случае время формирования кластера рассчитывается по формулам (5.29) и (5.31) и отвечает наименьшему из полученных значений.

Рассмотренные модели отвечали предположению, что вероятность слипания частиц при их соприкосновении не мала, так что частицы объединяются после соприкосновения. Возможно, это происходит после многих соприкосновений, т.е. вероятность слипания мала, но частицы соединяются до того, как разойтись на большие расстояния в результате диффузионного движения. Такое предположение соответствует DLA- и CCA-моделям формирования кластера. Далее мы исследуем другой предельный случай, т.е. когда вероятность слипания частиц при их соприкосновении мала. Этот случай соответствует модели формирования кластера, в которой время этого процесса ограничивается вероятностью слипания частиц при их соприкосновении.

Получим выражение для частоты слипания частиц, заменяющее формулу (5.26). Пусть имеются две макроскопические частицы с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , которые совершают диффузионное движение в среде с коэффициентами диффузии соответственно  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_2$ . Очевидно, относительное движение частиц характеризуется коэффициентом диффузии  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ .

Введем параметр  $\gamma$  – вероятность того, что частицы при соприкосновении друг с другом образуют жесткую связь. Обозначая через  $N(r)$  плотность частиц второго сорта на расстоянии  $r$  от пробной частицы первого сорта (причем  $N(\infty) = N_2$ ), получаем из решения диффузационного уравнения  $\mathcal{D} \Delta N = 0$  следующую формулу для плотности частиц:

$$N(r) = N_2 - C/r; \quad (5.32)$$

здесь  $C$  – константа интегрирования. Далее для потока объединяющихся частиц имеем

$$j = \gamma \sqrt{\frac{T}{2\pi\mu}} N(r_0) = - \mathcal{D} \left. \frac{dN}{dr} \right|_{R_0},$$

где  $R_0 = R_1 + R_2$  – сумма радиусов частиц,  $\mu$  – их приведенная масса,  $T$  – температура среды; в первом случае мы использовали кинетическое выражение для потока ассоциируемых частиц, во втором – диффузионное выражение для этой величины, соответствующее расстоянию между их поверхностями, которое значительно превышает длину пробега частиц.

Используя в этом соотношении формулу (5.32) для плотности частиц, найдем значение параметра  $C$  и далее получим выражение для частоты рекомбинации пробной частицы первого сорта с частицами второго сорта:

$$\nu_0 = 4\pi R_0^2 j = 4\pi R_0 \mathcal{D} N_2 \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad (5.33)$$

где  $\alpha = \gamma \sqrt{\frac{T}{2\pi\mu}} R_0 / \mathcal{D}$ . Сравнивая с формулой (5.4) для рассматриваемой

частоты ассоциации частиц, находим, что использованная ранее формула справедлива при не очень малом значении вероятности ассоциации:

$$\gamma \ll \mathcal{D} \sqrt{\frac{T}{2\pi\mu}} R_0.$$

В частности, используя формулу (5.6) для коэффициента диффузии макроскопической частицы в газе в случае, когда размер частиц превышает длину свободного пробега молекул газа, учитывая оценку для коэффициента вязкости газа и пренебрегая числовыми множителями, получаем эту оценку в виде

$$\gamma \gg \sqrt{a/R_0}. \quad (5.34)$$

Здесь величина  $a$  порядка размера молекулы. Эта оценка показывает, что в зависимости от значения параметра  $\gamma < 1$  возможны разные режимы ассоциации частиц.

Далее мы рассмотрим режим RLCA, когда параметр  $\gamma$  мал и удовлетворяет соотношению, противоположному (5.34). Тогда ассоциация частиц лимитируется малой вероятностью их слипания при соприкосновении. Будем считать, что вероятность ассоциации кластеров при их соприкосновении не зависит от размера кластера. Тогда вместо формулы (5.26) имеем следующее выражение для частоты ассоциации кластеров:

$$\nu_0 = \gamma \sqrt{\frac{T}{2\pi\mu}} \cdot 4\pi(R_1 + R_2)^2 N_2. \quad (5.35)$$

При этом, как и ранее, мы считаем, что кластеры ведут себя подобно макроскопическим частицам, обладающим массой и радиусом кластера.

Используя простую формулу для функции распределения кластеров по числу частиц  $n$  в них:  $f \sim \exp(-n/n_0)$ , где  $n$  – среднее число частиц в кластере, усредним формулу (5.35) по числу частиц в кластере. Учитывая, что радиус кластера  $R$  пропорционален  $n^{1/D}$ , а масса кластера пропорциональна  $n$ , получаем

$$v_0 = \gamma \kappa_0 n^{\frac{2}{D} - \frac{1}{2}} N_2. \quad (5.36)$$

Здесь

$$\kappa_0 = J \sqrt{\frac{T}{2\pi m_0}} \cdot 4\pi r_0^2,$$

где  $m_0$  – масса отдельных макрочастиц, из которых составлен кластер,  $r_0$  – их радиус. Числовой коэффициент в этой формуле равен

$$J = \int_0^\infty e^{-x} dx \int_0^\infty e^{-y} dy \sqrt{\frac{x+y}{xy}} (x+y)^{2/D}.$$

В случае  $D = 2$  он составляет  $J = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (\pi + 2) = 6,8$ .

Учитывая далее, что значение фрактальной размерности кластера близко к 2, и используя указанное значение числового коэффициента, имеем для искомой константы скорости

$$\kappa_0 = 17 \sqrt{T r_0 / \rho_0}. \quad (5.37)$$

где  $\rho_0$  – массовая плотность материала частиц.

Подставляя выражение (5.36) в уравнение (5.18), для времени ассоциации вместо (5.25) получаем следующее выражение:

$$t = \int_0^\infty \frac{dn_0}{N_0 (k_0 n_0^{\frac{2}{D} - \frac{1}{2}} + k_1 a_1 n_0^{1+1/D})} = \\ = \frac{2\pi D}{N_0 (3D-2) \sin \left( \frac{2\pi}{3D-2} \right) k_0^{\frac{2}{3D-2}} (k_1 a_1)^{\frac{3D-4}{3D-2}}}, \quad (5.38)$$

где

$$k_0 = \gamma \kappa_0 = 17 \gamma \sqrt{T r_0 / \rho_0}.$$

В частности, используя значение размерности фрактального кластера  $D = 2,12$ , для рассматриваемого режима ассоциации на основании этой формулы получаем

$$t = \frac{2,6}{N_0 k_0^{0,46} k_1^{0,54}} = \frac{0,86 \eta^{0,54}}{N_0 \gamma^{0,46} T^{0,23} \rho_0^{0,31} r_0^{2,39} g^{0,54}},$$

<sup>a</sup> Для атмосферного воздуха при комнатной температуре для частиц

двуокиси кремния (плотность  $\rho_0 = 2,2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ) имеем

$$t = \frac{0,19}{N_0 \gamma^{0,46} r_0^{2,39}},$$

где  $N_0$  выражено в кубических сантиметрах, размер частиц  $r_0$  — в сантиметрах, время  $t$  — в секундах.

Формула (5.38) справедлива при относительно малой начальной плотности частиц, так что максимальный радиус корреляции в образующемся кластере велик по сравнению с размерами кластера, вносящими основной вклад в интеграл (5.38). В другом предельном случае время формирования кластера определяется первым из описанных механизмов и согласно формуле (5.38) составляет

$$t \sim \tilde{n}_0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{D} / N_0 k_0,$$

где  $\tilde{n}_0 \sim (\rho_0 / \bar{\rho})^{\frac{D}{3-D}}$  — характерное число частиц в кластере, когда кластеры занимают весь объем, т.е. соседние кластеры касаются друг друга. Здесь  $\bar{\rho}$  — средняя плотность вещества кластера в большом объеме. В табл. 5.2 представлены рассчитанные по формулам (5.38) и (5.39) значения времени формирования кластеров в атмосферном воздухе.

Анализ приведенных результатов и сравнение их с данными табл. 5.1 свидетельствуют о том, что в реальной ситуации кластеры могут быть получены из частиц небольших размеров при высокой концентрации материала в среде. Именно если время формирования кластера достаточно велико, то процессы, связанные с уносом материала из исследуемого объема, не дадут сформироваться кластеру.

**5.3. Особенности процесса роста.** При исследовании процесса формирования кластера мы считали, что этот процесс осуществляется достаточно быстро, так что первоначальная масса частиц в заданном объеме не меняется во время этого процесса. Анализ данных табл. 5.1 и 5.2 показывает, что реально этот процесс осуществляется в газе или в растворе для частиц малых размеров — порядка 1 нм, а также для относительно высокой плотности материала. Но и в этом случае реальные газодинамические условия могут приводить к несохранению массы частиц в объеме. Одна из таких возможностей рассматривалась в работе [144]. В объем постоянно вводятся новые простые частицы, причем скорость ввода в единицу объема за единицу времени равна  $k$ . Число кластеров в системе зависит от времени по закону

$$N(t) \sim k^\alpha f(k^\beta t),$$

причем [145]  $\alpha + \beta = 1$ , а асимптотические выражения для искомой функции равны

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \ll 1, \\ 1, & x \gg 1. \end{cases}$$

Действительно, на первой стадии число кластеров в системе пропорционально числу простых частиц в ней, на последней стадии система выходит на на-

Таблица 5.2

Время роста кластера в режиме ассоциации для значений вероятности  $\gamma^*$ ) слипания частиц при соприкосновении, равных  $10^{-3}$

$Z, \text{ г/г}$	$t$ (в секундах) при $r_0$ (в нанометрах), равных		
	1	3	10
0,1	2,4 (200)	47 (310)	98 (640)
0,3	5,1 (53)	16 (100)	33 (210)
1,0	0,25 (16)	3,9 (31)	9,8 (64)

\*) Значения для  $\gamma = 10^{-5}$  приведены в скобках.

сыщение. При этом зависимость коэффициента диффузии из размера кластеров проявляется только на хвосте функции распределения, который не влияет на ее нормировку. В трехмерном пространстве найденные значения искомых параметров составляют [144]:  $\alpha = 0,47 \pm 0,05$  и  $\beta = 0,54 \pm 0,05$ .

Более сложная модель, включающая в себя ассоциацию кластеров и испарение частиц, рассмотрена в работе [146]. В двумерном пространстве при наличии этих процессов из компактного образования генерируется облако кластеров, которое в течение долгого времени характеризуется экспоненциальным распределением кластеров по размерам и одинаковой фрактальной размерностью кластеров. В случае диффузационного движения кластеров значение их фрактальной размерности близко к 1, а в случае движения кластеров по линейным траекториям — к 4/3.

Полученная информация о динамике процесса ассоциации аэрозолей позволяет составить представление об этом процессе, что в свою очередь помогает проводить качественный и количественный анализ таких явлений.

Среди других особенностей процесса формирования кластера отметим, что этот процесс протекает в неравновесной системе. Если это плазма или раствор, то частицы могут оказаться одноименно заряженными, что затормозит процесс формирования кластера. В рамках рассмотренных моделей это отвечает уменьшению вероятности слипания частиц при их соприкосновении. Некоторый анализ формирования кластера в унипольярной плазме проведен в обзоре [147].

Отметим еще одну особенность процесса формирования кластера, если он протекает в газово-плазменной системе. В том случае, когда начальная высокая плотность частиц создается испарением материала под действием электрического тока, на начальной стадии релаксации созданного пара из затвердевших аэрозолей образуются аэрозоли цилиндрической формы. Такой процесс имеет место при наличии электрических полей в системе. В качестве демонстрации этого утверждения приведем рис. 5.2, который отражает характер взаимодействия цилиндрического и сферического аэрозолей в однородном электрическом поле, когда под действием этого поля на аэрозолях наводятся заряды, вызывающие это взаимодействие.

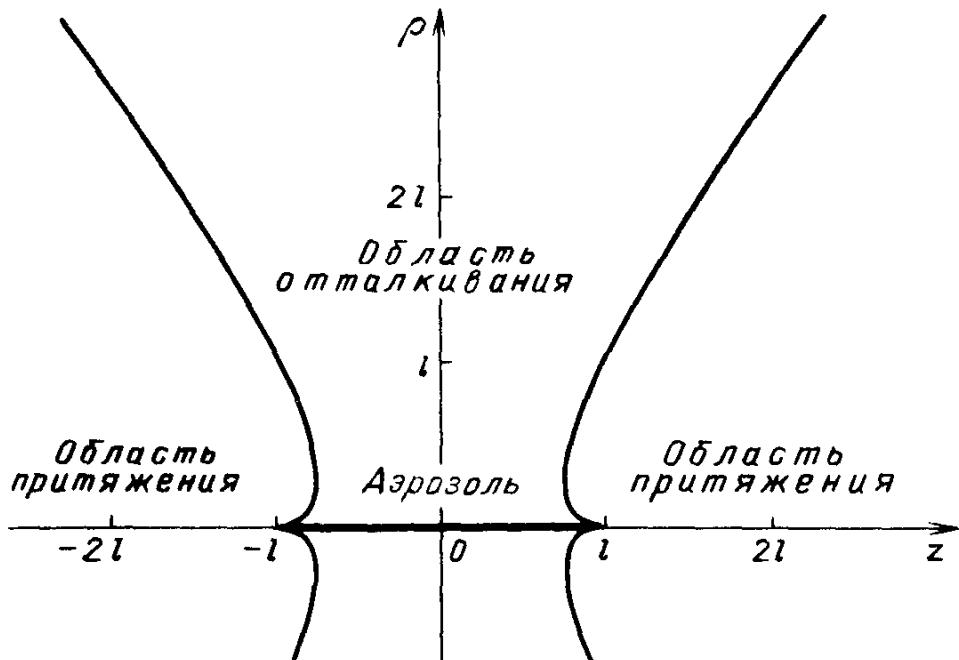


Рис. 5.2. Характер взаимодействия цилиндрического и сферического аэрозолей в однородном электрическом поле

Приведем теперь конкретный пример, отвечающий реальной ситуации. Пусть радиусы сферического и цилиндрического аэрозолей равны 1 мкм, длина цилиндрического аэрозоля в 100 раз больше. Пусть сферический аэрозоль находится на продолжении оси цилиндрического аэрозоля на расстоянии от его конца, равном десяти радиусам. Тогда энергия притяжения аэрозолей за счет взаимодействия наведенных зарядов будет равна средней тепловой энергии частицы для комнатной температуры газа при напряженности электрического поля менее  $200 \text{ В} \cdot \text{см}^{-1}$ .

Этот пример подтверждает то, что на начальной стадии ассоциации твердых аэрозолей могут образовываться структуры, имеющие цилиндрическую форму. Этот факт хорошо известен в физике аэрозолей [134, 148, 149], где такие системы называются цепочечными агрегатами. Известно, что цепочечные агрегаты образуются при электрическом способе создания аэрозолей. Укажем в качестве примера на эксперименты пятидесятилетней давности [150], в которых показано, что дымы окиси магния, полученные в дуговом разряде, содержат цепочечные агрегаты, тогда как в дыме, получаемом при сжигании магниевой ленты, частицы окиси магния имеют компактную структуру.

Образование цепочечных агрегатов на первой стадии ассоциации аэрозолей способствует созданию на следующей стадии более рыхлых кластеров, чем получилось бы из ассоциации аэрозолей с компактной структурой. Поэтому рассмотренный факт должен быть учтен при анализе ассоциации аэрозолей, образованных после испарения материала в дуговом разряде, при взрыве проволочек, под действием молнии или импульсного разряда и при других электрических способах воздействия.

## § 6. Аналоги фрактальных кластеров

**6.1. Физические процессы, подобные процессу роста фрактального кластера.** Процесс роста фрактального кластера при агрегации твердых частиц имеет аналогии с целым рядом физических и физико-химических процессов и явлений. В первую очередь это относится к механизму образования фрактальных структур в разных физических явлениях, которые могут приводить к разным структурам, и фрактальная структура является одной из возможностей соответствующего явления. При этом аналогии между процессом роста фрактального кластера и другими явлениями определяются их одинаковым математическим описанием.

Для того чтобы показать это, рассмотрим процесс роста фрактального кластера с других позиций, выбрав в качестве параметра кластера  $N(r)$  – плотность его вещества в пространстве и рассматривая рост кластера как стационарный процесс. Рассмотрим рост кластера в DLA-режиме, когда частицы, совершая диффузионное движение в пространстве, прилипают к кластеру. Рост кластера в данном случае может быть описан на основании уравнения непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0,$$

где поток частиц  $j$  на кластер определяется их броуновским движением и равен  $j = -\mathcal{D} \nabla N$  ( $\mathcal{D}$  – коэффициент диффузии). Отсюда получаем стандартное диффузионное уравнение для плотности вещества в пространстве:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mathcal{D} \Delta N.$$

В стационарном случае значения градиента плотности относительно малы и рост кластера идет почти с постоянной скоростью. При этом уравнение для плотности вещества в пространстве имеет вид уравнения Лапласа

$$\Delta N = 0, \quad (6.1)$$

которое необходимо дополнить граничным условием, описывающим характер роста кластера. С учетом того, что мы оперируем с непрерывной функцией  $N(r)$ , проведем непрерывную границу кластера, которая для фрактального кластера должна иметь сильно изрезанный вид. Рост кластера идет с его выступающими частями. Поэтому граничное условие – скорость роста границы кластера – следует задать в виде

$$v = a \mathbf{n} \nabla N, \quad (6.2)$$

где  $a$  – числовой коэффициент,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный перпендикулярно границе.

Давайте проанализируем рост фрактального кластера с позиций уравнений (6.1) и (6.2). Создадим в начальный момент времени гладкую границу. Если на ней возникает неровность, то по мере роста она будет усиливаться, что приведет в конечном итоге к неустойчивости, вызывающей в дальнейшем увеличение градиента плотности на выступающих элементах границы. Эта неустойчивость вызывает уменьшение масштаба выступающих элементов в процессе роста. Для того чтобы приведенное описание процесса соответствовало росту фрактального кластера, к уравнениям (6.1) и (6.2) следует добавить минимальный масштаб размера элементов границы, который совпадает с размером частиц, составляющих фракталь<sup>3\*</sup>

ный кластер. Тогда такой подход описывает образование кластера с сильно изрезанной границей, причем минимальный масштаб элементов кластера является его параметром. При этом свойства и структура кластера, полученного представленным способом, совпадают с соответствующими характеристиками кластера, когда его сборка осуществляется присоединением к нему отдельных частиц, совершающих броуновское движение в пространстве (см. § 3).

Аналогия фрактального кластера с другими структурами и явлениями связана с их одинаковым математическим описанием. Именно формирование и эволюция систем, аналогичных фрактальному кластеру, описываются уравнениями (6.1) и (6.2), относящимися к другим величинам. Так, в случае диэлектрического пробоя [37–39] в эти уравнения вместо плотности частиц входит электрический потенциал, а в случае кристаллизации пленок на аморфной поверхности [40] этим параметром является температура. Для гидродинамических структур [41, 43, 45, 161–163], когда эти структуры формируются на границе двух фаз и движение одной из них (менее вязкой) в другую происходит под действием внешнего давления, этим параметром является давление. При этом в каждом из исследуемых явлений минимальный масштаб структуры, который в случае фрактального кластера вводился искусственно, определяется физической природой самого процесса. Поэтому в зависимости от физических параметров процесса могут образовываться разные структуры, в этом числе и не обладающие фрактальными свойствами.

Далее в качестве примера рассмотрим одну из структур, подобных фрактальному кластеру, — гидродинамические структуры. Рассматриваемое явление носит название "вязкие пальцы" и возникает в случае, когда газ или жидкость с малой вязкостью продавливается через жидкость с большей вязкостью (например, воздух или вода через масло или глицерин). Относительно большая скорость на границе раздела может вызвать разрушение границы и возникновение структуры, также носящей название "вязкие пальцы".

Наиболее простой и удобный способ реализации этого процесса осуществляется в так называемом приборе Хеле – Шоу, который состоит из двух параллельных прозрачных плоских пластин, расстояние между которыми мало по сравнению с их размерами. Пространство между пластинами заполнено вязкой жидкостью. В центре верхней пластины имеется отверстие, через которое под давлением вводится невязкая жидкость или газ. В конце эксперимента вводимая компонента занимает некоторую область в центральной части прибора. Эта область, опять-таки называемая "вязкими пальцами", может иметь фрактальную структуру.

Возможность образования фрактальной структуры зависит от того, с какой силой проталкивать невязкую компоненту в вязкую жидкость. Если скорость движения границы раздела достаточно велика, на ней возникает неустойчивость, связанная с тем, что неоднородности на границе раздела усиливаются. Это вызывает дробление масштаба на границе раздела. При этом минимальный масштаб элементов границы раздела определяется числом капиллярности  $N_{cap}$ , которое равно (см. [164]):

$$N_{cap} = v\eta/\sigma, \quad (6.3)$$

где  $v$  — скорость движения на вершине границы раздела,  $\eta$  — коэффициент вязкости для жидкости с большей вязкостью,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела. При значении  $N_{\text{cap}}$ , превышающем некоторое критическое значение, возникает неустойчивость границы раздела, которая связана с усилением неоднородностей на границе раздела. Анализ экспериментальных данных, проведенный Сафманом и Тейлором [164], показывает, что для прибора Хеле–Шоу критическое значение  $N_{\text{cap}}$ , начиная с которого возникает неустойчивость, составляет 0,04. Число капиллярности определяет и масштаб элементов структуры "вязких пальцев". В приборе Хеле–Шоу минимальный масштаб в двумерном случае равен (см. [165])

$$\lambda \sim b N_{\text{cap}}^{-1/2}. \quad (6.4)$$

Здесь  $b$  — расстояние между пластинами, которое в двумерном случае меньше минимальных фиксирующих размеров для вязких пальцев.

Остановимся на математическом описании развития вязких пальцев. Считая, что движение границы между фазами происходит под действием первоначально созданного давления, имеем для скорости движения границы (см. [166]) выражение

$$v = \frac{b^2}{12\eta} \nabla p, \quad (6.5)$$

где  $\nabla p$  — градиент давления. Как видно, уравнение (6.5) совпадает с граничным условием (6.2) с точностью до замены параметров в этих соотношениях.

Поскольку процесс формирования "вязких пальцев" описывается теми же уравнениями, что и рост фрактального кластера, в тех режимах, когда "вязкие пальцы" имеют фрактальную структуру, их фрактальная размерность должна совпадать с фрактальной размерностью DLA-кластера, которая в двумерном случае равна  $1,68 \pm 0,02$ . Действительно, расчеты [189] в рамках DLA-модели для кластера, образуемого в приборе Хеле–Шоу, показывают, что в центральной области этот кластер компактный и характеризуется фрактальной размерностью, равной 2. Наружной части этого кластера отвечает фрактальная размерность  $1,70 \pm 0,05$ , что находится в полном соответствии с DLA-моделью.

Приведем результаты экспериментальных исследований структур "вязкого пальцеобразования". Исследования [41] для "вязких пальцев", образующихся при впрыскивании воды в водный раствор полисахаридов, дают фрактальную размерность, близкую к 1,39. В работе [45] вода впрыскивалась в жидкую глину в радиальном приборе Хеле–Шоу. Фрактальная размерность существенно зависела от степени разбавления глины и для малой ее концентрации составляла  $1,68–1,84$ . Интересный цикл исследований образования "вязких пальцев" в жидких кристаллах был проведен в работах [162, 163, 167]. В силу большой вязкости жидкого кристалла условие развития неустойчивости на границе раздела облегчается, что упрощает получение "вязких пальцев" с фрактальной структурой. Этому способствует и существование анизотропности среды, которая связана с его кристаллической структурой. Измерения фрактальной размерности образующихся при этом структур дают значение фрактальной

размерности, равное  $2,00 \pm 0,08$  [163]. Как видно, отличие фрактальных размерностей исследуемых структур от значения, соответствующего DLA-модели, свидетельствует о более сложном характере этих явлений, выходящих за рамки указанной модели.

Принципиальной особенностью исследуемых систем является то, что они имеют детерминистическое описание, но не являются упорядоченными системами (см. [168–170]). Беспорядок в структуре этих систем создается неустойчивостями, возникающими в процессе их роста. Поэтому определенную роль в эволюции данных систем должны играть факторы, создающие большие флуктуации. К таким факторам относятся небольшая анизотропия системы [161, 172, 173], колебания и шумы в системе [94] и т.д. Большие флуктуации ведут к дроблению масштаба и созданию фрактальной структуры в стабильном процессе.

Однако поскольку рассматриваемые системы имеют детерминистическое описание, то в тех случаях, когда их развитие не приводит к возникновению неустойчивости, эти системы могут иметь симметричную структуру. В качестве примеров такого рода приведем рост кристаллов на аморфной поверхности, где образование кристаллической структуры управляет характером изменения температуры в пограничной области. В этом случае могут образовываться правильные кристаллические структуры, в том числе и шестигранные снежинки [44, 261]. Заметим, что при других условиях те же уравнения описывают образование фрактальной структуры [40].

Таким образом, фрактальный кластер, образуемый при прилипании твердых частиц к кластеру, является одной из систем с фрактальной структурой. Имеются другие системы и явления с другой природой, которые управляются близкими законами. Единый взгляд на эти системы позволяет более глубоко познать их природу. Например, гидродинамические фрактальные системы могут быть исследованы простыми экспериментальными методами, и их анализ позволяет понять влияние различных факторов на создание фрактальных структур. Тем самым исследование таких систем с единых позиций позволяет получить более глубокое представление о каждой из них.

Как отмечалось, "вязкие пальцы" не всегда имеют фрактальную структуру. Фрактальная структура имеет место в случае, когда минимальный масштаб межфазной границы, который определяется параметрами процесса, становится малым. На рис. 6.1 представлены результаты расчета [169] для структуры "вязких пальцев" в зависимости от параметров задачи. По мере уменьшения поверхностного натяжения и увеличения радиуса концов происходит более резкое деление масштаба межфазной границы при развитии системы, что делает фрактальные свойства системы более ярко выраженными.

Другой пример явления, которое описывается теми же уравнениями, что и рост DLA-кластера, представлен на рис. 6.2. Речь идет о диэлектрическом пробое, который создает своеобразную структуру свечения, носящую название "фигуры Лихтенберга". Для представленного на рис. 6.2 случая [41] один из электродов располагается в центре, а другой является окружностью на диэлектрической поверхности (см. также рис. 2.8). Свящущиеся области диэлектрика, по которым протекает пробойный ток, напоминает фрактальный кластер, фрактальная размерность которого, полу-

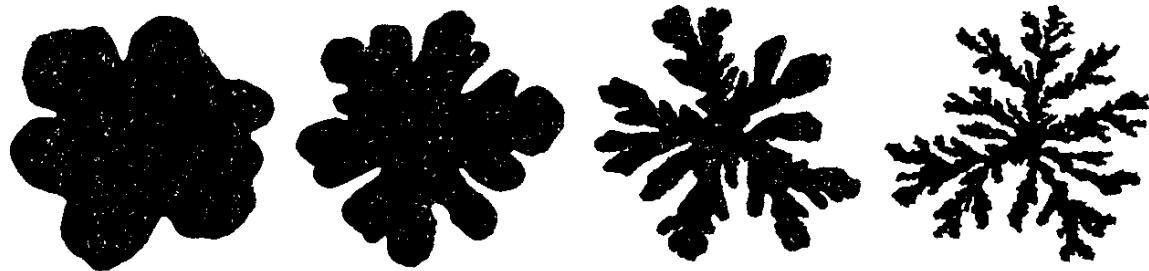


Рис 6.1 Структура "вязких пальцев" согласно результатам расчета [169] в случае впрыскивания невязкой жидкости в вязкую в приборе Хеле–Шоу в зависимости от скорости впрыскивания, поверхностного натяжения на границе фаз, размера системы и вязкости жидкости

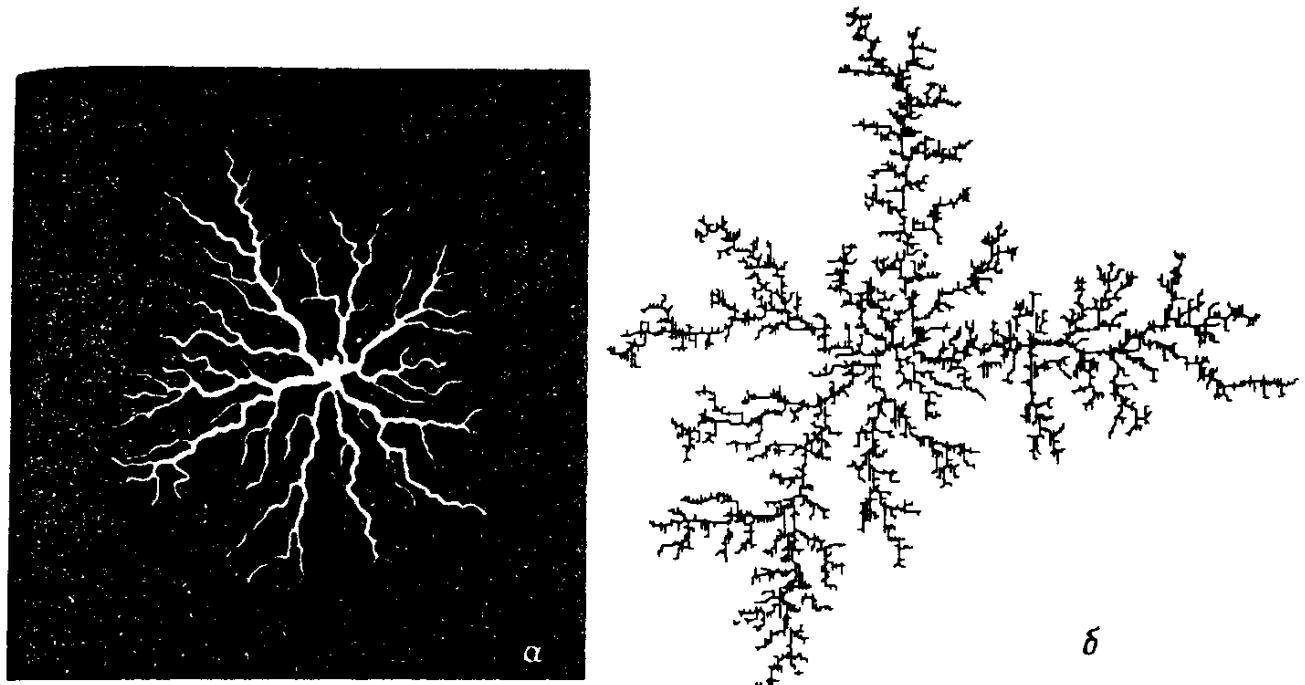


Рис 6.2 а – фигура Лихтенберга (пронтегрированная по времени интенсивность свечения от диэлектрического пробоя) для стеклянной пластинки, находящейся в  $SF_6$  под давлением 0,3 атм; б – картина, полученная при компьютерном моделировании процесса методом Монте-Карло [41]

Фрактальная размерность кластера  $1,75 \pm 0,02$

ченная из соотношения между размерами и числом элементов, составляет примерно 1,7. Из-за ограниченного разрешения не удается определить эту величину по корреляции между плотностями элементов. Простейшая модель такого разряда, включающая движение светящейся точки по ломанным линиям с заданным размером прямых отрезков, дает для фрактальной размерности фигуры Лихтенберга значение  $D = 1,75 \pm 0,02$ . При этом уравнение для потенциала электрического поля  $\varphi$ , которое вызывает пробой, описывается уравнением Лапласа  $\Delta\varphi = 0$ , что находится в полной аналогии с уравнением (6.1).

