Ф. Кымпан

История числа π

Перевод с румынского
М. Г. МАНОЛЕ и А. М. ФРЕНКА

под редакцией
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬДА и Б. В. БИРЮКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

51(09)
К 97
УДК 510(09)

Florica Cîmpan

ISTORIA NUMĂRULUI π

BUCUREȘTI
1965

Флорика Кымпан

История числа π

М., 1971 г., 216 стр. с илл.

Редактор *В В Донченко*
Техн. редактор *В Н Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева, Т. А Панькова*

Сдано в набор 29/VII 1971 г. Подписано к печати 23/XI 1971 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 6,75. Услови. печ. л. 11,34. Уч.-изд. л. 12,43. Тираж 70 000 экз. Цена книги 58 коп. Заказ 1875.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
г. Ленинград, Гатчинская ул., 26,

2-2-1
70-71

Предисловие переводчика

В предлагаемой вниманию советского читателя книге Ф. Кымпан «История числа π» в интересной, доступной и живой форме рассказывается о развитии представлений об этом числе, начиная с эмпирического его применения в древние времена до раскрытия его подлинной математической природы в конце прошлого века.

Автор книги профессор Ясского университета Флорика Кымпан — известный в Румынии историк математики и писатель-популяризатор. Ее перу принадлежат статьи в специальных журналах, научно-исследовательские работы по истории математики, популярные книги на эту тему.

В процессе работы над задуманным ею трудом по истории тригонометрии Ф. Кымпан натолкнулась на множество интересных фактов, связанных с числом π. Так родилась идея создания литературно-математического рассказа об этом числе. В итоге получилось не сухое изложение истории исследований о числе π и связанной с ним известной задачи о квадратуре круга, а живой рассказ о разных эпохах в развитии математической мысли, об обстановке, в которой протекали работа и жизнь ученых, в той или иной степени занимавшихся проблемой числа π.

Книга рассчитана на широкую читательскую публику. Она доступна лицам, обладающим математическими знаниями в пределах программы средней школы. В то же время она представляет интерес и для читателей с более серьезной математической подготовкой.

В процессе редактирования в тексте были сделаны — с согласия автора — некоторые сокращения и исправления. Это, в частности, касается главы «Отказ от канона». Сокращения и исправления внесены также в примечания к книге, помещенные в ее конце. Дополнения, сделанные в примечаниях редакторами книги (включая вновь написанные примечания), отмечены пометкой «*Прим. ред*».

М. Маноле

Предисловие

Хотя число π является лишь одним из бесконечного множества действительных чисел, оно обратило на себя внимание людей еще в те времена, когда они не умели письменно излагать ни своих знаний, ни своих переживаний, ни своих воспоминаний. С тех пор как первые натуральные числа 1, 2, 3, ... стали неразлучными спутниками человеческой мысли, помогая оценивать количества предметов либо их длины, площади или объемы, люди познакомились и с числом π. Тогда оно еще не обозначалось одной из букв греческого алфавита и его роль играло число 3.

Нетрудно понять, почему числу π уделяли так много внимания. Выражая величину отношения между длиной окружности и длиной ее диаметра, оно появлялось во всех расчетах, связанных с площадью круга или длиной окружности. Но уже в глубокой древности математики довольно быстро и не без удивления обнаружили, что число 3 не совсем точно выражает то, что теперь известно как число π. Безусловно, к такому выводу они могли прийти только после того, как к ряду натуральных чисел добавились дробные числа. Со временем, по мере того как в области геометрии накапливались новые результаты, разгорались споры о природе числа π. Этому во многом способствовали попытки геометров определить сторону квадрата, имеющего площадь, точно равную площади заданного круга.

Эта задача, ставшая позже известной как задача о *квадратуре круга*, должна была как будто остаться, подобно любой другой математической задаче, достоянием специалистов. Но случилось иное: своим кажущимся элементарным характером она породила иллюзию, будто для ее решения нужны не столько глубокие математические познания, сколько изобретательность. Под влиянием этой иллюзии задача о квадратуре круга получила широкую известность среди нематематиков, превратившись в навязчивую идею, предмет страсти

и даже в цель жизни многих из них. И по сей день выражение «квадратура круга» вызывает у непосвященных представление о задаче, полной глубокой таинственности. На самом же деле ничего таинственного в ней не было — кроме того, пожалуй, что для ее решения требовалось знать, что такое число π. Установить его природу было не очень легко. Средства, необходимые для такого исследования, поначалу отсутствовали. Создавались они постепенно, по мере того как математика развивала и закрепляла свои собственные методы изучения природы.

Вот почему задача о квадратуре круга занимала умы математиков — и особенно нематематиков — более тридцати веков. За это длительное время она несколько утратила «строгость», свойственную задаче из специальной области; вместо этого, однако, она приобрела немало занимательного. Это и побуждает нас рассказать о ней читателю, владеющему некоторыми элементарными геометрическими понятиями из курса математики средней школы. Такие понятия сохраняются где-то в памяти человека, даже если они с течением времени кажутся забытыми. Чтобы устранить у читателя всякое сомнение в том, что он сможет следить за ходом изложения в этой книге, мы заверяем его, что недостающие знания будут ему «подсказаны» в ходе изложения. Автор страстно желает устранить сложившееся в силу неверной традиции ошибочное представление о недоступности математических книг для неспециалистов.

Величайший математик XVIII в. Ж. Л. Лагранж, прозванный «самой высокой пирамидой математических наук», утверждал, что математик не совсем понял свое творение, если не может изложить его столь ясно, чтобы оно стало понятным для рядового человека. Это его мнение — верное и в применении к теме, которой посвящена эта книга, — разделяют и другие математики. Так, например, Ж. Колле говорит: «Если высшая математика менее доступна, то ее основные элементы понятны для всех, и, чтобы постичь их, достаточно обладать тем здравым смыслом, которым, как утверждает Декарт, в равной степени наделены все люди».

Многие, очевидно, сомневаются, что чтение книги об истории числа π может принести такое же наслаждение, как и чтение повести или романа. Мне хотелось бы рассеять это сомнение и доказать, что сюжет из области

математики может быть таким же привлекательным и захватывающим, как и сюжет из любой другой — литературной, музыкальной или научной — области. Читатель, возможно, будет удивлен, узнав, какие страстные споры, какие бурные чувства — чувства, порой

Ж. Л. Лагранж.

доходившие до восторгов или отчаяния, — вызывало число π у тех, кто им занимался. Этому числу удавалось в течение тысячелетий держать в плену мысли и чувства не только ученых, но и философов, и художников. История числа π лишний раз убеждает, что мысли тех, кто стремится к решению одной и той же задачи, не остаются изолированными во времени и в пространстве: они «ищут» друг друга и соединяются в единое целое, подобно звукам мелодии, связанным между собой законами гармонии. Когда решение математической задачи получено, его структура нередко дышит кра-

сотой, воздействующей на ум и душу подобно звукам классической симфонии.

Но хватит заверений в том, что читатель сможет понять эту книгу, что для этого необходимы лишь элементарные математические познания. Ведь некоторые, наверное, все равно будут сомневаться. Поэтому я просто расскажу о замысле этой книги.

Р. Декарт.

Конечно, самое простое было бы придерживаться способа, широко используемого в математике. Для этого надо было бы изложить нашу задачу, гипотезы, на которых она основана, затем логически объединить их в доказательства, из которых следуют определенные заключения, и, наконец, привести получающиеся из этих заключений следствия, продемонстрировав их практическое применение. Это весьма подходящий путь для автора научно-популярного произведения.

Мы не пойдем по такому пути. Хотя настоящее повествование посвящено сугубо научной истине и основано на подлинных исторических документах, оно

преследует не только просветительные цели — автор стремился к тому, чтобы доставить читателю также и духовное наслаждение. В книге не просто излагается постепенное развитие вопроса о природе числа π и квадратуре круга: автор хотел открыть как бы дверь в прошлое, через которую читатель смог бы собственными глазами следить за событиями, случившимися давным-давно. Ясно, что это отнюдь не прямой путь изложения истины науки. «Прямой» путь можно было бы сравнить с посещением выставки произведений скульптора, выставленных в художественном салоне; наш же путь скорее похож на визит в его мастерскую. Вместо завершенных скульптурных форм, расставленных с расчетом на максимальное эмоциональное воздействие, здесь, в мастерской, мы находим ящик с глиной, время от времени смачиваемой художником, чтобы она не засохла. Мы видим, как художник берет из ящика куски и прилепляет их к незаконченной форме, сырой массой возвышающейся на его рабочем столе. Затем, действуя пальцами и применяя стек, скульптор продолжает лепку. С восхищением следим мы за тем, как глина постепенно принимает живые очертания. Но вот художник быстро отходит от своего творения и смотрит на него через почти закрытые веки. Затем он берет большой кусок глины и бьет им по тому, что только что создал. Он разрушает свое творение, чтобы снова и снова лепить, пока у него не возникнет уверенность в том, что он выразил то, что хотел.

Так вот, наша цель — это как бы краткий визит в мастерскую великого скульптора, называемого математикой. Живые сцены в форме диалогов; паузы, дающие возможность без помех оглядеться и увидеть, как скульптор — математика, — век за веком воплощая «в глине» нашу задачу, придает ей все более четкие очертания; разрушения почти законченной формы с целью ее усовершенствования; глухой звук падающих на пол излишних и уже бесполезных кусков глины — вот как мы попытаемся представить историю ваяния числа π.

Может быть, таким путем читатель с доверием и радостью сблизится с математикой. И если это произойдет, то по-настоящему полезными могут оказаться примечания, помещенные в конце книги. В них, кроме исторических и библиографических справок, можно найти и легко прослеживаемые доказательства.

Введение

... Я не специалист по математике, а только поклонник ее, неудачник, влюбленный в эту самую прекрасную из наук.

Поль Валери

Если задать кому-нибудь из вас вопрос, где и сколько раз вам приходилось видеть круг, то, пожимая, наверное, плечами, вы ответили бы: «С тех пор как помню себя, я постоянно и повсюду видел круги. Тарелка, из которой я ем; юла, заставлявшая меня в детстве забывать обо всем на свете; кружка, к которой я первый раз протянул руку; железный обруч от кадки или от винной бочки, который я гонял мальчишкой, ... — ведь все это круги. Я вижу сегодня форму круга или окружности в искрящейся алмазной коронке буровых станков, ее напоминает мне любая цилиндрическая или коническая форма, поясок или кольцо».

Круги, по которым происходит заранее рассчитанное движение, помогают нам измерять время и покорять пространство. На уроках геометрии нас учат, что у окружности есть центр, от которого все его точки одинаково удалены...

«А это я давно знал, — слышим мы в ответ, — знал еще, когда смотрел на колеса автомобиля, на котором я так хотел покататься. В школе меня учили, что прямая, проходящая через центр круга и разделяющая его на две равные части, называется диаметром, а половина диаметра — радиусом. Там же я узнал, как вычислять длину окружности и площадь круга. И теперь еще я вижу себя записывающим в тетрадь формулы:

$$L = 2\pi R,$$

$$S = \pi R^2,$$

где греческой буквой π обозначено число 3,14».

Вы, может быть, думаете, что π — просто обозначение? Ничего подобного! π — это имя собственное,

как «Иван» или «Мария». Более того! В то время как Иваном или Марией называют множество людей и нужны другие признаки, чтобы точно знать, о ком идет речь, среди бесконечного множества чисел существует лишь одно-единственное, носящее название π, а именно число, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру. Число 3,14 — одно из приближенных значений π. Для точного определения его не хватило бы и миллионов десятичных знаков, последовательность которых, между прочим, даже неизвестна. Может быть, вас удивит, что у чисел могут быть миллионы десятичных знаков и что в 1958 г. были опубликованы первые 10 000 десятичных знаков числа π, найденные при помощи электронной вычислительной машины. Может возникнуть вопрос, какая польза от установления такого количества десятичных знаков π, тем более что для вычисления, например, траектории космической ракеты, удалившейся на любое расстояние от Земли, не понадобится и 50 десятичных знаков этого числа.

Не надо думать, что старания математиков преувеличены, что эти вычисления — напрасный труд. Если они не могут быть пока применены на практике, они могут стать полезными в решении какой-нибудь задачи из теории чисел, а это в свою очередь может найти практическое применение. История математики знает много таких примеров.

В тумане времени

Математика знает весьма тонкие изобретения, могущие принести большую пользу как для удовлетворения желающих учиться, так и для развития всех ремесел, облегчая труд человека.

Декарт

Чтобы начать «с самого начала», надо вернуться к началу человеческой истории: заглянуть в эпоху, удаленную от нас на десятки тысяч или даже больше лет...

Вот люди, одетые в шкуры, содранные каменными ножами со зверей, за которыми они охотились с помощью дубинок. Один из людей сидит в тени дерева и проворно плетет ивовую корзину. Края корзины он делает круглыми, как его учили родители. Он погружен в свои мысли. На дереве висят еще три готовые корзины. Бросив работу неоконченной, он забирается на дерево, хватает три готовые корзины и спускается на землю. Он выбирает прут из кучи прутьев, лежащей рядом, и измеряет им окружность, образуемую краем самой большой из корзин, отламывая лишнюю часть прута; берет другой прут и измеряет ширину, или, как мы говорим сегодня, диаметр корзины. Затем он сравнивает оба прута и на глаз определяет, что один из них в три раза больше другого. Когда проведенное измерение убеждает его, что он не ошибся, его лицо озаряется радостью. С лихорадочной быстротой повторяет он измерение на других двух корзинах и получает такой же результат. Человек смотрит, оглядывается и, увидев пень круглой формы, проделывает над ним такую же операцию. Проверка удовлетворяет его. Уже много дней мучает его вопрос, решение которого он теперь нашел. Вопрос этот важен для плетения корзин, щели которых надо набивать глиной, чтобы они стали пригодны для хранения воды. Для таких корзин нужно выбирать прутья такой длины, которая позволяла бы получить желаемую ширину и форму: столько-то у

края, столько-то в середине и столько-то у дна. Теперь все пойдет как надо. «Теперь, — думает человек, — я понимаю, как придавать корзинам нужную форму и размер».

Это был первооткрыватель числа π! До него никому не приходило в голову, что между диаметром окружности и ее длиной может существовать какая-либо связь.

Чтобы оценить важность этого открытия, напомним, что уже на заре истории человек пользовался многими бытовыми предметами и украшениями, имевшими форму круга. Такую форму имели площадки, на которых производился суд. Свидетельством тому служат кромлехи [1]), разбросанные в разных частях земного шара: в Англии, Аравии, Бретани, Индии, Норвегии, Швеции и т. д. Гомер без тени сомнения подтверждает это, когда описывает щит Ахилла, на котором была изображена сцена суда:

«...старцы градские молча на тесаных камнях сидят средь священного круга» [2]).

Мы не можем проследить, каким образом и когда было открыто число π, но, по-видимому, закономерность, согласно которой диаметр окружности содержится три раза в ее длине, передавалась из поколения в поколение. Ее выражали на всех языках Земли. Ею пользовался плотник, изготовлявший деревянное колесо для телеги, каменотес, приделывавший оголовок к колодцу, гончар, измерявший окружность глиняных сосудов для нанесения на них рисунков, — вообще все ремесленники, имевшие дело с кругами. Ближе к нашим временам, когда люди открыли письменность и стали записывать свои знания, они выразили в письме и свои наблюдения о числе π. Сохранились записи, сделанные в разные времена и на разных языках, но очень сходные по содержанию, так как речь в них шла об одном и том же открытии, считавшимся в те далекие века достойным упоминания. Например, на табличках из обожженной глины, выкопанных в Месопотамии, было написано:

«Если 60 есть окружность, то третья часть от 60 представляет собой 20. Это есть диаметр» [3]).

Это же соотношение, выраженное в аналогичной форме, мы находим и в задачах, содержащихся в самых древних египетских и индийских папирусах, в китайских книгах и т. п. [4]).

Сумев усовершенствовать науку об измерении, египтяне позже заметили, что диаметр окружности не содержится точно 3 раза в ее длине. Установление этого факта глубоко взволновало их, так как оно породило сомнения в правильности открытых предшественниками законов. Это видно и из того, что они пытались добиться такого же результата другим путем — путем научного рассуждения. Так, очевидно, началась борьба между старыми традициями и новыми научными идеями. Число 3 перестало считаться выражением отношения между длиной окружности и ее диаметром; но египтяне продолжали верить в существование постоянного отношения между длиной окружности и диаметром, величину которого они старались установить.

Это событие оставило свои следы в строках задач, записанных писцами на папирусах. Вычисления в этих задачах уже не так просты, как в тех, где предполагалось, что число π равно 3. Благодаря своему новому значению число π выделяется из множества натуральных чисел и привлекает внимание математиков. Этот факт зафиксирован на страницах двух расшифрованных учеными манускриптов: на папирусе Ринда, составленном Ахмесом около 1660 г. до н. э., и на Московском папирусе времен Среднего царства [5]). Чтобы убедиться в этом, перенесемся мысленно к подножию величественной пирамиды Хеопса и развернем папирусы. Делать это надо с величайшей осторожностью, ибо время сделало их очень хрупкими.

Восходит Ра, озаряя Египет

В уме изучающих математику происходит то же самое, что происходило при создании и организации этой науки; в этом длительном труде не одна только дедуктивная строгость сыграла свою роль. Можно правильно и долго рассуждать, не продвигаясь ни на шаг, и строгость ие мешает рассуждениям быть бесполезными. В математике также случается, что к новым открытиям приходят менее надежными путями.

Жюль Таннери

В 1842 г. до н. э. Аменемхет III, фараон Верхнего и Нижнего Египта, начал седьмой год своего царствования. Желая послать новогодние дары царю Амизадугге, властелину Вавилона, Шумера, Аккада и тех четырех краев, с которыми он несколько лет назад установил торговые и дружественные связи, Аменемхет вызвал ученого мужа Имхотепа [6]) и дал ему это поручение. Если передача письма и устных посланий, совершение ритуалов и выполнение заданий фараона не очень беспокоили Импотепа, то организация каравана, которому предстояло везти драгоценные дары, в том числе 20 мин [7]) золота, причинила ему много хлопот. Путь был дальний и тяжелый. Предстояло пройти пустыню, и нужно было запастись достаточным количеством воды, продовольствия и сандалий. Одновременно нужно было подобрать сильную и хорошо вооруженную охрану для отражения возможного нападения со стороны враждебных племен.

Покинув дворец, караван прошел мимо богатых домов, расположенных в тенистых садах. Приятным был вид у этих домов, похожих на дворцы, каждый с 60—70 комнатами и коридорами, и Имхотеп восхищался их архитектурой. Но это восхищение смешивалось с чувством горечи. Он пытался мысленно втиснуть в площадь, занимаемую восемью такими домами, весь район бедноты на западной окраине города; но его

воображение не сумело сделать этого. Ему не верилось, что на пространстве, равном тому, которое занимали примерно восемь домов, могло жить такое множество людей, но действительность была еще хуже... Обратной стороной богатства, представшего его взору, была нечеловеческая теснота лачуг, в которых кишмя кишели молодые и старики, по 5—6 человек в одной комнатушке. Он знал эти районы еще с детства, когда мать посылала его туда с корзинкой еды или поношенной одеждой для этих несчастных. Они жили тогда в скромном доме, недалеко от кварталов бедноты; его отец был зажиточным торговцем. По сей день Имхотеп бывал в этих кварталах, помогая кое-кому из жителей, попавших в беду.

Когда город остался далеко позади, ясное небо, извилистая линия каравана, пересекающая линию горизонта, необъятные просторы пустыни вытеснили из души Имхотепа неприятные впечатления и вызванное ими негодование. Незаметно все его существо прониклось царившим вокруг покоем. Он удовлетворенно улыбнулся при мысли, что опять увидит мудрого Илидури [8]), с которым подружился, когда два года назад последний приезжал в Фивы. С первой же минуты знакомства с Илидури Имхотеп почувствовал в душе тепло возникшей дружбы, и они заговорили, словно давно знали друг друга. Да, тогда он совсем забыл поучение Птахотепа, много раз служившее ему щитом: «Будь осторожен, когда завязываешь дружбу, предварительно испытай друга в беседе, чтобы убедиться, заслуживает ли он твоего доверия» [9]). Без тени сомнения в чувствах друга собирался он теперь открыть ему некоторые свои сокровенные мысли.

Во время торжеств, продолжавшихся почти две недели, у друзей не было досуга для беседы. Кроме возложенных на него обязательств, Имхотепа занимали сооружения и памятники Вавилона, его многочисленное население, обычаи которого сильно отличались от египетских. Как только окончились праздники, Илидури пригласил Имхотепа к себе. После обмена приветствиями беседа сразу же перешла к математическим вопросам, которыми оба страстно увлекались в свободное от повседневных забот время.

— Надеюсь, ты помнишь еще, любимый друг и брат, что̀ мы говорили относительно круга, — начал

Имхотеп. — Я хотел бы поделиться некоторыми моими новыми открытиями.

— Знаю, что ты пытался найти новый способ вычисления длины окружности и площади круга. Тебя не удовлетворял результат, полученный для площади путем умножения площади квадрата, построенного на половине диаметра, на 3. Ты был недоволен и тем, как вычисляют длину окружности, умножая ее диаметр на 3. Я согласился с тобой, хотя не видел и не вижу другого, более простого пути, который давал бы лучший результат. Теперь ты, наверное, понимаешь, с каким нетерпением я собираюсь выслушать тебя.

Расправив лист папируса, Имхотеп обмакнул тростниковую палочку в краску, приготовленную им из сажи во время разговора, и, рисуя на папирусе, начал говорить:

— Я начал со сравнения площади круга с площадью описанного вокруг него квадрата [10]). Длину диаметра я выбрал равной 9 хетам [11]). Если я разделю каждую сторону квадрата на три равные части и соединю друг с другом прилегающие к углам квадрата точки, то получу восьмиугольник (рис. 1). В нашей задаче эта фигура может лучше заменить круг, чем шестиугольник (рис. 2), которым мы обычно пользуемся.

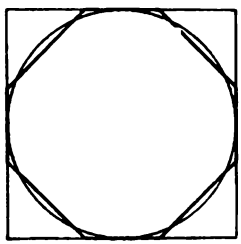


Рис. 1.

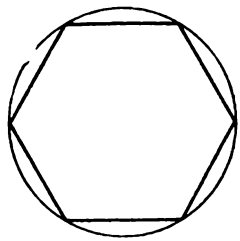


Рис. 2.

— Это верно, — подтвердил Илидури. — Я ясно вижу, что длина сторон и площадь восьмиугольной фигуры более близки к кругу, чем шестиугольной, так как ее стороны пересекают окружность, и то, чего недостает в одном месте, компенсируется в другом [12]). Но можно ли эти величины выразить в такой форме, чтобы писцы их легко запомнили? Ведь писцу не поло-

жено ломать голову, применяя сложный прием, в котором он может и запутаться.

— Я ожидал этого вопроса, — ответил Имхотеп. — Было естественно, чтобы задал его именно ты, бывший отец школы [13]), которая составила такое количество таблиц, что в распоряжении твоих учеников и твоих последователей имеется в готовом виде бо́льшая часть вычислений.

— Совершается меньше ошибок, когда есть готовые вычисления, — сказал Илидури.

— Да, я уже много раз думал, что следовало бы ввести этот способ и у нас. Мне все хотелось составить несколько таблиц, хотя бы по умножению и степеням. Я все откладывал это дело... Может быть, потому, что у меня времени для этого не хватало.

— Или, может быть, потому, что применяемые у нас способы не подходят для вас! Думаю, что если бы вы нуждались в таблицах, о которых ты говорил, они были бы уже составлены тобой или кем-нибудь другим. Не огорчайся из-за этого и дай мне возможность скорее познакомиться с твоими вычислениями, — попросил Илидури.

— Я ограничусь пока тем, что покажу тебе, как я нашел площадь круга, — сказал Имхотеп.

— Уподобляя ее площади восьмиугольной фигуры, мне следует отнять на углах от площади квадрата площадь четырех треугольников, или, что одно и то же, площадь двух квадратов, сторона которых равняется 3 хетам.

Но так как площадь такого квадрата равняется 9 сетатам [14]), я могу заменить его прямоугольником, имеющим 9 хетов в длину и 1 хет в ширину.

— А эти два прямоугольника получишь, вырезав две полосы, каждая размером в $\frac{1}{9}$ стороны описанного квадрата. Это очень красивый способ! Отрезав эти две полосы у квадрата, одну в ширину, другую в длину, ты получишь новый квадрат (рис. 3), сторона которого равна 8 хетам. Таким образом можно вычислять площадь круга, словно мы имеем дело с площадью квадрата.

— Верно, — ответил Имхотеп. — Вот какое вычисление должен произвести писец:

«Пусть диаметр круглого поля — 9 хетов. Какова его площадь?

Отними $\frac{1}{9}$ диаметра [15]), т. е. 1; останется 8. Умножь 8 на 8, получается 64. Следовательно, площадь равна 64 сетатам.

Поступают следующим образом:

1...9

$\frac{1}{9}$...1, отнимая ее, получаем 8

1...8 сетатов

2...16

4...32

8...64

Площадь [16]) равна 64 сетатам» [17]).

— Мне очень нравится, как просто получается новый квадрат, площадь которого почти равна площади круга, — сказал Илидури, когда его друг закончил изложение. — Несмотря на то, что площадь этого квадрата не совсем равна площади восьмиугольной фигуры, потому что...

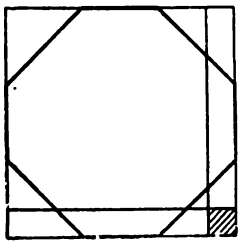


Рис. 3.

— Ей не хватает площади квадрата нижнего угла, стороной в 1 хет, — прервал его Имхотеп. — Знаю, что площадь этого маленького квадрата учитывается два раза, но ничего не могу поделать. Вначале, когда мне пришло в голову превратить площадь четырех треугольников в две полосы, которые следует вырезать из начального квадрата, я не заметил этого наложения. А после того, как получил такой близкий результат, не мог отказаться от придуманного способа, ибо, сколько я ни старался, не сумел найти другого, такого же простого и красивого метода, как этот.

— Охотно верю! Между прочим, незачем беспокоиться, так как разница между двумя площадями не такая уж значительная. Учитываешь или не учитываешь ее, все равно остается еще некоторая разница между площадью круга и площадью восьмиугольной фигуры, при помощи которой тебе удалось вычислить эту площадь, — сказал Илидури. Через несколько минут размышления он добавил:

— Что меня поражает — это то, что при твоем новом способе вычисления площади круга он продолжает сохранять свою тайну. Я подсчитал сейчас в уме, что, как бы велик или мал ни был круг, его площадь остается равной $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ площади квадрата, построенного на диаметре, а не $\frac{3}{4}$, как мы до сих пор считали. Меня удивляет и в то же время радует, что результат, к которому ты пришел, изменяет величину отношения между площадью круга и квадратом его диаметра, но не опровергает закона, который указывает на существование постоянного отношения между площадью круга и площадью квадрата, построенного на его диаметре, а может быть, и между длиной окружности и ее диаметром...

— Твое изумление, наверно, будет таким же сильным, как и мое, когда ты узнаешь, что такая связь действительно имеется. Такое же отношение $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ обнаруживается и между длиной окружности и периметром описанного вокруг нее квадрата.

— Правда? Ты сумел это установить? — с нескрываемой радостью спросил Илидури. — Полагаю, что не легко тебе было найти нужное доказательство.

— На самом деле, — ответил Имхотеп, — я долго мучился, пока сумел выразить в самой простой форме длину окружности. Мне достаточно легко удалось связать площадь круга с площадью квадрата стороной в 8 хетов. Когда же я обратился к длине окружности, то оказалось, что она не соответствует периметру квадрата. Я стал тогда вычислять, сколько теряется из стороны описанного квадрата, когда заменяешь его углы сторонами восьмиугольника, а затем начал искать новый квадрат, периметр которого был бы ближе к периметру круга.

— И, очевидно, снова найти отношение $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ было тем труднее, чем меньше становилась разница между стороной квадрата в 8 хетов и стороной нового квадрата, о котором ты говоришь. Так ли? — спросил Илидури.

— Не хочу обмануть тебя, утверждая, что я искал это отношение: моей целью было как можно точнее определить сторону квадрата, периметр которого

соответствовал бы периметру восьмиугольника, вот и все. Отношение $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ появилось само собою.

Это было рано утром, задолго до того, как Ра начал благословлять землю своими лучами. Мне пришла в голову мысль повторить способ, используемый при вычислении площади круга. Я стал снова применять его по отношению к квадрату со стороной в 8 хетов, и, когда засверкали первые животворящие лучи Ра, моя душа была переполнена блаженством. Вот как я поступил [18]).

Когда Имхотеп кончил говорить, Илидури восхищенно посмотрел на своего друга. Он заговорил после того, как тот собрал свои орудия письма.

— Если я не ошибся, из того, что ты сказал, следует, что отношение между длиной окружности и ее диаметром превышает число 3 почти на $\frac{1}{6}$. Не так ли?

— Да, почти, — согласился Имхотеп [19]).

— Вот почему я спрашиваю, — продолжал Илидури. — До сих пор и мы и вы считали, что длина окружности равна трем длинам ее диаметра, и наши писцы еще долго, наверное, будут применять этот способ вычисления, поскольку он более простой. Но я нахожу очень важным новый результат, и мы не замедлим использовать его при установлении путей светил. Таким образом мы сможем точнее измерять время.

— Этими соображениями руководствовался и я в своих поисках. Ты, конечно, знаешь, как необходимо для нашей жизни уметь точно рассчитывать периоды разлива Нила. Каждый раз, видя, что положение Солнца, Луны или Сириуса не совпадает с тем, что получалось по вычислениям, я говорил себе, что только здесь надо искать ошибку. Поэтому я был так счастлив, обнаружив ее. Не можешь себе представить, как мне хочется найти другой способ, при помощи которого можно было бы установить точную величину площади круга и длины окружности заданного диаметра! — робко признался Имхотеп.

— Точную? — повторил Илидури и вопросительно взглянул на друга. — Каждый раз, когда я думаю об этой задаче — а ты знаешь, что решение ее — одно из сокровенных моих желаний, — мне кажется, что это сказка, конца которой никому не дано услышать...

— Почему? — удивился Имхотеп. — Может быть, потому, что ты засыпаешь раньше, чем она кончается? Но сказку можно повторить, и в один прекрасный день, когда ты поборешь усталость и сумеешь достаточно долго бодрствовать, ты услышишь ее до конца. Не собираешься же ты утверждать, что у этой задачи нет решения!.. Может быть, пройдет еще много времени, пока люди будут т о ч н о знать, сколько раз диаметр окружности содержится в ее длине! Потому что в математических исследованиях нет проторенных дорог, и, двигаясь по тропинке, проложенной наугад, легко можно очутиться в болоте. Однако это не может повторяться всегда. Пройдет время — и будут проложены надежные пути. И тогда кто-нибудь найдет точное значение отношения площади круга к его диаметру. Разве он не услышит конца сказки!?

Илидури ничего не ответил, он только улыбнулся. Замолчал и Имхотеп, словно улыбка друга внезапно прервала нить разговора. Лишь мысли его неустанно неслись в глубь грядущих веков. Незаметно его думы перешли в волнующее царство воспоминаний.

Он видел себя ребенком, смотревшим широко открытыми глазами на яркие знаки, нарисованные на стенах и колоннах огромного храма. Он крепко держал руку матери и вопросительно показывал на эти знаки. Она гладила его по голове и, наклоняясь к уху, шептала, что в тех знаках живут слова ученых мужей. Он не понимал, как можно приклеивать слова к стенам, и с еще бóльшим изумлением смотрел на эти знаки, несущие слова. Когда он вырос, отец привез его в школу писцов [20]). Словно дуновением ветра, теперь его снова охватывает волнение, овладевшее им по дороге в школу, когда озабоченный отец сказал: «Вложи, сын мой, всю душу в учебу, люби ее, как собственную мать, ибо ничего нет превыше науки. С ее помощью тебе будет жить легче, чем мне» [21]).

Он не забыл этих слов. Из них, словно гимн, возникало предчувствие, что вскоре он постигнет смысл знаков на стенах храма, преследовавших его и во сне.

«Прилежный писец, — слышит он шепот далекого голоса, — многого достигнет. Но, чтобы стать счастливым, он должен держаться за свое дело; если же он не любит своей работы, счастье его покинет» [22]). Когда он окончил школу писцов и сдал экзамен, учитель

написал на всех решенных им задачах: «Ты вычислил правильно» [23]). Он очень любил решать задачи и легко запоминал их... С тех пор он не выпускал из своих рук орудия письма...

Илидури прервал его грезы и сказал:

— Так как ты не согласен со мной, хочу объяснить тебе, почему я воспользовался сравнением со сказкой без конца. Размышляя о том, каким образом можно было бы точно измерить длину окружности, я сказал себе, что прежде чем измерять окружность, хорошо было бы ее распрямить. Тогда я задал себе вопрос, можно ли произвести такое распрямление. Если да, то это значит, что окружность образовалась путем сгибания прямой линии без каких-либо изменений ее природы. Ну, а если при сгибании происходят изменения в самой природе прямой линии, подобно тому как время, сгибая человека, вызывает изменения не только в его облике, но и в его душе? Об этом вопросе я вспомнил теперь, когда по твоим глазам я понял, что ты блуждаешь по тропинкам прошлого. Я наблюдал, как легко ты оторвался от настоящего и перенесся на крутые тропы своей юности. Но все же, блуждая в воспоминаниях, ты не вернулся к юности. Юноша как бы шел впереди тебя, а ты следовал за ним. Глядя на вас обоих, я позволил себе прервать твои мечты, чтобы ты не успел заметить, как сгибается спина бегущего впереди.

Имхотеп удивленно посмотрел на друга и ответил:

— Острый ум может разглядеть правду, в какой бы форме она ни проявляла себя. Поэтому я не считаю себя вправе противоречить тебе. Думаешь, что, может быть, и не существует общей меры для длины окружности и ее диаметра? Что по этой причине никто никогда не сможет найти способ вычисления площади круга с такой же точностью, как мы вычисляем сегодня площадь квадрата?

— Если для прямой линии и для искривленной линии круга нельзя найти одну и ту же единицу измерения, я не вижу возможности...

— Не знаю, — тихо произнес Имхотеп. — Я только спрашиваю себя, почему не может быть общей единицы измерения для одной и другой длины. Я допускаю, что она нам неизвестна, но уверен, что люди не прекратят ее поиски.

— Конечно, — поддержал его Илидури. — Я и не утверждал, что человек не будет ее искать. Скажу больше: ученые будут упорствовать в своих поисках. Может быть они, прежде чем искать общую меру, будут стараться установить, может ли она вообще существовать!

— Быть может! Когда ты убежден, что должен быть способ для выражения площади круга с такой же точностью, как для квадрата, почему не искать его? Но я не сомневаюсь, что все же когда-нибудь будет найдена эта общая единица...

— Возможно, — согласился Илидури и неопределенно улыбнулся. — Может быть, тем или иным путем эта задача будет решена, скажем, через тысячу лет. Как ты думаешь, — пошутил он, — хватит тысячи лет или возьмем больше?

— Тысяча лет? — вздрогнул Имхотеп. — Тысяча лет для того, чтобы найти сторону квадрата точно такой же площади, как площадь круга?! Мне думается, это чересчур много!

Подметив, как серьезно взвешивал его друг эту меру времени, какое упрямое сомнение звучало в его голосе, Илидури громко засмеялся и нежно обнял его, как старший брат обнимает младшего.

Тысячелетие спустя

Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное* (NB)... — от истины, а подходит к ней... все научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*.

В. И. Ленин

Почему же ошибся Имхотеп, оспаривая тысячелетний срок, который положил его друг для ответа на обсуждавшийся ими вопрос?

Почему будущее оправдало предположения Илидури? Ведь, как мы знаем, задача, известная сегодня под именем квадратуры круга, не была решена не только через тысячу лет, но и в последующие два тысячелетия.

Причины этого можно понять, если проследить за развитием математики.

Давайте выясним, в каком состоянии находилась математика во времена Илидури и Имхотепа. Мы присутствовали при их разговоре о математическом открытии. Они обсуждали его так же, как и сегодняшние ученые, с той лишь разницей, что современные математики не делают тайны из своих открытий. Они спешат опубликовать в специальных журналах найденные результаты, которые, таким образом, становятся известными всем математикам мира, занимающимся данными проблемами. Илидури же и Имхотеп, как и все ученые того времени, хранили глубокое молчание не только по поводу применявшегося ими метода определения π, но и вообще по поводу всех процессов, посредством которых они устанавливали математические формулы, оставляя последующим поколениям впечатление, что эти формулы были найдены исключительно эмпирическим путем.

Судя по данным, полученным после расшифровки таблиц и валиков, обнаруженных в междуречье Тигра и Евфрата, а также папирусов, открытых в египетских пирамидах и храмах, математика в школах Древнего

Востока носила эмпирический и утилитарный характер. Несомненно, что расцвет экономической и общественной жизни в эпоху Среднего царства и позднее способствовал непрерывному развитию математических знаний. Однако они не поднялись выше уровня, оцениваемого ныне как элементарный. Ими пользовались для решения задач, важных для жизни общества того времени: для измерения полей, составления планов зданий и ирригационных систем, вычисления объемов пирамид и куч камня, определения емкостей сосудов для масла, пива и других жидкостей и т. п.

Такие задачи можно найти и в наших школьных учебниках, но тогда форма их изложения была совсем иной. Так, например, нынешний ученик рассматривает две задачи, требующие вычисления площади одной круглой площадки радиусом 30 *м* и другой радиусом 2 *м*, как случаи применения одной и той же формулы $S = \pi r^2$. Решая их, он подставит вместо r первый раз 30, а второй раз 2 и произведет вычисления по указанной формуле. Для египетского же писца эти две задачи были почти целиком независимы друг от друга, и для каждой он, по данным задачи, должен был решать, каким способом пользоваться. Иначе говоря, он производил вычисления не по общей формуле $S = \pi r^2$ (ему неизвестной), а по типовому числовому примеру. Математика в египетской или вавилонской школе преподавалась ученикам в виде рецептов, которые они должны были научиться применять. Все объяснение заключалось в типичном предложении: «Делается так».

Можно возразить, что и сегодня имеются технические справочники, содержащие математические формулы без всякого доказательства. Но это вовсе не означает, что и в настоящее время математика имеет эмпирический характер. Ведь такие справочники — только пособия для инженеров и техников. В них собраны результаты, выведенные с помощью логических доказательств. Эти доказательства являются предметом изучения в средней и высшей школе, и их можно найти в соответствующих книгах по данной области математики.

Не так обстояло дело в те отдаленные века. Тогда наука была достоянием «избранных». Математика была «тайной» наукой, передаваемой шепотом прямо из уст в уста. Нигде письменно не излагались принципы, на

которых основывались полученные результаты. Можно только догадываться, что страстные математики, вроде Имхотепа и Илидури, решали определенные теоретические проблемы, на основании которых они выводили известные «практические» формулы. Но эти математические истины оставались скрытыми, о них знали только в небольшом круге посвященных, и со временем они были утеряны. То обстоятельство, что математические открытия не получали огласки, отрицательно сказывалось на развитии науки.

Надо также сказать, что, как бы остроумны ни были эти открытия, характер задач, которые могли решать математики того времени, определялся не только практическими потребностями, но и достигнутым уровнем знаний. Ибо математическая задача не появляется внезапно, у нее есть своя история, она основывается на определенном багаже знаний, предварительно накопленном. Этим и объясняется, почему в течение тысячи лет, предвиденных Илидури, не последовало никаких новых открытий, касающихся числа π. Накопленные знания ждали, пока другие мыслители, другой эпохи, с другими накопленными научными взглядами воспримут их, чтобы сделать основой для новых открытий.

Между VIII и VI вв. до н. э. возникли условия, благоприятствующие развитию эллинской культуры. Благодаря торговым связям со странами Древнего Востока, среди которых Египет оставался одним из самых развитых в экономическом и культурном отношении государств, греческие и особенно ионийские города переживают значительный подъем общественной жизни. По преданию, в VI в до н. э. философ Фалес из Милета [24]), самого процветавшего тогда города на Ионийском побережье, привлеченный молвой о мудрости и высокой культуре египтян, предпринял длительное путешествие в Египет. Там он познакомился с основами геометрии и принес их в Элладу. Однако нет никаких надежных сведений, на основе которых можно было бы уточнить, каким путем египетские математические знания стали достоянием первых греческих мыслителей, положивших своими работами начало новой эпохе в истории математики. Сегодня уже нельзя установить, что послужило мостом между эмпирическими знаниями, оставшимися от народов Древнего Востока, и той стройной, систематической, гармонической нау-

кой, которая была создана древними греками. Из существующих документов нельзя заключить, в какой мере математики Древнего Востока пользовались абстрактными понятиями *числа* и *геометрической фигуры*. Мы находим у них только задачи, в которых говорится о «пяти судах», о «пяти кружках пива», о «пяти мешках пшеницы», о «пяти людях», но нет ни одной задачи, в которой шла бы речь об абстрактном числе 5. Нигде не встречаются и характерные для греческих математиков методы, основанные на абстракции, обобщении, анализе и синтезе. Весьма возможно, что у математиков Древнего Востока имелось туманное представление о числе как таковом, но они не применяли этого представления, а если и интересовались им, то, наверное, только в мистическом плане. Так же обстоит дело и в отношении фигур: для египетских геометров рисунок многоугольника имел такое же значение, как то, что мы сегодня называем *планом* участка или сооружения. Он изображал именно то поле, ту сторону пирамиды, ту основу обелиска, о которых шла речь в задаче, с соответствующими конкретными размерами. Ни у египтян, ни у вавилонян не встречается в явном виде абстрактное понятие прямоугольника, которое греки абстрагировали из множества плоских фигур, ограниченных прямыми линиями, постулировав его в качестве «чистой формы» [25]).

Некоторые историки науки назвали начало греческой математики «эпохой греческого чуда». Это выражение означает не только то, что в силу отсутствия необходимых исторических источников нельзя установить, когда и как были введены абстрактные понятия числа и фигуры. Это выражение прежде всего подчеркивает качественный скачок, отделивший разрозненные знания, воспринятые греками из науки Древнего Востока, от той гармонической, целостной науки, которую они оставили нам в наследство.

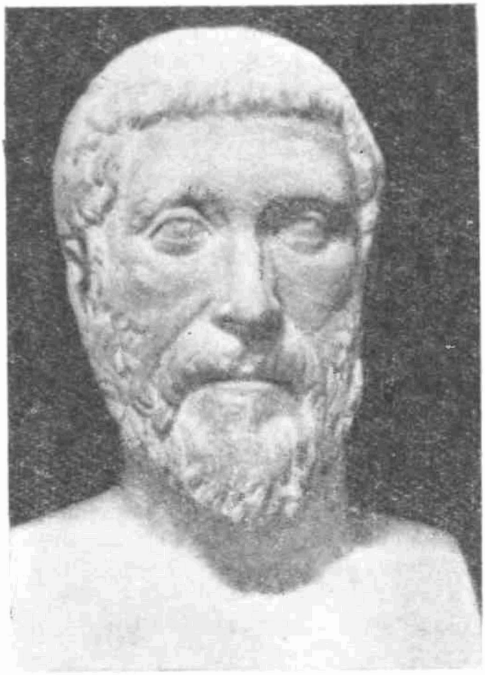
Новое в методе математического исследования природы в древнегреческой науке — методе исследования путем абстракции — состояло прежде всего в отказе от ориентировки на изучение форм и пространственных отношений отдельных конкретных тел; произошло отделение (абстрагирование) от всех свойств конкретных тел [26]); последние стали рассматриваться только под углом зрения их прост-

ранственной формы[27]). Благодаря этому выделению формы — как общего свойства всех тел — греческая геометрия достигает небывалого до тех пор уровня обобщения. Это позволяет постепенно находить применения математических истин в любых областях научного исследования или практики, ибо длина окружности всегда равна $2\pi r$, идет ли речь об ограде спортивного поля, о крае монеты или о траектории движения электрона вокруг ядра (рассматриваемой в самом первом приближении). Надо хорошо понять этот процесс абстракции (абстрагирования, отвлечения), так как он означает применение в геометрии метода изучения, полностью отличного от всего, что знала математика до этого. Ведь с «чистыми формами» нельзя производить никаких опытов. Единственным средством исследования здесь является рассуждение — логический вывод, дедукция; только этим путем возможно с очевидностью убедиться в тех свойствах и отношениях, которые характеризуют ту или иную форму или связывают между собой какие-либо из них.

Этим методом нелегко пользоваться. Его применение сопряжено с определенным риском, и читатели сами убедятся в этом, видя, какую путаницу порождал иногда процесс абстракции у греческих геометров. Так, например, допуская, что у точки нет измерения, некоторые из них рассматривали линию как *непрерывность*, относительно которой нельзя мыслить, что она состоит из конечного или бесконечного количества точек. Много головоломок, огорчений, ссор вызывала эта задача у греческих мыслителей с их сильно выраженной склонностью к философским размышлениям.

Непосредственно и систематически наблюдая природу, многие древнегреческие мыслители пришли к материалистическому взгляду на мир. Они учили о бесконечности материи во времени и пространстве. Но они испытывали затруднение в объяснении природы математической абстракции (и связанной с этой абстракцией строгости математического рассуждения). Некоторые из эллинских мыслителей — речь идет прежде всего о представителях идеалистического направления в философии — неправомерно отрывали абстрактные понятия математики от их материальных основ. Так, например, в философской и математической школе пифагорейцев усиленно занимались мисти-

ческой теорией чисел. В элейской школе были сформулированы знаменитые парадоксы Зенона — как предполагают некоторые историки науки, для доказательства невозможности движения, — а позже среди философов-софистов (IV в. до н. э.) мы находим попытки



Пифагор.

обоснования непознаваемости и даже несуществования объективного мира [28]).

Начавшаяся тогда (и продолжавшаяся на протяжении последующих веков) философская борьба отражена в литературных произведениях того периода. Так, главный герой известной комедии Аристофана «Облака» — олицетворение философа-идеалиста Сократа. Эта комедия великого древнегреческого драматурга отражает борьбу между представлениями противоположных взглядов на мир, воспитание и мораль. Аристофан высмеивает софистов, уподобляя облакам их

формальные ухищрения в аргументации. А их риторические приемы он называет болтовней, брехней и «наиловчайшим шарлатанством» [29]).

Древнегреческие ученые не могли довольствоваться геометрическими рецептами, унаследованными от народов Древнего Востока, и не могли принять их «делается так» с покорностью египетского писца. Они ставили естественный вопрос: «Почему делается так?» Ответ дан в их монументальном математическом творчестве. Это плод труда целых поколений математиков, относящихся к разным философским школам, разбросанным по различным греческим городам: Милету и Таренту, Афинам и Кизику, Абдере и Хиосу, Клазоменам и Элее, Родосу и Мегаре, Самосу и Эфесу, Гераклее и Книду. Сам Аристотель [30]), которого К. Маркс оценивал как вершину древней философии, хотя не был собственно математиком, был близко знаком со всеми математическими проблемами своего времени и с большой тонкостью использовал их в своих трудах и лекциях. Среди самых известных его учеников — Евдем Родосский [31]), автор работы по истории математики, благодаря которой стала возможной частичная реконструкция начала греческой математики. Эта ценная работа не сохранилась полностью, но уцелевшие ее страницы доставляют много ценных — порой неожиданных — сведений об исследовании числа π.

В саду Аполлона Ликейского

Каждый математик знает, что доказательство нельзя доподлинно понять, если ограничиваться только проверкой правильности содержащихся в нем суждений, без того, чтобы освоить те мысли, в силу которых предпочли данную цепь выводов, а не какую-либо другую.

Николай Бурбаки

Это было утром в начале июня 325 г. до н. э. Ахроматический урок [32]) кончился, но слушатели продолжали прогуливаться по платановым аллеям прохладной рощи Аполлона Ликейского. Они горячо спорили. Аристотель в сопровождении трех близких учеников направился домой. Его маленькие глаза смотрели вдаль. Как колыхавшиеся на мачте лоскуты разорванного паруса, продолжали биться в его уме доводы, приведенные во время урока. Всегда после занятий медленно расползались нити невидимой ткани, которой ему удавалось удержать внимание слушателей, сосредоточивая все их мысли на выдвигаемых проблемах. Перед аудиторией он становился совсем другим: идеи, над которыми он до выступления долго размышлял, упорядочивались, принимали новую, более яркую и доступную форму. Изложение менялось на месте либо дополняясь ранее непредвиденными аргументами, либо избавляясь от оказавшихся лишними. Аристотель так глубоко входил в логику задачи, что, казалось, проникал в мозг своих учеников, предупреждая и устраняя всякое недопонимание, мешавшее им следить за развитием вопроса. Поэтому, когда урок кончался и связь с учениками прерывалась, Аристотель еще оставался во власти витающих в его голове мыслей.

Но когда он, улыбаясь, взглянул на провожающих, а его рука стала разглаживать складки одежды, ученики поняли, что внутреннее напряжение окончилось, и они могут говорить. Первым взял слово Теофраст [33]), которого Аристотель выделял среди всех учеников

не только из-за его обширных знаний и глубины ума, но и из-за той тщательности, с которой он выбирал слова для выражения своих идей.

Теофраст. Только что, когда ты говорил о проблеме необходимости определить принципы в области физики, ты пришел к выводу, что с точки зрения философской само существование принципов не относится к физике. Против этого у меня нет возражений. Но почему, когда ты разбирал основной принцип движения, ты не упустил повода выступить против элеатов, а для того, чтобы стрела ударила еще более метко, не пощадил и бедных квадратуристов[34])? Объясни, почему? Смотри, как страстно они продолжают спорить о квадратуре круга, словно все афинские дела зависят только от нее.

Аристотель. Тебя тоже удивляет мое утверждение, что квадратура Антифона не является геометрической, что геометрам не следует тратить так много сил на борьбу с ней? Не это ли заставляет тебя спрашивать, почему я дразнил софистов?

Аристоксен. Как ты можешь предположить, что Теофраст способен даже думать о таком слове, как «дразнить»? Может быть, Тиртам или Евфраст допустили бы такое, но Теофраст? Его новое имя заставило его забыть много вульгарных слов!

Теофраст. Ты с такой страстью собираешь старинные песни, Аристоксен, что я склонен отнести тебя к соловьям, а не к осам!

Аристоксен. К соловьям? Что ты? С каких пор историю музыки путают с песней? Правда, я люблю играть, но моя лира более мелодично звучит в твоих руках, Теофраст!

Теофраст. Я далек от такой славы, Аристоксен. Кто лучше тебя чувствует прелесть старинной песни или превосходит тебя в мастерстве исполнять ее?

Аристоксен. Вижу, ты целиком оправдываешь свое имя, Теофраст. Ты тронул струну, которая начала звенеть. Я боготворю музыку и считаю ее единственным благом...

Аристотель. Единственным благом? Так слушайте, что случилось однажды, когда я посещал занятия моего учителя Платона. На одном из уроков он сказал, что будет говорить о благах. Слушателей тогда собралось более обычного, каждый надеялся узнать

новый способ приобретения желаемого блага, в первую очередь богатства. А Платон говорил о числах, геометрии и астрономии и заключил, что накопление знаний — это единственное благо. Парадокс сбил с толку многих,

Платон и Аристотель. Деталь картины Рафаэля «Афинская школа».

считавших, что над ними издеваются, и они поспешили уйти [35]).

Аристоксен. Я очень хорошо понимаю Платона, только на его месте я говорил бы не о числах, геометрии или астрономии, а о музыке.

Аристотель. В таком случае ты, может быть, добился бы большего успеха, чем Платон, особенно если бы ты заменил рассуждения мелодиями. Очаро-

ванные ими, слушатели согласились бы и с остальным. Но вернемся к задаче о квадратуре круга. Мне кажется, у Евдема тоже есть что сказать. Я же видел, как во время урока в его глазах сверкали молнии. Опять появились противоречия между нами, Евдем?

Евдем. Я не мог бы утверждать, что это так, но хотелось бы поговорить с тобой.

Аристотель. Знаю и жду этого. Если хочешь, пойдем сейчас со мной. Я прочел уже написанную часть твоей истории арифметики и хотел бы задать несколько вопросов. Но, как мне кажется, тебя теперь занимают другие проблемы.

Евдем. Это верно. Я хотел бы поговорить с тобой о задаче квадратуры круга, против которой ты выступал сегодня.

Теофраст. Почему эта задача вызывает такой интерес и пользуется такой популярностью? Как только произносится ее название, все начинают волноваться и готовы участвовать в споре, даже если мало разбираются в сути вопроса.

Аристоксен. Такой же популярной была она, очевидно, и около ста лет назад, иначе Аристофан не вынес бы ее на сцену! Будто вижу, как Метон, пришедший в птичий город, тащит за собой циркуль и громадные линейки, которыми он начинает орудовать, чтобы заставить круг стать квадратом [36]).

Евдем. Бедняга Метон, как смеялись, наверное, над ним тогда! А если хорошенько подумать — без оснований! Благодаря ему мы имеем сегодня календарь, который точно учитывает путь Солнца...

Аристоксен. Это верно, над ним смеялись напрасно, но не зря подняли на смех квадратуристов. Комедии Аристофана так же злободневны сегодня, как и 90 лет назад. Я очень люблю его произведения, хотя наш учитель не очень высоко ценит их.

Аристотель. Все вы судите об Аристофане под явным влиянием Дикеарха [37]). С тех пор как Дикеарх изучает его творчество, вы видите только глазами и говорите только устами Аристофана! Особенно ты, Аристоксен, самый близкий друг Дикеарха! Я не отрицаю таланта Аристофана, но...

Они остановились у дома Аристотеля, где он попрощался с Теофрастом и Аристоксеном. Перед тем как войти в дом, Аристотель сказал им:

— Я отложил для вас еще несколько документов и прошу зайти за ними после обеда. Я их получил с последней посылкой моего бедного и дорогого Каллисфена [38]). А ты, Евдем, зайди сейчас.

Евдему была хорошо знакома рабочая комната учителя. Роскошная, свидетельствующая о хорошем вкусе мебель, богатство рукописных коллекций, аккуратно уложенных в алфавитном порядке по придуманной самим Аристотелем системе [39]), цветы, украшающие дорогие вазы, — все это доставляло ему такую чистую радость, что он наслаждался, как ребенок, без тени зависти. Он уже погрузился в чтение рукописи, когда раздался голос учителя.

А р и с т о т е л ь. Ты хочешь поговорить со мной о квадратуре круга, Евдем?

Е в д е м. Да. Я собрал и восстановил некоторые результаты. Хотелось бы поговорить о них до того, как я придам им окончательный вид для включения в историю геометрии. Я бы еще ждал, если бы не твои сегодняшние утверждения.

А р и с т о т е л ь. Я готов выяснить с тобой этот вопрос и охотно буду слушать тебя.

Е в д е м. Как мне удалось установить, пифагорейцы не занимались вопросом квадратуры круга; впервые его, кажется, поставили софисты.

