Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Арифметика и алгебра

Книга содержит 350 задач, относящихся к алгебре, арифметике и теории чисел, По своему характеру эти задачи значительно отличаются от стандартных школьных задач. Большинство из них предлагалось в школьных математических кружках при МГУ и на математических олимпиадах. Книга рассчитана на учащихся старших классов средней школы. Задачи, доступные учащимся 7-го — 8-го классов, отмечены особо. Даны подробные решения всех задач; более трудные задачи снабжены указаниями. Настоящее, пятое, издание существенно переработано:—оно упрощено и охватывает материал последних олимпиад.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание настоящей книги вышло в свет в 1950 г.; эта книга открывала серию «Библиотека математического кружка». Около 15 задач в первоначальном варианте книги было заимствовано из рукописи одного из основателей кружка при МГУ Давида Оскаровича Шклярского (1918—1942), в возрасте 23 лет погибшего в партизанском отряде в Белоруссии. При этом влияние Додика Шклярского на всю работу, проводимую в Москве с интересующимися математикой школьниками, и, в частности, на книги серии «Библиотека математического кружка» было настолько значительным, что постановка его фамилии на первое место в списке авторов этих сборников является вполне уместной[1]). В 1954 г. эта книга была переиздана в значительно переработанном и дополненном виде; в 1959 и в 1965 гг. книга снова переиздавалась, но уже без существенных изменений.

Сборники «Избранных задач и теорем элементарной математики» построены на материалах школьных математических кружков и математических олимпиад. Они содержат задачи «олимпиадского» типа, т. е. такие, для понимания условий и для решения которых вполне достаточно знания курса математики средней школы, однако методы решения этих задач, зачастую, являются непривычными для школьной практики, приближаясь к приемам, с которыми сталкиваются математики в своей исследовательской работе. В отличие от большин-

---

[1]) Относительно истории школьного математического кружка при МГУ и московских математических олимпиад и роли, которую сыграл здесь Д. О. Шклярский, см. вводную статью В. Г. Болтянского и И. М. Яглома к книге [1] (числа в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы — см. ниже стр. 381—384).

ства задачников, предназначенных для учащихся средней школы, эти сборники ставят своей целью не столько закрепить и углубить знания читателя, полученные им в школе, сколько ознакомить его с рядом новых для него методов и идей и привить вкус к самостоятельным изысканиям. В связи с этим здесь почти полностью отсутствуют задачи, для решения которых достаточно только формального усвоения школьного курса математики. Очень слабо представлены в сборниках наиболее привычные для школьников типы задач «на сообразительность», скажем, задачи на искусственные методы решения уравнений и систем уравнений высших степеней; зато сборники содержат много задач с нестандартными формулировками, требующих для своего решения новых подходов.

При подборе задач больше внимания уделялось тем разделам элементарной математики, которые находят продолжение в современных исследованиях (для примера назовем темы: «Матрицы, последовательности, функции» или «Алгебра многочленов»). Некоторые циклы задач излагают в переработанном и приспособленном для школьников виде отдельные вопросы, которые обычно относят к «высшей» математике (скажем, элементы теории чисел). Отдельные задачи заимствованы из сочинений классиков математики и из статей, напечатанных в научных математических журналах.

Книга предназначена для интересующихся математикой учащихся старших (7—10) классов средней школы. Она может быть также положена в основу работы школьного математического кружка; при этом руководителю (и участникам) кружка может оказаться полезной и дополнительная литература, указанная в списке на стр. 381—384. Перед решением задач полезно прочесть «Указания к пользованию книгой» (стр. 7—8).

В связи с некоторой необычностью содержания сборники «Избранных задач и теорем» могут показаться трудными читателю, привыкшему к «стандартным» задачникам, предназначенным для учащихся средней школы. Тем не менее опыт математических кружков и олимпиад показывает, что собранные здесь задачи для достаточно настойчивого школьника вполне доступны.

При переработке книги для нового издания мы старались ее, по возможности, упростить — для этого из нее были исключены все без исключения задачи, номера которых помечались во 2-м—4-м изданиях двумя звездочками (в «Указаниях к пользованию книгой» эти задачи рекомендовалось рассматривать как «теорию», читая их решения сразу после условий), а также наиболее трудные из задач, номера которых были помечены одной звездочкой: хотя таким образом из книги выпало несколько интересных задач, но зато она стала доступнее в качестве пособия для самостоятельной работы учащихся. Некоторые задачи были опущены потому, что они показались нам менее интересными, чем другие; два последних цикла задач исключены как «слишком теоретические» (так, например, задачи этих циклов было невозможно решать «в разбивку»). Взамен исключенных книга дополнена рядом новых задач, в основном заимствованных из материалов последних московских, всесоюзных и международных олимпиад. Из-за резкого увеличения числа предлагавшихся на олимпиадах задач мы исключили из книги список номеров таких задач (который ныне должен был бы содержать больше половины всех номеров).