Рассмотренные системы и явления, которые имеют то же математическое описание, что и DLA-кластеры, могут быть использованы для моделирования фрактальных кластеров. Такой способ экспериментального моделирования фрактального кластера имеет свои особенности. он проще, чем экспериментальное исследование фрактального кластера, и даст о нем ин-

формацию, которая отличается от получаемой при компьютерном моделировании. Это свидетельствует о полезности экспериментального моделирования.

Тем самым экспериментальное моделирование процесса роста фрактального кластера может быть проведено разными способами. Иногда они могут сочетать простоту подхода и адекватность модели самому процессу. В качестве примера такого рода приведем моделирование процесса агрегации двумерного кластера с помощью небольших полипропиленовых шариков, находящихся на поверхности воды [327]. В результате изменения поверхностного натяжения воды вблизи шариков между отдельными шариками возникают капиллярные силы, приводящие к их взаимному притяжению. На первой стадии процесса шарики высыпаются на поверхность воды и далее под действием капиллярных сил сближаются и образуют кластер. При этом, поскольку соединения ближайших шариков в кластере не являются жесткими и шарики могут двигаться относительно друг друга, соприкасаясь друг с другом, со временем кластер уплотняется и его фрактальная размерность увеличивается. Таким образом, фрактальная размерность кластера зависит как от начальных плотности и числа частиц, так и от момента времени. Как видно, представленный простой модельный эксперимент позволяет изучать кинетику образования и трансформации кластеров при соответствующем характере их взаимодействия.

Несомненно, что такого рода экспериментальное моделирование должно занять свое место при изучении систем и явлений с фрактальной структурой.

**6.2. Пористые вещества и фрактальные структуры.** Пористые вещества близки к фрактальным структурам как системы с фрактальной структурой. Некоторые из них образуются в растворах и имеют ту же природу. Поэтому, если вырезать небольшой кусок такого пористого материала, мы получим фрактальный кластер. Некоторые процессы, протекающие в порах пористого вещества, имеют общие черты с процессом роста фрактального кластера. Далее мы представим некоторые свойства пористого вещества с позиции фрактального кластера, а также некоторые процессы внутри пористого вещества, которые имеют отношение к фрактальному кластеру.

Фрактальные свойства пористых веществ исследованы в работах [45–51]. Такая информация может быть получена на основании данных по рассеянию нейтронов и рентгеновского излучения при прохождении через образцы пористого вещества, если эти образцы прозрачны. Так, измерения по рассеянию электронов на образцах лигнита [49] дали для фрактальной размерности лигнита значение  $D = 2,56 \pm 0,03$ . Исследование фрактальных свойств песчаников [50] по рассеянию вторичных электронов в сканирующем электронном микроскопе привели к значениям фрактальной размерности образцов, находящиеся в интервале 2,57–2,87, причем фрактальная размерность зависела от сорта песчаника. Пористость образцов составляла 5 – 30%. Существенно, что фрактальные свойства образцов наблюдались в широком масштабе размеров – от 0,1 до 100 мкм. Значения фрактальной размерности свидетельствуют о том, что характер образования исследуемых пористых материалов ближе к SOS-модели ("твердое на твердом", см. п. 4.2), чем к DLA-модели.

Другой способ исследования фрактальных свойств пористого вещества может быть основан на исследовании зависимости его адсорбционных свойств при низких температурах от сорта поглощаемых молекул [49]. Чем меньше поглощаемая молекула, тем меньшие поры образца могут ее поглотить. Поэтому удельная адсорбционная площадь пористого вещества (которая представляет собой отношение площади внутренней поверхности образца к его массе) зависит от размеров поглощаемых молекул, а тем самым и от размеров малых пор, способных поглощать молекулы. Эта зависимость дает представление и о фрактальных свойствах пористого вещества [49].

Интересной оказывается структура вещества, поглощенного пористым телом, внутри него в том случае, когда поглощаемые молекулы образуют друг с другом прочные связи и заполняют небольшую часть внутреннего объема образца. Эксперименты такого рода были выполнены в работе [175], где исследовалась структура красителя (родамина Б или малахита зеленого), поглощенного пористым стеклом. На поры стекла приходилась 0,28 часть его полного объема, средний диаметр пор составлял 4 нм, удельная внутренняя поверхность стекла равнялась  $200 \text{ м}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ . Оказалось, что адсорбированное вещество образовывало фрактальный кластер с фрактальной размерностью  $1,74 \pm 0,12$ .

Другой круг вопросов относится к процессам, которые протекают внутри пористого вещества и имеют аналоги с процессом роста фрактального кластера. Один из них – химическое растворение пористого вещества активной жидкостью [176, 177]. Растворение вызывает разрушение пористого вещества, причем граница разрушения – граница пористого вещества – распространяется по нему в виде волн. Исследования показывают [176, 177], что эта граница имеет фрактальную структуру. При этом, если процесс растворения стартует от цилиндрической нити, то данный процесс описывается моделью п. 4.3, которая относится к образованию фрактального кластера в случае прилипания к подложке, являющейся цилиндрической нитью.

Экспериментальное исследование [176] этого процесса относилось к раствору образцов штукатурки ( $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$ ) в воде. Штукатурку перемещивали с водой в пропорции 1:1,1 по массе. Смесь помещали в форму, штукатурку насыщали водой и далее обеспечивали постоянный проток воды через образец таким образом, что сначала вода занимала область нити внутри образца; в дальнейшем граница растворения штукатурки имела форму кластера, растущего на нити. Зависимость радиуса растворенной области от времени имела вид  $R \sim t^\delta$ . Значения показателей  $\delta$ , полученных из обработки экспериментальных данных, равнялись  $0,7 \pm 0,2$  и  $0,65 \pm 0,07$ . Это находится в согласии с данными модели Микина, описанной в п. 4.3 ( $\delta = 0,665$ ). Таким образом, процесс химического растворения соответствует DLA-модели. В данном случае волна разрушения распространяется под действием давления воды. Флуктуации давления вызывают образование фрактальной структуры на фронте волны разрушения. Этот процесс имеет то же математическое описание, что и процесс роста фрактального кластера на нити в DLA-режиме.

Образование "вязких пальцев", рассмотренное в предыдущем пункте, удобно исследовать в пористом веществе. В этом случае пористое вещество

является матрицей, в которой протекает процесс. Пористое вещество создает трение движущимся жидкостям, так что в нем процесс образования "вязких пальцев" выглядит рельефнее, чем в других постановках. Этот процесс имеет и практическое значение – в плане очистки нефти. Поэтому процесс образования "вязких пальцев" в пористых средах исследовался во многих работах.

Микин [74] выполнил расчет для процесса замещения одной жидкости другой в пористом веществе, используя DLA-модель для процесса роста кластера. Для учета влияния пористой структуры была выведена многомерная фрактальная решетка, на которой происходит рост кластера. Оказалось, что в пределе, когда анизотропные эффекты подавляются случайными процессами, фрактальная размерность образуемого кластера равна  $1,71 \pm 0,01$ .

Справедливость DLA-модели для процесса образования "вязких пальцев" в пористой среде подтверждается проведенными экспериментальными исследованиями. Согласно результатам работы [178], где изучалось вытеснение эпоксидной смолы воздухом, фрактальная размерность вязких пальцев оказалась равной  $1,62 \pm 0,04$ ; в условиях работы [179] фрактальная размерность вязких пальцев, образованных при вытеснении глицерина маслом, была близка к 1,72, а в работе [180], где изучалось вытеснение глицерина воздухом, фрактальная размерность "вязких пальцев" составила  $1,64 \pm 0,04$ . Все эти результаты соответствуют двумерной DLA-модели фрактальной размерностью  $1,68 \pm 0,02$ .

Другой процесс, связанный с вытеснением одного из несмешиваемых компонентов другим в пористом веществе, отвечает процессу сушки. Этот процесс по своей природе близок процессу образования "вязких пальцев". При сушке пористого вещества под внешним воздействием в порах создается отрицательное капиллярное давление и жидкость в них движется вглубь поверхности. В результате этого процесса воздух вытесняет адсорбированную жидкость, и межфазная граница имеет фрактальную структуру. Согласно исследованиям [181] при использовании воды как адсорбированной жидкости фрактальная размерность, подсчитанная по распределению массы воды на межфазной границе – фронта волны сушки, равна  $1,89 \pm 0,03$ , и фрактальная размерность, полученная из периметра межфазной границы, составляет  $1,38 \pm 0,02$ . Эти измерения соответствуют числу капиллярности (см. (6.3)) порядка  $10^{-4}$ . Полученные результаты хорошо описываются в рамках модели, отвечающей образованию двумерного перколяционного кластера. Как видно, процесс сушки приводит к фрактальным размерностям, отличающимся от процесса образования вязких пальцев.

Анализ [171] показывает, что природа рассматриваемых процессов, приводящих к замене в пористой среде одного компонента другим, существенно зависит от того, является ли этот процесс сушкой или впитыванием по отношению к компоненту, который лучше сорбируется в пористой средой. Характер процесса определяет и масштаб элементов межфазной границы.

## § 7. Аэрогели

**7.1. Аэрогель как физический объект.** Аэрогель – своеобразный физический объект, который представляет собой макроскопический кластер, состоящий из жестко связанных макрочастиц (см. [3, 183, 184]). Этот жесткий каркас занимает малую часть объема, в котором находится кластер, – почти весь объем приходится на поры. Часть слова "аэро" и характеризует малость плотности объекта. Уже первые образцы аэрогеля двуокиси кремния, полученные Кистлером [184–187] свыше 50 лет назад, имели плотность до  $20 \text{ г} \cdot \text{л}^{-1}$ . В настоящее время существуют аэрогели примерно для десятка окислов.

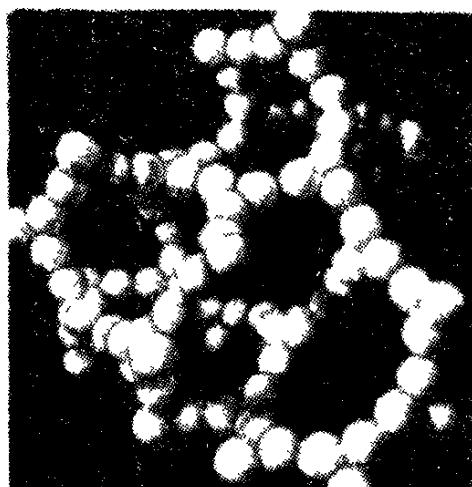
По своему строению аэрогель представляет собой систему связанных между собой твердых частиц, причем объем, занимаемый частицами, составляет малую часть объема аэрогеля. Практически весь его объем приходится на пустоты – поры. Характерный размер отдельных частиц, входящих в состав аэрогеля, составляет несколько нанометров. Простейшая модель аэрогеля, представленная на рис. 7.1, может быть построена из сферических частиц одинаковых размеров, причем связь между ними осуществляется, когда частицы практически касаются друг друга. В этом случае удельная площадь внутренней поверхности аэрогеля  $S$  выражается через радиус частиц  $r_0$  по формуле

$$S = \frac{3}{\rho_0 r_0}, \quad (7.1)$$

где  $\rho_0$  – плотность материала аэрогеля. В частности, для аэрогеля двуокиси кремния ( $\rho_0 = 2,2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ) при  $r_0 = 2 \text{ нм}$  имеем  $S = 700 \text{ м}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ .

Рис. 7.1. Простейшая модель аэрогеля в предположении, что он составлен из частиц одинаковых размеров [205].

Показана геометрия структуры на малых размерах



Для большинства реальных образцов аэрогеля двуокиси кремния значения  $S$  находятся в пределах  $300 – 1000 \text{ м}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ .

Если вырезать кусок аэрогеля, небольшой, но включающий в себя большое число отдельных частиц, то в рамках рассматриваемой модели он представит собой фрактальный кластер. Такая структура определяется механизмом образования аэрогеля, рост которого обусловлен слипанием отдельных частиц, движущихся в растворе. На первой стадии процесса в растворе образуются частицы материала, составляющего аэрогель, которые далее объединяются в кластеры. Размеры частиц растут, пока они не

займут весь объем. В связи с этим аэрогель обладает фрактальными свойствами в области размеров

$$r_0 \ll r \ll \bar{R}, \quad (7.2)$$

где  $r_0$  – размер частиц, входящих в его состав,  $\bar{R}$  – максимальный размер пор (или характерный размер кластеров в процессе их роста в объеме, когда они занимают весь объем). При  $r \gg \bar{R}$  аэрогель является в среднем однородным.

В соответствии с одним из свойств фрактального кластера средняя массовая плотность вещества  $\bar{\rho}$  в сфере радиусом  $r$  равна

$$\bar{\rho}(r) = \rho_0 (r_0/r)^{3-D}. \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что максимальный размер пор  $\bar{R}$  может быть оценен по формуле

$$\bar{R} \sim r_0 (\rho_0 / \bar{\rho})^{1/(3-D)}. \quad (7.4)$$

Фрактальная размерность кластера  $D$  характеризует также функцию распределения по размерам пор. Действительно, пусть аэрогель занимает некоторый объем  $V_0$ , т.е. имеет массу  $\bar{\rho}V_0$ . Выделим объем, находящийся на расстоянии  $r \ll \bar{R}$  от точек кластера. Средняя плотность материала аэрогеля в этом объеме дается формулой (7.3), и, так как в этом объеме сосредоточена вся масса аэрогеля, величина этого объема составляет

$$V(r) \sim \frac{\bar{\rho}V_0}{\bar{\rho}(r)} \sim V_0 \left( \frac{r}{\bar{R}} \right)^{3-D}.$$

Очевидно, в этот объем будут включены все поры, размер которых меньше или равен  $r$ . Отсюда для функции распределения по размерам пор имеем

$$df \sim r^{2-D} dr, \quad r_0 \ll r \ll \bar{R}. \quad (7.5)$$

Аэрогель является пористым веществом, и все сказанное ранее о пористом веществе относится и к аэрогелю (см. пп. 3.5, 6.2). В частности, измерение интенсивности рассеяния рентгеновского излучения на малые углы дает информацию о структуре поверхности аэрогеля. Согласно измерениям [188] для аэрогеля плотностью  $\bar{\rho} = 88 \text{ г} \cdot \text{л}^{-1}$  фрактальная размерность поверхности составляет  $D_S \approx 2$  при  $r \leq 1,1 \text{ нм}$ , т.е. поверхность имеет плотную корку. При  $1,1 < r < 9 \text{ нм}$  аэрогель имеет фрактальную размерность  $D = 2$ , а на больших размерах он однороден. Указанное значение соответствует измерениям [91–93] для кластера двуокиси кремния, находящегося в растворе и высущенного, хотя наиболее тщательные измерения для фрактальной размерности этого кластера в растворе [92] дают несколько большее значение  $D$ , равное  $2,12 \pm 0,05$ . Это расхождение может быть отнесено за счет погрешности измерений. Другое расхождение относится к области размеров, в которой проявляются фрактальные свойства аэрогеля. Если считать, что  $D = 2,12 \pm 0,05$ , то согласно формуле (7.4) отношение  $\bar{R}/r_0$  равно  $40 \pm 8$ , тогда как согласно измерениям оно равно 8. Возможно, такое расхождение связано с тем, что поры имеют цилиндрическую, а не сферическую форму.

Аэрогель как связанное состояние фрактальных кластеров образуется в растворе. Это не единственный, а наиболее полно исследованный пример

сильно разреженного пористого вещества. Приведем также другие примеры, когда образование разреженного пористого вещества происходило в газовой фазе.

В работе [158] кластеры двуокиси кремния формировались при сжигании тетрахлорида кремния в пламени водорода и кислорода. На первой стадии процесса образуются сферические частицы двуокиси кремния близких размеров, причем радиус частиц зависит от режима процесса и составляет примерно 2 нм. Далее эти частицы объединяются в кластеры.

В рассматриваемой работе из кластеров двуокиси кремния формировались макроскопические образцы миллиметровых размеров, которые далее анализировались путем рассеяния нейtronов на малые углы. Плотность образцов находилась в пределах  $0,006 - 0,45 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Фрактальная размерность поверхности образцов  $D_S$  зависела от плотности образца и степени насыщения его водой и составляла  $2,3 - 2,6$ .

Другой пример получения разреженного макроскопического кластера [190] относится к формированию кластера в результате взрыва металлической проволоки. Релаксация паров металла происходила через образование макроскопических частиц, которые далее объединялись в кластер. Этот кластер прикреплялся к стенкам вакуумной камеры, в которой производился эксперимент, и в таком состоянии он мог существовать более суток. Авторы работы [190] предположили, что образуемый кластер имеет нитевидную структуру, и оценили диаметр нитей величиной примерно 10 нм. К сожалению этим и исчерпывается информация о таком кластере, который, судя по характеру его формирования, должен иметь фрактальную структуру.

Информацию об аэрогеле как о пористом теле получают на основе исследования адсорбции аэрогелем различных веществ (см. [191–193]). Такая информация может быть найдена как из зависимости количества адсорбируемого вещества от давления, так и из зависимости адсорбционной способности аэрогеля от рода вещества. Исследования показывают, что с падением плотности аэрогеля увеличивается число больших пор, а число малых пор практически не изменяется. Так, согласно данным [192] для аэрогеля двуокиси кремния со средней плотностью  $0,1 - 0,3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  удельный объем пор радиусом 1–2 нм составляет примерно  $0,2 \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1}$ , для пор радиусом до 10 нм он находится в интервале  $0,6 - 0,8 \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1}$ , а для пор радиусом до 30 нм – в интервале  $1,2 - 1,8 \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1}$ . Значение полного удельного объема пор, который обусловлен в основном порами большого радиуса, составляет для данных образцов  $3 - 9 \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1}$  и обратно пропорционально средней плотности аэрогеля. При этом во влажном воздухе, когда аэрогель адсорбирует пары воды, занятыми оказываются поры большого радиуса.

По характеру поглощения отдельных сорбентов можно судить и о размерах пор, ибо отдельные компоненты адсорбируются порами с разными размерами. Так, согласно [191] при соответствующих условиях азот адсорбируется порами, радиус которых меньше 20 нм, а ртуть – порами, радиус которых превышает 6 нм. Адсорбционная способность аэрогеля по отношению к различным веществам позволяет судить об удельном весе пор данного размера у исследуемого адсорбента. Например, в табл. 7.1 приведены сорбционные характеристики ряда аморфных образцов аэрогеля

Таблица 7.1

## Параметры адсорбции азота и ртути аэрогелем [191]

Массовая плотность, г · см <sup>-3</sup>	Удельная площадь внутренней поверхности, м <sup>2</sup> · г <sup>-1</sup> (по азоту)	Удельный объем, см <sup>3</sup> · г <sup>-1</sup>		Средний радиус пор, нм (по формуле (7.6))
		по азоту	по ртути	
0,015	470	1,25	17,3	5,3
0,02	616	1,30	13,7	4,2
0,04	506	1,17	10,7	4,6
0,06	530	1,18	9	4,4

$\text{Al}_2\text{O}_3$  [191]. Как видно, с ростом массовой плотности образца удельный объем больших пор, ответственных за поглощение ртути, падает. Удельный объем малых пор, ответственных за поглощение азота, практически не изменяется.

Можно ввести средний радиус пор, ответственных за поглощение данного компонента, исходя из тех же соображений, что и при выводе формулы (7.1). Давайте считать поры цилиндрическими (как это обычно принято). Тогда средний радиус пор  $\bar{r}$  может быть получен из соотношения

$$\bar{r} = 2V/S, \quad (7.6)$$

где  $S$  – удельная площадь внутренней поверхности,  $V$  – удельный объем поглощенного компонента. В табл. 7.1 приводятся значения среднего радиуса пор рассматриваемого аэрогеля, которым поглощается азот. Результат подтверждает сделанный ранее вывод: эти поры невелики, их размер не зависит от плотности аэрогеля.

На основе приведенных данных можно получить количественное представление о микроструктуре аэрогеля. Для этой цели в табл. 7.2 приведены параметры образцов, полученных и обработанных в работе [194] (цилиндрические образцы диаметром до 80 мм). Удельная площадь внутренней поверхности восстанавливалась по адсорбции азота, а радиус частиц – по

Таблица 7.2

## Параметры микроструктуры для образцов аэрогеля двуокиси кремния

Массовая плотность, г · см <sup>-3</sup>	Удельная площадь внутренней поверхности, м <sup>2</sup> · г <sup>-1</sup>	Радиус частиц, нм		Максимальный размер пор, нм (по формулам (7.1) и (7.4))
		по фотографии на ТЕМ	по формуле (7.1)	
0,03	1590	4	0,9	120
0,05	1080	5	1,3	100
0,15	520	10	2,6	55
0,16	740	4	1,8	35

фотографиям, полученным на электронном микроскопе в проходящем свете (TEM – Transmission Electron Microscope). Такой подход дает завышенный результат для размера частиц, ибо большие частицы вносят большой вклад в интенсивность рассеянного сигнала.

Подобным образом фотографирование образцов аэрогелей двуокиси кремния на электронном микроскопе в проходящем и отраженном свете [195] привело к большим значениям радиуса частиц. Средний радиус частиц оказался равным 20 – 30 нм. При фотографировании в отраженном свете аэрогель подкрашивался OsO<sub>4</sub>. Однако авторы работы [195] указывают, что эта операция выделяет большие частицы и полученное значение может рассматриваться как верхняя граница для радиуса частиц\*). Фотографирование в проходящем свете свидетельствует о наличии как малых частиц (радиусом менее 2 нм), так и больших частиц (радиусом более 10 нм) в структуре аэрогеля. В то же время из значения удельной площади внутренней поверхности образца ( $890 - 960 \text{ м}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ ) следует, что средний радиус частиц в данном случае должен составлять 1,4 – 1,5 нм.

Обратим внимание еще на одну особенность строения аэрогеля. Плотности реальных образцов аэрогеля и ксерогеля двуокиси кремния могут различаться на два порядка величины, тогда как удельная площадь их внутренней поверхности обычно находится в нешироком диапазоне значений. У ксерогеля двуокиси кремния (см., например, [193]) удельная площадь внутренней поверхности примерно такая же, как и у аэрогеля, причем ее значение слабо зависит от его плотности. Отсюда следует, что все эти образования состоят из частиц примерно одного среднего размера. При этом изменение плотности образца связано с присутствием пор большого размера, а содержание пор малого размера, которые определяют удельную площадь внутренней поверхности образца, при этом не изменяется.

Исследование распределения по размерам пор может быть полезным для определения фрактальной размерности аэрогеля в области  $r_0 \ll r \ll \bar{R}$ . Для этих размеров пор, на которые приходится малая часть всего их объема, функция распределения по размерам пор определяется формулой (7.5). Обработка по этой формуле результатов измерений [197] для пяти образцов аэрогеля двуокиси кремния дает  $D = 2,3 \pm 0,1$ , что находится в грубом согласии с приведенными ранее значением фрактальной размерности, полученным более точным способом, но для находящегося в растворе геля двуокиси кремния.

**7.2. Применение.** Получение и исследование аэрогелей велось в плане исследования стекол. Однако аэрогель – дорогой продукт (цена 1 г аэрогеля около 9 долл.) [198]. Поэтому его применение носит ограниченный характер. В частности, по этой причине он не может быть сырьем для полу-

\* ) Особенностью этого метода является то, что "подкрашивание" частиц происходит за счет присоединения окислов металла, а они в большей степени присоединяются к большим частицам, так что фотографирование на электронном микроскопе в отраженном свете (SEM) выделяет большие частицы и определенный таким способом их радиус оказывается завышенным. Это отмечается и в других работах (см., например, [226]).

чения стекол со специфическими свойствами, хотя принципиально такая возможность существует [199]. Реально для этой цели используется часть технологической цепочки, разработанной для получения аэрогеля. Основной физический процесс из этой совокупности процессов превращение золя в гель представляет практический интерес в том плане, что позволяет получать прочные соединения окислов ряда металлов и элементов, а также их смеси в программируемом составе [199–202]. Этот процесс используется, в частности, для получения пленок и покрытий для стекол, зеркал и отражателей специального назначения.

Основная часть произведенного аэрогеля двуокиси кремния используется в качестве материала в черенковских детекторах. Например, детектор на ускорителе DECY (Гамбург) имеет площадь  $11,8 \text{ м}^2$  и содержит 1700 л аэрогеля двуокиси кремния [203–205]. Существует большая группа черенковских детекторов, построенных на аэрогелях и используемых для анализа быстрых адронов-протонов,  $\pi$ -мезонов,  $K$ -мезонов [196, 205–215]. Положительный опыт эксплуатации таких счетчиков приводит к увеличению их числа. Планируется использование аэрогеля и в черенковских детекторах, находящихся на борту космического аппарата [216–218]. Эти приложения аэрогеля вполне понятны: в физике высоких энергий и в астрофизике вопрос о стоимости материала стоит не так остро, как в других областях. Однако основу применения аэрогеля в детекторах составляет далеко не самое интересное его свойство – близкий к единице коэффициент преломления. Тем не менее именно для этой цели в основном и используется производимый в настоящее время аэрогель, а в других приложениях, где могли бы быть использованы принципиальные свойства аэрогеля, имеют место поиск и исследование возможностей применения аэрогеля без их широкого внедрения.

Аэрогель является объектом с большой внутренней емкостью. Объем пор внутри аэрогеля в реальных образцах может в десятки раз превышать объем, занятый его материалом. Поэтому аэрогель можно использовать для хранения различных веществ. В частности, аэрогель, содержащий  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  и их смесь, может быть использован для хранения компонентов ракетного топлива – кислоты окислов азота как окислителя и несимметричного диметилгидразина как топлива [191, 219]. Эти вещества располагаются в больших порах аэрогеля, так что их количество по массе может существенно превышать массу самого образца. В проведенных экспериментах удавалось хранить 20 г азотной кислоты и 40 г несимметричного диметилгидразина на 1 г аэрогеля.

Важное свойство аэрогеля как пористого вещества с программируемым химическим составом позволяет использовать его в качестве катализатора [191, 219–223]. К достоинствам аэрогеля как катализатора следует добавить, что в его состав можно вводить различные металлы и он представляет собой довольно устойчивое химическое соединение. По этим причинам аэрогель оказывается удачным катализатором при проведении ряда химических процессов с участием органических соединений. Несомненно, в последующем список процессов, где аэрогель может быть использован в качестве катализатора, увличится.

Аэрогель – пористое вещество с регулируемым химическим составом, в которое легко ввести различные добавки и которые можно превратить

в сплошную массу. Поэтому его можно использовать не только для получения стекол различных типов (пористых и плотных, однокомпонентных и многокомпонентных), но и для выработки композитных материалов с заданными свойствами [219].

Оказалось, что свойство аэрогеля быстро адсорбировать влагу может приводить к уничтожению находящихся рядом насекомых, из организма которых отбирается влага [183, 191]. Тем самым аэрогель может быть использован как инсектицид, не оказывающий химического воздействия на окружающую среду.

Поскольку аэрогель – прозрачное вещество с низкой теплопроводностью, он является хорошим изолятором. В связи с этим выполнено немало проработок и расчетов по его использованию для тепловой изоляции различных элементов зданий [224–228]. Такие предложения вряд ли реальны в широком применении в связи с высокой стоимостью аэрогеля. Но в специальных приборах, особенно космического назначения, его использование в качестве теплоизолятора будет полезно.