А р и с т о т е л ь. Я тоже так думаю, поскольку именно они сформулировали и две другие, неразрешимые с помощью циркуля и линейки задачи: удвоение куба и трисекцию угла.

Е в д е м. Говорят, будто бы Анаксагор из Клазомен добился некоторых результатов, когда сидел в тюрьме. Однако я не мог найти ни одной копии его работы. Я искал и здесь, посылал и в Лампсак... все безуспешно. Прошло только сто лет, как она была написана, и никто больше не может дать каких-нибудь сведений о ней. Я безутешен от этой потери. Мне очень бы хотелось узнать, как он вычислил площадь круга, ведь это был такой глубокий мыслитель!

А р и с т о т е л ь. Где же и когда была потеряна эта работа? В тюрьме, где он сочинил ее, или когда его выпустили оттуда и выслали? Может быть, он сам ее уничтожил, чтобы она не напоминала ему о тех временах, когда была для него бальзамом и забвением.

Евдем. И это не исключено для человека, которого обвиняют в том, что было целью его жизни [40])! Но поскольку мне неизвестен способ Анаксагора, остается уточнить другие три метода, при помощи которых делались попытки вычислить сторону квадрата с площадью, равной площади круга.

Аристотель. Три?! Откуда три? Один — Гиппократа Хиосского; второй, я подозреваю, тот, из-за которого тебе так срочно понадобилось говорить со мной. Сдается мне, что ты тоже намереваешься привязать к крыльям геометрии свинцовые гири Антифона. И, если не ошибаюсь, Теофраст тоже недоволен тем, что я говорил об Антифоне. Но о третьем способе я до сих пор не слыхал. Ты его придумал или недавно узнал о нем?

Евдем. Тебе и неоткуда знать о нем! Мне вчера поведал об этом друг, приехавший из Книда. Новый метод найден его братом Динострагом. Его решение прекрасно, а кривую, которой пользуется, он назвал *квадратрисой*. Правда, ее нельзя построить циркулем и линейкой, поскольку она не отличается от кривой, при помощи которой Гиппий Элидский [41]) решил задачу трисекции угла [42]). Но начнем с Гиппократа. На сегодняшнем уроке ты назвал софизмом решение квадратуры круга посредством луночек [43]), но в то же время допустил, что его метод — геометрический.

Аристотель. Потому что Гиппократ — толковый геометр [44]).

Евдем. Насколько я помню, ты однажды сказал, что Гиппократ знал толк только в геометрии, а в других делах был совершенно беспомощен.

Аристотель. Это правда. Он когда-то занимался торговлей и во время одного плавания потерпел большой убыток от таможенников города Византия [45]).

Евдем. Если этот убыток заставил его изучать геометрию, то его слава геометра компенсирует и даже превышает выгоду, которую он получил бы, если бы таможенники были менее жадными. Достаточно упомянуть его «Начала» геометрии, красивое решение задачи об удвоении куба [46]) и особенно луночки! Он первый их заметил, а в отношении их квадратуры установил результаты, которые мы будем сейчас обсуждать.

Аристотель. Да, я признаю, что Гиппократ был хорошим геометром, несмотря на то что геометры

выступили против доказательства квадратуры круга при помощи площади луночки, и, по моему мнению, они выступили правильно [47]).

Евдем. Я другого мнения, потому что Гиппократ не претендовал на решение задачи квадратуры круга. Правда, он стремился к этому, но когда убедился, что не сумеет справиться с такой задачей, довольствовался утверждением, что только у определенных луночек площадь равновелика площади заданных квадратов [48]).

Аристотель. Луночки — действительно замечательные фигуры с точки зрения их связи с кругом. Но почему ты говоришь об определенных луночках? Насколько я знаю, некоторые геометры утверждают, будто бы Гиппократ уверял, что при помощи квадратов могут быть измерены любые луночки!

Евдем. Здесь начинается недоразумение. Геометры, говорившие так, неумело обобщили результаты Гиппократа; это и позволило им потом утверждать, что он якобы установил геометрическим путем площадь любой луночки. Но их обобщения не соответствуют взглядам Гиппократа. Поэтому я считаю его объяснения верными, и, если хочешь, разберем их теперь.

В качестве первого предложения, служащего поставленной цели, он берет утверждение, что подобные сегменты круга относятся, как квадраты их оснований [49]). Затем он показывает, как построить луночку с внешней дугой, равной полуокружности. Гиппократ вписывает в полукруг равнобедренный прямоугольный треугольник $AB\Gamma$ (рис. 4), а на его основании AB строит сегмент, равновеликий двум сегментам, отсекаемым сторонами, т. е. с площадью, равной сумме сегментов $A\Gamma$ и ΓB.

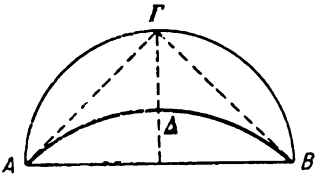


Рис. 4.

Если к последним двум сегментам добавить часть треугольника, расположенную над основным сегментом, т. е. $A\Gamma B\Delta$, то мы получим площадь луночки, равную площади треугольника $AB\Gamma$ [50]). А так как луночка равновелика треугольнику, ее можно сделать равновеликой и квадрату.

Аристотель. Следовательно, ясно, что Гиппократ строит квадратуру такой луночки, у которой

верхний край — полуокружность, а нижний соответствует условию, по которому площадь луночки $АГВ\Delta$ равна площади прямоугольного треугольника $АГВ$.

Евдем. Гиппократ рассматривает и случай луночки с внешним краем, бо́льшим полуокружности. Он строит трапецию $АВ\Delta\Gamma$ (рис. 5), у которой три стороны равны между собой, а квадрат четвертой стороны $В\Delta$ равен квадрату одной из равных сторон, умноженному на 3, т. е. $В\Delta^2 = 3АВ^2$. Затем около трапеции он описывает круг и на $В\Delta$ строит круговой сегмент с площадью, равной сумме площадей сегментов, отсекаемых тремя равными сторонами $АВ$, $\Gamma\Delta$ и $ГА$.

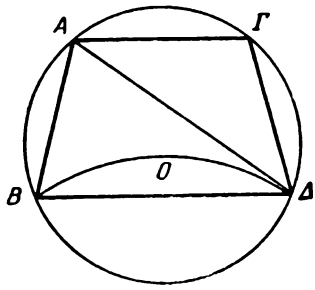


Рис. 5.

Таким образом, и площадь луночки $АГ\Delta ОВ$ равна площади трапеции $АГ\Delta В$, так как, удаляя из сегмента $ВАГ\Delta$ три сегмента, отсекаемых равными сторонами, мы получаем трапецию, а удаляя из той же фигуры $ВАГ\Delta$ сегмент построенный на $В\Delta$, который равен сумме остальных трех сегментов, мы получаем луночку.

Аристотель. Если не ошибаюсь, он еще утверждал, что можно даже сложить круг и луночку и получить линейную фигуру [51])?

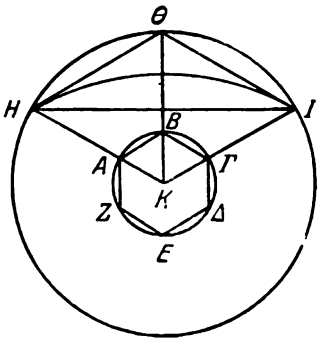


Рис. 6.

Евдем. Но только в одном случае. Вот в каком: возьмем два концентрических круга; пусть квадрат диаметра внешнего круга в 6 раз больше квадрата диаметра внутреннего круга (рис. 6). Если во внутренний круг мы впишем правильный шестиугольник $АВГ\Delta EZ$ и продолжим радиусы $КА$, $КВ$, $К\Gamma$ до внешнего круга[52]), то сумма площади луночки $Н\theta I$ и площади внутреннего круга будет равна сумме площадей равнобедренного треугольника $Н\theta I$ и шестиугольника $АВГ\Delta EZ$, вписанного в круг.

А р и с т о т е л ь. Изложенные тобой доказательства действительно геометрические, но в то же время обманчивые! Устанавливает ли Гиппократ при помощи геометрического построения величину стороны квадрата с площадью, равной площади заданной луночки? Нет. Гиппократ сводит задачу квадратуры луночек к другой аналогичной, но нерешенной задаче. А именно: для того чтобы показать, что площадь треугольника равна площади луночки, он прибавляет к каждой из них общую им площадь $АГВ\Delta$, т. е. площадь верхней части треугольника $АГВ$ (см. рис. 4). Но он не показывает, как построить или как вычислить эту площадь, которую он отнимает у одной части и прибавляет к другой.

Е в д е м. Это, конечно, так, но он все же устанавливает нечто существенное и удивительное: что могут быть фигуры, образованные двумя дугами неодинаковой длины, площади которых равны площадям прямолинейных фигур. Эти доказательства принесли мне большую радость.

А р и с т о т е л ь. Я это почувствовал по теплоте и ясности, с которой ты их излагал. Они мне тоже понравились. Но я не вижу, как можно примирить твое восхищение Гиппократом с восторгом по отношению к Антифону. Ведь в каком бы свете ты ни представлял его метод, он остается негеометрическим. Суждения Антифона эвристические, его предпосылки ложны, его силлогизмы неправильны [53]).

Е в д е м. И все же меня восхитил метод не только Антифона, но и Брисона! Я думаю, что геометры будущего могут счесть необходимым и з м е н и т ь н а ш и п р и н ц и п ы [54]), с тем чтобы методы, применяемые Антифоном и Брисоном, смогли стать достоянием геометрии.

А р и с т о т е л ь. Не могу возразить против этого довода, поскольку он касается будущего. Только напоминаю тебе изречение, что все необходимое — тягостно!

Е в д е м. Не всегда, а только когда принуждающая сила мешает нам или удерживает от чего-то желанного. Но в данном случае я уверен, что необходимость проявится как сила, столь же нужная для развития, как, скажем, дыхание для человека [55]).

А р и с т о т е л ь. Если в доказательствах Антифона доводы являются такими же неотразимыми,

объявляю себя убежденным даже без того, чтобы их слушать.

Евдем. Нет, нет. Я уверен, что ты не дашь убедить себя, но все же прошу послушать. Антифон пытается приблизиться к кругу, удваивая количество сторон вписанного в него многоугольника. Так, после вписания в круг квадрата (рис. 7) он делит его стороны на две равные части и восставляет перпендикуляры, делящие пополам соответствующие дуги. Хорды полученных новых дуг образуют вписанный в круг восьмиугольник. До сих пор Антифон, очевидно, соблюдает принципы?

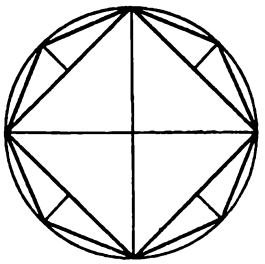


Рис. 7.

Аристотель. Да, и даже дальше, когда, следуя тому же способу, он вписывает в круг многоугольник с 16, 32 или с любым числом сторон, полученным удвоением предыдущего.

Евдем. Антифон утверждает, что когда число сторон полученного таким образом многоугольника достаточно велико, они — эти стороны — достаточно малы, чтобы площадь сегментов, заключенных между окружностью и каждой из сторон вписанного многоугольника, исчезла...

Аристотель. Бесподобно! Дальше уже все ясно! Так как любой многоугольник может стать квадратом, вот и круг Антифона, рассматриваемый сначала как многоугольник с очень большим числом сторон, превратился в самый подлинный квадрат! Если ты считаешь доказательство Антифона столь гениальным, то почему же не допускаешь вместе с Зеноном, что выпущенная стрела стоит на одном месте или что Ахилл не может догнать черепаху? Как объяснить, что Зенон не убедил тебя, а Антифон убедил? Есть люди, претендующие на то, что могут доказать квадратуру круга, используя числа, одновременно и квадратные, и циклические. Что ты об этом думаешь? Раз $5 \times 5 = 25$, а 25 кончается на 5, то не достаточно ли ясно доказано, что круг становится квадратом [50])?

Евдем. Напрасно сердишься, ибо ты не прав! Конечно, Антифон пользовался аргументацией софистов, это был и его собственный метод мышления. Но я ду-

маю, что его идея — приблизиться к кругу при помощи вписанных многоугольников — не только замечательна, но и естественна. Будущие геометры учтут ее, несмотря на то, что сегодня выводы Антифона подвергаются сомнению.

Аристотель. Что когда-то будет, не знаю, но сегодня не следует марать чистоту геометрического мышления, низводя его до мира чувств. Разве для тебя, Евдем, как и для Антифона, линия материальна и тождественна той линии, которую ты сейчас начертил на дощечке? Ибо как иначе понять, что линия состоит из точек? Если правда, что линия непрерывна, а точка неделима [57]), то, как бы мала ни была прямая, пересекающая круг, она пересечет его всегда в двух точках и не сольется никогда с точкой на круге, потому что невозможно, чтобы непрерывное состояло из неделимых.

Евдем. Это так, но все-таки мне кажется, что наши положения о точке и линии искусственны и отходят от действительности, из рассмотрения которой они когда-то возникли. В идее Антифона я усматриваю как раз стремление вернуться к первоначальному источнику. Между прочим, его метод согласуется и с принципом, который Евдокс положил в основу своей теории пропорций.

Аристотель. Но теория Евдокса — совсем другое дело! Я тоже допускаю, что, если к конечной величине все время что-то прибавлять, я превзойду любую наперед заданную величину, а если все время отнимать, то смогу сделать ее меньше такой величины [58]). Но это относится к числам, а не к сегментам. Однако, как я замечаю, ты начинаешь забывать, что геометрия изучает в физической линии только то, что не является физическим [59]), и что ни в одной науке не требуется доказывать то, что выходит за рамки ее предмета. Разве для плотника и геометра прямая линия одно и то же? Первый видит в ней то, что полезно для его работы, другой ищет ее суть и ее свойства [60]). Поэтому, как я уже сказал, я считаю метод Антифона негеометрическим. Что же касается Брисона ...

Евдем. Брисон из Гераклеи исходит из очевидного факта, что площадь круга содержится между площадями вписанного в него и описанного около него равносторонних треугольников (рис. 8) или между площадями вписанного и описанного квадратов (рис. 9).

Аристотель. Да, но отсюда не вытекает, что площадь треугольника или квадрата, равная среднему арифметическому площадей вписанных и описанных фигур, является на самом деле и площадью круга.

Евдем. Во-первых, неизвестно, шла ли речь об арифметическом или геометрическом среднем; а во-вторых, утверждал ли это сам Брисон или после него другие? Я склонен думать, что Брисон, как пифагореец, мог бы предположить, что отношение площади круга к площади упомянутых многоугольников того же характера, как отношение стороны квадрата к его диагонали...

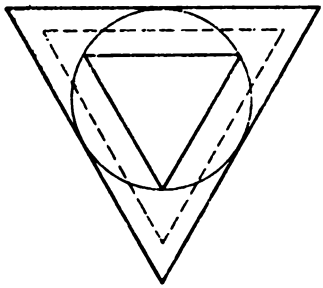


Рис. 8.

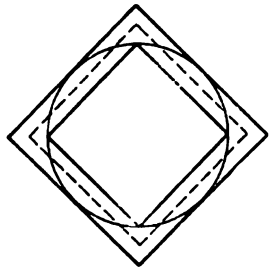


Рис. 9.

Аристотель. Для меня является достаточно странной твердость, с которой ты защищаешь Брисона. Ведь его построение — это просто паралогизм. Оно же ни на чем другом не основано, кроме голого утверждения!

Евдем. Я настаиваю на реальности подсказанной им возможности установить определенную связь между площадью круга, с одной стороны, и площадями вписанного в него и описанного около него многоугольников, с другой. Эта идея заключает в себе такую силу, которая, по-моему, в состоянии не только противостоять нашим геометрическим положениям, но и преодолеть их.

Аристотель. С такими защитниками, как ты, это не исключено! Теперь мне уже нетрудно предвидеть, каков тот метод, который тебе еще осталось изложить. Речь идет о кривой, представленной Гиппием Платону. Построить ее циркулем и линейкой нельзя [61]).

Евдем. Однако Гиппий придумал такое механическое приспособление, которым эту кривую можно начертить так же точно, как круг циркулем. Данная кривая своими свойствами заслуживает внимания геометров.

Я горячо поблагодарил Диностратa за то, что он назвал кривую *квадратрисой*, так как с ее помощью он действительно осуществил квадратуру круга.

А р и с т о т е л ь. Напомни мне, каков симптом этой кривой [62]).

Е в д е м. Рассмотрим квадрат $AB\Gamma\Delta$ (рис. 10). Когда прямая AB вращается равномерно вокруг точки A, точка B описывает дугу $B\Delta$. Предположим, что вместе с AB перемещается равномерно и параллельно самой себе и прямая $B\Gamma$ таким образом, что она накладывается на $A\Delta$ одновременно с AB. В определенный момент эти две прямые (AE и $B'\Gamma'$) пересекаются в точке, описывающей квадратрису. Ее главное свойство следующее: если из центра A провести прямую APE, то дуга BE относится к дуге $BE\Delta$, как отрезок $IP = BB'$ к отрезку BA. Следовательно, произвольная прямая, проведенная из центра A к точке E, делит и дугу $B\Delta$ и прямую BA в одном и том же отношении:

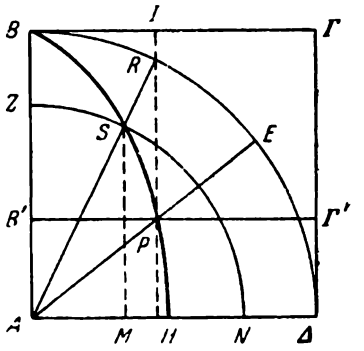


Рис. 10.

$$\frac{\overset{\smile}{BE}}{\overset{\smile}{B\Delta}} = \frac{IP}{BA}.$$

Обозначив буквой H точку пересечения этой кривой с прямой $A\Delta$, Динострат показывает, что AH относится к $A\Delta$ [63]), как $A\Delta$ к дуге $B\Delta$:

$$\frac{A\Delta}{\overset{\smile}{B\Delta}} = \frac{AH}{A\Delta}.$$

А р и с т о т е л ь. Значит, дуга четверти круга $B\Delta$ является третьей пропорциональной для отрезков AH и $A\Delta$?

Е в д е м. Да, так как $\overset{\smile}{B\Delta} = \frac{A\Delta^2}{AH}$. Если взять эту величину четыре раза, то получим длину окружности.

А р и с т о т е л ь. Дальше для меня уже все ясно! Зная длину окружности, можно легко построить задан-

ный квадрат, ибо площадь круга равна площади прямоугольника, основание которого равняется половине длины окружности, а его высота — половине диаметра.

Видишь, с каким вниманием я слушал тебя, дорогой Евдем. Позволь, однако, сказать тебе, что, по-моему, задача квадратуры круга не решена. Если и не во всем требуется математическая строгость, то она обязательна, когда речь идет о предметах, лишенных материи, а геометрия — один из них [64]). Ты говоришь о точке H, но где она? Не забудь, что, когда прямые AB и $B\Gamma$ совпадают с $A\Delta$, они уже не пересекаются в о д н о й т о ч к е, потому что они сливаются одна с другой [65]).

Е в д е м. Это правда, но прежде чем достичь такого положения, можно брать точку, расположенную сколь угодно близко к H.

А р и с т о т е л ь. Но тогда мы уже покидаем область геометрии и задача становится физической или механической.

Е в д е м. И все же я нахожу суждение Диностра та весьма ясным!

А р и с т о т е л ь. Ясным — да; но является ли оно строгим? Чем же иным занимается математика, если не порядком и мерой? И как можно говорить о мере, когда ты не знаешь точно, где один из концов отрезка, с которым имеешь дело?

Евдем молча смотрел на своего учителя, который во время разговора быстро шагал по комнате. Он очень любил его живую речь, страсть, с которой тот подчеркивал слова, даже звук его голоса, то повышающегося, то понижающегося, как волны моря, ударяющиеся о берег. Но он оставался верен своему мнению. Аристотель еще несколько раз прошелся по комнате из угла в угол, затем молча приблизился к вазе с цветами, выбрал розу, понюхал и, держа ее в ковшике ладоней, протянул Евдему.

А р и с т о т е л ь. Твои доказательства красивы, и, если бы я не рассматривал их с геометрической точки зрения, я бы тоже восхищался ими. Но как я мог поступить иначе? Разве ты не видишь, что ни один из методов, так упорно защищаемых тобой, не указывает, к а к у ю ф и г у р у н а д о п о с т р о и т ь п р и п о м о щ и т о л ь к о ц и р к у л я и л и н е й к и для того, чтобы найти отрезок, равный стороне квадрата такой же площади, как и площадь круга? Ты хочешь ввести

такие методы в геометрию, но для меня геометрия подобна этому свежему, только что раскрывшемуся цветку. Я смотрю на него, какой он есть, и радуюсь его форме, цвету и запаху! Совсем иначе поступил бы я с гроздью винограда. Она тоже восхитительна, но для того, чтобы пить вино, я ее раздавлю.

Евдем. Хорошо, но, когда мы должны изучить квадратуру круга, нельзя так поступать!

Аристотель. Должны? А почему должны? Мне думается, что мы свободны выбирать сами сюжеты геометрии так, чтобы наш ум наслаждался гармонией их логического построения, подобно тому как наши чувства наслаждаются розами из этой драгоценной вазы. Должен ли я вставлять в вазу собранные на обочине дороги колючки или разбить ее?

Евдем. Я не могу видеть в геометрии только ряд логически полученных прекрасных истин. Несмотря на то, что ее теоремы — украшение моей жизни. Геометрические истины не случайно возникли в головах людей — ведь источником понятий, на которых основываются эти истины, является реальность. Из этого реального извлекаются и принципы науки. Не становимся ли мы впоследствии их рабами? Но вокруг нас реальный мир. Он не дает нам забывать об этом! Богатырь Антей, сын Геи, черпал из Земли, своей матери, свежие силы каждый раз, когда прикасался к ней ногами. И я утверждаю: если какие-либо принципы становятся препятствием в исследовании, они рано или поздно будут отброшены и заменены другими.

Отказ от канона

Величайшие открытия в математике были связаны не с отказом от научной строгости, а с ломкой ее устаревших форм и приведением их в соответствие с требованиями жизни, с практикой.

С. А. Яновская

На чьей же стороне была правота в этом споре? Прав был не Аристотель, а Евдем. Слабость позиции «отца логики» состояла не столько в том, что Аристотель не соглашался считать окружность пределом, к которому стремится, при неограниченном увеличении числа сторон, вписанный в нее правильный многоугольник, сколько в том, что он безоговорочно и непреклонно настаивал на принципах, которые начинали уже сковывать развитие геометрии. Это были принципы противопоставления: теоретической науки и ее практических приложений, дедуктивного (выводного, «строго» логического) знания и опытного исследования, а также — в применении уже непосредственно к математике — идей непрерывности и дискретности (прерывности). Будучи «жестко» проведенными, эти принципы и обусловливали многие трудности, с которыми сталкивалась философско-математическая мысль греков. Так, Аристотель принимал свойство отрезка бесконечно делиться. «Для линии, — пишет он, — в отношении количества наименьшим числом являются две линии или одна, а в отношении величины наименьшего числа нет, так как всякая линия делима» [66]). Исходя из этого принципа, Аристотель не мог допустить, что линия состоит из точек, поскольку тогда он пришел бы к внутренне противоречивому суждению: линия (состоящая из точек) бесконечно делима, но точка — элемент линии — не может больше делиться. Противоречие же — формально-логическое противоречие — запрещалось *принципом противоречия*, им самим впервые и сформулированным [67]).

Аристотель высказал глубокие суждения о характере математики как науки. В «Физике», например, мы чи-

таем: «После того как нами определено, в скольких значениях употребляется слово «природа», следует рассмотреть, чем отличается математик от физика. Ибо природные тела имеют и поверхности, и объемы, и протяжение в длину, и точки, изучением которых занимается математика. Далее, является ли астрономия особой наукой или частью физики? Ведь если дело физика знать, что такое солнце и луна, а о том, что свойственно им самим по себе, знать не надо, то это бессмысленно, помимо прочего, и потому, что философы, учившие о природе, как известно, говорят также о фигуре луны и солнца и о том, шаровидны ли земля и космос. Этим всем занимается и математик, но не поскольку каждая из фигур есть граница физического тела; и их акциденции он рассматривает не с точки зрения этих тел как таковых. Поэтому он и производит абстракцию, ибо мысленно фигуры можно отделить от движения: это действие безразлично и отделение не представляет ошибки» [68]).

Однако эти — в сущности, совершенно правильные — мысли Аристотеля приводили к «ограничивающим» математику выводам, когда к ним присоединялось убеждение в незыблемости ее принципов. Если объекты математики суть продукты абстракции — «абстрактные объекты», как сказали бы мы сейчас, — «работать» с которыми следует по правилам логической дедукции, установленным Аристотелем, и если, как полагал Аристотель, ее принципы не в силах корректировать опыт (в том числе и опыт самой математики), то отсюда естественно получаются те «запреты», которые Аристотель накладывал на методы решения задачи «квадратуры круга», отстаивавшиеся Евдемом. При таком подходе все, что кажется парадоксальным, следует изгонять из математических исследований. Отсюда рекомендация Аристотеля не заниматься задачей квадратуры круга и другими подобными ей задачами, в которых появлялись несоизмеримые между собой отрезки.

Иную позицию занимали математики, подобные Евдему. Они понимали, что геометрия не может продвигаться вперед, если не развиваются сами принципы, на которых покоятся методы этой науки.

В «Началах» Евклида [69]) — труде, в котором в форме, вплоть до наших дней вызывающей восхищение ученых, собраны и систематизированы самые значи-

тельные математические познания, полученные до IV в. до н. э. включительно, — теорема, сформулированная Гиппократом, приведена в виде предложения 2 книги XII: «Круги относятся друг к другу, как квадраты их диаметров». Эта теорема доказана Евклидом с помощью

Евклид.

метода Антифона и принципа Евдокса [70]), причем не только для чисел, но и для отрезков прямой. Несколько лет спустя Архимед [71]) рассматривал окружность как предел вписанного в нее или описанного около нее правильного многоугольника, когда число сторон последнего неограниченно увеличивается, и взял на себя смелость приближенно вычислить таким путем площадь круга.

Почему мы говорим «взял на себя смелость»? С каким противником должен был «справиться» геометр Архимед — ученый, которого и по сей день считают одним из самых выдающихся математиков мира? Противником было тогдашнее общественное мнение, точнее, научная традиция.

Смерть Архимеда. Мозаика, вероятно, художника школы Рафаэля.

Так, Архимеду пришлось бороться против господствовавших в то время взглядов, предписывавших проводить резкую грань между теоретической математикой и математикой прикладной. Эти взгляды наложили свою печать на всю историю античной математики. Например, ни в одной книге Евклида нельзя найти вычисления площади какой-нибудь поверхности, потому что это относили к «геодезии», как называли тогда прикладную геометрию. Нельзя найти там и арифметических вычислений, составлявших, по тогдашним представлениям и терминологии, «логистику», а не арифметику — подлинную науку, предметом которой была

теория чисел. Архимед же не побоялся придать своим теоретическим исследованиям практическую ориентацию. Он показал, как практически определять площади и объемы тел. Кому не известен «принцип Архимеда», кто не слышал о его «винте» или о применении «параболических зеркал», с помощью которых он поджег вражеский флот, о физических задачах, решенных им с помощью вычислений, и о многих его геометрических теоремах?!

В работе по квадратуре круга Архимед обобщил все три метода, изложенные Евдемом Аристотелю, придав им при этом практический характер. Так, если Гиппократ пытался доказать, что площади определенных луночек квадрируемы, т. е. равновелики определенным квадратам [72]), то Архимед указывает также и способ практического вычисления сторон этих квадратов. Он показывает далее, что существуют фигуры, ограниченные кривыми линиями, отличными от круговых дуг, площадь которых также равна площади некоторого квадрата. Речь идет о сегменте параболы [73]), площадь которого он вычисляет [74]).

Для того чтобы вычислить площадь круга, Архимед применяет способ Антифона и Брисона, считая, что вписанный в круг и описанный около круга правильные 96-угольники с достаточно хорошим приближением определяют длину окружности. Вычисляя величины сторон этих многоугольников для окружностей различного диаметра, он устанавливает следующее значение отношения длины окружности к ее диаметру [75]):

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \text{ или } 3{,}140 < \pi < 3{,}142.$$

Вспомним принимавшееся египтянами значение числа π! С того времени и до работы Архимеда прошло не менее полутора тысячелетий, а найденный результат остался приближенным: 3,14 вместо 3,16! Говорят, что последнему великому геометру античности — Аполлонию — удалось точно определить первые четыре десятичных знака числа π, но достоверно об этом ничего не известно, так как много работ Аполлония [76]) было утеряно.

Архимед подчеркивает и значение разработанного Динострагом метода для построения квадратрисы круга. Он изучает свойства новой квадратрисы, открытой его

другом Кононом из Самоса. Ныне эта кривая носит название «спираль Архимеда» [77]) и приблизительно изображается дугами окружностей с 2, 3, 4 или 8 центрами. В действительности же спираль Архимеда не может быть образована дугами. Ее природа иная, чем природа круга, — это кривая, которую нельзя построить циркулем и линейкой, так же как нельзя построить таким образом квадратрису Диностратa. Пользуясь этой кривой, Архимед устанавливает существование отрезка прямой, совпадающего по длине со стороной квадрата, площадь которого равна площади заданного круга.

Надо иметь в виду, что найденный Архимедом отрезок нельзя построить при помощи циркуля и линейки. Все усилия более поздних квадратуристов будут сосредоточиваться вокруг этого требования: найти построение, выполняемое только циркулем и линейкой, при помощи которого можно было бы получить сторону квадрата с площадью, равной площади заданного круга. Метод Архимеда (так же как и метод Диностратa) хотя и позволяет точно определить величину упомянутого отрезка, не удовлетворяет, однако, условиям греческих математиков. Но он указывает, что, если бы не было ограничения пользоваться только циркулем и линейкой, квадратура круга была бы возможна. Этот и другие подобные факты побудили Мальбранша выразить свое восхищение свойствами некоторых кривых: «Линии могут дать воображению больше, нежели ум, потому что линии могут выражать отношения несоизмеримых величин, т. е. величин, отношения которых нельзя узнать, поскольку у них нет общей меры, при помощи которой можно было бы их сравнивать».

Работы Архимеда и Аполлония завершают эпоху великих открытий древнегреческой математики. Причины последовавшего затем упадка можно найти в экономических и политических переменах, произошедших в эллинистических государствах (при дворах их монархов находилось много знаменитых ученых и художников) после их подчинения Риму.

Завоевание Александрии римлянами привело к тому, что интерес к тонким математическим проблемам был совершенно утрачен. Правда, римляне применяли на практике математические открытия, но ничего нового в математике не создали [78]). В книге Витрувия — одной

из самых выдающихся научных работ римлян, написанной около начала нашей эры, — говорится, что «отношение длины окружности к ее диаметру равно 3». Автору, видимо, было легче изложить результаты, известные египтянам за два тысячелетия до него, чем то, что знал Архимед; а ведь последний жил всего за двести лет до Витрувия! До начала V в., когда Западная Римская империя оказалась окончательно завоеванной германскими и славянскими племенами, в Европе не было написано ни одной книги, в которой хотя бы упоминалось об открытиях Архимеда, касающихся числа π.

В новой культуре, возникшей в эпоху средних веков, постепенно начинает проявляться некоторый интерес к математическим вопросам. В VIII в. Карл Великий, сам до 40-летнего возраста не умевший ни читать, ни писать, — у него в палатке рядом с оружием висела дощечка, на которой он старательно выцарапывал буквы, — решил учредить школы при монастырях. Церковь, как известно, обладала в эту эпоху настоящей культурной монополией. Ф. Энгельс писал: «Средние века присоединили к теологии и превратили в ее подразделения все прочие формы идеологии: философию, политику, юриспруденцию» [79]).

Почти вся культурная деятельность была сосредоточена в монастырях. Помимо чисто религиозной литературы там переписывали и составляли летописи и даже художественные произведения; переписывались и работы древних авторов. Среди монахов, занимавшихся этим делом, попадались и люди широких взглядов, стремившиеся к знаниям, прогрессу. Они много делали для пробуждения интереса к научным вопросам. Этим они обычно навлекали на себя ненависть церковной верхушки, которая объявляла их еретиками, сжигала на кострах. Некоторые произведения тех времен неопровержимо свидетельствуют о трудностях, с которыми сталкивалось стремление восстановить математические истины, открытые греками. Во вновь созданных школах среди других предметов предусматривалось и преподавание евклидовой геометрии. На деле же все сводилось к формулировкам самых элементарных теорем планиметрии, ибо ни один из «математиков» даже IX, X и XI вв. не был в состоянии доказать хотя бы теорему о сумме углов треугольника: не знали, что такое внутренний или внешний угол треугольника [80]) и т. п.

Известный исследователь истории математики Поль Таннери, который обнаружил и опубликовал много писем ученых монахов [81]), пытавшихся выяснить значение употребляемых в евклидовой геометрии и передаваемых по традиции слов, писал: «Это не глава истории наук, а исследование по невежеству эпохи, предшествовавшей проникновению арабской математики на Запад». Все же можно отметить Герберта [82]), автора некоторых научных и философских работ, в частности книги по геометрии.

Что касается значения числа π, то в рукописях того времени утверждалось, что оно равняется $\frac{22}{7}$, но никто не знал, что это его приближенное значение, и не мог указать, каким образом оно было установлено.

Между прочим, и в Византии — центре эллинистической культуры после завоевания Александрии мусульманами, — где культурный уровень был выше, чем в Западной Европе, положение в области математики было не лучше. К концу XI в. крупнейший ученый того времени, автор известной работы по математике Михаил Пселл утверждал, что наилучший способ вычислить площадь круга — это считать ее равной среднему геометрическому площадей вписанного в круг и описанного около него квадратов [83]). Если Пселл попытался бы сам при помощи рекомендованного им «наилучшего» способа установить отношение длины окружности к ее диаметру, то он нашел бы, что $\pi = \sqrt{8} \approx 2{,}82$, т. е. меньше числа 3 — значения π, известного еще в доисторические времена [84]).

Чтобы проследить за дальнейшей историей числа π, приходится обращаться к Западной Европе. Именно там, наперекор удушливой атмосфере костров, пылавших по всей Европе, мыслители в монашеской одежде постепенно, теорему за теоремой, восстанавливали геометрию. Это видно по некоторым дошедшим до нас рукописям. Среди них — работа о квадратуре круга, написанная магистром Франконом из Льежа, любителем геометрических проблем и особенно квадратуры круга (о которой, однако, у него не было ясного представления). Рукопись эта имеет важное значение потому, что показывает, какая пропасть отделяла средневековых геометров от их древнегреческих предшественников, какие

суеверия господствовали над умами той эпохи. Умный, жаждущий знаний переписчик манускриптов дрожал от ужаса при мысли, что он совершает великий грех, переписывая геометрический труд, а не молитвенную книгу! Франкон, один из просвещенных умов своего времени, посвящает работу по квадратуре круга епископу (по-видимому, влиятельному и интересующемуся вопросами такого рода), чтобы «застраховать» свой труд от козней других церковных сановников, ханжей и невежд, бездумно предававших анафеме всякое научное начинание. Между прочим, среди строк, восхваляющих епископа, есть немало едких замечаний в адрес невежественных церковных вельмож.

Франкон думал, что он решил задачу квадратуры круга; на самом же деле он не был даже в состоянии понять ее суть. Из произведения, с таким трудом составленного, вырисовывается облик человека, блуждающего в темноте по местам, которые он никогда не видел при свете Солнца.

Блуждания во мгле

> История ошибок человеческого ума, возможно, так же важна, как история его движения вперед к истине.
>
> *Поль Таннери*

Это было в Льеже в мае 1050 г. Вот уже три недели, как Рамнульф все писал, покидая свою келью, только когда колокол звонил к трапезе. Его освободили даже от обязанности присутствовать на богослужениях. Спешили с окончанием книги, посвященной архиепископу Герману из Кёльна. Рамнульф переписывал особенно тщательно этот труд, содержавший очень сложные геометрические задачи. Так как содержание произведения было достаточно ценным его украшением, Рамнульф был избавлен от необходимости прибегать к разноцветным чернилам; можно было не раскрашивать золотой и серебряной красками инициалы — заглавные буквы каждой главы. Он выписывал красными чернилами только заглавия, указывающие на содержание, например: «Начинается введение к первой книге господина Франкона о квадратуре круга», или: «Кончается введение», или «Начинается вторая книга» и т. д. до книги шестой [85]).

Закончив переписывать последнюю страницу, он почувствовал непонятное волнение. Не вытерев пера и не закрыв чернильницы, он быстро завернул листы в полотно, спрятал сверток под одежду и пустился бежать по холодным и темным коридорам. У кельи магистра ему почудилось, что биения сердца подобны ударам колокола. Он остановился у входа, чтобы успокоиться, но тут дверь внезапно открылась, и с ее порога магистр Франкон удивленно посмотрел на него.

— Что ты здесь делаешь, брат Рамнульф? Молишься, чтобы дверь расступилась перед тобой, как волны моря перед Моисеем? — поддразнил его магистр. — Если я угадал, то входи.

Опустив глаза, Рамнульф молча перешагнул порог кельи. Его юношеское лицо, с чуть приоткрытым ртом, сияло от радости. Франкон удивленно спросил:

— Что случилось? По твоим глазам видно, что ты не разлил чернила на уже переписанный пергамент и что он не сгорел от выпавшей из светильника свечи. Так что же тебя гнало сюда так, что ты не можешь дышать?

Продолжая молчать, Рамнульф развернул рукопись и положил ее на стол. Теперь уже онемел Франкон. Свежие чернила не только придали буквам на пергаменте выпуклость, но словно вдохнули в них жизнь. Магистр будто слышал, как они шептались. Он начал читать переписанный текст, проверяя, нет ли описок.

— Да, красиво получилось, брат Рамнульф, буквы четкие, без помарок, почерк хороший. По моим расчетам, ты должен был закончить работу только на следующей неделе. Что тебя так подгоняло — любознательность или, быть может, страх?

— И то и другое, — весело ответил Рамнульф. — Но в первую очередь любознательность. Она мне не давала покоя, пока я не дописал последнее слово. Ведь это одна из тайных задач, и мне хотелось как можно скорее узнать эту тайну, которую, как вы пишете, Аристотель присоединил к своим категориям и которая затем передавалась вплоть до Боэция. Я писал и дрожал от нетерпеливого желания добраться до сути этой проблемы, забытой после Боэция, когда наука совсем пошла на убыль. Неуверенность в завтрашнем дне так давила тогда на людей, что даже ученые перестали заниматься такими вопросами [86]).

— Да, да, вечный соблазн запретного плода!

— Однако виноваты в этом вы! — рассмеялся Рамнульф. — Я соблазнился с тех пор, как вы мне велели переписать те восемь писем, которыми обменялись ваш друг магистр Радольф и покойный Регимбольд [87]). С того дня все мои мысли заняты одной геометрией. Из переписанной сейчас книги я знаю наизусть целые страницы. И чтобы вы убедились в этом, прочту вам на память несколько мест. Вот слушайте. Четвертая книга начинается так: «Среди равновеликих фигур, о которых идет речь, некоторые имеют одинаковую форму, другие разную. Одинаковой формы будут треугольник с треугольником, квадрат с квадратом, круг

с кругом. А разной — треугольник и квадрат, треугольник и круг или же квадрат и круг. У одних треугольников один угол тупой и два острых, у других все три угла острые. Квадрат всегда ограничен четырьмя сторонами, у него такое же количество прямых углов. Форма круга отличается и от того и от другого, так как у круга нет углов, и его можно начертить одной сплошной линией. Поэтому такие фигуры не поддаются измерению одной общей мерой, а величина их площадей не может быть охвачена одним лишь циркулем. По этой причине при их сравнении часто возникает сомнение, имеет ли одна фигура такую же площадь, как и другая, или нет. И действительно, нельзя сразу увидеть, обладают ли квадрат и круг одинаковым протяжением, так как один из них ограничен прямыми углами, а другой ограничен линией без единого угла» [88]).

— Остановись, я тебе верю. У тебя замечательная память, — прервал его Франкон.

— Я знаю наизусть и все доказательства, — продолжал Рамнульф. — Очень они мне понравились! Жаль только, что некоторые из них столь сложны, что я их не совсем понял. Но что поделаешь! Вы же сами пишете, что эти задачи сильно утомляли наших предшественников, согнав семь потов с тех, кто ими занимался, и что было бы сумасшествием с вашей стороны обещать в таком трудном деле совершенного познания... Поэтому я утешался тем, что если таким ученым мужам эти задачи казались чрезвычайно трудными, то не имею права жаловаться и я, который ознакомился с ними впервые.

— Ты мудро говоришь, брат Рамнульф, так как и теперь в кругах ученых, занимающихся геометрией, поднимается много трудных и неясных вопросов об углах, и никто не может сказать, какие углы можно сложить вместе.

— Да, знаю, — оживленно заговорил юноша. — Знаю, как они бились над этими задачами, и мне думается, что они еще долго будут спорить о них, пока не узнают, как вы правильно говорите в первой книге, что такое, например, внутренний угол. В своем «De cathegoriis» Боэций употреблял именно эти слова: «Известно, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам». И именно это вызвало боль-

шое недоумение. Впрочем, Регимбольд в своем первом письме магистру Радольфу тоже спрашивал: «Если в треугольнике есть внутренние углы, то должны быть и внешние углы, но где же они?»

— И это помнишь?! — удивился Франкон, глядя в живые глаза юноши.

— Как же не помнить? Вы не можете себе представить, как я был счастлив, когда переписывал шесть книг о квадратуре круга и сознавал, какое богатство хранилось у меня в келье; ведь я первый, кто узнает об этих чудесных и тайных вещах, я познакомился с ними раньше, чем тот, кому они посвящаются [89]). — После нескольких секунд молчания и колебаний Рамнульф продолжал шепотом: — Но когда я вижу, как другие относятся к таким исследованиям, с каким сомнением они качают головой, услышав о них, я очень боюсь. Конечно, вам никто не посмеет что-нибудь сказать, потому что знают, кому предназначен ваш труд [90]). Но мне? Поэтому меня обрадовало, что вы в о в в е д е н и и к о в т о р о й к н и г е написали: «Может быть, кто-нибудь скажет, что интерес к геометрической науке чужд обществу священнослужителей? Не удивительно, что некоторые так мыслят! Они весьма мало занимаются наукой...» [91]).

— Я так писал? — спросил Франкон. — Признаюсь, забыл, но мне приятно опять услышать эти слова из твоих уст, ведь я прав!

— Конечно, и как я радовался! Но когда я слышу, что́ рассказывают заходящие к нам монахи, я ужасаюсь и не знаю, чему верить. Например, неужели правда то, что говорят о бывшем папе Герберте, правившем в 1000 г.?

— А что именно? — ласково спросил Франкон.

— Что он продал душу дьяволу!

— Выкинь эти глупости из головы, брат Рамнульф! Как ты можешь говорить такое, после того как признался, что тебя интересуют геометрические проблемы?

— Вы правы... Но видите ли... На днях за трапезой отец Леонис рассказывал такие вещи, от которых волосы вставали дыбом. И он, должно быть, говорил правду, потому что слышал это с в о и м и у ш а м и в молодости от другого монаха, знавшего самого Герберта. Меня бьет дрожь даже при мысли об этих вещах, не то чтобы говорить о них!

— Я тоже слыпал эти россказни [92]), но я не был потрясен, наоборот, просто смеялся.

— Как же можно? Вы слышали, что говорят об этом злодейском папе, и не побоялись уважительно отозваться о нем в вашей книге? — поразился юноша.

— Да, брат Рамнульф, потому что усопший Герберт был не орудием дьявола, как ты говоришь, а великим ученым, который своими знаниями и страстным поиском истины превзошел всех ученых мужей своего времени. Он с рвением трудился — вот его преступление! Своими успехами как учителя и ученого он навлек на себя зависть и ненависть тех, кого не занимало ничто другое, кроме удовлетворения своей похоти и жадности. Пока он плавил металл, чтобы изготовить из него инструменты для изучения неба или для вычислений, и менял часть этих инструментов на редкие научные книги, монахи-лодыри обвинили его в занятиях магией. Они выдумали всю эту ложь, которой разные отцы Леонисы забивают головы легковерным. Но давай кончим об этом, слышу, что стучат в дверь.

Рамнульф открыл, и на пороге появился друг Франкона магистр Фальшален [93]). Франкон весело встретил его.

— Я рад твоему посещению, у меня хорошая новость.

— Какая новость? — спросил Фальшален.

— Вот она лежит на столе!

— Как, рукопись уже готова? — удивился гость, дружественно глядя на переписчика, который смиренно попросил разрешения уйти.

Фальшален сел за стол и начал просматривать рукопись лист за листом. Франкон, поместившийся на сундуке против своего друга, следил за движением его длинных и тонких пальцев, которые бережно брали каждый лист и затем осторожно клали его на стопку уже просмотренных. Окончив просматривать рукопись, он лукаво посмотрел на Франкона и, откашлявшись, начал читать с шутливой интонацией: «Думается, целесообразно в конце описать в нескольких словах найденную квадратуру, причем попытаться сделать это красочно, чтобы она оказалась достойной предстать перед твоей честью» [94]). Затем встав, он важно продекламировал восемь стихов, которыми кончалось произведение.

Как ребенок, совершивший нехороший поступок, Франкон начал неумело оправдываться:

— По-твоему, не надо было сочинять этих стихов? Как ты, наверное, заметил во введениях к главам, я несколько раз упоминал об «Энеиде», так что...

— Ну да, ну да, конечно, — дружески иронизировал Фальшален, перелистывая снова рукопись. — Вот, нашел! Здесь во введении к третьей книге ты утверждаешь, что наш архиепископ Герман более велик, чем Август, для возвеличения которого Вергилий сочинил 12 книг «Энеиды», а во введении к шестой книге пишешь: «То, что воспевает знаменитая эпическая поэма Публия Вергилия Марона, ученейшего из поэтов, является лишь плодом поэтического воображения. В ней рассказывается о событиях шести лет. Много сил отдал ей поэт. А представляешь ли ты, сколько времени нужно было бы для изложения всего вопроса о квадратуре круга?»[95]). Поэтому, — улыбнулся Фальшален, — ты и вынужден был украсить эту геометрическую эпопею о квадратуре круга гармоничным ритмом стиха?

— Смеешься надо мной, — пробормотал Франкон. — Конечно, можно было обойтись и без них, но страсть к стихам мучает меня и взрывается, как вулкан, наперекор моей воле!

— Можешь не оправдываться, стихи хорошие и уместные. И я думаю, что они сослужат хорошую службу: помогут рассеять недоброжелательность по отношению к этому труду, вызывающему подозрение уже тем, что он не из области теологии. И, наверное, тоже из предусмотрительности, для того, чтобы выветрить дух ереси, ты в каждом из шести введений сжег так много ладана на алтаре Кёльнского архиепископа! Не сомневаюсь, что его высочество не преминет взять твой труд под свое высокое покровительство, ибо кто может выстоять перед таким славословием?! Слушай, как величественно это звучит, например, во введении к четвертой книге: «... как материя и орудия не в состоянии служить созиданию, если их не использует рука мастера..., так и меня можно, по сути дела, считать орудием, которым ты пользовался для завершения этого дела, ты, украшение понтификсов, причина, предпочитающая остаться невидимой... Не является ли подлинным автором тот, который дает толчок к действию? Да, это он — автор! Разве говорят о каменщиках, что они

основали Рим?.. Память о них стерлась... Никто не может вспомнить, кто обрабатывал глыбы для стен, кто перевозил камень, кто закладывал фундаменты, кто отделывал помещения. И поэтому, если в этом произведении содержится что-нибудь, заслуживающее признания, то этому мы обязаны только тебе — тебе, побудившему к этому труду мой ленивый и неспособный ум... Если ты одобришь мой труд, мне не будут страшны никакие наговоры. Ведь несомненно, что в лучах твоей славы и авторитета невозможно появление мрака невежества» [96]).

Прекратив чтение, Фальшален расхохотался и, указав на прочитанные строки, воскликнул:

— Не кажутся ли тебе неосторожными слова о каменщиках, построивших Рим! В этой фразе, по-моему, чувствуется дуновение противного ветра. Не рассеет ли он весь твой ладан, даже если он пронизан лучами могущественного Солнца?

— По правде говоря, — признался Франкон, — я не думал об этом, когда писал. Так у меня тогда получилось — пусть так и остается.

— Ладно, я того же мнения. Может, и не заметят. Больше не буду говорить об этом, а то мы всё отходим от геометрических задач, при помощи которых ты решил квадратуру круга. Помнишь, сколько раз мы спорили, пока пришли к общему мнению относительно значения слов «внутренние и внешние углы» треугольника? По-моему, этот вопрос полностью выяснен здесь в первой книге.

— Может быть. Я старался выяснить больше, чем сумели сделать другие, но, вероятно, что-то еще осталось неясным, — скромно ответил Франкон.

— Если учесть, как мало у нас книг, твое замечание правильно, — согласился Фальшален. — Я убежден, что сначала надо как следует выяснить основные понятия, ибо без этого нельзя приступить к решению задачи о квадратуре круга, трудность которой не сумели преодолеть такие знаменитые мыслители, как Герберт, его ученик Адельболь, ученый Вазо и многие другие.

— Я тоже так думаю. Только после того, как удастся установить равенство площадей разных треугольников, станет возможно открыть такое же равенство между фигурами, своим видом отличающимися между

собой. Но сколько доводов потребовалось, пока мы смогли убедить Радольфа отказаться от мнения, которое он так упорно противопоставлял мнению Регимбольда!

— Знаешь, — прервал его Фальшален, — я точно узнал теперь, что Регимбольд не учился в Шартре, как предполагал Адельман. Он был там только один раз, проездом, когда беседовал с моим уважаемым учителем Фульбертом.

— Это произошло, наверное, до того, как я поступил в Шартрский монастырь. Очевидно, они тогда обсуждали этот вопрос и пришли к выводу, что внутренний угол треугольника — одно и то же, что острый угол, а внешний — тупой. Но они не договорились о значении этих синонимичных понятий. По мнению Фульберта, смысл этих слов одинаков, так как перпендикуляр, опущенный из вершины угла треугольника, может пересекать противоположную сторону либо внутри треугольника, либо вне его. Регимбольд же утверждал, что смысл этих слов зависит от результата сравнения с прямым углом [97]).

— Только наш друг Радольф, — иронически продолжал Фальшален, — думал, что внутренним углом следует считать угол, расположенный на плоской поверхности, а внешним — на поверхности тела, например на кубе. Помню, как его лицо покрылось пóтом, когда он осознал, что ошибался. Слышу и теперь его громовой голос: «Вы меня совсем сбили с толку! Но признаю, что вы правы, магистр Франкон, и сдаюсь».

— Они ошибались, эти великие мужи, — задумчиво сказал Франкон. — Их авторитет сильно мешал утверждению правоты тех, кто считал, что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам. Если бы все поняли, что угол называется внутренним или внешним в зависимости от того, как он расположен по отношению к своей фигуре, т. е. внутри или вне ее, то для споров уже не оставалось бы места [98]).

— Ты, безусловно, прав и очень хорошо сделал, что только после этих объяснений изложил для читателя знаменитую задачу о квадратуре круга. Чтобы не отпугнуть его, ты говоришь, что для вычисления площади круга ему следует умножить квадрат диаметра на 11 и полученный результат делить на 14 [99]). Это ты указываешь в первой книге. Затем во в т о р о й к н и г е

ты ему помогаешь понять, насколько сложна задача квадратуры: «Если кто-нибудь захочет построить квадрат, то он не встретит никакой трудности, но если он попытается привести другие фигуры, имеющие ту же природу, что и квадрат [100]), к форме последнего, то он не придет ни к какому результату».

— Да, потому что здесь мы подходим к непроходимой пропасти между арифметическим и геометрическим методами, — продолжал Франкон. — Бывают числа, сами собой являющиеся квадратами, например 16 или 25. Другие же не могут быть, по их природе, причислены к квадратам ни одним знающим человеком. Как ни применяй подстановки, число 50 не сделаешь квадратом. Это возможно только по отношению к площадям фигур, ибо ничто не мешает нам найти фигуры, имеющие форму квадрата и содержащие площадь в три фута или в 50 саженей [102]).

Мне кажется, в этом и смысл слов из третьей книги: «Что касается квадратуры круга, можно было бы впасть в уныние, если бы не помощь геометрии».

В этом вопросе я взял на себя смелость сделать выводы, противоречащие мнению таких ученых, как Регимбольд, Герберт и Рацехин, — похвастался Франкон. — Они не понимают, что только материя, из которой состоят тела, не сопротивляется форме квадрата, в то время как всякое сравнение сторон различных фигур путем их деления ведет к числам! Покажи мне, пожалуйста, что и как нужно сделать с числом 50, чтобы оно стало квадратом?! Вот, проверь все проведенные мною вычисления, если не доверяешь моей аккуратности. Можно ли получить число 50, возводя в квадрат, как утверждает Регимбольд, величину стороны простого квадрата и еще $\frac{5}{12}$ этой величины [102])?

— Знаю, что нет, — ответил Фальшален. — Опытами можно измерять только материальные фигуры, что мы и делали. И скажу тебе, что я с большим удовольствием вспоминаю опыты, которые мы с тобой проводили. Сколько мы взвесили фигур, вырезанных из пергамента или из кожи, когда пытались найти соотношение между площадью круга и разных квадратов и четырехугольников!

— Действительно, — сказал Франкон, улыбаясь воспоминаниям, — много мы дней провели вместе,

вырезая и взвешивая. Помню, у тебя оказалось больше терпения, поэтому я тебя просил, чтобы ты вырезал фигуры, а я их взвешивал. И как ты следил за тем, чтобы весы были точны! Ты заставлял проверять их и для этого клал на одну чашку круг с диаметром 14, а на другую четырехугольник со сторонами 11 и 14. Как ты любил смотреть на весы, когда они устанавливались в полном равновесии!

— Мне нравилось и когда уравновешивались круг с диаметром 28 и прямоугольник со сторонами 11 и 56 [103]). Когда у нас не хватало пергамента, я вырезал фигуры из шкурок одинаковой толщины.

— Этими опытами, сказал Франкон, — мы смогли установить и взаимное преобразование фигур. Ибо каким другим способом можно было бы перейти от квадрата к четырехугольнику, а от него к кругу? Ведь форму тел, например медных или золотых монет, можно менять, сохраняя их вес [104]).

— Сложная задача! — вздохнул Фальшален. — Но, подготовив к ней читателя во введении к шестой книге [105]), ты затем взялся за нее серьезно, доказав равенство круга и квадрата.

Фальшален замолчал, углубившись в чтение текста [106]). Закончив, он заметил, что оба метода требуют чрезвычайного напряжения внимания. И если для того только, чтобы проследить за ними, нужно такое усилие и терпение, можно себе представить, сколько понадобилось бы труда для их установления!

— А как ты думал? Разве Пифагор сумел бы преодолеть трудности познания музыкальных звуков, если бы рвение, вложенное в их изучение, не дополнялось огромным трудом, внимательным и долгим изучением способа действия кузнечного молота [107])? — ответил, смеясь, Франкон.