То же самое можно сказать и об акустических приложениях аэрогеля. Так как скорость звука в нем ниже, чем в воздухе, он мог бы найти широкое применение там, где могут быть использованы его акустические свойства, – в акустических линиях задержки, звуковых отражателях, звуконепроницаемых перегородках и т.п. Однако в силу высокой стоимости аэрогеля эти свойства опять-таки практически могут быть использованы только в специальных приборах и системах.

Проведенный выше беглый анализ применений аэрогеля необходим, чтобы понять реальное отношение к этому объекту. С одной стороны, аэрогель – необычный физический объект, который обладает специфическими свойствами. Это дает возможность использовать его для разных практических целей. С другой стороны, стоимость аэрогеля в настоящее время велика, и мы вынуждены отказаться от его использования там, где он мог бы быть полезен. А по этой причине в большой степени теряется интерес к аэрогелю как к физическому объекту. В такой противоречивой ситуации мы и находимся в настоящее время.

**7.3. Получение.** Процесс образования аэрогеля, протекающий в растворе, проходит несколько стадий. На первой стадии растворенное вещество выделяется в виде отдельных макрочастиц, которые на следующей стадии объединяются в кластер – гель. Последующая стадия – сушка аэрогеля – позволяет освободить его поры от молекул раствора. Эти стадии содержатся и в технологической схеме получения аэрогелей. Остановимся на них подробнее в целях анализа физических особенностей отдельных стадий процесса.

На первой стадии происходит выделение одного из компонентов в твердую фазу, причем оно протекает своеобразным способом: соответствующий компонент выделяется на многих центрах конденсации и в конечном итоге входит в состав небольших макроскопических частиц. Обычно диаметр таких макрочастиц на порядок величины и больше превышает диаметр входящих в ее состав молекул. Такой процесс может быть осуществлен, если образуемая частица в растворе по мере своего роста приобретает заряд, препятствующий последующему присоединению к ней молекул, которые несут на себе противоположный заряд. Тем са-

мым данный процесс возможен в небольшом интервале кислотностей раствора. Затем входящие в состав частицы молекулы должны быть прочно связаны, тогда как в растворе они находятся в виде отдельных молекул или ионов. Поэтому удобнее, если молекулы появляются в растворе в результате медленных химических процессов, а также если макроскопическая частица образуется в результате химического, а не физического прилипания к ней отдельных молекул. Это обеспечивает прочность частицы как твердого тела. Как видно, химический характер процессов при образовании аэрозолей играет принципиальную роль.

Следующая стадия – объединение отдельных частиц в растворе, т.е. превращение золя в гель. Этот процесс более медленный по сравнению с процессом образования частиц, ибо он определяется диффузией макрочастиц в растворе. Может оказаться, что те условия, при которых шло образование частиц, не подходят для их объединения: мешает их заряд. Тогда следует изменить параметры раствора. Весьма существенно, чтобы в результате образования кластера получился прочный каркас, тогда конечный продукт (аэрогель) будет механически устойчив. По этой причине аэрогели образуются на основе ограниченного числа химических соединений, к которым относятся окислы ряда химических элементов, а также их смеси. Получены аэрогели на основе  $\text{Li}_2\text{O}$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$ ,  $\text{MgO}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ,  $\text{Cu}_2\text{O}$ ,  $\text{MnO}_2$ ,  $\text{MoO}_2$  (см. [191, 219, 220, 229–232]).

Принципиальное значение имеет последняя стадия процесса образования аэрогеля, связанная с его сушкой, т.е. с удалением молекул жидкости, находящихся в его порах. Поскольку аэрогель имеет много микроскопических пор, нахождение в них молекул жидкости создает там высокие давления. Например, оценки [233] дают, что в порах аэрогеля двуокиси кремния диаметром 2 нм молекулы воды создают давление порядка 20 атм. Поэтому высушивание аэрогелей в воздухе или вакууме создает большие внутренние напряжения в его каркасе, что приводит к его сжатию, а возможно, и разрушению. Высущенный таким способом аэрогель, который носит название ксерогеля, сохраняет пористость структуры, однако его плотность существенно выше, а удельный объем внутренних пор значительно ниже, чем у аэрогеля.

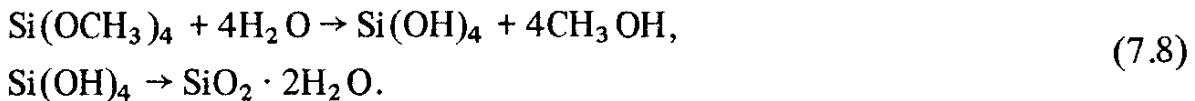
Проблема сушки аэрогеля была решена Кистлером в начале 30-х годов [185–187], что позволило ему получить образцы аэрогеля двуокиси кремния и исследовать их свойства. С работ Кистлера и начинается история аэрогеля. Для сушки аэрогеля Кистлер помещал его в автоклав, где достигались сверхкритические температура и давление для находящейся в порах аэрогеля жидкости. Испарение этой жидкости при сверхкритических параметрах и замена ее газом позволяют в дальнейшем сохранить внутреннюю структуру аэрогеля. В последующем именно этим методом и осуществляли сушку аэрогеля.

Для получения представления о реальных способах получения аэрогеля мы приведем здесь используемые подходы в случае аэрогеля двуокиси кремния. В классическом способе, использованном Кистлером, исходным веществом была соль  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$ , которая помещалась в водный раствор соляной кислоты, что приводило к химической реакции

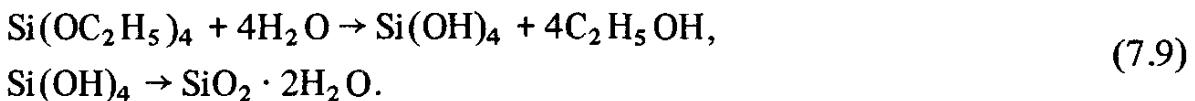


Соль выпадала в осадок и удалялась из раствора. Оставшийся раствор промывался и фильтровался. В полученном растворе воду заменяли метиловым или этиловым спиртом, который обладает более низкими значениями критических давления и температуры, чем вода. Далее в автоклаве при сверхкритических условиях производили сушку аэрогеля.

Более технологичный способ получения аэрогеля двуокиси кремния основан на гидролизе тетраметилортосиликата [191, 229, 234], который протекает по схеме



В этом процессе не образуется вредных примесей, поэтому можно исключить промывание и фильтрацию раствора. Основной процесс производства аэрогеля таким способом может уложиться в несколько часов. Исходное вещество в процессе (7.8) может быть заменено другими соединениями кремния, например более дешевым тетраэтилортосиликатом, так что схема химического процесса следующая:



Такой процесс получения аэрогеля двуокиси кремния, как и использование других соединений кремния, получил распространение в настоящее время [234–239].

Отметим некоторые особенности рассмотренного процесса, которые подчеркивают его химический характер. Процессы (7.7), (7.8) протекают в присутствии катализаторов, в качестве которых используются небольшие количества HCl и HF. Далее, образование геля в растворе сопровождается гидролизом исходных соединений в той или иной степени [240], т.е. в химическом процессе участвуют ионы. И наконец, повышение температуры в автоклаве ускоряет процесс гелеобразования, который при высокой температуре занимает несколько часов, а при комнатной температуре он более медленный. Для того чтобы дать представление о временном характере этого процесса, на рис. 7.2 приводятся временные характеристики процесса образования аэрогеля, а на рис. 7.3 – последовательность процессов гелеобразования (7.8) в автоклаве.

Обычно к перечисленным стадиям образования аэрогеля добавляется еще одна – отжиг при атмосферном давлении. Например, на описываемой ниже установке [196, 206], полученный в автоклаве аэрогель двуокиси кремния далее нагревался со скоростью  $35 \text{ K} \cdot \text{ч}^{-1}$  до температуры  $500^\circ\text{C}$  и находился при этой температуре несколько часов. Такая операция существенно повышает прозрачность аэрогеля.

Следует подчеркнуть, что требование высокого качества продукта реально существенно увеличивает время выработки аэрогеля. Так, на установке [196] объемом 98 л для выработки аэрогеля в ЦЕРНе (об этом будет идти речь дальше) реальнорабатывалось 50 л аэрогеля в неделю, причем отдельный цикл составлял целую неделю.

Следует отметить одну практическую особенность получения аэрогеля по схемам (7.7), (7.8), когда они применяются для промышленного произ-

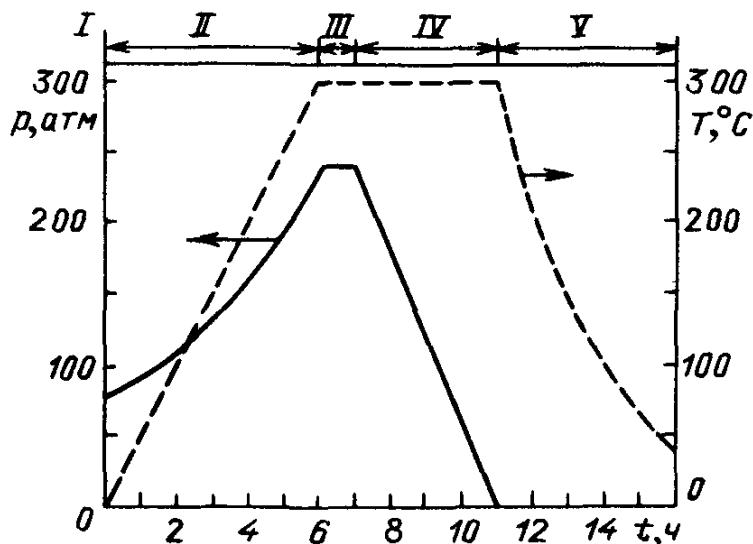
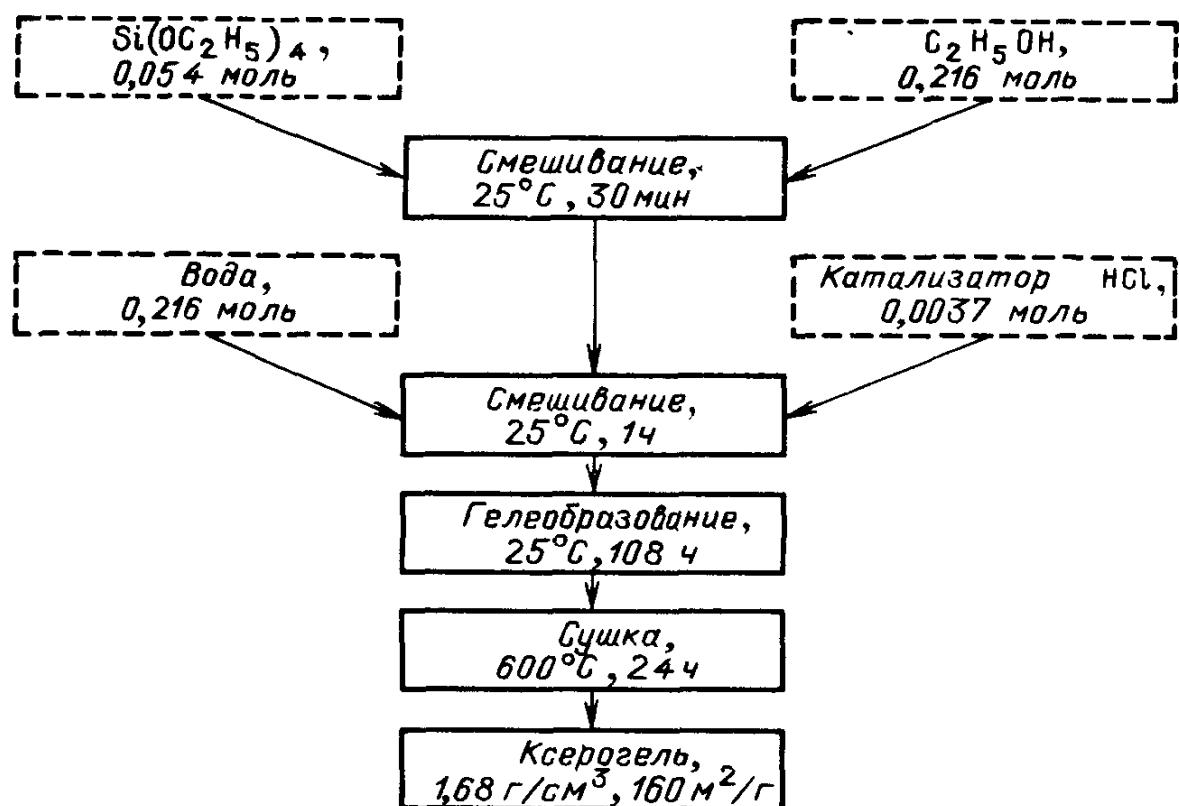


Рис. 7.2. Временные зависимости давления  $p$  и температуры  $T$  в автоклаве при получении аэрогеля двуокиси кремния тетраэтилортосилана  $\text{Si}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$  [194].

Стадии процесса: I – создание начального давления азота (80 атм); II – нагревание; III – равновесие; IV – выход паров; V – остывание

Рис. 7.3. Схема процесса образования ксерогеля (пористое стекло) при атмосферном давлении [238]



водства аэрогеля. Поскольку в этом случае используется горючее вещество при высоких температуре и давлении, то такие процессы небезопасны. Об этом свидетельствует и поучительная история шведской фирмы "Аэро-гласс", вырабатывающей аэрогель двуокиси кремния для черенковских детекторов в ЦЕРНе [196, 206, 207]. В 1979 г. было выработано свыше 100 л аэрогеля, причем использовалась установка объемом 98 л, на которой достигались температура 270 °С и давление 90 атм (критические температура и давление для метилового спирта равны соответственно 240 °С и 78,5 атм). За одну загрузку вырабатывалось 18 кусков аэрогеля размером по 200 × 200 × 30 мм (объемом свыше 20 л). Далее была построена установка объемом 1100 л, в которой сразу могло вырабатываться 100 кусков аэрогеля размером 600 × 600 × 20 мм (объемом 360 л). После нескольких успешных циклов наработки аэрогеля 27 августа 1984 г. произошла утечка

Таблица 7.3

Уплотнение аэрогеля двуокиси кремния при нагревании (время нагревания 12 мин) [194]

Температура, К	Плотность геля, г · см <sup>-3</sup>	Удельная площадь внутренней поверхности, м <sup>2</sup> · г <sup>-1</sup>	Радиус частиц, нм (фотографии на ТЕМ)
570	0,16	740	4
1070	0,16	780	4
1423	0,27	530	5
1473	0,66	160	6
1483	1,00	76	12
1508	1,41	36	20

метилового спирта, что привело к взрыву. В результате здание, в котором помещалась установка, было разрушено, а находившиеся в нем трое сотрудников серьезно пострадали. Хотя специальное расследование не доказало, что виной взрыва были ошибки персонала, этот инцидент естественно создал психологический настрой против крупномасштабной технологии производства аэрогеля.

**7.4. Физические свойства.** Аэрогель как своеобразный физический объект характеризуется набором специфических свойств. Ранее (см. п. 7.1) мы рассмотрели вопросы, связанные со структурой аэрогеля. Благодаря своей пористости он обладает высокой адсорбционной способностью. Представляет интерес вопрос, связанный с прочностью и устойчивостью аэрогеля, от которого зависит возможности его реального использования. Оказывается, аэрогель обладает высокой термической устойчивостью. Еще в своих первых исследованиях Кистлер отмечал, что образцы аэрогеля двуокиси кремния не изменяют своих свойств вплоть до температур 1000 К, а при 1200 К их пористость уменьшается. Представление о характере разрушения аэрогеля дают данные работы [194], приведенные в табл. 7.3. При нагревании до температуры 1100 К структура аэрогеля двуокиси кремния не изменяется. Далее происходит укрупнение частиц, составляющих аэрогель, уменьшение его пористости и соответственно повышение плотности аэрогеля. Представим зависимость удельной площади внутренней поверхности аэрогеля  $S$  от времени  $t$  в виде  $dS/dt = -S/\tau$ . Значения времени уплотнения  $\tau(T)$ , полученные на основании данных табл. 7.3, представлены на рис. 7.4.

С уменьшением плотности аэрогеля падает его модуль Юнга, ибо при этом сокращается число цепей в аэрогеле, создающих сопротивление внешнему воздействию. Представим зависимость модуля Юнга  $E$  от плотности аэрогеля в виде

$$E = E_0 (\rho / \rho_0)^\beta. \quad (7.10)$$

Обработка результатов измерений [242] по формуле (7.10) дает  $E_0 = 10^{6,58 \pm 0,18} \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $\beta = 2,8 \pm 0,2$  для  $\rho_0 = 0,13 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ .

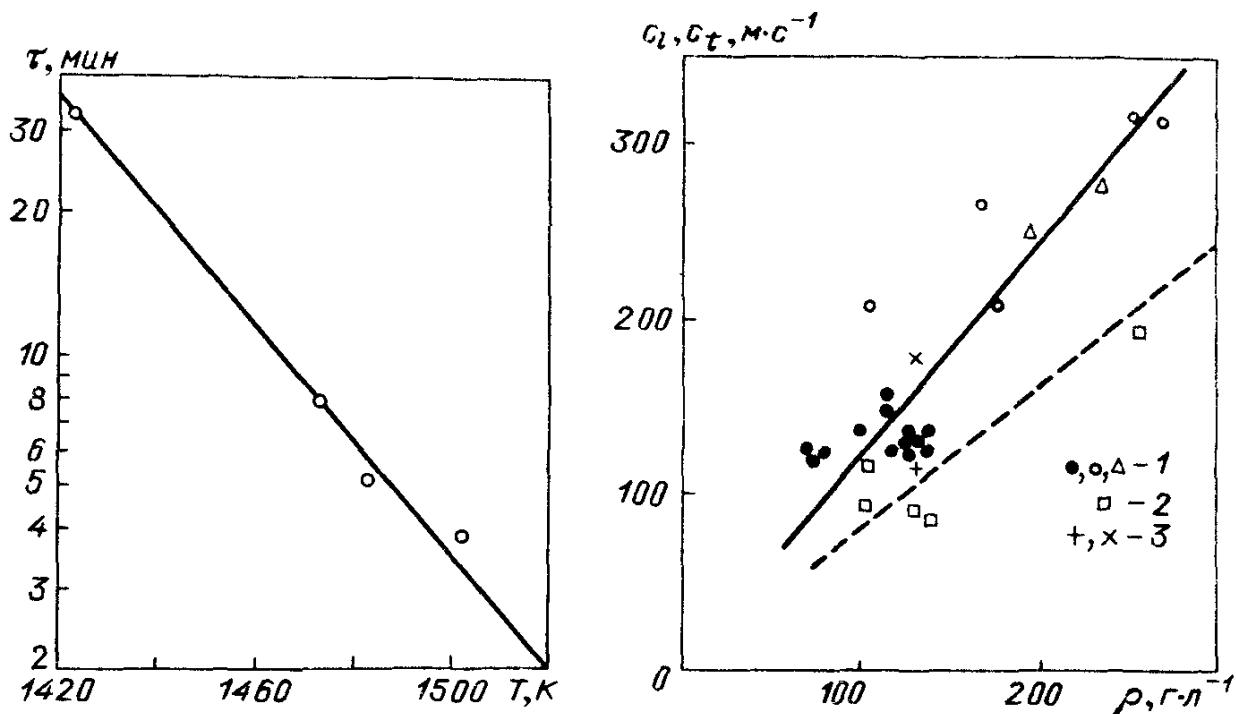


Рис. 7.4. Время уплотнения аэрогеля как функция температуры (точки – данные габл. 7.3, сплошная линия – аппроксимация этих данных)

Рис. 7.5. Результаты измерения скорости звука в аэрогеле двуокиси кремния [242].

1 – для продольных звуковых волн для разных образцов; 2 – для поперечных звуковых волн; сплошная и штриховая – зависимости (7.11) для скорости продольных и поперечных звуковых волн соответственно, построенные на основе указанных экспериментальных данных; 3 – расчеты по формуле (7.12) с использованием значений модуля Юнга аэрогеля

Представленное значение для показателя  $\beta$  в формуле (7.10), видимо, можно считать наиболее правильным.

Знание значений модуля Юнга может быть использовано для определения скоростей распространения звука. Скорости продольной ( $c_l$ ) и поперечной ( $c_t$ ) звуковых волн определяются соотношениями (см. [241])

$$c_l = \left[ \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(2-\sigma)} \right]^{1/2}, \quad c_t = \left[ \frac{E}{2\rho(1+\sigma)} \right]^{1/2}, \quad (7.11)$$

где  $\sigma$  – коэффициент Пуассона. На рис. 7.5 приводятся результаты измерений [242] скорости звуковых волн в аэрогеле. Если зависимость скорости звука от плотности аэрогеля по аналогии с формулой (7.10) представить в виде

$$c = c_0(\rho/\rho_0)^\alpha, \quad (7.12)$$

о из обработки экспериментальных данных получим для продольной поперечной звуковой волн  $\alpha = 0,9 \pm 0,2$ . Далее при  $\rho_0 = 0,13 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  для продольной звуковой волны имеем  $c_0 = 170 \pm 30 \text{ м} \cdot \text{s}^{-1}$ , а для поперечной звуковой волны  $c_0 = 110 \pm 20 \text{ м} \cdot \text{s}^{-1}$ . Значение коэффициента Пуассона для аэрогеля двуокиси кремния равно

$$\sigma = 0,12 \quad + 0,24 \\ - 0,12$$

Отметим, что из формул (7.11) вытекает следующая связь между показателями в формулах (7.10) и (7.12):  $\beta = 2\alpha + 1$ . Видно, что значение  $\beta = 3,7$  не согласуется с измерениями скоростей звуковых волн, тогда как для  $\beta = 2,8$  имеет место не только согласие в зависимости скоростей звука от плотности аэрогеля, но и согласие числовых значений скоростей звука, полученных по формуле (7.11), с измеренными (см. рис. 7.5). При этом скорость звука в реальных аэрогелях низкой плотности заметно ниже, чем в конденсированных средах, и даже ниже, чем в газах. Этот факт представляет интерес для соответствующих прикладных задач.

Формула (7.10) позволяет оценить масштабы плотностей, при которых аэрогель может существовать в атмосфере. Будем считать, что аэрогель разрушается, если относительное изменение его длины имеет порядок единицы, а перепады давления соответствуют крику (80 дБ), т.е. амплитуда звукового давления составляет  $0,2 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$ . При этих значениях параметров из формулы (7.10) для граничной плотности аэрогеля получим  $\rho \approx 0,4 \text{ г} \cdot \text{л}^{-1}$ . Эта и другие подобные оценки показывают, что принципиально можно создать аэрогель с удельным весом порядка удельного веса воздуха.

Рассмотренная ранее простая модель аэрогеля, в которой он составляется из одинаковых сферических макрочастиц, позволяет проанализировать ряд процессов переноса, определяемых переносом молекул газа, находящихся внутри него. В частности, найдем коэффициент диффузии молекул газа внутри аэрогеля. Воспользуемся классической формулой для коэффициента диффузии молекул  $\mathcal{D}$  в приближении Чепмена–Энскога (см. [328, 329]):

$$\mathcal{D} = \frac{3\sqrt{\pi}}{16} \sqrt{\frac{2T}{m}} \lambda, \quad (7.13)$$

где  $T$  – температура,  $m$  – приведенная масса молекул газа и частиц, с которыми они сталкиваются,  $\lambda$  – длина свободного пробега молекул.

В рассматриваемом случае длина свободного пробега молекул определяется их соударениями с внутренней поверхностью аэрогеля. Полагая, что эти соударения носят упругий характер, получаем для длины свободного пробега молекул внутри аэрогеля уравнение

$$\lambda = \frac{1}{\pi r_0^2 N'} = \frac{4}{\bar{\rho} S}, \quad (7.14)$$

где в рамках рассматриваемой модели аэрогеля  $r_0$  – радиус макрочастиц, из которых он составлен,  $N'$  – плотность этих частиц. Тогда  $\bar{\rho}$  – массовая плотность аэрогеля,  $S$  – удельная площадь внутренней поверхности. Чтобы оценить реальность рассматриваемой физической ситуации, определим пределы ее применимости для аэрогеля двуокиси кремния и атмосферного воздуха при нормальных условиях. Длина свободного пробега молекул в чистом воздухе равна  $1,3 \cdot 10^{-5}$  см. Для аэрогеля с типичной площадью внутренней поверхности  $S = 900 \text{ м}^2 \cdot \text{г}^{-1}$  и плотностью  $\bar{\rho} = 0,1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$  длина свободного пробега за счет рассеяния молекул на внутренней поверхности аэрогеля составляет  $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-6}$  см. Как видно, рассеяние молекул на внутренней поверхности аэрогеля определяет коэффициент диффузии

молекул внутри аэрогеля при условии  $\bar{\rho} \gg 0,01 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , т.е. это имеет место для реального аэрогеля.

Данный механизм переноса может определять и коэффициент теплопроводности аэрогеля, если перенос тепла осуществляется молекулами газа, находящимися внутри аэрогеля. Тогда коэффициент теплопроводности аэрогеля  $\kappa$  дается формулой (см. [328, 329])

$$\kappa = \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2T}{m}} \lambda N.$$

Здесь обозначения те же, что и в формуле (7.13),  $N$  – плотность молекул. Эта формула может быть записана в виде

$$\kappa = \frac{C_1}{\rho} = \kappa_1 \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (7.15)$$

причем для атмосферного воздуха и аэрогеля двуокиси кремния числовой коэффициент равен  $C_1 = 39 \text{ Вт} \cdot \text{г} \cdot \text{м}^{-4} \cdot \text{К}^{-1}$ .

Другой механизм переноса тепла носит фононный характер и осуществляется по материалу аэрогеля. Отвечающий этому механизму коэффициент теплопроводности увеличивается с ростом плотности аэрогеля, так что этот механизм переноса будет доминирующим для плотного аэрогеля. Зададим зависимость коэффициента теплопроводности аэрогеля для этого механизма переноса  $\kappa$  от плотности аэрогеля в виде

$$\kappa = \kappa_2 (\bar{\rho}/\rho_1)^g \quad (7.16)$$

и выберем значение параметра  $\rho_1 = 0,05 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Основываясь на измерениях [184, 226, 243, 330], определим параметры этой формулы, которые оказываются равными  $g = 1,7 \pm 0,1$ ,  $\kappa_2 = 1,8 \cdot 10^{\pm 0,3} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ . Поскольку рассматриваемые механизмы переноса являются независимыми, их можно объединить, представив коэффициент теплопроводности аэрогеля в виде суммы коэффициентов теплопроводности за счет первого (см. (7.15)) и второго (см. (7.16)) механизмов. Это дает

$$\kappa = \kappa_1 \frac{\rho_1}{\bar{\rho}} + \kappa_2 \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} \right)^g, \quad (7.17)$$

причем для атмосферного воздуха  $\kappa_1 = 0,78 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$  и  $\kappa_2 = 1,8 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ . На рис. 7.6 приводятся значения коэффициента теплопроводности аэрогеля, рассчитанные по формуле (7.17) и измеренные в работах [184, 226, 243, 330]. Отметим, что минимальное значение коэффициента теплопроводности аэрогеля ( $2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ ) более чем на порядок величины ниже коэффициента теплопроводности воздуха при комнатной температуре ( $26 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ ).

Определенный вклад в перенос тепла в аэрогеле может вносить лучистая теплопроводность. Коэффициенты лучистой теплопроводности согласно [244] изменяются в интервале температур  $10\text{--}90^\circ\text{C}$  от 2 до  $8 \text{ мВт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ . Сильное поглощение аэрогеля двуокиси кремния имеет место вблизи длин волн  $7,5 \text{ мкм}$ , тогда как в области длин волн  $4\text{--}7 \text{ мкм}$  он практически прозрачен. Поглощение вблизи длин волн  $7,5 \text{ мкм}$  приро-

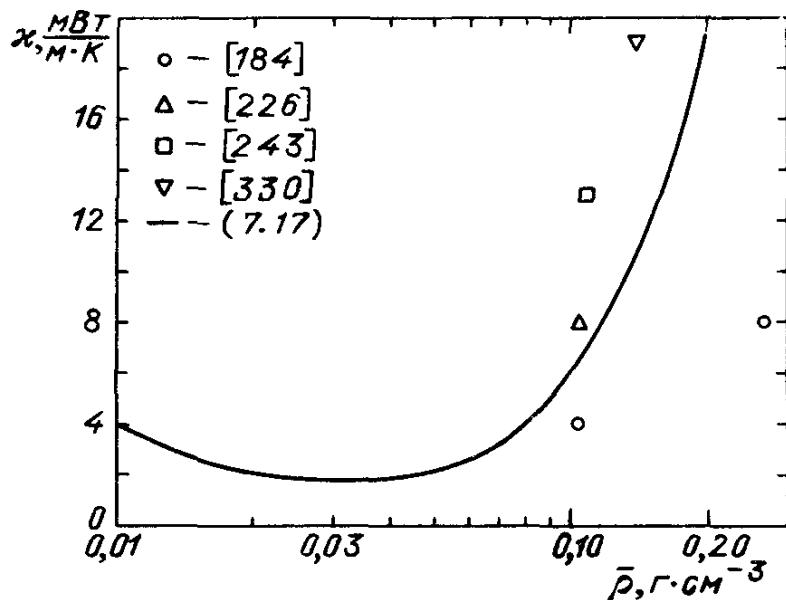


Рис. 7.6. Коэффициент теплопроводности аэрогеля

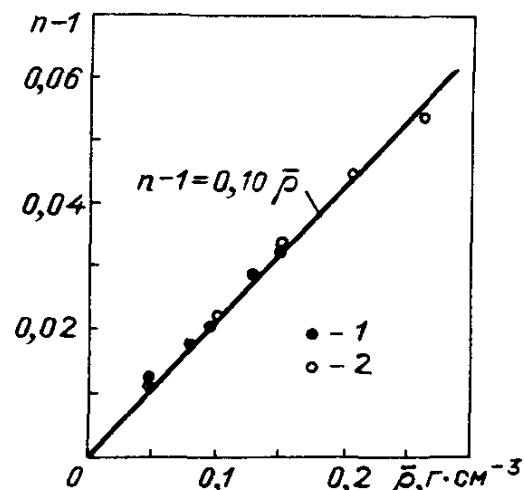


Рис. 7.7. Показатель преломления двуокиси кремния [204].