— Насколько легче было бы, наверное, тебе, имей ты под руками нужные книги!

— Безусловно! Кто знает, какие мысли я мог бы почерпнуть из сочинения Альбина, которое так долго искал магистр Радольф, или из того «Podismus», о котором он же утверждал, что оно когда-то находилось в Шартрской библиотеке. Но где они теперь? Когда я спрашивал об этом покойного Регимбольда, он пожимал плечами. А если, — с грустью продолжал Франкон, — у меня были бы книги Евклида? Ведь Аристотель запи-

мался этим вопросом, и вряд ли другие греческие геометры после него оставались равнодушны к нему!

— Я уверен, что нет. Но у кого могли очутиться эти книги? Я слышал, будто мавры перевели их на свой язык, но как добраться до них? Знаешь ведь, сколько небылиц выдумали насчет Герберта только потому, что он был в Испании и привез оттуда мавританские книги!

— По-моему, — прервал его Франкон, — у Герберта не было книг Евклида. Он ничего не говорит о них в книге, посланной Адельбольду. У меня есть ее копия. В молодости я также мечтал бежать в Испанию, переодеться мусульманином, выучить их язык, затем проникнуть в их школы, подобно Герберту, которым я так восхищаюсь. Но у меня не хватило смелости для этого...

— Ты лучше сделал, оставшись здесь, — успокоил его Фальшален. — Там тебя могли поймать и зарезать фанатичные сарацины, как это часто случалось с другими. А если бы тебе посчастливилось целым и невредимым выбраться оттуда и возвратиться домой, то наши дорогие братья позаботились бы зажарить тебя как еретика. Разве ты не видишь, что они не дают покоя Герберту даже в могиле?

— Все же, прочитав столько книг, он хоть немного сумел утолить свою тоску по знаниям, в то время как во мне эта тоска всегда горит и ее ничем не погасить...

Далеко на Востоке, в Азии

Основное условие любого открытия — глубокое знание отрасли науки, к которой относится предмет исследования, и наличие необходимых знаний из других областей, связанных с данной отраслью.

Эмануэль Бакалоглу

Если бы в примечаниях к предыдущей главе не были точно указаны страницы труда Франкона, у читателя могло возникнуть впечатление, что наш рассказ — чистейшая выдумка в стиле барона Мюнхаузена. Ибо кто бы мог подумать, что спустя четырнадцать веков после спора Аристотеля и Евдема и тонких доказательств Архимеда могла состояться такая наивная беседа, какая имела место в келье магистра Франкона?

Выдающаяся женщина-математик XIX в. Софи Жермен [108]) отметила в одном из своих философских сочинений, что иногда наука, «подобно живому существу, падает вниз с высоты зрелости и силы и погибает вследствие слабости». «Когда она возрождается, — продолжает Жермен, — она снова переживает возраст детства». Попытки европейских ученых средних веков воссоздать геометрию можно и в самом деле рассматривать как новое детство геометрии. Но читателю, наверное, небезынтересно узнать, в какой стадии находились тогда геометрические знания, связанные с задачей о квадратуре круга, в других странах, например у народов Азии, достигших уровня культуры, достойного восхищения? И, наверное, читатель хочет получить ответ на вопрос: какова же была судьба геометрических знаний, с таким энтузиазмом накопленных греками?

Представим себе, что мы находимся в библиотеке, содержащей хорошее собрание трудов по истории математики. Давайте ознакомимся сначала с несколькими общими трудами по истории этой науки, содержащими главы о длине окружности и площади круга, а также о квадратуре круга. На каких нам остановиться? Ре-

шить это непросто, ведь специальные труды по истории математики появились уже к началу XVI в. Вот, например, четырехтомное произведение, написанное Ж. Ф. Монтюкла в конце XVIII в. Это один из старейших трудов в данной области, представляющий определенный интерес и по сей день. В третьем дополнении к IV тому мы находим историю вопроса о квадратуре круга. Многое можно также узнать из книг А. Г. Кестнера, Ш. Боссю, М. Шаля, Г. Либри, Г. Г. Цейтена, П. Таннери, Г. Зутера, С. Гюнтера, Г. Вилейтнера, И. Э. Гофмана, О. Беккера. Самый большой труд, систематизирующий историю математики, — это четырехтомное сочинение М. Кантора, выходившее несколькими изданиями с 1880 по 1922 г. По истории числа π до XI в. можно ограничиться первым томом, озаглавленным: «С древнейших времен до 1200 г.». Можно еще обратиться к книгам Д. Смита, И. Тропфке, Ф. Кэджори, Дж. Лориа, Э. Бортолотти, Р. К. Арчибальда, А. П. Юшкевича [109]). Дальнейшие подробности можно узнать из статей в журналах, упомянутых в вышеуказанных книгах. Там содержится много сведений, которые нельзя включить в книги общего характера.

Но этим исчерпано не все. Есть много работ, не названных в упомянутых нами книгах. Их можно найти, изучая реферативные журналы. Один из самых старых журналов этого рода — «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» («Ежегодник успехов математических наук»). Первая книга его вышла в 1868 г. Здесь, сгруппированные по разделам, кратко реферируются (или только называются) почти все значительные работы по математике. Этот журнал стал жертвой войны, начатой гитлеровской Германией: он прекратил свое существование в 1941 г. Другой журнал — «Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete» («Центральный журнал по математике и пограничным областям»). Он начал издаваться в 1931 г. и выходит по сей день. С 1940 г. выходит «Mathematical Review» («Математическое обозрение»), а с 1953 г. — советский реферативный журнал «Математика». В этих изданиях печатаются только рефераты статей и книг. Имеются, однако, такие журналы, которые публикуют статьи по истории математики [110]).

Обратившись к книгам и журналам, можно самостоятельно изучать историю числа π. Например, если бы

читатель захотел выяснить, что знали к XI в. о числе π в Индии, то можно было бы, помимо упомянутых выше книг и журналов, обратиться к двум томам по истории математики в Индии, написанным Даттой и Сингхом [111]). Из них мы узнаем, что в Древней Индии научные знания вначале передавались только устно. Для того чтобы легче было их запоминать, они излагались в стихах. В письменных документах нужные сведения начали появляться, по мнению одних авторов, примерно за тысячу лет до нашей эры, по мнению других, — на несколько столетий позже. По-видимому, в IV в. н. э. была написана «Сурья Сиддханта» [112]), стихи которой содержат данные о первых вычисленных индийцами значениях числа π, а именно: $\pi = 3{,}06$ и $\pi = 3{,}08$. Более точно известно, что в V в. н. э., когда никто в Европе уже не думал о числе π, крупнейший индийский мыслитель и астроном Арьябхата в своей книге «Арьябхатья» дает для числа π приближенное значение 3,1416. Стихи, содержащие этот результат, можно перевести так: «Прибавь 4 к 100, умножь на 8 и прибавь ко всему этому 62 000. То, что получишь, — приближенное значение длины окружности, если ее диаметр 20 000». В этой же книге имеется и значение $\pi = 3\frac{17}{120}$.

В V в. индийцы знали величину числа π лучше европейцев; они сумели найти три его первых точных десятичных знака. Но что это по сравнению с результатами, о которых можно узнать, изучая китайскую математику тех времен? Например, задачей о квадратуре круга занимался Лю Хуэй, живший в III в. При этом он применил способ, очень сходный с методом, которым за 500 лет до него пользовался Архимед. Но Лю Хуэй не довольствовался вычислением сторон только 96-угольников — он вычисляет стороны 192-угольников и снова получает приближенное значение $\pi = 3{,}14$, выраженное при помощи отношения чисел $\frac{157}{50}$. В V в. известный астроном Цзу Чун-чжи, современник Арьябхаты, получил первые шесть точных десятичных знаков π, указав, что это число содержится между 3,1415926 и 3,1415927. Ему же приписывают и другое соотношение целых чисел, дающее приближенное значение числа π с точностью до шестого десятичного знака, а именно

$\pi = \frac{355}{113}$ [113]). Но после всех этих блестящих открытий и китайская, и индийская математика приходят в упадок.

Начиная с VIII в. мы находим много интересного в истории арабской математики, вернее, математики народов стран ислама, пользовавшихся арабским языком. В то время как в Европе с трудом создавались элементарные школы при монастырях, в Багдаде уже существовал научный центр «Бейт ал-Хикма», т. е. «Дом мудрости». Здесь были собраны самые просвещенные умы арабского халифата, переводились выдающиеся научные и философские труды различных народов мира [114]). Освоив и переработав значительную часть культурного наследия, оставленного персами, сирийцами, индийцами, а также эллино-римской культурой, ученые стран ислама добились важных самостоятельных достижений в области математики, астрономии и других наук. Выдающихся успехов деятели науки стран ислама добились в астрономии. Так, в 827 г. в Сирийской пустыне было проведено измерение дуги меридиана, а начиная с IX в. в разных городах было построено большое количество астрономических обсерваторий [115]).

Призванная удовлетворить нужды земледелия, ремесел и торговли, арабская наука в течение VIII—IX вв. поднялась на уровень, значительно превышавший уровень науки других народов того времени. Книги «Математики и астрономы у арабов» Г. Зутера и «История математики в средние века» А. П. Юшкевича [116]) содержат много ценных сведений. Например, А. П. Юшкевич отмечает весьма интересную вещь: в своем «Трактате об окружности», завершенном в 1424 г., математик Гиясэддин Джемшид ибн Масуд ал-Каши дает 17 точных десятичных знаков числа π [117]). Но тяга к геометрическим занятиям появилась у ученых стран ислама задолго до этого. Так, три брата Бану Муса — Мухаммед, Ахмед и ал-Хасан [118]), жившие в первой половине IX в., истратили бóльшую часть своего состояния на приобретение греческих рукописей, которые затем были переведены на арабский язык. Среди этих рукописей имелись и «Начала» Евклида. В связи с определением площади круга и длины окружности они, однако, принимали для числа π значения $\sqrt{10}$, или $\frac{22}{7}$.

Среди математиков X в. видное место занимает ученый-энциклопедист Абу Али ал-Хасан ибн ал-Хайсам (965—1039), прозванный в Европе Альхазеном. Он прокомментировал труды Аристотеля и написал много оригинальных произведений. Остановимся на «Трактате Ибн ал-Хайсама о квадратуре круга». У Ибн ал-Хайсама была совсем другая математическая подготовка, чем у Франкона. Он хорошо знал работы Гиппократа о квадратуре луночек, которым он дал красивое обобщение, а также работы Архимеда [119]). Однако и он, подобно Франкону, заблудился на извилистых тропинках квадратуры круга.

Мы не можем закончить это краткое изложение истории арабоязычной математики без того, чтобы не сказать о величественной фигуре Омара Хайяма — иранского и среднеазиатского математика, астронома, философа и поэта, знаменитого своими четверостишиями. Вольнодумец и безбожник, он высмеивал ханжество, воспевал радости жизни. Он написал книгу по алгебре. Омар Хайям глубоко знал и греческую геометрию, он решил ряд проблем теории параллельных линий и теории отношений [120]).

В 1074 г. Хайям был назначен руководителем астрономической обсерватории в Исфахане, тогдашней столице Ирана.

Звездной ночью

Математик, не являющийся хоть немного поэтом, не может быть настоящим математиком.

Карл Вейерштрасс

Ясным осенним вечером 482 г. хиджры [121]), т. е. 1090 г. по европейскому календарю, в башне Исфаханской астрономической обсерватории Омар Хайям вместе со своим учеником и другом Музаффаром ал-Асфизари проверяли приборы перед предстоящими наблюдениями. Они торопились, ибо сумерки быстро переходили в ночь, а им хотелось установить положение некоторых звезд, не задерживающихся долго над горизонтом. Ночь обещала быть благоприятной для наблюдений.

Когда проверка была закончена, они зажгли свои фонари и положили рядом листы, на которых было отмечено положение звезд в прошлый вечер, и в полном молчании подошли к своим астролябиям. В тишине башни их синхронные движения, казалось, тоже были частью величественного суточного движения небесной сферы. Оба внимательно следили за звездами и нетерпеливо ждали момента начала наблюдений. Приплывающие со стороны горизонта звезды торопились, холодно улыбаясь, безразличные к трудностям, причиненным наблюдателям, старающимся точно засечь их положение. Другие двигались медленно, терпеливо ожидая, пока отмечалось их прохождение мимо неподвижного указателя. Звезды, окружающие полюс, совсем не спешили. Будто упоенные мгновением, ставшим вечностью, они неохотно покидали наблюдателей, лаская их своим тихим светом.

Два человека в башне обсерватории, с трудом отрывая взоры от мерцающих светил, автоматически быстро что-то записывали и опять смотрели на молчаливые объекты наблюдений. Уже много лет подряд, ночь за ночью они делали одно и то же и каждый раз оказыва-

лись в плену очарования, исходящего от маленьких, но всесильных блестящих точек, движущихся по небесному своду.

Потом они встали, протерли глаза и подошли к балюстраде обсерватории. На горизонте поднимался месяц. Музаффар шепнул с волнением:

Гляжу на землю я и сном объятых вижу;
Взираю в глубь земли, — землею взятых вижу;
В твою, небытие, пустыню взор вперив, —
Тех, кто ушли уже, и не зачатых вижу [122]).

— В эту ночь я бы сказал иначе, — добавил Омар:

О горе, горе сердцу, где жгучей страсти нет,
Где нет любви мучений, где грез о счастье нет!
День без любви — потерян; тусклее и серей,
Чем этот день бесплодный, и дней ненастья нет [123]).

Как скупец, подбирал Музаффар каждое слово Омара и запоминал, повторяя его про себя. Он очень любил Омара и был счастлив, когда мог оставаться вдвоем с ним. В этот вечер отец Музаффара не приходил, так как целое утро он вместе с другими астрономами занимался вычислениями, и, кроме них двоих, в обсерватории не было никого. Омар знал, как его ученик любил математику и поэзию. Чтобы подразнить его, он добавил, притворяясь усталым:

— Уже поздно. Пора нам идти.

— Нет, нет. Прошу тебя, имам Хайям, постоим еще. Не ты ли говорил:

Мудрец приснился мне: «Веселья цвет пригожий
Во сне не расцветет, — мне молвил он, — так что же
Ты предаешься сну? Пей лучше гроздий сок,
Успеешь выспаться, в сырой могиле лёжа» [124]).

И есть ли вино более сладкое и душистое, чем то, что ты вливаешь в чашу моей души, когда читаешь стихи или указываешь мне путь, ведущий к решению задач, таких же запутанных, как золотая нить в филиграни?

— Опять не держишь слова! — Омар сделал вид, что возмущается, и рассмеялся. На днях же мы решили не тратить ночи на разговоры, если на следующий день нам предстоит много работать!

— Но уже целая неделя, как мы не обмолвились ни словом! Каких сокровищ я лишился за это время?!

Поэтому, хаджи Омар, прошу тебя твоими же стихами:

Нас, пьяниц, не кори! Когда б господь хотел,
Он ниспослал бы нам раскаянье в удел.
Не хвастай, что не пьешь, — не мало за тобою,
Приятель, знаю я гораздо худших дел [125]).

— Ну, ладно, — ответил Омар, отойдя от балюстрады и засветив фонарь. — Сейчас я тебе прочту очень красивую вещь.

— Из «Индии» ал-Бируни [126])?

— Не угадал. И не угадаешь, даже если скажу, что речь идет о труде Ибн ал-Хайсама [127]).

— Тогда это касается, наверное, вычисления квадрата, равного определенному числу долей куба его стороны. Знаю, что тебя тоже интересует эта задача и что об этом ты написал в своей книге по алгебре [128]).

— Я же тебя предупредил, что не угадаешь, и вот не угадал!

Музаффар подошел к столу, сел, скрестив ноги под собой, и осветил фонарем лицо Омара. Он долго смотрел на него.

— Твои глаза блестят, хаджи Омар, — сказал Музаффар, — словно ты собираешься показать мне какую-то диковину! Но ты сказал, что речь идет о работе Ибн ал-Хайсама!

— Теперь ты угадал, Музаффар, мне попалась настоящая диковина. Но следует быть снисходительным... Одни пьянеют от четверостишья, другие, менее наделенные поэтическим чувством, предпочитают квадратуру круга.

— Квадратура круга, говоришь?! Сочинил ли Ибн ал-Хайсам и такую вещь? Им тоже овладела эта страсть? Разреши посмотреть!

Он перелистал работу, потом сказал с удивлением:

— Вижу, Ибн ал-Хайсам ставит вопрос со всей серьезностью...

— Именно, — подтвердил Омар. — Слушай, как звучит заглавие: «Трактат Ибн ал-Хайсама о квадратуре круга» [129]). И дальше: «Многие философы считают невозможным равенство между площадью круга и площадью квадрата и во многих своих трактатах отвергают эту концепцию. Действительно, ни у одного из древних и современных геометров нельзя найти такого

многоугольника, площадь которого в точности равнялась бы площади круга. Что касается фигуры, упомянутой Архимедом в «Измерении круга», то там используется лишь часть площади».

— Здесь Ибн ал-Хайсам, очевидно, хочет сказать, что Архимед имеет в виду не круг, а 96-угольник, не так ли? — прервал чтение Музаффар.

— Да. «Этот факт, — читал дальше Омар, — наряду с другими причинами, утвердил философов в их мнении. Имея в виду такое положение дел, я со всей страстью сосредоточил все свои помыслы на данном предмете, и мне кажется, что это возможно и не особенно трудно осуществить. Подтверждением такого мнения служат примеры существования составленных из двух дуг луночек, равновеликих треугольнику, и луночки, равновеликой треугольнику, к которой прибавляется круг. Мы уже упомянули о разных таких случаях в книге „О луночках"...»

— Теперь все понятно! — опять прервал Музаффар. — Я не знал, что он занимался луночками.

— О, у Ибн ал-Хайсама был блестящий ум, а что касается образования, он не имел равных. Ты же знаешь, какое огромное количество работ он сочинил! О луночках он написал еще две книги: одну сокращенную, другую более обстоятельную, в которых изложил много открытых им истин. Но слушай, что он пишет дальше: «После того как я привел задачу к этим свойствам луночек, я утвердился в мнении о возможности равенства между площадью круга и площадью квадрата и с большим рвением изучал этот вопрос, пока доказательство не стало ясным, и в отношении этого не может быть больше сомнения. Тогда я сочинил эту работу. Возьмем...» [130]).

Когда Омар закончил изложение доказательства, Музаффар сказал:

— Очень интересно. Ты прав, Ибн ал-Хайсам устанавливает новые истины, он обобщает теорему о луночках, которую мы знаем из книги Гиппократа. Там речь идет только о случае, когда луночки связаны с прямоугольным равнобедренным треугольником, в то время как Ибн ал-Хайсам решает задачу по отношению к любому треугольнику.

— «После этого доказательства, — продолжал читать Хайям, — возьмем опять круг AEG (рис. 11)

с луночкой $AEBH$ и треугольником ABD и разделим AB на две равные части так, чтобы точка деления K стала центром круга AEB; проведем затем прямую DK и продолжим ее до пересечения с дугой AHB в точке H и с AEB в точке E. Прямая $DKHE$ является диаметром кругов ABG и AEB, так как она проходит через их центры. Разделим теперь EH на две равные части и сделаем точку L центром круга $HMEN$ с радиусом LH. Этот круг касается снаружи круга ABG и изнутри — круга AEB, так как он встречает оба круга в соответствующих концах общего диаметра этих кругов. Следовательно, круг $HMEN$ находится внутри луночки $AEBH$, являясь частью ее. Но любая величина находится в определенном отношении к любой величине, являющейся ее частью, даже когда неизвестно, каково это отношение и нельзя установить его, ибо отношение между двумя величинами существует не только когда оно известно людям или когда они могут установить и узнать его. Отношение двух величин — существенное свойство только однородных величин; следовательно, если даны две однородные величины и каждая из них ограничена, конечна и постоянна по своему значению, не изменяясь ни в сторону увеличения, ни в сторону уменьшения, ни по своей сущности, то они находятся по отношению друг к другу в одном определенном, никоим образом не меняющемся отношении... Допустим, например, что отношение луночки $AEBH$ к кругу $HMEN$ равно отношению линии AD к ее части; известна ли нам эта часть или нет, сумеем ли мы установить ее или нет, это здесь не играет роли, достаточно того, что эта часть — DC; таким образом, отношение луночки $AEBH$ к кругу $HMEN$ равно отношению AD к DC, причем неизменному, ибо первое отношение тоже неизменно. Если это отношение неизменно, то и линия DC вполне определена, неизменна по своей величине, так как и линия AD неизменна по своей

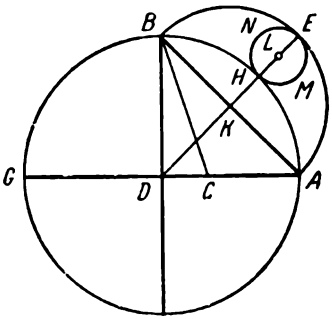


Рис. 11.

величине. Проведем линию BC и получим треугольник BDC...»

— Вот здесь я его поймал, — засмеялся Музаффар, резко встав и хлопая в ладоши. — Как же он построит отрезок DC? Ведь для того, чтобы решить задачу, его надо построить при помощи циркуля и линейки, а я уверен, что такого построения он не укажет. Я это подозреваю, ибо слишком уж отчаянную он делает попытку, чтобы заставить меня верить в существование данного отрезка. Не так ли, имам Хайям?

— Конечно, нет! — ответил учитель, с восхищением смотревший на своего ученика. — Он ведь обещает, что он укажет это в другой работе, потому что, «раз допущена возможность существования отрезка DC, доказательство становится простым...» [131]).

— Ну, разумеется, дальше все ясно, так как во второй книге «Начал» указывается, как можно получить сторону квадрата с площадью, равной площади треугольника. Ведь все заключается в том, как осуществить построение отрезка DC только при помощи циркуля и линейки, — ответил разочарованный Музаффар. — Дальше я и сам могу продолжить доказательство. Вот, посмотри, как, по-моему, оно должно идти: учитывая, что отношение диаметров двух кругов (рис. 11, 12) $\frac{AG}{EH}=\frac{XQ}{FQ}$, и имея $\frac{AG^2}{EH^2}=\frac{XQ^2}{FQ^2}$, получаем согласно второму предложению XII книги

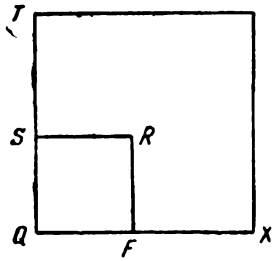


Рис. 12.

$$\frac{AG^2}{EH^2}=\frac{\text{круг } ABG}{\text{круг } HMEN}=\frac{XQ^2}{FQ^2}.$$

— Горжусь тобой, Музаффар! Доказательство действительно таково.

— Значит, так хочешь ты, великий Ибн ал-Хайсам, доказать, что квадрат со стороной XQ равен кругу ABG? — обратился куда-то в пространство Музаффар, угрожая пальцем. — Сожалею, но убедить меня ты не сумел!

— Подожди, — прервал его, улыбаясь, Омар. — Сам Ибн ал-Хайсам подозревал, что ему не так легко

будет убедить тебя, и поэтому он еще добавил: «Что касается способа получения этого квадрата, мы его укажем в особой работе. Настоящей работой мы намеревались только доказать возможность решения данной задачи, как и всю нелепость мнения тех, кто утверждает, что круг не может быть равновелик квадрату. Но достаточно об этом; у настоящей нашей работы другой цели не было».

— Правильно, хватит этих нелепостей! — весело сказал Музаффар. И через несколько секунд раздумья добавил:

— Никак не могу понять, зачем Ибн ал-Хайсаму потребовалось написать эту работу. Если бы я не верил в его доброе намерение, я подумал бы, что он издевается над нами.

— Да, мне тоже жаль, что человек с таким богатым умом, как он, дал себя поймать в силки квадратуры. Она интересовала когда-то и меня, и я знаю, какое любопытство овладевает тобой, когда занимаешься ею. Трудность, а пожалуй, и невозможность решить эту задачу при помощи циркуля и линейки, прикрываемая некоторыми теоретическими положениями, завораживают тебя, как глаз змеи... Видишь этот глаз и останавливаешься, чтобы восхищенно смотреть и смотреть в него. И если слишком долго задержишь на нем свой взор, то не сможешь уже оторвать его. И тогда змея набросится на тебя, чтобы укусить и отравить тебя своим губительным ядом... Нет надобности уточнять, что он не сдержал обещания написать другую книгу и указать в ней, как получить нужную сторону.

— Я так и полагал, — ответил Музаффар. — А между прочим, — добавил он иронически, — есть и другие хлопотливые задачи: удвоение куба, трисекция угла и даже постулат о параллельных линиях... [132]).

— Может быть, ты прав. Все же в отношении параллельных линий...

— Почему «все же», хаджи Омар? Все эти задачи вызывают у меня впечатление, что они уводят нас куда-то за пределы математической области, в край, где стихи и вино приобретают право быть спутниками мысли, — сказал Музаффар.

Пока он говорил, Омар поднялся и стал молча укладывать приборы на свои места. Музаффар собрал свои записки, привел в порядок астролябию, принес

кувшин с вином и, наливая в бокалы, начал тихо читать:

Кувшин мой, некогда терзался от любви ты,
Тебя, как и меня, пленяли кудри чьи-то,
А ручка, к горлышку протянутая вверх,
Была твоей рукой, вкруг милого обвитой [133]).

Позже, отвечая одолевшим его думам, Омар добавил:

Мужи, чьей мудростью был этот мир пленен,
В которых светочей познанья видел он,
Дороги не нашли из этой ночи темной,
Посуесловили и погрузились в сон [134]).

— Мне дорого сокровище, что ты мне сейчас подарил, и я благодарю тебя за него, — тихо сказал Музаффар. — Я его нанизал на ожерелье моего сердца, рядом со всеми другими.

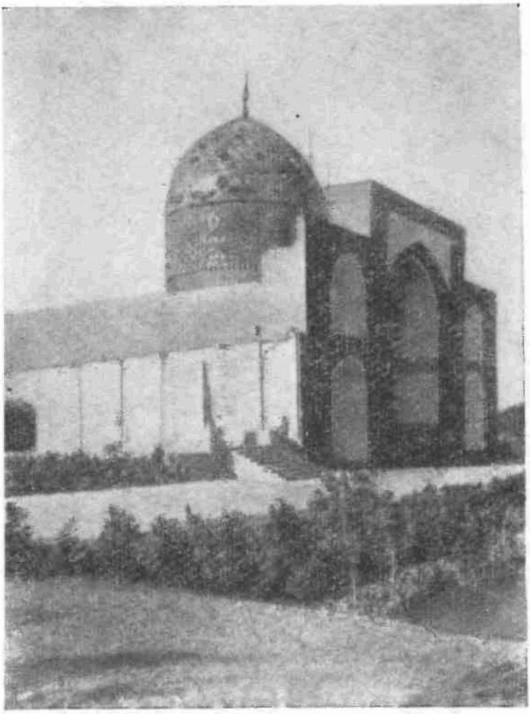
— На ожерелье? — засмеялся Хайям. — У меня они лежат в куче, одна на другой, и не знаю, наведу ли я там когда-нибудь порядок. А между прочим, какой смысл это имело бы? Так или иначе, и эти стихи, которые ты называешь сокровищем, — тоже блуждание во тьме.

Музаффар был очень взволнован. Встав, чтобы уйти, он с мольбой в глазах посмотрел на Омара. Хайям понял, что означал этот взгляд: он просил четверостишие, названное когда-то им «Четверостишием расставания». Омар прочел его:

Давно — до нас с тобой — и дни и ночи были,
И звезды, как сейчас, по небесам кружили.
Не знаешь, как ступить на этот прах земной, —
Зрачками любящих его песчинки жили [135] .

Музаффар ушел, не промолвив больше ни слова. Он шагал в ночи, повторяя про себя четверостишие за четверостишием. Затем в его памяти снова возникли непомерно длинные и запутанные фразы Ибн ал-Хайсама. Но теперь они имели не то звучание, которое придавал им Омар, а иное, полное тепла и рифмы, словно это были стихи. У Музаффара было такое чувство, как если бы рядом с ним шагал Ибн ал-Хайсам, стараясь его уговорить: «Почему ты не понимаешь, что любой круг равен какому-то квадрату? Зачем стараешься свести постигнутую разумом истину обязательно к построению? Пока построение не подтвердит этой истины, почему ты не можешь довольствоваться

доказательством, приведенным в его пользу?» [136]). А Музаффар отвечал: «Прости меня, Ибн ал-Хайсам. Теперь я понимаю тебя и знаю, почему тебе была дорога квадратура круга, почему тебя так привлекали выдвинутые



Могила Омара Хайяма у стены мечети.

тобой доказательства. Своей красотой они утешали и обольщали тебя в твоем одиночестве, как грезы, как стихи. Если б тебе было дано знать Омара, ты был бы защищен от эпидемии квадратуры круга и твой ум открыл бы другие истины, столь же глубокие, как объем параболоидов, которым ты превзошел даже мудрого Архимеда. Прости меня, Ибн ал-Хайсам, прости, что я был так жесток к тебе».

Эпидемия квадратуры круга

Правильно понимаемая математика обладает не только истиной, но и высшей красотой, красотой холодной и суровой, подобно скульптуре..., красотой высшей чистоты, строгого совершенства, как оно может проявляться лишь в самом возвышенном искусстве.

Б. Рассел

В средние века арабская культура оказала сильное влияние на развитие науки и просвещения в Западной Европе. Благодаря тому, что арабы обращали особое внимание на естественные науки, они сумели не только передать Европе ценности античной и восточной цивилизаций [137]), но и предоставить в распоряжение европейских ученых важные открытия в математике, астрономии и других науках [138]), пробуждая этим интерес к научно-исследовательской работе, в частности к вопросам арифметики и геометрии. И если Франкон только загорелся несбыточным для него желанием посетить Испанию, другие после него могли это желание осуществить. Рассказывают, что в 1120 г. Аделард из Бата переоделся мусульманским студентом и учился в университете Кордовы. Там он приобрел список «Начал» Евклида на арабском языке, а когда вернулся из Испании, перевел их на латынь [139]). Интерес, вызванный этим переводом, был столь велик, что в том же XII столетии были сделаны еще два латинских перевода «Начал» с арабских текстов: Герардом из Кремоны [140]) и Платоном из Тиволи [141]). Греческий текст был обнаружен только в XVI в. С Герарда из Кремоны и Платона из Тиволи началась серия переводов математических работ с арабского языка.

Платон из Тиволи перевел на латынь и известную книгу по геометрии, написанную Савасордой на древнееврейском языке [142]) и названную «Liber embadorum». Эта «Книга о площадях» служила образцом для Леонардо Фибоначчи, известнейшего математика сред-

них веков, автора труда «Practica geometriae», сочиненного около 1220 г. [143]). В этой работе Фибоначчи восстанавливает и настоящий характер числа π, напоминая давно забытую, особенно квадратуристами, истину, что π не точно равно $3\frac{1}{7}$, что эта дробь представляет собой только приближенное значение этого числа. В то же время он отмечает, что π можно приближенно выразить и при помощи отношения $\frac{377}{120}$. Это значение — индийского происхождения, оно получено Арьябхатой. Отсюда можно сделать вывод, что Фибоначчи были известны работы индийских математиков — факт, подтвержденный не только книгой «Practica geometriae», но и другими его работами.

Однако Фибоначчи не довольствовался этими двумя приближенными значениями числа π, он указывает и другое:

$$\pi = \frac{864}{275} = 3{,}1418,$$

которое, весьма вероятно, было вычислено им самим. По содержанию книги видно, что ему был хорошо знаком способ Архимеда, применявшийся последним к вписанному в круг и описанному около него 96-угольникам. Фибоначчи показывает, что число π содержится между отношениями $\frac{1440}{458\frac{4}{9}}$ и $\frac{1448}{458\frac{1}{5}}$, т. е. что

$$\frac{1440}{458\frac{4}{9}} < \pi < \frac{1448}{458\frac{1}{5}};$$

приближенное значение этих отношений есть 3,1418. Таким образом, Фибоначчи определил три первых точных десятичных знака числа π. По силе суждения и математическим познаниям он стоял намного выше своих современников. Свидетельством этому может служить сочиненная примерно в те же годы геометрия Иордана Неморария, именовавшегося также Иорданом Саксонским. Это сочинение в четырех книгах, называвшееся «De triangulis» [144]), не достигает той ясности суждений, которая характерна для геометрии Фибоначчи. Это особенно относится к задаче о квадратуре

круга. Не приводя никаких вычислений, Иордан Саксонский просто утверждает, что квадратуру круга можно решить циркулем и линейкой. Между прочим, он был не единственным автором, приводящим это утверждение. Кампано из Новары тоже интересовался этим вопросом. Читая его книгу, долгое время фигурировавшую в качестве приложения к другим геометрическим трудам, можно видеть, что задача квадратуры даже не поставлена правильно: он ищет не сторону квадрата равной площади с заданным кругом, а сторону квадрата, периметр которого равен длине окружности. Как когда-то Франкон, он подменяет проблему, считая, что π точно равно $\frac{22}{7}$. Но в то время как Франкону можно было это простить, так как он не был знаком с «Началами» Евклида, для Кампано из Новары, который перевел и прокомментировал «Начала», такое упущение непонятно [145]). Что же может служить ему оправданием?

Оправдание скрывается в понятии взаимо несоизмеримых отрезков. Это понятие оставалось невыясненным в течение многих веков, так как оно не было отражением реальных фактов, вытекавших непосредственно из опыта, как это имеет место в случае соизмеримых отрезков. Поэтому квадратура круга и вызывала такое возбуждение в умах.

Напомним, что со времен попыток Ибн ал-Хайсама решить квадратуру круга до аналогичных попыток Кампано из Новары прошло не менее 300 лет, а ошибки повторялись, возрождаясь подобно птице Феникс из собственного пепла.

Сказанное не преувеличено. Вот несколько убедительных примеров. Один из самых выдающихся английских математиков XIV в., Томас Брадвардин, прозванный «doctor profundus», т. е. «глубокомысленный ученый», после выхода в свет своих весьма оригинальных трудов под общим титулом «Geometria speculativa», опубликовал еще одну книгу — «De quadratura circuli» («О квадратуре круга»). В ней он утверждал, что квадратуру круга можно решить при помощи циркуля и линейки. Он считал, что у числа π есть точное значение, которое равно $\frac{22}{7}$, хотя и писал, что читал работу Архимеда «Измерение круга» [146]).

В том же XIV в. первый ректор Венского университета [147]) Альберт Саксонский пишет сочинение под тем же названием «De quadratura circuli» [148]). В этом труде Альберт логически анализирует все доводы за и против квадратуры и приходит к выводу, что построение квадрата с площадью, равной площади заданного круга, возможно при помощи циркуля и линейки. Здесь же мы находим и историю квадратуры круга, начиная от Антифона и Брисона, а также резкую полемику с теми, кто не разделяет его мнения. Интересно, что в рукописном томе, в котором содержится эта рукопись, имеется еще одна, анонимная, работа о квадратуре круга. Ее автор пытается решить задачу квадратуры круга, основываясь на известных теоремах о квадратуре луночек.

Хотя в те годы мало знали о числе π, не все геометры соглашались с этими мнениями. В книге «Practica geometriae» Доминик Парижский подчеркивает, что число $3\frac{1}{7}$ надо рассматривать как приближенное значение отношения между длиной окружности и ее диаметром.

Уровень математического обучения тех времен можно достоверно узнать из сочинений Роджера Бэкона, бывшего к концу XIII в. студентом, а затем профессором в Оксфорде. Он пишет, что геометрическая подготовка студентов не шла дальше первых пяти положений из первой книги «Начал» Евклида [149]). Бэкон был среди тех, кто требовал введения в преподавание, в числе других дисциплин, также и «божественной математики», потому что «только она способна очистить ум и подготовить студентов к пониманию других знаний». Но пройдет еще много времени, пока под давлением новых общественно-экономических условий в образование и науку войдут научно-исследовательские методы, основанные на опыте и изучении природы, а не на умозрении.

Кандидат в профессора должен был знать первые пять — шесть книг «Начал» Евклида, но до XVI в. это, по существу, оставалось формальным условием. В некоторых университетах экзаменационная проверка знаний подменялась присягой кандидата, что он слушал лекции по этим вопросам или изучал их. Можно еще напомнить, что до XV в. вместо курса математики преподавалась а с т р о л о г и я! Читателю, наверное, будет забавно

узнать об аргументах, с которыми в XVI в. доктор Фруадмон, профессор Лувенского университета, выступал против теории Коперника: «Земля, — говорил он, — не может быть планетой, не может обращаться вокруг Солнца, ибо в центре Земли расположен *ад*, а последний должен быть как можно дальше от неба. Следовательно, Земля находится в центре небесного пространства» [150]). Между прочим, и в XVII в. многие рассуждали в том же духе. Вот что в 1661 г. мадам де Севинье писала дочери в связи с появившейся тогда кометой: «У нас здесь очень интересная комета. Это самый красивый хвост, который можно видеть. Все вельможи встревожены и думают, что небо, весьма занятое вопросом об их возможных убытках, предупреждает их посредством этой кометы».

В XVI и XVII вв. очень выросло число лиц, утверждавших, что они нашли способ построения при помощи циркуля и линейки стороны квадрата с площадью, равной площади заданного круга. Разумные люди, наверное, задавали себе вопрос: не свирепствует ли какая-то эпидемия среди всех этих искателей решения знаменитой геометрической задачи? И как всегда, когда вспыхивает эпидемия и не удается найти лекарства против нее, пытаются хотя бы воспрепятствовать ее распространению.

Работы квадратуристов интересны тем, что они стали стимулом для математиков, заставляя их искать средства для определения природы этого числа, названного π. И если продолжить сравнение с эпидемией, читателя не должно удивлять, что у многих из тех, кто искал лекарств от этой очень вирулентной болезни, начали появляться тревожные симптомы заболевания.

Но рассмотрим вопрос систематически. Первым средством, при помощи которого математики пытались остановить бедствие квадратуры, было Архимедово вычисление значения $\pi = 3{,}14$. Ибо, говорили они, любое геометрическое построение, претендующее установить квадратуру круга, должно соответствовать полученному Архимедом значению. Если такое построение приведет к значению, отличному от найденного Архимедом, оно неверно. Однако с течением времени и это лекарство оказалось недейственным. Квадратуристы проявили большую находчивость и изобрели более

тонкие конструкции, из которых вытекало, что $\pi = 3{,}14$. Но так как и эти новые доказательства казались подозрительными, лекари-математики предприняли новые исследования и добились большей точности выражения числа π. Так, к концу XVI в. Адриан Антонис [151]) определил шесть точных десятичных знаков π, выраженных отношением $\frac{355}{113}$, т. е. установил значение $\pi = 3{,}1415929...$ Читатель, наверное, помнит это отношение — китайцы нашли его намного раньше, в V в. До этого европейцам это значение не было известно, и не исключено, что оно было привезено из Китая каким-нибудь миссионером. Но также возможно, что его вновь нашли математики этого века — века подъема и страстных исканий в области математики, накопления необходимого материала для великих, ставших гордостью следующего столетия, открытий: аналитической геометрии и исчисления бесконечно малых.

Едва было установлено это новое значение π, как шести десятичных знаков показалось математикам слишком мало. И вот в 1579 г. Франсуа Виет [152]), применяя способ Архимеда к 393216-угольнику, получает первые девять точных десятичных знаков π.

Теперь мы уже очутились перед одним из т р е в о ж н ы х с и м п т о м о в болезни тех, кто стремился ставить преграду бедствию квадратуры, — погоней за десятичными знаками π. Вскоре после открытия Виета его современник фламандский математик Адриан ван Роомен [153]) вычисляет 15 точных десятичных знаков числа π. Для получения этого значения он применяет $2^{30} = 1073741824$-угольник. Многоугольник с более чем миллиардом сторон! Это кажется фантастическим! Действительно, математику ван Роомену понадобилось много лет для завершения вычислений — ведь тогда не могло быть и речи о вычислительных машинах!

Спустя три года выдающийся вычислитель Лудольф ван Кёлен взял на себя смелость применить тот же способ Архимеда к многоугольникам с числом сторон порядка 32 миллиарда 512 миллионов и получил 20 точных десятичных знаков числа π. Он сообщил об этом результате в книге, опубликованной в 1596 г. [154]). После его смерти в его рукописях были найдены еще

следующие 15 десятичных знаков. Эти десятичные знаки были столь дороги для Лудольфа, что он, не будучи собственно математиком, завещал, чтобы их высекли на его надгробном камне. В знак уважения к памяти этого блестящего вычислителя число π долгое время называлось ч и с л о м Л у д о л ь ф а.

Ф. Виет.

Удовлетворяло ли такое внушительное количество цифр тех, кто был охвачен новой страстью — вычислением десятичных знаков числа π? Отнюдь нет! Они хотели, во-первых, удостовериться, правильно ли вычислены уже известные десятичные знаки. Для этого требовались годы и годы изнурительной работы. Спасение пришло в лице голландского математика Виллеброда Снеля [155]), установившего некоторые теоремы,

при помощи которых он сумел сократить вычисления Лудольфа. В 1621 г. он проверил точность результатов последнего, получив более коротким путем найденные раньше цифры. Таким образом был сделан шаг вперед: было получено приближение дуги лучше Архимедова.

Но на этом погоня за десятичными знаками π не кончилась. Перед тем, как проследить за ней, предупредим читателя, что это было не просто некое спортивное состязание, как может показаться на первый взгляд. Не надо забывать, что XVII в. в Европе — это время бурного развития производительных сил, время, когда были заложены основы современной науки и техники. Неудивительно, что в этих условиях понадобилось как можно точнее определить число π, так как оно появлялось в разных технических задачах, как, например, в выражении, определяющем период колебания маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

или в формулах длины дуги меридиана, необходимых в мореплавании, а также в других задачах, относящихся к объему шара, цилиндра, конуса и т. п. Вот почему такие великие ученые, как Декарт, Галилей, Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц и многие другие проявляли интерес к задаче о квадратуре круга, надеясь, что при более обстоятельном изучении можно будет определить и природу числа π.

На протяжении XVI—XVIII вв. никто не мог с полной уверенностью сказать, возможно или нет решение квадратуры круга при помощи циркуля и линейки, так как тогда ни у кого не было ясного и точного представления о характере несоизмеримого отношения двух отрезков, другими словами, — о природе иррационального числа. Можно было предположить, что внушительная свита 35 десятичных знаков числа π сумеет пролить некоторый свет на его природу. Но нет! Ученые беспомощно смотрели на них, не делая никакого вывода, и в то же время пыл квадратуристов ничуть не спадал, они продолжали искать метод построения при помощи циркуля и линейки, позволяющий получить сторону квадрата с площадью, равной площади круга.

Во всех опубликованных тогда работах о квадратуре круга математики не высказывались по поводу возможности или невозможности квадратуры, а только против неверных выводов, против рассуждений, в которых допускались ошибки. Они выступали против ошибочных рассуждений как тех, кто утверждал возможность решения квадратуры при помощи циркуля и линейки, так и тех, кто такую возможность отрицал. И так как ошибкам в рассуждениях подвержен любой математик, случалось, что умелые математики падали жертвой квадратуры круга. Так получилось, например, с фламандским математиком Грегуаром де Сен-Венсаном [156]), одним из самых образованных и уважаемых ученых XVII в. В его вышедшей в 1647 г. работе под названием «Opus geometricum, quadraturae circuli et sectionum coni», т. е. «Геометрический труд по квадратуре круга и конических сечений» [157]), над которой он трудился целую жизнь, можно найти весьма интересные и строго доказанные геометрические теоремы. Если исключить из нее ошибочные теоремы о квадратуре, это — книга бесспорной научной ценности. Ее появление произвело большую сенсацию: ученые всех стран хотели ознакомиться с ней, и почти все участвовали в полемике вокруг нее или следили за дискуссией. Великий математик Лейбниц, открывший вместе с Ньютоном дифференциальное исчисление, питал особое уважение к автору этой работы и считал его одним из основателей современной геометрии.

Грегуар де Сен-Венсан являет собой образ одного из последних рыцарей уходящей эпохи. Это — рыцарь, проводивший всю свою жизнь в яростных турнирах, надеясь уловить желанную улыбку в глазах возлюбленной, к которой ему, увы, никогда не подойти для получения предназначенного победителю цветка... Ибо какой другой смысл могли иметь для него прекрасные теоремы, которые установлены им в 10 томах его труда только в надежде доказательства квадратуры круга, оказавшейся тщетной? Он был неудачным воином, умевшим молча переносить поражение.

Другая рыцарская фигура квадратуры круга этого же века, но совершенно противоположного рода — это философ Томас Гоббс [158]). В своем отношении к квадратуре круга он похож на знаменитого идальго Дон-

Кихота Ламанчского. Философ, известный своими обширными познаниями, Гоббс оказался целиком во власти квадратуры. И подобно Дон-Кихоту, не верившему Санчо Пансе, когда тот ему говорил, что услышанные им ржание лошадей и звук рогов — не что иное, как блеяние баранов, Гоббс не верил математикам, пытавшимся объяснить ему, какие он допускал ошибки в доказательствах возможности квадратуры круга. Гоббс показал себя даже еще более одержимым, чем Дон-Кихот! Ибо тот после поражения в поединке с Рыцарем белой Луны согласился вернуться в родное село и прожить там целый год в покаянии. А Гоббс до последнего года жизни без передышки продолжал писать мемуар за мемуаром не только против геометров, но и против геометрии вообще.

Два неудачливых борца за квадратуру круга

Ты знаешь, как я восхищаюсь Лейбницем.
Карл Маркс

Это было в начале ноября 1674 г. в Париже, в библиотеке ученого, математика и физика Христиана Гюйгенса.

— Вы, господин Лейбниц? А я думал, что вы больны, и поэтому послал вам домой мой ответ по поводу вашей арифметической квадратуры. Как я писал, ваша работа меня пленила [159]).

— Я в самом деле болел, господин Гюйгенс. У меня ужасно болела голова, но, прочитав ваше письмо, я обо всем забыл, и минуты до встречи с вами показались мне бесконечными. Прошу прощения за столь примитивный способ определения времени. Ведь вы установили для его измерения такую точную единицу!

— Незачем извиняться! Мне тоже знакома эта переменная единица измерения времени. Может быть, я боролся с ней как раз тогда, когда мне пришла мысль использовать маятники в качестве часов! Ну, а если мое письмо вас порадовало, мне приятно повторить, что я нашел ваше открытие очень красивым. В таком вопросе, как квадратура круга, взбудоражившем столько умов, вы обнаружили новый путь, обещающий как будто правильное решение... Судя по вашему открытию, круг относится к описанному квадрату, как бесконечный ряд дробей

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

к единице. Может быть, удастся суммировать этот ряд [160]) и, следовательно, получить квадратуру круга.

— Не могу даже выразить, как меня радует ваша оценка моей квадратуры, ибо никто не сумеет судить об этом лучше вас. Когда я думаю, что никто из тех,

кто искал точную квадратуру круга, не подозревал, что таким путем можно надеяться получить ее, я чувствую себя счастливым, обнаружив ее первым [161]).

— Все зависит теперь, господин Лейбниц, от того, сумеете ли вы указать способ суммирования этого ряда, как вы это сделали для других рядов подобного рода.

Х. Гюйгенс.

— Пока этот ряд мне кажется очень мало доступным суммированию, господин Гюйгенс. Он совсем не похож на предыдущие, и, мне думается, что следовало бы усовершенствовать метод суммирования... Я считаю все же замечательным, что мой ряд делает очевидной чудесную аналогию круга с гиперболой!

— Вы правы, ибо лорд Броункер, как и господин Меркатор, нашел бесконечные ряды рациональных чисел, при помощи которых они выразили площадь гиперболы, отнесенную к ее асимптотам, но никто из них не нашел таких же рядов для круга.

— Удалось ли мне, господин Гюйгенс, перенести задачу триангуляции круга из геометрии в арифметику бесконечных?

— Безусловно! Даже если суммировать этот ряд окажется невозможным, найденное вами замечательное свойство круга останется знаменитым открытием. Мне этот ряд очень нравится, господин Лейбниц! У него изящная структура: ряд дробей, числители которых равны единице, а знаменатели — последовательные нечетные числа с чередующимися знаками.

— Эта мысль пришла мне в голову в прошлом году, когда я находился в Лондоне. В беседе с господином Пелем [162]) о моем разностном методе суммирования числовых рядов он обратил мое внимание на работу господина Меркатора [163]). Я прочел ее и пытался идти по его пути при вычислении площади гиперболы. Но в Лондоне же я узнал нечто, представляющееся мне неустранимой дилеммой. Могу ли я говорить с вами об этом?

— Предполагаю, о чем идет речь, господин Лейбниц. Вы, наверное, намекаете на разногласие между мной и господином Джеймсом Грегори относительно невозможности квадратуры круга?

— Верно! В Лондоне мне рассказали о вашем споре с господином Джеймсом Грегори, и я читал часть вашей переписки по этому поводу [164]). Мнения, высказанные 6 или 7 лет назад в ваших письмах, как и то, что вы сегодня говорили о моем открытии, дают мне право считать, что вы сторонник квадратуры круга. Но, с другой стороны, непримиримость, с которой вы отвергли квадратуру Сен-Венсана, склоняет меня думать как раз о противоположном...

— Исследования в связи с квадратурой круга, господин Лейбниц, привели к интересным для геометрии результатам. Даже если исходить только из соображения, что не надо лишать геометров повода для продолжения таких полезных упражнений, этого достаточно, чтобы я защищал квадратуру круга против господина Джеймса Грегори. К тому же в поддержку своего мнения об аналитической невозможности квадратуры господин Грегори пользуется шаткими аргументами. Между прочим, как мне кажется, нельзя еще со всей уверенностью утверждать, что круг несоизмерим с квадратом своего диаметра. Чтобы согласиться с выводом господина Грегори о невозможности квадратуры, мне нужно

лучше знать, что за число π. И пока нельзя ничего сказать о его природе, нельзя и говорить, что квадратура круга или гиперболы при помощи циркуля и линейки невозможна!

Г. Лейбниц.

— Все же согласитесь, господин Грегори не мог ожидать, что встретит в вас противника, если учесть, что вы выступили против квадратуры Сен-Венсана. Ваша позиция его так удивила...

— Что он потерял самообладание, оскорбил меня да после этого сам обиделся [165]).

— Я слышал, господин Гюйгенс, сколько недоразумений возникло по этому поводу. Господин Ольденбург с горечью вспоминал, как он страдал за те два года

ссоры, и рассказал мне, что все в Королевском обществе были счастливы, когда все кончилось примирением.

— Я тоже доволен, господин Лейбниц, хотя в действительности каждый из нас остался на прежних позициях! Ибо господин Грегори, которого я весьма высоко ценю как очень талантливого математика и физика, предпочел уйти от моих и господина Валлиса возражений и ответил слишком невразумительно, чтобы можно было придать этому какое-либо значение [166]).

— Мне кажется, господин Гюйгенс, что в этом вашем споре имеется кое-что интересное. По-моему, именно ваши работы, где вы выступали против квадратуры Сен-Венсана и его последователей [167]), толкнули господина Грегори на поиски доказательства аналитической невозможности квадратуры.

— На первый взгляд может казаться, что я защищаю две противоположные идеи. На самом же деле, господин Лейбниц, я защищаю лишь одно: правильность математического рассуждения. Я выступал против обоих математиков, потому что у каждого есть своя ошибка в рассуждениях. А вместо того, чтобы видеть именно это, господин Джеймс Грегори обиделся на меня: он, видите ли, предполагал, что я антиквадратурист, поэтому считал меня обязанным поддерживать его мнения, включая и ошибки.

— Признаюсь, господин Гюйгенс, я тоже поспешил с выводами и неправильно понял вас. Извините меня!

— Я не обижаюсь. Это порывистость вашей молодости, господин Лейбниц, и она уже сама по себе оправдана в глазах философа! Что касается квадратуры Сен-Венсана... Ни один геометр не преследовал с таким упорством, как он, поставленную цель. Шаг за шагом, с неистощимым терпением он двигался вперед по тернистым тропам геометрии. Правда, он не достиг заветной цели, но богатым урожаем новых истин, установленных им в своем произведении, он занял видное место среди самых выдающихся геометров. Поэтому, несмотря на ее ошибки, работа Грегуара де Сен-Венсана — настоящее сокровище геометрических истин, важных и любопытных открытий.

— Я такого же мнения, как и вы! Мне трудно найти нужные слова, чтобы поблагодарить вас за то, что, когда я впервые посетил вас, вы мне рекомендовали и одолжили его работу. Помните нашу встречу еще два

года назад? Как много изменилось с тех пор в моей жизни и в моем мышлении благодаря вам и этой работе!

— Выражение благодарности по всем правилам, господин Лейбниц!

— Нет, господин Гюйгенс! Но согласитесь, что два года назад, приехав в Париж, я был неопытным геометром-самоучкой. У меня тогда не хватало даже терпения следить за длинной цепочкой доказательств... Когда я показал вам свою арифметическую машину, вы, очевидно, считали меня куда более способным, чем это есть на самом деле. Поэтому вы, наверное, и показали мне рукопись вашего труда «Horologium oscillatorium» («Маятниковые часы»), вышедшего в прошлом году. Когда мы начали говорить об этом труде, вы поняли, что у меня не было ясного представления о центре тяжести. Я покраснел от скудости своих знаний, но вы объяснили мне суть дела в нескольких словах и указали на работу Паскаля, где этот вопрос прекрасно разработан...

— Мне не запомнились все эти подробности! Помню, что я любовался тогда вашей арифметической машиной, и когда вы выразили желание изучать геометрию, я рекомендовал вам работу Сен-Венсана; я, правда, опасался, что из-за ее большого объема вы сможете утратить вкус к геометрии...

— Напротив, господин Гюйгенс! С тех пор как я взял ее в руки, у меня было такое чувство, как будто бы каждая страница звала меня, обещая несметные богатства. Я с большим интересом проследовал по дорогам, пройденным Сен-Венсаном. Некоторые вопросы, затронутые им, мне так понравились, что я изучил их глубже, идя по дороге, указанной Паскалем. Вы не забыли еще, господин Гюйгенс, послеобеденных часов, когда я приходил к вам за объяснениями и уходил поздно вечером?

— Это были и для меня весьма приятные дни! Поэтому я и не позволял вам так скоро покидать меня.

— Если бы вы знали, как я жаждал найти такого учителя, как вы, то не говорили бы, что я пытаюсь «объясниться» в признательности! Как только я защитил докторскую диссертацию, я поехал в Нюрнберг, так как слышал, что там есть тайное общество деятелей науки, работающих в области химии и ищущих фило-

софский камень. Мне хотелось познакомиться с ними и стать химиком [168]). Но это общество меня не удовлетворило, я не нашел там никого, кто мог бы наставлять меня...

— А вы и не нуждаетесь в наставнике. Работа, которую я сейчас прочел, показывает, что вы превзошли Сен-Венсана.