Измерения: 1 – [204]; 2 – [206].  
Прямая отвечает зависимости  $n - 1 = 0,210 \bar{\rho}$

дит к сильной температурной зависимости для коэффициента лучистой теплопроводности ( $\sim T^{5,6}$ ) [244].

Основу аэрогеля двуокиси кремния составляет прозрачный материал. Поэтому можно ожидать, что в реальных образцах с малой плотностью вещества эта прозрачность еще более возрастает. Однако беспорядочное расположение частиц в аэрогеле и присутствие в нем примесей приводят к заметному рассеянию света. Например, измеренная в работе [193] удельная оптическая плотность аэрогеля двуокиси кремния на длине волны 0,55 мкм составляет  $11 \pm 3 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ . Это означает, например, что для первого образца в табл. 7.2 половина падающего света будет потеряна при толщине слоя образца, равной 2 см.

Поскольку прозрачность аэрогеля определяется его структурой, она может зависеть от параметров процесса его образования. В работах [205, 235] утверждается, что при увеличении времени протекания процесса гелеобразования прозрачность образца существенно повышается.

По значению плотности аэрогель занимает промежуточное положение между конденсированным веществом и газом. Это же относится и к значению  $n$  – показателю преломления (рис. 7.7), который близок к единице, но больше чем у газов. Согласно [196, 204, 205]

$$n - 1 = (0,210 \pm 0,002) \bar{\rho}, \quad (7.18)$$

где  $\bar{\rho}$  – плотность аэрогеля,  $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$ . Отметим, что для чистого стекла из двуокиси кремния величина  $(n - 1)/\bar{\rho}$  составляет  $0,207 \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1}$ .

В заключение этого параграфа отметим, что аэрогель – высокопористое вещество – является удобным объектом как система с фрактальными свойствами. Аэрогель обладает высокой механической и термической прочностью, что упрощает работу с ним. Он интересен как физический объект с малой плотностью материала в нем, что усиливает его фрактальные свойства. К этому следует добавить, что имеются детальные исследования по отдельным свойствам аэрогеля, частично отраженные в этом параграфе. Это позволяет использовать аэрогель как модельный объект в том случае, когда нас интересует разреженная система с фрактальными свойствами.

## § 8. Свойства шаровой молнии

**8.1. Наблюдательные свойства.** Шаровая молния – одно из любопытных явлений природы, которое является предметом исследования многих поколений ученых. Изучение шаровой молнии показывает, что наиболее приемлемой ее структурой является структура фрактального кластера. По этой причине явление шаровой молнии рассмотрено в данной книге. Протекающие в шаровой молнии процессы накладываются на ее фрактальную структуру, что влияет на их характер. Поэтому явление шаровой молнии интересно для нас как демонстрация системы со структурой фрактального кластера, а также с точки зрения влияния этой структуры на другие свойства системы. Однако при изложении проблемы шаровой молнии мы будем выходить за рамки этих вопросов, чтобы не потерять общей физической картины явления.

Хотя шаровая молния наблюдается не часто, за многие годы все же накоплен богатый материал по наблюдениям шаровой молнии и анализу наблюдательных данных. Эти данные составляют основу наших представлений о реальной шаровой молнии. Табл. 8.1 содержит информацию о наборах случаев наблюдения шаровой молнии, собранных в разное время учеными разных стран. Существенно, что эти наборы наблюдательных случаев независимы и используют сообщения очевидцев из разных регионов нашей планеты. Поэтому данные о наблюдательных шаровых молниях, полученные на основе разных наборов наблюдений, дополняют друг друга и в целом позволяют получить надежную информацию о реальной шаровой молнии.

Ценность информации по наблюдениям шаровой молнии определяется не только количеством собранных случаев, но также и полнотой описания в каждом из них и анализом совокупности наблюдательных данных. Анализ наблюдений составляет основу для изучения природы шаровой молнии и поэтому проводится в обзора и монографиях [2, 3, 147, 278–280, 286–292], посвященных природе шаровой молнии. Далее при анализе свойств шаровой молнии мы введем типичную шаровую молнию, которая обладает параметрами, усредненными по совокупности наблюдений. Шаровую молнию с усредненными параметрами мы будем называть средней шаровой молнией, и к ней будем обращаться каждый раз, интересуясь отношением исследуемых проблем к реальной шаровой молнии. Параметры средней

Таблица 8.1

## Наборы данных по наблюдениям шаровой молнии

Автор, работа	Год	Страна	Число обработанных случаев
Араго [270]	1853	Франция	30
Бранд [271]	1923	Германия	215
Хемфрейс [272]	1936	США	280
Мак-Нэли [273]	1966	США	513
Рэйли [274]	1966	США	112
Дмитриев [275]	1969	СССР	45
Арабаджи [276]	1976	Нидерланды	250
Григорьев, Дмитриев [277]	1978, 1979	СССР	327
Чэрман [278]	1979	Англия	76
Стаханов [279, 280]	1979, 1985	СССР	1022
Кеул [281]	1981	Австрия	80
Григорьев, Григорьева [282, 283]	1986	СССР	2082
Отсуки, Офуруто [284]	1987	Япония	2060
Эгели [285, 286]	1987	Венгрия	300

Таблица 8.2

## Средние параметры шаровой молнии

Параметр	Значение
Диаметр	$23 \pm 5$ см
Время жизни	$8 \cdot 10^{\pm 0,3}$ с
Энергия шаровой молнии	$10^{1,3 \pm 0,2}$ кДж
Цвет	Белый ( $24 \pm 2\%$ ), желтый ( $24 \pm 2\%$ ), красный ( $18 \pm 2\%$ ), оранжевый ( $14 \pm 2\%$ ), голубой и фиолетовый ( $12 \pm 1\%$ ) и другие *)
Световой поток	$1600 \pm 200$ лм
Световая отдача	$0,7 \cdot 10^{\pm 0,6}$ лм · Вт <sup>-1</sup>
Корреляция с электрическими явлениями	70% шаровых молний наблюдается в грозовую погоду
Сезонность	Свыше 80% шаровых молний наблюдается в летние месяцы (июнь–август)
Распад	В $52 \pm 9\%$ случаев конец шаровой молнии сопровождается взрывом, в $39 \pm 7\%$ происходит медленное погасание, в $9 \pm 3\%$ – распад на части
Вероятность наблюдения в течение жизни человека	$10^{-2,2 \pm 0,5}$

\*) В скобках дана относительная вероятность наблюдения шаровой молнии указанного цвета.

шаровой молнии представлены в табл. 8.2. Некоторые из них будут более подробно рассмотрены ниже.

Следует отметить, что, хотя средняя шаровая молния имеет собирательное значение и удобна в качестве простого образа наблюдательного явления, она не отражает всей сложности реальной картины. Например, казалось бы, введение времени жизни шаровой молнии  $\tau$  дает возможность предположить, что вероятность сохраниться шаровой молнии к моменту времени  $t$  после ее возникновения равна  $\exp(-t/\tau)$ . Тогда  $\tau$  является одновременно и средним временем жизни ( $\langle t \rangle$ ) шаровой молнии, и временем, по истечении которого сохраняются  $1/e$  шаровых молний. Реальная картина оказывается более сложной и распад шаровых молний во времени не описывается простым экспоненциальным законом. В частности, согласно данным работ [282, 283], где использована наибольшая статистика, имеются три экспоненты в распаде шаровой молнии. Статистический вес короткоживущих шаровых молний, время жизни которых  $\tau = 3$  с, составляет 59%, с временем жизни  $\tau = 29$  с – 26% шаровых молний и с временем жизни  $\tau = 213$  с – только 15%. Следовательно, среднее время жизни шаровой молнии составляет 41 с, тогда как  $1/e$  шаровых молний сохранится 9 с.

Имеются и другие особенности, относящиеся к распределению шаровых молний по определенным параметрам, а также к корреляции между отдельными параметрами. На некоторых из них мы остановимся ниже. Отметим, что введенная выше средняя шаровая молния, несмотря на указанные ограничения, представляет собой простой образ наблюдаемой шаровой молнии, к которому удобно обращаться для сравнения. Одна из особенностей шаровой молнии связана с корреляцией между ее обнаружением и грозовой погодой. Согласно Стаханову [280] примерно 70% шаровых молний наблюдается в грозовую погоду, перед грозой и после нее в течение часа. В соответствии с наблюдательными данными Григорьева (см. [282, 283]) эта вероятность равна 77%. Все эти данные относятся к наблюдениям шаровой молнии в Советском Союзе. Другая информация следует из японских наблюдений [284]: 93% шаровых молний относится к ясной погоде; однако вероятность появления шаровой молнии выше в тех местах, где чаще бывает гроза. Это свидетельствует о связи шаровой молнии с грозовыми явлениями.

Косвенным доказательством корреляции шаровой молнии с грозой является сезонное распределение шаровых молний (табл. 8.3). Как видно, на летние месяцы (июнь–август), когда в основном происходят грозовые явления в атмосфере, приходится свыше 80% наблюдаемых шаровых молний.

Остановимся на одном из любопытных аспектов шаровой молнии, относящихся к вероятности ее наблюдения. Хотя шаровая молния – достаточно редкое явление, все же вероятность ее наблюдения может быть оценена. Так, согласно данным Рэйли [274] среди 4400 опрошенных им сотрудников НАСА 180 наблюдали шаровую молнию. Стаханов [280] оценивает вероятность наблюдения шаровой молнии в течение жизни человека как  $P = 10^{-3}$ . Надежная верхняя оценка для вероятности наблюдения шаровой молнии может быть получена из данных Эгели [285, 331]. Обратившись через газеты, которые в общей сложности обслуживали 1,5 млн. подписчиков, он получил информацию о наблюдениях примерно

Таблица 8.3

Сезонное распределение шаровых молний в СССР

Автор	Данные	Месяц года					Сумма за год	
		май	июнь	июль	август	сентябрь		
Стаканов [279, 280]	Число шаровых молний Доля, %	48 5,4	158 17,9	355 40,2	225 25,4	35 4,0	63 7,1	884 100
Григорьев и др. [283]	Число шаровых молний Доля, %	117 6,8	296 17,3	823 48,0	296 17,3	69 4,0	112 6,5	1713 100
Суммарные дан- ные	Число шаровых молний Доля, %	165 6,4	454 17,5	1178 45,4	521 20,0	104 4,0	175 6,7	2597 100

500 шаровых молний, которые видело 1500 человек. Основываясь на работе [285], можно оценить верхний предел для вероятности наблюдения шаровой молнии в течение жизни человека как  $P = 2 \cdot 10^{-3}$ . Другая оценка может быть установлена из того факта, что в 1987 г. читатели газет, с которыми имел связь Эгели, наблюдали 39 шаровых молний [331]. Отсюда получаем верхнюю оценку для вероятности наблюдения шаровой молнии в течение жизни человека  $P > 2 \cdot 10^{-3}$ . Суммируя приведенные данные, находим

$$P = 10^{-2,2 \pm 0,5}.$$

Используя данные для распределения шаровых молний по расстояниям от наблюдателя и считая, что шаровые молнии находятся вблизи поверхности Земли, получаем отсюда частоту появления шаровых молний  $10^{1,3 \pm 1,0} \text{ км}^{-2} \cdot \text{год}^{-1}$ . Это значение интересно сравнить с частотой вспышек обычных молний, которая равна  $5,4 \pm 2,1 \text{ км}^{-2} \cdot \text{год}^{-1}$  [132]. Взяв отношение этих величин, получим, что на одну вспышку обычной молнии приходится  $4 \cdot 10^{\pm 1,2}$  шаровых молний. Таким образом, мы приходим к неожиданному результату: шаровая молния не менее редкое явление, чем обычная молния, — просто она редко наблюдается.

**8.2. Структура.** Один из центральных вопросов, относящихся к природе шаровой молнии, связан с ее структурой. Следует отметить два наблюдательных факта, которые должна объяснить гипотетическая схема строения шаровой молнии. Во-первых, в большинстве случаев шаровая молния имеет сферическую форму. Для демонстрации этого факта в табл. 8.4 представлены данные [283] по наблюдению шаровой молнии различной формы. Во-вторых, в процессе эволюции шаровая молния сохраняет свои размер и форму. Согласно [283] лишь примерно в 4 % наблюдений происходили изменения формы шаровой молнии или распад ее на части. Отсюда следует, что материал вещества шаровой молнии, с одной стороны, оказывается жестко связанным и, с другой стороны, в среднем имеет малую плотность.

Указанные факты представляют жесткие требования к состоянию вещества шаровой молнии. Отсюда вытекает, в частности, что вещество шаровой молнии не может находиться ни в состоянии газа, ни в состоянии пыли. В этих случаях шаровая молния изменяла бы свою форму за малые времена по сравнению с ее временем жизни. В принципе могут быть самые экзотические предположения о строении шаровой молнии, которые нельзя опровергнуть из-за отсутствия информации. Примером такого типа является гипотеза, согласно которой вещество шаровой молнии находится в состоянии неидеальной плазмы [293–295]. Отсутствие начальной информации не позволяет проанализировать эту гипотезу и вместе с тем не дает возможности отвергнуть ее.

Однако более убедительным кажутся представления, которые подтверждаются существующей информацией и имеют аналогии в окружающем нас физическом мире. Практически единственная структура вещества в шаровой молнии, отвечающая этим требованиям — структура фрактального кластера. Тем самым шаровая молния имеет жесткий каркас со структурой фрактального кластера. Тогда, с одной стороны, между эле-

Таблица 8.4

Вероятность наблюдения данной формы шаровой молнии [283] с учетом 2013 случаев наблюдения

Форма	Вероятность, %	Форма	Вероятность, %
Шар	$91 \pm 2^*)$	Лента	$2,6 \pm 0,4$
Овал, эллипсоид	$2,7 \pm 0,4$	Диск	$0,8 \pm 0,3$
Грушевидная	$0,4 \pm 0,1$	Цилиндр	$0,2 \pm 0,1$
Веретенообразная	$0,25 \pm 0,1$	Бесформенная	$1,4 \pm 0,3$
Кольцо	$0,45 \pm 0,15$		

\* ) Приведена статистическая погрешность

ментами каркаса может быть обеспечена надежная связь и, с другой стороны, удельная масса такой системы относительно мала. Существенно, что такая структура каркаса имеет аналоги, которые были рассмотрены выше.

Гипотезы о наличии жесткого каркаса у шаровой молнии высказывались неоднократно, однако надежно обоснована она была в 1982 г. в работе [296]. Авторы этой работы, исследуя взрыв металлических проволочек под действием проходящего через них электрического тока [297], обнаружили, что при определенных условиях релаксация металла в вакуумной камере образуются паутинообразные конструкции, которые прикрепляются к стенкам камеры и могут существовать в таком состоянии в течение 1–2 сут. Измерения поперечных размеров "паутинок" дали оценку 0,01 мкм. Перенося свойства таких конструкций на шаровую молнию, авторы работы [296] назвали ее структуру структурой нитевидного аэрозоля и на основе этого проанализировали некоторые свойства шаровой молнии.

Как показывает представленная ранее информация, релаксация металлических паров в данном режиме приводит к образованию структуры фрактального кластера. Пользуясь логикой авторов работы [296], следует определить структуру шаровой молнии как структуру фрактального кластера [2].

Сравнивая структуру фрактального кластера и структуру нитевидных аэрозолей (далее будем называть ее нитевидной структурой), получаем, что нитевидная структура является грубым приближением структуры фрактального кластера. Действительно, аппроксимируя структуру фрактального кластера в виде сгустка случайно пересекающихся нитей, учитываем те свойства фрактального кластера, которые относятся, с одной стороны, к разреженности и рыхлости конструкции и, с другой – к наличию надежной связи между ее элементами. Однако структура фрактального кластера имеет еще одно дополнительное свойство по сравнению с нитевидной структурой. Именно эта структура характеризуется фрактальной размерностью  $D$ , так что плотность вещества  $\rho(R)$  внутри сферы радиусом  $R$ , центр которой занят материалом конструкции, изменяется по закону  $\rho(R) \sim R^{D-3}$ . Закон этот справедлив в некоторой области размеров  $r_0 \ll R \ll \bar{R}$ . Здесь  $r_0$  – поперечный размер нити или размер частиц,

из которых построена конструкция; корреляционный радиус  $\bar{R}$  устанавливает предел, до которого выполняются фрактальные свойства системы. Если данную конструкцию рассматривать как пористое тело, то  $\bar{R}$  – характерный максимальный размер пор.

Таким образом, мы приходим к выводу, что шаровая молния имеет жесткий каркас со структурой фрактального кластера. В грубом приближении этот каркас может быть представлен как сгусток нитей, случайным образом пересекающихся и связанных. Наиболее подходящим аналогом структуры шаровой молнии можно считать аэрогель. Моделирование каркаса шаровой молнии аэрогелем позволяет оценить размер частиц, входящих в его состав. Действительно, можно представить себе образование жесткого каркаса шаровой молнии, происходящего в результате процесса релаксации первоначально испаренного ее материала. На первой стадии релаксации из пара образуются твердые частицы, которые в дальнейшем объединяются в кластер. Динамика и скорость последнего процесса рассмотрена в п. 5.2. Время образования жесткого каркаса шаровой молнии в результате слипания твердых частиц резко зависит от их размера. Ясно, что время формирования каркаса шаровой молнии меньше времени ее жизни и с точностью до порядка величины может быть оценено примерно как 1 с. При этом получаем, что размер частиц, входящих в состав каркаса шаровой молнии, не должен превышать нескольких нанометров. Это как раз соответствует размеру частиц в аэргеле. При этом вопрос о средней плотности вещества в шаровой молнии мы оставим открытым и обсудим его позже.

Таким образом, согласно проведенному анализу шаровая молния имеет жесткий каркас со структурой фрактального кластера и размером частиц порядка нескольких нанометров. Хорошим аналогом шаровой молнии является аэрогель, который имеет то же строение, что и каркас шаровой молнии.

**8.3. Энергетика.** Рассмотрим проблемы, связанные с энергией шаровой молнии, характером ее использования и преобразования в другие виды энергии. Несмотря на большое число наблюдаемых случаев, лишь в немногих из них последствия от шаровой молнии такие, что по ним можно оценить содержащуюся в шаровой молнии энергию. На рис. 8.1 представлено распределение шаровых молний по энергии [292, 293], построенное с учетом анализа некоторых наблюдательных случаев, проведенного в монографиях Стаканова [280] и Барри [291]. Отсюда получаем и наиболее вероятную энергию шаровой молнии  $20 \cdot 10^{+0,2}$  кДж, которая включена в табл. 8.2. Отметим, что значение средней энергии шаровой молнии

$$\bar{E} = \int E W(E) dE,$$

где  $W(E) dE$  – вероятность нахождения энергии в интервале от  $E$  до  $E + dE$ , составляет  $\bar{E} = 10^{2,3 \pm 0,2}$  кДж = 200 кДж. Тем самым средняя энергия шаровой молнии на порядок величины превышает ее наиболее вероятную энергию. Такое различие связано с характером распределения шаровых молний по энергиям.

На основе представленных данных проведем любопытную оценку. Используя данные п. 8.1, находим, что частота наблюдения шаровых молний над земным шаром составляет  $10^{-2,5 \pm 1,0}$  с<sup>-1</sup>. При этом предпо-

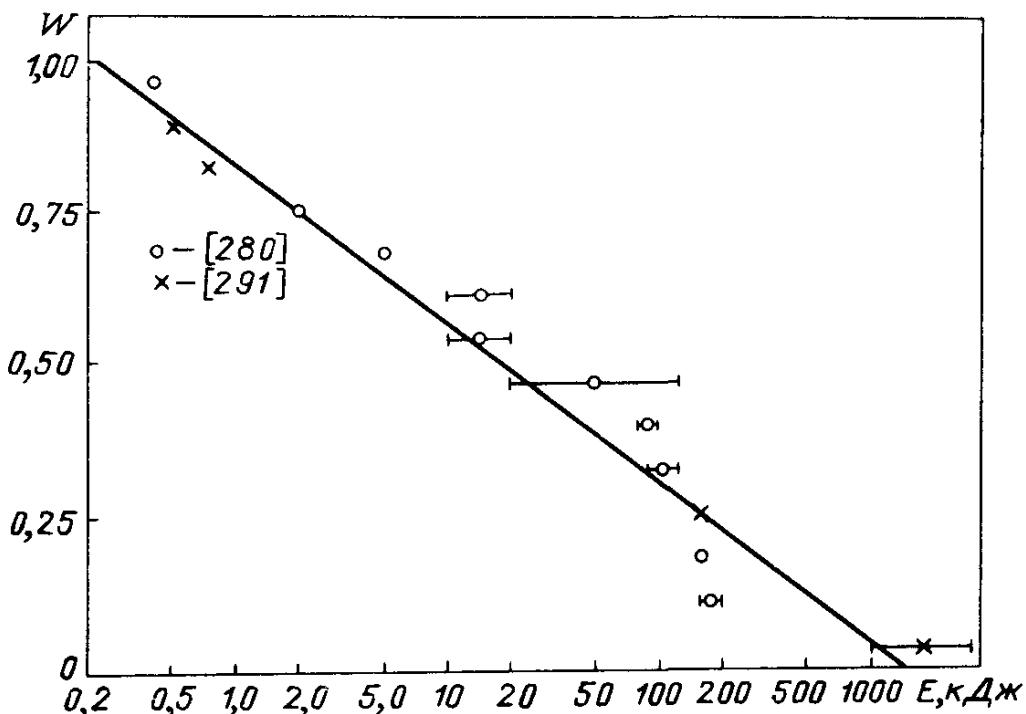


Рис. 8.1. Распределение шаровых молний по энергии.  $W(E)$  – вероятность того, что энергия шаровой молнии превышает  $E$ . Значки – данные Стаканова [280] и Барри [291]; прямая соответствует усреднению по совокупности данных

лагаем равномерность в наблюдении шаровых молний как по площади поверхности Земли, так и по времени. Отсюда мощность, заключенная в наблюдаемых шаровых молниях, составляет  $10^{3,8 \pm 1,2} \text{ кВт}$ . Для сравнения укажем, что средняя мощность обычных молний [298–300] примерно  $5 \cdot 10^7 \text{ кВт}$ . Как видно, если считать шаровую молнию вторичным явлением обычной молнии, то на создание шаровых молний тратится менее  $10^{-4 \pm 1}$  части энергии обычных молний.

Заметная часть наблюдаемых шаровых молний находится внутри зданий. Так, согласно данным Григорьева и сотр. [283], примерно в половине из 1984 проанализированных случаев шаровая молния наблюдалась внутри дома. Поскольку внешние поля практически не проникают внутрь зданий, можно считать, что в этих случаях шаровая молния поддерживалась за счет внутреннего источника энергии. Представление о внутреннем источнике энергии шаровой молнии естественно распространить и на другие случаи ее наблюдения.

Учитывая внутренний характер хранения энергии в шаровой молнии и анализируя протекающие в ней процессы [291, 292, 301], приходим к выводу, что при наблюдающихся временах жизни шаровой молнии возможен только химический способ хранения энергии. Этот анализ проводится следующим образом. Допустим, что внутренняя энергия хранится в плазме или в возбужденных частицах. Мы располагаем достаточной конкретной информацией, чтобы рассмотреть возможные каналы протекания реакции и выяснить, каким образом в конкретном случае внутренняя энергия перейдет в тепло. Введем плотность внутренней энергии  $\epsilon$  и время жизни системы  $\tau$  – время, за которое система распадается и внутренняя энергия переходит в тепло. Для большинства случаев  $\tau \sim 1/\epsilon$ ; в частности, для конкретных плазменных моделей шаровой молнии значение  $\epsilon\tau$

лежит в интервале  $5 \cdot 10^{-13} - 1 \cdot 10^{-11}$  Дж · с · см<sup>-3</sup> [291, 292]. Для наблюдаемой шаровой молнии это значение равно  $10^{1,2 \pm 0,6}$  Дж · с · см<sup>-3</sup> (см. табл. 8.2). Такое сильное расхождение величин свидетельствует о том, что в плазме невозможно сохранить энергию, соответствующую наблюдаемой шаровой молнии, в течение ее времени жизни. Этот факт заставляет отказаться от плазменной и подобной ей гипотез хранения энергии в шаровой молнии.

Приведенный результат нетрудно понять с других позиций. Время жизни шаровой молнии – огромная величина по сравнению с характерными газокинетическими величинами. Например, характерное время столкновения молекул в атмосферном воздухе составляет  $10^{-10}$  с. Столь долгий срок релаксации имеет место лишь для сильно запрещенных процессов, к которым относятся только химические процессы. Процессы с участием заряженных частиц, возбужденных атомов или молекул протекают гораздо эффективнее, и поэтому невозможно хранить энергию в таком виде относительно долгое время.

Кстати, химическая реакция обладает еще одним преимуществом по сравнению с другими видами энергии – высокой емкостью. Например, энергию средней шаровой молнии можно обеспечить примерно десятью спичками. Возьмем шар, имеющий радиус средней шаровой молнии, и зарядим его до предела, т.е. так, чтобы напряженность электрического поля была равна пробойной:  $E = 30$  кВ · см<sup>-1</sup>. В этом случае заряд шара будет равен  $10^{-5,2 \pm 0,1}$  Кл, а его энергия составит  $10^{1,1 \pm 0,2}$  Дж, что на три порядка величины ниже энергии средней шаровой молнии.

Сравнивая химический и электрический виды энергий, следует отметить, что химическая энергия обладает большей емкостью, тогда как электрическая характеризуется существенно меньшими значениями времени ее передачи в другие виды энергии. Считая, что шаровая молния обладает внутренним источником энергии, мы придем к однозначному выводу, что этот источник поддерживается за счет химической энергии. Однако если этот вывод распространить на все шаровые молнии, то возникнет противоречие с некоторыми наблюдениями [286]. В ряде случаев наблюдается разрушение электрических и телефонных сетей, а также различных электрических приборов. При больших разрушениях электрический заряд, прошедший через цепь, оценивается в 1 Кл. Поскольку этот заряд на несколько порядков величины выше того, который в принципе может нести шаровая молния, можно думать, что в этих случаях электрическая энергия берется от внешнего источника (от тучи или пылевого облака), а шаровая молния является проводящим телом, которое создает начальную ионизацию в воздухе и переносит энергию внешнего источника.

Отметим круг наблюдений, находящихся в противоречии с химическим источником энергии шаровой молнии. Сюда относятся случаи с быстрым вложением энергии – такие, как проплавление дырок в стеклах металлических предметах, расщепление деревьев и бревен и т.д. Например, процесс расщепления бревен можно представить себе как результат быстрого испарения воды внутри, что создает высокое давление в бревнах и разрывает их [280, 291]. Такое возможно лишь в случае быстрого вложения энергии, в частности при прохождении по бревну электрического тока. Это не может быть результатом выделения химической энергии.

Указанные противоречия отражают сложность шаровой молнии как реального атмосферного явления. Видимо, на открытом воздухе шаровая молния может вызывать электрический пробой под действием внешнего источника энергии, и таким способом, видимо, можно объяснить, что выделяемая при ее взрыве энергия электрическая. В тех случаях, когда шаровая молния находится внутри помещения, она поддерживается за счет внутреннего химического источника энергии. Очевидно, это следует отнести и к шаровой молнии, находящейся на открытом воздухе, когда она находится в свободном состоянии.

Считая внутреннюю энергию шаровой молнии химической, получаем, что в результате химических процессов химическая энергия превращается в тепло, а небольшая часть этой энергии преобразуется в излучение. Оказывается, параметры шаровой молнии предъявляют жесткие требования к характеру химического процесса, что затрудняет выбор конкретных химических процессов в качестве модельных.

Нетрудно показать, что химический процесс, протекающий в шаровой молнии, не может быть одноступенчатым [291, 292, 302]. Действительно, в этом случае время протекания химического процесса  $\tau$  определяется формулой Аррениуса

$$\tau = \tau_0 \exp(E_a/T), \quad (8.1)$$

где предэкспоненциальный множитель  $\tau_0 = 10^{-12} \div 10^{-10}$  с – характерное время элементарного столкновения реагирующих молекул, а значительная энергия активации  $E_a$  обеспечивает длительное время хранения энергии. Например, если  $\tau$  равно времени жизни шаровой молнии при комнатной температуре, то получим  $E_a = 15 \pm 2$  ккал · моль<sup>-1</sup>. Здесь нет противоречий, ибо  $E_a$  попадает в интервал реальных значений энергий активации. Противоречие наступает, если принять, что химический процесс не только медленный, но и интенсивный. Последнее означает, что при этом происходит интенсивное тепловыделение, которое способно существенно повысить температуру в зоне реакции (вплоть до нескольких тысяч градусов). Однако согласно формуле (8.1) повышение температуры ускоряет процесс. Поэтому интенсивный одноступенчатый процесс с большой энергией активации носит взрывной характер – резкое выделение энергии ускоряет тепловыделение.