— Ваши слова придают мне уверенность, господин Гюйгенс! Не могу передать, каким теплым чувством повеяло на меня со страниц Сен-Венсана! Утомленный поисками, я находил в них ясность, помогавшую моим мыслям. Конечно, геометрия в большом долгу перед Галилеем и Кавальери, вновь открывшими сложнейшие методы Конона и Архимеда. И все же геометрию неделимых Кавальери я рассматриваю как детство возрождающейся геометрии. Самую ценную помощь она получила от триумвирата Ферма, Декарта и Сен-Венсана. Ферма открыл метод максимума и минимума, Декарт нашел способ для представления линий обыкновенной геометрии с помощью уравнений, а Сен-Венсан, даже если он и не решил квадратуры круга и гиперболы, сделал много красивых открытий. Благодаря ему я понял геометрию и полюбил ее больше любой другой науки. Как мне хотелось бы познакомиться и поговорить с ним хоть один раз...

— Ваше желание уже невозможно выполнить, господин Лейбниц. Сен-Венсан вот уже 7 лет как покинул нас навсегда. Когда я встретился с ним в 1651 г., т. е. около 23 лет тому назад, Сен-Венсану было 67 лет. Он уже был знаменит своими познаниями, я же был неизвестным молодым человеком. Он жил в уединении в доме иезуитов в Генте. Его комната была полна книг, а на столе лежали листы, исписанные формулами и фигурами. Я написал ему и просил его мнения о посланной ему моей работе, которую я опубликовал в связи с его квадратурой. Он дружески улыбнулся мне и сказал: «Как вам не терпится узнать мой ответ, сударь, вы молоды!..» Мне казалось, что он играет со мной. При расставании он добавил: «Каковы бы ни были наши математические отношения, знайте, что я вас высоко ценю и буду всегда для вас настоящим другом». И действительно, до смерти он остался верным другом, несмотря на то что я не мог похвастаться хорошим отношением к нему.

— Я очень мало знаю о вашей полемике с Сен-Венсаном. Мне известно только то, что мне рассказали об этом, когда я был в Лондоне.

— Не удивительно! Когда происходил этот спор, вам было два, может быть, три года.

— Теперь, после того как я прочел не только работу Сен-Венсана, но и ваши ответы, хотелось бы ближе познакомиться с предметом полемики. Вам не трудно будет рассказать об этом?

— По некоторым причинам мне это не очень легко, но пусть это будет искуплением. Книга Сен-Венсана лежит здесь перед нами [169]), но для того, чтобы не перепутать фактов, я поищу и письма. Тотчас же после выхода работы мне написал М. Мерсен. Как вы знаете, он был тогда душой группы ученых, которые проявляли живой интерес к новым научным открытиям и познаниям. Вот что он писал: «Если бы мы могли найти центр тяжести твердого тела, образованного при вращении рулеты или трохоиды, мы получили бы доказанную Сен-Венсаном квадратуру круга, о которой он напечатал работу в Антверпене. Может быть, эта работа у вас уже есть? Сгораю от любопытства узнать ваше мнение, как только вы изучите его мемуар» [170]).

— Скромный мемуар в 1225 огромных страниц! — рассмеялся Лейбниц.

— Через несколько дней М. Мерсен написал и моему отцу: «Мы здесь ждем работу о квадратуре круга, написанную вашим соседом Сен-Венсаном, которая напечатана в Антверпене... Если господин Декарт будет среди первых, увидевших ее, его суждение будет для меня решающим». Как вы видите, 27 лет назад все с нетерпением ждали эту работу или отзывы о ней. Тогда Мерсен вел обширную переписку с учеными, и можно сказать, что он был настоящим президентом мировой академии. Между прочим, и господин Паскаль говорил о нем как об ученом, обладающем особым талантом ставить интересные проблемы. На письмо М. Мерсена я не мог ответить раньше чем через год, так как до этого не находил книги Сен-Венсана. Я жил тогда в Бреде, и хотя там же находился и господин Пель, у которого эта книга имелась, он не пожелал показать ее или высказать определенное мнение о ней. Приобрел я работу Сен-Венсана только во время поездки в Гаагу. Тогда я смог свободно изучить ее. Я нашел в ней очень увлекатель-

ные вещи, в частности об объеме цилиндрических и параболических клиньев, которыми занимался и я, и даже сообщил господину Пелю об одном из полученных там результатов [171]). Что касается квадратуры, я не получил о ней ясного ответа ни от одного из знакомых мне математиков, к которым я тогда обращался. Поэтому мне пришлось самому очень внимательно и долго заниматься этим вопросом. В первую очередь я постарался уточнить, что понимал Грегуар де Сен-Венсан под словами «per ductionem plani in planum» [172]), а затем я вновь установил одно за другим предложения, на которые указывают ссылки в книге X. Предложение 53 можно было легко понять, отсюда я должен был возвратиться к предшествующему ему предложению 52, которое тоже было сравнительно легким, но от него мне надо было перейти к несколько туманному предложению 44. А так как предложение 44 основывалось на предложении 43, а тут следовала отсылка к предложению 42, я остановился на доказательстве последнего, в связи с чем мне предстояло уточнить смысл слова «continere» [173]). Таким образом я и установил, что предложение 40 ошибочное. Оно основывается на предложении 38, доказательство которого непонятно. Здесь и появляется порок квадратуры Сен-Венсана [174]).

Гюйгенс объяснил, в чем состоит противоречие, содержавшееся в этой теореме, затем добавил:

— На мое письмо М. Мерсен ответил: «Сударь! Поскольку вы один из первых, кто осмелился высказаться по поводу большой, чрезвычайно длинной и нудной книги Сен-Венсана о квадратуре, скажу, во-первых, что автор предлагает проблему более сложную, нежели квадратура, которую он не решает. Он ни линиями, ни числами не объяснил превращение круга в квадрат, что ему полагалось бы сделать, будь он уверен в своей квадратуре. Кроме того, на днях мне рассказали, что один из наших геометров, проживающий в Блэ, обнаружил в ней паралогизмы. Думаю написать ему, чтобы он мне их указал, и, если он это сделает, сообщу вам немедленно» [175]).

— Мне не нравится, как Мерсен выразился о Сен-Венсане, — сказал Лейбниц, после того как они вместе с Гюйгенсом прокомментировали указанные в письме теоремы.

— Но все же он представлял общественное мнение, — ответил Гюйгенс. — Господин Декарт написал об этом не только Мерсену, но и моему учителю господину профессору Франсу ван Схоутену [176]), находившемуся тогда в Лейдене, а последний впоследствии сообщил мне содержание этого письма.

— А о геометре из Блэ что он вам написал?

— Ничего, ибо в том же году М. Мерсен умер. Я узнал, что речь шла о господине Флоримоне де Боне, друге и комментаторе книги господина Декарта. Однако в вышедшей тогда, в 1647 г., книге «Reflectiones physico-mathematicae» («Физико-математические размышления») М. Мерсен упоминает установленные Сен-Венсаном теоремы о квадратуре круга, указывая, что они неверны, поскольку автор предполагает, что, если даются три любые величины и логарифмы двух из них, можно геометрическим путем получить логарифм третьей величины. На эти обвинения ответил в напечатанном в 1649 г. *ин-фолио* в Антверпене бывший ученик Сен-Венсана Альфонс Антуан де Сараса. Это была замечательная защита работы учителя [177]). За это время я уже обнаружил действительную ошибку в доказательстве. Я занимался тогда теоремами, связанными с определением центров тяжести гиперболических и эллиптических отрезков. Мою работу проверил господин ван Схоутен, который настаивал, чтобы я ее как можно скорей опубликовал. У меня возникла идея добавить в конце работы критику квадратуры, но мой отец посоветовал мне не делать этого, прежде чем я не узнаю у автора, придерживается ли он еще утверждений, приведенных в книге. Я послушался и 6 октября 1651 г. отправил Сен-Венсану первое письмо. Мне неприятно опять прочесть его... Оно звучит как объявление войны... Я прямо потребовал, чтобы он публично признался в допущенной ошибке, иначе я оглашу свои результаты... Конечно, он почувствовал себя оскорбленным тоном моего письма. Это видно из его ответа, где он советует печатать мою работу и добавляет: «Я призывал всех этих критиков опубликовать свои мнения, но все пятятся назад, одни под одним предлогом, другие — под другим». 25 октября я ему опять написал: «Вы предлагаете опубликовать мое мнение, и я его опубликую. Уверяю вас, что пятиться назад, что, как вы говорите,

делают другие, не собираюсь. По-моему, они очень плохо поступают...» Мое упорство и искренность ему, наверное, понравились, потому что на это письмо я получил весьма любезный ответ. Сен-Венсан говорил в своем письме, что я оказался энергичным, талантливым молодым человеком, и он рад, что не имеет дела с хвастуном. Примерно через два месяца Сен-Венсан получил мой небольшой труд «Theoremata» («Теоремы»), включающий во второй части...

— «Exetasis...» — «Исследование циклометрии ученого Грегуара де Сен-Венсана», опубликованный в 1647 г., — прервал его Лейбниц. Он взял со стола названную им книгу и, перелистав ее, продолжал: — Я хорошо с ней знаком! Введение, озаглавленное вами «К читателю», по-моему, очень учтивое. Если разрешите, я прочту следующий отрывок: «Я не пытался умалить авторитет серьезного и эрудированного мужа, но, увлеченный красотой вопроса, считал, что смогу свободно и без оскорблений изложить установленное мною. Тем более, что в одном из писем, которыми время от времени мы обмениваемся, он сам говорил мне об этом открыто и даже потребовал, чтобы я опубликовал мои комментарии. Я принял с радостью и признательностью этот особый признак невиновности и надеюсь доказать скромностью моей критики, сколь сильно мое желание считаться другом ученого автора. Человечность, проявленная им до сих пор, дает мне право ожидать от него скромного и лишенного жестокости ответа, если он будет считать, что ему есть что возразить, или же что он примет и признает более правильными установленные мною сегодня положения, которые позже все равно установили бы другие...»

— Сочиняя эту работу, я надеялся, господин Лейбниц, убедить Сен-Венсана в недостатках его квадратуры [178]) и ждал его суждения, измеряя время теми капризными единицами, о которых вы мне только что говорили... Я ему несколько раз писал... Он мне ответил только тогда, когда получил мою работу. Вот это письмо, датированное 18 февраля 1652 г. Оно начинается так: «Тон вашего письма кажется плаксивым, в нем стоны и упреки, как часто бывает между друзьями...» Он обещал удовлетворить мое желание, когда у него будет время ответить на все высказанные ему сомнения и возражения. Я ничего не получил от

него, несмотря на мою просьбу указать, хотя бы в двух словах, на мою ошибку.

— А когда вы посетили его? Намного позже после получения им вашей работы?

— Да, примерно через 6 месяцев, в июле 1652 г. Мы с отцом уезжали из Фландрии. Перед тем как доехать до Антверпена, я попросил, чтобы мы заехали в Гент. Я вам уже рассказал, какой дружеской была наша встреча. Однако в отношении квадратуры я и тогда ничего определенного от него не узнал. Через несколько месяцев я услышал, что ученик Сен-Венсана Аинском написал работу, в которой выступает против «Exetasis». Вскоре после этого известный немецкий геометр Алоизий Киннер из Лёвентурна, тоже бывший ученик Сен-Венсана и друг его, в письме, адресованном мне, оспаривал правильность моего утверждения из «Exetasis», что Сен-Венсан отдавал предпочтение первой квадратуре. Сен-Венсан прежде всего имел в виду вторую квадратуру, б о л е е л е г к у ю, говорил автор письма, добавляя, что он собирается резюмировать и разъяснить работу своего учителя.

— Не о труде ли «Elucidatio geometrica Problematis Austriaci sive quadratura circuli» («Геометрическое разъяснение австрийской проблемы о квадратуре круга») идет речь?

— Да, именно о нем! Он мне недавно прислал свою книгу, и я ему ответил, указав точное место, где допущена ошибка в этом доказательстве, но, мне кажется, не сумел убедить его [179]). В том же году Леотан Венсан опубликовал в Лионе работу «Examen circuli quadraturae» («Проверка квадратуры круга»), в которой тоже выступил против квадратуры Сен-Венсана. Это же сделали потом и другие, например Андреа Таке, профессор математики в Лувене, пытавшийся, как я уже вам рассказал, обратить меня в католицизм [180]).

— Очень странно вел себя Сен-Венсан, господин Гюйгенс! Сколько математиков волнуются, пишут письма, печатают книги или памфлеты — а он молчит!

— Я больше не мог терпеть и в начале 1654 г. опять написал ему, спрашивая, где же апология, сочиненная Аинскомом?

— И это письмо тоже осталось без ответа?

— Нет, на этот раз он немедленно ответил. Он писал, что Аинском болел в течение 7 месяцев... Прошло еще

два года, когда я совершенно неожиданно получил экземпляр книги Аинскома.

— Я знаком с этой работой, господин Гюйгенс. Вот она имеется и у вас. На этих 182 страницах *ин-фолио* ученик пытается защитить своего учителя от всех его противников. Вам лично, по-моему, автор со всей теплотой выражает свое уважение, когда пишет, что, «хотя и самый молодой, вы первым применили в выступлениях против квадратуры методы, достойные геометров»!

— Я слишком долго ждал эту работу, господин Лейбниц, и, увидев ее, подумал, что нет больше смысла отвечать на нее. За это время компетентные судьи признали мою правоту, и мне нечего было добавлять. Все же после ее чтения желание ответить было сильнее меня, и через месяц ответ был уже напечатан. Мне хотелось не столько указать автору на допущенную ошибку, сколько выступить в защиту господина Роберваля, которого он без всякого смысла впутал в это дело в письме, напечатанном в его работе. Я сразу же послал свой ответ Аинскому, но он хранил молчание и тогда, и через год, когда я ему снова написал. Более того, другие иезуиты, с которыми я раньше вел переписку, перестали отвечать мне, даже когда я им посылал другие свои работы. Некоторые из них, лично мне даже незнакомые, стали вдруг моими яростными противниками и пытались мстить мне. Например, К. Шотт, опубликовавший 10 лет назад свою книгу «Technica curiosa» («Тщательная техника»)...

— Я ее тоже читал, но не помню, чтобы я нашел там какое-нибудь оскорбление по вашему адресу.

— Я, господин Лейбниц, имел в виду не такого рода месть, а другую, более тонкую. Если вы помните, там говорится о трактате, содержащем описание и конструкцию маятниковых часов, но имя изобретателя нигде не упоминается, несмотря на то что в книге воспроизводится даже чертеж из моей работы 1660 г. Тем же приемом пользуется и Кирхер: он хвалит изобретение маятниковых часов [181]), опять, разумеется, без указания автора.

— А как вел себя Сен-Венсан?

— О, замечательно! В связи со своей квадратурой он больше ничего не написал мне, но, получив мою работу «Horologium ...», ответил в очень теплых выражениях,

что изобретение ему понравилось. Так возобновилась наша переписка. Лишь через несколько лет, очутившись в положении, напоминавшем то, в котором находился он, я понял, какую боль причинил я ему, и восхитился его выдержкой.

— Вы, наверное, намекаете на ваши работы по открытию кольца Сатурна?

— Да, другой раз я вам расскажу о разоблачении Жилем часовщика-жулика, построившего часы по моему описанию и представившего их папе как свое изобретение, и покажу относящееся к этому письмо Сен-Венсана [182]). Или о том, как он меня ободрял и защищал, когда римские иезуиты пытались опровергнуть мои наблюдения о кольце Сатурна. Какое дружеское письмо получил я от него, когда мне удалось одержать победу над Оноре Фабри, главарем заговора, направленного против меня!

— Эти письма — лучшее доказательство того, что Сен-Венсан остался вашим другом до конца жизни. Если он вам больше не написал о квадратуре круга, значит, он признал свою ошибку. Думаю, что он был одним из немногих, понимавших, что наука может двигаться вперед *только благодаря сотрудничеству ученых*. Какая разница между ним и господином Гоббсом!..

— Господином Гоббсом? Ваше сопоставление заставляет меня смеяться! Что дало вам повод вспомнить о нем, господин Лейбниц? Хотя он и видный философ, его поведение в качестве квадратуриста — полная противоположность по сравнению с великим и замечательным Сен-Венсаном.

— Теперешнее его отношение к господину Валлису просто скандально!

— Это еще ничего! Мой опыт с господином Грегори позволяет понять, что господин Гоббс мог потерять самообладание и напасть на господина Валлиса, который тоже не остался в долгу. Но напасть, по сути, на *математику* только для того, чтобы утвердить свою *квадратуру*, — это никуда не годится для философа! Вы имели возможность познакомиться с ним в прошлом году, когда были в Лондоне?

— Да. Я его еще вижу перед собой. Почти двухметрового роста, он держится прямо, несмотря на свои 80 лет. У него высокий лоб мыслителя, живые

глаза, затененные кустистыми бровями орехового цвета, круглое лицо. Он лысый, с рыжей бородкой клином. По-моему, знающие геометры могут так же не обращать внимания на высказывания господина Гоббса против Евклида, как на возражения господина Жозефа де Скалигера против Архимеда. Ни один настоящий геометр не сомневается в правильности доказательств великих греческих мыслителей [183]).

— Об этом и речи не может быть, господин Лейбниц! Именно поэтому все мне кажется таким нелепым. Когда господин Гоббс опубликовал первую свою работу о квадратуре круга, я вместе с господином Валлисом и другими математиками выступил против его паралогизмов. Между прочим, утверждение господина Гоббса, что он установил квадратуру круга, было тогда предметом оживленной переписки между математиками. Теперь господин Гоббс обижен и больше не пишет мне, как в начале своей карьеры математика.

— Значит, и вы считаете правдой историю о геометрии господина Гоббса, раз вы говорите о «начале его карьеры математика»?

— Безусловно, господин Лейбниц! Он сам говорил об этом в весьма широком кругу, когда находился в Париже в доме М. Мерсена. Это произошло, наверное, в 1634 г., когда он впервые приехал в Париж, потому что в 1655 г., написав «De corpore» («О теле»), он уже считал себя достаточно умным геометром и посвятил квадратуре круга некоторые главы книги. Ничего удивительного нет в том, что господин Гоббс услышал о геометрии только после того, как ему исполнилось 40 лет. Ведь Оксфордский университет получил профессора геометрии лишь после 1619 г., когда он уже не был студентом. Он рассказывал — и я ему верю, — что, будучи в Париже, он впервые на столе в библиотеке одного знакомого увидел «Начала» Евклида. Они были открыты на 17 предложении книги I. Он с любопытством прочел его и удивленно подумал: «Как может Евклид утверждать такое?» Продолжая читать доказательство и закончив его, он был поражен этим замечательным методом установления одной истины на основании другой, доказанной прежде. Тогда он молниеносно влюбился в геометрию.

— Похоже на то, что эта поздняя любовь помутила его разум. А так как он по натуре своей обидчив, то

не может простить Оксфорду, что тот не научил его геометрии заблаговременно. В первом своем труде «Левиафан», утвердившем его как философа, он упрекает университеты, что они не посвящают молодых в современные науки, что большинство их считают геометрию «ars diabolica», дьявольским искусством, а преподающих ее профессоров — связанных с лукавым. Правда, ныне студенты Оксфордского университета уже изучают геометрию.

— Господин Гоббс и в «De corpore» повторяет нападки на университеты, господин Лейбниц. Я даже нахожу, что в этом он прав. Меня же как математика забавляла, в частности, глава о квадратуре круга, на решение которой он претендует. По-моему, господин Джон Валлис в качестве профессора геометрии в Оксфорде не мог не ответить ему и не показать, какие смешные погрешности он допускает в своих рассуждениях. Как вы знаете, он это сделал в опубликованной в 1659 г. книге, озаглавленной «Elenchus geometriae Hobbianae» («Исследование геометрии Гоббса»).

— Боюсь, что господин Гоббс не сумел понять научной аргументации господина Валлиса, и, может быть, поэтому он с такой смелостью отверг ее и остался при своем мнении.

— Безусловно! С его точки зрения его доводы хорошо обоснованы. Однако в математике ум и логика недостаточны. Здесь необходим и определенный багаж знаний. Так как Гоббс этим багажом не владел, он дал господину Валлису материал для новых нападок. Меня ответы господина Гоббса начали забавлять. С одной стороны, я слежу за его утверждениями, с другой — за ответами господина Валлиса. Вы, наверное, тоже заметили, с каким мастерством господин Валлис владеет оружием насмешки. Поэтому, верите вы или нет, признаюсь, что всякий раз, возражая против паралогизмов господина Гоббса, я не знал, хорошо я делаю или нет, потому что очень не хотелось заставить его замолчать [184]).

— В этом отношении вы можете быть совершенно спокойны. Господин Гоббс не только не замолчит, но он еще более распалится и станет красноречивее и яростнее. Теперь, как вижу, ему кажется недостаточной борьба со здравствующими математиками, он взялся и за Евклида. Какой смех вызвал в прошлом году

в Лондоне «Lux mathematica» («Математический свет») и особенно ответ на «Lux», напечатанный господином Валлисом в «Transactions».

— Вот что недавно мне написал господин Ольденбург: «Бедный господин Гоббс! Поскольку в Англии

Д. Валлис.

не так уж много сочувствующих ему людей, он взывает к заграничным деятелям, посылая им свои работы...» [185]). И добавляет: «... а опасение, что среди них тоже не найдет сторонников, заставляет его обращаться к потомкам». А знаете, господин Лейбниц, я очень признателен господину Гоббсу, ибо только благодаря ему мне довелось насладиться столькими восхитительными произведениями. Никто не превосходит

господина Валлиса в умении разрушать сооружения господина Гоббса и делать в связи с этим столь неожиданные замечания и открытия. Я в недоумении часто спрашиваю себя, как объяснить, что человек с образованием и силой мышления господина Гоббса не в состоянии понять паралогизмы, которые многие математики стараются разъяснить ему?

— Разве вы не замечали, господин Гюйгенс, что люди часто отвечают не на то, что мы им говорим, а на то, что по их мнению, мы должны были бы им говорить?

— Очевидно, вы правы, господин Лейбниц, и, пожалуй, это и есть ответ на мой вопрос. Но какая бы ни была причина его непонимания, я с нетерпением жду новые творения господина Гоббса.

— Я думаю, что господин Гоббс — выдающийся философ, но своими математическими произведениями он вредит своему авторитету. Однако боюсь, что отнял у вас слишком много времени. Уверяю вас, что никогда не забуду этих часов, проведенных вместе с вами среди квадратуристов.

Вновь среди квадратуристов

> ... Я считал бы, что недостаточно жил, если бы умер прежде, чем закончил все интересные исследования, которым когда-либо посвятил себя.
>
> *К. Ф. Гаусс*

Как читатель, наверное, помнит, Виллеброд Снель установил формулы, позволяющие упрощать вычисления, при помощи которых определяются первые 35 десятичных знаков числа π. Если математики вначале были очень довольны этим открытием, то, ближе ознакомившись с вопросом, они обнаружили, что формулы Снеля недостаточно строго обоснованы, и они начали искать обоснование, удовлетворяющее их требованиям. Такое обоснование дал в 1654 г. великий геометр Гюйгенс в своей книге «De circuli magnitudine inventa» («О найденной величине круга») [186]), в которой также были и другие интересные теоремы, показывающие, как строить простым путем отрезки прямой, в достаточной мере аппроксимирующие дугу окружности [187]). Установленные Гюйгенсом теоремы позволяют также сузить пределы, между которыми содержится длина дуги. Применяя свои формулы к шестиугольнику, Гюйгенсу удалось уточнить первые девять десятичных знаков π, в то время как Виету для такого приближения потребовался почти 400 000-угольник. Работы Гюйгенса представляют очевидный прогресс в исследованиях по квадратуре круга. Прочитав примечание 164, читатель может получить представление и о методе, которым воспользовался Джеймс Грегори.

Декарт также придумал остроумный способ определения числа π, но он стал известен лишь посмертно, в 1701 г., когда были опубликованы некоторые его при жизни не изданные произведения. Изучение этого способа возобновил в 1737 г. великий математик Эйлер, а затем и другие ученые; ныне он известен под названием метода изопериметров [188]). В его основе лежит

следующая идея: вместо того, чтобы определять значение числа π при помощи правильных многоугольников, периметры которых стремятся к длине окружности, используют правильные изопериметрические многоугольники с числом сторон n и $2n$ и устанавливают отношение между радиусами вписанных в них и описанных около них кругов [189]), когда число сторон становится бесконечно большим. Выдающийся математик А. М. Лежандр [190]) разработал метод, который по аналогии можно было бы назвать методом «изоплощадей». Этот метод позже привел к результатам, проложившим путь к решению вопроса о природе числа π. Остановимся на этом и поразмыслим над методами, которыми пытались получить значение числа π. Все они являются как бы «вариациями на одну тему», лейтмотив которой — старый метод Архимеда. Прогресс состоял только в том, что более поздние варианты удобнее для вычислений. Однако число π продолжало хранить свою тайну.

Были ли математики подавлены ею? Отнюдь нет! Остается, следовательно, пройти по другим тропам, которыми ученые пытались достичь решения запутанной задачи о числе π. Мы это сделаем, вернувшись к Виету и примененному им методу для получения девяти десятичных знаков π. Всмотревшись внимательно в формулу, выражающую отношение площади квадрата к площади описанного вокруг него круга, Виет заметил, что число π можно выразить бесконечным произведением сомножителей:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdots;$$

заменив косинус дуги его значением, предыдущую формулу можно записать в виде

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \ldots}.$$

Любопытная формула! Она походит на фантастический лабиринт с тысячами комнат, в которых прячется число π. Если мы его ищем под первым радикалом, то обнаруживаем дверь, ведущую ко второму радикалу, через которую оно удрало от нас. Если преследовать его

дальше, оно находит убежище под третьим радикалом, как бы охраняемым дробью $\frac{1}{2}$, и так далее.

В этом выражении для $\frac{2}{\pi}$ всегда присутствует дробь $\frac{1}{2}$, связанная с другой, подобной ей дробью легко понятным и ясно определенным законом. Достаточно написать первые два множителя, чтобы без труда узнать, какова форма следующего или 50-го множителя. Может показаться странным, что умножением б е с к о н е ч н о г о количества чисел можно получить к о н е ч н о е число — число, обратное числу $\frac{\pi}{2}$. В средней школе знакомятся только с произведениями конечного числа сомножителей. Но как можно вычислить такое произведение, сомножители которого мы никогда не сумели бы выписать, даже если бы посвятили этому всю свою жизнь? Математики, однако, сумели перепрыгнуть через эту пропасть между к о н е ч н ы м и б е с к о н е ч н ы м. Это им удалось при помощи так называемого *предельного перехода*. Этот процесс, смутно предвиденный еще Архимедом, стал предметом славы науки XVII в. [191]).

Путь в бесконечность волнует! Неудивительно, что многих математиков бесконечное прямо-таки зачаровало. Глубокий мыслитель Г. Кантор, осмелившийся проникнуть далеко по тропе бесконечности, в промежутках между припадками безумия рассказал о том, что ему открылось на этой тропе. Другой гениальный математик — Давид Гильберт — говорил: «Никогда никакая другая проблема не волновала так глубоко человеческий ум, как проблема бесконечности». Великий Валлис [192]), так ловко владевший рапирой насмешки, возможно, тоже трепетно вздрогнул, когда в свою очередь открыл бесконечное произведение, которым он выразил число π. И какое произведение! Вот оно:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \ldots}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \ldots}.$$

Оно напоминает дробь, числитель которой образуется из квадратов четных чисел в возрастающем порядке, а знаменатель состоит из квадратов нечетных чисел. А если мы напишем в знаменателе единицу только один раз, то запишем это бесконечное произведение в виде

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots$$

Есть еще много бесконечных произведений, скрывающих в себе тайну числа π. Вот, например, два бесконечных произведения, полученных Эйлером:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdots$$

и

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdots$$

Они имеют вид игры с числами, специально придуманной для серьезных математиков. Кроме числа 2, эти произведения содержат только бесконечное количество нечетных чисел либо в квадрате, либо в четвертой степени.

Вот еще любопытное выражение:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ldots}}}}}$$

Это — продолжающаяся до бесконечности дробь, также состоящая из числа 2 и из ряда квадратов нечетных чисел. Выражение такого рода называется *непрерывной дробью*. Эту формулу без всякого доказательства [193]) можно найти в книге Валлиса, вышедшей в 1665 г. и озаглавленной «Arithmetica infinitorum...» («Арифметика бесконечных...»). Там указывается, что она установлена не автором, а его другом Уильямом Броункером. Только через 120 лет ее доказательство было дано Эйлером [194]), который нашел еще много других непрерывных дробей, выражающих число π, как, например,

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \cfrac{7 \cdot 9}{4 + \ldots}}}}},$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1 \cdot 3}{8 + \cfrac{3 \cdot 5}{8 + \cfrac{5 \cdot 7}{8 + \cfrac{7 \cdot 9}{8 + \ldots}}}}}$$

Если бесконечные произведения кажутся дверьми, открывающимися в бесконечность, то эти непрерывные дроби представляются лестницами, прыгая по которым со ступеньки на ступеньку в поисках числа π мы как бы спускаемся в бездну бесконечности.

Л. Эйлер.

Мы говорили здесь о бесконечных произведениях и непрерывных дробях. На деле именно бесконечные ряды были первыми огоньками, зажженными во мраке бесконечности. Их зажег еще Архимед, когда он вычислил площадь параболического сектора при помощи геометрических прогрессий со знаменателем, меньшим единицы. Примерно через две тысячи лет придуманный им метод суммирования бесконечных рядов был вновь открыт математиками и стал эффективнейшим средством

исследования [195]). Джеймс Грегори открыл в 1670 г. ряд, выразивший $\operatorname{arctg} x$ через дугу x:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Грегори не заметил, что этот ряд имеет отношение к числу π. Только через три года Лейбницем был открыт ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

являющийся частным случаем предыдущего ряда при $x = 1$. Последний ряд Лейбниц получил иным путем, чем Грегори. Позже этот ряд вновь был открыт Т. Ф. Ланьи [196]), который установил, что он непригоден для приближенного вычисления числа π, так как только для получения первых трех его десятичных знаков понадобится более 300 действий [197]). Зато из выведенного Ньютоном [198]) ряда

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

при значении x, равном $\frac{1}{2}$, получается числовой ряд

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{3}{2^7 \cdot 5} + \frac{5}{2^{10} \cdot 7} + \ldots,$$

при помощи которого легко вычислять первые 14 десятичных знаков π.

Таким образом, былая погоня за десятичными знаками числа π с начала XVIII в. превратилась в горячую скачку. Авраам Шарп [199]) вновь обращается к формуле Грегори и, беря для дуги x значение $\sqrt{\frac{1}{3}}$, находит ряд

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \ldots\right).$$

Суммируя члены этого ряда, он получает 72 точных десятичных знака числа π. Семьдесят два десятичных знака! Это настоящее опьянение цифрами. Ведь для вычисления длины окружности, радиус которой равнялся бы расстоянию от Земли до самой отдаленной туманности, с погрешностью, меньшей 1 *мм*, достаточно первых 40 десятичных знаков числа π. Несмотря на это,

астроном Джон Мэчин после получения указанного результата вычислил 100 десятичных знаков [200]), а затем Ланьи — 128 десятичных знаков числа π [201]). Через короткий промежуток времени великий Эйлер, который был не только выдающимся математиком, но и замечательным вычислителем, открыл другой ряд, применив

И. Ньютон.

его для проверки сделанного Ланьи вычисления 128 десятичных знаков числа π. Он выполнил эту проверку в рекордно короткое время — за 80 часов, обнаружив одновременно, что Ланьи допустил ошибку: 113-я цифра не 7, как было у него, а 8 [202]). Чтобы яснее представить рекордно короткое время вычисления, достигнутое Эйлером, предположим, что он беспрерывно занимался этим 8 часов в день; тогда, исходя из обычных темпов вычисления, для установления 128 деся-

тичных знаков числа π ему потребовалось бы 10 дней. Получается, таким образом, что за час Эйлер выполнял ту же работу, на которую рядовому вычислителю требуется 3 часа. Значит, рекордно короткое время Эйлера соответствует в среднем месяцу вычислительной работы, что является огромным прогрессом по сравнению с результатами вычислителей XVI и XVII вв., трудившихся целые годы для определения только одной трети такого количества десятичных знаков.

Эти вычисления укрепили убеждение в том, что π — не рациональное число. В самом деле, альтернативой этого могла быть только следующая маловероятная гипотеза: существуют два целых числа, отношение которых выражает π, но эти числа такие большие, что период [203]) дроби, получающейся при делении, содержит более 128 десятичных знаков, вычисленных Эйлером.

Выходит, что работа математиков-вычислителей не была лишена смысла. Она говорила в пользу того, что в последовательности десятичных знаков числа π нет никакой периодичности. Одновременно разнообразные методы, открытые при определении этих десятичных знаков, — все эти многоугольники со все возрастающим количеством сторон, бесконечные непрерывные дроби или бесконечные ряды — значительно расширили область поисков, связанных с природой числа π. (Как читатель, наверное, помнит, Гюйгенс подчеркивал, что только после познания природы числа π математики сумеют сказать, возможна ли квадратура круга при помощи циркуля и линейки.) Разнообразные способы, применявшиеся для определения числа π, позволили установить новые соответствия между длиной дуги окружности и числами, представленными либо бесконечными рядами, либо бесконечными произведениями, либо бесконечными непрерывными дробями.

Виднейший математик того времени Даламбер резюмировал знания о квадратуре круга в знаменитой «Энциклопедии» [204]) следующими словами: «Квадратура прямолинейных фигур относится к области элементарной геометрии и означает определение их площади путем превращения в прямоугольник. Ибо легко можно получить затем квадрат, равный по площади заданному прямоугольнику: для этого надо найти среднее пропорциональное двух сторон прямоугольника. Квад-

ратура кривых, т. е. способ измерения ограниченной ими площади или получения площади, равновеликой площади прямоугольной фигуры, решается более тонкими рассуждениями, относящимися к высшей геометрии» [205]).

Архимед, по-видимому, был первым математиком, осуществившим криволинейную квадратуру при получении площади параболы. Квадратура круга означает получение квадрата с площадью, равной площади заданного круга. Эта задача бесплодно занимала умы математиков на протяжении очень многих веков. Она сводится к определению отношения длины окружности к ее диаметру, что до сих пор точно сделать не удалось. Если бы это отношение было известно, можно было бы легко осуществить квадратуру круга, так как доказано, что его площадь равняется площади прямоугольного треугольника, высота которого равна радиусу круга, а основание — длине окружности. Однако, несмотря на то что квадратура кривых фигур и особенно круга была предметом изучения знаменитейших математиков древности, ничего значительного в этом направлении нельзя было достигнуть до середины прошлого столетия, когда был найден способ геометрического доказательства равенства некоторых криволинейных площадей прямолинейным. Задача квадратуры круга сводится, таким образом, к альтернативе: либо получить эту квадратуру, либо доказать, что она невозможна. Большинство математиков принимает только первую часть этой альтернативы. Однако вторая часть целиком отвечает содержанию задачи. Квадратура круга неразрешима в том смысле, что решение задачи не может быть точным, а только приближенным, хотя приближение может быть сколь угодно близким. Архимед установил метод, при помощи которого без особых затруднений можно получать новые точные и надежные цифры. Он указал, что отношение длины окружности к ее диаметру лежит в пределах между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$. Квадратуристы же не хотят учитывать этого факта и стараются точно выразить длину окружности. Для того чтобы точно измерить эту длину, ее следует выразить геометрическим отрезком, используя все, что известно о природе кривой, т. е. о ее геометрических свойствах. Но в этом отношении за некоторым не таким

уж далеким пунктом путеводные огни перестают светить нам, и мы двигаемся ощупью во мраке.

Пока математики не смогут вынести окончательный приговор по поводу квадратуры круга, квадратуристы, считал Даламбер, будут стремиться выполнить «миссию», которую, по их мнению, им доверили. Для того чтобы утвердить за собой право приоритета, в завоевании которого они не сомневаются, они будут посылать Парижской Академии наук мемуар за мемуаром со всякого рода ошибками.

Вначале, когда число таких произведений было не настолько велико, чтобы лечь тяжелой ношей на плечи академиков, эти мемуары считались забавным делом и чтение их доставляло удовольствие энциклопедистам.

Энциклопедисты забавляются

Моей души предел желанный!
Как часто по брегам твоим
Бродил я тихий и туманный,
Заветным умыслом томим!

А. С. Пушкин

Париж. Конец апреля 1775 г. В литературном салоне госпожи Леспинас, где часто собираются деятели науки, горели огни, и хозяйка дома, тихо напевая модную песенку, ждала гостей. Первым вошел Даламбер [206]). Он и жил ближе всех других: ему достаточно было только спуститься по лестнице, связывавшей комнаты второго этажа с гостиной. Он обрадовался хорошему настроению госпожи Леспинас, тем более что в последнее время ему казалось, что жизнь в ней еле теплилась, как слабое, колеблющееся пламя лампады, готовое ежесекундно погаснуть [207]). Вскоре доложили и о прибытии академика Кондорсе [208]). Высокого роста и крепкого сложения, с большой головой, с присущей ему неловкостью движений, придававшей всему его облику что-то ребяческое, он весело подошел к хозяйке и Даламберу и тепло пожал им руки. Друг за другом появлялись и остальные: «энциклопедист» Дидро, аббат Морелле, графы Шателю и Гибер. Все они радовались предстоящей встрече.

— Как у вас дела с внутренним судоходством, маркиз де Кондорсе? — спросил Гибер. — Я слышал, что вы получили столько проектов, что можно преобразовать весь Париж и всю Францию.

— Верно. Их оказалось так много, что я уже не был в состоянии все просмотреть. Поэтому господин министр де Тюрго вынужден был назначить комиссию, в которую входит и господин Даламбер. Но и так вряд ли мы скоро закончим их изучение.

— Новые проекты появляются, как грибы после дождя, — добавил Даламбер. — Вносятся самые фантастические предложения для того, чтобы связать между собой все речушки и реки. Если осуществить

все эти предложения, то вся Франция превратится в сеть тысяч и тысяч пересекающихся между собой каналов...

— Как фантастический узор, — весело прервала госпожа Леспинас. И мечтательно продолжала: —

Ж. Даламбер.

Если бы Леонардо да Винчи или кому-нибудь другому удалось построить летательную машину, можно было бы наслаждаться прекрасной картиной воды, прилежно бегущей из одного канала в другой, и гладью ее зеркала, сияющего на зеленом фоне полей... Я словно слышу ее журчанье.

— Возможно, но только при условии, что ваше воображение заставит реки протекать по этим каналам. Потому что мы, люди, подвластные тирании разума и кропотливым вычислениям, пришли к выводу, что в большинстве случаев по проектируемым каналам не потекло бы и капли воды, разве только пот землекопов, — рассмеялся Кондорсе.

— Это правда, маркиз де Кондорсе, что вы посоветовали господину де Тюрго не верить хвастунам-прожектерам, которые думают, что для решения вопроса нужно только рвение, а знания не важны? [209]) — спросил Морелле.

— Он был вынужден так говорить, — сердито возразил Даламбер, — поскольку большинство рассмотренных нами проектов является не чем иным, как плодом тщеславия. Они не основываются ни на знании действительности, ни на данных техники и науки. Мы потратили уйму времени, читая эти творения, полные бахвальства и чванливого бреда [210]).

— Не из племени ли квадратуристов их авторы? — улыбнулся Дидро.

— Хорошо сказано, господин Дидро, но их правильнее называть квадратуристами господина де Тюрго, чтобы можно было отличить их от действительных квадратуристов, — вставил Кондорсе и подмигнул в сторону Даламбера.

— Вы, не зная этого, господин Дидро, затронули больное место, — сказал Даламбер, хлопая в ладоши. — Наш друг Кондорсе внес это уточнение потому, что ему, как секретарю Академии, только что поручили выступить с докладом о квадратуристах.

— Наконец-то и Академия наук будет обсуждать знаменитую проблему, — несколько вызывающе заметил Гибер.

— Ошибаетесь, — в тон ему ответил Даламбер. — Мы этим займемся только для того, чтобы оградить себя от квадратуристов.

— Чтобы оградить себя? — удивился Гибер. — Что вы этим хотите сказать, господин Даламбер?

— Что мы сыты по горло идиотскими сочинениями квадратуристов! Они нам доставляют бесконечные хлопоты, а хлопот ведь хватает и без квадратуристов. Не раз это изматывающее силы занятие мешало нам уделять должное внимание серьезным исследованиям [211]).

— Прошу прощения, господин Даламбер, если я осмеливаюсь брать под сомнение сказанное вами! Но я не понимаю, как вы, не читая произведения, можете заранее утверждать, что в нем нет решения квадратуры круга! — возразил Шателю.

— Уверяю вас, господин Шателю, что все свалившиеся на нас в Академии писания квадратуристов полны самых нелепых утверждений. Наука ничего бы не потеряла, если бы их никто не рассматривал.

— Странная эта проблема квадратуры круга! Куда ни повернешься, только и слышишь о ней. И все же, признаюсь, я не так уж много знаю о ней, — сказал Гибер. — Поэтому у меня есть одно предложение, тем более что среди нас находятся три «энциклопедиста», из которых два являются корифеями математических наук, а господин Дидро тоже хороший знаток этой области [212]). Как вы смотрите на то, чтобы попросить их изложить для нас эту пресловутую и таинственную проблему, гипнотизирующую так много людей?

— В качестве хозяйки я с энтузиазмом присоединяюсь к предложению графа Гибера и думаю, что никто не возразит.

— Даже если бы все мы возражали, вашим решением жребий уже брошен, — улыбнулся Дидро.

— Тогда дадим слово господину Даламберу для похвального слова квадратуре круга.

— Прежде всего, считаю своим долгом обратить внимание уважаемой аудитории, что похвала входит в обязанность господина Кондорсе, — весело начал Даламбер. — Он их сочиняет с таким мастерством, что вызвал даже энтузиазм господина Вольтера, назвавшего его панегиристом «выше Фонтенеля» [213]). А мы хорошо знаем, как высоко ценили похвалы Фонтенеля. Затем, вместо похвалы квадратуре круга, я хотел бы предложить похвалу квадратуристам. Ибо рассказы о некоторых приключениях этих людей, жаждущих завоевать крепости науки без необходимой для этого подготовки, сделают наш вечер более приятным. Кроме того, этот предмет близко знаком опять-таки господину секретарю Академии. Его фантастическая память оснащена всеми видами оружия, выкованного из материалов сотен прочитанных и изученных им статей, и, таким образом, он сумеет выстоять в начинающемся сражении.

— Я не против, — с готовностью ответил Кондорсе. — Прошу только разрешить мне выпить эту чашку превосходного кофе, сваренного собственной рукой нашей хозяйки.

Госпожа Леспинас поставила на столик стакан воды, а рядом со столиком — кресло. Затем с видом настоящего президента Академии серьезно объявила:

— Господину маркизу де Кондорсе предоставляется слово для воздания хвалы видным квадратуристам.

Кондорсе занял указанное ему место. С улыбкой на губах он поклонился и, направив свои взоры поверх голов присутствующих, словно что-то там увидел, с воодушевлением начал говорить:

— Уважаемые господа. С вашего разрешения я поведу вас по этой галерее, где выставлены портреты квадратуристов прошлых столетий и сегодняшних дней. Коллекция богата, и потребовалось бы много времени, чтобы остановиться у каждого портрета и выслушать историю его оригинала. Поэтому предлагаю остановиться только у тех из них, которые по каким-либо причинам обратят на себя наше внимание. Например, я вижу, что наш друг Морелле пристально смотрит на ясные и мечтательные глаза кардинала Кузанского.

Перенесемся в 1450 г. Будущий кардинал, сын скромного рыбака из деревни Куза, всем своим существом тянется к знаниям. С детства его интересовало все окружающее, и он бесконечно задавал один и тот же вопрос: «Почему это так?» Он слушал лекции в знаменитых тогда университетах Гейдельберга и Падуи, и страстная любовь к астрономии и геометрии овладела его душой. Астрономия захватила все его думы, и он не побоялся написать работу, в которой, вопреки церковным канонам, утверждал, что в центре Вселенной находится не Земля, а Солнце. Как известно, эта истина утвердилась лишь 80 лет спустя, так что кардинала Кузанского можно считать предшественником Коперника. Он благоволил также к геометрии, и квадратура круга притягивала его, как в детстве море, когда он часами стоял на берегу и смотрел на причудливую игру волн. Теперь он дни и ночи подряд размышлял, ища новый метод решения задачи о квадратуре круга. И в один прекрасный день ему показалось, что он нашел это решение. Ему можно это простить, ибо тогда геометрические знания, получаемые в университетах, были

очень незначительными. Его весьма остроумный метод не лишен, между прочим, значения [214]), так как он пытался измерить длину окружности при помощи отрезка, по которому, по его предположению, круг катился бы без скольжения. Другими словами, он приходит к определению и свойствам одной из интереснейших кривых, которой позже суждено было найти много практических применений в геометрии и механике...

— Вы имеете в виду циклоиду? — с интересом спросил Шателю. — Поскольку речь идет о качении круга, я вспомнил, что господин Гюйгенс использовал эту кривую в своей работе о часах.

— Верно, господин Шателю, и я поздравляю вас с тем, что вы читали книгу господина Гюйгенса.

— Насколько я знаю, математики прозвали эту кривую «Еленой геометрии», — сказал Дидро.

— Еленой? — удивился Гибер, остановив свой взгляд на взлохмаченных волосах Дидро, который, в отличие от всех, не носил парика. — В состоянии ли кривая вызывать страсти и сражения, подобно прекрасной Елене?

— Да, и еще какие яростные! — рассмеялся Даламбер.

— Однако по отношению к великому Паскалю она была покорна и ласкова, — скороговоркой добавила госпожа Леспинас.

— Разве? Надеюсь, господин Кондорсе не обидится, если мы прервем его и попросим госпожу Леспинас рассказать об этом.

— Конечно, я тоже готов слушать.

— Хорошо, я вам расскажу, хотя об этом случае я узнала от господина Даламбера. Это случилось после обращения Паскаля в католичество, когда он жил в Пор-Рояле. Он страдал от бессонницы, у него болели зубы и желудок. В одну из ночей, когда зубная боль превзошла всякую меру, его мысли остановились на циклоиде. Он нарисовал кривую и начал вспоминать известные ее свойства. Это привело его к открытию других, неизвестных свойств, которые он с упоением уточнял, забывая о зубной боли и обо всем на свете. Когда лучи Солнца постучались в его окно, он был так счастлив и почувствовал такой прилив энергии, что целых восемь суток продолжал заниматься циклоидой

и решать задачи, пришедшие ему на ум в ту прекрасную ночь.

— Что за народ эти математики, не правда ли, господин Гибер? — поддразнил Дидро.

Б. Паскаль.

— Эта была его лебединая песня! — грустно продолжала госпожа Леспинас. — Полученные результаты Паскаль опубликовал под псевдонимом Амос Детонвиль.

— Вы хотите окружить это последнее приключение Паскаля атмосферой сентиментальности, в то время как оно носило явный характер вызова! — саркастически заметил Даламбер.

— По-моему, наш друг прав, — присоединился Кондорсе. — Этим последним своим математическим трудом Паскаль бросил вызов французским и английским математикам.

—Оставьте же в покое вашу Елену! — вмешался Морелле. — Мне интересно узнать, что дальше делал мой кардинал.

— Как я уже сказал, — снова заговорил Кондорсе, — кардинал Кузанский старался найти формулу для отрезка прямой, по которому круг катился бы без скольжения.

— Но это же бесподобно! — восторженно воскликнул Гибер. — И не придумаешь ничего более точного! Это как бы измерение круга ниткой.

— Именно так думал и кардинал Кузанский. Он умер с радостным чувством, что он решил задачу, так долго мучившую и его, и других. Поэтому у него такое безмятежное лицо, друг Морелле. Однако вскоре после этого известнейший в те времена математик Регномонтан [215]) указал, что если применять метод кардинала Кузанского при установлении отношения длины окружности к ее диаметру, то значение этого отношения уже не будет содержаться в пределах, определенных Архимедом. Другими словами, все было лишь иллюзией!

— А какую же ошибку он допустил? — удивленно спросил Гибер.

— Пустяковую! — иронически ответил Даламбер.— Вместо того, чтобы рассматривать длину отрезка прямой как почти равную длине окружности, он считал ее абсолютно равной, т. е. упустил скромное слово «почти».

— Вот и я употреблю это слово, — сказал Дидро, продолжая начатую Кондорсе игру. — Почти рядом с кардиналом Кузанским висит, если не ошибаюсь, портрет Леонардо да Винчи, не так ли?

— Правильно, — серьезно ответил Кондорсе. — Мы все еще в XV в., сразу же после смерти кардинала. Леонардо да Винчи, гениальный художник и в то же время глубочайший мыслитель, тоже заинтересовался проблемой квадратуры круга. Но его богатое образование, а может быть, интуиция заставили его сомневаться в возможности ее решения при помощи циркуля и линейки. Ему были знакомы работы Архимеда в связи с измерением круга, которые он нашел в приобретенных им тогда рукописях [216]). В оставшихся после него заметках можно прочитать следующее замечание: «Квадратура круга — это хорошо сказано, но плохо сформу-

лировано. Хорошо сказано, потому что Архимед доказал, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, образованного окружностью и половиной ее диаметра; плохо сформулировано, потому что определяется квадратура 96-угольника, у которого отсутствуют 96 сегментов, отсеченных из круга 96 сторонами многоугольника. Это ни в коем случае нельзя назвать квадратурой круга, однако не менее правильно то, что иначе поступить нельзя».

Не думайте, однако, что мнения Леонардо или Регномонтана оказались достаточно вескими, чтобы остановить порыв квадратуристов. Многочисленные портреты в этой галерее доказывают обратное. Я опять вижу, многоуважаемый друг Морелле, как вы смотрите на другого прелата. Хотите узнать, кто он такой? Его преосвященство философ Шарль де Бовель, который примерно в 1500 г. был профессором в Нуайоне. Как он стал квадратуристом? Кажется, совсем случайно... Может быть, по вине теплого весеннего дня, когда дрожащие блики просвечивали через молодую зелень деревьев и в коляске проезжали двое влюбленных, при виде которых философ опустил глаза? Ничего точно не известно, ибо он только признает, что идея квадратуры пришла ему в голову, когда он «смотрел, как вертится колесо на мостовой». И так как от колеса до циклоиды не больше шага, Бовель сделал его, идя по следам кардинала Кузанского. Он больше ничего не читал, ни о чем не говорил, кроме как о квадратуре. А с кем только он не говорил об этом? Даже с беднягой крестьянином, тоже ставшим квадратуристом. Больше того, будучи человеком бескорыстным и честным, он напечатал открытие упомянутого крестьянина рядом со своим на страницах одной из шести книг работы «Geometricae introductiones, libri VI» («Шесть книг введения в геометрию»), вышедшей в 1507 г. Таким образом, сразу появилось два претендента на решение квадратуры, при этом каждый из них установил ее и одновременно ошибся на свой лад [217]). Между прочим, труд Бовеля пользовался успехом, его и теперь ценят. Его заслуга в том, что он обратил внимание математиков на неизвестную еще тогда циклоиду.

Чувствую, дорогой друг Дидро, что вы хотите спросить, кто эта благородная личность, перед которой

вы остановились. Прочли ли вы на его лице страстное желание приобщить к математике тех, кто недостаточно знаком с ней? Это Оронс Финь, бывший профессор математики в учебном заведении, ставшем впоследствии знаменитым. Оно называется Коллеж де Франс. Есть и другие причины, делающие этого профессора симпатичным. Например, в молодости он возражал против конкордата между Францией и Ватиканом, что стоило ему шести лет тюрьмы. Может быть, ему там составила компанию квадратура круга, которая неоднократно помогала разгонять скуку людям, попавшим в такое же одиночество. В преподавательском мире были очень высокого мнения о нем, и ему присвоили звание королевского профессора математики. В 1530 г. он опубликовал книгу «Promathesis» («Предварительная математика»), включавшую, кроме арифметики, геометрии и астрономии, также и к в а д р а т у р у к р у г а. Он же перевел работу Бовеля [218]) с латинского на французский, а через два года напечатал брошюру «De quadratura circuli» [219]) («О квадратуре круга»). Как только появилась эта брошюра, она стала мишенью для настоящей канонады. Сигнал к обстрелу был дан выдающимся профессором университета в Коимбре Педро Нуньесом [220]) в его труде «De erroris Orontii Finei» («Об ошибках Оронса Финя»), опубликованном в 1546 г. И. Бутео [221]), бывший ученик Финя в Королевском коллеже, выступил против своего учителя, за ним последовали многие другие. Все эти нападки были напрасны. Квадратура воздвигала такие сильные баррикады вокруг Финя, что он не отступил от своего мнения даже перед лицом смерти. Почувствовав приближение конца, он попросил своего лучшего друга опубликовать и другие его открытия, относящиеся к квадратуре и другим проблемам. В первый же год после его смерти печатаются четыре тома под названием «De rebus mathematicis hactenus desideratis» («О математических вопросах, до сих пор не решенных»), содержащие все его паралогизмы. Это сочинение сопровождается биографией автора.

Вы спрашиваете, оказали ли выступления Нуньеса или Бутео какое-нибудь воздействие на других квадратуристов? По-видимому, нет, ибо через 40 лет в стенах того же учебного заведения горделиво поднимается другой квадратурист. Вот рядом его портрет. Но, если

я не ошибаюсь, вас, граф Шателю, больше интересует левая группа в голландской одежде? Она заслуживает вашего внимания. Здесь вы видите Симона Кверкуса, или Симона ван дер Эйке. Можно поклясться, что это истинный голландец, и все-таки он настоящий француз и зовут его Симон дю Шен. Он бежал в Голландию из-за гонений, которым подвергались протестанты, и там квадратура круга помогала ему переносить тоску по родным местам. В 1584 г. он напечатал книжку «Quadrature du cercle ou manière de trouver un carré égal au cercle donné et au contraire» («Квадратура круга, или Способ нахождения квадрата, равного данному кругу, и обратно»), в которой указывает, что отношение длины окружности к ее диаметру можно точно представить при помощи дроби $\left(\frac{39}{22}\right)^2$. Так как величина этого отношения — 3,1425 — оставалась в установленных Архимедом пределах, доказать его ошибку было нелегко.

— Я вас совершенно не понимаю, господин Кондорсе, — возмутился Гибер. — Почему это отношение непременно должно было быть верным? Откуда это знали математики?

— Есть у нас, математиков, такое особенное чувство, шестое — вставил Даламбер.

— Не слушайте его, — примирительно продолжал Кондорсе. — Обнаружить ошибку помогла сама конструкция ван дер Эйке [222]). В математике никогда не верят на честное слово, а надо, чтобы приведенное доказательство выстояло перед логическим рассуждением. А его доказательство не выстояло. Через год голландец Адриан Антонис противопоставил значению $\left(\frac{39}{22}\right)^2$ другое — правильное — значение: $\frac{355}{113}$, дающее шесть десятичных знаков. Новый результат, однако, не обескуражил Симона. Он пересмотрел вычисление и опубликовал второе издание своего труда, где отношение длины окружности к ее диаметру принимает форму $\sqrt{\sqrt{300}-8}$. Эта величина уже выдержала сопоставление со значением, полученным Антонисом. Потом появился другой голландец, Лудольф ван Кёлен, который опять напал на квадратуру ван дер Эйке, выложив перед ним 20 точных десятичных знаков, хотя он вычислил целых 35.