Из этого анализа, в частности, следует, что в качестве модельного химического процесса в шаровой молнии не подходит простой химический процесс. В частности, привлекательным химическим процессом для шаровой молнии является процесс с участием озона. Озон является наиболее подходящим кандидатом в качестве активного вещества шаровой молнии, ибо он наиболее эффективно образуется и накапливается при электрических процессах в атмосфере. Однако эффективная скорость разложения озона в атмосфере протекает с энергией активации  $E_a = 11$  ккал · моль<sup>-1</sup> [219, 220], т.е. время протекания этого процесса резко зависит от конечной температуры, а тем самым и от концентрации озона в атмосфере. Таким образом, свободный озон не подходит в качестве активного вещества шаровой молнии.

Таким образом, мы еще раз убедились в сложности шаровой молнии как реального физического явления. Химический процесс в шаровой мол-

Таблица 8.5

## Распределение наблюдаемых шаровых молний по цвету

Наблюдаемый цвет	Число наблюдений по различным источникам					Вероятность данного цвета на основе суммы наблюдений *, %
	Мак-Нэлли [273]	Рэйли [274]	Чэрман [278]	Эгели [285]	Стаханов [280]	
Белый	44	27	15	55	244	385
Красный	48	7	5	56	180	296
Оранжевый	50	46	12	7	113	18 (19)
Желтый	40	37	20	43	246	228
Зеленый	3	10	2	—	12	14 (12)
Голубой, синий и фиолетовый	42	25	5	18	111	386
Смесь цветов	84	—	9	26	30	23 (26)
<b>Сумма</b>	<b>311</b>	<b>152</b>	<b>68</b>	<b>205</b>	<b>936</b>	<b>1672</b>
						<b>100</b>

\*) В скобках приведены значения вероятности по данным Стаханова.

нии по определению должен быть сложным и поэтому слабо зависит от конечной температуры. Возможно, что газогетерогенный процесс, и перевод твердого вещества в газовую фазу, необходимый для осуществления химического процесса, является лимитирующей стадией, которая ограничивает скорость процесса и слабо зависит от температуры. Во всяком случае, сейчас нет возможности предложить конкретный процесс, который мог быть служить моделью химического процесса в шаровой молнии.

**8.4. Излучательные свойства.** Свечение шаровой молнии – одно из основных ее свойств. Оно создается в результате процессов, которые играют принципиальную роль в существовании этого явления, поэтому понимание характера излучательных процессов проливает свет и на природу шаровой молнии.

Одна из характеристик излучения шаровой молнии относится к ее цвету. В табл. 8.5 собраны данные по цвету шаровой молнии согласно разным наблюдательным данным. В этой и следующей таблицах использована упрощенная схема распределения шаровых молний по цвету, предложенная Стакановым. Результаты, приведенные в последней колонке табл. 8.5, в пределах статистической ошибки совпадают, за исключением случая, когда имеется смесь цветов. Видимо, последний случай истолковывается по разному в разных наборах наблюдений.

В согласованной картине в случае распределения наблюдательных шаровых молний по цвету не должны возникать противоречия при увеличении статистики наблюдательных данных. В табл. 8.6 проведено сравнение суммарных данных предыдущей таблицы с данными Григорьева и др. [283] при использовании схемы Стаканова [280] для наблюдаемых шаровых молний по цвету. Видно, что расхождение этих данных существенно выходит за границы статистической погрешности. Чтобы понять причину возникших расхождений, необходимы дополнительные исследования.

Наблюдаемое разнообразие цветов шаровой молнии свидетельствует о сложности самого явления и о разнообразии веществ, вызываемых свечение шаровой молнии. Более определенное представление о шаровой молнии как об источнике света вытекает из анализа ее яркости. Грубый анализ [274] показывает, что шаровая молния является источником света средней интенсивности. Существенный прогресс в этом направлении был достигнут Стакановым [280], который собрал информацию о яркости шаровой молнии как источника света. В силу несовершенства глаза, служащего прибором для измерения яркости светового источника, а также из-за необычности условий, при которых фиксируется яркость шаровой молнии, значение яркости шаровой молнии в каждом случае определяется с точностью до множителя 2–3. Повышение статистики наблюдений частично уменьшит эту погрешность. Несмотря на большую погрешность, такая информация представляет большую ценность.

Удачно выбранная Стакановым шкала для определения яркости шаровой молнии – путем сравнения ее с яркостью эквивалентной электрической лампы – далее была использована Григорьевым и др. [283]. (Данные приведены в табл. 8.7.)

Таблица 8.6

## Сравнение данных по распределению наблюдаемых шаровых молний по цвету

Наблюдаемый цвет	Число наблюдений по различным источникам		Вероятность данного цвета	
	Сумма данных табл. 8.5	Григорьев и др. [283]	Сумма данных табл. 8.5	Григорьев и др. [283]
Белый	385	247	$23 \pm 1^*)$	$14 \pm 1$
Красный и розовый	296	297	$18 \pm 1$	$16 \pm 1$
Оранжевый	228	633	$14 \pm 1$	$35 \pm 1$
Желтый	386	307	$23 \pm 1$	$17 \pm 1$
Зеленый	27	22	$1,6 \pm 0,3$	$1,2 \pm 0,3$
Голубой, синий и фиолетовый	201	230	$12 \pm 1$	$13 \pm 1$
Смесь цветов	149	67	$9 \pm 1$	$3,7 \pm 0,5$
<b>С у м м а</b>	<b>1672</b>	<b>1803</b>	<b>100</b>	<b>100</b>

\*)Указана статистическая погрешность.

Таблица 8.7

## Сравнение яркости шаровой молнии с яркостью эквивалентной электрической лампы

Мощность лампы, Вт	Число наблюдений		Доля от общего числа наблюдений, %	
	Стаханов [280]	Григорьев и др. [283]	Стаханов [280]	Григорьев и др. [283]
<10	55	89	9,2	6,7
10 – 20	83	103	13,9	7,8
20 – 50	109	209	18,3	15,8
50 – 100	140	314	25,5	23,8
100 – 200	150	376	25,1	28,5
200 – 500	39	}	6,5	} 17,4
>500 –	21		3,1	
<b>С у м м а</b>	<b>597</b>		<b>100</b>	<b>100</b>

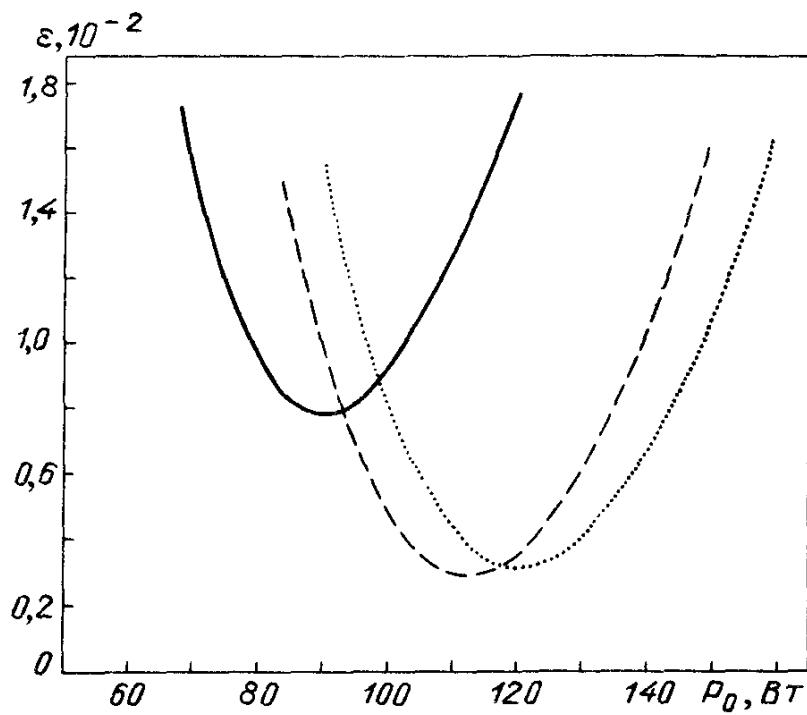


Рис. 8.2. Зависимости  $\epsilon(P_0)$  по данным Стаханова [280] (сплошная линия), по данным Григорьева и др. [283] (точечная линия) и по суммарным данным (штриховая линия)

Обрабатаем данные табл. 8.7, считая, что функция распределения шаровых молний по яркости  $P$  имеет вид

$$W(P) = \frac{1}{P_0} \exp(-P/P_0).$$

Здесь  $W(P)$  – вероятность того, что яркость шаровой молнии равна  $P$ ,  $P_0$  – средняя яркость шаровой молнии. При этом  $\int_0^\infty W(P) dP = 1$ . Отсюда для вероятности того, что яркость находится в интервале от  $P_i$  до  $P_k$ , имеем

$$W(P_i, P_k) = \exp(-P_i/P_0) - \exp(P_k/P_0).$$

Построим функционал

$$\epsilon(P_0) = \sum_i [W(P_i, P_{i+1}) - W_{\text{набл}}(P_i, P_{i+1})]^2,$$

где вероятность  $W(P_i, P_{i+1})$  определяется приведенной формулой (8.3), а вероятность  $W_{\text{набл}}(P_i, P_{i+1})$  относится к наблюдательным данным (ее значения приведены в табл. 8.7). Зависимость  $\epsilon(P_0)$  приведена на рис. 8.2. Очевидно, что чем ближе зависимость (8.2) к наблюдаемой, тем меньшее значение принимает функционал  $\epsilon(P_0)$ .

Выберем наиболее вероятное значение  $P_0$  из условия минимума функционала  $\epsilon(P_0)$ , а погрешность значения этой величины  $\Delta P$  примем такой, чтобы выполнять равенство  $\epsilon(P_0 \pm \Delta P) = 2\epsilon(P_0)$ . В единицах мощности эквивалентной электрической лампы согласно данным Стаханова получим  $P_0 = 90 \pm 20$  Вт, согласно данным Григорьева  $P_0 = 120 \pm 16$  Вт. Переходя

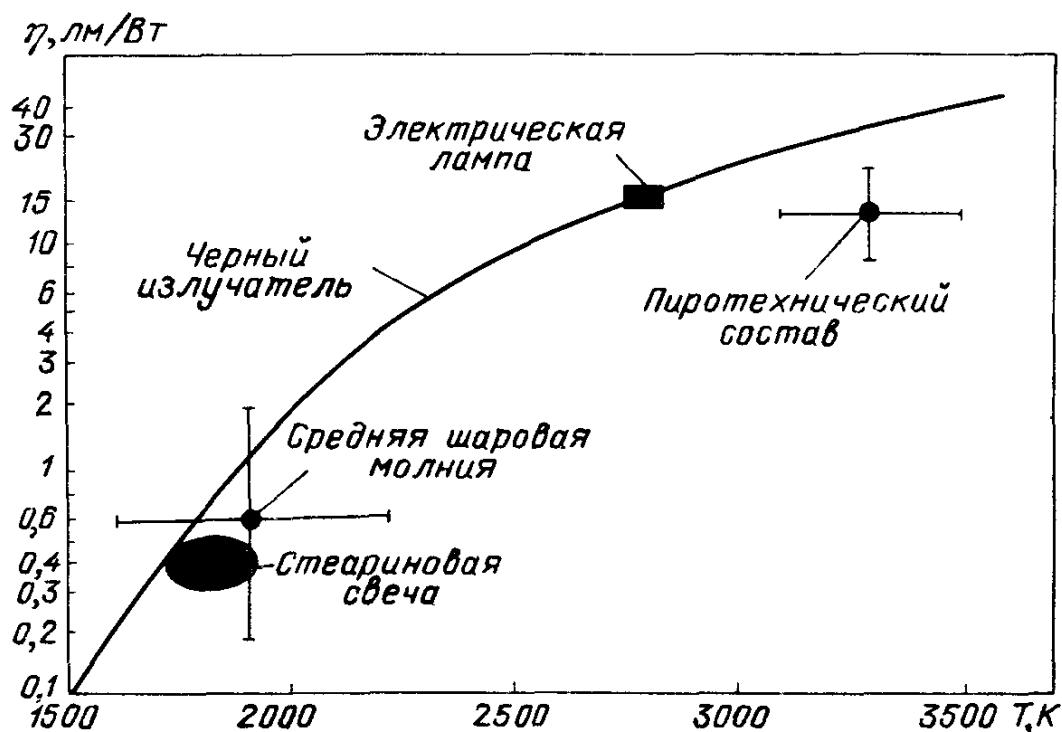


Рис. 8.3 Световой выход для разных источников света

к светотехническим единицам, для среднего светового потока шаровой молнии получаем  $P_0 = 1600 \pm 200$  лм.

Отметим, что указанная погрешность относится к виду распределения в используемых базах данных и не включает ошибки в самих данных. О погрешностях в полученном результате можно судить и по степени совпадения между собой данных Стаканова и Григорьева с сотрудниками, расходжение между которыми не превышает 20 %.

Приведенные количественные параметры яркости средней шаровой молнии могут быть использованы при последующем анализе, который даст представление о строении шаровой молнии как об источнике света и позволит сравнить ее с известными аналогами (рис. 8.3). При таком анализе мы будем использовать два параметра яркости: световой поток от средней шаровой молнии, равный  $1600 \pm 200$  лм, и световой выход средней шаровой молнии, равный  $0,7 \cdot 10^{0,6}$  лм · Вт<sup>-1</sup>. Второй параметр получен из первого с учетом мощности средней шаровой молнии и погрешностей в измерениях используемых величин. На основе приведенных параметров проведем сравнение шаровой молнии как источника излучения с нагретым шаром, радиус которого равен радиусу средней шаровой молнии и поверхность которого излучает, как абсолютно черное тело. Выясним, чему должна быть равна температура поверхности шара, чтобы световой поток от него совпадал со световым потоком шаровой молнии. Получим  $T = 1360 \pm 30$  К. Далее определим температуру шара, имеющего тот же световой выход, что и средняя шаровая молния. Получим  $T = 1800 \pm 200$  К. Наконец, для согласования используемых параметров средней шаровой молнии будем считать, что нагретый шар имеет тот же световой выход, что и средняя шаровая молния, но излучает лишь часть его полной поверхности. Получим, что излучающая часть поверхности шара равна  $10^{-1,7 \pm 0,8}$ .

Из приведенного простого анализа можно сделать два важных вывода. Во-первых, температура излучающих элементов шаровой молнии составляет примерно 2000 К. При этом мы должны учитывать, что в шаровой молнии имеются дополнительные каналы потери энергии по сравнению с абсолютно черным телом. Поэтому реальная температура излучающих элементов шаровой молнии не может быть ниже, чем она получается из сравнения с черным телом. Во-вторых, шаровая молния является оптически тонкой системой. Это означает, что либо она содержит много очагов излучения, которые в сумме занимают малую часть ее объема, либо, если свечение создается во всех точках объема, в оптической области спектра это оптически прозрачная система.

Для дальнейшего анализа заметим, что для ряда наблюдаемых цветов шаровой молнии ее излучение не может создаваться излучением поверхности или частиц, а возникает в результате излучательных переходов атомов или молекул. Поскольку энергия оптического кванта на порядок величины превышает тепловую энергию при рассматриваемых условиях ( $T \approx 2000$  К), нижнее состояние излучательного перехода атома или молекулы является основным состоянием. Действительно, плотность возбужденных атомов при таких условиях мала и резко падает с ростом возбуждения. Далее, излучательное время жизни возбужденных состояний должно быть относительно малым, чтобы их излучение было более эффективным.

Указанные два требования резко сокращают число кандидатов в качестве возбужденных атомов или молекул, которые могут влиять на цвет шаровой молнии. Соответствующий отбор таких возможностей представлен в работах [2, 292, 293]. В число таких кандидатов, в частности, входят атомы и молекулы, используемые в пиротехнических составах для создания соответствующего цвета. На рис. 8.4 приведены те из них, которые в относительно больших количествах содержатся в приповерхностном слое Земли.

Отметим, еще одно существенное обстоятельство, относящееся к поведению возбужденных атомов и молекул в атмосферном воздухе. Вероятность гибели возбужденного атома или молекулы в атмосферном воздухе в результате испускания кванта существенно меньше, чем вероятность их тушения при столкновении с молекулами воздуха. Так, вероятность испускания кванта резонансно возбужденным атомом щелочного металла, находящимся в атмосферном воздухе при температуре около 2000 К, составляет порядка  $10^{-2}$ . Отсюда следует вывод, что возбужденные атомы или молекулы в атмосферном воздухе находятся в термодинамическом равновесии с воздухом и их плотность не зависит от способа их создания. Тем самым температура излучающей области является параметром, определяющим эффективность излучения горячего воздуха с примесными атомами или молекулами.

Таким образом, мы получаем, что невозможно эффективное излучение из областей, содержащих холодный атмосферный воздух. Суммируя полученные результаты, приходим к выводу, что излучающие элементы шаровой молнии включают в себя горячий воздух с температурой в области 2000 К. Такие горячие области занимают лишь малую часть объема шаровой молнии.

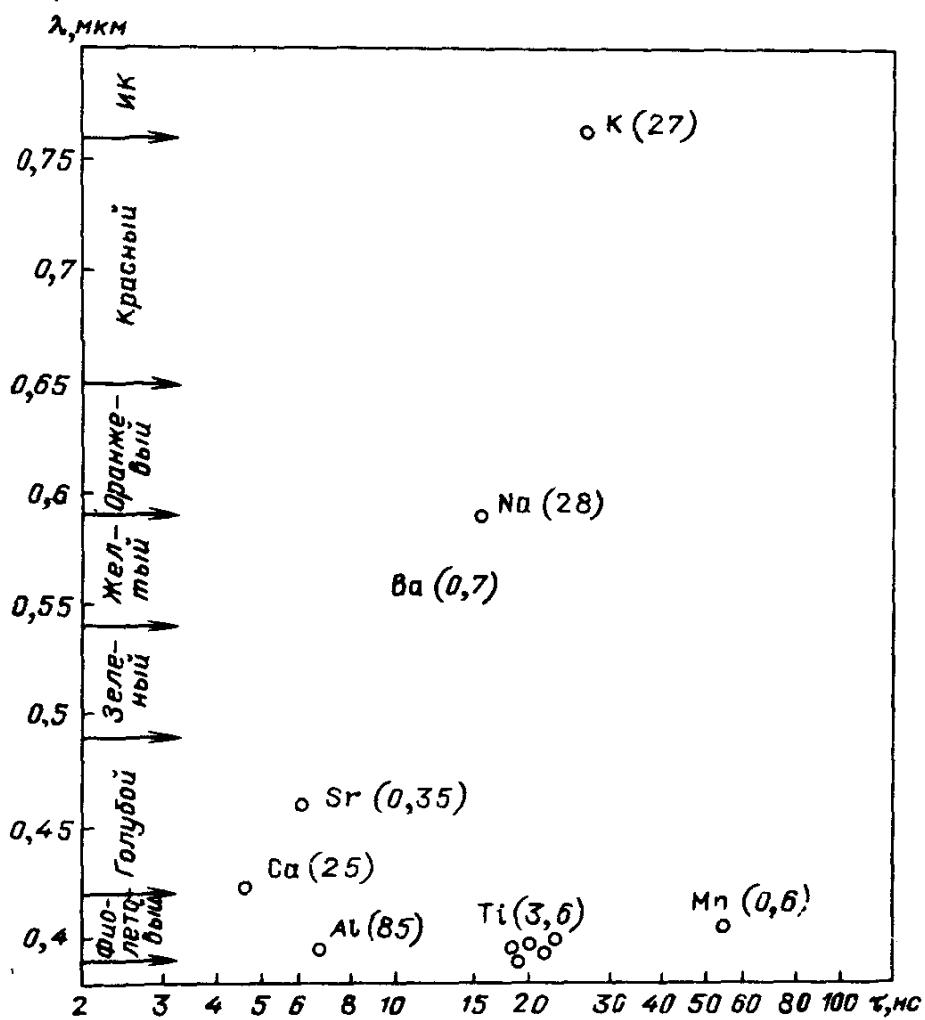


Рис. 8.4. Излучательные переходы резонансно возбужденных атомов для элементов, которые могут быть источниками света в шаровой молнии.

В скобках указана распространенность этих элементов (в миллиграммах на грамм) в приповерхностном слое Земли

Для последующего анализа необходимо рассмотреть существующие в атмосферном воздухе источники излучения. Разделим их на два типа. К первому отнесем пиротехнические составы, ко второму – пламена, образуемые при горении органических веществ. Пиротехнический состав находится в твердом состоянии и включает в себя одновременно горючее, окислитель и светящуюся примесь. Например, состав желтого цвета содержит 30 % Mg, 37 % KNO<sub>3</sub>, 30 % Na<sub>2</sub>C<sub>2</sub>O<sub>4</sub> и 3 % смолы [303]. При этом магний используется как горючее, кислород солей – как окислитель, натрий – в качестве светящегося элемента, а смола – как связующий материал. В результате реакций между компонентами пиротехнического состава происходит разогревание продуктов реакции до температур 3000–3500 К. Находящиеся в продуктах реакции примесные атомы или молекулы (в рассматриваемом примере – атомы натрия) создают излучение данного цвета. Следует отметить, что в силу высокой температуры продуктов реакции световой выход пиротехнических составов относительно высок и на порядок величины превышает световой выход средней шаровой молнии.

Рассматриваемые пламена образуются при сжигании жидких и твердых органических материалов. В отличие от пиротехнических составов необ-

ходимый для горения кислород берется из воздуха. В пламени смешиваются нагретый воздух и испаренный органический материал, и в результате этого происходят реакции окисления и свечения нагретой области. Поскольку выделяемая при горении энергия идет на нагревание как продуктов реакции, так и азота воздуха, температура пламени в атмосферном воздухе ниже, чем при использовании пиротехнических составов, и составляет обычно около 2000 К. Свечение пламени наиболее эффективно в случае, когда испаренный материал попадает в горячую зону в виде малых частичек – аэрозолей или кластеров. Излучение этих частичек в основном и создает свечение пламени в оптической области спектра.

Приведенные выше два типа источников излучения использовались для модельного описания шаровой молнии как источника света. При этом для первого случая расчеты [292, 293] проводились с использованием в качестве излучающего элемента параметров натрия, а во втором случае [304] – параметров пламени свечи.

Рассмотрим обе модели шаровой молнии как источника света, не останавливаясь на их деталях. Предположим, что шаровая молния имеет твердый каркас и в его порах находится небольшое количество активного вещества, которое в дальнейшем, вступая в химическую реакцию, разогревает воздух и создает светящуюся зону. Отметим, что активное вещество не может одновременно служить каркасом для шаровой молнии. Действительно, характерные размеры частиц, входящих в состав каркаса шаровой молнии, оцениваются как нанометры из условия, чтобы каркас успел достаточно быстро сформироваться (за времена, меньшие 1 с). Размер светящихся зон по разным расчетам оценивается как 0,1–1,0 мм из условия, чтобы эффективность переработки выделяемой энергии в свет соответствовала наблюдаемой. Отсюда имеем, что начальный размер области, занимаемой активным веществом, порядка 1,0–10 мкм. Расхождение между оценками размеров элементов каркаса шаровой молнии и элементов активного вещества свидетельствует о том, что каркас шаровой молнии не составлен из активного вещества.

Имеем следующую схему процессов для обеих моделей. Активное вещество, находящееся в порах каркаса шаровой молнии, вступает в химическую реакцию и создает горячие зоны, содержащие атмосферный воздух и продукты реакции. Свечение этих зон определяет излучение шаровой молнии. Одновременно существует много таких зон, однако занимаемый ими полный объем мал по сравнению с объемом шаровой молнии. Так, на рис. 8.5 приводится доля объема, занимаемого горячими зонами шаровой молнии для двух рассматриваемых моделей. В случае 1 [292, 293] свечение создается возбужденными атомами натрия, находящимися в горячем воздухе. Их концентрация выбрана равной концентрации натрия в приповерхностном слое Земли, которая равна 2,7 % [305]. В случае 2 [304] свечение, как и в пламени свечи, создается частичками стеарина, причем полагалось, что их оптические параметры такие же, как и у частичек сажи. Расчет проведен для оптимального содержания материала в пламени, когда при его полном сгорании кислород расходуется полностью. Параметром в указанных расчетах служит температура горячей области, которая определяется характером химического процесса.

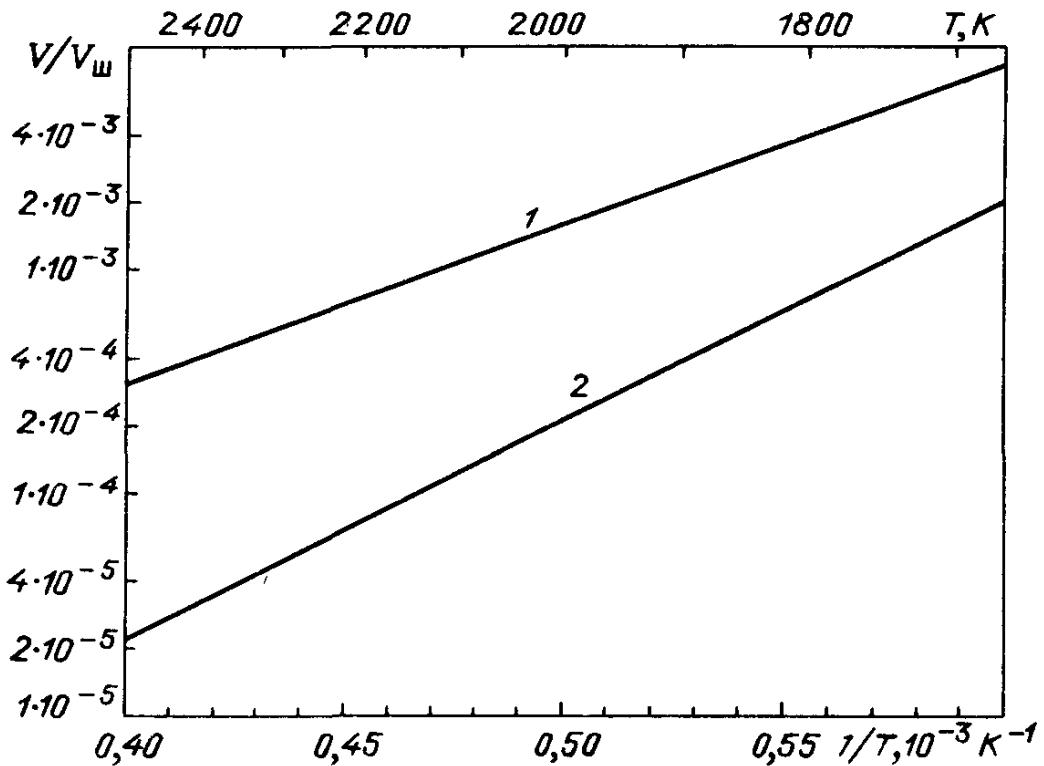


Рис. 8.5. Отношение объема  $V$  горячих излучающих зон к объему  $V_{ш}$  средней шаровой молнии для разных моделей излучения.

1 – излучение создается атомами натрия (их концентрация в горячем воздухе равна 2,7% – концентрации натрия в приповерхностном слое Земли); 2 – излучение создается малыми частицами стеарина (как в пламени свечи; предполагается, что их оптические свойства совпадают с оптическими свойствами сажи).

Линии 1 и 2 аппроксимируются зависимостью  $A \exp(E_a/T)$  с параметрами  $A = 3,9 \cdot 10^{-7}$  и  $E_a = 16\,600$  К для первой модели и  $A = 2,8 \cdot 10^{-9}$  и  $E_a = 22\,400$  К для второй модели

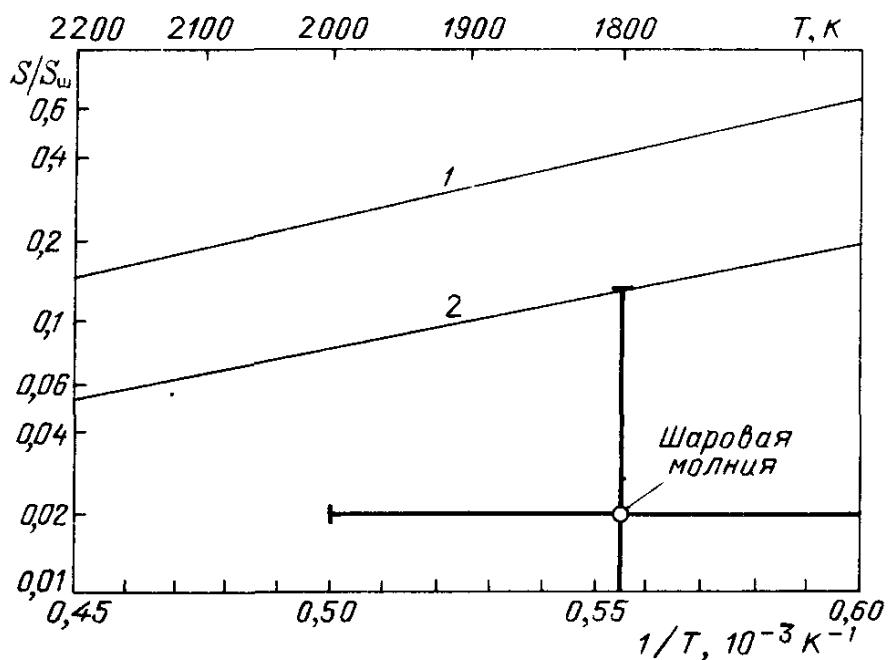


Рис. 8.6. Отношение площади поверхности  $S$  горячих излучающих зон к площади поверхности  $S_{ш}$  средней шаровой молнии для моделей, рассмотренных на рис. 8.5.