— Тридцать пять десятичных знаков? Должно быть, этот Лудольф был настоящим гением, вторым Архимедом!

— Ошибаетесь, господин Гибер. Лудольфа ван Кёлена нельзя назвать математиком, это был только вычислитель. Он родился в бедной семье и не имел возможности изучить ни латинский, ни греческий язык, а еще меньше математику. Но у него был особый талант для вычислений. Это был, как у нас принято говорить, прирожденный вычислитель. Он был также преподавателем фехтования и гимнастики в Бреде, Амстердаме, Дельфте и других городах Голландии. Его гимнастический зал посещали многие богатые купцы, и в перерывах учитель фехтования забавлял своих учеников, без труда решая любую арифметическую задачу, придуманную голландскими купцами. От этих же купцов услышал он и о решении квадратуры круга ван дер Эйке. И так как Дельфтский бургомистр Грозио, страстный квадратурист, перевел на голландский язык труд Архимеда об измерении круга, Лудольф получил возможность ознакомиться с этой работой. Более того, он пользовался ею для проверки результатов ван дер Эйке. Следуя методу Архимеда, он взял вписанный в круг правильный пятиугольник и непрерывно делил на две половины его ребра, пока не получил 10 485 760-угольник. Считая, что периметр такого многоугольника достаточно аппроксимирует длину окружности, он вычислил с его помощью величину отношения длины окружности к ее диаметру, определив при этом 20 точных десятичных знаков. Вычисления продолжались много лет, но он полюбил это дело и не мог уже расстаться с ним. Его слава вычислителя стала такой широкой, что, когда в Лейдене создалось инженерное училище, он был приглашен туда в качестве профессора математики. В дальнейшем Лудольф ван Кёлен повторил применявшийся Архимедом способ, начав с квадрата и дойдя сначала до 1 073 741 824-угольника, а потом и до 32 512 254 720-угольника! В 1596 г. он опубликовал в Дельфте работу «Van den circkel» («О круге»), где изложил полученные результаты.

— Интересная страсть, — тихо сказала госпожа Леспинас.

— Вы очень правильно уловили суть этого увлечения. Только страсть может толкать на такой путь,

иначе подобные вычисления повергли бы в страх любого человека, — подтвердил Кондорсе. — Но почему вы вздрогнули, дорогая наша хозяйка, увидев висящий перед вами портрет? Не бойтесь, Жозеф де Скалигер был веселым и благовоспитанным человеком. Он по происхождению француз. Очутился он в голландской группе только потому, что его пригласили преподавать в Лейденской Академии и он остался там. Это был известнейший филолог и историк конца XVI в. Здесь он кажется очень сердитым, но у него есть веские причины для этого.

Как попал сюда портрет этого знаменитого филолога? Здесь нет никакой тайны и никакой ошибки. Видный филолог Жозеф де Скалигер, автор высоко оцененной в ученом мире хронологии, стал страстным квадратуристом, и эта страсть овладела всем его рассудком. В 1594 г. он опубликовал очень изящно напечатанную книгу с включенными в текст фигурами, выполненными красной краской, что тогда было большой редкостью. Эта работа, озаглавленная «Cyclometrica elementa duo» («Два элемента циклометрики»), явилась настоящим сюрпризом для всех, особенно для математиков. Из нее они узнали, что бедняга Архимед запутался в своих вычислениях и поэтому не мог достичь квадратуры круга. Теперь он, Скалигер, считает себя обязанным исправить Архимеда и установить истинную квадратуру. Как ни пытались лучшие математики эпохи — Виет, Клавий, Адриан ван Роомен и даже Лудольф ван Кёлен — доказать ему, что рассуждение Архимеда безупречно, а его, Скалигера, рассуждение неправильно, — все было бесполезно. Он не сдался перед тем доводом, что если считать его вычисления правильными, то значение отношения длины окружности к ее диаметру станет равным $\sqrt{10} = 3{,}16...$ Иными словами, если при помощи такого значения вычислить периметр вписанного в круг 196-угольника, этот периметр оказался бы больше длины круга. Скалигер и его сторонники, неистово защищавшие свои мнения [223]), ничего не признавали и, обидевшись на всех математиков, отвечали им руганью и презрительными эпитетами, в конце концов объявив всех геометров совершенными невеждами в области геометрии.

Очень много плодилось в то время квадратуристов не только в Голландии! Так много, что мы лишены

возможности даже упомянуть их имена. Предлагаю поэтому пойти дальше, ибо какой смысл упоминать эти имена, если мы не можем выслушать высказывания их владельцев? Остановимся здесь, ибо я вижу, как пристально смотрит господин Гибер на этого испанского мечтателя. Давайте удовлетворим его любопытство! Оно вполне оправдано. Посмотрите на этот портрет, изображающий благородный облик поэта! А разве геометрия не проникнута поэзией? Можете и вы убедиться в этом, господин Гибер, ознакомившись с книгой о квадратуре круга рыцаря Хаиме Фалькона, изданной в 1587 г. в Антверпене. Вы найдете в ней весьма изысканный диалог в стихах между автором и кругом. Вы увидите, как глубоко взволнованный круг выражает свою радость, признательность и любовь автору, сумевшему превратить его, неказистого, в гордый квадрат! Ответы и обоюдные любезности необыкновенно интересны, и чтение их доставляет истинное наслаждение. Испанцем является и другой вдохновенный и пылкий квадратурист — Альфонс Кане де Молина. В опубликованной им в 1598 г. в Амбересе книге «Nuovos descubrimintos geometricos» («Новые геометрические открытия») он доказывает, что Евклид якобы допустил ошибки в 27 теоремах! Вы, конечно, догадываетесь, что все названные теоремы как раз те, которые мешали нашему испанцу установить квадратуру круга. У Молины было много почитателей, и его книгу, чтобы сделать более доступной для ученых, в 1620 г. перевели на латинский язык.

Вам, господин Шателю нравится портрет, на который вы сейчас смотрите? Это блистательный Кательди, профессор Болонского университета [224]). Знаете, почему он так самодовольно улыбается? Потому что в 1625 г., на последнем году жизни, он сдал в печать свою вторую книгу в защиту древних геометров. У его книги длинноватый заголовок: «Difesa d'Euclide dovesi dimostra la oppositioni dati dal sig. Juan Alfonso Molino Cano a molte propositioni degli Elementi d'Euclide non essere di valore et, si mentiene chiara la certissima doctrina d'essi Elementi» («Защита Евклида, где опровергается мнение г-на Альфонса Кане де Молины о том, что многие предложения «Начал» Евклида неверны, и где разъясняется несомненное учение этих «Начал»»). Как видите, Кательди восстанавливает истин-

ность положений Евклида, столь поспешно опороченных пылким испанцем. Между прочим, за шесть лет до этого тот же Кательди беспощадно выступил против знаменитого Скалигера и опроверг обвинения, выдвинутые последним против Архимеда.

Да, вы правы, господин Дидро. Кажется, «подгнило что-то в Датском королевстве». Доказательство тому — портрет старого и угрюмого астронома Христиана Северина Лонгомонтана, перед портретом которого вы стоите. Квадратура круга убила улыбку на губах этого выдающегося астронома, бывшего ученика Тихо Браге [225]). Она была бы очень уместна на таком лице. В 1622 г. Лонгомонтан опубликовал работу «Cyclometria lunulis reciproci demonstrata» («Циклометрия, доказанная с помощью взаимных луночек»), в которой утверждает, что длина окружности с диаметром, равным единице, в точности равна 3,15185. Многие известные математики, среди которых Виет, Гюйгенс, Снель, Генри Бриггс, Гульдин и Пель, старались втолковать ему как коллеге по специальной области знаний, а не как профану, что он ошибся. На всякий довод Лонгомонтан отвечал другими доводами, отвергая подряд вычисления Виета, Адриана ван Роомена, Лудольфа, и с ожесточением защищал квадратуру. Последние 25 лет жизни он отдал исключительно вычислениям по квадратуре, и в 1644 г., за три года до смерти, была издана его вторая книга: «Christiani Severini Longomontani Cimbri Rotundi in plano seu circuli absoluta mensura» («Христиана Северина Лонгомонтана Киммерийца круглое в плоском, или Абсолютная мера круга»). Для всех математиков эта работа оказалась грустным сюрпризом. В ней Лонгомонтан уже не пользуется только логическим рассуждением, но прибегает и к мнимым таинственным свойствам чисел 7, 8 и 9, воображая, что таким путем можно установить подходящие методы для решения квадратуры круга [226]). Джон Пель показал несостоятельность его идей, но Лонгомонтан не признал своих ошибок и ушел из жизни обиженный, никем не признанный.

Посмотрите, какая разница между выражением глаз на портрете Лонгомонтана и на висящем рядом портрете, не правда ли, госпожа Леспинас? Их тоскливый взгляд как бы говорит о потерянном рае. Ричард Уайт, прозванный Альбием, был уверен, что нашел квад-

ратуру круга, и опубликовал полученное решение в своей книге «Chrysospis seu quadratura circuli» («С золотым щитом, или Квадратура круга») [227]). Однако друзья указали ему на совершенную ошибку, и он признал ее. Это было нелегкое дело. Квадратура круга была единственным огоньком в его жизни, и вдруг этот огонек погас. Да, господин Дидро, его теплый и кроткий взгляд являет полный контраст с этими вот сверлящими глазами вашего коллеги философа Гоббса...

— Которым я и господин Даламбер восхищаемся за его независимое отношение к традиции и авторитету. Я бы даже просил у аббата Морелле отпустить ему грехи квадратуры, — быстро парировал Дидро.

— Я тоже присоединяюсь к вашему мнению, — добавила хозяйка дома. — Я тоже очень хорошо отношусь к Томасу Гоббсу, ведь он был ценителем тонкой беседы. «Если не иметь возможности вести остроумную беседу, — говорил он, — твой разум и находчивость будто покрываются мхом, подобно старому плетню» [228]). Поэтому он однажды отказался от гостеприимства одного графа, обладавшего, помимо всего, и хорошей библиотекой. Граф, говорил Гоббс, собрал много стóящих книг, но принять приглашение, лишающее его приятной беседы, он не желает.

— Ну, как я вижу, у Гоббса тут много поклонников, поэтому не буду больше о нем злословить. Ограничусь только тем, что сообщу вам, что в свои 90 лет философ Гоббс нашел в себе достаточно энергии для напечатания последнего памфлета против математиков, озаглавленного «Decameron physiologicum» («Физиологический Декамерон») [229]). Этим «Декамероном» он заключает длительную вереницу ругани в адрес математиков и математики, пытаясь спасти квадратуру круга, которую, по его глубокому убеждению, он установил.

А теперь посмотрите на этого господина, французского инженера Бертрана де ла Коста, жителя Гамбурга. Он тоже жертва жестокости математиков! В том же 1666 г., когда великий Ньютон закладывал основы теории света и разрабатывал идею всемирного тяготения, Бертран де ла Кост публикует свое произведение о квадратуре. Прошу прощения, если моя память пропустит что-нибудь из заглавия этого творения. Постараюсь воспроизвести его как можно точнее: «Доказательство квадратуры круга, являющейся

единственным венцом и важным предметом всей математики, в котором видна частица, о которой говорит Архимед, которую искали и не могли найти столь много достойных людей и мудрых философов еще за несколько веков до Рождества Христова, с помощью которой можно видеть линию рулетты, которую никто еще не нашел, потому что не сумел открыть квадратуру круга».

— Браво! — расхохотались все, дружно аплодируя.

— Книга, напечатанная в Гамбурге, выдержала с промежутком в 11 лет два издания, — продолжал Кондорсе. — Автора не удивило, что после появления этого творения ни одна академия наук во всем мире не поспешила отметить его и воздать ему должные почести, ибо у него имелось определенное мнение о научной любознательности ученых, когда речь идет об открытиях других. Поэтому он решил послать свое произведение академику Каркави с просьбой представить его Парижской Академии наук. Ученый тоже не торопился с этим. Тогда Бертран дал волю своему перу для восстановления запятнанной чести, а перо, не уставая, писало, пока не поставило последнюю точку в четвертом опусе. У этих страшных «каркавианов» имеются в хронологическом порядке следующие заглавия, дающие вам, наверное, ключ к их содержанию: «Будильники для пробуждения совести мнимых математиков из Королевской Академии наук»; «Разочарованный мир, или Доказательство двух средних пропорциональных»; «Никого больше не обманете, или Продолжение Будильников»; «Это смерть не крыс и мышей, а парижских академиков, или Доказательство трисекции угла» [230]).

Теперь прошу вас ускорить шаги не только потому, что мы отстали, но и потому, что грубость и невежество квадратуристов, мимо которых мы теперь проходим, а также претензии фанатиков, портреты которых вы видите слева, вызывают у нас всех чувство отвращения. Я опять восхищен вашим выбором, господин Гибер! У этих симпатичных людей, которые нас теперь встречают, нет другой страсти, чем заключать пари. Да, заключать пари на предмет квадратуры круга! Вот этот — господин Матюлон, фабрикант из Лиона [231]). Помимо фабрики, единственное, что занимало его, — это квадратура круга и вечный двигатель. Найденные им решения этих проблем после долгих попыток пока-

зались ему такими верными, что он заявил во всеуслышание, что держит пари на 3000 франков (уже внесенных им в банк) с тем, кто сумеет доказать хоть м а л е й ш у ю о ш и б к у в его рассуждениях в любом из двух «открытий». Это происходило примерно в 1728 г., т. е. около 47 лет назад.

— Откровенно говоря, господин Кондорсе, это мне очень нравится, — прервал Гибер, улыбаясь. — А что дальше?

— Что дальше? Из рядов оскорбленных господином ла Костом академиков [232]) поднялся самый молодой, Франсуа Николь, которому тогда исполнилось 30 лет, и выиграл пари [233]). К своей чести, Матюлон признал ошибку, но не смог рассчитаться за проигранное пари, так как Николь отказался от денег в пользу Лионской больницы. Матюлон считал, что условия пари не соблюдены, и обратился в суд. Слушание дела состоялось, и Лионский сенешаль разрешил передать эти деньги бедным.

— Прошу вас заметить, друг Морелле, что проблема квадратуры круга приобрела и черты милосердия, — вставил Дидро.

— Такими случаями может похвастаться не только Лион, но и Париж, — продолжал Кондорсе. — Менее 20 лет назад шевалье де Коссан узрел квадратуру круга, когда смотрел на клумбу газона. Так как у него было богатое воображение, идеи хлынули одна за другой, и он распознавал в квадратуре круга множество самых разных вещей, как-то: первородный грех, отклонение магнитной стрелки, проблему долготы и другие. Поражаясь широте этой знаменитой задачи, он открытым письмом предложил заключить пари на все свое имущество, примерно в 300 000 франков, с лицом, которое сумело бы его опровергнуть и внесло бы в качестве аванса 10 000 франков. На это предложение откликнулось много людей. Среди желающих выиграть пари оказалась и молодая барышня, которая депонировала требуемую сумму у нотариуса. Однако осуществлению пари помешал король, узнавший об этом деле. Он хорошо относился к Коссану и не хотел, чтобы тот стал нищим. Решение короля оскорбило Коссана, и он просил поддержки со стороны Академии.

Однако уже поздно и через несколько минут двери выставки закроются. Множество не осмотренных нами

портретов говорит о том, что если число лиц, основательно знающих геометрию, все время растет, то число квадратуристов не уменьшается. Хотелось бы также отметить одну любопытную деталь: по датам, указанным на представленных Академии рукописях, можно заключить, что большинство их сочинялось весной. То же явление заметил и один наш хороший друг, который в письме господину Даламберу и мне сообщил, что Берлинская Академия тоже весной получает больше всего сочинений о квадратуре круга. Не напрашивается ли вывод, что весна — самая благоприятная пора для приступов квадратуры?

— А почему бы и нет? Ведь весна — также пора любви, другой проблемы, решения которой опять-таки могут быть лишь приближенными! — улыбнулся аббат Морелле.

— Только не забудьте, — добавил, смеясь, Даламбер, — что приближение может идти сколь угодно далеко!

Все присутствующие заразились весельем Даламбера, но напряжение, вызванное выступлением Кондорсе, не сразу прошло. Только когда академик стал робко пробираться к занимаемому им до лекции месту, слушатели, словно пробудившись, начали аплодировать ему.

Кондорсе был очень возбужден. Он дал себя увлечь изложением, вошел в роль и теперь старался успокоиться. Даламбер незаметно следил за ним.

Позже, после того как гости госпожи Леспинас разошлись, Даламбер пошел проводить домой своего друга Кондорсе.

— Жаль, что господин Вольтер не слушал вас. Вы же настоящий вулкан, покрытый снегом, дорогой друг.

— Снегом? Зачем же говорить о снеге, если он не скрывает лежащего под ним вулкана?

— Белый, рыхлый и свежий снег, но стоит прикоснуться к нему, и ты почувствуешь, как глубоко в недрах бурлит лава. Кстати, я уже прочел подготовленный вами доклад о квадратуристах. Никто не подумал бы, что с имеющимся у вас материалом по вопросу о квадратуре можно соорудить такую занимательную вещь и одновременно этим же материалом так серьезно обосновать решительные меры, которые наша Академия наук намерена принять против квадратуристов.

Парижская Академия наук принимает решительные меры

Ничто на земли смертному высше и благороднее дано быть не может, как упражнение, в котором красота и важность, отнимая чувствие тягостного труда, некоторою сладостию ободряет.

М. В. Ломоносов

Рассказ Кондорсе в салоне госпожи Леспинас напоминает легенду о Сизифе, которого Гомер назвал «самым хитрым среди смертных» за то, что он неоднократно срывал затеи богов. Только когда он умер, богам удалось расправиться с ним. Они заставили его голыми руками вкатывать огромный камень на самую крутую гору подземного царства. Каждый раз, когда Сизифу удавалось поднять камень почти до вершины горы, он скатывался вниз, и Сизифу приходилось начинать все сначала. Эту легенду нередко используют как символ мучительных усилий, направленных на решение неразрешимых задач. Попытки найти квадратуру круга — это поистине сизифов труд.

В какой степени задача квадратуры круга считалась к концу XVIII в. неразрешимой, свидетельствует знаменитая речь, произнесенная в 1775 г. академиком и энциклопедистом Кондорсе в Парижской Академии наук. В этом выступлении он извещал, что Академия решила не принимать больше работ о квадратуре круга и распустить комиссию по изучению рукописей, трактующих эту проблему. Речь Кондорсе и теперь представляет особый интерес, поскольку в ней выдающимся и хорошо осведомленным математиком показано, в каком состоянии находилась к тому времени задача о квадратуре круга. Заметим предварительно, что квадратура всего круга и квадратура сектора круга с заданной хордой считались тогда двумя разными проблемами. Вот как высказывался об этом Кондорсе: «Это решение можно рассматривать с двух точек зрения: можно искать

квадратуру всего круга или какого-либо сектора, хорда которого предполагается известной. Вторая из этих задач считается совершенно неразрешимой... Иоганн Бернулли доказал, что сектор может быть выражен при помощи действительной логарифмической функции, которая, однако, выражается через мнимые величины. Отсюда вытекает, что ни одна алгебраическая или логарифмическая действительная функция не может фактически представить значение сектора произвольного круга. Геометры менее склонны соглашаться с невозможностью решения первой задачи, ибо нередко удается для частных значений получить величины, выразить которые в общем виде невозможно». Позже Даламбер в связи с вопросом квадратуры круга сделал в «Энциклопедии» следующий пессимистический вывод: «За определенным, не очень далеко расположенным пунктом наши огни покидают нас, и мы блуждаем во мраке». Тогда же другой знаменитый геометр конца XVIII в., Ж. Л. Лагранж, в письме Даламберу следующим образом высказал свое разочарование по поводу положения, в котором очутились геометрические исследования: «Мне кажется, что рудник стал слишком глубоким и, если не будут открыты новые жилы, раньше или позже придется его забросить. Химия и физика предоставляют теперь более ослепительные и легко разрабатываемые богатства. Да и вкус века, по-видимому, целиком направлен в эту сторону. Не исключено, что в один прекрасный день места по геометрии в академиях станут тем же, что и кафедры арабского языка в университетах»[234]).

Французская революция и последующие социальные потрясения оказали сильное влияние на весь научный прогресс и, в частности, на математику. Были открыты те «новые жилы», на которые надеялся Лагранж. Многие математические дисциплины отделились друг от друга, а области их иследования обогатились. Однако не только обилие нового материала, понятного и осваиваемого только специалистами, характеризует развитие науки в XIX в. — были усовершенствованы и обобщены сами методы исследования. Благодаря этому открылись новые перспективы и в вопросе о квадратуре круга. Прежде всего, расширяется понятие о числе: происходит переход от отрицательных и мнимых чисел к комплексным числам вместе с их геометрической интерпретацией [235]); выражение функций бесконечными произве-

дениями или разложением в ряды привело к установлению неожиданных соотношений между весьма разными по природе функциями и одновременно дало возможность найти новые типы функций, обладающих иными, неизвестными до тех пор свойствами. В свою очередь эти результаты открыли возможность новых исследований арифметических характеристик чисел, получаемых при проведении операций, необходимых для этих функций. Так была заложена основа систематического изучения иррациональных чисел и доказано существование чисел, названных *трансцендентными*. Уже в последние годы XVIII в. Лежандр в своих замечательных «Началах геометрии» показал, что π^2 — иррациональное число.

А в это время погоня за десятичными знаками числа π не прекратилась. Так, Вега вычислил 140 десятичных знаков π, из которых точными оказались 136. В 1841 г. Уильям Резерфорд сообщает 208 десятичных знаков, а через три года талантливый гамбургский вычислитель З. Дазе показал, что Резерфорд ошибся начиная со 152-го десятичного знака, и после двух месяцев вычислений обнародовал 200 точных десятичных знаков π. Позже, в 1847 г., Томас Клаузен из Дерпта (ныне г. Тарту) доводит число цифр до 250, из которых 248 были точны. В 1853 г. тот же Дазе получает 440 точных цифр. Дазе перегнал Рихтера, сумевшего тогда же получить только 330 точных десятичных знаков из вычисленных им 334. Рекорд этого года устанавливает У. Шенкс. Он получает 607 десятичных знаков! В следующем году Рихтер, не догнав еще Дазе, вычисляет первые 400 десятичных знаков, подтверждая точность предыдущих вычислений, а годом позже доводит их число до 500. К 607 десятичным знакам, полученным Шенксом в 1853 г., он в 1873 г. добавляет еще 100 [236]). Первая работа Шенкса появилась в XXI томе «Proceedings of the Royal Society of London» (стр. 319), но три десятичных знака оказались неверными, и их правильная величина была сообщена в том же 1873 г. в XXII томе (стр. 45). Наконец, с помощью электронной вычислительной машины в 1958 г. были получены 10 000 десятичных знаков числа π. На вычисление первых 3000 десятичных знаков машина затратила всего 10 минут [237])!

Что же произошло дальше с квадратуристами? Выступление Кондорсе не оказало на них никакого

воздействия, несмотря на то что он выявил и некоторые более прозаические и не такие уж бескорыстные стороны вопроса. «Ходит такой слух, — говорил Кондорсе, — что соответствующие правительства обещали значительные вознаграждения тем, кто решит задачу квадратуры круга, и что эта задача является предметом исследования известнейших геометров. На основании этого слуха большое количество людей — более, чем можно думать, — отказывается от полезных занятий для того, чтобы посвятить себя указанной задаче, часто не понимая ее и не всегда обладая необходимыми знаниями, без которых их попытки найти решение проблемы лишены шансов на успех... Они и не подозревают, какого характера математические познания им нужны, чтобы довести до удачного окончания эту проблему... Есть и другие, занимающиеся задачей квадратуры, уповая на грезящуюся им славу, на которую, как им думается, они уже имеют право» [238]).

Академия наук и не надеялась, что в результате ее решения ошеломленные квадратуристы сложат свои перья. Поэтому комиссия для изучения рукописей, относящихся к квадратуре круга, не была ликвидирована, а получила только новое название — «Комиссии потерянных детей». Это название оказалось роковым по своим последствиям. Квадратуристы, продолжавшие присылать свои рукописи, считали, что Академия, передавая эти рукописи такой комиссии, оскорбляла их, и подавали на Академию в суд. Так, например, астроном Рохберг Герри из Восанвиля, соблазненный, как и другие квадратуристы, сказочными суммами, о которых время от времени сообщали некоторые плохо осведомленные газеты или книги [239]), послал Академии наук в 1778 г. напечатанную им книгу о квадратуре круга, предполагая, что получит за нее премию в 50 000 экю, которая, по его сведениям, ему полагалась. Когда же он увидел, что Академия не спешит с выплатой этой суммы, он подал на Академию в суд, указывая на Даламбера в качестве ответчика [240]).

Нашлись и мошенники, надеявшиеся поживиться на квадратуре круга. Вот один пример. Два жулика приобрели лицензию, на основании которой открыли «Бюро квадратуры круга». В проспекте они написали: «С первого дня существования мира существует измеримое постоянное отношение круга к хорошо известному

прямолинейному многоугольнику. Это отношение равняется $9\frac{179}{200}$! Посылайте ваши заказы в Бюро квадратуры круга» [241]). Несомненно, нашлось много наивных людей, внесших установленную мошенниками плату и с нетерпением ожидавших, что им, наконец, объяснят, что же такое квадратура круга. Ведь тогда сообщения об этой проблеме вызывали сенсацию, и она была, что называется, у всех на устах [242]).

Квадратуристов мы находим даже во второй половине XIX в., когда у математиков имелись веские доводы для утверждения, что квадратура круга невозможна [243]). И скажем по секрету: квадратуристы имеются и сегодня, хотя теперь истинная природа числа π твердо установлена.

Как наконец-то была установлена истинная природа числа π

Существует среди математиков глубокое и твердое убеждение, которое дает им опору в их абстрактных исследованиях, а именно: ни один вопрос данной науки не может оставаться без ответа.

Г. Цицейка

Это было утром 26 ноября 1882 г. на семинаре по математике во Фрейбургском университете. Недавно молодой профессор университета Фердинанд фон Линдеман [244]) доказал трансцендентность числа π.

Когда эта работа появилась [245]), она вызвала живой интерес не только в узком кругу математиков, но и среди студентов и интеллигенции, так как вопрос о природе этого числа оставался актуальным более трех тысяч лет. Вот почему студенты просили Линдемана провести, в рамках семинара по математике, заседание по теме: «История числа π».

Профессор Линдеман охотно согласился, наметил план работы и назначил день сообщений по этому вопросу. Слушателей в аудитории собралось более обычного. Атмосфера зала стала менее уютной, настроение создалось торжественное. За несколько минут до прихода профессора студент повесил на стене рядом с доской картину. Эта была карикатура. В левом верхнем углу был изображен круг, сплетенный с квадратом, внутри которого была вписана буква π. Зигзагообразная молния, исходящая от этой буквы, угрожающе устремилась в противоположный угол рисунка, к группе людей, в ужасе бегущих прочь. Под рисунком стояла надпись: «Бедные квадратуристы».

Встреченный аплодисментами, профессор Линдеман предоставил слово студенту, который должен был говорить об определении площади круга и длины окружности в древние времена. Студент упомянул о достижениях египтян и вавилонян, затем рассказал об идеях

Гиппократа, Антифона и Брисона и уже готовился изложить метод Архимеда, когда взгляд Линдемана упал на рисунок, висевший на стене. От неожиданности он засмеялся.

— Молодцы, — сказал Линдеман и захлопал в ладоши. Докладчик остановился. Линдеман повернулся к студентам и спросил:

— Кто автор?

— Мы, — раздались несколько голосов на задних скамейках.

— Хорошо, очень хорошо, — улыбнулся профессор.

Когда воцарилась тишина, студент продолжал свое выступление, подчеркнув важность результатов, полученных Архимедом. Пока он говорил, профессор Линдеман погрузился в воспоминания. Он видел себя в аналогичном положении, когда с таким же волнением излагал выводы своих первых математических исследований. Вот уже девять лет, как он защитил в Эрлангене докторскую диссертацию по кафедре профессора Феликса Клейна, который был старше его всего на несколько лет. Работу он готовил в Гёттингене под руководством профессора Альфреда Клебша, но этот крупный математик скоропостижно скончался. Вакантное место занял его ученик Феликс Клейн, назначенный потом профессором в Эрлангене. Линдеман вспомнил, с какой страстью он работал над своей диссертацией и над редактированием лекций профессора Клебша. Каково было его волнение, когда он прочел эти работы в печати. Он и теперь думал о своем наставнике и намеревался упомянуть о нем присутствующим. Он хотел этим выразить признательность ученика к учителю.

Когда студент закончил выступление, Линдеман в нескольких словах резюмировал основные идеи и пригласил следующего студента изложить свое сообщение о «Геометрических методах, примененных европейскими математиками для аппроксимации числа π».

Линдеман хорошо знал предмет сообщений студентов и поэтому мог думать о другом. Он вспомнил, как приехал три года тому назад в этот город в качестве профессора, после того как два года работал приват-доцентом в Вюрцбурге. Теперь среди коллег у него было несколько близких друзей, он привязался к своим студентам. А очень возможно, говорил он себе, через год я буду уже не здесь, а в Кёнигсберг ском университете,

на месте профессора Генриха Вебера, который переводится в Берлин. Жаль терять здешнее общество, думал Линдеман, но как я могу отказаться от такой чести?

Третьему студенту предстояло показать, какими аналитическими методами было получено приближенное значение числа π.

«Математический анализ открыл дорогу к установлению природы числа π», — начал он таким же хриплым от волнения голосом, как и предыдущие докладчики. После того как он написал на доске непрерывную дробь У. Броункера, показав, что она предоставляет вычислителю действенный способ для приближенного вычисления числа π при помощи рациональных чисел, голос студента стал звучать естественно. Наконец, он выявил и преимущество разложения в ряд. Зная, что после него будет выступать профессор, он закончил словами: «Соблазненные непрерывными дробями и рядами, математики и любители надеялись поймать число π в силки десятичных знаков. Это было иллюзией, и никто не мог сказать, что это за число π. Но теперь есть человек, который это выяснил, и вы хорошо знаете, кто он. Мы почтительно просим нашего профессора рассказать, как он открыл природу этого числа».

Под аплодисменты, вызванные воодушевленными словами студента, профессор Линдеман направился к доске. На мгновение он взглянул на устремленные к нему глаза, наслаждаясь чарующей тишиной, которая воцарилась в аудитории. В этой тишине он, как и намеревался, воскресил перед слушателями образ профессора Альфреда Клебша и просил разрешения посвятить настоящее заседание его памяти. Затем он сказал:

— В течение веков содержание понятия о числе постепенно расширялось. Вначале было достигнуто понимание целых чисел, позже возникло понятие о рациональном числе. Греческие геометры установили соотношение между рациональным числом и отрезком прямой, построенным с помощью циркуля и линейки. Они же передали нам свои недоумения, вызванные понятием о числе. Именно они открыли такие отрезки прямой, которые могут быть построены с помощью циркуля и линейки, но длину которых нельзя выразить рациональным числом. Известен пример, приведенный Платоном: «Найдите сторону квадрата с площадью, вдвое большей площади другого квадрата, сторона

которого известна». Как известно, квадрат удвоенной площади (рис. 13) обладает стороной, равной диагонали первого квадрата, и, следовательно, второй квадрат можно построить с помощью циркуля и линейки, несмотря на то что величина его стороны не может быть выражена рациональными числами. Доказательство несоизмеримости стороны и диагонали квадрата можно найти и в «Началах» Евклида, так что я на этом вопросе останавливаться не буду. Итак, греки показали, что есть отрезки прямой, длину которых нельзя определить при помощи рациональных чисел. Почему? И существуют ли другие числа, отличные от рациональных? Не будучи в состоянии разгадать эту загадку, они назвали

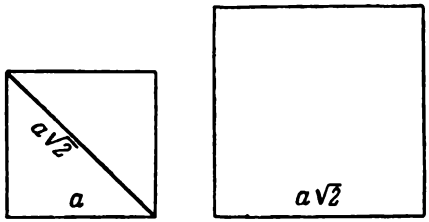


Рис. 13.

эти гипотетические числа а л о г и ч е с к и м и, или, как мы говорим сегодня, и р р а ц и о н а л ь н ы м и. Обобщая упомянутую задачу, они установили еще более любопытные вещи. А именно: пытаясь построить куб с объемом в два раза больше заданного куба, они уже не сумели построить сторону нового куба с помощью циркуля и линейки.

— Это знаменитая делосская задача, — раздалось сразу несколько голосов с мест.

— Вы правы, — подтвердил профессор Линдеман, — эта задача стала известной благодаря многочисленным попыткам решить ее. Вокруг нее возникла даже легенда, которая, наверное, известна вам [246]). Между прочим, греки, страстные почитатели геометрии, открыли и другие такие же любопытные задачи. Среди них и задача квадратуры круга, требующая построения с помощью циркуля и линейки стороны квадрата с площадью, равной площади заданного круга. Решить эту задачу не удалось, и некоторые греческие геометры, пытаясь найти решение, изобрели специальные приборы, дающие

возможность строить другие кривые, кроме круга, с помощью которых можно было надеяться получить требуемый отрезок прямой. Но такое решение считалось механическим, а не геометрическим, и оно не было признано.

Из указанных примеров видно, что понятие о числе гораздо сложнее, чем оно кажется на первый взгляд. С одной стороны мы имеем *рациональные* числа (целые и дробные), а с другой стороны — *иррациональные*. В классе иррациональных чисел, о которых можно сказать только, что они не являются рациональными, мы встречаем числа с разными свойствами: для одних можно построить с помощью циркуля и линейки соответствующие отрезки, а для других построить эти отрезки таким способом нельзя. Это недоумение относительно природы иррациональных чисел длилось очень долго. Только к концу XVI в. было установлено, что между рациональными и иррациональными числами имеется существенная разница; было показано, что рациональные числа выражаются бесконечной периодической десятичной дробью, в то время как в десятичной дроби, аппроксимирующей иррациональное число, нет никакой периодичности цифр.

В XVII в., после того как Декарт предоставил в распоряжение математиков такой новый и прекрасный инструмент исследования, как аналитическая геометрия, был сделан дальнейший шаг вперед. Теперь было установлено, что всякое построение, которое сводится к пересечениям линий и кругов (т. е. которое можно выполнить с помощью циркуля и линейки), ведет в алгебраическом плане либо к решению конечной последовательности уравнений первой и второй степени с рациональными коэффициентами, либо к решению конечного числа уравнений второй степени, где первое уравнение имеет рациональные коэффициенты, а другие могут иметь и иррациональные коэффициенты, полученные при решении предыдущих уравнений. Становится ясным, что задача удвоения квадрата может быть решена с помощью циркуля и линейки, так как она соответствует уравнению второй степени

$$x^2 = 2a^2, \text{ т. е. } x = a\sqrt{2}, \qquad (1)$$

в то время как задачу удвоения куба нельзя решить с помощью циркуля и линейки, поскольку она ведет

к уравнению третьей степени

$$x^3 = 2a^3, \text{ т. е. } x = a\sqrt[3]{2}. \qquad (2)$$

Однако и у уравнения (1), и у уравнения (2) коэффициенты и показатели степеней — целые числа. Вот, значит, первый класс иррациональных чисел: числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений определенной степени. Эти числа были названы алгебраическими [247]).

Рассмотрим теперь уравнение, ведущее нас к квадратуре круга:

$$x^2 = \pi r^2. \qquad (3)$$

По форме оно похоже на уравнение (1), но отличается от него тем, что в (1) коэффициенты — целые числа, в то время как в этом уравнении появляется в качестве коэффициента число π. Если π — рациональное число, то уравнение (3) показывает, что сторону квадрата с площадью, равной площади заданного круга, можно построить с помощью циркуля и линейки; если же π не является рациональным числом, то уравнение (3), не имея уже рациональных коэффициентов, показывает, что сторону квадрата нельзя построить с помощью циркуля и линейки.

Такова дилемма! Квадратуристы предполагают, что π — рациональное число, считая верным приближенное значение, установленное путем ошибочного или неполного рассуждения. В таком случае уравнение (3) ведет, по их мнению, к построению стороны квадрата с помощью циркуля и линейки. Но никто до сих пор не привел точного доказательства, что π — рациональное число. Создается впечатление, что мы попали в порочный круг, ибо задача квадратуры круга остается неразрешимой до тех пор, пока не будет охарактеризовано число π. С другой же стороны, природа числа π зависит от возможности или невозможности решить задачу квадратуры круга.

Казалось, вокруг этой задачи царил непроницаемый мрак, когда на нее упал первый луч света, брошенный неожиданно великим слепым математиком Леонардом Эйлером, которому мы и обязаны общепринятым употреблением греческой буквы π для обозначения этого числа. Ниже мы приводим знаменитое равенство, в котором Эйлер связывает показательную функцию мнимого

аргумента e^{ix} с тригонометрическими функциями $\cos x$ и $\sin x$:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ [248]}).$$

Это — поразительная формула, так как если x принимает значение π, то мы получаем соотношение $e^{i\pi} = -1$ [249]). Как видите, здесь числа e и π почти фантастическим образом связаны между собой, ибо из действительного числа e, возводимого в мнимую степень $i\pi$, мы получаем действительное число -1. Что касается природы числа e, математики ничего о ней не знали. Это число казалось весьма любопытным. После того как оно было избрано Непером в качестве основы для своей логарифмической системы, им стали часто пользоваться. Приближенное значение e считают равным 2,71828...

Между тем исследования природы числа π продолжались разными путями. Так, в 1767 г. Ламберт впервые показал, что π — иррациональное число. В своем доказательстве он основывается на формуле

$$\operatorname{tg} \frac{1}{n} = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \ddots}}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

выведенной им путем разложения в непрерывную дробь числа $\frac{e-1}{2n}$ [250]. Через 27 лет, в 1794 г., Лежандр применил более строгое доказательство иррациональности чисел π и π^2 [251]). Таким образом, был сделан значительный шаг вперед. Однако квадратуристы продолжали упорно утверждать, что квадратура возможна. Почему? Да потому, что еще не было известно, исчерпывается ли множество иррациональных чисел алгебраическими числами, т. е. такими, которые являются корнями алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами, или существуют и другие, неалгебраические иррациональные числа. В таком случае можно было предположить, что если π — иррациональное алгебраическое число, то возможно существование последовательности алгебраических уравнений, которые путем последовательных решений могли бы привести к уравнению с иррациональными коэффициентами, что означало бы и воз-

можность построения с помощью циркуля и линейки. Только в 1844 г. Лиувилль установил, что существуют иррациональные числа, не являющиеся корнями алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами. Он привел и первые примеры построения таких *неалгебраических* чисел, назвав их *трансцендентными* [252]). Основываясь на этом открытии, математики смогли более точно сформулировать вопрос о природе числа π: является ли оно алгебраическим или трансцендентным числом? Невозможность существования квадратуры круга будет доказана, только если можно будет установить, что π — число трансцендентное, т. е. что оно не может быть корнем ни одного алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

В этой новой форме задача увлекла многих математиков. Так, в 1873 г. профессор Шарль Эрмит дает новое доказательство иррациональности числа π. Хотя это доказательство не означало шага вперед, оно производило впечатление привала, позволяющего любоваться восхитительным ландшафтом. И в самом деле, это был удачный привал, ибо в том же году Эрмит [253]) установил, что число e — трансцендентное, т. е. что не может быть соотношения, имеющего форму

$$N_0 e^{Z_0} + N_1 e^{Z_1} + \ldots + N_n e^{Z_n} = 0, \qquad (4)$$

где коэффициенты N_0, N_1, ..., N_n и показатели Z_0, Z_1, ..., Z_n — целые числа. Другими словами, профессор Эрмит доказал, что равенство (4) невозможно, если его коэффициенты и показатели являются целыми числами.

Признаюсь, я прочел с большим волнением это доказательство, потому что в нем я усмотрел возможность установления трансцендентного характера числа π. Также сильно восхищался я когда-то соотношением Эйлера, о котором упоминал, — и оно не могло не возникнуть сейчас же в памяти. Смотрите:

$$e^{i\pi} = -1, \text{ или } e^{i\pi} + e^0 = 0.$$

Не похоже ли это на соотношение Эрмита? Безусловно! Но все же оно в корне отличается от него. Почему?

— Потому, что один из показателей e является не целым числом, а и р р а ц и о н а л ь н ы м, — весело воскликнули несколько студентов.

— Верно! И в этом скрывалась вся трудность. Мне предстояло найти обобщение результата, полученного профессором Эрмитом, для такого случая, когда все целые числа заменялись бы какими-либо алгебраическими иррациональными числами. Такой результат я не смог сразу получить, и пришлось начать с частных, более легко разрешимых случаев. Я показал, что соотношение, имеющее форму

$$a_0 e^{b_0} + a_1 e^{b_1} + \ldots + a_n e^{b_n} = 0,$$

невозможно, если a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_n — алгебраические иррациональные числа. Отсюда естественно вытекает, что поскольку имеется соотношение $e^{i\pi} + e^0 = 0$, в котором коэффициенты являются рациональными числами, а один из показателей равняется нулю...

— Вытекает, что показатель первого члена не может быть алгебраическим иррациональным числом, ибо это противоречило бы теореме профессора Линдемана, — закричали хором студенты, и вся аудитория восхищенно и бурно зааплодировала.

— Да, это так, — ответил взволнованный профессор. — Я не буду входить в подробности, потому что и так уже довольно поздно. Для тех, кто хотел иметь общее представление о проблеме числа π, и сказанного достаточно, а другим ничто не помешает пить воду прямо из ключа, а не из стакана, который я могу им преподнести здесь. Видите, как все это было просто? — заключил, улыбнувшись, Линдеман. Шутка профессора вызвала общий смех, и все присутствующие долго аплодировали. Перед тем как покинуть зал, Линдеман подошел к группе студентов и пошутил: «Хотелось бы знать, что более послужило причиной ваших аплодисментов — успех нашего семинара или тот факт, что мы теперь можем пойти выпить кружку пива в честь π, как намеревались?»

После прогулки по городу Линдеман и студенты сели за стол в задней комнате фрейбургского студенческого кафе. У всех было приподнятое настроение. Беседу то и дело прерывал стук кружек. Одни чокались, другие поднимали кружки и ударяли ими о стол.

— Да, вы правы, — обратился занимавший почетное место профессор к студенту, который сидел напротив. — Мысли людей, стремящихся решать одну задачу,

откуда бы они ни происходили и в какую бы эпоху они ни жили, собираются, как воды горных ручейков... Одни ручейки текут, извиваясь между скалами, другие бегут среди лесов, но все соединяются в долине.

— Ручей мыслей углубляет свое русло в долине времен только тогда, когда его волны полноводны; он высыхает, если поток убывает, — глубокомысленно заметил студент.

— Река мыслей о числе π текла очень бурно. Впредь она потечет спокойно и сонно, как наш старик чех, — добавил другой, подмигивая в сторону коллеги, сидевшего все время молча влево от Линдемана. Родом из Праги, он только в этом году приехал во Фрейбург. Взглянув на своих коллег, он весело ответил:

— Я не сонный, сынок! Но когда я слушал вас, мне не давала покоя музыка одной симфонической поэмы. Лейтмотив вкрадывался в мой мозг как звуковое выражение числа π, и тем упорнее, чем сильнее я старался вспомнить, где слышал его. Но теперь, когда вы заговорили о ручейках и реке, все стало ясным.

— Ты совсем опьянел, старик! — возразил первый. — Что общего между симфонией и числом π? А если это на самом деле так, как ты говоришь, спой ее, чтобы мы могли слышать, как звучит трасцендентная мелодия.

— Я еще не настолько пьян, чтобы петь, — сказал чех, и в его голосе звучало некое превосходство.

— То, что вы говорите, очень интересно, — вмешался в разговор Линдеман. — Иногда создается впечатление, что мысли поют, прежде чем оформиться в слова.

— Да, господин профессор, — радостно подтвердил чех. — Студенты с любопытством смотрели на них. — Я обожаю музыку, особенно симфоническую. Иногда она вызывает во мне отзвуки чего-то уже давно пережитого, чего-то забытого... в другой раз бывает — какое-то событие как будто сочетается с определенной или не совсем ясной мелодией, и я слышу, как она развивается внутри меня одновременно с этим событием. Так было и сегодня: когда я слушал историю числа π, во мне звучала мелодия... хорошо знакомая мелодия. Я знал, что это отрывок из услышанной мной когда-то симфонии, но не мог узнать ее. Теперь же я знаю, что это лейтмотив поэмы «Влтава» Бедржиха Сметаны. Уже несколько лет как он болеет, но до этого он был директо-

ром Симфонического общества и руководителем оркестра у нас, в Праге. Я несколько раз слышал его концерт. Это — описание пути реки Влтавы, от истоков до ее впадения в Лабу. Поэма сочинена в форме рондо. Мелодия, которую я слышал, — это лейтмотив, олицетворяющий реку. Он повторяется после каждого другого мотива...

Теплота, с которой говорил чех, пленила всех. Никто до этого не подозревал, что таилось за выражением его сине-серых глаз. Худой, со светлыми волосами, причесанными назад, молчаливый, он получил кличку «старик».

— Значит, ты устанавливал взаимно однозначное соответствие между поэмой, описывающей путь Влтавы, и историей числа π, а мы думали, что ты спишь, — пошутил студент, сидевший против него. — Тогда почему же нам не пропеть хором этот лейтмотив? Давай, спой ты сначала, чтобы мы слышали, как он звучит.

— Может быть, не так сразу, — вступился профессор Линдеман. — Не лучше ли попросить его для начала объяснить построение поэмы.

— Охотно, — ответил с оживлением чех. — В самом начале из ключа Влтавы рождается ручеек. Вот примерно мелодия... — И, не задумываясь, чех начал тихо петь, сопровождая мелодию движением рук. — Теперь слушайте и второй ручеек... От них рождается Влтава, — продолжал он, и снова запел. — Это песнь реки, в которой бьется жизнь воды, ее исполняют в allegro commodo non agitato. — Он возобновил мелодию, очертив ее широкими взмахами рук. Незаметно для себя студенты начали подпевать ему. Властно завладев ими, мелодия в мгновение соединила в один общий порыв всех поющих. Их лица преобразились. Линдеман с нежностью смотрел на эти радостные молодые лица. Бесследно исчезли складки нахмуренных бровей, неуверенное трепетание век, устремленный в пространство пустой взгляд и напряжение, наблюдаемое им так часто на этих лицах во время занятий или экзаменов. Используя наступившую на миг тишину, профессор Линдеман начал говорить, вливая новую жизнь в поэму своими воспоминаниями.

— К истокам числа π, — сказал он медленным речитативом, — никто еще не проник. Они находятся где-то в дремучих, непроходимых лесах предыстории.

Я знаю только, что люди, нуждаясь в этом числе, нашли его, когда стали утверждать, что длина окружности в три раза больше ее диаметра...

— И долгое время тысячи людей не подвергали сомнению эту истину, — продолжал чех в том же тоне, как бы принимая из рук профессора нить рассказа.

— После многих тысячелетий измерения показали, что длина окружности больше, чем три ее диаметра. «Насколько?» — журчал второй ручеек в глубокой тишине леса, куда еще не вступила нога человека, — добавил кто-то другой.

Чех внезапно встал и жестом руки пригласил всех спеть начатую им мелодию Влтавы. Присутствующие дружно подхватили ее, тихо выбивая такт пивными кружками. Придуманная игра все больше захватывала их.

— Какова первая часть? — спросил Линдеман, когда все умолкли.

— Охота в лесу, — быстро ответил чех. — Путь реки в долине проходит через лес, где люди охотятся. Слышно пение рожка.

— Гм!? Охота в лесу? — почти шепотом заметили молодые люди и удивленно переглянулись. Затем студент, сделавший первое сообщение на семинаре, начал таким же дрожащим и глухим голосом, как тогда:

— Подобно звуку рожка из глубин земли и времен доходят до нас записи, сделанные более четырех тысяч лет назад на свитках папируса. Выслеживая дичь, египтяне, страстные охотники, проникали в непроходимые чащи. Как сильно, должно быть, звучали рожки, когда они отыскали зверя, т. е. число $\left(\frac{16}{9}\right)^2$, которым они выразили отношение длины окружности к ее диаметру!

— Да, так было, — с теплотой добавил профессор Линдеман. — Египтяне были, очевидно, умелыми охотниками — ведь нащупать площадь круга было нелегким делом. В случае квадрата или прямоугольника можно выбрать квадрат в качестве единицы измерения, а затем установить, сколько квадратов понадобится для замощения всей измеряемой площади, — конечно, не рассматривая случая несоизмеримости. Но в случае круга так поступить нельзя! Если наложить квадраты на его поверхность, вдоль окружности останутся фигуры, ограниченные дугами. Как определить их величину с помощью выбранной единицы измерения? Эти вопросы

и ответы на них расширили русло речки л. Но она все еще продолжает оставаться прозрачной и на ее дне видны камушки.

Когда профессор кончил говорить, лейтмотив Влтавы зазвучал еще громче, еще увереннее. В то время, как они пели, некоторые студенты раскачивались на стульях в такт песне. Даже профессор тихо мурлыкал вместе с другими, забывая, что не может гордиться своим голосом. Чех снова встал и торжественно объявил:

— Вторая часть: «Крестьянская свадьба».

— Ого, это переходит всякие границы! — заволновались студенты.

Несколько секунд Линдеман молча глядел на дым потухающей папиросы. Он закурил другую, несколько раз затянулся, потом откашлялся. Присутствующие с любопытством смотрели на него, ожидая его слова.

— Прошло около тысячи лет, пока речка достигла солнечной, звучавшей песней Эллады. Греки, в руках которых соединились накопленные египтянами и вавилонянами знания, воздвигли величественный храм геометрии, в основание которого положили доказательство. С этого времени математическое рассуждение стало настоящим наслаждением для тех, кто умело им владел. Квадратура круга была красной девицей, и к ней приезжали свататься самые острые и страстные умы Эллады. Парни не приходили с пустыми руками: один принес в подарок квадратуру луночек, другой — многоугольники, вписанные в круг или описанные вокруг него, третий — кривые типа квадратрисы или круговые числа ... Красавец Архимед подарил ей спиральные серьги, застежку в форме сегмента параболы, даже золотые монеты — три крупные и семь поменьше. Гордый Аполлоний преподнес ей, кажется, не менее ценные подарки, но он передал их тайком, и никто теперь не знает, что именно... Все веселились вместе, как на свадьбе, каждый лелеял надежду быть избранником... Так число л превратилось в величественную, стремительную реку с водами, вспенившимися от первых двух или, может быть, четырех десятичных знаков в надежде, что оно окажется особым числом, отличным от рациональных.

На этот раз песня Влтавы звучала долго, как бы выражая счастье преодоления тяжелого испытания. Но вскоре на лицах поющих опять появилось беспо-

койство. Оно нашло выход в вопросе, заданном быстрым и нервным шепотом:

— Что теперь следует? Что именно?

— Лунное сияние. Танец русалок, — послышалось в ответ.

Никто больше на возражал. После непродолжительного молчания раздался голос студента, выступившего со вторым сообщением:

— В весенних сумерках, в долине времени отражаются на поверхности реки спутанные тени: это темные времена средневековья. Греческая геометрия сохранилась только в арабских рукописях, которые начинают появляться в Европе. Ее содержание порождает волнение в зеркале воды времени, залитом лунным светом. Не удивительно, что в этом фантастическом свете из волн появляются русалки, завлекая в них обезумевших людей...

— Браво, браво! — закричал взволнованный Линдеман. — Трудно найти более подходящее сравнение для непреодолимой страсти к квадратуре круга, чем обольщение русалками. Здравый смысл не может объяснить, что заставило таких людей, как Скалигер и Гоббс, искать квадратуру круга...

— Припев, ребята! — попросил чех, и все последовали его призыву.

— А как быть, старик, если этим поэма не кончается? — спросили студенты, перестав петь. Чтобы подразнить их, чех загадочно молчал. Профессор с довольной улыбкой следил за ходом игры.

— Ну, говорите же, не заставляйте нас так долго ждать.

— Следует ф и н а л, — ответил чех.

— И каков его сюжет? — спросил Линдеман.

— Град, господин профессор, знаменитый Пражский Кремль. Слышен звон скрещивающихся сабель, затем все утихает.

— Град — крепость, которой предстоит овладеть! — начал студент, не пробовавший еще свои силы. — Неся в потоке добытые до сих пор результаты, река л своими волнами обрушивается на врата осажденной крепости. Это тяжелая битва, мечи наносят град ударов. Победят квадратуристы или их противники? Победа определится лишь после того, как станет известно, что это за число л: *иррациональное алгебраическое* или *иррациональное*

трансцендентное? Но вот на стенах крепости развевается знамя победителей, на нем написано: 1882 год. Это год нынешний, год, когда трансцендентность числа π была доказана. Разгромленные квадратуристы спешат скрыться, а река π спокойно вливает свои воды в море трансцендентных чисел...

Пели долго, страстно, как романс. Он стал близок всем. В маленькой накуренной комнате время как бы остановилось, позволив течь одной реке числа π. Только когда профессор встал из-за стола, время вновь вошло в свои права.

Веселые, довольные проведенным вечером студенты проводили профессора домой. Прощаясь с ними, Линдеман пожелал каждому удачи на день грядущий.

Вместо заключения

После доказательства трансцендентности числа π задача квадратуры круга получила строгое окончательное решение. Начиная с 1882 г. это решение, как сказочный дракон, готово проглотить любого квадратуриста, который впредь появится. В то же время оно, как языками пламени, охватило все страсти и тревоги, вызванные когда-то неугомонными искателями квадратуры круга, расплавив и превратив все в пепел сказки. Однако от этого число π не стало увядшим и пожелтевшим от времени цветком, спрессованным между страницами математических книг и журналов. Ведь оно прочно вошло в жизнь человеческого общества, творением которого было. Доказательством того, что оно продолжает представлять живой интерес, служат его 10 000 десятичных знаков, вычисленных через 76 лет после того, как была установлена его трансцендентность. Мог бы кто-нибудь сегодня удалить число π из мира дел человеческих?

Число π присутствует в чертежах и вычислениях, выполняемых электронными машинами при подготовке и проведении полетов в космос; оно предоставляет необходимое количество своих десятичных знаков всякий раз, когда они нужны инженерам, рассчитывающим цилиндрические, сферические или конические части машин, физикам и астрономам, когда они проводят приближенные вычисления по формулам, в которых среди фундаментальных постоянных появляется и π, как, например, в формуле для периода колебания маятника, и в тысячах и тысячах других случаев. Куда бы мы ни обратили свой взор, мы видим проворное и трудолюбивое число π: оно заключено и в самом простом колесике, и в самой сложной автоматической машине.

Примечания

1. Кромлехи (от бретонских слов «crom» — круг и «lech» — камень) — круги, составленные из отдельных камней. Некоторые из кромлехов достигают сотни метров в диаметре и образуют один или несколько концентрических кругов. Например, кромлех в Эбюри имеет около 400 *м* в диаметре, а круги внутри него составлены из 12 и 30 камней. (*Стр. 12.*)

2. Гомер, Илиада, перев. Н. И. Гнедича, М., 1960, стр. 300. (*Стр. 12.*)

3. O. Neugebauer, W. Struve, Über die Geometrie des Kreises in Babylonien, «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik», Abt. B, Bd. I, 1931, S. 85. (*Стр. 12.*)

4. J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik. Ebene Geometrie, Bd. IV, Berlin, 1923, S. 196. (*Стр. 12.*)

5. Из египетских математических текстов самыми полными и лучше всего изученными являются:

а) Папирус Ринда: A. B. Chace, L. Bull, H. P. Manning, R. C. Archibald, The Rhind Mathematical Papyrus, Oberlin (Ohio), vol. 1, 1927; vol. 2, 1929;

б) Московский папирус: W. W. Struve, Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau, «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik», Abt. A, Bd. I, 1930.

Папирус Ринда, как и Московский папирус, по-видимому, сочинены в период Среднего царства, между 2000 и 1800 гг. до н. э. Первый представляет собой копию более древнего текста, сделанную примерно в 1600 г. до н. э. писцом Ахмесом. (*Стр. 13.*)

6. Имя Имхотепа относится к истории Древнего царства. Он был одним из ученых Древнего Египта. (*Стр. 14.*)

7. Мина — единица веса, равна примерно 0,504 *кг*. Применялась в Египте и Вавилоне. (*Стр. 14.*)

8. Илидури — одно из вавилонских имен. Об истории Египта и Вавилона см.: В. И. Авдиев, История Древнего Востока, Л., 1948. (*Стр. 15.*)

9. Птахотеп — известный сановник Древнего царства. Его максимы о мудрости и правилах поведения были предметом изучения в школах писцов Среднего царства и позже. (*Стр. 15.*)

10. В задаче 48 папируса Ринда (см. источник а), т. 1, указанный в примечании 5) требуется сравнить площадь круга с диаметром, равным 9, и площадь описанного вокруг него квадрата, а в задаче 50 вычисляется сама площадь круга с диаметром 9. (*Стр. 16.*)

11. Хет — единица измерения у древних египтян; равнялась приблизительно 17,25 *м*. (*Стр. 16.*)

12. На этой странице воспроизведен рисунок (рис. 14) к задаче 48 папируса Ринда (см. источник а), т. 1, указанный в примечании 5). Он такой же, как и рис. 1 в основном тексте, но без круга. Вавилоняне же заменяли длину окружности периметром правильного шестиугольника, вписанного в круг. Действительно, если длина окружности $L = 6r$, то $\pi = 3$. (*Стр. 16.*)

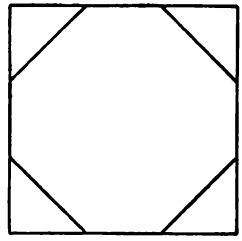


Рис. 14.

13. С начала II тысячелетия до н. э. школа в Шумере, а позднее в Вавилоне получила большое развитие. В школах было много учеников, становившихся после их окончания писцами в разных государственных учреждениях. Директор школы носил звание о т ц а ш к о л ы, а ученики назывались с ы н о в ь я м и ш к о л ы. (См. С. Н. К р а м е р, История начинается в Шумере, перев. Ф. М. Мендельсона под ред. В. В. Струве, М., 1965, стр. 19—20.) (*Стр. 17.*)

14. Египетское название единицы площади: 1 сетат равен 1 квадратному хету. (*Стр. 17.*)

15. Если сторона квадрата, взятая за целое, равна 9 хетам, то $\frac{1}{9}$ стороны равна 1 хету. (*Стр. 18.*)

16. В такой форме изложена задача в папирусе Ринда. Значение указанных выше цифр следующее: «1...9» означает, что по всей длине 9 единиц; «$\frac{1}{9}$... 1» показывает, что девятая часть всей длины представляет собой единицу, и, отнимая ее от 9 единиц, мы получаем 8 единиц; «1...8» показывает в сокращенной форме, что сторона квадрата равна 8 единицам. Для того чтобы вычислить площадь, т. е. чтобы умножить 8 на 8, египетский писец применял способ удвоения и, в случае необходимости, сложения частичных сумм, когда множитель не являлся степенью двойки. В последнем случае достаточно применять удвоение. Писец выражает эти операции следующим образом: 1 раз 8 — 8, 2 раза 8 — 16, 4 раза 8 — 32 и 8 раз 8 — 64 сетата. (*Стр. 18.*)

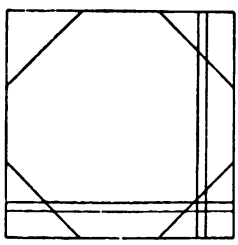


Рис. 15.

17. Задача 50 из папируса Ринда (таблица 72). (*Стр. 18.*)

18. Из сказанного вытекает, что сторона нового квадрата (рис. 15) равна: 9 хетов — 1 хет — $\frac{1}{9} \cdot 8$ хетов. Если считать за единицу длины сторону описанного квадрата, то эти вычисления можно записать в виде

$$1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9} - \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Следовательно, периметр нового квадрата и соответственно длина окружности будет $4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Принимая диаметр за единицу ($d = 1$), получаем длину окружности $L = \pi$, и, значит, $\pi = 4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3{,}16$. Подобное вычисление имеется в задаче 10 Московского папируса. Перед тем, как изложить эту задачу, напоминаем, что египтяне не пользовались нашим позиционным обозначением чисел; например, они не писали 0,5 вместо $\frac{1}{2}$, а только дробь $\frac{1}{2}$. Любое десятичное число они выражали посредством суммы основных дробей, т. е. дробей вида $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{3}$. Дроби вида $\frac{1}{n}$ они записывали, ставя знак $\bigcirc$ над числом n. Если нужно было сложить несколько дробных чисел, то заданные дроби преобразовывались в дроби с числителем 1, а затем складывались. Сложение не имело специального знака, а дроби записывались одна за другой. Например, $\frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}$ означало $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$.

Вот задача 10 Московского папируса: «Расчет корзины, когда тебе говорят, что ширина корзины $4\frac{1}{2}$. Скажи мне, какова ее площадь.

Вычисли $\frac{1}{9}$ от 9, так как корзина по своей форме — половина яйца. Получишь 1. Вычисли остаток, это будет 8. Возьми $\frac{1}{9}$ от 8. Теперь вычисли остаток от этих 8 и $\frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{18}$. Получаешь $7\frac{1}{9}$. Вычисляй $4\frac{1}{2}$ раза $7\frac{1}{9}$. Это 32. Вот это и есть площадь». (См. источник б), указанный в примечании 5.) (*Стр. 20.*)

19. По вычислениям египтян $\pi \approx 4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3+\frac{1}{6} \approx 3{,}16$. (*Стр. 20.*)

20. Школа писцов находилась вначале в самом дворце фараона и называлась «домом жизни». (*Стр. 21.*)

21. Речь отца, воспроизведенная здесь по беседе, происходившей по дороге в школу писцов между мудрецом времен начала Среднего царства Дуауфом, сыном Хети, и его сыном Пепи, имеет следующее продолжение: «Удел каменотеса — тяжелый труд по обтесыванию всевозможного камня. Когда его работа окончена, он уже не чувствует рук от усталости. Наступает вечер, и он садится отдохнуть, но его ноги и спина ноют» (A. Erman, Die Literatur der Aegypter, Leipzig, 1923, S. 101—102). (*Стр. 21.*)

22. Диалог продолжается: «Во всех делах надо кому-нибудь подчиняться, лишь ученый муж подчиняется только себе.

Когда умеешь ловко пользоваться орудиями письма, все двери перед тобой открыты, ты можешь стать служащим, и твой заработок обеспечен. Поэтому учись хорошо, чтобы стать писцом и руководить другими людьми. Должность писца — большая. Орудия письма и папирусный свиток принесут тебе радость и богатство. Ни один писец не умирает с голода, ибо не зря говорят, что ученый насыщается своими знаниями...». (См. книгу, указанную в примечании 21, стр. 101.) (*Стр. 22.*)

23. Все правильно решенные задачи Московского папируса кончаются замечанием: «Ты правильно вычислил». Эти слова, очевидно, добавлялись экзаменатором, когда он проверял задачи. (*Стр. 22.*)

24. Ф а л е с из Милета (624—547 до н. э.) в 582 г. был объявлен одним из семи мудрецов. Его гений проявлялся в самых разных областях человеческой деятельности: инженерной, торговой, государственной, научной — математической, астрономической и т. д. Он был основателем материалистического философского направления, получившего название милетской, или ионийской, школы. По свидетельству Плутарха, Фалес перенял у египтян представление о том, что вода есть первичное начало всех вещей. Это говорит о том, что зачатки стихийных материалистических взглядов египтян и вавилонян оказали плодотворное влияние на дальнейшее развитие науки и на стиль мышления античных ученых, стремившихся объяснить явления природы, исходя из единого физического начала. Как инженер, Фалес, по преданию, воздвиг стратегическую плотину; плотина изменила течение реки, возник брод, через который двинулись войска Креза, тогда плотина была открыта, и воды реки уничтожили его армию. Как математик он вызвал восхищение фараона Амасиса, (Яхмоса II), вычислив высоту пирамиды с помощью тени, отброшенной палкой, установленной у края тени пирамиды. Он же установил, что сумма углов треугольника равна двумя прямым углам, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, что диаметр делит круг на две равные части, что прямые углы могут быть вписаны в полукруг и т. д. Значение Фалеса как геометра состоит не столько в установлении этих фактов, сколько в том, что он, по-видимому, был п е р в ы м м а т е м а т и к о м, с ф о р м у л и р о в а в ш и м т е о р е м у, с о п р о в о ж д а е м у ю д о к а з а т е л ь с т в о м. Так как аксиомы геометрии еще не были установлены, он применял логическое рассуждение для выведения геометрических истин, пользуясь наложением и симметрией. Этот метод был затем распространен его учениками во всех греческих школах. Своим новым пониманием геометрии он заложил научные основы геометрического исследования. Наконец, слава Фалеса как астронома была обязана главным образом предсказанию им солнечного затмения 25 мая 585 г. до н. э. В связи с астрономическими занятиями Фалеса рассказывают следующий анекдот. В одну из ночей Фалес прогуливался. Его взоры были обращены к небу. Поглощенный своими мыслями, он не заметил на пути ямы и провалился в нее. Наблюдавшая за этим происшествием старая женщина спросила его: «Как ты можешь знать, что находится на небе, если не знаешь, что находится у твоих ног?». О Фалесе см.: а) T. H e a t h, A History of Greek Mathematics, vol. I, Oxford, 1912, p. 67; б) T. H e a t h, A Manual of Greek Mathematics Oxford, 1931, p. 81;

в) W. W. Rouse-Ball, Histoire des mathématiques, t. 1, Paris, 1927, p. 14. (*Стр. 26.*)

25. Ср.: А. Д. Александров, Общий взгляд на математику, в книге: Математика, ее содержание, методы и значение, т. I, М., 1956, стр. 23. (*Стр. 27.*)

26. Эти свойства, конечно, очень разнообразны, например: плотность, вес, цвет, температура и т. п. (*Стр. 27.*)

27. Когда речь идет о геометрической фигуре, абстрагируются и от пространственного протяжения, т. е. считают, что у плоской фигуры только два измерения, у линии — только одно, у точки — ни одного. (*Стр. 28.*)

28. Скажем подробнее о философской борьбе той эпохи. В V в. до н. э. сложилась материалистическая философская школа древнегреческих атомистов. Ее основателем был Левкипп. Выдающимся представителем этой школы был философ-материалист и математик Демокрит из Абдеры (род. ок. 460 — ум. ок. 370 до н. э.), один из создателей атомистики. Этот блестящий античный философ путешествовал по Египту, Вавилону и Индии и в своих странствиях усвоил большое для той эпохи богатство знаний. К. Маркс назвал Демокрита «первым энциклопедическим умом среди греков». (К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., 2 изд., т. 3, стр. 126).

В объяснении явлений природы Демокрит исходил из атомистических представлений: мир состоит из атомов, атомы — это движущаяся материя. «Движение атомов, — излагает Цицерон взгляды атомистов, — должно мыслить не имеющим начала, но существующим вечно». Естественно, что в своих математических представлениях Демокрит был чужд мистике пифагорейской школы.

Другой важный центр изучения математики существовал в Книде — это была астрономическая школа, руководимая Эвдоксом. В Элее сложилась философская школа, основателем которой был Ксенофан. Его идеи продолжили Парменид и Зенон. Эта школа — она получила название элейской — особенно знаменита благодаря задачам («апориям», парадоксам), сформулированным Зеноном (ок. 490—430 до н. э.). Полагают, что целью апорий Зенона было обоснование того, что наши ощущения не подтверждают существование движения и множественности. Приведем две апории Зенона:

а) Ахиллес и черепаха. Зенон утверждает, что Ахиллес, несмотря на то что он бежит в десять раз быстрее черепахи, находящейся на 1000 стадий впереди него, не сможет никогда догнать ее, так как, пока Ахиллес пробежит 1000 стадий, черепаха продвинется на новые 100 стадий; затем, когда Ахиллес пройдет эти 100 стадий, черепаха опять продвинется на 10 стадий и т. д. Таким образом, каждый раз между Ахиллесом и черепахой будет оставаться определенное расстояние.

б) Летящая стрела покоится. Здесь Зенон исходит из того, что стрелу в каждое мгновение надо предположить находящейся либо в определенном месте (в котором она не движется), либо в движении. Исходя из того, что пространство и время состоят из неделимых элементов, Зенон утверждает, что стрела не может двигаться за мгновение (предположенное неделимым), ибо, если бы она меняла свое положение в данное

мгновение, это означало бы, что мгновение делимо. С другой стороны, если в данное мгновение стрела не находится в движении, она покоится все время, так как время состоит из таких мгновений.

В первом из этих парадоксов Зенон «опровергает» существование движения, исходя из предположения о неограниченной делимости пространства и времени, а во втором — исходя из предположения, что пространство и время состоят из неделимых элементов.

[Желающих подробнее ознакомиться с парадоксами Зенона мы отсылаем к статьям: С. А. Яновская, Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апории Зенона», сб. «Проблемы логики», М., 1963; ее же, Апории Зенона Элейского и современная наука, «Философская энциклопедия», т. 2, М., 1962, стр. 170—174. — *Прим. ред.*]

К концу V в. до н. э. Афины становятся центром, вокруг которого группируются греческие математики. Среди известных философов, открывших там свои школы, находился последний философ ионийской школы материалист Анаксагор из Клазомен (500—428 до н. э.); в Афинах учили софисты Гиппий и Антифон, там жил математик Гиппократ Хиосский и т. д. (*Стр. 29.*)

29. Аристофан, отец античной комедии, родился ок. 446 г. до н. э.; первая его комедия была поставлена в 427 г., последняя — в 385 г. Русский перевод его комедий: Аристофан, Комедии, перев. с древнегреч. под ред. Ф. А. Петровского и В. Н. Ярхо, тт. I, II, М., 1954. (*Стр. 30.*)

30. Аристотель (384—322 до н. э.) учился в Академии Платона. Впоследствии он основал в Афинах свою собственную школу, получившую название Ликея. (Ликей — пригород в Афинах того времени, где был гимнасий, посвященный богу Аполлону; в Ликее находилась школа Аристотеля.) Из-за привычки Аристотеля читать лекции во время прогулки аристотелевцы были прозваны перипатетиками (от греческого слова «peripateo» — прогуливаюсь).

Величайший мыслитель античности, Аристотель колебался между материализмом и идеализмом. Не будучи математиком, он интересовался математикой и был знаком с ее проблемами. В своих сочинениях он много раз касался вопросов этой науки. (См. В. П. Зубов, Аристотель, М., 1963.) (*Стр. 30.*)

31. Евдем Родосский — один из выдающихся учеников Аристотеля. О его жизни ничего не известно. Отрывки, оставшиеся от его работ, были опубликованы в книге: Eudemi Rhodii Peripatetici Fragmente quae supersunt, collegit L. Spengel, Berolini, 1870. Среди этих отрывков имеется и фрагмент написанной им истории геометрии. Другие места из истории геометрии Евдема известны по косвенным источникам — по комментариям Прокла, Евтокия и Симпликия. См. книги: а) Proclus de Lycie, Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1948, pp. 55—64; б) F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates, «Bibliotheca mathematica», 3. Folge, Bd. III, 1902, S. 7—62. (*Стр. 30.*)

32. В аристотелевском Ликее (откуда наше слово «лицей») были ежедневно две «прогулки», т. е. две

лекции. Утром читалась *ахроматическая лекция* для более подготовленных учеников, на которой говорилось об абстрактных частях наукп. Она относилась к *эзотерическому* (закрытому для непосвященных, «внутреннему») обучению. Вечерняя лекция предназначалась для всех слушателей. На ней речь шла о вопросах, для которых требовалась незначительная научная подготовка. Из таких лекций состояло *экзотерическое* (открытое, «внешнее») обучение. (*Стр. 31.*)

33. Настоящее имя Теофраста было Тиртам, но Аристотель назвал его вначале «Евфраст», что означает «приятный оратор», а позднее «Теофраст», т. е. божественный оратор. (*Стр. 31.*)

34. К в а д р а т у р и с т ы — люди, занимавшиеся поисками квадратуры круга с помощью циркуля и линейки.

Заметим, что в «Н а ч а л а х» Евклида площадь плоской фигуры называется «embadon», это же слово встречается в книгах Герона. Позже оно применялось и римскими землемерами (их называли также «громатиками» от слова «groma» — названия одного из инструментов для измерения площадей), которые называли величину площади «embadum» и «agea». Для вычисления земельных площадей в I и II вв. до н. э. употреблялось выражение «quadratura agrorum» («квадратура полей»), которое впоследствии стало употребляться в более общем смысле. В настоящее время под «квадратурой» понимается вычисление площади, ограниченной замкнутой кривой или ломаной линией. См. J. T r o p f k e, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. IV, 1923, S. 126; D. S m i t h, History of Mathematics, vol. I, 1923, p. 124, vol. II, 1925, p. 364; L e o n B r u n s c h v i e g, Les étapes de la philosophie mathématique, Paris, 1922, p. 57. (*Стр. 32.*)

35. П л а т о н (род. в 428 или 427 г., умер в 348 или 347 г. до н. э.) — философ-идеалист, ученик и друг Сократа. После смерти учителя долго путешествовал. Математику изучал в Кирене у Феодора. Около 389 г. вернулся в Афины и открыл школу, получившую название Академии. На фронтоне этой школы, по преданию, было написано: «Да не войдет сюда не обученный геометрии». Вслед за пифагорейцами Платон считал, что философию можно понять только через математику. В своем труде «Государство» он писал, что изучение математики развивает и приводит в движение умственный организм, более способный, чем тысячи глаз, ибо только через него можно понять истину. В его школе пространственная геометрия достигла высокого уровня развития. Там было установлено много свойств призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара. Хотя пять правильных многогранников изучались еще пифагорейцами, они долгое время назывались «платоновыми телами», так как Платон в своем диалоге «Тимей» утверждал, что атомы четырех «стихий» (элементов) — огня, воздуха, земли и воды — имеют соответственно форму правильных тетраэдра, октаэдра, куба и икосаэдра: «Земле предоставим мы вид кубический... телесный вид пирамиды должен у нас быть стихиею и семенем огня, ... второй по рождению вид признаем стихиею воздуха, а третий — воды» (П л а т о н, Сочинения, перев. В. П. Карпова, т. VI, М., 1879, стр. 433—434). Пятый вид правильного многогранника — додекаэдр — Платон считал формой мира в целом: «Но так как оставалось еще одно — пятое соединение, то Бог употребил его для очертания вселенной» (там же, стр. 432). (*Стр. 33.*)

36. Комедия Аристофана «Птицы» была представлена в 414 г. до н. э. на празднике Великих Дионисий и заняла второе место. Сцена с Метоном:

«П и с ф е т е р: О боги правые!
Ты что за человек?
М е т о н: Зовусь Метоном я,
Знаком всем грекам, и колонцам в частности.
П и с ф е т е р: А это что?
М е т о н: Орудья измеренья.
Напоминает очень воздух формою
Кастрюлю для тушенья. Здесь линейку я
Изогнутую приложу и циркулем
Отмерю расстоянье, понимаешь?
П и с ф е т е р: Нет.
М е т о н: Затем прямую, тоже по линеечке,
Я проведу, чтоб круг квадратом сделался».

(Перев. С. Апта; см. книгу, указанную в примечании 29, т. II, стр. 61.) (*Стр. 34.*)

37. Д и к е а р х — ученик Аристотеля, от которого позже отошел. Написал труд об Аристофане. (*Стр. 34.*)

38. Убежденный, что наука может продвигаться только путем обстоятельного изучения природы, Аристотель постоянно собирал научный материал, который он предоставлял своим ученикам. Каллисфен был племянником Аристотеля и участвовал в походе Александра Македонского в Индию. Он послал своему дяде много интересных коллекций из Вавилона и Индии. Обвиненный в измене, был приговорен Александром к смертной казни. (*Стр. 35.*)

39. Аристотель создал первую в мире библиотеку, в которой был установлен алфавитный метод классификации книг. Его примеру последовали библиотекари больших библиотек Александрии и Пергама. (*Стр. 35.*)

40. А н а к с а г о р из Клазомен (500—428 до н. э.) — греческий философ, учитель и друг Перикла. По преданию, он отказался от имущества, чтобы посвятить себя одной философии. Говорят, что однажды его спросили, какова цель его жизни, и он ответил: «Изучать небо, природу Солнца и Луны». Был заключен в тюрьму по обвинению в безбожии и оскорблении веры за утверждение, что Солнце и Луна не являются живыми существами. Он учил, что Солнце — большой горячий камень, а Луна — земля наподобие нашей, без собственного света. Освобожденный из тюрьмы, умер в Лампсаке.

Как известно, Аристотель на склоне своих дней тоже подвергся преследованию, — подобно Анаксагору, он был обвинен в безбожии. Аристотель покинул Афины и обосновался в Халкиде на острове Эвбея, родине своей матери. При этом он якобы сказал, что не хочет допустить, чтобы «афиняне еще раз совершили преступление против философии». Аристотель имел в виду судебный процесс и смерть учителя Платона — Сократа (в 399 г. до н. э. по приговору суда Сократ выпил кубок с ядом). (*Стр. 36.*)

41. Г и п п и й из Элиды (вторая половина V в. до н. э.) дал механическое определение этой кривой. По мнению Прокла, «симптом» (т. е. условие, определяющее это геометрическое место точек; см. примечание 62) этой кривой был найден Аполло-

нием. Как полагают, Динострат вновь нашел его и применил в задаче квадратуры. (*Стр. 36.*)

42. В средней школе на уроках геометрии изучают только свойства прямой, ломаной линии, окружности и ее дуг, так как это самые простые линии. Однако на практике люди встречаются со многими другими кривыми (таковыми являются, например, орбиты планет и искусственных спутников Земли, следы резца на металле, линии подвешенных кабелей и т. п.). Некоторые задачи, в которых встречаются кривые, отличные от тех, которые можно начертить при помощи циркуля и линейки, были предметом исследования ряда геометров и философов Древней Греции. Эти ученые изучили их свойства и открыли механические средства для их точного вычерчивания. Эти методы не признавались геометрами школы Платона. Стремясь решать геометрические задачи только при помощи циркуля и линейки, они не принимали никакого решения, для которого использовались другие инструменты. Известны три оставшиеся от них задачи, решений которых нельзя было найти при соблюдении указанных условий. Это следующие задачи: 1) *задача об удвоении куба*; состоит в требовании найти сторону куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба; 2) *задача о трисекции угла*; состоит в требовании разделить угол на три равные части; 3) *задача квадратуры круга*: состоит в требовании построить сторону квадрата, равного по площади заданному кругу. Греческие геометры, решившие эти задачи при помощи других кривых, внесли значительный вклад в прогресс геометрии, заложив основы теории кривых. Среди них были: Гиппий из Элиды, Менехм, Динострат, Архимед, Аполлоний и др. Русский перевод текстов Евтокия и Паппа, излагающих античные способы решения первых двух задач, см. в книге: Архимед, Сочинения, М., 1962, стр. 459—479 и 607—613. (*Стр. 36.*)

43. Луночки — фигуры, ограниченные дугами окружностей, выпуклость которых направлена в одну и ту же сторону. (*Стр. 36.*)

44. См. Аристотель, Физика, перев. В. П. Карпова, изд. 2-е, М., 1937, стр. 9. (*Стр. 36.*)

45. Гиппократ Хиосский (первая половина V в. до н. э.) — знаменитый математик, не примыкавший ни к одной из античных философских школ. Из его работ сохранился только отрывок из геометрического трактата, который Симпликий (VI в. н. э.) приводит в своих комментариях к «Физике» Аристотеля. Уроженец острова Хиос, Гиппократ жил в Афинах. Аристотель говорит о нем в «Евдемовой этике». Русский перевод сообщения Симпликия о Гиппократе см. в книге, указанной в примечании 42, на стр. 529—539. (*Стр. 36.*)

46. См. примечание 42. (*Стр. 36.*)

47. См. книгу, указанную в примечании 44. (*Стр. 37.*)

48. См. сообщение Симпликия, упомянутое в примечании 45. (*Стр. 37.*)

49. Гиппократ называл квадрат отрезка «линией в степени», так что указанное предложение у Гиппократа гласит: «Подобные сегменты относятся, как их основания в степени». Обратим внимание читателя на то, что древнегреческие математики не употребляли слово «радиус», это слово (латинское слово «radius» означает «луч») появляется только у Цицерона. Древнегреческие

математики, говоря о радиусе, называли его «прямой, проведенной из центра». (*Стр. 37.*)

50. Действительно, если принять за радиус круга $A\Delta B$ сторону $A\Gamma$ (рис. 16) равнобедренного треугольника $A\Gamma B$, то площадь сегмента $A\Delta B$ будет равна площади сектора AOB минус площадь треугольника AOB, или

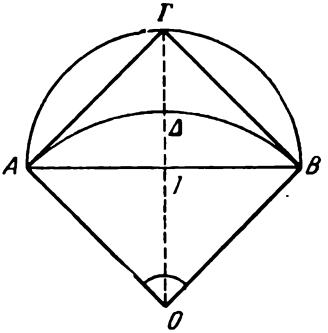


Рис. 16.

$$\text{площадь сегмента } A\Delta B = \frac{\pi A\Gamma^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} - \frac{A\Gamma^2}{2} = \frac{A\Gamma^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

площадь сегмента $A\Gamma$ = площади сектора $AI\Gamma$ — площадь треугольника $AI\Gamma = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. Но треугольник $A\Gamma B$ прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $2A\Gamma^2 = AB^2$. Таким образом,

две площади сегмента $A\Gamma = \frac{AB^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{A\Gamma^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ = площади сегмента $A\Delta B$. (*Стр. 37.*)

51. То есть фигуру, равновеликую многоугольнику. (*Стр. 38.*)

52. См. сообщение Симпликия, упомянутое в примечании 45. (*Стр. 38.*)

53. См. Аристотель, Физика, стр. 9. (*Стр. 39.*)

54. Речь идет о постулате, согласно которому отрезки прямой, будучи непрерывными, бесконечно делимы. Допуская противоположное, утверждает Аристотель, мы дошли бы до точек, которые, будучи неделимыми, не удовлетворяли бы условию непрерывности. В «Физике» Аристотель говорит: «Невозможно ничему непрерывному состоять из неделимых частей, если линия непрерывна, а точка неделима. Ведь края точек не образуют чего-нибудь единого, так как у неделимого нет ни края, ни другой части». (См. Аристотель, Физика, стр. 124.)

Тезис о бесконечной делимости пространства и времени не является ни ложным, ни идеалистическим. Его отрицание предполагает прерывное, квантованное пространство-время — гипотезу, все настойчивее выдвигаемую в новейшей науке. С философской точки зрения очевидно диалектическое «единство непрерывности (времени и пространства) и прерывности (времени и пространства)». (См. В. И. Ленин, Полн. собр. соч., 5-е изд., т. 29, стр 231.) (*Стр. 39.*)

55. См. Аристотель, Метафизика, перев. А. В. Кубицкого, М. — Л., 1934, стр. 83. (*Стр. 39.*)

56. В сообщении Симпликия (см. примечание 45) приводятся некоторые курьезные высказывания софистов о возможности квадратуры круга. Софисты исходили при этом из существования квадратных и одновременно циклических чисел, т. е. чисел, которые при возведении в квадрат оканчиваются цифрой

заданного числа (например, 25 и 36 — квадратные и циклические числа, так как $25 = 5^2$ и $36 = 6^2$) (*Стр. 40.*)

57. См. примечание 54. (*Стр. 41.*)

58. См. примечание 74, б). (*Стр. 41.*)

59. См. Аристотель, Физика, стр. 32. (*Стр. 41.*)

60. См. Аристотель, [Никомахова] Этика, I, перев. Э. Радлова, СПб., 1908, стр. 12. (*Стр. 41.*)

61. Греки ценили ясность, порядок и точность. И в геометрии они, как правило основывали свои построения на том же идеале красоты и гармонии, которого так строго придерживались в изобразительном искусстве. Наверное поэтому в доалександрийский период некоторые из них ограничивали область исследований преимущественно задачами, в которых геометрическое построение можно выполнить при помощи циркуля и линейки, — задачами, называемыми в настоящее время «задачами второй степени». (*Стр. 42.*)

62. Под симптомом кривой древние подразумевали отношение, определяющее заданное геометрическое место точек. Аналитически это соответствует уравнению кривой. В Комментариях к первой книге «Начал» Евклида Прокл пишет: «У математиков принято, когда они занимаются линиями, приводить симптом каждого вида. Так, Аполлоний приводит симптом каждого конического сечения. То же делал и Никомед для конхоид, Гиппий для квадратрис, Персей для спиралевидных кривых» (см. книгу, указанную в примечании 31, а)).

Русский перевод сообщения Паппа о квадратрисе см. в книге, указанной в примечании 42, стр. 539—543. (*Стр. 43.*)

63. Чтобы доказать эту пропорцию, Динострат рассуждает от противного. Пусть дан отрезок, больший или меньший AH, например $AN > AH$ (рис. 10). Опишем круг ZN с центром в A; он пересечет квадратрису в точке S. Продолжим радиус AS; он пересечет дугу $B\Delta$ в точке R. По предположению $\dfrac{\overset{\frown}{A\Delta}}{\overset{\frown}{BE}} = \dfrac{AN}{A\Delta}$; из $\dfrac{\overset{\frown}{ZSN}}{\overset{\frown}{BE\Delta}} = \dfrac{AN}{A\Delta}$ следует, что $\overset{\frown}{ZSN} = A\Delta$.

Учитывая свойство квадратрисы, имеем

$$\frac{\overset{\frown}{SN}}{\overset{\frown}{ZSN}} = \frac{\overset{\frown}{R\Delta}}{\overset{\frown}{BR\Delta}} = \frac{SM}{BA}.$$

Но $\overset{\frown}{ZSN} = A\Delta = BA$; следовательно, $\overset{\frown}{SN} = SM$, что абсурдно. К такой же нелепости мы придем, если предположим, что данный отрезок меньше AH. См. стр. 226 книги Хита, указанной в примечании 24, б). (*Стр. 43.*)

64. См. Аристотель, Метафизика, стр. 42. (*Стр 44.*)

65. Уравнение квадратрисы. Пусть $\theta = \overset{\frown}{BE}$ (рис. 17). По определению $\theta = \dfrac{\overset{\frown}{B\Delta} \cdot IP}{BO}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(r-y)}{r}$; поэтому $y = 0$ при $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Но $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$; следовательно, $y = x \operatorname{tg} \dfrac{\pi y}{2r}$. Абсцис-

су точки пересечения квадратрисы с Ox мы получим, положив $y = 0$ в уравнении

$$\lim_{y\to 0} x = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2r}} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\pi}{2r}\cdot \sec^2\frac{\pi y}{2r}} = \frac{2r}{\pi}.$$

Это видно и геометрически, ибо при малых значениях y дуга сливается с касательной; следовательно, $OH = x = \frac{2r}{\pi}$.

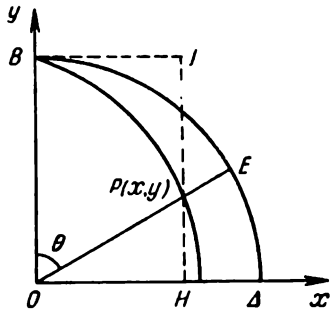


Рис. 17.

Так как длина четверти круга $L = \frac{\pi r}{2}$, то свойство квадратрисы ведет к спрямлению дуги окружности: $L = \frac{r^2}{OH} = \frac{\pi r}{2}$. (*Стр. 44.*)

66. См. Аристотель, Физика, стр. 97. (*Стр. 46.*)

67. *Принцип противоречия* состоит в запрещении совместной истинности суждения и его отрицания (суждение и его отрицание называются противоречащими суждениями). От этого принципа следует отличать *принцип исключенного третьего*, гласящий, что из двух противоречащих суждений верно по крайней мере одно. Таким образом, вместе оба принципа утверждают, что из двух противоречащих суждений одно обязательно истинно, а другое ложно.

Аристотель считал оба принципа совершенно необходимыми для научного мышления. (Фактически они просто следуют из предположения — принимавшегося в аристотелевой логике и теории познания, — что всякое суждение либо истинно, либо ложно, и притом только одно из двух, и определения логической операции отрицания как такой операции, которая превращает истинное суждение в ложное, а ложное — в истинное.) Однако в современной логике и в исследованиях по логическим основаниям математики этим принципам, — во всяком случае, принципу исключенного третьего — уже не придается такого абсолютного значения. Например, конструктивное направление в математике и логике, представленное в СССР школой А. А. Маркова и Н. А. Шанина, отвергает применимость принципа исключенного третьего в математических рассуждениях, для которых существенна идея бесконечности. (О конструктивном направлении см. А. А. Марков, О конструктивной математике, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. 67: «Проблемы конструктивного направления в математике. 2 (Конструктивный математический анализ)», сб. работ под ред. Н. А. Шанина, М. — Л., 1962.)

Впрочем, уже древнегреческие мыслители обсуждали многие тонкие вопросы, связанные с логическими трудностями, в частности и те, которые получаются в результате применения упомянутых принципов в некоторых ситуациях. Это прежде

всего касается парадоксов (апорий, антиномий) — логически правильных рассуждений, которые тем не менее ведут к противоречию. Парадоксы были открыты древнегреческими философами задолго до Аристотеля. Это, в частности, апории Зенона, о которых уже шла речь. Другой пример — парадокс «Лжец», который был известен уже Евбулиду из Милета (IV в. до н. э.), представителю так называемой мегарской философской школы. Этот парадокс имеет следующий смысл. Некто в некоторый момент времени говорит: «Я лгу» (и больше ничего не произносит). Что он высказал — истину или ложь? Если, сказав «Я лгу», он высказал истину, то получается (по его собственному признанию), что он солгал; если же, высказав «Я лгу», он солгал, то, значит, он говорил правду. Получается, что была высказана сразу и правда, и ложь, в чем и состоит парадокс.

С тех пор, как древнегреческие мыслители открыли парадоксы, последние подвергаются многочисленным исследованиям. В наши дни эти исследования проводятся преимущественно в рамках математической логики. И сколько со времен Аристотеля было предложено решений парадоксов! (Таким решением парадокса «Лжец» может быть, например, просто отказ считать выражение «Я лгу» чем-то осмысленным или же отказ признавать его суждением, т. е. отказ от правомерности приписывания этому выражению присущего суждению — по определению — свойства быть либо истинным, либо ложным, и притом только одним из двух. Пусть читатель сам подумает, не выглядит ли это решение некоторой натяжкой над нашей языково-мыслительной интуицией.) Сам Аристотель много размышлял над установленными им принципами логики, высказывая подчас догадки, предвосхищавшие последующие исследования (так, он поставил вопрос, не следует ли отказать принципу исключенного третьего в применимости к суждениям о еще не совершавшихся событиях).

О проблеме парадоксов существует огромная литература. Помимо упоминавшихся выше (см. примечание 28) статей С. А. Яновской укажем книгу: А. Френкель и И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, перев. с англ. Ю. А. Гастева под ред. А. С. Есенина-Вольпина, М., 1966, и статью А. С. Есенина-Вольпина «Парадокс» в т. 4 «Философской энциклопедии» (М., 1967). — *Прим. ред.* (*Стр. 46.*)

68. См. Аристотель, Физика стр. 31. (*Стр. 47.*)

69. Евклид (ок. 330—275 до н. э.) жил в Александрии во время царствования Птолемея I. С него начинается подлинно классический период греческой математики. Он написал несколько трудов, из которых самый значительный и известный — «Начала», состоящие из 13 книг. В «Началах» дано в высшей степени систематизированное и строгое изложение сведений по математике того времени. Первые четыре книги содержат сведения по элементарной плоской геометрии (планиметрии), без применения аксиомы Евдокса об измерении и без теории пропорций, т. е. отражают состояние геометрии в V в. до н. э., примерно во времена Гиппократа. V книга излагает общую теорию пропорций Евдокса, а VI книга — ее применение к теории подобия плоских фигур. VII—IX книги содержат основы теории чисел. В X книге дается систематическое изложение теории квадратичных иррациональностей. XI книга излагает основные отношения между прямой и плоскостью в пространстве. XII книга

посвящена основной теории Евдокса о площадях и объемах. Здесь указывается, что площадь круга пропорциональна квадрату его диаметра, но не делается попытки вычислить значение π. В этой же книге определяется объем пирамиды, цилиндра и конуса. Евклид не занимается определением объема и площади сферы, потому что в его время их не умели измерять. Это сделал позже Архимед в своем труде «О шаре и цилиндре». XIII книга содержит строгие построения правильных многогранников, вписанных в сферу и описанных около нее, а также некоторые их свойства.

О жизни Евклида известно очень мало. Предполагают, что он родился в Александрии и учился в Афинах. Он был приглашен Птолемеем I преподавать в только что основанной в Александрии школе при храме муз (она называлась Мусейон, откуда наше слово «музей»). Александрийская школа, в которой Евклид был первым преподавателем математики, вскоре стала главным культурным центром всего Средиземноморья.

[«Начала» Евклида переведены на русский язык Д. Д. Мордухай-Болтовским, тт. I—III, М. — Л., 1948—1950. — *Прим. ред.*] (*Стр. 47.*)

70. Второе предложение XII книги «Начал» Евклида — см. т. III упомянутого в предшествующем примечании русского перевода «Начал», стр. 64—67. Каким способом это предложение доказывал Гиппократ, неизвестно. Евклид доказывал его с помощью метода, впоследствии получившего название «метода исчерпывания» (см. примечание 74, б). — *Прим. ред.* (*Стр. 48.*)

71. Архимед (287—212 до н. э.) обладал энциклопедическими знаниями и считается самым крупным математиком и механиком античного мира; в математике он разрабатывал как интегральные, так и дифференциальные методы. Уровень, достигнутый открытиями Архимеда, был превзойден лишь математиками XVII в. Лейбниц писал: «Всякий, кто в состоянии понять Архимеда, будет меньше восхищаться открытиями величайших из современных людей». Архимед, как полагают, родился в Сиракузах, в защиту которых от римлян он внес значительный вклад. Достоверно известно, что он был убит в 212 г. до н. э. солдатом римского военачальника Марцелла во время Второй пунической войны при взятии Сиракуз римлянами.

Архимед путешествовал по Египту, затем учился в Александрии, где подружился с астрономом Кононом Самосским и Эратосфеном Киренским, которым Архимед посвящал свои математические труды. Хотя Архимед жил в Сиракузах, считается, что он принадлежит к александрийской школе, так как был связан с ее учеными и посылал им свои работы.

На надгробном камне Архимеда, согласно его желанию, высечено изображение вписанного в цилиндр шара. Этой фигурой он хотел напомнить потомкам об одном из любимейших его открытий, благодаря которому мы знаем, что полная площадь поверхности и объем описанного вокруг шара цилиндра, высота которого равна диаметру шара, соответственно равны 3/2 площади поверхности и 3/2 объема шара. Цицерон рассказывает, что только по этому изображению он сумел открыть заброшенную и забытую могилу Архимеда (см. A. Ribière, Mathématiques et

mathématiciens, Paris, 1889, p. 140). Многие труды Архимеда утеряны, некоторые из них известны только по арабским переводам. До нас дошли следующие труды: три по планиметрии — «Измерение круга», «Квадратура параболы», «О спиралях»; по стереометрии — «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах»; по арифметике — «Подсчет песчинок» («Псаммит»). Последняя представляет собой попытку систематического вычисления количества песчинок, содержащихся во Вселенной, с использованием больших чисел. При этом Архимед исходил из указанного греческим астрономом Аристархом — сторонником гелиоцентрической системы — расстояния от Земли до Солнца в 5 миллиардов стадий, т. е. 925 миллионов *км* (см. Э. К о л ь м а н, История математики в древности, М., 1961, стр. 161—162). [Все сохранившиеся сочинения Архимеда переведены на русский язык И. Н. Веселовским: А р х и м е д, Сочинения, М., 1962; в этом издании читатель может найти и такие сочинения Архимеда, которые сохранились только в арабских переводах. — *Прим. ред.*] Работами «О равновесии плоских фигур» и «О плавающих телах» Архимед заложил основы двух отраслей механики: статики и гидростатики.

Применение Архимедом математических знаний к практике и, в частности, решение таких практически важных математических задач, как вычисление площади круга и площадей поверхности и объемов круглых тел, открыло дорогу развитию п р и к л а д н ы х о т р а с л е й з н а н и й, считавшихся до этого недостойными геометров. Архимед установил связь между разделенными до того времени т е о р е т и ч е с к о й г е о м е т р и е й и п р а к т и ч е с к о й г е о м е т р и е й (геодезией). Позже работами Г е р о н а А л е к с а н д р и й с к о г о была заложена научная основа задач, выдвинутых землемерием и инженерным делом. Более точное значение π, вычисленное Архимедом, применялось греческими астрономами для определения радиуса Земли и для составления таблицы хорд, без которых нельзя было успешно выполнять астрономические вычисления. Так, в VI книге знаменитого александрийского астронома П т о л е м е я (ок. 85 — ок. 165 н. э.), известной под арабизированным названием «Алмагест», приводится и применяется значение $\pi = 3\frac{17}{120} = 3{,}1416$, выраженное в шестидесятичных дробях: $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60^2}$, т. е. 3°8′30″. (*Стр. 48.*)

72. Исследования Гиппократа по квадратуре луночек были продолжены другими математиками, установившими, что и у других луночек площадь равна площади некоторого многоугольника. Обобщение первой теоремы о луночках для любого вписанного в полукруг треугольника было осуществлено египетским математиком И б н а л - Х а й с а м о м (965—1039) в трактате «Квадратура круга» (см. примечание 130, а также H. W i e l e i t n e r, Zur Geschichte der quadrierbaren Kreismonde, München, 1934; А. П. Ю ш к е в и ч, История математики в средние века, М., 1961). (*Стр. 50.*)

73. Письмо, в котором Архимед рассказывает, как он пришел к квадратуре круга, помещено в начале его трактата «Квадратура параболы» (А р х и м е д, Сочинения, стр. 77—78).

«Архимед Досифею желает благоденствия!

Узнавши о смерти Конона, делавшего все для нас из дружбы, и о том, что ты был близок к Конону и сведущ в геометрии, мы очень опечалились о покойном и как о друге и как о выдающемся математике. Поэтому мы решили написать тебе, подобно тому как обычно писали Конону, и послать некоторые геометрические теоремы, остававшиеся ранее неизвестными, а теперь полученные нами; они были сначала обнаружены нами при помощи механических методов, а затем доказаны также и геометрически.

Некоторые из занимавшихся ранее геометрией пытались доказать, что возможно найти площадь, ограниченную прямыми линиями и равную заданному кругу или его сегменту; затем они пробовали превратить в квадрат площадь, заключающуюся между прямой и сечением целого конуса *), пользуясь при этом не вполне дозволенными предположениями, вследствие чего большинство математиков и не признало за ними решения этой задачи. Что же касается сегмента, ограниченного прямой и параболой, то, насколько нам известно, никто из предшествующих математиков не пытался его квадрировать, нами же эта квадратура в настоящее время найдена. Действительно, можно доказать, что всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом одно и то же основание и равные высоты. При этом доказательстве принимается следующее предположение.

Если имеются две неравные площади, то, постоянно прибавляя к самому себе избыток, на который бо́льшая площадь превосходит меньшую, можно получить площадь, которая была бы больше любой заданной ограниченной площади. Этой леммой пользовались также и жившие ранее геометры.

При помощи именно этой леммы они доказали, что круги находятся друг к другу в двойном отношении их диаметров, шары — друг к другу в тройном отношении их диаметров и также что всякая пирамида составляет третью часть призмы, имеющей с пирамидой одно и то же основание и одинаковую высоту. Доказательство того, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, имеющего с конусом одно и то же основание и одинаковую высоту, они изложили, приняв некоторое предположение, подобное упомянутой лемме. При этом каждая из упомянутых теорем считается ничуть не менее правильной, чем другие, доказываемые без помощи упомянутой леммы; поэтому совершенно достаточно, чтобы такую же степень достоверности имели и теоремы, излагаемые нами теперь. При доказательстве мы сначала показываем, ка́к эта теорема была обнаружена нами при помощи механики, а затем уже, ка́к она доказывается геометрически». (*Стр. 50.*)

74. Архимед — единственный геометр древности после Гиппократа, решивший задачу квадратуры плоских фигур, ограниченных кривыми линиями. Поэтому благодаря работам Архимеда попытки Гиппократа неожиданно приобрели большое значение.

---

*) Под несколько странным выражением «сечение целого конуса» (следовало бы сказать «остроугольного конуса»), по всей видимости, подразумевается эллипс (примечание И. Н. Веселовского. — *Ред.*).

Этим были заложены основы важнейшей отрасли современной математики — интегрального исчисления.

а) В книге Архимеда «О равновесии плоских фигур» площадь параболы выводится из законов статики. Несмотря на то, что доказательство обладает совершенной математической строгостью, основываясь на теоремах о статических моментах и о центре тяжести треугольника, в «Квадратуре параболы» Архимед приводит также геометрическое доказательство этого. Пусть даны сегмент параболы ABC (рис. 18) и диаметр CD, разделяющий пополам хорду AB. При этом точку C получают, проводя касательную к параболе, параллельную AB. Прямая CD, параллельная оси параболы, — диаметр, сопряженный с направлением AB. Площадь сегмента параболы равна площади треугольника ABC, к которой добавляются площади двух сегментов параболы AC и CB. В каждый из этих сегментов опять вписывают таким же образом по треугольнику (треугольники ACE и CBF). Из свойств параболы вытекает, что площадь треугольника ACE вместе с площадью треугольника CBF составляют 1/4 площади треугольника ABC. Продолжая рассуждение и вписывая в каждый из четырех вновь образованных сегментов параболы соответствующие треугольники, Архимед выражает площадь сегмента параболы ABC суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 1/4; площадь сегмента параболы ABC равна $\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\right)$-й части площади треугольника ABC.

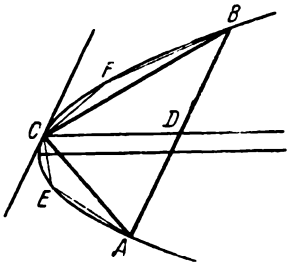


Рис. 18.

Чтобы установить площадь сегмента параболы, Архимед не использует суммы бесконечной прогрессии, ибо это понятие включает неизвестный греческим математикам *переход к пределу*. Он рассматривает сумму конечного числа членов геометрической прогрессии со знаменателем 1/4 и, применяя метод доказательства от противного, показывает, что разность между величиной

$$\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\cdot\text{площадь треугольника } ABC$$

и площадью сектора параболы может быть сделана меньше любой сколь угодно малой положительной площади, и, таким образом, устанавливает, что площадь сегмента параболы не больше и не меньше 4/3 площади вписанного треугольника ABC.

[б) «Метод исчерпывания», которым пользовался Архимед, основывается на пяти аксиомах, приведенных им в начале трактата «О шаре и цилиндре».

«Я принимаю следующее:

1. Из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей.

2. Две другие линии, расположенные на плоскости и имеющие те же самые концы, будут всегда неравными, если обе они

выпуклы в одну и ту же сторону и одна из них или целиком объемлется другой линией и соединяющей их концы прямой, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обеим линиям; при этом меньшей будет объемлемая линия.

3. Подобным же образом из поверхностей, имеющих общую границу, расположенную на плоскости, наименьшей будет плоскость.

4. Две другие поверхности, имеющие общую границу, расположенную на плоскости, будут всегда неравными, если обе они выпуклы в одну и ту же сторону и одна из них или целиком объемлется другой поверхностью и плоскостью, содержащей их общую границу, или же часть ее объемлется другой, часть же является общей обеим поверхностям; при этом меньшей будет объемлемая поверхность.

5. Далее, бóльшая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определенном отношении» (Архимед, Сочинения, стр. 96—97).

Последняя аксиома — знаменитая «аксиома Архимеда», которой пользовались, впрочем, еще Евдокс и Евклид (в «Началах» равносильное утверждение: «Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга» — четвертое определение V книги, т. I, стр. 142). Для площадей Архимед сформулировал эту аксиому и в начале «Квадратуры параболы» (Архимед, Сочинения, стр. 77). На последней аксиоме основана так называемая лемма Евдокса, являющаяся первым предложением X книги «Начал» Евклида: «Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины, а из остатка — больше половины и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины» («Начала» Евклида, т. II, стр. 102). — *Прим. ред.*] (*Стр. 50.*)

75. Книга Архимеда «Измерение круга» содержит вычисления, относящиеся к площади круга. Эта книга дошла до нас лишь в виде отрывка, состоящего из трех предложений. В первом показана эквивалентность площадей круга и прямоугольного треугольника. Архимед устанавливает, что площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен длине окружности, а другой — половине ее диаметра (Архимед, Сочинения, стр. 266). Следовательно, для вычисления площади круга нужно знать длину окружности. Для этого Архимед вычисляет приближенную длину окружности круга при помощи вычисления периметра 96-угольника. Во втором предложении утверждается, что «круг к квадрату на диаметре относится, как 11 к 14» (Архимед, Сочинения, стр. 267). Как отмечает Хит (T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. II, Oxford, 1921, p. 50), текст отрывка не соответствует оригиналу, так как это предложение не могло быть поставлено Архимедом перед третьим предложением, от которого оно зависит. Третье предложение гласит, что отношение длины окружности к ее диаметру больше $3\frac{10}{71}$ и меньше $3\frac{1}{7}$ (Архимед, Сочинения,

там же). Обозначая это отношение буквой π, получаем $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Первая теорема доказывается методом исчерпывания. Архимед аппроксимирует площадь круга, вписывая в круг и описывая около него сначала равносторонний треугольник, и затем, все время удваивая число сторон, доходит до 96-угольника.

В 1896 г. в Стамбуле была найдена одна из интереснейших книг — «Метрика» Герона Александрийского (датируется промежутком от 50 г. до н. э. до 100 г. н. э.). «Метрика» — трактат по прикладной геометрии, состоящий из трех книг и написанный в духе того времени: каждая задача иллюстрируется численными данными и практическими применениями. Своим практическим характером подход Герона больше напоминает египетские методы, нежели греческие. Книги Герона были широко распространены, так как являлись единственными произведениями математического характера в эпоху, когда интерес к строгим теоремам Евклида и возможность понять их были утеряны. Для π Герон указывает следующие значения: (1) $\pi = 3$ — значение, достаточное для землемерных вычислений; (2) $\pi = \sqrt{10}$ и (3) $\pi = 3\frac{1}{7}$, о котором он говорит, что оно более точное.

Герон утверждает, что Архимед будто бы сочинил еще одну книгу, в которой площадь круга определена с лучшим приближением. Однако в тексте Герона имеются ошибки при переписке чисел, указывающих значение π, так что его сообщение сомнительно (русский перевод этого текста Герона — см. Архимед, Сочинения, стр. 270).

Вычисляя площадь круга, Архимед показал первый в истории математики пример приближенного решения геометрической задачи. (*Стр. 50.*)

76. Аполлоний Пергский (ок. 260—170 до н. э.) известен своим трактатом о конических сечениях. В этом труде, ставшем классическим еще в древности, он исследует самые важные свойства конических сечений. Трактат, содержащий почти 400 теорем, делился на восемь книг, из которых не все дошли до нас. Аполлоний начинает изучение конических сечений с определения прямого конуса, имеющего круговое основание, и показывает, что сечения этого конуса плоскостью образуют три разных вида кривых, названных им эллипсом, гиперболой и параболой. Он сочинил и другие книги, но они известны только по написанным позднее комментариям к ним. Согласно утверждению Евтокия (около 500 г. н. э.), Аполлоний, «пользуясь другими числами», получил лучшее приближение для числа π, но книга Аполлония «Окитокион», цитируемая в связи с этим приближением (в которой, как полагают, содержалась и работа о квадратрисах), утеряна.

Из отрывка, оставшегося от Ямблиха и сохраненного в Комментариях Симпликия к Аристотелю, следует, что Аполлонию удалось получить квадратуру круга, используя для этого в качестве кривой «сестру конхоиды»; что́ это за кривая, точно не установлено; предполагают, что это может быть квадратриса Никомеда (или квадратриса Гиппия, вновь открытая Никоме-

дом). По мнению других, это, возможно, был «цилиндрический винт», называемый также «улиткой» Аполлония. В этом же отрывке упоминается и о другой квадратрисе «двойного движения», применявшейся Карпом из Антиохии. (См. P. Tannery, Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquite, в кн.: P. Tannery, Mémoires scientifiques, t. II, Paris, 1912, pp. 1—47.) (*Стр. 50.*)

77. Сам Архимед называл эту кривую helix, т. е. винт. Он определял эту кривую следующим образом: «Если какая-нибудь прямая в плоскости, равномерно вращаясь вокруг одного своего конца, удерживаемого неподвижным, вернется опять в исходное положение и одновременно по вращающейся прямой равномерно движется некоторая точка, выходя из неподвижного конца, то эта точка на упомянутой плоскости опишет спираль» (Архимед, Сочинения, стр. 229). Архимед доказывает, что если P — точка на первом витке (рис. 19), круг с центром O имеет радиус

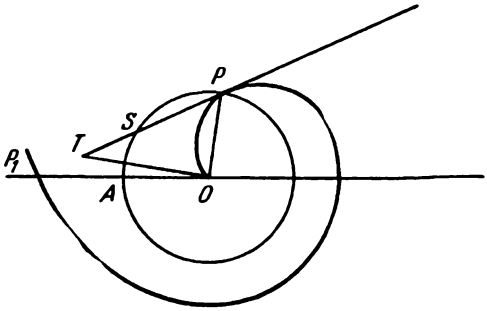


Рис. 19.