Линии 1 и 2 аппроксимируются зависимостью  $A \exp(E_a/T)$  с параметрами  $A = 1,4 \cdot 10^{-3}$  и  $E_a = 10\,300$  К для первой модели и  $A = 8,9 \cdot 10^{-4}$  и  $E_a = 9000$  К для второй модели

Отметим, что обе модели приводят к "пятнистой" структуре шаровой молнии как источника света, что связано с наличием большого числа малых светящихся элементов. Различие моделей состоит в способе создания света. В первой модели источником излучения являются резонансно возбужденные атомы. Резонансное излучение заперто в горячих зонах и выходит из него в виде сильно уширенных линий. Во второй модели свечение, создаваемое малыми частицами, непрерывно распределено по всему оптическому спектру и цветовые характеристики излучения определяются температурой пламени. Удельные параметры источника света в первом случае ниже, чем во втором. Этот вывод можно сделать из рассмотрения рис. 8.6, преимущество которого, однако, состоит в том, что таким образом можно обеспечить любой цвет испускаемого света.

Обе модели шаровой молнии как источника излучения отвечают одной и той же схеме процессов внутри шаровой молнии. Активное вещество в отдельных точках шаровой молнии вступает в химическую реакцию, продукты реакции нагреваются и расширяются, и в этот момент создается излучение. Волны химической реакции одновременно распространяются по многим направлениям, и множество светящихся зон-точек создает впечатление объемного излучения.

При этом отметим, что поперечные размеры горячих зон однозначно определяются световым выходом шаровой молнии и эффективностью преобразования химической энергии в световую. Если известна скорость распространения волн химической реакции (или волны испарения) в массивном элементе активного вещества, то можно оценить и число одновременно существующих горячих зон. Оно находится в интервале  $10^2 - 10^4$ .

Серьезную проблему при анализе данных моделей составляет характер распространения волн химической реакции по активному веществу, находящемуся в каркасе шаровой молнии. Сложные проблемы возникают при анализе взаимодействия этих волн и их ветвлений.

Суммируя приведенные выше данные, отмечаем, что свечение шаровой молнии создается большим числом горячих зон, образуемых в результате химической реакции активного вещества. Размер отдельной горячей зоны составляет 0,1 – 1,0 мм, его температура около 2000 К, излучение создается либо примесными атомами или молекулами, либо находящимися в горячей зоне малыми частицами (аэрозолями или кластерами). Пятнистая структура свечения шаровой молнии является одним из результатов, который необходим для объяснения наблюдаемых параметров шаровой молнии.

**8.5. Теплообмен и газодинамика.** Наличие пятнистой структуры у шаровой молнии приводит к тому, что при высокой температуре отдельных элементов ее средняя температура невелика. Поэтому шаровая молния может поддерживаться источником энергии относительно небольшой мощности. Невысокая температура шаровой молнии согласуется с наблюдательными данными. Большинство очевидцев шаровой молнии, находившиеся от нее на небольшом расстоянии (около 1 – 5 м), не ощущали теплового воздействия шаровой молнии. Отметим, что в этом отношении хорошей моделью шаровой молнии является электрический утюг. Действительно, мощность и размеры электрического утюга того же порядка, что и соответствующие параметры шаровой молнии, т.е. можно

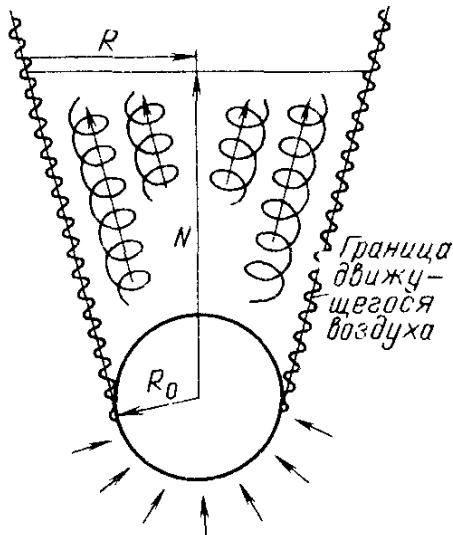


Рис. 8.7 Характер движения воздуха в области нахождения шаровой молнии

считать, что характерное нагревание вблизи шаровой молнии того же порядка, что и у электрического утюга — порядка  $10^2$  К.

Выясним характер теплообмена между шаровой молнией и окружающим воздухом. Общая картина движения воздуха, взаимодействующего с шаровой молнией, представлена на рис. 8.7. Воздух нагревается вблизи шаровой молнии, поднимается вверх, и на его месте втягивается холодный воздух. Вдали от шаровой молнии над ней движение воздуха подобно движению дыма, выходящего из трубы. Учитывая это, сделаем оценки параметров движущегося воздуха вдали от шаровой молнии на основании теории Зельдовича [306].

Будем исходить из уравнения Навье — Стокса для движущегося воздуха, которое имеет вид

$$(\mathbf{v} \vec{\nabla}) \mathbf{v} = \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} \frac{\Delta T}{T}, \quad (8.5)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость движения воздуха,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\Delta T$  — разность температур для воздуха в данной точке пространства и для начального, ненагретого воздуха,  $\nu$  — кинематическая вязкость воздуха, которая в рассматриваемой области температур  $T$  хорошо аппроксимируется зависимостью  $\nu = \nu_0 (T/300)^{1.76}$ , где  $\nu_0 = 0,159 \text{ см}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  [307].

Отметим, что рассматриваемый режим отвечает небольшому нагреванию воздуха ( $\Delta T \ll T$ ). Кроме того, число Рейнольдса для данных условий движения воздуха  $Re = \nu R / \nu$  велико\*) ( $R$  — радиус сечения движущегося воздуха).

Видно, что первый член в правой части уравнения (8.5) мал по сравнению с левой частью. Действительно,

$$\nu \Delta v \sim \frac{\nu v}{R^2} \sim \frac{v^2}{R} \frac{1}{Re} \ll \frac{v^2}{R}.$$

В результате получаем следующую оценку для характерной скорости воздуха, там, где радиус сечения движущегося воздуха равен  $R$ :

$$v \sim \sqrt{gR} \frac{\Delta T(R)}{T}. \quad (8.6)$$

\*) Действительно, если для скорости движения воздуха воспользоваться формулой (8.6) и в качестве  $R$  использовать радиус средней шаровой молнии, то получим следующую оценку для числа Рейнольдса:  $Re \sim 10^5 \sqrt{\Delta T/T}$ . В соответствии с формулой (8.8) оно растет ( $Re \sim R^{2/3}$ ) по мере удаления от шаровой молнии.

Отсюда для мощности, которая переносится нагретым воздухом, находим

$$\Phi \sim c_p \rho \Delta T v R^2 \sim c_p \rho g^{1/2} R^{5/2} \Delta T^{3/2} T^{1/2}, \quad (8.7)$$

где  $c_p$  – удельная теплоемкость воздуха,  $\rho$  – его массовая плотность. Поскольку переносимая воздухом мощность не зависит от сечения, имеем  $R^{5/2} \Delta T^{3/2}(R) = \text{const}$ , т.е.

$$\Delta T(R) \sim R^{-5/3}. \quad (8.8)$$

Шаровая молния как геометрическое тело создает сопротивление потоку движущегося воздуха, и поэтому на шаровую молнию со стороны обтекающего ее воздуха действует сила, направленная вверх. Таким образом, тепловые процессы, связанные с передачей тепла от шаровой молнии к окружающему воздуху, вызывают возникновение подъемной силы, действующей на шаровую молнию. Эта сила равна

$$F \sim \rho v^2 R^2 \sim g \rho R^3 \frac{\Delta T}{T}. \quad (8.9)$$

Введя числовой коэффициент  $a$ , перепишем это соотношение в виде

$$F = a g \rho R_0 \frac{\Delta T(R_0)}{T} \pi R_0^2, \quad (8.10)$$

где  $R_0$  – радиус шаровой молнии. В модельных экспериментах, выполненных в работе [308], значение числового коэффициента в формуле (8.10) было получено равным  $11 \pm 5$ .

На основе полученных соотношений определим некоторые параметры шаровой молнии. Во-первых, на основе формулы (8.7) с учетом численного параметра имеем, что нагревание воздуха вблизи средней шаровой молнии равно

$$\Delta T = (60 \text{ K}) \cdot 10^{\pm 0,6}. \quad (8.11)$$

Видно, что эта величина того же порядка, что и для электрического утюга, который является хорошей моделью теплообмена шаровой молнии с окружающим воздухом. Во-вторых, определим характерную плотность материала шаровой молнии из условия, что она может летать в воздухе. Приравнивая подъемную силу (8.10), действующую на среднюю шаровую молнию, ее весу, находим, что отношение веса шаровой молнии к весу воздуха в ее объеме равно

$$Z = 1 \cdot 10^{\pm 0,8}, \quad (8.12)$$

т.е. средняя плотность материала шаровой молнии в ее объеме порядка плотности воздуха.

Рассмотрим теперь движение газа внутри шаровой молнии. В результате химических процессов внутри шаровой молнии твердое активное вещество в горячих зонах превращается в газообразные продукты реакции. Это создает избыточное давление газа внутри каркаса. Поток газа наружу вызывает дополнительную нагрузку на каркас шаровой молнии. Поскольку плотность каркаса относительно мала, прочность его низкая, так что возникающие под действием выходящего газа напряжения могут

зызвать разрушение каркаса. Далее мы оценим напряжение в средней шаровой молнии под действием рассматриваемого эффекта и выясним, при каких условиях оно не приводит к разрушению каркаса.

Реальное соотношение между параметрами газа и каркаса шаровой молнии следующее:

$$\bar{R} \gg r_0 \gg \lambda, \quad (8.13)$$

где  $\lambda$  – длина свободного пробега молекул газа,  $\bar{R}$  – характерный размер пор внутри каркаса,  $r_0$  – характерный размер частиц, из которых составлен каркас. При этих условиях взаимодействие движущегося газа с каркасом имеет следующий характер. Молекулы газа, сталкиваясь с частицами каркаса, передают ему свой импульс и далее в результате столкновения с молекулами газа приходят с ними в равновесие. Из-за малого размера частиц в каркасе отсутствует пограничный слой, и газ вблизи и вдали от точек каркаса движется с одной и той же скоростью. Сила, передаваемая каркасу единицей объема газа, составляет по порядку величины

$$F \sim S \bar{\rho} \lambda \frac{dp}{dx}, \quad (8.14)$$

где  $S$  – величина удельной поверхности каркаса,  $\bar{\rho}$  – средняя массовая плотность каркаса,  $dp/dx$  – градиент давления газа. Из уравнения движения газа  $d(v\rho)/dt = F$  ( $v$  – средняя скорость газового потока,  $\rho$  – плотность газа) с учетом соотношения (8.14) можно оценить разность давлений газа внутри и снаружи каркаса:

$$\Delta p \sim \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{v^2}{S\lambda}. \quad (8.15)$$

Проведем числовые оценки, используя параметры пиротехнического состава в качестве параметров активного вещества шаровой молнии и параметры аэрогеля в качестве ее каркаса. Используя, кроме того, среднюю мощность шаровой молнии  $P = 2$  кВт, удельную энергию активного вещества  $Q = 6$  кДж · г<sup>-1</sup> и среднюю массу продуктов реакции  $A = 36$ , для числа атомов (молекул), протекающих через каркас в единицу времени, получаем  $v = P/(QA) = 5 \cdot 10^{21}$  с<sup>-1</sup>. Поскольку  $v = 4\pi R_0^2 v \rho$  (здесь  $R_0$  – радиус каркаса шаровой молнии), для скорости потока имеем  $v \approx 0,1$  см · с<sup>-1</sup>. Для перепада давлений внутри и снаружи шаровой молнии это дает согласно формуле (8.15)  $\Delta p \approx 0,1$  Па  $\approx 10^{-6}$  атм ( $S \approx 10^3$  м<sup>2</sup> · г<sup>-1</sup>,  $\lambda \approx 10^{-5}$  см). Таким образом, разность давления газа внутри и снаружи шаровой молнии в результате протекающих в ней химических и тепловых процессов относительно мала.

Выясним, какова прочность каркаса шаровой молнии, смоделировав каркас шаровой молнии аэрогелем. Пользуясь формулой (7.10) для модуля Юнга шаровой молнии и соотношением (8.12) для плотности каркаса, для модуля Юнга каркаса получим  $E = 5 \cdot 10^{13}$  Па. Можно считать, что каркас разрушается, если внутреннее напряжение в нем порядка модуля Юнга. Выше были приведены оценки для внутренних напряжений в каркасе шаровой молнии под действием протекающего через него

газа порядка  $10^{-1}$  Па. Как видно, большая погрешность в определении модуля Юнга не позволяет однозначно судить о прочности каркаса шаровой молнии по отношению к внутренним напряжениям, хотя кажется более вероятным, что внутренние напряжения не разрушат его.

Другой аспект взаимодействия шаровой молнии с окружающим воздухом относится к движению шаровой молнии в воздушных потоках, в том числе при прохождении ее в потоках через отверстия в щели. Интересный цикл работ, позволяющих получить представление об этих процессах, был выполнен Гайдуковым [309, 310, 341, 342]. Моделируя материал шаровой молнии несжимаемой жидкостью, он обнаружил, что шаровая молния сохраняет сферическую форму в воздушных потоках, если воздух не прилипает к ней, а градиенты скоростей воздуха невелики.

Интересен характер прохождения шаровой молнии через отверстия и щели. При рассматриваемых модельных предположениях шаровая молния, движущаяся в воздушном потоке, при подходе к отверстию малого размера выпускает в него цилиндрическую струю и таким образом переносит весь материал через отверстие. Далее она снова принимает сферическую форму. Такой характер прохождения шаровой молнии отверстий согласуется с небольшим числом наблюдений такого рода.

Результаты упомянутого цикла работ Гайдукова по газодинамике шаровой молнии в воздушных потоках интересны не только с точки зрения объяснения наблюдаемых фактов: они формулируют и модель внутреннего строения шаровой молнии. Шаровая молния составлена из элементов – фрактальных кластеров, взаимодействующих между собой. Это взаимодействие и обеспечивает поверхностное натяжение, определяющее сферическую структуру шаровой молнии. Кроме того, оно относительно слабое, так что под действием потоков шаровая молния может изменять свою форму.

На основании полученных Гайдуковым результатов и наблюдательных фактов можно сделать оценки для величины поверхностного натяжения в шаровой молнии. Действительно, пусть вещество шаровой молнии протекает через отверстие, радиус которого  $b$  меньше радиуса шаровой молнии  $R_0$ . Тогда на шаровую молнию действует сила (см. [342])

$$F \approx \frac{12 \pi \rho \gamma^2}{R_0^2}, \quad (8.16)$$

где  $\rho$  – массовая плотность вещества шаровой молнии,  $\gamma$  – объем шаровой молнии, перетекающий через отверстие в единицу времени. Вводя  $\tau$  – полное время протекания, получаем  $\gamma = 4\pi R_0^3 / (3\tau)$ . Около отверстия создается напряжение  $\sigma_F = F / (\pi b^2)$ , которое должно превышать поверхностное натяжение шаровой молнии:

$$\sigma_F \approx 200 \rho R_0^4 / (b^2 \tau^2). \quad (8.17)$$

Физика процесса прохождения шаровой молнии через отверстие [342] состоит в следующем. Пусть шаровая молния подходит к отверстию, причем давление воздуха с разных сторон отверстия различно. Эта разность давлений вызывает движение воздуха к отверстию и заставляет вещество шаровой молнии перетекать с одной стороны отверстия в другую. Напряжение (8.17), возникающее на поверхности шаровой молнии под действием

рассматриваемых сил, должно превышать напряжение, создаваемое поверхностным натяжением, т.е.  $\alpha < \sigma_F R_0$ . Только в этом случае газодинамические силы "вырвут" струю из вещества шаровой молнии и таким способом перенесут вещество шаровой молнии с одной стороны отверстия на другую. Таким образом, мы имеем верхнюю оценку для величины поверхностного натяжения в веществе шаровой молнии:

$$\alpha < 200 \rho R_0^5 / (b^2 \tau^2). \quad (8.18)$$

Выбрав разумные значения параметров:  $b = 5$  см,  $\tau = 1$  с, получаем отсюда  $\alpha < 0,1 \cdot 10^{\pm 1,6}$  Дж · м<sup>-2</sup>. Это значение  $\alpha$  порядка поверхностного натяжения воды (0,07 Дж · м<sup>-2</sup>), хотя точность данной оценки невелика. (При оценке погрешности мы учили неопределенность плотности вещества шаровой молнии  $\rho$  и времени перетекания  $\tau$ .)

Остановимся еще на одном свойстве шаровой молнии, которое лишь условно можно отнести к данной теме. Шаровая молния является источником звука. Согласно наблюдениям ее движение обычно сопровождается треском, шипением и свистом. Наша задача — оценить параметры шаровой молнии как акустического источника, используя при этом представления о протекающих в шаровой молнии процессах, которые были получены при анализе ее излучательных свойств. Будем исходить из того, что процесс возникновения горячих зон внутри шаровой молнии сопровождается распространением волн химической реакции вдоль отдельных нитей активного вещества. Образование газообразных продуктов реакции приводит к повышению давления в окружающем воздухе и тем самым к генерации звуковой волны. Интерференция сигналов от отдельных источников создает суммарный звуковой эффект. При этом отметим, что характерное время остывания горячих зон имеет порядок  $10^{-2} - 10^{-3}$  с, т.е. этот процесс генерирует звук в области частот, воспринимаемых ухом.

Определим амплитуду звуковой волны на расстоянии  $R$  от шаровой молнии, считая, что существует  $n$  источников звука, фазы которых имеют случайное распределение. За счет каждого источника происходит расширение объема воздуха со скоростью  $dV/dt$ . Для амплитуды звуковой волны получаем

$$\Delta p = c \rho \frac{dV}{dt} \sqrt{n} / (4\pi R^2), \quad (8.19)$$

где  $c = 3,3 \cdot 10^4$  см · с<sup>-1</sup> — скорость звука в воздухе,  $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3}$  г · см<sup>-3</sup> — массовая плотность воздуха.

В рамках рассматриваемой модели для объема газообразных продуктов реакции, образующихся в единицу времени от одного источника, имеем

$$dV/dt = \pi r^2 v,$$

где  $r$  — радиус образующейся горячей зоны, которую считаем цилиндрической,  $v$  — скорость распространения волны химической реакции. Сопоставляя ее со скоростью распространения волны химической реакции в массивном образце  $v_0$ , имеем  $v = v_0 r/r_0$ , где  $r_0$  — радиус нити активного вещества в твердом состоянии. Отсюда на основании формулы (8.19)

Рис. 8.8. Амплитуда звуковых колебаний на расстоянии 3 м от средней шаровой молнии

получим для амплитуды звуковой волны

$$\Delta p = \rho r^3 v_0 \sqrt{n} / (4R^2 r_0). \quad (8.20)$$

На рис. 8.8 приведены значения амплитуды звуковой волны, подсчитанные по формуле (8.20), на расстоянии  $R = 3$  м от шаровой молнии для рассмотренной ранее модели, когда свечение шаровой молнии создавалось присутствием в горячих зонах примеси натрия с концентрацией 2,7%. Параметры горячих зон, входящих в формулу (8.20), взяты в соответствии с указанной моделью, причем амплитуда звуковой волны определялась (в децибелах) по стандартной формуле (см. [311])  $20\lg(\Delta p/p_0)$ , где  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па соответствует порогу слышимости. Как следует из приведенного рисунка, шаровая молния является слабым акустическим источником, но хорошо различимым на расстояниях до десятка метров.

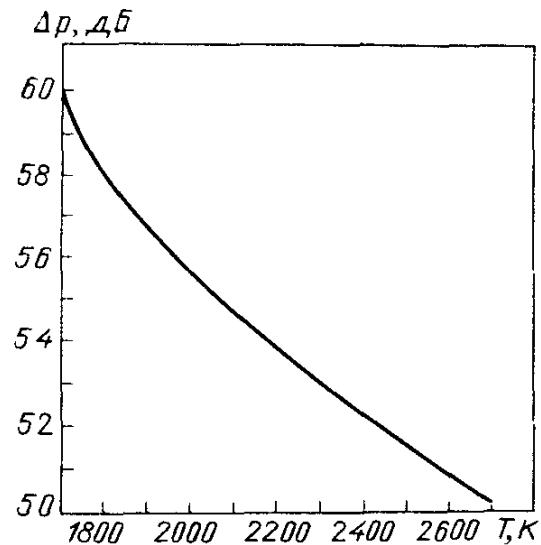
**8.6. Электрические свойства.** Шаровая молния имеет заряд, который влияет на характер ее поведения. Согласно данным наблюдения [273, 274, 278–280, 285, 286] приблизительно в 20% случаев наблюдений шаровая молния движется вдоль электрических проводников или металлических предметов. В большинстве случаев, когда фиксировалось появление шаровой молнии внутри помещений, она возникала из таких электрических приборов или металлических предметов, как электрическая розетка, радиоприемник, телевизор, телефон, радиатор и т.п. Шаровая молния вызывает разрушение электрических и телефонных систем. Действие шаровой молнии на человека подобно действию электрического разряда. Этот набор наблюдательных фактов свидетельствует о наличии электрических свойств и электрического заряда у шаровой молнии.

Электрический заряд у шаровой молнии обеспечивает стабильность ее конструкции [296]. Действительно, если заряд на поверхности шаровой молнии равен  $q$ , то это приводит к возникновению поверхностного натяжения, равного

$$\alpha = \frac{q^2}{4\pi R_0^3} = \frac{E^2 R_0}{4\pi}, \quad (8.21)$$

где  $R_0$  – радиус шаровой молнии,  $E$  – напряженность электрического поля у ее поверхности. Поверхностное натяжение приводит к растяжению каркаса шаровой молнии, предотвращая "схлопывание" отдельных элементов каркаса. Таким образом, электрический заряд шаровой молнии имеет принципиальное значение для ее существования [296], обеспечивая стабильность шаровой молнии.

Оценим электрические параметры средней шаровой молнии, считая, что сила ее взаимодействия с металлическим предметом, когда шаровая



молния касается его, равна весу шаровой молнии:

$$q^2/(4R^2) = mg. \quad (8.22)$$

Определив вес шаровой молнии в соответствии с формулой (8.12), найдем заряд шаровой молнии и другие электрические параметры шаровой молнии (табл. 8.8). Отметим, что это завышенные значения электрических параметров, которые обеспечивают высокие параметры взаимодействия. Например, поверхностное натяжение шаровой молнии заметно выше, чем поверхностное натяжение воды при комнатной температуре ( $0,07 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$ ). В то же время электрическая энергия шаровой молнии относительно мала — на пять порядков ниже химической энергии для средней шаровой молнии и на четыре порядка ниже электрической энергии, способной вызвать смерть человека [312]. Отсюда следует, что в случаях, когда шаровая молния вызывала электрические разрушения, это происходило за счет внешнего электрического источника энергии, а шаровая молния являлась проводящим телом, обеспечивающим ионизацию в воздухе и создающим его пробой.

Принципиальный вывод, вытекающий из данных табл. 8.8, состоит в том, что средняя плотность заряда в шаровой молнии на шесть-семь порядков выше средней плотности ионов в атмосферном воздухе. Это означает, что шаровая молния не может образовываться в обычной атмосфере: такое происходит в неравновесном ионизованном газе с высокой плотностью заряда. Далее этот процесс протекает в униполярной плазме с преобладанием зарядов одного знака. Процесс образования нескомпенсированного заряда на каркасе шаровой молнии идет одновременно с процессом формирования самого каркаса. Далее мы проанализируем совокупность этих процессов.

В табл. 8.9 представлены значения времен процессов при образовании кластера — каркаса шаровой молнии — из твердых частиц в неравновесной плазме, через которую протекает электрический ток. При этом предполагается, что твердые частицы слипаются при соприкосновении и находящийся на некоторых из них заряд не препятствует процессу агрегации. Кроме того, предполагается кластер-кластерный механизм агрега-

Таблица 8.8  
Электрические параметры шаровой молнии

Параметр	Величина	Погрешность
Заряд, Кл	$2 \cdot 10^{-6}$	$10^{\pm 0,6}$
Плотность заряда, $e \cdot \text{см}^{-3}$	$9 \cdot 10^8$	$10^{\pm 0,4}$
Поверхностное натяжение, $\text{Дж} \cdot \text{м}^{-2}$	0,1	$10^{\pm 0,8}$
Отношение заряда к массе, $\text{Кл} \cdot \text{г}^{-1}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$10^{\pm 0,5}$
Напряженность электрического поля у поверхности, $\text{В} \cdot \text{м}^{-1}$	$9 \cdot 10^5$	$10^{\pm 0,6}$
Электрический потенциал, В	$1 \cdot 10^5$	$10^{\pm 0,6}$
Электрическая энергия, Дж	0,2	$10^{\pm 0,9}$
Давление электрического поля на поверхность, Па	5	$10^{\pm 0,9}$

Т а б л и ц а 8.9

Времена электрических процессов агрегации в униполярной атмосферной плазме с плотностью заряда  $10^9 \text{ е} \cdot \text{см}^{-3}$ \*)

Номер процесса	Процесс	Время, с
1	Разделение положительных и отрицательных ионов в плазме под действием внешнего поля 100 кВ/м	$10^{-2}$
2	Зарядка частиц	$2,5 \cdot 10^{-3}$
3	Распад плазмы через прилипание ионов к твердым частицам	$3 \cdot 10^{-1}$
4	Рекомбинация положительных и отрицательных ионов	$5 \cdot 10^{-4}$
5	Агрегация частиц в кластер-каркас шаровой молнии	0,2
6	Разрядка заряженного каркаса шаровой молнии в атмосферном воздухе	$10^3$

\*) Содержание твердых частиц в воздухе равно 1 г/г, их радиус равен 3 нм.

ции кластера. Выбранные параметры расчета кажутся наиболее подходящими в плане образования каркаса шаровой молнии.

Анализ данных табл. 8.9 приводит к следующей картине процессов при образовании заряженного каркаса шаровой молнии. На первой стадии образуется униполярная плазма под действием внешнего источника (процесс № 1). Далее в униполярную плазму попадают твердые частицы (они могут образовываться и в процессе релаксации плазмы). Среди конкурирующих процессов №№ 2–4 наиболее быстрым является процесс № 3. Тем самым заряд плазмы фиксируется на твердых частицах и после этого идет процесс агрегации твердых частиц в кластер – каркас шаровой молнии (процесс № 5). Все это заканчивается за малые времена по сравнению со временем жизни шаровой молнии. При этом максимальное время жизни шаровой молнии определяется временем разрядки ее каркаса в результате прилипания к нему атмосферных ионов (процесс № 6), которое оценивается примерно в 10 мин.

Отметим, что существенным в рассматриваемой картине образования заряженного каркаса шаровой молнии является то предположение, что процесс агрегации частиц в заряженный кластер происходит таким же образом, как и в случае агрегации незаряженных твердых частиц. Анализ этого предположения [292, 313] показывает, что рассматриваемый заряд шаровой молнии относительно невелик и не влияет на характер образования ее каркаса.

Таким образом, анализ электрических свойств шаровой молнии позволяет получить некоторое представление об общей картине процесса образования шаровой молнии. Отсюда следует, что формирование каркаса шаровой молнии происходит при неравновесных условиях в атмосферном воздухе и после интенсивного воздействия внешнего электрического источника на атмосферу. В работах [292, 293, 313] рассмотрены некоторые

модели, которые позволяют описать совокупность этих процессов и полу-  
чить представление о характере воздействия на атмосферу, вызывающего  
формирование каркаса шаровой молнии.

Обратим внимание на еще одну особенность электрического воздейст-  
вия шаровой молнии на атмосферу. В горячих зонах шаровой молнии при  
наличии там легко ионизируемых присадок возникает повышенная кон-  
центрация заряженных частиц. Поэтому в горячих зонах формируется плазма,  
которая далее частично транспортируется в атмосферу. Это может при-  
вести к двум следствиям. Одно из них связано с повышенной разрядкой  
заряженного каркаса шаровой молнии и приводит к уменьшению ее време-  
ни жизни. Другое следствие существенно при наличии грозовых явлений  
в атмосфере. Приводя к повышенной ионизации атмосферы, шаровая  
молния создает проводящие каналы, по которым легче распространяется  
электрический ток в атмосфере. Тем самым шаровая молния способст-  
вует возникновению электрического пробоя и поэтому способствует элек-  
трическим разрушениям под воздействием внешнего электрического источ-  
ника.

Отметим, что основой рассматриваемой версии является наличие у  
шаровой молнии электрического заряда. Этот факт подтверждается наб-  
людательными данными, в частности движением шаровой молнии вдоль  
проводников. С точки зрения устойчивости шаровой молнии наличие  
электрического заряда также существенно – он создает поверхностное  
напряжение, что обеспечивает стабильность каркаса шаровой молнии [296],  
не позволяя ее каркасу "схлопнуться".

Другая версия относительно электрических свойств каркаса шаровой  
молнии была выдвинута Александровым и Подмошенским [322]. Эти  
авторы предположили, что вблизи каркаса шаровой молнии создается  
коронный разряд под действием сильного электрического поля, в кото-  
ром она находится. Возникающие при этом электрические токи создают  
силу, действующую на шаровую молнию, в результате чего шаровая мол-  
ния может плавать, зависать в воздухе и т.п.

Свою версию авторы работы [322] подтвердили изящным экспери-  
ментом. Шарик радиусом 10 мм и массой 0,1 г, изготовленный из про-  
волоки диаметром 0,15 мм, помещался в сильное электрическое поле  
(расстояние между электродами 30 см, разность потенциалов 50–160 кВ). Под  
действием электрического поля вблизи нитей шарика возникал слабый  
коронный разряд, обеспечивающий устойчивое положение шарика  
в воздухе. Это положение могло меняться в результате перемещения окру-  
жающих предметов, людей и т.п. Основное утверждение авторов (как вы-  
вод из проведенных экспериментов) – устойчивое движение шарика в  
воздухе в стороне от поверхностей обеспечивается коронным разря-  
дом.

Следует отметить, что используемый в описанных экспериментах ша-  
рик не моделирует каркас шаровой молнии: он содержит несколько ви-  
ков проволоки, тогда как каркас шаровой молнии включает в себя боль-  
шое число элементов структуры. Поэтому условия создания и протека-  
ния коронного разряда в этих системах могут сильно различаться. Корон-  
ный разряд вблизи отдельной проволоки может быть обеспечен сущест-  
венно легче, чем около разветвленной системы. Тем самым, несмотря

на привлекательность описанного эксперимента, к его результатам следует относиться весьма осторожно.

Однако сама версия о существовании коронного разряда вблизи каркаса шаровой молнии требует серьезного рассмотрения. При этом следует иметь в виду, что коронный разряд, создаваемый вблизи заряженного каркаса шаровой молнии, вызывает его разрядку, что может привести к "схлопыванию" каркаса и его разрушению. Имеется другой механизм разрядки каркаса в отсутствие внешнего поля. Если в горячие зоны шаровой молнии попадает легко ионизируемая присадка (например, калий), то в этих зонах образуется плазма с относительно высокой плотностью. Тогда она является источником ионов, приводящих к разрядке каркаса шаровой молнии.

Рассматриваемые концепции электрически заряженного каркаса шаровой молнии и коронного разряда вблизи ее каркаса взаимно исключают друг друга. Казалось бы, на основе наблюдательных данных и из требования устойчивости шаровой молнии предпочтение следует отдать первой из них. Тем не менее данный вопрос требует серьезного анализа. Интересно, что эти противоположные версии были выдвинуты одними и теми же учеными [296, 322], что является отражением сложности изучаемого явления.

**8.7. Моделирование.** Попытка понять "устройство" шаровой молнии и принятие определенной рабочей гипотезы о ее природе сочетались с попытками создать лабораторную модель шаровой молнии. В свое время было предпринято много попыток воспроизвести шаровую молнию в лабораторных условиях; они подробно освещены в монографии Барри [291]. Далее мы остановимся на некоторых из них для того, чтобы представить себе общие тенденции моделирования шаровой молнии и взглянуть на них с современных позиций.

Во всех ранних экспериментах в качестве источника энергии шаровой молнии использовался электрический газовый разряд, что объясняется удобством этого способа вложения энергии и подходящей энергетикой существующих разрядных устройств. Большая часть моделирования шаровой молнии таким способом опиралась на предположение о плазменной природе шаровой молнии. Поэтому в большинстве исследований необходимо было создать разряд сферической формы при атмосферном давлении, который при некоторых постановках задачи мог бы существовать и после выключения внешнего источника.

На этом пути проблему составляло получение разряда сферической формы, который не касался бы стенок разрядной трубки. Такая задача впервые была решена в 1942 г. Бабатом (см. [291]), который использовал СВЧ-разряд с частотой от 1 до 100 МГц и мощностью вплоть до 100 кВт. В области давлений порядка 10 Торр в баллоне возникал огненный шар, не касающийся стенок. Работы Бабата много лет спустя были продолжены и расширены многими исследователями. Трудности создания высокочастотного разряда при атмосферном давлении были преодолены Капицей [314, 315]. В конечном итоге П.Л. Капице удалось создать СВЧ-разряд в гелии при давлении гелия в несколько атмосфер. Светящаяся область разряда не соприкасалась со стенками и имела форму шара. Добавление

в атмосферу органических присадок резко усиливала интенсивность свечения.

Работы П.Л. Капицы являются наиболее последовательными в плане моделирования шаровой молнии на основе плазменного представления о ее природе. Утверждая, что плазма, моделирующая шаровую молнию, должна быстро распадаться, П.Л. Капица пришел к выводу, что энергия в плазму должна подводиться извне. Его эксперименты демонстрируют такую возможность — существование светящегося плазменного шара с внешним приводом энергии. Тем самым идея П.Л. Капицы и его эксперименты являются логически замкнутыми. Другое дело, что, как показали дальнейшие исследования, реальное возникновение такой шаровой молнии маловероятно.

Несколько иной способ создания светящегося шара в СВЧ-разряде при атмосферном давлении осуществлен в работе Пауэла и Финкельштейна [316]. Воздух при атмосферном давлении поджигался с помощью дуги, а далее использовался СВЧ-разряд частотой 75 МГц и мощностью генератора 30 кВт. Разряд зажигался в открытой стеклянной трубке, причем, передвигая электроды, можно было изменять размер занимаемой им области. После выключения разряда светящаяся область принимала форму шара и распадалась за доли секунды. В работе подробно исследован спектр излучения плазмы. Хотя время жизни наблюдавшихся светящихся образований существенно меньше времени жизни шаровой молнии, оно значительно превышает типичное время распада плазмы при атмосферных давлениях. Эту аномалию авторы объясняют присутствием большого числа нестабильных молекул.

Описанные эксперименты доказывают возможность создания газоразрядной плазмы в виде светящегося образования, напоминающего шаровую молнию, хотя и не с аналогичной ей плотностью.

При постановке своих экспериментов Андрианов и Синицын [317] исходили из предположения, что шаровая молния возникает как вторичный эффект линейной молнии из материала, испарившегося после ее действия. Для моделирования такого явления авторы использовали так называемый эрозионный разряд — импульсный разряд, который создает плазму из испаряющегося материала. Запасенная энергия в условиях эксперимента составляла 5 кДж, разность потенциалов равнялась 12 кВ. Разряд направлялся на диэлектрический материал, максимальный разрядный ток составлял 12 кА.

Область разряда вначале отделялась от нормальной атмосферы тонкой мембраной, которая разрывалась при включении разряда, так что эрозионная плазма выбрасывалась в атмосферу. Движущаяся светящаяся область принимала сферическую или тороидальную форму, причем видимое излучение плазмы наблюдалось примерно в течение 0,01 с, а вообще свечение плазмы фиксировалось не дольше 0,4 с, что существенно меньше наблюдаемого времени жизни шаровой молнии.

Другое направление получения светящихся образований в воздухе использует короткое замыкание батарей с большим запасом энергии ( $\sim 1$  МДж) и выдувание образующейся при этом электрической дуги из зоны ее образования. Начало этим исследованиям положили случаи короткого замыкания в электрической системе американских подвод-

ных лодок. Силберг [343, 344] оценивает энергию, затраченную на образование таких "огненных шаров", как 0,4–4,0 МДж. Их диаметр составляет 10–15 см, время жизни 1 с. В последующих экспериментах электрическая схема оборудования подводной лодки была модифицирована, и в результате короткого замыкания иногда возникали "огненные шары". Однако эти эксперименты по своему содержанию носят предварительный характер и, видимо, характеризуются низкой воспроизводимостью.

В течение нескольких лет такие эксперименты в Лос-Аламосской национальной лаборатории проводил Тук. Судя по тому, что их результаты были зафиксированы только внутренним отчетом лаборатории, автор не достиг того результата, на который рассчитывал. Согласно докладу Голки [318] к 1971 г. — после 2,5 лет экспериментов — Тук имел 30000 фотографий, и на четырех из них была воспроизведена шаровая молния. Голка провел подобные эксперименты, используя короткое замыкание в электрической системе двигающегося локомотива, и получал при этом светящиеся образования. Дьюкьюс [345, 346] модифицировал электрическую систему подводной лодки, используя в качестве электродов медную пленку и электрические емкости с запасом энергии 0,5 МДж. Он получал светящиеся шары диаметром 10 см, время жизни которых составляло 1,3 с.

Относительно данной серии экспериментов еще раз отметим, что по характеру проведения они носят предварительный характер и, видимо, имеют низкую воспроизводимость. В то же время в результате короткого замыкания электрических цепей с большим запасом энергии возможно получение светящихся образований в атмосфере.

Среди экспериментов, моделирующих химическую природу шаровой молнии, наиболее интересным и последовательным является эксперимент, выполненный Барри в 1966 г. (см. [291, 319, 320]). В плексигласовом ящике размером 50 × 50 × 100 см находился при атмосферном давлении воздух с примесью пропана, который поджигался искрой. Расстояние между электродами составляло 5 мм, напряжение 10 кВ, длительность разряда  $10^{-3}$  с, выделяемая энергия 250 Дж. При концентрации пропана 1,4–1,8% вслед за искровым разрядом в камере образовывался желто-зеленый шар диаметром несколько сантиметров. Он совершил быстрые беспорядочные движения по камере и через 1–2 с гаснул. Это явление по своим свойствам напоминает шаровую молнию и, во всяком случае, может трактоваться как ее аналог. Дополнительные исследования показали, что в эксперименте образуются сложные органические соединения. Дж. Барри приводит и другую информацию, подтверждающую такую возможность. Более сложные соединения (в том числе и углеводороды) конденсируются при комнатной температуре. В условиях эксперимента они образуют аэрозоли и концентрируются в небольшой области пространства. Начальная искра создает необходимое количество соединений, а небольшая область значений концентрации пропана, при которых удается получить светящиеся шары, свидетельствует о конкуренции разных химических процессов в рассматриваемой системе.

Эксперименты Дж. Барри [320] были продолжены в работе [347] японскими физиками, которые основывались на той же схеме возбужде-

ния химической смеси, но расширили круг используемых соединений и применили современную диагностику, в том числе видеосъемки процесса. Эксперименты проводились в стеклянном сосуде размером 73 × 73 × 43 см. В качестве электродов была использована медная проволока, причем электрическая энергия, вкладываемая в искровой разряд, не превышала 350 Дж. Эксперименты были выполнены в метано-воздушной и этано-воздушной смесях при комнатной температуре и атмосферном давлении. Кроме того, к воздуху и воздушно-этановой смеси добавлялись волокна хлопка.

Наилучшие условия для образования светящихся шаров были получены вблизи порога воспламенения. На начальной стадии процесса цвет светящегося шара был зеленым, затем он изменялся. Диаметр шаров не превышал 6 см. Время жизни составляло примерно 0,3 с в воздушно-метановой смеси с концентрацией метана 2%, в воздухе при добавлении хлопка это время жизни увеличивалось до 0,6 с, а в воздушно-этановой смеси при добавлении хлопка – до 2 с. Авторы отмечают низкую воспроизводимость результатов. Таким образом, в воздухе с различными химическими добавками возможно существование светящихся образований, которые возникают под действием электрической искры и поддерживаются за счет химической энергии. Однако процессы, ведущие к появлению светящихся образований, требуют дальнейшего изучения, а сами эксперименты по получению светящихся образований в воздухе имеют невысокую воспроизводимость.

Среди экспериментов по воспроизведению шаровой молнии как целого объекта особого внимания заслуживает работа Корум и Корум [348]. По сути дела, она является повторением экспериментов Н. Тесла, выполненных им около 90 лет назад, с использованием современной техники. Поскольку работа Н. Тесла не была опубликована полностью, детали проведенного им эксперимента остаются неясными, а сами результаты имеют большую неопределенность. Поэтому работа [348] не сводилась к простому воспроизведению экспериментов Н. Тесла, а требовала творческого решения ряда промежуточных проблем. Был использован радиочастотный генератор Тесла, работающий на частоте 67 кГц. Он включал волновод, который был индуктивно связан с искровым прерывателем и обеспечивал максимальное напряжение сигнала 2,4 МВ на частоте 67 кГц. Мощность, вкладываемая в систему, составляла 70 кВт, мощность сигнала на электродах 3,2 кВт, что обеспечивало пробой воздуха на длине 7,5 м. Фотографирование и видеосъемки использовались в данной работе для фиксации результатов.

В работе [348] наряду со свечением от радиочастотного разряда иногда наблюдались сферические светящиеся образования миллиметровых размеров, которые прорастают до диаметра в несколько сантиметров и имеют время жизни от 0,5 с до нескольких секунд.

Анализируя эксперименты по моделированию шаровой молнии как целого, необходимо отметить, что они характеризуют и общее отношение к проблеме. С одной стороны, таким способом иногда удается получить светящиеся образования, похожие на шаровую молнию. Это доказывает, что данное явление связано с естественными процессами в возбужденном воздухе. С другой стороны, низкая воспроизводимость экспериментов

при получении светящихся образований и трудности управления экспериментом не позволили получить на их основе дополнительной информации о шаровой молнии.

Опыт, накопленный при попытках моделирования шаровой молнии, сформировал современное отношение к этому. Явление шаровой молнии оказывается столь сложным, что даже отдельные успехи при ее моделировании как целого не дают продвижения в понимании природы этого явления. Поэтому в последнее десятилетие более распространенным стало моделирование отдельных свойств этого явления. Различные модели, относящиеся к отдельным свойствам шаровой молнии, были представлены ранее при анализе этих свойств. Ниже мы приведем один пример такого рода, позволяющий моделировать поведение шаровой молнии во внешнем поле.

Совокупность рассмотренных ранее моделей для отдельных свойств шаровой молнии с анализом их количественных характеристик позволяет выделить ряд надежных выводов, относящихся к природе шаровой молнии.

1. Шаровая молния имеет жесткий каркас со структурой фрактального кластера.

2. Внутренний источник энергии шаровой молнии имеет химическую природу.

3. Шаровая молния имеет пятнистую структуру. Свечение идет из многих горячих зон (пятен), которые образуются в результате переработки активного вещества, сорбированного каркасом.

4. Каркас шаровой молнии образуется при неравновесных условиях в атмосферном воздухе, когда через него течет электрический ток.

Эти выводы и составляют существо современного представления о природе шаровой молнии.

## § 9. Заключение

Фрактальный кластер – своеобразный физический объект, обладающий специфическими свойствами. Он образуется в целом ряде процессов и явлений, которые реализуются в физике, химии и биологии. Кроме того, информация о фрактальных кластерах представляет интерес для некоторых систем и явлений, имеющих то же математическое описание, что и процесс роста фрактального кластера. Поскольку фрактальный кластер является геометрическим фрактальным объектом, то его изучение может быть полезным при анализе других фрактальных систем. Тем самым физика фрактального кластера составляет новое направление физики со своими концепциями и представлениями.

Состояние фрактального кластера является одним из этапов превращения газово-дисперсной фазы в конденсированную при ее релаксации. В этом плане он может быть рассмотрен и как промежуточное состояние вещества при межфазных переходах и превращениях. Сам фрактальный кластер представляет интерес как некоторый тип твердого вещества, рыхлый и разреженный.

Практически вся информация о фрактальных кластерах получена в 80-е годы. Сама история изучения этого объекта интересна и в чисто методическом отношении. Основные результаты связаны с компьютерным моделированием фрактальных кластеров и могут рассматриваться

как демонстрация возможностей компьютерных подходов. Накопленный здесь опыт показывает, что компьютерное моделирование особенно продуктивно при изучении неупорядоченных систем с сильным взаимодействием между его элементами. Такие системы обладают внутренним порядком, который может быть выявлен на основе компьютерных методов.

Таким образом, фрактальный кластер вошел в современную физику как интересный физический объект, имеющий отношение к широкому кругу физических, химических и биологических систем и явлений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mandelbrott B.B.* The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: Freeman, 1982.
2. Смирнов Б.М. // УФН. – 1986. – Т. 149. – С. 177.
3. Смирнов Б.М. // УФН. – 1987. – Т. 152. – С. 133.
4. Kinetics of Aggregation and Gelation / Ed. by F. Family, D.P. Landau. – Amsterdam.: North Holland, 1984.
5. On Growth and Form / Ed. by H.E. Stanley, N. Ostrowsky. – Hague.: Martinus Nijhoff, 1985.
6. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. // УФН. – 1985. – Т. 146. – С. 492.
7. Herrmann H.J. // Phys. Rep. – 1986. – V. 136. – P. 155.
8. Sander L.M. // Nature. – 1986. – V. 322. – P. 789.
9. Соколов И.М. // УФН. – 1986. – Т. 150. – С. 221.
10. Liu S.H. // Solid State Phys. – 1986. – V. 39. – P. 206.
11. Fractals in Physics / Ed. by L. Pietronero, E. Tosatti. – Amsterdam.: North Holland, 1986. (Фракталы в физике / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.)
12. Sander L.M., Cates M.E. // Science. – 1986. – V. 322. – P. 789.
13. Jullien R., Botet R. Aggregation and Fractal Aggregates. – Singapore.: World Scientific, 1987.
14. Meakin P. // Crit. Rev. Solid State Mater. Sci. – 1987. – V. 13. – P. 143.
15. Botet R., Jullien R. // Ann. Phys. (Fr.). – 1988. – V. 13. – P. 153.
16. Meakin P. // Phase Transitions and Critical Phenomena. – V. 12. / Ed. by C. Domb, J.L. Lebowitz. – N.Y.: Acad. Press, 1988. – P. 335.
17. Universalities in Condensed Matter / Ed. by R. Jullien, L. Peliti, R. Rammal, N. Bocara. – Berlin: Springer-Verlag, 1988.
18. Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics / Ed. by D.P. Landau, K.K. Mon, H.B. Schuttler. – Berlin: Springer-Verlag, 1988.
19. Vicsek T. Fractal Growth Phenomena. – Singapore: World Scientific, 1989.
20. Леонович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. – М.: Hayka, 1983.
21. Witten T.A., Sander L.M. // Phys. Rev. Lett. – 1981. – V. 47. – P. 1400.
22. Mandelbrott B.B. // J. Fluid Mech. – 1974. – V. 62. – P. 331.
23. Frish U., Sulem P.L., Nelkin M. // J. Fluid Mech. – 1978. – V. 87. – P. 719.
24. Hentschel H.G.E., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. – 1982. – V. 49. – P. 1158.
25. Hentschel H.G.E., Procaccia I. // Phys. Rev. – 1983, Ser. A. – V. 27. – P. 1266.
26. Hentschel H.G.E., Procaccia I. // Phys. Rev. – 1984, Ser. A. – V. 29. – P. 1461.
27. Meneveau C., Sreenivasan K.R. // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 173. – P. 357.
28. Feigenbaum M., Jensen M.H., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 1507.
29. Staufer D. // Phys. Rep. – 1979. – V. 54. – P. 1.
30. Geven Y., Mandelbrott B.B., Aharony A. // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 45. – P. 885.
31. Geven Y. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1981. – V. 47. – P. 1771.
32. Nakamura M. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 2384.
33. Louis E., Guinea F. // Europhys. Lett. – 1987. – V. 3. – P. 871.
34. Meakin P. // Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics / Ed. by D.P. Landau, K.K. Mon, H.B. Schuttler. – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – P. 55.
35. Wiegel F.M., Perelson F.S. // J. Stat. Phys. – 1985. – V. 29. – P. 813.

36. Paterson L. // Phys. Fluids. – 1985. – V. 28. – P. 26.  
 37. Sawada Y. et. al. // Phys. Rev. – 1982, Ser. A. – V. 26. – P. 3557.  
 38. Nimeyer L., Pietronero L., Weisman H.J. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1033.  
 39. Family F., Zhang Y.C., Vicsek T. // J. Phys. – 1986, Ser. A. – V. 19. – P. L733.  
 40. Radnoci Gy., Vicsek T., Sander L.M., Grier M. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 35. – P. 4012.  
 41. Nittmann J., Daccord G., Stanley H. // Nature. – 1985. – V. 314. – P. 141.  
 42. Maher J.V. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 1498.  
 43. Daccord G., Nittmann J., Stanley H. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 56. – P. 336.  
 44. Family F., Platt D.E., Vicsek T. // J. Phys. – 1987, Ser. A. – V. 20. – P. L1177.  
 45. Damme H.V. et. al. // Nature. – 1986. – V. 320. – P. 731.  
 46. Pfeifer P., Avnir D. // J. Chem. Phys. – 1983. – V. 79. – P. 3558.  
 47. Avnir D., Farin D., Pfeifer P. // J. Chem. Phys. – 1983. – V. 79. – P. 3566.  
 48. Bale H.D., Schmidt P.W. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 596.  
 49. Avnir D., Farin D., Pfeifer P. // Nature. – 1984. – V. 308. – P. 261.  
 50. Katz A.J., Thompson A.H. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 1325.  
 51. Shih W.Y., Aksay I.A., Kikuchi R. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 5015.  
 52. Meakin P., Family F. // Phys. Rev. – 1988, Ser. A. – V. 38. – P. 2210.  
 53. Meakin P. // Phys. Rev. – 1983, Ser. A. – V. 27. – P. 604.  
 54. Meakin P. // Phys. Rev. Lett. – 1983, – V. 51. – P. 1119.  
 55. Kolb M., Botet R., Jullien R. // Phys. Rev. Lett. – 1983. – V. 51. – P. 1123.  
 56. Jullien R., Kolb M. // J. Phys. – 1984, Ser. A. – V. 17. – P. L639.  
 57. Kolb M., Jullien R. // J. Phys. (Paris). – 1984. – V. 45. – P. L977.  
 58. Vold M.J. // J. Colloid and Interface Sci. – 1959 – V. 14. – P. 168.  
 59. Vold M.J. // J. Colloid and Interface Sci. – 1963. – V. 18. – P. 684.  
 60. Sutherland D.N. // J. Colloid and Interface Sci. – 1966. – V. 22. – P. 300.  
 61. Meakin P. // J. Colloid and Interface Sci. – 1985. – V. 102. – P. 491.  
 62. Meakin P. // J. Colloid and Interface Sci. – 1983. – V. 96. – P. 415.  
 63. Plischke M., Racz Z. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 415.  
 64. Racz Z., Plischke M. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 31. – P. 985.  
 65. Meakin P. // Phys. Rev. – 1983, Ser. A. – V. 27. – P. 1495.  
 66. Meakin P. et al. // Phys. Rev. – 1986, Ser. A. – V. 34. – P. 3325.  
 67. Ben-Jacob E. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 57. – P. 1903.  
 68. Sahimi M. et al. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 590.  
 69. Ball R.C. // Physica. – 1986, Ser. A. – V. 104. – P. 62.  
 70. Meakin P. et al. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 35. – P. 5233.  
 71. Meakin P. // J. Chem. Phys. – 1983. – V. 79. – P. 2426.  
 72. Meakin P. // Phys. Rev. – 1984, Ser. A. – V. 29. – P. 997.  
 73. Meakin P., Wasserman Z.P. // Phys. Lett. – 1984, Ser. A. – V. 103. – P. 337.  
 74. Meakin P. // Phys. Rev. – 1984, Ser. B. – V. 29. – P. 2930.  
 75. Botet R., Jullien R., Kolb M. // J. Phys. – 1984, Ser. A. – V. 17. – P. L75.  
 76. Botet R., Jullien R., Kolb M. // Phys. Rev. – 1984, Ser. B. – V. 30. – P. 2150.  
 77. Jullien R., Kolb M. // J. Phys. – 1984, Ser. A. – V. 17. – P. L639.  
 78. Brown W.D., Ball R.C. // J. Phys. – 1985, Ser. A. – V. 18. – P. L517.  
 79. Richter R. et al. // Bull. Am. Phys. Soc. – 1983. – V. 28. – P. 261.  
 80. Sander L.M., Cheng Z.M., Richter R. // Phys. Rev. – 1983, Ser. B. – V. 28. – P. 6394.  
 81. Garik P. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 1275.  
 82. Jullien R., Kolb M., Botet R. // J. Phys. (Paris). – 1984. – V. 45. – P. L211.  
 83. Jullien R., Kolb M. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 1653.  
 84. Kim C., Brock J.R. // J. Colloid and Interface Sci. – 1987. – V. 116. – P. 431.  
 85. Акимов И.А. и др. // Оптика и спектроскопия. – 1988. – Т. 63. – С. 1276.  
 86. Meakin P. // Phys. Rev. – 1988, Ser. A. – V. 38. – P. 4799.  
 87. Meakin P., Sander L.M. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 54. – P. 2053.  
 88. Meakin P., Vicsek T. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 685.  
 89. Kolb M. // J. Phys. (Paris). – 1985. – V. 46. – P. L631.  
 90. Halsey T.C., Meakin P. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 2546.  
 91. Witten T.A., Sander L.M. // Phys. Rev. – 1983, Ser. A. – V. 27. – P. 5686.  
 92. Ball R.C. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 55. – P. 1406.  
 93. Ball R.C., Bready R.M. // J. Phys. – 1985, Ser. A. – V. 18. – P. L809.  
 94. Meakin P. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 332.

95. Ball R.C. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 274.  
 96. Schaefer D.W. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 2371.  
 97. Schaefer D.W., Keefer K.D. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 1383.  
 98. Wong P. // Phys. Rev. – 1985, Ser. B. – V. 32. – P. 417.  
 99. Bale H.D., Schmidt P.W. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 596.  
 100. Katz A.J., Thompson A.H. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 1325.  
 101. Wiltzius P. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 710.  
 102. Bolle G., Cametti C., Codastefano P., Tartaglia P. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 35. – P. 837.  
 103. Cametti C., Codastefano P., Tartaglia P. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 4916.  
 104. Шалаев В.М., Штокман М.И. // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 92. – С. 509.  
 105. Бутенко А.В., Шалаев В.М., Штокман М.И. // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94. – С. 107.  
 106. Berry M.U., Percival I.C. // Opt. Acta. – 1984. – V. 33. – P. 577.  
 107. Devaty B.P., Sievers A.J. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1344.  
 108. Niklasson G.A., Granqvist C.G. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 56. – P. 256.  
 109. Lindsay H.M. et al. // Phys. Rev. – 1988, Ser. A. – V. 38. – P. 2614.  
 110. Meakin P., Jullien R. // J. Chem. Phys. – 1988. – V. 89. – P. 246.  
 111. Meakin P. // J. Chem. Phys. – 1984. – V. 81. – P. 4637.  
 112. Meakin P. // J. Chem. Phys. – 1985. – V. 83. – P. 3645.  
 113. Forrest S.R., Witten T.A. // J. Phys. – 1979, Ser. A. – V. 12. – P. L109.  
 114. Niklasson G.A. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. 60. – P. 1735.  
 115. Granqvist C.G., Buhrman R.A. // J. Appl. Phys. – 1976. – V. 47. – P. 2200.  
 116. Niklasson G.A., Yatsuya S., Granqvist C.G. // Solid State Commun. – 1986. – V. 59. – P. 579.  
 117. Niklasson G.A. et al. // J. Appl. Phys. – 1987. – V. 62. – P. 258.  
 118. Niklasson G.A. et al. // Bull. Am. Phys. Soc. – 1983. – V. 28. – P. 528.  
 119. Пушников А.А., Пахомов А.В., Черняева Г.А. // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 292. – С. 86.  
 120. Hurd A.J., Schaefer D.W., Martin J.E. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 35. – P. 2361.  
 121. Martin J.E. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 3415.  
 122. Freltoft T., Kjems J.K., Sinha S.K. // Phys. Rev. – 1986, Ser. B. – V. 33. – P. 269.  
 123. Weitz D., Oliveria M. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1433.  
 124. Keefer K.D., Schaefer D.W. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 56. – P. 2376.  
 125. Weitz D.A. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 1657.  
 126. Weitz D.A. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1985. – V. 54. – P. 1416.  
 127. Aubert C., Cannell D.S. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 56. – P. 738.  
 128. Dimon P. et al. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 595.  
 129. Weitz D.A., Lin M. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 2036.  
 130. Chen Y., Deutch J.M., Meakin P. // J. Chem. Phys. – 1984. – V. 80. – P. 2982.  
 131. Meakin P., Chen Y., Deutch J.M. // J. Chem. Phys. – 1985. – V. 82. – P. 3786.  
 132. Chen Y., Meakin P., Deutch J.M. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 59. – P. 2121.  
 133. Smoluchowski M.V. // Zs. Phys. – 1916. – Bd. 17. – S. 585.  
 134. Green H.L., Lane W.R. Particulate Clouds: Dust, Smokes and Mists. – Princeton.: Van Nostrand, 1964.  
 135. Devillard P., Stanley H.E. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 5359.  
 136. Botet R., Jullien R. // J. Phys. – 1984, Ser. A. – V. 17. – P. 2517.  
 137. Vicsek T., Family F. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1669.  
 138. Meakin P., Vicsek T., Family F. // Phys. Rev. – 1985, Ser. B. – V. 31. – P. 564.  
 139. Deutch J.M., Meakin P. // J. Chem. Phys. – 1983. – V. 77. – P. 2093.  
 140. Naunberg M. // Phys. Rev. – 1983, Ser.B. – V. 28. – P. 449.  
 141. Herrmann H.J., Landay D.P., Staufer P. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 52. – P. 1669.  
 142. Herrmann H.J., Staufer P., Landay D.P. // J. Phys. – 1983, Ser. A. – V. 16. – P. 1221.  
 143. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – Т. 6: Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.  
 144. Vicsek T., Meakin P., Family F. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 1122.  
 145. Racz Z. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 1129.  
 146. Meakin P., Deutch J.M. // J. Chem. Phys. – 1985. – V. 83. – P. 4086.  
 147. Smirnov B.M. // Phys. Rep. – 1987. – V. 152. – P. 177.  
 148. Fuks N.A. The Mechanics of Aerosol. – N.Y.: Macmillan, 1964.