OP и PT — касательная к спирали в точке P, то длина отрезка OT, перпендикулярного к OP в точке O, называемого полярной подкасательной, равна дуге ASP, где A — точка пересечения круга с начальной полупрямой спирали. Далее Архимед показывает, что если P_1 — конец первого полного витка, то длина окружности с радиусом OP_1 равна длине подкасательной в P_1, и что вообще, если P_n — конец n-го витка, то длина подкасательной OT_n равна n длинам окружности с радиусом OP_n (эту длину нельзя определить при помощи циркуля и линейки, потому что спираль может быть построена лишь по точкам, а не при помощи циркуля и линейки). Основываясь на этом результате и применяя метод исчерпывания, он доказывает, что площадь, содержащаяся между начальной полупрямой OP_1 и первым витком, равна $\frac{1}{3}$ площади круга с радиусом OP_1. Затем Архимед показывает, что площадь, заключенная между вторым витком P_1P_2 спирали и прямой OP_2, находится в отношении $\frac{7}{12}$ к площади круга с радиусом OP_2 и т. д. (рис. 20). Следовательно, Архимед показывает, что если можно определить

площади этих частей спирали, то с их помощью можно точно выразить и площадь круга. (*Стр. 51.*)

78. В предисловии к переводу астрономической поэмы Арата «Небесные явления», сделанному Цицероном, последний писал о том, что геометрия была в большом почете у греков, что у них были блестящие математики, но римляне свели это искусство только к его применению для вычислений и измерений. Отсюда видно, что римляне сосредоточили свое внимание на задачах практического характера. Они не оставили сколько-нибудь значительных теоретических работ по математике, и до сих пор еще нет удовлетворительного объяснения этого. Математические знания римлян, развивавшиеся одновременно с техникой, указывают на их преимущественно этрусское и египетское происхождение. Позже сказалось и греческое влияние. В книге «О земледелии», написанной римским писателем и ученым-энциклопедистом Марком Теренцием Варроном (116—27 до н. э.), утверждается, что римляне научились измерять поля у этрусков. Другой римский ученый, Витрувий Поллион (вторая половина I в. до н. э.), сочинил труд об архитектуре, состоящий из 10 книг, содержащих краткое изложение многих утерянных работ по математике, архитектуре, скульптуре, музыке и т. п. В этой книге для числа π встречается только значение 3. Среди выдающихся землемеров, писавших о геометрии, упомянем Секста Юния Фронтина (40—103 н. э.). В его труде для числа π дается значение $3\frac{1}{7}$, выраженное в дробях с основанием 12. Известен список сборника произведений землемеров, сделанный примерно в VI или VII в. и названный «Codex Arcerianus». (См. P. Tannery, Un nouveau texte de traités d'arpentage et de géométrie, в кн.: P. Tannery, Mémoires scientifiques, t. V, Toulouse — Paris, 1922, pp. 29—78.) (*Стр. 52.*)

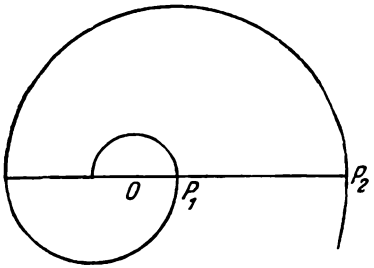


Рис. 20.

79. См. Ф. Энгельс, Людвиг Фейербах и конец немецкой классической философии, в кн.: К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, изд. 2-е, т. 21, М., 1961, стр. 314. (*Стр. 52.*)

80. За эти столетия было написано несколько сочинений энциклопедического характера, каждое из которых содержало одну главу по геометрии. В них излагаются без доказательств некоторые теоремы из первых книг «Начал» Евклида, а также знания, оставшиеся от римских землемеров. Для π приводится либо значение 3, либо $\frac{22}{7}$ без указания на приближенный характер этих значений. (См. P. Tannery, La géométrie au XI-e siècle, в кн.: P. Tannery, Mémoires scientifiques, t. V, pp. 79—102.) (*Стр. 52.*)

81. Этими письмами обменивались некоторые преподаватели школ при Кёльнском и Льежском соборах. Перед тем как отправить их адресатам, они, как правило, читали и комментировали их в соответствующих научных кругах. Из содержания писем очевидно, что эти преподаватели пытались выяснить понятия о внутренних и внешних углах треугольника. Они пришли к выводу, что в н у т р е н н и й у г о л означает о с т р ы й у г о л, а в н е ш н и й — т у п о й. Понятно, что в таких условиях и речи не могло быть о доказательстве теоремы о сумме углов треугольника, несмотря на то что было известно, что она равна двум прямым углам. В этих письмах для π дается (неизвестного происхождения) значение $3\frac{1}{8}$, а также (египетского происхождения) значение $\left(\frac{16}{9}\right)^2$. (См. P. T a n n e r y, Une correspondance d'écolâtres, в кн.: P. T a n n e r y, Mémoires scientifiques, t. V, Toulouse — Paris, 1922, pp. 103—111, 229—303.) (*Стр. 53.*)

82. Основы образования в западной Европе заложил К а р л В е л и к и й. В этом ему помог бывший его учитель, английский ученый монах Алкуин. Развитие математического образования происходило позже, благодаря, главным образом, деятельности ученого Г е р б е р т а (942—1003), преподавателя школы при Рейнском соборе, ставшего впоследствии римским папой под именем Сильвестра II. Это был один из самых выдающихся людей X в., значительно превосходивший своих современников по образованию и уму. Он был автором математических трудов «Правила счета на абаке» (Regula de abaco computi), «Книжка о делении чисел» (Libellus de numerorum divisione) и «Книга абака» (Liber abaci). Он изготовлял абаки и географические и небесные глобусы, вызывавшие большое восхищение, и выменивал их на рукописи произведений римских классиков.

Во второй половине XI в. и позже получило распространение сочинение по геометрии, автором которого считался Герберт. На самом же деле это произведение состояло из трех отдельных частей, написанных, по всей вероятности, тремя разными авторами после смерти Герберта. Они содержали геометрические определения и землемерные задачи и назывались «Podismus».

О Герберте см. H. W e i s s e n b o r n, Gerbert, в книге: Beiträge zur Mathematik des Mittelalters, Berlin, 1888; F. P i c a v e t, Gerbert, un pape philosophe, d'après la légende, Paris, 1897; P. T a n n e r y, Gerbert et les agrimenseurs romains, в кн.: P. T a n n e r y, Mémoires scientifiques, t. V, p. 94—96. (*Стр. 53.*)

83. А. П. Ю ш к е в и ч, История математики в средние века, М., 1961, стр. 319. (*Стр. 53.*)

84. Действительно, обозначив через r радиус круга, а через L_p и l_p стороны описанного и вписанного квадратов, имеем $L_p = 2r$ и $l_p = \sqrt{2}r$. Следовательно, (площадь круга)^2 = (площадь вписанного квадрата) $\times$ (площадь описанного квадрата) или $\pi^2 r^4 = 2r^2 \cdot 4r^2$, отсюда $\pi^2 = 8$, или $\pi = \sqrt{8} \approx 2{,}82$. (*Стр. 53.*)

85. а) Известна лишь одна полная рукопись этой книги Франкона (Франко) из Льежа, написанная по-латыни. Она издана К. Винтербергом под названием: Der Traktat Franco's von Lüttich De quadratura circuli («Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik», Bd. IV, 1882, S. 135—183).

б) См. также P. Tannery, Francon de Liège, в кн.: P. Tannery, Mémoires scientifiques, t. V, pp. 86, 255, 259. (*Стр. 55.*)

86. См. источник, указанный в примечании 85, а). (*Стр. 56.*)

87. См. стр. 234—236 работы П. Таннери, указанной в примечании 81. (*Стр. 56.*)

88. Передано в соответствии с источником, указанным в примечании 85, а) (см. стр. 161 публикации К. Винтерберга). (*Стр. 57.*)

89. См. стр. 232 (примечание 1) работы П. Таннери, указанной в примечании 85, б), а также M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. I, 3. Aufl., Leipzig, 1907, S. 876. (*Стр. 58.*)

90. См. E. Gebhart, L'état d'âme d'un moins de l'an 1000, «Revue des deux mondes», t. 107, Paris, 1891, pp. 600—628, а также работу Пикаве, указанную в примечании 82. (*Стр. 58.*)

91. Передано в соответствии с работой, указанной в примечании 85, а) (см. стр. 148 публикации К. Винтерберга). (*Стр. 58.*)

92. См. работы, указанные в примечании 82. (*Стр. 59.*)

93. См. Ad. Quételet, Histoire des sciences mathématiques chez les Belges, Bruxelles, 1871, pp. 33—34. (*Стр. 59.*)

94. См. стр. 183 источника, указанного в примечании 85, а), и стр. 232 работы, указанной в примечании 85, б). (*Стр. 59.*)

95. См. стр. 172 источника, указанного в примечании 85, а). (*Стр. 60.*)

96. См. стр. 160 того же источника. (*Стр. 61.*)

97. См. тот же источник. (*Стр. 62.*)

98. Понятие о внешних и внутренних углах треугольника было совсем забыто в X—XII вв. Заслуга Франкона состоит в том, что он постиг суть понятия о внутреннем угле. Что касается внешнего угла, то он ошибался. Он предполагал, что внешняя сторона *BD* (рис. 21) идет из *B* в любом направлении, а не продолжает сторону *BC*: «... угол *ABC* внутренний, потому что содержится в пределах фигуры, в то время как угол *ABD* внешний, потому что появляется вышеописанным образом». (*Стр. 62.*)

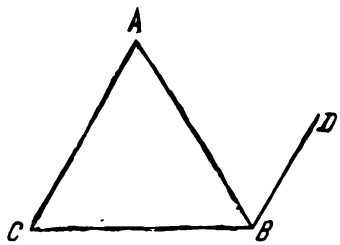


Рис. 21.

99. Сведения об этой беседе приведены в книге Франкона (стр. 143). Франкон узнал о задаче квадратуры круга из трактата по логике «Комментарии Боэция к „Категориям" Аристотеля», а не из книги по геометрии. Он считал, что площадь круга равна 11/14 квадрата диаметра круга точно, а не приближенно. Следовательно, в задаче о квадратуре круга он предполагал известным именно то, что следовало установить. (*Стр. 62.*)

100. Речь идет о прямоугольнике и о нахождении стороны равновеликого ему квадрата, т. е. отрезка *a*, равного среднему геометрическому двух заданных отрезков *b* и *c*. (*Стр. 63.*)

101. Франкон достиг понятия об иррациональности, заметив, что нельзя извлечь квадратный корень из числа, не являющегося

полным квадратом. Однако то, что ему было ясно в области арифметики, он не мог понять в области геометрии, так как и для него, и для его современников геометрия была экспериментальной наукой. Поэтому он был убежден, что квадратура круга невозможна, если ее выразить при помощи чисел, потому что число, выражающее площадь круга, не является полным квадратом и, следовательно, из него нельзя извлечь точный квадратный корень. Но квадратура круга, по его мнению, становится возможной с точки зрения «геометрической», т. е. если взвешивать фигуры и отыскать способ превращения одной фигуры в другую. Это он и пытается доказать в своих шести книгах. (*Стр. 63.*)

102. Римляне делили целое на 12 частей. На основе приведенных им вычислений Франкон правильно утверждает, что $50 \neq \left(5+2\frac{5}{12}\right)^2$. В беседе он намекает на единственное известное ему метрическое отношение, а именно, что площадь квадрата, построенного на диагонали данного квадрата, в два раза больше площади данного квадрата. (*Стр. 63.*)

103. Франкон прошел мимо задачи о квадратуре круга, так и не поняв ее сути, так как считал точным приближенное значение $\pi = \frac{22}{7}$. По мнению Франкона, задача квадратуры круга состояла в превращении прямоугольника со сторонами 11 и 14 в квадрат, ибо он, как и все геометры XI в., не умел строить среднее пропорциональное двух данных отрезков. В открытии этого геометрического построения, по его мнению, состояла вся трудность квадратуры, и поэтому он старался с помощью взвешивания установить, как разрезать прямоугольник для того, чтобы получить равновеликий квадрат, и наоборот. (*Стр. 64.*)

104. Вот перевод других мест из V книги (стр. 166b — 167a): «Этому превращению способствуют в особенности свойства восковой массы, ибо она, утрачивая свою твердость при соприкосновении с теплом огня, может быть вытянута в непрерывную нитку или смята в виде мяча... То же можно наблюдать у жидкостей, так как известно, что если воду, вино, мед и тому подобное влить в круглый сосуд, то они приобретают круглую форму; переливание той же жидкости в удлиненный сосуд неизбежно приводит к вытягиванию ее в длину, но из этого состояния ее можно вернуть к прежней форме...» (*Стр. 64.*)

105. См. стр. 182b работы, указанной в примечании 85, а). (*Стр. 64.*)

106. Вот как начинается VI книга (стр. 173b — 173c): «Я считаю, что для установления или доказательства равенства круга и квадрата ничего не было бы столь полезным, как нахождение метода деления и той и другой фигуры. Всякое деление форм — либо естественное, либо его можно достичь искусственно. Естественного же деления, по-видимому, можно достичь двумя способами, а именно: либо с одной стороны проводить к противоположной стороне линии, которыми фигуры разделятся на две, или три части (рис. 22), или на большее число частей, либо же из точки, занимающей место в середине, проводить линии к наружной стороне ... Однако имеются такие фигуры, подобные кругу, не обладающие сторонами, или такие, у которых нельзя указать середины, как у равнобедренного или другого

треугольника... Поэтому треугольник такого вида чужд обоим делениям. Но круг, поскольку его центр одинаково удален от любой точки окружности, допускает такое деление с помощью линий... Напротив, площадь квадрата, будучи прямоугольной и ограниченной четырьмя сторонами, от которых неподвижная точка находится на равном расстоянии, в середине, не отвергает ни того, ни другого способа деления». (*Стр. 64.*)

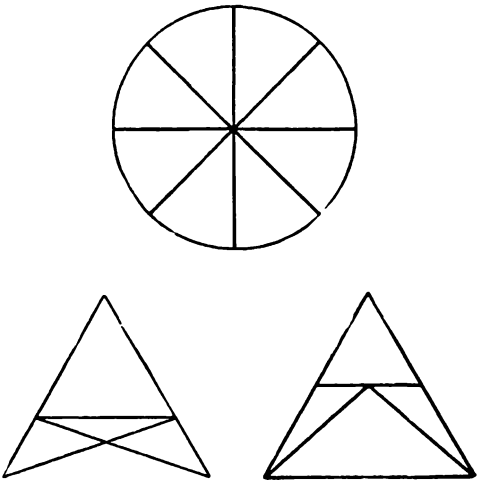


Рис. 22.

107. См. введение к книге VI Франкона, стр. 172а публикации К. Винтерберга, указанной в примечании 85, а). (Стр. *64.*)

108. История математики сохранила имена многих женщин, полюбивших эту науку и своим талантом и энтузиазмом способствовавших прогрессу и распространению математических знаний. Так, по греческому преданию 2500-летней давности, самой преданной и внимательной среди учеников Пифагора была Теано. В начале V в. н. э. жила Гипатия, знаменитая своими лекциями по математике и философии, которые она читала в Александрийской школе. В XVIII в. в Болонском университете читала курс по математике Мария Гаетана Аньези (Maria Gaetana Agnesi). Ее лекции отметила даже Парижская Академия наук. В том же столетии родилась Софи Жермен, другая женщина — страстный математик. С именем Софи Жермен (Sophie Germain; 1776—1831) связана формула средней кривизны в теории поверхностей, применяющаяся и в математической физике. Рассказывают, что ее математический талант проявился в связи с любопытным случаем. Ей было 13 лет, когда в библиотеке отца она нашла книгу Монтюкла по истории математики. В книге она прочла рассказ о смерти Архимеда, произведший на нее глубочайшее впечатление. Целые дни не давал ей покоя вопрос: какой же должна быть эта наука, если она в состоянии так поглощать человека, что он забывает все, даже опасность смерти, как было с Архимедом? С тех пор Софи Жермен начала изучать матема-

тику с такой страстью, что ее родители испугались. Они пытались унять ее сначала по-доброму, а затем с большой строгостью, отнимая у нее одежду, лишая света, тепла и даже еды. Убедившись, что их попытки бесполезны, родители уступили и разрешили ей заниматься математикой. Эта ее любовь не угасла до самой смерти. Она интересовалась акустикой и теорией чисел. Наибольшую известность ей принесли работы по теории упругих поверхностей. Парижская Академия наук присвоила ей премию за мемуар по колебаниям упругих пластинок. Она вела обширную переписку с великим математиком К. Ф. Гауссом в связи со своими исследованиями по теории чисел. Опасаясь, что у Гаусса могло быть предвзятое мнение по отношению к женщине-математику, она подписывала свои письма мужским именем М. Леблан. Только много позже Гаусс узнал, кто его корреспондент, столь высоко им ценимый. Она умерла в Париже, не дождавшись присвоения ей Гёттингенским университетом звания почетного доктора, о котором ходатайствовал Гаусс. (*Стр. 66.*)

109. Приведем список сочинений по истории математики: а) M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Bd. I—IV, 3. Aufl., Leipzig, 1907—1913; б) D. E. Smith, History of Mathematics, vol. I—II, Boston, 1925; в) J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 2. Aufl., Bd. I—VII, Berlin — Leipzig, 1921—1924; 3. Aufl., Bd. I—IV, 1930—1940; г) Э. Кольман, История математики в древности, М., 1961; д) А. П. Юшкевич, История математики в средние века, М., 1961; е) Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия, перев. под ред. А. П. Юшкевича, изд. 2-е, М., 1966; ж) Ф. Кэджори, История элементарной математики, перев. И. Ю. Тимченко, изд. 2-е, Одесса, 1917; з) G. Loria, Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX, 2-a ed., Milano, 1950; и) E. Bortolotti, Storia della matematica elementare, «Enciclopedia delle matematiche elementare e complementi», v. 32, Milano, 1950, pp. 539—750; к) R. C. Archibald, Outlines of the History of Mathematics, 6th ed., New York, 1949.

[К этому списку книг по истории математики можно добавить следующие книги советских и зарубежных авторов, имеющиеся на русском языке: М. Я. Выгодский, Арифметика и алгебра в древнем мире, изд. 2-е, М., 1967; Б. В. Гнеденко, Очерки по истории математики в России, М. — Л., 1946; История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, под ред. А. П. Юшкевича, тт. I, II, М., 1970; История отечественной математики, отв. ред. И. З. Штокало, тт. I—IV, Киев, 1966—1971; К. А. Рыбников, История математики, тт. I, II, М., 1960—1963; В. П. Шереметевский, Очерки по истории математики, изд. 2-е, М., 1940; А. П. Юшкевич, История математики в России, М., 1968; Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, перев. И. Г. Башмаковой, М., 1963; Б. Л. Ван дер Варден, Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции, перев. И. Н. Веселовского, М., 1959; Г. Вилейтнер, Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам, перев. П. С. Юшкевича и А. П. Юшкевича, изд. 2-е, М. — Л., 1935; Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, перев. В. Ливщица и др., М. — Л., 1937; Г. Г. Цейтен, История матема-

тики в древности и в средние века, перев. П. С. Юшкевича, изд. 2-е, М. — Л., 1938; Г. Г. Цейтен, История математики в XVII и XVIII веках, перев. П. С. Новикова, М., 1938. — *Прим. ред.*] (*Стр. 67.*)

110. Самые известные журналы, периодические и продолжающиеся издания по истории математики следующие (расположены в порядке их возникновения): Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (издавался с 1868 по 1887 г. Б. Бонкомпанья и с 1898 до 1917 г. Джино Лориа); Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften (издавался с 1887 до 1913 г. М. Кантором); Biblioteca mathematica (издавался с 1884 до 1916 г. Г. Энестрёмом); Isis (основан в 1913 г. Г. Сартоном); Scripta mathematica (основан в 1932 г. И. Гинзбургом); Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik (издавался с 1929 по 1937 г. Отто Нейгебауером в двух частях: А — Источники (Quellen) и В — Исследования (Studien)); Osiris (основан в 1936 г. Г. Сартоном); «Труды Института истории естествознания и техники» (1947—1961 гг.); «Историко-математические исследования», издаваемые с 1948 г. под ред. Г. Ф. Рыбкина и А. П. Юшкевича; Archive for History of Exact Sciences (издается К. Трусделлом с 1960 г.). (*Стр. 67.*)

111. B. Datta and A. N. Singh, History of Hindu Mathematics, Lahore, 1935. (*Стр. 68.*)

112. В Индии, как и везде, раннее появление геометрических и астрономических знаний было обусловлено прежде всего практической необходимостью (ирригацией, судоходством, торговлей и т. п.) и в какой-то мере нуждами религиозного ритуала (положение и форма алтаря, время молитв). Геометрические и астрономические знания включались вначале в религиозные книги, так как в те времена наука являлась монополией жрецов. В V в. н. э. получают распространение астрономические сочинения «Сиддханты» (сиддханта — наука, знание), важнейшим из которых является «Сурья Сиддханта», т. е. «Солнечная Сиддханта». (*Стр. 68.*)

113. См.: а) Y. Mikami, The circle-squaring of the Chinese, «Bibilioteca Mathematica», 3. Folge, Bd. X, 1910, S. 193—200; б) Gino Loria, Storia delle matematiche, pp. 154—155; в) А. П. Юшкевич, История математики в средние века, стр. 70—73.

Через 11 столетий это новое отношение, выражающее приближенное значение числа π, вновь будет открыто в Европе, но более неуклюжим способом, чем придуманный китайским астрономом. (*Стр. 69.*)

114. Со времен халифа ал-Мансура (ум. в 775 г.) Багдад становится притягательным центром для ученых, особенно для астрономов и врачей. В мирном договоре, заключенном между ал-Мамуном (813—833 гг.) и византийским императором Михаилом III, было специально оговорено, что все греческие книги, находящиеся в империи, предоставляются в распоряжение багдадского халифа. Эти книги были привезены в Багдад, и у ал-Мамуна оказался необходимый материал для перевода греческих научных текстов на арабский язык. (*Стр. 69.*)

115. Почти все математики стран ислама были одновременно и астрономами, так как высокое развитие математики покоилось здесь на практической основе — потребностях судоходства, зем-

леделия, торговли, ремесел. Впрочем, некоторые математики отдавали много сил и астрологии что было результатом влияния религиозно-мистического мировоззрения. Против мистицизма поднимали голос протеста многие арабские философы, например, Ибн Рушд (Аверроэс) и Ибн Сина (Авиценна). (*Стр. 69.*)

116. H. Suter, Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Leipzig, 1900. Книга А. П. Юшкевича указана в примечании 109 под буквой д. (*Стр. 69.*)

117. «Трактат об окружности» ал-Каши имеется в русском переводе в книге: Гиясэддин Джемшид ал-Каши, Ключ арифметики. Трактат об окружности, перев. Б. А. Розенфельда под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, М., 1957. — *Прим. ред.* (*Стр. 69.*)

118. Книга братьев Бану Муса «Книга измерения плоских и шаровых фигур» имеется в русском переводе Дж. ад-Даббаха («Историко-математические исследования», вып. 16, М., 1965 стр. 389—426). — *Прим. ред.* (*Стр. 69.*)

119. Абу Али ал-Хасан ибн ал-Хайсам (Альхазен) (965—1039) сочинил, в числе других работ, трактат об измерении параболоидов. По красоте и богатству теорем это один из самых блестящих математических трудов стран ислама. В нем обобщаются установленные Архимедом результаты, но в отличие от Архимеда, вычислившего объем лишь параболоида, полученного при вращении параболы около ее оси, Ибн ал-Хайсам вычислил объем тел, образованных при вращении параболы вокруг любого ее диаметра и хорды. Рассказывают, что Ибн ал-Хайсам предполагал что сможет исправить течение Нила с тем, чтобы можно было пользоваться его водами и тогда, когда уровень их сильно понижается или сильно поднимается. Его пригласили в Египет, и он получил все необходимое для осуществления этой идеи. Однако он вскоре убедился в нереальности своего плана. Опасаясь, что за бахвальство ему придется поплатиться жизнью, он заперся в доме и прикидывался сумасшедшим. Но эта хитрость довела его до настоящего душевного заболевания, и даже после того, как его простили, он продолжал вести жизнь отшельника. Ибн ал-Хайсам сочинил важный труд по оптике, в котором подробно описал анатомию глаза и исследовал законы отражения и преломления. Наряду со многими ценными работами, он написал и мемуар о квадратуре круга, утверждая ее возможность. См. H. Suter, Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Hasan b. el Haitham, «Bibliotheca mathematica», 3. Folge, Bd. XXII, № 4, 1912, S. 289—332.

[Из сочинений Ибн ал-Хайсама переведены на русский язык: Трактат об изопериметрических фигурах (перев. Дж. ад-Даббаха), «Историко-математические исследования», вып. 17, М., 1966, стр. 399—448; Трактат об измерении шара (перев. Дж. ад-Даббаха), сб. «Физико-математические науки в странах Востока», вып. 2, М., 1968, стр. 135—146; Отрывок из комментариев к Евклиду, содержащий доказательство V постулата (перев. Б. А. Розенфельда), «Историко-математические исследования», вып. 11, М., 1958, стр. 743—762. Готовится к изданию русский перевод «Книги оптики» Ибн ал-Хайсама. — *Прим. ред.*] (*Стр. 70.*)

120 Омар Хайям (Гияс ад-Дин Абу-л-Фатх Омар ибн Ибрахим ал-Хайями ан-Найсабури, 1048—1131) — крупнейший

ученый средневековья, известный также как замечательный поэт. Родился в Нишапуре (Хорасан) и умер там же, работал в Самарканде, Исфахане (Иран) и Мерве (ныне Мары), писал научные трактаты по-арабски, а стихи по-персидски. Его научные и философские трактаты переведены на русский язык в книге: О м а р Х а й я м, Трактаты, перев. Б. А. Розенфельда под ред. В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, М., 1962.

Математические трактаты Хайяма:

«Трактат о доказательствах задач алгебры и алмукабалы» (трактат о решении кубических уравнений с помощью пересечений окружностей, парабол и равносторонних гипербол, содержащий полную классификацию кубических уравнений, обладающих положительными корнями; этот трактат был переведен на французский язык Ф. Вёпке в книге: F. W o e p c k e, L'algèbre d'Omar Alkhayâmî, Paris, 1851; русский перевод — в упомянутом издании «Трактаты»).

«Комментарии к трудностям во введениях книги Евклида» (доказательство V постулата Евклида с помощью более наглядного постулата, приписываемого им Аристотелю, теория отношений, в которой определение пропорции по Евдоксу заменяется определением с помощью алгоритма Евклида, и теория составных отношений, в которой выдвигается идея расширения понятия числа до положительного действительного числа; русский перевод — в «Трактатах»).

Не дошедший до нас трактат «Проблемы арифметики», в котором, судя по сообщению Хайяма в его алгебраическом трактате, был изложен метод извлечения корней любой степени и приведено доказательство этого метода. Из того, что изложение такого метода в трактате ученого XIII века Насир ад-Дина ат-Туси содержит также изложение формулы бинома Ньютона для любого натурального показателя как результат, известный ранее, можно предположить, что в этом трактате Хайяма была найдена и указанная формула бинома (глава трактата ат-Туси об извлечении корней любой степени опубликована в переводе С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда в «Историко-математических исследованиях», вып. 15, 1963, стр. 431—444).

Из астрономических работ Хайяма сохранился только звездный каталог, опубликованный в «Трактатах». В 1079 г. в Исфахане под руководством Хайяма была разработана реформа иранского солнечного календаря, в результате которой год выражается с большей точностью, чем в нашем григорианском календаре. См. также Б. А. Р о з е н ф е л ь д и А. П. Ю ш к е в и ч, Омар Хайям, М., 1965. — *Прим. ред.* (*Стр. 70.*)

121. Мусульманская эра носит название х и д ж р ы и датируется с бегства (по-арабски х и д ж р а) пророка Мухаммеда из Мекки в Медину 10 июля 622 г. н. э. Мусульманский календарь — лунный, год в этом календаре содержит 12 лунных месяцев, т. е. 355 дней. (*Стр. 71.*)

122. О м а р Х а й я м, Четверостишия, перев. О. Румера, М., 1938 (четверостишие № 5, стр. 15). (*Стр. 72.*)

123. О м а р Х а й я м, Робайят, перев. Л. Н[екоры], сб. «Восток», вып. 2, М. — Л., 1935 (см. № 131, стр. 239). (*Стр. 72.*)

124. См. книгу, указанную в примечании 122 (четверостишие № 92, стр. 36). (*Стр. 72.*)

125. Там же, четверостишие № 76 (стр. 32). (*Стр. 73.*)

126. Абу-р-Райхан Мухаммед ибн Ахмед ал-Бируни (973 — ок. 1050) — один из крупнейших ученых-энциклопедистов средневековья, уроженец Кята в Хорезме (ныне г. Бируни Каракалпакской АССР), работал в Хорезме, Горгане (Северный Иран) и Газне (Афганистан).

Основной труд ал-Бируни — астрономический трактат «Канон Масуда по астрономии и звездам», посвященный газневидскому султану Масуду; ему принадлежат также труды по математике, географии, истории, минералогии, фармакогнозии. На русский язык переведены: «Хронология» («Памятники минувших поколений»), перев. М. А. Салье, Избранные произведения, т. I, Ташкент, 1957; «Индия» («Разъяснение принадлежащих индийцам учений, приемлемых разумом или отвергаемых»), перев. А. Б. Халидова и Ю. Н. Завадовского, Избранные произведения, т. II, Ташкент, 1963; «Геодезия» («Определение границ мест для уточнения расстояний между населенными пунктами»), перев. П. Г. Булгакова, Избранные произведения, т. III, Ташкент, 1966; «Минералогия» («Собрание сведений для познания драгоценностей»), перев. А. М. Беленицкого под ред. Г. Г. Леммлейна, М., 1963; математические трактаты: «Трактат об определении хорд в круге при помощи ломаной линии, вписанной в него» (перев. С. А. Красновой и Л. А. Карповой), «Книга об индийских рашиках» (перев. Б. А. Розенфельда), в сб. «Из истории науки и техники в странах Востока», вып. 3, М., 1963, стр. 71—167.

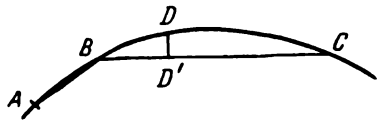


Рис. 23.

В «Трактате об определении хорд» ал-Бируни приводит многие доказательства важной для вычисления таблиц синусов теоремы Архимеда: «Ломаная линия (рис. 23), вписанная в дугу окружности и состоящая из двух неравных отрезков, делится на две равные части перпендикуляром, опущенным на нее из середины дуги» ($AB + BD' = D'C$), а также теоремы Архимеда, известной под названием «теорема Герона», и многих других теорем геометрии и тригонометрии. — *Прим. ред.* (*Стр. 73.*)

127. Об Ибн ал-Хайсаме см. примечание 119. (*Стр. 73.*)

128. Долей куба математики стран ислама называли величину, обратную кубу, и уравнение, о котором здесь говорится, — уравнение $x^2 = a\frac{1}{x^3}$ (a — коэффициент, называемый здесь «числом»). Это уравнение равносильно уравнению пятой степени $x^5 = a$, корнем которого является $\sqrt[5]{a}$. Хайям в своем алгебраическом трактате упоминает трактат Ибн ал-Хайсама о решении этого уравнения с помощью построения четырех средних пропорциональных между двумя линиями (если две данные линии выражают «число» a и 1, то $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^3}$ и $\sqrt[5]{a^4}$ — четыре средних пропорциональных между данными линиями. См. стр. 106 издания «Трактатов» Хайяма, указанных в примечании 120. — *Прим. ред.* (*Стр. 73.*)

129. H. Suter, Die Kreisquadratur des Ibn al-Haitham, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», Bd. 44, 1899, Historische Abteilung, S. 33—47. (*Стр. 73.*)

130. Вот доказательство Ибн ал-Хайсама:

Проведем диаметр произвольной окружности, возьмем на одной из полуокружностей произвольную точку B и от нее проведем две прямые к концам диаметра (рис. 24). На этих прямых опишем две полуокружности. Площади двух луночек, образованных этими полуокружностями и дугами окружности, равны площади треугольника из первого круга.

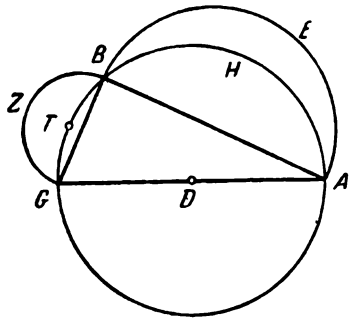


Рис. 24.

Действительно, пусть дана окружность ABG и ее центр D. Проведем диаметр ADG и возьмем точку B на окружности. Проведем прямые AB и BG и опишем на них полуокружности AEB и BZG. Можно утверждать, что две луночки $AEBH$ и $BZGT$ вместе равновелики треугольнику ABG. Доказательство этого утверждения таково. Площади двух кругов, как доказывается во втором предложении XII книги «Начал», относятся как квадраты их диаметров, т. е.

$$\frac{\text{площадь круга } BZG}{\text{площадь круга } BEA} = \frac{BG^2}{AB^2}.$$

Поэтому «присоединение отношений» дает:

$$\frac{\text{площадь круга } BZG + \text{площадь круга } BEA}{\text{площадь круга } BEA} = \frac{BG^2 + AB^2}{AB^2}.$$

Но $BG^2 + AB^2 = AG^2$, следовательно,

$$\frac{AG^2}{AB^2} = \frac{\text{площадь круга } BZG + \text{площадь круга } BEA}{\text{площадь круга } BEA}.$$

Так как

$$\frac{AG^2}{AB^2} = \frac{\text{площадь круга } ABG}{\text{площадь круга } BEA},$$

то

$$\frac{\text{площадь круга } BZG + \text{площадь круга } BEA}{\text{площадь круга } BEA} = \frac{\text{площадь круга } ABG}{\text{площадь круга } BEA},$$

и, следовательно, площадь круга ABG = площадь круга BZG + + площадь круга BEA. Поэтому площадь полукруга ABG = = площадь полукруга BZG + площадь полукруга BEA.

Если теперь мы вычтем площади двух сегментов AHB и BTG, входящие как в круг ABG, так и в полукруги AEB и BZG, то получим, что площадь треугольника ABG = площадь луночки $AEBH$ + площадь луночки $BZGT$. Если обе дуги AHB и BTG равны, то AB и BG также равны, как и их половины, и как луночки $AEBH$ и $BZGT$. Проведем теперь прямую DB (рис. 25). Оба треугольника ABD и BDG равны, и, следовательно, каждый из них равновелик одной из луночек — например, луночка $AEBH$ равна треугольнику ABD. (*Стр. 74.*)

131. Приведем это доказательство:

$$\frac{\text{площадь треугольника } ABD}{\text{площадь треугольника } BCD} = \frac{AD}{AC},$$

но

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\text{площадь луночки } AEBH}{\text{площадь круга } HMEN};$$

следовательно,

$$\frac{\text{площадь треугольника } ABD}{\text{площадь треугольника } BCD} = \frac{\text{площадь луночки } AEBH}{\text{площадь круга } HMEN}.$$

Перестановка членов пропорции дает:

$$\frac{\text{площадь треугольника } ABD}{\text{площадь луночки } AEBH} = \frac{\text{площадь треугольника } BCD}{\text{площадь круга } HMEN}.$$

Так как площадь луночки $AEBH$ равна площади треугольника ABD, то площадь круга $HMEN$ равна площади треугольника BCD. (*Стр. 76.*)

132. Задачи об удвоении куба и трисекции угла сводятся к кубическим уравнениям, которым посвящен алгебраический трактат Хайяма; постулату о параллельных линиях посвящена первая глава «Комментариев» Хайяма к Евклиду (см. примечание 120). — *Прим. ред.* (*Стр. 77.*)

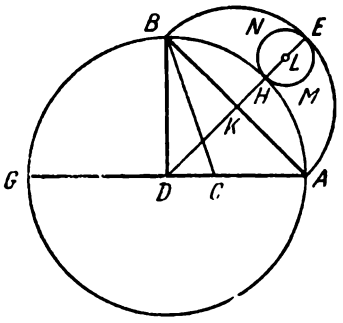


Рис. 25.

133. См. четверостишие № 19 (стр. 17) в издании четверостиший Хайяма, указанном в примечании 122. (*Стр. 78.*)

134. Там же, четверостишие № 189 (стр. 60). (*Стр. 78.*)

135. Омар Хайям, Робайят, переводы О. Румера, В. Тардова, Л. Н[екоры] и К. Чайкина. М. — Л.. 1935, стр. 107. (*Стр. 78.*)

136. См. работу, указанную в примечании 129. (*Стр. 79.*)

137. Работы греческих математиков стали известны в Западной Европе только благодаря переводам на арабский язык, так как в средние века почти никто в Западной Европе не знал греческого языка. (*Стр. 80.*)

138. Проникновение в Европу произведений на арабском языке происходило через Испанию. Несмотря на напряженность политических отношений между Багдадским и Кордовским халифатами, культурный обмен между ними продолжался, и многие ученые приезжали из Багдада в Испанию. В мавританских школах Кордовы, Гренады, Толедо, Севильи комментировались греческие математические работы, в частности сочинения Евклида, Архимеда, Аполлония и Птолемея. Кордовская библиотека насчитывала около 60 000 томов и обладала 44-томным каталогом, помогавшим пользоваться ее богатствами. (*Стр. 80*).

139. Аделард из Бата много путешествовал по Азии, Греции и Египту, откуда привез многочисленные математические рукописи. Сделанный им по арабской версии перевод «Начал» Евклида послужил образцом для других переводов, выполненных до XVI в. (когда был найден греческий текст этого сочинения). (*Стр. 80.*)

140. Герард из Кремоны (1114—1187) учился в Толедо. Перевел с арабского на латинский язык много книг по медицине и астрономии, поступая при этом, по его собственному выражению, «с осторожностью человека, который, прогуливаясь по усеянному цветами полю, выбирает самые красивые из них». Он продолжал работать над переводами до последних дней жизни. Умер в 73-летнем возрасте и оставил все свои переводы в наследство родному городу Кремоне. Из скромности он не подписал ни одной из этих работ, и друзья составили список сделанных им переводов, сохранившийся до наших дней. Список содержит 74 сочинения. Среди них числятся и «Начала» Евклида. (*Стр. 80.*)

141. Платон из Тиволи был, по-видимому, современником Герарда из Кремоны. Он переводил на латынь книги не только с арабского, но и с древнееврейского языка. Среди них упомянем работу Савасорды по геометрии (см. примечание 142), озаглавленную им «Книга о площадях» («Liber embadorum» — от латинизированного греческого слова «embadon», означающего «площадь»; ср. примечание 34). Эта книга была широко распространена в течение всех средних веков. По мнению некоторых авторов, переводы Платона из Тиволи старше переводов Герарда и Аделарда. (*Стр. 80.*)

142. Абрахам Бар Хийя (ок. 1070 — ок. 1136), родом из Барселоны, известный под именем Савасорды, написал книгу «Геометрия» на древнееврейском языке. (*Стр. 80.*)

143. Леонардо Пизанский (Фибоначчи, Leonardo Fibonacci, ок. 1170—1250) изучал арифметику у мавританских преподавателей, затем путешествовал по Египту, Сирии, Греции и Провансу, исследуя применяемые в разных местах методы вычислений. Он пришел к выводу, что эти методы сложны и устарели, что и побудило его написать (около 1202 г.) знаменитую «Книгу абака» (Liber abaci). Помимо элементов арабской и индийской арифметики и алгебры, он вводит в эту работу арабские цифры, настаивая на важности цифры нуль, «позволяющей совместно с девятью другими арабскими цифрами выразить любое число». Хотя благодаря идущим из Испании рукописям арабские цифры были известны в Европе еще с конца X века, через книгу Леонардо они получили более широкое распространение. «Практика геометрии» (Practica geometriae), сочиненная в 1220 г., была написана под влиянием книги Савасорды, но по

сравнению с ней Леонардо значительно развил многие главы. Леонардо использовал также работы Архимеда, братьев Бану Муса и других авторов. «Практика геометрии» написана на более высоком уровне, чем книга Савасорды, и содержит много оригинальных идей. (*Стр. 81.*)

144. Иордан Неморарий (Jordanus Nemorarius) жил в первой половине XIII в. Наряду с Фибоначчи — крупнейший математик средних веков. Кроме книги по геометрии «О треугольниках» (De triangulis) написал и сочинение «Об изопериметрах» (De isoperimetris) и «О данных числах» (De numeris datis); последнее сочинение имеется в русском переводе С. Н. Шрейдера, см. «Историко-математические исследования», вып. 12, 1959, стр. 559—678. (*Стр. 81.*)

145. Джованни Кампано (Giovanni Campano) из Новары жил во второй половине XIII в. вблизи Милана. Известен переводами «Начал» Евклида и «Алмагеста» и комментариями к ним, а также исследованиями о свойствах правильного звездчатого пятиугольника. (*Стр. 82.*)

146. Томас Брадвардин (Thomas Bradwardin; ок. 1290—1349) работал в Оксфорде; в конце жизни — епископ Кентерберийский. Среди его трудов самый известный — «Трактат о пропорциях» (Tractatus de proportionibus), напечатанный в 1495 г. в Париже. Одновременно было опубликовано его сочинение «О квадратуре круга» (De quadratura circuli). Затем, также в Париже, были напечатаны «Теоретическая арифметика» (Arithmetica speculativa) и «Теоретическая геометрия» (Geometria speculativa), первая издана в 1502 г., вторая в 1511 г. [Неизвестный трактат Брадвардина «О континууме» (De continuo) описан В. П. Зубовым в статье «Трактат Брадвардина „О континууме"», опубликованной в «Историко-математических исследованиях», вып. 13, 1960, стр. 385—440. — *Прим. ред.*] (*Стр. 82.*)

147. XII век — век появления высшей школы: университетов. Университеты возникали на базе существовавших ранее школ. В школах обучение носило в основном религиозный характер и было подчинено церкви. Это касается также городских школ, получивших распространение в XII—XIII вв., которые административно не были подчинены католической церкви, но были целиком под ее духовным влиянием. На базе школ и стали появляться университеты, первые столетия своей истории также находившиеся под идеологическим контролем католической религии.

Очень трудно установить, когда возник тот или иной старинный университет. Даты возникновения первых университетов во многом условны. Так, иногда оформление университета связывалось с годом, когда он стал привлекать большое число слушателей, когда в нем стали преподавать ученые, пользовавшиеся широкой известностью, или когда университет получил утверждение папы или императора Священной римской империи. Тем не менее последовательность дат основания, связываемых с тем или иным университетом, дает неплохое представление о распространении образования в католической Европе.

Одно из первых учебных заведений «университетского типа», как мы сказали бы сейчас, возникло в XI в. в г. Салерно (Италия). Это была ставшая впоследствии знаменитой медицинская школа. Примерно в это же время, в конце XI в., возник Волон-

ский университет. Его возникновение связывают с именем Ирнерия — юриста, который стал читать лекции по римскому праву, обращаясь к первоисточникам. Возникновение Парижского университета относят к середине или концу XII в. Выходцами из этого университета был основан университет в Оксфорде, а от него «отпочковался» (в 1209 г.) университет в Кембридже (Англия). Вслед за тем возникают университеты в Падуе (1222), Неаполе (1224), Риме (1303), Орлеане (1306), Коимбре (1308), Праге (1348), Флоренции (1349), Кракове (1364), Вене (1365), Эрфурте (1379), Гейдельберге (1386), Лейпциге (1409) и др.

Средневековые университеты носили международный характер — они были, так сказать, «общими» для всей католической Европы. В каждом большом университете имелись студенты и профессора из разных стран, которые объединялись в национальные общины (universitas), представлявшие собой также структурные подразделения университета. От этих общин — «universitas magistrorum et scholarorum» — и произошло название «университет». См. История средних веков, т. I, под ред. А. Д. Удальцова, Е. А. Косминского и О. Л. Вайнштейна, изд. 2-е, 1941, гл. XXXII; А. П. Юшкевич, История математики в средние века, стр. 335—336. — *Прим. ред.* (*Стр. 82.*)

148. Альберт Саксонский (Albertus de Saxonia; 1326—1390) в своей работе цитирует Кампано, но не упоминает Брадвардина, хотя последний доказывает теоремы, которые первый только формулировал. (См. H. Suter, Der Tractatus «De quadratura circuli» des Albertus von Sachsen, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», Bd. 29, 1884, Historisch-literarische Abt., S. 81; J. Heiberg, Beiträge zur Geschichte der Mathematik, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», Bd. 35, 1890, Historisch-literarische Abt., S. 41, 81.) (*Стр. 82.*)

149. Среди наук, изучавшихся в средневековых университетах, математика занимала подчиненное положение. Это естественно вытекало из всего характера университетского образования той эпохи.

С XIII в. в университетах сложилась следующая структура обучения. Ученье в университете студент — нередко подросток 12—13 лет — начинал обычно на, как мы сказали бы теперь, подготовительном факультете. Этот факультет назывался «факультетом искусств» (facultas artium). На этом факультете студент примерно в течение шести лет обучался «семи свободным искусствам». Эти «искусства» имели две ступени: «тривиум» — грамматика, риторика и диалектика (искусство ведения диспутов) и «квадривиум»: арифметика, геометрия, астрономия и музыка (т. е. элементы теории гармонии). После окончания факультета искусств студент мог поступить на один из старших факультетов, которыми были богословский, медицинский и юридический. Главную роль в университете обычно играл богословский факультет; впрочем, религиозное мировоззрение и церковная проблематика пронизывали все преподавание (например, на юридическом факультете наряду с гражданским — римским — правом изучалось также право каноническое, т. е. церковное).

«Схоластика» — «школьная наука», т. е. наука, которая преподавалась в школах и университетах средневековой католической Европы, — была проникнута церковным мировоззре-

нием. Поэтому процесс выкристаллизования в ней подлинной науки был долгим и трудным. Это особенно ясно видно на примере математики. В течение столетий она оставалась, так сказать, «вспомогательной дисциплиной». Ее изучали в составе квадривиума, причем авторитетами здесь служили: в арифметике — Боэций, в музыке — Пифагор, в геометрии — Евклид, в астрономии — Птолемей. Обучение геометрии часто не шло дальше первых теорем книги I «Начал». В некоторых университетах (например, Парижском) вплоть до начала XVI в. вместо экзамена по геометрии от кандидатов на звание магистра требовалась лишь... присяга в том, что они знают шесть первых книг евклидовых «Начал» (А. П. Юшкевич, История математики в средние века, стр. 335—336; К. А. Рыбников, История математики, т. I, стр. 110).

Тем более не следует забывать заслуги тех ученых, которые в условиях жесткого «идеологического пресса» средневековья продвигали вперед математическую мысль. А. П. Юшкевич в упомянутой выше книге (стр. 336) пишет в этой связи: «В недрах самого богословия и схоластической науки шла почти непрестанная борьба между более передовыми мыслителями и ортодоксами. В Оксфордском университете, например, учились и работали такие прогрессивные философы и ученые, как Роберт Гроссетет (1175—1253) и его знаменитый ученик Роджер Бэкон (ок. 1210 — ок. 1295), призывавшие положить в основание естественных наук опыт и математическую дедукцию. И хотя подготовка математиков не была специальной целью университетов, из них вышли такие замечательные математики, как Томас Брадвардин в Англии, Никола́ Орем во Франции, Иоганн Мюллер-Региомонтан в Германии, Николай Коперник в Польше».

Пренебрежительное отношение к математике в некоторых университетах держалось вплоть до начала XVII в., на что указывал известный английский философ Томас Гоббс (1588—1679) в своем сочинении «О теле» (De corpore), напечатанном в 1655 г. — *Прим. ред.* (*Стр. 83.*)

150. Ad. Quetelet, Histoire des sciences mathémathiques et physiques chez les Belges, Bruxelles, 1871, p. 170. (*Стр. 84.*)

151. Адриан Антонис (Adriaen Antoniszoon; 1527—1607) — голландец из Меца. Установленное им в 1585 г. значение числа π было опубликовано его сыном Адрианом Мецием в «Практике арифметики и геометрии» (Arithmeticae et geometriae practica), вышедшей в 1611 г. Мециий пишет, что его отец получил это значение, применив метод Архимеда, и добавляет: «Он получил значение $3\frac{16}{113}$, т. е. $\frac{355}{113}$, которое состоит из меньшего, чем у магистра Лудольфа ван Кёлена, числа цифр (см. примечание 154), но отличается от него не больше чем на $\frac{1}{1000000}$». Такое же значение π было найдено раньше немецким математиком Валентином Ото (см. J. Tropfke, сочинение, указанное в примечании 109, т. IV, стр. 217). (*Стр. 85.*)

152. Франсуа Виет (François Viète; Franciscus Vieta; 1540—1603) — французский ученый, работы которого оказали значительное влияние на развитие математики. Первый его математический труд озаглавлен «Математический канон» (Canon

mathematicus). Применяя способ Архимеда к 393216-угольнику, он устанавливает для π следующие пределы:

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537.$$

Он был очень известным математиком. Как-то в беседе с Генрихом IV голландский посол заметил, что во Франции нет геометра, способного справиться с предложенной фламандским математиком Адрианом ван Рооменом проблемой: решить уравнение 45-й степени

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 + \ldots + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = C$$

для частного случая

$$C = \sqrt{1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{6} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}.$$

Тогда Генрих IV обратился к Виету. Посмотрев на уравнение, Виет быстро установил, что неизвестная — длина хорды окружности с радиусом 1, соответствующей центральному углу $\frac{2\theta}{45}$, где $C = 2\sin\theta$, и выражается через значения $x = 2\sin\frac{\theta}{45}$, так как 45 равняется произведению $3 \cdot 3 \cdot 5$, и поэтому угол надо делить сначала на 5 равных частей, а затем дважды на 3 равные части. Всего за несколько минут Виет, которому уже приходилось иметь дело с такими задачами и который открыл формулу, связывающую $\sin n\theta$ с $\sin\theta$ и $\cos\theta$, показал, что у данного уравнения 23 корня. На самом же деле оно, как уравнение 45-й степени, имеет 45 корней, но остальные корни соответствовали отрицательным значениям синуса, которые не принимались во внимание. В свою очередь Виет предложил Адриану ван Роомену построить окружность, касательную к трем заданным окружностям. Эта задача, которой в одной из своих утерянных работ занимался Аполлоний, была восстановлена Виетом. Ван Роомен решил задачу при помощи пересечения двух гипербол, но не мог найти решения элементарными методами. Виет такое решение дал. Оно произвело очень сильное впечатление на Роомена, который специально поехал в Фонтенэ-ле-Конт, где находился тогда двор короля Франции, чтобы познакомиться с Виетом. Их знакомство перешло в тесную дружбу.

Виет написал первую в мире работу по символической алгебре. Он ввел буквы для обозначения неизвестных, заложив основы алгебраической символики. (*Стр. 85.*)

153. Адриан ван Роомен (Adriaen van Roomen; Adrianus Romanus; 1561—1615), ученик Клавия, преподавал математику в Лувене. В его книге «Метод многоугольников» дается самое точное для той эпохи определение числа π. (*Стр. 85.*)

154. Лудольф ван Кёлен (Ludolf van Ceulen; 1540—1610) в 1596 г. напечатал на голландском языке работы «Арифметические и геометрические основы» и «О круге», последняя из которых была переведена Снелем на латинский язык. (*Стр. 85.*)

155. Виллеброд Снель (Willebrod Snell; 1580—1626) занял после своего отца должность профессора математики в Лейденском университете. В работе «Циклометрик — об измерении круга» (Cyclometricus de circuli dimensione), вышедшей в 1621 г., он установил новые формулы более точной аппроксимации дуги

круга. Благодаря этому он сумел определить первые семь точных десятичных знаков числа π, применяя 96-угольник, при помощи которого Архимед установил только два десятичных знака этого числа. Снель составил также таблицу периметров вписанных в круг и описанных многоугольников, число сторон которых дано общей формулой $10 \cdot 2^n$ ($n = 3, 4, \ldots, 19$). Такая таблица понадобилась ему для опровержения результатов некоторых квадратуристов. (*Стр. 86.*)

156. Грегуар де Сен-Венсан (Grégoire de Saint-Vincent; Gregorius a Sancto Vincentio; 1584—1667), несмотря на то, что его сильно критиковали за утверждение, что он якобы установил квадратуру круга, остается великим геометром. Он глубоко изучил древнегреческую геометрию и оригинальным путем использовал метод Архимеда для квадратуры площадей, ограниченных дугами кривых. В то же время он владел всеми современными ему средствами алгебраического исчисления и исчисления «бесконечно малых». В его сочинении можно найти много результатов, полученных почти одновременно и Декартом. Будучи иезуитом, он должен был просить разрешение соответствующих орденских инстанций на опубликование своей книги. Референт, математик Гринберг, преемник Клавия по римской коллегии, написал: «Сен-Венсан — чудесный человек, он не уступает Аполлонию, Архимеду и Паппу. Я не сомневаюсь, что он открыл квадратуру круга, но это лишь малая доля всех его открытий». Книга вышла в роскошном издании, в богато украшенной рисунками обложке. Она посвящена наместнику Нидерландов эрцгерцогу Леопольду Австрийскому. Поэтому задача квадратуры круга получила тогда название «австрийской проблемы». См. а) J. Neuberg, Vie et oeuvre de Grégoire de Saint-Vincent, «Bulletin Acad. Royale de Belgique», Classe de science, 1911, p. 922; б) G. Moncham p, Les correspondances belges du grand Huygens, «Bulletin Acad. Royale de Belgique», t. 27 (3), 1894, p. 260; в) I. E. Hofmann, Das Opus geometricum des Gr. a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz, «Abhandl. Preuss. Akad.», № 13, 1941. (*Стр. 88.*)

157. Коническими сечениями называют кривые — эллипс, гиперболу, параболу, — получающиеся сечением прямого кругового конуса плоскостью. (*Стр. 88.*)

158. Томас Гоббс (Thomas Hobbes; 1588—1679) — английский философ. По словам Маркса, Гоббс явился «*систематиком* бэконовского материализма». Маркс отмечает, что Гоббсом «*физическое* движение приносится в жертву *механическому*, или *математическому*, движению, *геометрия* провозглашается главной наукой». В результате такой односторонности механистического материализма Гоббса, как отметил Маркс, «материализму приходится самому умертвить свою плоть и сделаться *аскетом*» (К. Маркс и Ф. Энгельс, Сочинения, изд. 2-е, т. 2, стр. 143). Занятия квадратурой круга усилили эту односторонность Гоббса. По вопросу о квадратуре круга он вел ожесточенную полемику со многими известными математиками, особенно с одним из самых выдающихся ученых — Валлисом. Поэтому в 1662 г. при создании Королевского общества Гоббс не был избран его членом. (*Стр. 88.*)

159. Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz; 1646—1716) — великий немецкий ученый и мыслитель.