149. Friedlander K. *Smoke, Dust, Haze: Fundamental of Aerosol Behavior.* — N.Y.: John Wiley, 1977.
150. Beischer D. // Zs. Electrochem. — 1938. — Bd. 44. — S. 375.
151. Schmidt M., Burchard W. // Macromolecules. — 1981. — V. 14. — P. 2110.
152. Kantor Y., Witten T.A. // J. Physique. — 1984. — V. 45. — P. L675.
153. Elam W.T. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1985. — V. 54. — P. 701.
154. Matsushita M. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1984. — V. 53. — P. 286.
155. Sawada Y., Dougherty A., Golub J.P. // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56. — P. 1260.
156. Grier D. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56. — P. 1264.
157. Miller A., Knoll W., Mowald H. // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56. — P. 2633.
158. Freletoft T., Kjems J.K., Sinha S.K. // Phys. Rev. — 1986, Ser. B. — V. 33. — P. 269.
159. Schaefer D.W., Bunker B.C., Wilcoxon J.P. // Phys. Rev. Lett. — 1987. — V. 58. — P. 284.
160. Wiltzius P. et. al. // Phys. Rev. — 1987, Ser. A. — V. 36. — P. 2991.
161. Ben-Jacob E. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1984. — V. 55. — P. 1315.
162. Buka A., Kertesz J., Vicsek T. // Nature. — 1986. — V. 323. — P. 424.
163. Buka A., Palfy-Muhoray P., Racz Z. // Phys. Rev. Lett. — 1987, Ser. A. — V. 56. — P. 3984.
164. Saffman P.G., Taylor G. // Proc. Roy. Soc. — 1958, Ser. A. — V. 245. — P. 312.
165. Paterson L. // J. Fluid Mech. — 1981. — V. 113. — P. 513.
166. Lamb H. *Hydrodynamics.* — London: Cambr. Univ. Press, 1932.
167. Horvath V., Kertesz J., Vicsek T. // Europhys. Lett. — 1987. — V. 4. — P. 1133.
168. Family F., Zhang Y.C., Vicsek T. // J. Phys. — 1986, Ser. A. — V. 19. — P. L733.
169. Meakin P., Family F., Vicsek T. // J. Colloid and Interface Sci. — 1987. — V. 117. — P. 394.
170. Vicsek T., Kertesz J. // Europhys. News. — 1988. — V. 19. — P. 24.
171. Stokes J.R. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 57. — P. 1718.
172. Meakin P., Vicsek T. // J. Phys. — 1987, Ser. A. — V. 20. — P. L171.
173. Ben-Jacob E. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1987. — V. 57. — P. 1903.
174. Meakin P. // Phys. Rev. — 1987, Ser. A. — V. 36. — P. 2833.
175. Even U. et. al. // Phys. Rev. Lett. — 1984. — V. 52. — P. 2164.
176. Daccord G., Lenormand R. // Nature. — 1987. — V. 325. — P. 41.
177. Daccord G. // Phys. Rev. Lett. — 1987. — V. 58. — P. 479.
178. Maloy K.J., Feder J., Jossang T. // Phys. Rev. Lett. — 1985. — V. 55. — P. 2688.
179. Chen J., Wilkinson D. // Phys. Rev. Lett. — 1985. — V. 55. — P. 1892.
180. Maloy K.J. et. al. // Phys. Rev. — 1987, Ser. A. — V. 36. — P. 318.
181. Shaw T.W. // Phys. Rev. Lett. — 1987. — V. 59. — P. 1671.
182. Rouw P.W. *Adhesive Hard Sphere Dispersion* // Doctor dissertation. — Van't Hoff Labor, University of Utrect, 1988.
183. Фрике Й. Аэрогели // В мире науки. — 1988. — № 8. — С. 50. (Пер с англ. из: Sci. Amer. — 1988. — V. 288, № 5.)
184. Aerogels / Ed. by J. Fricke. — Berlin: Springer-Verlag, 1985.
185. Kistler S.S. // J. Phys. Chem. — 1932. — V. 34. P. 52; 1942. — V. 46. — P. 19.
186. Kistler S.S., Cadwell A.G. // Indust. Eng. Chem. — 1934. — V. 26. — P. 658.
187. Kistler S.S. // J. Chem. Phys. 1935. — V. 39. — P. 79.
188. Schaefer D.W., Keefer K.D. // Phys. Rev. Lett. — 1986. — V. 56. — P. 2199.
189. Tao R., Novotny M.A., Kaski K. // Phys. Rev. — 1988, Ser. A. — V. 38. — P. 1019.
190. Meakin P. // Phys. Rev. — 1988, Ser. A. — V. 38. — P. 994.
191. Teichner S.J. // Aerogels / Ed. J. Fricke. — Berlin.: Springer-Verlag, 1986. — P. 22.
192. Schuck G., Dietrich W., Fricke J. // Ibid. — P. 148.
193. Broeckner F.J. et. al. // Ibid. — P. 160.
194. Mulder C.A.M., van Lierop J.G. // Ibid. — P. 68.
195. Tewari P.H. // Ibid. — P. 142.
196. Henning S., Svensson L. // Phys. Scripta. — 1981. — V. 23. — P. 697.
197. Brinker S.J., Schreier G.W. // J. Non-Cryst. Sol. — 1985. — V. 70. — P. 301.
198. Wenzel J. // J. Non-Cryst. Sol. — 1985. — V. 73. — P. 693.
199. Zarzycki J., Wognier H. // Aerogels / Ed. J. Fricke — Berlin.: Springer-Verlag, 1986. — P. 42.
200. Dislich H., Hinz P. // J. Non-Cryst. Sol. — 1982. — V. 48. — P. 11.
201. Dislich H. // J. Non-Cryst. Sol. — 1985. — V. 73. — P. 599.
202. Dislich H. // J. Non-Cryst. Sol. — 1986. — V. 80. — P. 115.
203. Lecompte P. et al. // Phys. Scripta. — 1981. — V. 23. — P. 376.

204. Poelz G., Riethmuller R. // Nucl. Instr. and Meth. – 1982. – V. 195. – P. 491.
205. Poelz G. // Aerogels // Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 176.
206. Henning S. et al. // Phys. Scripta. – 1981. – V. 23. – P. 703.
207. Henning S. // Aerogels / Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 38.
208. Fernandez et al. // Nucl. Instr. and Meth. – 1984. – V. 225. – P. 313.
209. Bourdinaud M., Cheze J.B., Thevenin J.C. // Nucl. Instr. and Meth. – 1976. – V. 136. – P. 99.
210. Benot M. et al. // Nucl. Instr. and Meth. – 1978. – V. 154. – P. 253.
211. Burkhardt H. et al. // Nucl. Instr. and Meth. – 1981. – V. 184. – P. 319.
212. Carlson P.J. et al. // Phys. Scripta. – 1981. – V. 23. – P. 708.
213. Arnault C. et al. // Phys. Scripta. – 1981. – V. 23. – P. 710.
214. De Brion J.P. et al. // Nucl. Instr. and Meth. – 1981. – V. 179. – P. 61.
215. Kawai H. et al. // Nucl. Instr. and Meth. – 1985. – V. 228. – P. 314.
216. Linney A.D., Peters B. // Nucl. Instr. and Meth. – 1973. – V. 100. – P. 545.
217. Koch-Miramond L., Meyer J.P. // Adv. Space Res. – 1984. – V. 4. – P. 79.
218. Koch-Miramond L. // Aerogels / Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 188.
219. Pajonk G.M., Teichner S.J. // Ibid. – P. 193.
220. Astier M. et al. // Preparation of Catalysts / Ed. D. Delmon. et al. – Amsterdam: Elsevier, 1976. – P. 193.
221. Formenti M. et al. // Bull. Soc. Chim. France. – 1972. – P. 69.
222. Abouarnadasse S. et al. // Appl. Catalys. – 1984. – V. 9. – P. 119.
223. Abouarnadasse S. et al. // Canad. J. Chem. Eng. – 1984. – V. 62. – P. 521.
224. Goetzberger A., Wittwer V. // Aerogels / Ed. J. Fricke. – Berlin: Springer-Verlag, 1986. – P. 84.
225. Fricke J. // Ibid. – P. 94.
226. Buttner D. et al. // Ibid. – P. 104.
227. Platzer W., Wittwer V., Mielke M. // Ibid. – P. 127.
228. Schreiber E., Boy E., Bertsch K. // Ibid. – P. 133.
229. Teichner S.J. et al. // Adv. Colloid and Interface Sci. – 1978. – V. 5. – P. 245.
230. Brinker C.J. et al. // Aerogels // Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 57.
231. Schmidt H., Scholze H. // Ibid. – P. 49.
232. Woignier T., Phalippou J., Zarzucki J. // J. Non-Cryst. Sol. – 1984. – V. 63. – P. 117.
233. Iler R.K. The Chemistry of Silica. – N.Y.: John Wiley, 1979.
234. Nicolson G.A., Teichner S.J. // Bull. Soc. Chim. France. – 1968. – P. 1900; – P. 1906.
235. Nogani M., Moriya Y. // J. Non-Cryst. Sol. – 1980. – V. 37. – P. 191.
236. Tewari P.H., Hunt A.J., Lofftus K.D. // Aerogels / Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 31.
237. Lampert C.M., Mazur J.H. // Ibid. – P. 154.
238. Chen K.C., Tsuchia T., Mackenzie J.D. // J. Non-Cryst. Sol. – 1986. – V. 81. – P. 227.
239. Tewari P.H. et al. // Aerogels / Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 142.
240. Blum J.B., Ryan J.W. // J. Non-Cryst. Sol. – 1986. – V. 81. – P. 226.
241. Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теоретическая физика. – Т. УП: Теория упругости. – М.: Наука, 1987.
242. Gronauer M., Kadur A., Fricke J. // Aerogels / Ed. J. Fricke. – Berlin.: Springer-Verlag, 1986. – P. 167.
243. Nilsson O., Fransson A., Sandberg O. // Ibid. – P. 13.
244. Caps R., Fricke J. // J. Sol. Energy. – 1984. – V. 3. – P. 121.
245. Mon K.K. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 866.
246. Mon K.K. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 1963.
247. Wong P., Bray A.J. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 59. – P. 1057.
248. Schaefer D.W., Martin J.E., Hurd A.J. // Phys. Rev. – 1986, Ser. A. – V. 33. – P. 3540.
249. Meakin P. // Phys. Rev. – 1983, Ser. A. – V. 27. – P. 2616.
250. Meakin P. // Phys. Rev. – 1984, Ser. B. – V. 30. – P. 4207.
251. Kolb M., Herrmann H.J. // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 59. – P. 454.
252. Racz Z., Vicsek T. // Phys. Rev. Lett. – 1983. – V. 51. – P. 2382.
253. Meakin P. // Phys. Rev. – 1986, Ser. A. – V. 33. – P. 1984.
254. Matsushita M., Meakin P. // Phys. Rev. – 1988, Ser. A. – V. 37. – P. 3645.

255. Matsushita M., Hayakawa Y., Sawada Y. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 32. – P. 3814.
256. Halsey T.C., Meakin P., Procaccia I. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 56. – P. 854.
257. Meakin P. et al. // Phys. Rev. – 1986, Ser. A. – V. 34. – P. 3325.
258. Meakin P. et al. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 4428.
259. Meakin P., Halvin S. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 4426.
260. Miyasima M., Meakin P., Family F. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 1421.
261. Family F. // Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics / Ed. by D.P. Landau, K.K. Mon, H.B. Schuttler. – Berlin.: Springer-Verlag, 1988. – P. 65.
262. Shalaev A.M., Stockman M.I. // Zs. Phys. – 1988, Ser. D. – Bd 10. – S. 71.
263. Butenko A.V., Shalaev A.M., Stockman M.I. // Zs. Phys. – 1988, Ser. D. – Bd 10. – S. 81.
264. Раутиан С.Г. и др. // Письма ЖЭТФ. – 1988. – Т. 47. – С. 200.
265. Карпов С.В. и др. // Письма ЖЭТФ. – 1988. – Т. 48. – С. 528.
266. Meakin P., Vicsek T., Family F. // Phys. Rev. – 1985, Ser. B. – V. 31. – P. 564.
267. Family F., Vicsek T., Deutsch J.M. // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 727.
268. Kang K. et al. // Phys. Rev. – 1986, Ser. A. – V. 33. – P. 1171.
269. Meakin P., Family F. // Phys. Rev. – 1987, Ser. A. – V. 36. – P. 1421.
270. Араго Ф. Гром и молния: Пер. с фр. – СПб., 1853.
271. Brand W. Der Kugelblitz. – Hamburg: Henri Grand, 1923.
272. Humphreys W.J. // Amer. Phil. Soc. Proc. – 1936. – V. 76. – P. 613.
273. McNally J.R. Preliminary report on ball lightning. – Oak Ridge Nat. Lab., No. 3938, May 1966.
274. Rayle W.D. Ball lightning characteristics // NASA Tech. Note. NASA-TN-D3138, 1966.
275. Дмитриев М.Т. // Природа. – 1971. – № 6. – С. 50.
276. Arabadji W.J. // J. Geophys. Res. – 1976. – V. 81. – P. 6455.
277. Григорьев А.И., Дмитриев М.Т. // Изв. вузов. Физика. – Депон., 1978, – № 1412, 2280; 1979, – № 29, 296.
278. Charman W.N. // Phys. Reports. – 1979. – V. 54. – P. 261.
279. Стаханов И.П. Физическая природа шаровой молнии. – М.: Атомиздат, 1979.
280. Стаханов И.П. О физической природе шаровой молнии. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
281. Keul A.G. // Naturwissenschaften. – 1981. – Bd 68. – S. 296.
282. Григорьев А.И., Григорьева И.Д. // Тр. III Всесоюз. симпоз. по атмосф. электр. – Тарту: Изд. Тарт. гос. ун-та, 1986. – С. 228.
283. Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shirjaeva S.O. // Science of Ball Lightning / Ed. Y.H. Ohtsuki. – Singapore.: World Scientific, 1989. – P. 88.
284. Ohtsuki Y.H., Ofuruton H. // Nuovo Cimento. – 1987, Ser. C. – V. 106. – P. 577.
285. Egely Gy. Hungarian ball lightning observations. – Central Research Institute for Physics. 10/D. – Budapest, 1987.
286. Egely Gy. // Proc. IX Intern. Sympos. Electromagnetic Compatibility. – Wroclaw, 1988. – P. 15.
287. Леонов Р. Загадка шаровой молнии. – М.: Наука, 1965.
288. Сингер С. Природа шаровой молнии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1973.
289. Singer S. // Lightning/Ed. R.H. Golde–London.: Acad. Press, 1977. – P. 409.
290. Имянилов И.М., Тихий Д.Я. За гранью законов науки. – М.: Атомиздат, 1980.
291. Барри Дж. Шаровая молния и четочная молния: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.
292. Смирнов Б.М. Проблема шаровой молнии. – М.: Наука, 1988.
293. Стаханов И.П. // ЖТФ. – 1987. – Т. 54. – С. 1538.
294. Биберман Л.М., Норман Г.Э. // Теплофизика высоких температур. – 1969. – Т. 7. – С. 822.
295. Dijkhuis G.C. // Proc. IX Intern. Sympos. Electromagnetic Compatibility. – Wroclaw, 1988. – P. 166.
296. Александров В.Я., Голубев Е.М., Подмошенский И.В. // ЖТФ. – 1982. – Т. 52. – С. 1987.
297. Александров В.Я., Бородин И.П., Киченко Е.В., Подмошенский И.В. // ЖТФ. – 1982. – Т. 52. – С. 818.
298. Israel H. Atmospheric Electricity. – Jerusalem: Keter Press Binding, 1973.
299. Moore C.B., Vonnegut B. // Lightning/Ed. R.H. Golde–London: Acad. Press, 1977. – P. 51.

- 300 *Iribarne J V, Cho H R* Atmospheric Physics – Dordrecht · Reidel, 1980.
- 301 Смирнов Б М // УФН 1975 – Т 116 – С 732
- 302 Химия плазмы Под ред Б М Смирнова Вып 4 М Атомиздат, 1976 – С 191.
- 303 Шидловский А А Основы пиротехники – М Машиностроение, 1973
- 304 Smirnov B M // Science of Ball Lightning/Ld Y H Ohtsuki – Singapore World Scientific, 1989 Р 220
- 305 Jackson J / Landolt-Bornstein Data Group V –V 2a – Berlin, Heidelberg, N Y , Tokyo Springer Verlag, 1984 – Р 248
- 306 Зельдович Я Б / ЖЭТФ 1937 – Г 7 – С 1463
- 307 Варгафтик Н Б Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей – М. Наука, 1972
- 308 Крайнов В П, Лебедев Г П, Назарян А О, Смирнов Б М // ЖТФ 1986 – Т 56 – С 1791
- 309 Гайдуков Н И // ЖТФ – 1986 – Т 56 – С 1797
- 310 Гайдуков Н И // Докл АН СССР – 1988 – Т 301 – С 1076
- 311 Сена Л А Единицы физических величин и их размерности – М. Наука Гл ред физ-мат лит, 1989
- 312 Lee W R // Lightning/Ed R H Golde – London Acad Press, 1977 – Р 521
- 313 Smirnov B M // Science of Ball Lightning/Ed Y H Ohtsuki – Singapore World Scientific, 1989 – Р 192
- 314 Капица П Л // Докт АН СССР – 1955 – Т 101 С 245
- 315 Капица П Л // ЖЭТФ – 1969 – Т 57 – С 1801
316. Powell J.R., Finkelstein D // Amer Scientist – 1970 – V. 58 – Р 2318
317. Андрианов А М, Синицын В.И. // ЖГФ – 1977 – Т 47 – С 2318
- 318 Golka R.K. // Proc. IX Intern. Sympos. Electromagnetic Compatibility. – Wroclaw. 1988. – Р. 59.
319. Барри Дж // Природа – 1968 – № 12 – С 62
- 320 Barry J.D., Boney W.E., Brandlik J.E. // Appl. Phys. Lett. – 1971. – V. 18 – Р. 14.
321. Ohtsuki Y.H., Ofuruton H. // Proc. IX Intern. Sympos. Electromagnetic Compatibility – Wroclaw, 1988. – Р. 59.
- 322 Александров В.Я, Подмошенский И В, Саль С.А. // Письма в ЖТФ. – 1988. – Т. 14. – С. 639; ЖТФ. – 1990 – Т 60. – С. 73.
- 323 Lovejoy S. // Science. – 1982. – V. 216. – Р. 186.
324. Rys F.S., Waldvogel A. // Phys. Rev. Lett – 1986. – V 56. – Р. 784
325. Bunde A., Miyazima S. // J. Phys. – 1988, Ser. A. – V 21. – Р. L345
326. Bunde A., Miyazima S. // Phys. Rev. – 1988, Ser. A. – V 38 – Р. 2099.
327. Allain C., Cloitre M. // Universalities in Condensed Matter / Ed. by R. Julian, L. Peliti, R. Rammal, N. Bocara – Berlin: Springer-Verlag, 1988. – Р. 146.
328. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов Пер с англ – М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
329. Ферцигер Дж., Канер Г Математическая теория процессов переноса в газах Пер. с англ. – М · Изд-во иностр. лит., 1976
330. Rubin M., Lampert C.M. // Solar Energy Materials, 1983. – V. 7. – Р. 1483.
331. Egely Gy. / Science of Ball Lightning / Ed. by Y H. Ohtsuki. – Singapore. World Scientific, 1989. – Р. 19.
332. Prentice S.A. // Lightning / Ed. by R.H. Golde – London. Acad. Press. 1977 – Р. 465.
333. Family F., Meakin P. // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. 61. – Р. 428.
334. Helgesen G., Skjeltorp A.T., Mors P.M. et. al. // Phys. Rev. Lett. – 1988 – V 61. – Р. 1736.
335. Eriksson A.B., Johnson M. // Phys. Rev. Lett – 1989 – V. 62. – Р. 1698.
336. Tang C. // Phys. Rev. – 1985, Ser. A. – V. 31. – Р. 1977.
337. Kertesz J., Vicsek T. // J. Phys. – 1986, Ser. A. – V. 19. – Р. L257
338. Meakin P., Kertesz J., Vicsek T. // J. Phys. – 1988, Ser. A. – V. 21. – Р. 1271.
339. Eckmann J.P., Meakin P., Procaccia I., Zeitak R. // Phys. Rev. – 1989, Ser. A. – V. 39. – Р. 3185.
- 340 Moreira F., Freire R.R., Chaves C.M. // Phys. Rev. – 1989, Ser. A – V. 40. – Р. 2225.
341. Гайдуков Н.И. // ЖТФ. – 1987 – Т. 57. – С. 1899
342. Гайдуков Н.И. // ЖТФ. – 1989. – Т. 59. – С. 88
343. Silberg P.A. // Appl. Phys. – 1978. – V. 49. – Р 1111.

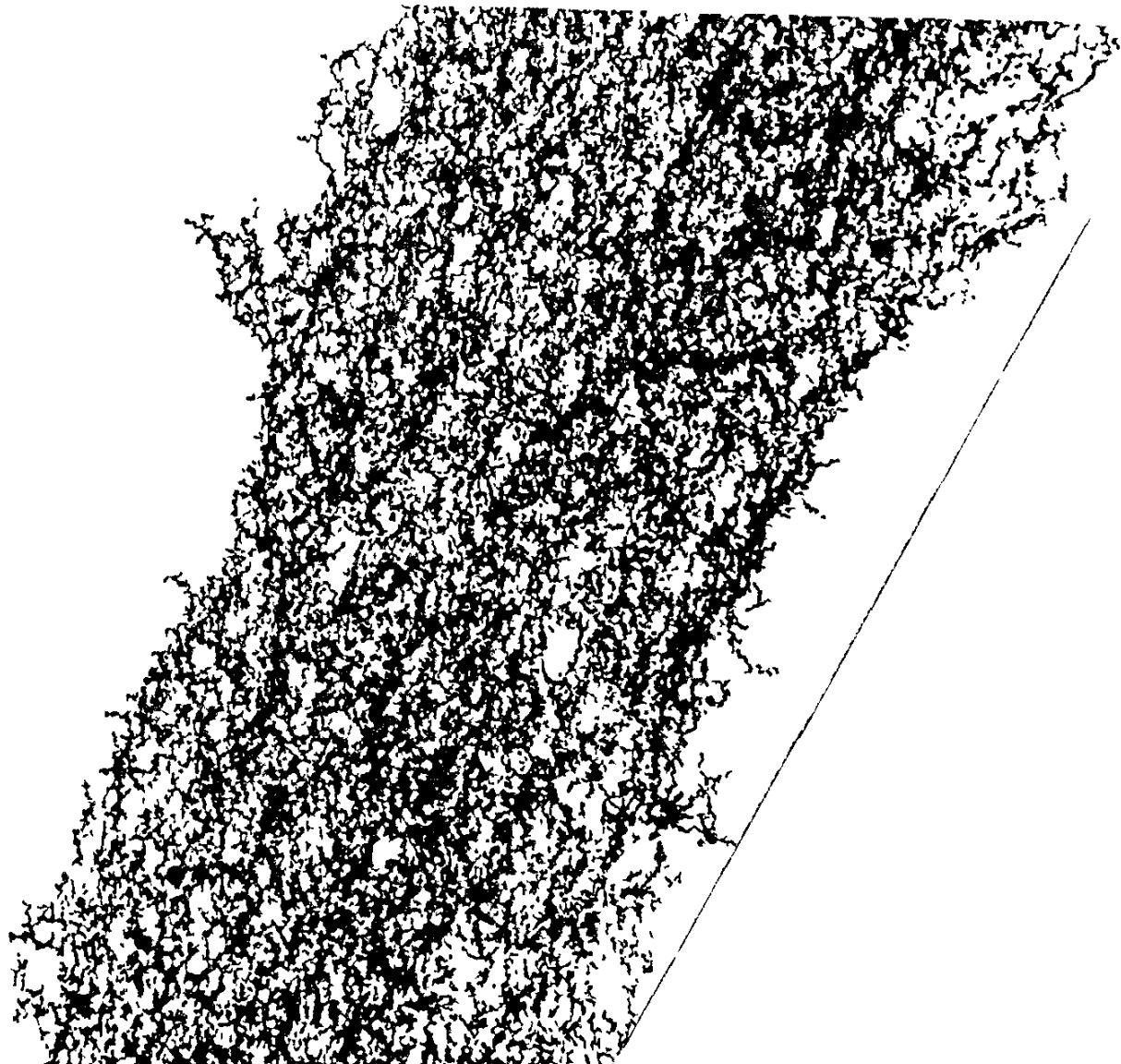
344. *Silberg P.A.* // Problem of Atmospheric and Space Electricity / Ed. S.C. Corotini. — Amsterdam: Elsevier, 1965.
345. *Dijkhuis G.C.* // Ned. Tijdsch. v. Natk. — 1985, Ser. B. — V. 51. — P. 125.
346. *Dijkhuis G.C.* / Proc. IX Intern. Wroclaw Sympos. on Electromagnetic Compatibility. — Wroclaw, 1988. — P. 166.
347. *Ofuruton H., Ohtsuki Y.H.* // Science of Ball Lightning / Ed. by Y.H. Ohtsuki. — Singapore: World Scientific, 1989. — P. 220.
348. *Корум К.Л., Корум Дж.Ф.* // УФН. — 1990. — Т. 160.
349. *Lindsay H.M. et. al.* // Phys. Rev. — 1989, Ser. A. — V. 39. — P. 3112.
350. *Wilcoxon J.P., Martin J.E., Schaefer D.W.* // Phys. Rev. — 1989, Ser. A. — V. 39. — P. 3112.

## ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ НИТИ

Новый тип макроскопических фрактальных структур – фрактальные нити – был получен в эксперименте Лушникова, Негина, Пахомова [1] (см. рисунок). Это открытие было продолжением частично описанных в этой книге (см. п. 3.3) экспериментов авторов [2, 3] по получению фрактальных кластеров путем лазерного облучения металлической поверхности. Фрактальные нити были получены для разных металлов, эксперименты проводились в воздухе и инертных газах при атмосферном и более низких давлениях. Для всех этих условий качественная картина образования нитей одинакова.

Остановимся на процессах образования нитей. В процессе разлета слабоионизованного пара, образуемого при облучении поверхности, пар охлаждается и конденсируется на заряженных частицах, что создает макроскопические частицы металла и их окислов. Далее происходит объединение этих частиц в фрактальные кластеры. Этот процесс, описанный в п. 5, протекает миллисекунды или десятки миллисекунд. Принципиальной является следующая стадия процесса, отвечающая объединению фрактальных кластеров в макроскопические фрактальные структуры. Оказывается, этот процесс эффективно протекает во внешнем электрическом поле. В описываемом эксперименте для этой цели использовались поля порядка нескольких сотен вольт на 1 см. Взаимодействие и сближение кластеров осуществляется под действием дипольных моментов, наведенных электрическим полем, причем этот эффект увеличивается по мере роста размеров кластеров. При этом в объеме прорастали нити, а затем они прикреплялись к электродам. Одновременно образовывалось несколько десятков нитей, полное время процесса составляет несколько минут.

Фрактальные нити являются своеобразным физическим объектом со специфическими свойствами, благодаря которым он может найти применение в современной технике. Этот объект может образовываться в природе при электрических явлениях вблизи поверхности, если в результате этих процессов часть материала поверхности испаряется, и этот процесс происходит во внешнем электрическом поле. Модель шаровой молнии, каркас которой является клубком фрактальных нитей, является развитием аэрогельной модели, но имеет перед ней ряд преимуществ.



Структура фрактальной нити, полученная лазерным облучением титана [1].

Радиус нити 15 мкм, средний радиус частиц в структуре 10 нм, длина нити – несколько см, фрактальная размерность на малых расстояниях близка к 1,8

1. Лушников А.А., Негин А.Е., Пахомов А.В. // Шаровая молния / Под ред. Б.М. Смирнова. – М.: Изд-е ИВТАН, 1990. – С. 11; Chem. Phys. Lett. – 1990. – V. 2.
2. Лушников А.А., Пахомов А.В., Черняева Г.А. // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 292 – С. 86.
3. Lushnikov A.A., Maksimenko V.V., Pahomov A.V. // J. Aerosol Sci. – 1990. – V. 20. – P. 865.