Приехал впервые в Париж в 1672 г. в качестве дипломата. Тогда же он познакомился с Гюйгенсом, высшим научным авторитетом эпохи. Несмотря на свою молодость — ему было только 26 лет — и на то, что он не был еще известен как научный деятель и философ, Лейбниц стал другом и учеником Гюйгенса. Впоследствии Лейбниц не раз отмечал (например, в письме, адресованном в 1703 г. Якобу Бернулли), что своими геометрическими познаниями он обязан Гюйгенсу.

В математике Лейбниц одновременно с Ньютоном и независимо от него открыл дифференциальное и интегральное исчисление. Он заложил также основы комбинаторики. Лейбниц сформулировал идею построения математической логики как искусственного языка, служащего для строгого выражения человеческих рассуждений, и предпринял первые в науке попытки построения конкретных логических исчислений. Ему принадлежат также выдающиеся открытия в геометрии и алгебре. Он проявил интерес и к технике: создал механическую вычислительную машину, на которой можно было выполнять не только сложение и умножение, но и деление; он, как полагают, подсказал Папену основную идею парового двигателя. В философии Лейбниц создал собственную объективно идеалистическую систему, так называемую *монадологию*.

Христиан Гюйгенс (Christiaan Huygens; 1629—1695) родился в Гааге. Выдающийся физик, астроном и математик. В 1651 г. опубликовал работу «Исследование квадратуры круга» (Exetatis quadraturae circuli), в которой выявил допущенную Сен-Венсаном ошибку в предложенной им квадратуре. В своих геометрических исследованиях Гюйгенс применял методы элементарной геометрии наряду с новой геометрией, открытой Декартом и Кавальери. Он установил методы измерения длины дуги кубической параболы, циклоиды и циссоиды. Самой значительной его работой является книга «Маятниковые часы» (Horologium oscillatorium), опубликованная в 1673 г. В ней, наряду с вопросами физики и механики, касающимися теории маятника, Гюйгенс развивает некоторые большой важности вопросы из геометрии кривых. В этой книге он заложил основы конструирования маятниковых часов, столь необходимых для астрономических наблюдений и для повседневной жизни.

См. а) Leibnizens mathematische Schriften, herausg. von C. I. Gerhardt, Bd. I—VII, Berlin — Halle, 1849—1863; б) G. W. Leibniz, Fragmente zur Logik, Ausgewählt, übersetzt und erläutert von F. Schmidt, Berlin, 1960; в) Chr. Huygens, Oeuvres complètes, t. 1—22, La Haye, 1888—1950. (*Стр. 90.*)

160. Бесконечный ряд или бесконечную сумму членов можно задать, если известен закон их образования, обычно выраженный в «общем члене». Например, в ряде Лейбница закон образования членов дан формулой $a_n=\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Если n последовательно принимает значения $n = 0, 1, 2, \ldots$, то выписывание одного за другим получаемых таким способом членов дает ряд

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Однако в этом выражении суммирование имеет уже не обычный смысл, так как здесь речь идет о б е с к о н е ч н о м, а не о к о н е ч н о м числе слагаемых. Это новое действие — суммирование бесконечного числа членов — определяется в математическом анализе, и, когда условия, делающие возможными это суммирование, соблюдаются, говорят, что ряд *сходится* и обладает *суммой*. Когда ряд с у м м и р о в а т ь н е л ь з я, он называется *расходящимся*. Если даже ряд сходящийся, то это не означает еще, что действительно возможно найти его сумму. Чаще всего отсутствует метод получения точной суммы ряда, и тогда она определяется приближенно, суммированием большего или меньшего числа членов ряда, последовательно взятых, начиная с первых. Допущенная погрешность зависит от числа сложенных членов, а также от характера ряда. Поскольку в любом сходящемся ряде величина членов постепенно убывает и приближается к нулю, для получения приближенного значения суммы ряда, члены которого очень быстро убывают, суммируется меньшее число членов, чем при более медленно сходящемся ряде. (*Стр. 90.*)

161. Письмо Лейбница от 9 сентября 1679 г. Гюйгенсу, а также его письма от 2 сентября 1675 г. Ольденбургу и Галуа (см. книгу а), указанную в примечании 159).(*Стр. 91.*)

162. Джон П е л ь (John Pell; 1610—1685) в 1643 г. приехал из Англии в Амстердам и через год был назначен профессором математики в университете этого города. В 1646 г. перешел в знаменитую Бредскую школу. Там он давал и частные уроки Гюйгенсу. В своей работе «Опровержение претензий Лонгомонтана на решение квадратуры круга» (Refutation of Longomontanus pretended quadratura of the circle), опубликованной в 1646 г. на английском языке, а год спустя на латинском, он выступил против предложенной Лонгомонтаном квадратуры круга. Умер в Лондоне в невероятной нищете (см. т. I, стр. 14 книги, указанной в примечании 159 под буквой в)). (*Стр. 92.*)

163. Самая значительная работа Николая М е р к а т о р а (Nicolaus Mercator; 1620—1687) — «Логарифмотехника» (Logarithmotechnia), напечатанная в 1667 г., где он выразил площадь гиперболы, отнесенной к ее асимптотам, бесконечным рядом

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Меркатор спроектировал и построил фонтаны Версаля, но умер в нищете в Париже, не получив причитавшегося ему вознаграждения из-за того, что отказался перейти в католичество. (*Стр. 93.*)

164. В XVI и XVII вв. математики в письмах сообщали друг другу о своих открытиях. Такие письма не носили тогда такого частного характера, как теперь, а переписывались и распространялись среди заинтересованных лиц, давая им возможность ознакомиться с их содержанием; таким образом, эти письма заменяли математические журналы, которые были еще очень немногочисленны.

Джеймс Г р е г о р и (James Gregory; 1638—1675), выдающийся английский математик и физик, соперничал с Ньютоном в создании телескопа-рефлектора. В его сочинении «Истинная

квадратура круга и гиперболы» (Vera circuli et hyperbolae quadratura), напечатанном в 1667 г., содержится разложение в ряд функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Одновременно здесь показывается, в чем разница между сходящимися и расходящимися рядами, что до него было не вполне ясно. В 1671 г. он дал разложение в ряд функции $\operatorname{arctg} x$. Это было очень важным достижением для того времени, когда разрабатывались основы теории рядов. В вопросе квадратуры круга Грегори применил метод, созданный им, исходя из метода Архимеда, но при этом он вычисляет не длины дуг и площади вписанных в круг и описанных около него правильных многоугольников, а площади секторов круга. Таким образом, если A_n — площадь сектора правильного многоугольника, вписанного в круг, и B_n — площадь сектора правильного многоугольника, описанного около круга, то справедливы соотношения

$$A_{2n}=\sqrt{A_nB_n} \quad \text{и} \quad B_{2n}=\frac{A_nB_n}{B_n+A_{2n}}.$$

Грегори показывает, что эти формулы справедливы и для конических сечений. Первая из этих формул была уже раньше установлена Иорданом Неморарием, а затем Снелем, но Грегори этого не знал. Опираясь на эти формулы, он заключает, что квадратура круга и гиперболы невозможна, так как у членов бесконечных последовательностей A_1, A_2, ..., A_n, ... и B_1, B_2, ..., B_n, ..., пределом которых является площадь сектора круга, закон образования таков, что у указанных последовательностей нет последнего члена, а потому ни площадь сектора круга, ни площадь сектора гиперболы (для которых формулы идентичны) не могут быть аналитически выражены формулой с конечным числом членов.

Гюйгенс предпринял опровержение этого доказательства. Его замечания опубликованы в «Journal des savants», начиная со второго номера 1668 г. Ответы Грегори напечатаны в «Transactions of London Royal Society» того же года. См. G. Heinrich, James Gregorys «Vera circuli et hyperbolae quadratura», «Bibliotheca mathematica», 3. Folge, Bd. II, 1901, S. 77—85. (*Стр. 93.*)

165. Письма, содержащие полемику между Гюйгенсом и Грегори, опубликованы в Полном собрании сочинений Гюйгенса (см. источник, указанный в примечании 159, в), т. VI, стр. 272 и след.). (*Стр. 93.*)

166. См. там же, стр. 397. (*Стр. 94.*)

167. См. там же, т. XI, стр. 275 и 315 и т. XII, стр. 263. (*Стр. 94.*)

168. B. de Fontenelle, Èloge de Monsieur Leibnitz, Oeuvres, t. 5, Paris, 1958, pp. 492—557. (*Стр. 96.*)

169. Фоторепродукция обложки этой книги приведена в работе, указанной в примечании 156, в). (*Стр. 97.*)

170. Марен Мерсен (Marin Mersenne; 1588—1648) — друг Декарта и других ученых своего времени, был известен как вдохновитель научной жизни. «Его келью, — говорил Томас Гоббс, — надо предпочитать всем философским школам». Известны 138 писем научного содержания, адресованных этому францисканскому монаху Декартом.

Приведенное письмо находится в книге, указанной в примечании 159, в), т. I, стр. 53. (*Стр. 97.*)

171. См. источник, указанный в примечании 159, в), т. II, стр. 566 и т. XI, стр. 276. (*Стр. 98.*)

172. Операция, названная Грегуаром де Сен-Венсаном «умножением плоскости на плоскость» (ductio plani in planum), состоит в переходе от плоских фигур к пространственным; в случае, когда один из сомножителей постоянный, пространственные фигуры пропорциональны соответственным плоским. Сен-Венсан применял эту операцию для вычисления объема, ограниченного кривой поверхностью, с помощью вписанных и описанных многогранников, подобно тому как поступал Архимед в случае площадей. Особое значение имеет установленная при этом теорема о равенстве площадей двух ограниченных гиперболой полос криволинейных трапеций, которая затем привела к открытию пропорциональности этих площадей и логарифмов отношений некоторых расстояний, соответствующих прямым, ограничивающим эти трапеции. (См. источник, указанный в примечании 159, в), т. XI, стр. 278.) (*Стр. 98.*)

173. Слово «continere» («содержать») применялось Сен-Венсаном в следующем значении: если $\frac{A}{B}=\left(\frac{C}{D}\right)^2$, то он говорил, что отношение $\frac{A}{B}$ дважды содержит отношение $\frac{C}{D}$ (см. там же, стр. 279). (*Стр. 98.*)

174. См. источник, указанный в примечании 159, в), т. II, стр. 566. (*Стр. 98.*)

175. См. источник, указанный в примечании 159, в), т. I, стр. 89. (*Стр. 98.*)

176. Франс в а н С х о у т е н (van Schooten; 1615—1666) — с 1646 г. профессор математики в Лейденском инженерном училище. Был учителем Гюйгенса по математике. (*Стр. 99.*)

177. См. стр. 156 т. I источника, указанного в примечании 159, в). (*Стр. 99.*)

178. В своей книге Сен-Венсан приводит четыре различных доказательства, с помощью которых он пытается установить квадратуру круга. Первое из этих доказательств, опровергнутое Гюйгенсом, основывается на следующих двух теоремах Сен-Венсана об условиях, позволяющих получить квадратуру круга: (1) возможно построить две такие дуги CD и EF с равными проекциями HI и KL на один и тот же диаметр, чтобы эти дуги были соизмеримы между собой и с заданной окружностью (рис. 26); (2) существует метод, позволяющий находить отношение площадей $CDIH$ и $EFLK$.

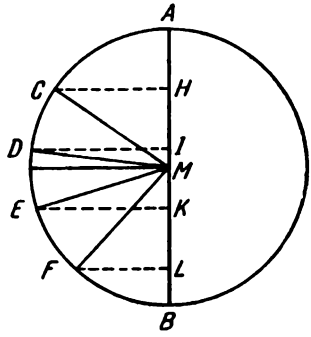


Рис. 26.

Действительно, если при выполнении этих двух условий мы обозначим через $p\sigma$, $q\sigma$ и $r\sigma$ площадь всего круга и площади двух секторов DMC и FME, соответственно пропорциональных

дугам DC и EF, то

$$\frac{\text{пл. } CDIH}{\text{пл. } EFLK} = \frac{\text{пл. сект. } DMC + \text{пл. треуг. } CMH - \text{пл. треуг. } DMI}{\text{пл. сект } EMF + \text{пл. треуг } FLM - \text{пл. треуг. } EMK} =$$

$$= \frac{q\sigma + \text{пл. треуг. } CMH - \text{пл. треуг. } DMI}{r\sigma + \text{пл треуг } FLM - \text{пл треуг } EMK} = \frac{m}{n}.$$

Последнее равенство дало бы возможность построить меру σ, общую для круга и сектора, а значит, вычислить и площадь круга. Однако Гюйгенс доказал, что это невозможно. (*Стр. 100.*)

179. См. работу, указанную в примечании 156, б), стр. 266. (*Стр. 101.*)

180. Андреа Такe (Tacquet; 1612—1660) — монах-иезуит, преподавал математику в Лувене и в Антверпене. Известен своей обработкой «Начал» Евклида и другими работами по элементарной математике, переведенными на многие языки, в том числе и на русский. (*Стр. 101.*)

181. См. источник, указанный в примечании 159, в), т. III, стр. 590 (письмо № 942) и т. V, стр. 387 (письмо № 1425). (*Стр. 102.*)

182. Жиль Франкон (Francon) из Гёттингена, ученик Сен-Венсана, находясь в Риме в 1659 г., был свидетелем следующего происшествия. Папский часовщик построил маятниковые часы по описанию, помещенному в книге Гюйгенса, и выдал их папе за свое изобретение. Восхищенный папа пригласил всех математиков Рима присутствовать на демонстрации часов, устроенной их «изобретателем». Механизм был искусно спрятан, так что были видны только колебания маятника и движение стрелок по циферблату. Все присутствующие восторгались этим изобретением и тепло поздравляли автора. Жиль, который тоже находился там, прервал эту сцену, рассказав, что действительным изобретателем механизма маятниковых часов был Гюйгенс. (*Стр. 103.*)

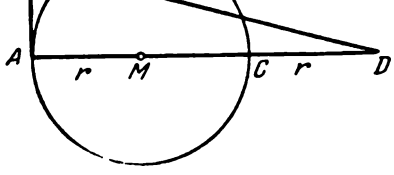


Рис. 27.

183. Oeuvres philosophiques de Leibniz, ed. P. Janet, Essais de Théodicée, Paris, 1900, t. II, p. 56. (*Стр. 104.*)

184. См. источник, указанный в примечании 159, в), т. IV, стр. 149 и 171. (*Стр. 105.*)

185. См. источник, указанный в примечании 159, в), т. VII, стр. 6. (*Стр. 106.*)

186. Приводим решение, данное в 1654 г. Гюйгенсом в книге «О найденной величине круга» (De circuli magnitudine inventa) для приближенного вычисления дуги окружности. Оно применяется и сегодня. Если AB' — дуга, подлежащая спрямлению, то диаметр AC продолжается до D на длину, равную радиусу круга. Прямая DB' отсекает в B от касательной, проведенной в точке A, отрезок $AB \approx \overset{\frown}{AB'}$ (рис. 27). См. H. Tietze, Gelöste und ungelöste mathematische Problemen, München, 1959, Bd. I, S. 107 und 220. (*Стр. 108.*)

187. Работа Гюйгенса «О найденной величине круга» имеется в русском переводе в книге: О квадратуре круга. С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио, перев. С. Н. Бернштейна, изд. 3-е, М.—Л., 1936, стр. 103—166. — *Прим. ред.* (*Стр. 108.*)

188. То есть многоугольников одинакового периметра. (*Стр. 108.*)

189. Эйлер, применяя метод изопериметров, вновь получил формулу Виета, написанную в тригонометрической форме. Этот метод опирается на теорему: если a_n и b_n — соответственно радиусы окружностей, вписанной в правильный n-угольник с заданным периметром P и описанной около него, а a_{2n} и b_{2n} — соответственно радиусы окружностей, вписанной в правильный $2n$-угольник с тем же периметром P и описанной около него, то

$$a_{2n}=\frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{2n}=\sqrt{\frac{b_n(a_n+b_n)}{2}}. \tag{1}$$

При вычислении числа π Эйлер применил указанную теорему, исходя из квадрата со стороной 2. В таком случае имеем: $a_4=1$, $b_4=\sqrt{2}$, $P=8$. Следовательно, радиусы окружностей, вписанных в правильные восьми- и шестнадцатиугольники с периметром 8, и окружностей, описанных около них, можно получить из следующих равенств:

$$\left.\begin{aligned} a_8&=\frac{a_4+b_4}{2}, \quad b_8=\sqrt{\frac{b_4(a_4+b_4)}{2}},\\ a_{16}&=\frac{a_8+b_8}{2}, \quad b_{16}=\sqrt{\frac{b_8(a_8+b_8)}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Вводя обозначения $a_i=a_4\cdot 2^i$, $b_i=b_4\cdot 2^i$, получим

$$a_i=\frac{a_{i-1}+b_{i-1}}{2}, \quad b_i=\sqrt{\frac{b_{i-1}(a_{i-1}+b_{i-1})}{2}}.$$

В тригонометрической форме результат выражается следующим образом: обозначая через x центральный угол, соответствующий стороне правильного n-угольника, имеем

$$a_n=b_n\cos\frac{x}{2}, \quad a_{2n}=b_{2n}\cos\frac{x}{4}.$$

Проводя в формулах (1) соответствующую замену, получим

$$a_{2n}=b_n\cos^2\frac{x}{4}, \quad b_{2n}=b_n\cos\frac{x}{4}.$$

Если бы первоначальный многоугольник был квадратом, вписанным в круг с радиусом 1, то мы имели бы $n=4$, $b_4=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$a_8=b_4\cos^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}, \quad b_8=b_4\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}.$$

Формулы (2) дают

$$a_{16}=\frac{a_8+b_8}{2}=\frac{b_4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8}+1\right)}{2}=\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{\pi}{16},$$

$$b_{16}=\sqrt{\frac{b}{8}}\cdot\sqrt{a_{16}}=\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16},$$

и, вообще,

$$a_i=\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^3}\dots\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{i-1}}\cos^2\frac{\pi}{4\cdot 2^i},$$

$$b_i=\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^3}\dots\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{i-1}}\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^i}.$$

Когда $i\to\infty$, радиус окружности с длиной, равной периметру заданного квадрата, будет равен

$$R=b_\infty=\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\dots,$$

а так как $2\pi R=4\sqrt{2}=\dfrac{4}{\cos\frac{\pi}{4}}$, то $\dfrac{2}{\pi}=R\cos\dfrac{\pi}{4}$, или

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\dots$$

(*Стр. 109.*)

190. Самые значительные работы Адриена Мари Л е ж а н д р а (Legendre; 1752—1833) связаны с эллиптическими функциями и теорией чисел. Напечатанная им в 1794 г. в Париже книга «Начала геометрии» (Eléments de géométrie) пользовалась большой популярностью. Она много раз переиздавалась и переводилась на многие языки. В этой книге содержится и доказательство установленной им тогда иррациональности чисел π и π^2. (*Стр. 109.*)

191. Понятие о пределе переменной величины — это фундамент, на котором основано все дифференциальное и интегральное исчисление. Понятие о переменной величине так часто употребляется в повседневной жизни, что не нуждается в разъяснении. Каждому также понятно выражение «переменная величина стремится к пределу». Однако только тогда, когда это обиходное выражение получило точное математическое определение, оно стало ценным инструментом математических исследований. Вот его определение: если дана переменная величина x, то говорят, что пределом, к которому стремится x (безразлично каким способом), является постоянная величина A, если для заданного положительного сколь угодно малого числа ε существует такое значение x_0 переменной x, что модуль разности между x_0 и A можно сделать меньшим числа ε, причем указанная разница и при дальнейших значениях x всегда остается меньшей ε:

$$|x-A|<\varepsilon \qquad (\varepsilon>0).$$

(*Стр. 110.*)

192. Джон Валлис (Wallis; 1616—1703) был большим почитателем греческих математиков. Он издал часть сочинений Архимеда, Евтокия, Птолемея и Аристарха. В 1665 г. он опубликовал «Арифметику бесконечных, или Новый метод» (Arithmetica infinitorum sive Nova methodus), а в 1673 г. «Трактат по алгебре» (Treatise of Algebra). Особый интерес представляет метод, которым Валлис пользовался для выражения своего бесконечного произведения. Он установил, что площадь (рис. 28), содержащаяся между осью абсцисс, ординатами, соответствующими

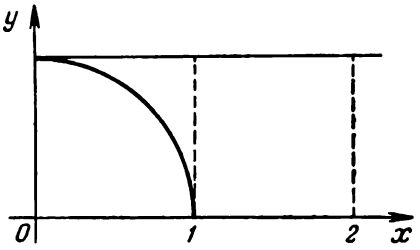


Рис. 28.

значениям $x = 0$ и $x = 1$, и кривыми, уравнения которых соответственно $y = (1 - x^2)^0$, $y = (1 - x^2)^1$, $y = (1 - x^2)^2$, $y = (1 - x^2)^3$, ..., можно выразить как функцию описанного прямоугольника со сторонами x и y с помощью величин, образующих члены ряда:

$$n=0\colon\ x,$$

$$n=1\colon\ x-\frac{1}{3}x^3,$$

$$n=2\colon\ x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,$$

$$n=3\colon\ x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7.$$

Если $x = 1$, то эти значения соответственно равны

$$1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \cdots$$

Так как ордината окружности $y = (1 - x^2)^{1/2}$, где показатель степени $\frac{1}{2}$, т. е. среднее между 0 и 1, то задача квадратуры круга сводится к следующему: если известен определенный закон, выраженный математической формулой, в которую входит n и которая при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ дает значения $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \cdots$, то какое значение даст эта формула, когда $n=\frac{1}{2}$? Валлис пытался получить это значение при помощи придуманного им метода *интерполяции*, ставшего важным средством для прибли-

женных вычислений, и пришел к бесконечному произведению

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots}.$$

Валлису пришлось преодолеть большие трудности, пока ему удалось получить этот результат. Предполагают, что именно эти трудности вычисления побудили Ньютона начать свои исследования по возведению бинома в дробную степень. (*Стр. 110.*)

193. Когда Валлис получил выражение π в форме бесконечного произведения, результат показался ему настолько странным, что он попросил своего друга Уильяма Броункера (William Brouncker; 1620—1684) заняться этим вопросом. Таким образом, Броункер и открыл новое выражение π в форме непрерывной дроби. (*Стр. 111.*)

194. Первое разложение в непрерывную дробь мы встречаем в 1572 г. в «Алгебре» (L'Algebra) Рафаэля Бомбелли (Bombelli), где непрерывная дробь применялась, впрочем, только для вычисления

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ldots}}$$

В «Практической геометрии» (Geometria practica) Клавия (1606 г.) изложен способ преобразования дроби в непрерывную дробь. Впервые теорию непрерывных дробей разработал в 1737 г. Эйлер (см. примечание 202) в работе «О непрерывных дробях» (De fractionibus continuis). Доказательство соответствующей формулы опубликовано в 1785 г. в его «Аналитических работах» (Opuscula analytica), в гл. II (стр. 149). В т. I помещены и другие две упомянутые непрерывные дроби.

[Разложение в непрерывную (цепную) дробь по существу совпадает с алгоритмом Евклида для нахождения общей меры двух однородных величин. Для нахождения такой меры величин a и b меньшую величину откладывают на большей, остаток — на меньшей, второй остаток — на первом остатке и т. д. Если n-й остаток уложится целое число раз на $(n-1)$-м остатке, то n-й остаток является общей мерой данных величин, а если этот процесс бесконечен, то величины несоизмеримы. Пусть $a>b$ и

$$a=nb+r_1,\quad b=n_1r_1+r_2,\quad r_1=n_2r_2+r_3,\quad r_2=n_3r_3+r_4,\ \ldots$$

Тогда

$$\frac{a}{b}=n+\frac{r_1}{b}=n+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{r_2}{r_1}}=n+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{r_3}{r_2}}}=\ldots,$$

т. е. мы получаем непрерывную дробь

$$\frac{a}{b}=n+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ldots}}}$$

Непрерывные дроби являются удобным средством выражения

прациональностей, в частности квадратных корней из чисел:

$$\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}$$

— *Прим. ред.*] (*Стр. 111.*)

195. Со времени применения Архимедом геометрической прогрессии с убывающим знаменателем для вычисления площади параболы никто до XVII в. не ставил больше задачи разложения функции в ряд. Для установления законов движения планет вокруг Солнца Кеплеру понадобилось определить площадь сектора кривой. Для удобства вычисления он исходил из предположения, что сектор состоит из «бесчисленного количества радиусов», предвосхитив, таким образом, метод, примененный позже в интегральном исчислении. Кавальери в «Геометрии неделимых частей непрерывных величин» (Geometria indivisibilibus continuorum) развил идеи Кеплера, пытаясь найти способ выражения длины дуги кривой или площади при помощи суммирования элементов элементарной площади или дуги и называя эти элементы «неделимыми».

Бонавентура Кавальери (Cavalieri; 1598—1647) — ученик Галилея и профессор математики в Болонском университете. Знаменит выработанным им методом «неделимых», занимающим промежуточное место между методом исчерпывания и методом «исчисления бесконечно малых». В своей «Геометрии неделимых частей непрерывных величин», изданной в 1635 г., он рассматривает линию как совокупность бесконечного числа точек, поверхность — как совокупность бесконечного числа прямых и т. д.; суммируя неделимые, он затем вычисляет площадь поверхности. Методом Кавальери пользовались в течение почти полувека, пока не были установлены основы интегрального исчисления. Кеплера и Кавальери можно, таким образом, считать предшественниками метода исчисления бесконечно малых. В то же время они первыми среди математиков вычислили отношение окружности к ее диаметру при помощи ряда, сумма которого выражает длину дуги окружности как функцию радиуса и центрального угла. «Геометрия неделимых» Кавальери имеется в русском переводе: Б. Кавальери, Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, перев. С. Я. Лурье, М.—Л., 1940. (*Стр. 113.*)

196. Свой ряд Лейбниц опубликовал в «Acta eruditorum» в 1682 г., но открыл он его еще в 1673 г.

Тома Фанте Ланьи (de Lagny; 1660—1734) занимался разными вопросами алгебры и геометрии, увлекался вычислениями и сочинил книгу о практических методах решения задач. Рассказывают, что, когда Ланьи был в агонии, к нему вызвали математика Мопертюи, который, видя его состояние, спросил его, сколько будет 12 в квадрате. Ланьи сразу пришел в сознание, ответил и умер. (См. D. E. Smith, книга, указанная в примечании 109, б), т. I, стр. 472.) (*Стр. 113.*)

197. Имеются сходящиеся ряды, члены которых очень быстро убывают, приближаясь к нулю. Суммируя небольшое количество членов из начала ряда, можно полученную сумму считать суммой ряда, так как погрешность, возникающая при отбрасы-

вании остальных членов, незначительна. Ряд Лейбница не относится к этим очень ценным для вычислителей рядам, поэтому практического интереса не представляет. (*Стр. 113.*)

198. Работы Исаака Ньютона (Newton; 1642—1727) оказали решающее влияние на развитие математики и физики. Помимо других многочисленных и важных открытий, имя Ньютона связано с двумя проблемами огромного значения: дифференциальным и интегральным исчислением и законом всемирного тяготения. Дифференциальное и интегральное исчисление открыл одновременно и Лейбниц. Спор о приоритете по этому открытию продолжался очень долго и омрачил последние годы жизни Лейбница. (*Стр. 113.*)

199. Авраам Шарп (Sharp; 1651—1742) работал бухгалтером, когда Флемстид пригласил его в Гринвичскую обсерваторию. Вместе с Флемстидом Шарп работал над составлением каталога 3000 звезд и создал логарифмические таблицы синусов и тангенсов, опубликованные в 1717 г. При вычислении 72 десятичных знаков числа π он пользовался своими логарифмическими таблицами. (*Стр. 113.*)

200. Астроном Джон Мэчин (Machin; 1680—1751) обнаружил, что любую дугу окружности, тангенс которой — рациональное число, можно разделить на две дуги, тангенсы которых тоже рациональны. Это видно из формулы

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

или из формулы, дающей сумму дуг двух тангенсов:

$$\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}.$$

Повторяя этот способ несколько раз подряд, получаем формулу

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Применяя разложение в ряд Грегори двух функций в правой части, т. е. $\operatorname{arctg} \frac{1}{5}$ и $\operatorname{arctg} \frac{1}{239}$, Мэчин получил ряд

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \ldots\right),$$

позволивший ему вычислить первые 100 десятичных знаков числа π. В 1706 г. этот ряд был опубликован У. Джонсом (Jones) в «Обозрении достижений математики» (Synopsis palmariorum matheseos) без указания метода, при помощи которого Мэчин получил его. Интересно отметить, что в указанной работе Джонс впервые употребил букву π для обозначения отношения длины окружности к ее диаметру, но только много позже это обозначение стало общепринятым. До этого данное отношение обозначалось по-разному. Так, например, У. Оутред (W. Outhtred) в 1647 г. обозначил его через $\frac{\pi}{\delta}$, подразумевая, очевидно, под π начальную букву слова «периферия», а под δ — начальную букву слова «диаметр». Такое обозначение применялось Исааком Барроу (Barrow) в 1664 г. и другими математиками.

Авраам де Муавр (de Moivre) пользовался обозначением $\frac{c}{r}$. Современное обозначение π применялось Эйлером начиная с 1734 г., но не последовательно. С 1736 г. он употребляет его в письмах к Гольдбаху и братьям Бернулли, а затем, в 1748 г., в своей книге «Введение в анализ бесконечных» (Introductio in analysis infinitorum). С тех пор это обозначение окончательно принято всеми математиками. (См. F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. II, N. Y., 1929, p. 8.) (*Стр. 114.*)

201. Де Ланьи также применил метод Шарпа. Его труд вышел в 1717 г. Им установлены следующие цифры:

3, 14159	26535	89793	23846	26433	83279
50288	41971	69399	37510	58209	74944
59230	78164	06286	20899	86280	34825
34211	70679	82148	08651	32723	06647
09384	46...				

(*Стр. 114.*)

202. Леонард Эйлер (Euler; 1707—1783) был не только величайшим математиком в истории человечества, но и одним из самых разносторонних ученых. Рассказывают, что он знал наизусть «Энеиду» от начала до конца. В 1727 г. он по приглашению приехал в Петербург и стал вести научную работу в Петербургской Академии наук, в развитии которой он участвовал с большим рвением. В 1735 г. из-за переутомления он ослеп на правый глаз. «У меня будет меньше повода для отвлечений», — сказал он и продолжал работать с такой же страстью, как и раньше. В 1766 г., опять-таки из-за слишком напряженной работы, он ослеп и на другой глаз. Без лишних жалоб на свою судьбу он трудился не переставая до конца жизни, диктуя сыну результаты своих исследований. Он заложил основы современного математического языка и сделал из анализа отдельную отрасль математики. Помимо 900 с лишним отдельных математических работ, он опубликовал три значительные книги по анализу: «Введение в анализ бесконечных» (Introductio in analysis infinitorum) в двух томах, напечатанных в 1748 г.; «Дифференциальное исчисление» (Institutiones calculi differentialis) в трех томах, напечатанных в 1755 г.; «Интегральное исчисление» (Institutiones calculi integralis) в четырех томах, из которых первые три были напечатаны в 1769—1770 гг., а четвертый в 1794 г. [Эти труды Эйлера, написанные им по-латыни, переведены на русский язык: а) Введение в анализ бесконечных, т. I, перев. Е. Л. Пацановского под ред. И. Б. Погребысского, т. II, перев. В. С. Гохмана под ред. И. Б. Погребысского, М., 1961; б) Дифференциальное исчисление, перев. М. Я. Выгодского, М. — Л., 1949; в) Интегральное исчисление, т. I, перев. С. Я. Лурье и М. Я. Выгодского, М., 1956, т. II, перев. И. Б. Погребысского, М., 1957, т. III, перев. Ф. И. Франкля, М., 1958. Кроме того, на русский язык переведены и другие математические труды Эйлера: г) Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, перев. Я. М. Боровского под ред. Н. С. Коплякова, М. — Л., 1934; д) Избранные картографические статьи, перев. Н. Ф. Булаевского под ред. Г. В. Багратуни, М., 1959; е) Универсальная арифметика, тт. I, II, перев. И. Иноходцева и И. Юдина, СПб., 1768—1769. — *Прим. ред.*]

Для вычисления числа π Эйлер применяет ряд

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots\right)\right).$$

Заключенные в обеих скобках члены убывают так быстро, что, взяв только 7 членов, допускаем при $r=1$ погрешность, меньшую $\frac{1}{186\,000\,000}$. (Th. V a h l e n, Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung, Leipzig — Berlin, 1911, S. 258.) (*Стр. 114.*)

203. Любое рациональное число, выражающееся бесконечной десятичной дробью, характеризуется тем, что составляющие его цифры образуют определенную регулярно чередующуюся последовательность, названную периодом. Например, для числа $\frac{3}{7}$ непосредственным делением 3 на 7 получаем период 428571. Число $\frac{3}{7}$ можно написать в форме следующей бесконечной периодической дроби:

$$\frac{3}{7}=0{,}428571\,428571\,428571\,42\ldots$$

Десятичная дробь, не обнаруживающая подобной периодичности, не является рациональным числом. (*Стр. 115.*)

204. «Энциклопедия, или Толковый словарь наук, искусств и ремесел» (Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers), в 28 томах, Paris, 1751—1772, издавалась Денп Д и д р о и Д а л а м б е р о м при участии других крупных ученых. (*Стр. 115.*)

205. К концу XVII в. и в начале XVIII в. дифференциальная геометрия была известна под названием «высшей геометрии». В «Энциклопедии» (см. примечание 204) была помещена статья Даламбера, в которой он писал, что высшая, или трансцендентная, геометрия — это название, геометрии, основанной на методе бесконечно малых. Это название, отмечал Даламбер, уже устарело: математика получила такое развитие, что геометрические исследования не имеет смысла делить на «низшие и «высшие», или трансцендентные. (*Стр. 116.*)

206. Жан Лерон Д а л а м б е р (d'Alembert; 1717—1783) — один из самых блестящих людей своего времени, выделявшийся своим математическим талантом, образованием и красноречием. Активно участвовал в «Энциклопедии» Дидро. О Даламбере см.: J. B e r t r a n d, D'Alembert, Paris, 1889. (*Стр. 118.*)

207. Письма мадемуазель де Л е с п и н а с (de Lespinasse) графу Г и б е р у (J. A. H. de Guibert) в 1773—1776 гг. См. «Mémoires de Marmontel», Paris, 1891, t. I, II, III. (*Стр. 118.*)

208. Карита де К о н д о р с е (de Condorcet; 1743—1794) еще в юношеские годы проявил свой редкий талант математика и высокие качества души. (См. Ф. А р а г о, Карита де Кондорсе. В кн.: Ф. А р а г о, Биографии знаменитых астрономов, физи-

ков и геометров. перев. Д. Перевощикова, т. I, СПб., 1859. стр. 339--415.) (*Стр. 118.*)

209. См. очерк Араго, указанный в примечании 208. (*Стр. 120.*)

210. См. книгу, указанную в примечании 206. (*Стр. 120.*)

211. См. очерк, указанный в примечании 208. (*Стр. 120.*)

212. Ср. Diderot, Mémoires sur différens sujets de mathématiques, Paris, 1748. (*Стр. 121.*)

213. Бертран (на стр. 224 книги, указанной в примечании 206) пишет, что Вольтер ставил «Похвалы», сочиненные Кондорсе, выше произведений этого жанра, написанных Фонтенелем. В беседе с Бертраном Вольтер добавил, что единственная неприятная вещь в «Похвалах» Кондорсе — это то, «что слушатели не имели бы ничего против, если бы каждую неделю умирало по одному академику, лишь бы слушать Кондорсе!» (*Стр. 121.*)

214. Николай Кузанский (Nicolaus Cusanus; 1401—1464) — кардинал, был первым из европейских математиков, пытавшимся вернуться к гелиоцентрической системе, согласно которой Земля обращается вокруг Солнца. Он был также астрономом и физиком и выступал за введение экспериментального метода в научное исследование природы и в математику. Он доказывал, что познания невозможно достичь на основе схоластических рассуждений.

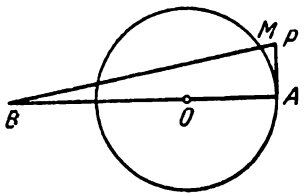


Рис. 29.

В задаче о квадратуре круга он выдвинул следующий способ определения длины окружности. Пусть дана дуга $AM = 30°$. Продолжим AO так, чтобы иметь $AB = 3 \cdot OA$, а также BM до P (точки пересечения с касательной к окружности в точке A). Николай Кузанский утверждал, что $AP = \overset{\frown}{AM}$ (рис. 29). В действительности же это значение приближенное. Вот соответствующее приближение.

Пусть дана $\overset{\frown}{AM} = \alpha$. Из указанного чертежа вытекает, что $\alpha = \dfrac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} = \alpha\left(1 - \dfrac{\alpha^4}{180} + \ldots\right)$, а это означает, что приближенное значение взято с точностью до четвертой степени дуги и, следовательно, применимо только для малых дуг. Этот метод, вновь разработанный Декартом, в настоящее время известен как метод изопериметров. (См. G. Loria, Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX, 2-da ed., Milano, 1950, pp. 249—250. (*Стр. 123.*)

215. Допущенная Николаем Кузанским ошибка была выявлена Регномонтаном (Johannes von Königsberg; Regiomontanus; 1436—1476) в работе «О квадратуре круга» (De quadratura circuli). Книга Регномонтана «О треугольниках» (De triangulis), напечатанная в 1464 г., содержала наиболее систематическое изложение тригонометрии того времени. (*Стр. 125.*)

216. Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci; 1452—1519) — один из самых выдающихся людей эпохи Возро-

ждения, великий художник, ученый и гуманист. Его мировоззрение отражает новые общественные веяния и новые силы, выступавшие против феодализма и схоластики. Д. Смит писал о нем: «Леонардо да Винчи причисляли бы к знаменитым математикам, если бы его выдающиеся дарования в других областях не затмевали его таланта математика». (D. E. Smith, History of Mathematics, vol. I, p. 294.) [О жизни и творчестве Леонардо да Винчи см. В. П. Зубов, Леонардо да Винчи, М. — Л., 1962. — *Прим. ред.*] (*Стр. 125.*)

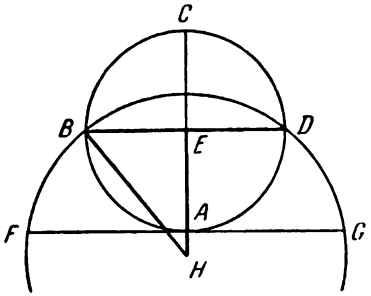


Рис. 30.

217. Приводим решение, предложенное Бовелем. В круге *E* (рис. 30) проводятся два перпендикулярных друг другу диаметра *BED* и *CEA*. Радиус *EA* продолжается за точку *A* на четверть своей длины до точки *H*. Из *H* как из центра описывается дуга окружности радиусом *HB*, пересекающая в *F* и *G* касательную, проведенную к исходной окружности в точке *A*. «Итак, я говорю, — утверждает Бовель, — что отрезок *AG* равен четверти окружности и отрезок *AF* на другой стороне такой же величины». (J. E. Montucla, Histoire des mathématiques, t. IV, Paris, 1802, p. 622; см. также W. Rouse-Ball, Récréations mathématiques, t. II, Paris, 1926, p. 311.) (*Стр. 126.*)

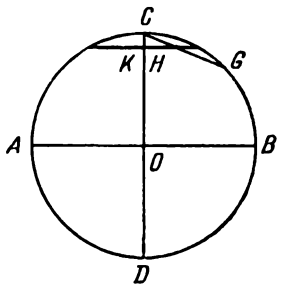


Рис. 31.

218. Заглавие этого перевода следующее: «Геометрия, сочиненная благородным философом магистром Шарлем де Бовелем» (La géométrie composée par noble maître Charles de Bovelles, Paris, 1542). (См. стр. 622 тома IV «Истории математики» Монтюкла.) (*Стр. 127.*)

219. Финэ предложил следующее. Пусть даны два перпендикулярных диаметра *AB* и *CD* (рис. 31). Точка *C* соединяется с серединой дуги *CB*, а отрезок *CG* делится в среднем и крайнем отношении, причем *GH* — более длинный отрезок. Через *H* проводим прямую, параллельную *AB* и пересекающую *CD* в точке *K*. Отрезок *OK* — половина стороны квадрата, равновеликого кругу. Полученное при этом построении значение $\pi > 3{,}4$ (см. стр. 311 книги Рауз-Болла, указанной в примечании 217). (*Стр. 127.*)

220. Педро Нуньес (Pedro Nuñes), известный под латинизированным именем Нониус, — выдающийся португальский математик XVI в. Его работы относятся к области алгебры, арифметики, геометрии и астрономии. Он изобрел приспособле-

ние для отсчета малых углов (вспомогательную шкалу измерительных инструментов для отсчета дробных долей делений основной шкалы), называемое «нониусом». (*Стр. 127.*)

221. Иоаннес Бутео (Buteo; 1492—1572) написал работы по арифметике и геометрии. Критиковал квадратуру О. Финя в сочинении «Две книги о квадратуре круга» (De quadratura circuli), напечатанном в 1559 г. в Лионе. (См. «Bibliotheca Mathematica», 3 Folge, Bd. XII, 1911, S. 249.) (*Стр. 127.*)

222. Симон ван дер Эйке (Van der Eycke) для установления значения $\pi = \left(\frac{39}{22}\right)^2$ опирался на следующую теорему. Если из конца D диаметра DS (рис. 32) проведена касательная DF и если из другого конца S проведена прямая линия SCG, пересекающая круг и касательную таким образом, что отрезок касательной DG равен SC, то вписанный в круг отрезок SC равен четверти длины окружности (см. стр. 312 книги Рауз-Болла, указанной в примечании 217). (*Стр. 128.*)

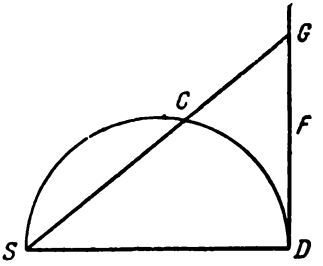


Рис. 32.

223. См. упоминавшуюся выше «Историю математики» Монтюкла, том IV, стр. 624. (*Стр. 130*).

224. Пьетро Антонио Каталъди (Cataldi; 1548—1626) был профессором математики во Флоренции, Перудже и Болонье. Он издал первые шесть книг Евклида и выступил против предложенной Скалигером и другими авторами квадратуры круга. (*Стр. 131.*)

225. Христиан Северин Лонгомонтан (Longomontanus; 1562—1647) — профессор Копенгагенского университета с 1605 г. и хороший астроном-наблюдатель (см. Г. Г. Цейтон, История математики в XVI и XVII веках, М.—Л., 1938, стр. 33. (*Стр. 132.*)

226. Один из выступивших против квадратуры Лонгомонтана писал: «Пусть не обидится этот новый кругоизмеритель (ciclometrus), но надо иметь криволинейный ум, чтобы допустить нелепости, содержащиеся в ложном трактате о кривых линиях». (См. стр. 312 книги Рауз-Болла, указанной в примечании 217.) (*Стр. 132.*)

227. См. стр. 628 книги Монтюкла, указанной в примечании 217. (*Стр. 133.*)

228. R. W. Emerson, La conduite de la vie, Paris, 1926, p. 135. (*Стр. 133.*)

229. I. C. V. Hofmann, Der englische Philosoph Hobbes als Mathematiker, «Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht», Bd. 32, 1901, S. 262—267. (*Стр. 133.*)

230. См. стр. 627 книги Монтюкла, указанной в примечании 217. (*Стр. 134.*)

231. Там же, стр. 625. (*Стр. 134.*)

232. Там же, стр. 627. (*Стр. 135.*)

233. Франсуа Николь (Nicole; 1683—1758) еще в очень молодом возрасте проявил свой талант математика. В 19 лет он уже стал известен своим определением длины дуги циклоиды. (*Стр. 135.*)

234. См. работу Ф. Араго, указанную в примечании 208. (*Стр. 138.*)

235. Комплексное число имеет форму $a + bi$, где a и b — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. (*Стр. 138.*)

236. К сожалению, У. Шенкс ошибся в пятьсот двадцатом знаке, и весь последующий «хвост» выражения из 707 десятичных знаков оказался неверным; ошибка была обнаружена лишь в 1945 г. (М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, перев. с англ. Ю. А. Данилова, под ред. Я. А. Смородинского, М., 1971, стр. 426). — *Прим. ред.* (*Стр. 139.*)

237. Этот прилежный вычислитель пользовался установленной Мэчином формулой

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

приведшей к ряду, указанному в примечании 200.

Напоминаем читателю, что после ряда Эйлера были найдены другие, еще более быстро сходящиеся ряды. Так, например, Стирлинг и затем Т. Симпсон и У. Резерфорд применяли формулу

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{5}{70} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99},$$

а З. Дазе проводил свои вычисления по формуле, установленной Л. К. Шульцем:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

В «Chiffres» (vol. I, Paris, 1958, p. 17) даются 10 000 десятичных знаков числа π. (*Стр. 139.*) [В 1961 г. на электронной вычислительной машине фирмы IBM число π было вычислено с точностью до 100 625 знаков; машина работала 8 *час* 1 *мин* и, кроме того, 42 *мин* занял перевод результата из двоичной формы в десятичную (см. стр. 429 книги М. Гарднера, указанной в примечании 236). — *Прим. ред.*]

238. Приводим и другие высказывания Кондорсе из этой знаменитой речи: «Многие, к их несчастью, уверены, что это им удалось, и не хотят верить геометрам, критикующим их решения; часто они даже не в состоянии понять геометров и кончают тем, что обвиняют их в зависти или в злонамеренности. Иногда упрямство этих людей превращается в настоящее сумасшествие; иначе не назовешь это отношение, влияющее на образ их жизни и ведущее к нарушению общественного порядка. Сумасбродство квадратуристов не только вредит им лично, заставляя их напрасно тратить время, которое они могли бы использовать на благо своих семей. К несчастью, такое сумасшествие редко ограничивается одним этим объектом; от последнего исходит зараза, которая широко распространяется... К тому же эти люди, поражаясь тому, что им без образования удалось дойти до истины, которую безуспешно искали знаменитейшие люди, начинают верить, что на них снизошла благодать». (*Стр. 140.*)

239. В книге К р а ф т а (G. W. Krafft). «Высшая геометрия» (Institutiones geometriae sublimioris), изданной в 1753 г. в Тюбингене, сообщалось, что император Карл V обещал 100 000 талеров тому, кто сумеет разгадать тайну квадратуры круга. (См. G. E n e s t r ö m, Eine noch nicht aufgeklärte Frage über die Geschichte der Kreisquadratur, «Bibliotheca mathematica», 3 Folge, Bd. XXII, 1912, S. 268.) (*Стр. 140.*)

240. Название книги — «Физико-геометрический очерк». Автор просил читателей, особенно физиков и геометров, преподававших в университетах, коллежах и академиях, критиковать его и отвечать через газеты. В книге было помещено специальное письмо Даламберу, предлагавшее последнему критиковать книгу, если он посчитает это нужным.

Мнимое решение квадратуры основывалось на следующей неверной теореме: «Если от конечной точки дуги сектора круга проведена прямая, делящая сектор на две равные части, то прямая проходит через центр тяжести сектора». (*Стр. 140.*)

241. См. стр. 319 книги Монтюкла, указанной в примечании 217. (*Стр. 141.*)

242. Когда К о н д о р с е избрали в Академию наук, Даламбер, ратовавший за его избрание, сказал: «Я более счастлив, одержав эту победу, чем если бы я открыл квадратуру круга». (*Стр. 141.*)

243. В 1877 г. в газете «L'Indépendance belge» появилось сообщение некоего квадратуриста, утверждавшего, что настоящее отношение круга к вписанному квадрату равно $\frac{10}{9}$. Он писал, что если ни один математик Европы или Америки не отвергнет его доказательства, то он заявит о своих правах, требуя, чтобы доказательство было публично признано правильным. (*Стр. 141.*)

244. Фердинанд Л и н д е м а н (F. Lindemann; 1852—1939) в последние годы жизни был профессором Мюнхенского университета. В память открытия трансцендентности числа π в зале перед аудиторией математического семинария университета поставлен бюст Линдемана, а под его именем начертан круг, пересеченный квадратом равной площади, внутри которого начертана буква π. (См. книгу Титце, указанную в примечании 186, стр. 105.) (*Стр. 142.*)

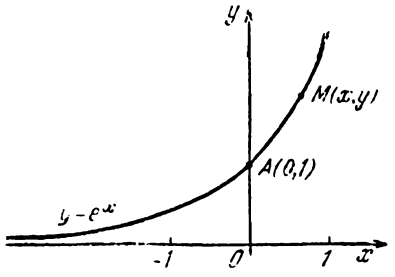


Рис. 33.

245. Эта работа опубликована в журнале «Mathematische Annalen», Bd. 20, 1882, S. 213.

В своем доказательстве Линдеман пользуется тождеством Эйлера $e^{i\pi} = -1$ и тем свойством показательной функции $y = e^x$, что она не может быть справедлива ни для одной пары алгебраических чисел, за исключением пары (0, 1). График этой функции (рис. 33)

показывает, что точка A с координатами (0, 1) — это пересечение кривой и оси ординат. У других точек кривой либо абсцисса, либо ордината, либо обе координаты — трансцендентные числа, как вытекает из общей теоремы, ранее доказанной Линдеманом, а именно: «Не может существовать ни одного уравнения вида $a + e^{x_1} + e^{x_2} + \ldots + e^{x_n} = 0$, если a — целое число, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — алгебраические числа, т. е. корни уравнения вида $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0$, где $b_0, b_1, b_2, \ldots$ $\ldots, b_m$ — целые числа». Из тождества Эйлера $e^{i\pi} = -1$, принимая во внимание указанную теорему, получаем, что так как ордината точки M $(i\pi, -1)$ — рациональное число -1, то абсцисса этой точки, т. е. π, — трансцендентное число! (*Стр. 142.*)

246. Делосская задача. Рассказывают, что однажды в Афинах бушевала чума, которую не удавалось прекратить. Тогда было решено обратиться за советом к оракулу на острове Делос, откуда был получен следующий ответ: «Удвойте алтарь в храме Аполлона!» Так как алтарь имел форму куба, афиняне построили немедленно другой алтарь, ребра которого были в два раза больше прежних, однако эпидемия не уменьшалась. Обратившись снова к оракулу, они получили ответ: «Больше занимайтесь геометрией!» Тогда афиняне обнаружили что, удвоив ребра куба, они увеличили алтарь в восемь раз, а не в два раза. (*Стр. 145.*)

247. Действительным алгебраическим числом является число, являющееся корнем уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_n$ — целые числа. Если $a_0 = 1$, то действительные корни этого уравнения называются *действительными целыми алгебраическими числами*. Например, $\sqrt{2}$ — действительное целое алгебраическое число, так как это корень уравнения $x^2 = 2$, а $\sqrt{\frac{2}{3}}$ — действительное алгебраическое число, так как оно является корнем уравнения $3x^2 = 2$. Но его можно записать и в форме $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; очевидно, что любое действительное алгебраическое число является частным от деления действительного целого алгебраического числа на целое число. (*Стр. 147.*)

248. Джулио Карло, граф де Фаньяно (de Fagnano; 1682—1766) открыл следующую формулу: $\pi = 2i \log \frac{1-i}{1+i}$, чем предвосхитил связь между числами e, π и i, установленную Эйлером.

Как известно, в 1614 г. Непер открыл число e, экспоненциальную функцию и натуральные логарифмы, но связь между числами e и π была обнаружена Эйлером в 1739 г. В следующем году он сообщил Иоганну Бернулли формулу $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$. Другие выражения этого типа были установлены им в 1743 г. (*Стр. 148.*)

249. Эта формула высечена над дверью математического отделения Парижского Дворца открытий. (*Стр. 148.*)

250. Иоганн Генрих Ламберт (Lambert; 1728—1777) сделал много открытий в области математического анализа. В 1767 г. он сообщил Берлинской Академии доказательство иррациональности числа π. Это доказательство помещено и в его работе «Предварительное сообщение для ищущих квадратуру круга» (Vorläufige Kentnisse für die, so die Quadratur des Circus suchen), напечатанной в 1770 г. Вот как Ламберт устанавливает иррациональность числа π: доказано, что $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) выражается бесконечным рядом. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ — иррациональное число. Ламберт показывает, что справедливо и обратное, т. е. что рациональному значению тангенса соответствует иррациональное значение дуги. В частности, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то $\frac{\pi}{4}$ — иррациональное число. Интересно, что хотя Ланьи установил, что, когда тангенс угла рационален, соответствующая ему дуга иррациональна, он не сделал отсюда никакого вывода. [Русский перевод работы Ламберта помещен в сборнике «О квадратуре круга», указанном в примечании 187, стр. 167—196. — *Прим. ред.*] (*Стр. 148.*)

251. Адриен Мари Лежандр (Legendre; 1752—1833) — французский математик, член Парижской Академии наук с 1785 г. Русский перевод его работы «Доказательство того, что отношение длины окружности к диаметру и квадрат его суть иррациональные числа» см. в том же сборнике «О квадратуре круга», стр. 197—210. — *Прим. ред.* (*Стр. 148.*)

252. Жозеф Лиувилль (Liouville; 1809—1882) в своем мемуаре «О весьма обширных классах величин, значения которых не являются ни алгебраическими, ни приводимыми к алгебраическим иррациональностям» (Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationels algébriques, «Journal des mathématiques pures et appliquées», vol. 16, 1851, p. 133) показал, что существует множество трансцендентных чисел вида $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$, где n — действительное число, большее единицы. Позже Георг Кантор (1845—1918) показал, что множество трансцендентных чисел имеет бо́льшую мощность, чем множество алгебраических чисел. (*Стр. 149.*)

253. Шарль Эрмит (Hermite; 1822—1901) — французский математик, член Парижской Академии наук с 1856 г. Исследование непрерывных алгебраических дробей привело его в 1873 г. к открытию трансцендентности числа e, опубликованному в работе «О показательной функции» (Sur la fonction exponentielle), которая помещена в «Comptes rendus de l'Acad. Sci.», Paris, vol. 27, 1873, стр. 18). После этого открытия он написал Борхардту: «Я не рискну доказывать трансцендентность числа π. Если другие попытаются это сделать и будут иметь успех, я больше всех буду рад этому, но, поверьте мне, дорогой друг, это доставит им много хлопот». В том же 1873 г. Эрмит опубликовал новое доказательство иррациональности чисел π и π^2 («Journal des mathématiques», vol. 76, 1873, p. 342). (*Стр. 149.*)

Содержание

Предисловие переводчика 3
Предисловие 4
Введение 9
В тумане времени 11
Восходит Ра, озаряя Египет 14
Тысячелетие спустя 24
В саду Аполлона Ликейского 31
Отказ от канона 46
Блуждания во мгле 55
Далеко на Востоке, в Азии 66
Звездной ночью 71
Эпидемия квадратуры круга 80
Два неудачливых борца за квадратуру круга 90
Вновь среди квадратуристов 108
Энциклопедисты забавляются 118
Парижская Академия наук принимает решительные меры 137
Как наконец-то была установлена истинная природа числа π 142
Вместо заключения 157
Примечания 158