Использование при работе над книгой материалов математических олимпиад превращает когорту нынешних «олимпиадчиков»: И. Бернштейна, Н. Васильева, Г. Гальперина, Ю. Ионина, А. Лемана, А. Савина, А. Толпыго, А. Тоома и многих других, в соавторов этого сборника; особо хочется отметить помогавших автору своими советами В. Гутенмахера и Л. Макара-Лиманова. Значительное содействие оказала мне в моей работе также и Л. И. Головина. При всем том я не знаю, уместно ли специально выражать здесь всем перечисленным лицам свою признательность: заботу об интересующихся математикой школьниках я воспринимаю как наше общее дело, в котором все мы участвуем, отдавая тем самым свой долг людям, которые некогда учили нас (и в этой связи мне снова хочется помянуть моего учителя Д. Шклярского).

И. М. Яглом

УКАЗАНИЯ К ПОЛЬЗОВАНИЮ КНИГОЙ

Настоящая книга состоит из условий задач, ответов и указаний к ним и решений. Ради удобства читателей «Ответы и указания» помещены в конце книги; так же как и «Решения», они напечатаны мелким шрифтом.

Номера задач, решение которых не требует знаний, выходящих за пределы программы 8-го класса средней школы, набраны курсивом; решение большинства из этих задач доступно даже семиклассникам. Звездочкой отмечены задачи, которые кажутся автору более трудными. При этом не исключено, разумеется, что читателю покажется относительно легкой какая-нибудь из отмеченных нами задач, или, наоборот, его серьезно затруднит задача, не отмеченная звездочкой,— ведь точных критериев, определяющих трудность задачи, не существует.

Читателю рекомендуется попытаться самостоятельно решить заинтересовавшую его задачу, не заглядывая в указание или в решение. Если эта попытка не увенчается успехом, то следует посмотреть указание или ответ, знание которого тоже может облегчить решение задачи. Если же и после этого задача не будет решена, то следует прочитать решение задачи. Если задачу удалось решить, не заглядывая в указание, то рекомендуется сравнить ответ с приведенным в «Ответах и указаниях» (если таковой там имеется) и при расхождении попытаться обнаружить свою ошибку. Если же ответы совпадут, то полезно сравнить свое решение с приведенными в книге. Если в книге дано несколько решений задачи, интересно сравнить их между собой. Этот порядок может быть нарушен по отношению к задачам, отмеченным звездочкой,— здесь можно рекомендовать иногда с самого начала ознакомиться с указанием и только после этого приступить к решению задачи.

Как правило, задачи сборника независимы одна от другой; лишь изредка решение задачи использует предложение одной из соседних с ней задачи. Исключением в этом отношении являются лишь два последние цикла задач: «Комплексные числа» и «Несколько задач из теории чисел» — в этих циклах задачи более тесно связаны друг с другом.

Причины, по которым те или иные задачи объединены в один цикл, могут быть различными: иногда это общность методов и постановок вопросов (таков, например, цикл «Алгебра многочленов»), иногда — внешнее сходство условий задач; иногда специальный цикл составляют задачи смешанного содержания, почти не связанные между собой. Некоторые циклы состоят из задач, связанных между собой настолько тесно, что их естественно решать подряд (такова, например, значительная часть цикла «Задачи на делимость чисел» и весь цикл «Перестановки цифр в числе»); эти циклы задач могут служить темой специальных занятий математических кружков (причем здесь может оказаться полезной и указанная в конце книги дополнительная литература). Иногда циклы задач можно естественно разбить на части, различающиеся по методам решения и условиям; эти части циклов отделяются одна от другой черточками. Следует отметить, что названия циклов часто являются условными и передают только их общее содержание: для многих задач невозможно точно определить, к какому циклу их следует отнести.

Задачи сборника рекомендуется решать не «в разбивку», а выбрать сначала определенный цикл и потратить некоторое время на решение задач этого цикла; лишь после ознакомления с одним циклом (которое, конечно, вовсе не должно состоять в решении всех или большинства его задач) следует перейти к другому циклу, и т. д. При этом, разумеется, переходить от одного цикла к другому вовсе не необходимо именно в том порядке, в котором циклы расположены в книге.

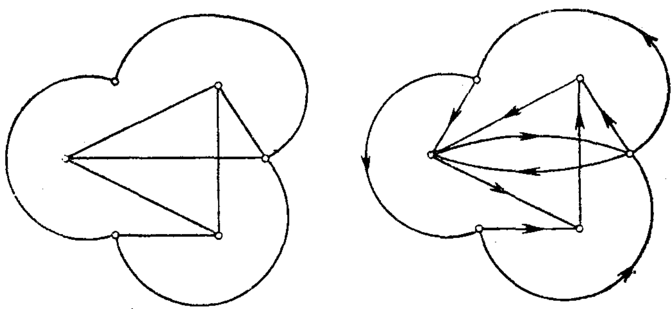
В конце некоторых из решений задач указаны возможные обобщения условий задачи; в других случаях читатель сам увидит возможность расширительного толкования стоящего перед ним вопроса или придумает другие задачи, родственные собранным в этой книге — и этими возможностями никак не следует пренебрегать. В одном случае в книге сохранена (идущая от И. М. Гельфанда) нарочито неопределенная формулировка условия задачи, оставляющая широкий простор инициативе читателя (см. задачу 194 на стр. 43); в иных случаях родственную постановку вопроса учащийся сможет предложить сам.

В известном смысле продолжением этой книги являются последующие сборники задач, входящие в «Библиотеку математического кружка» и объединенные с этой книгой общим списком авторов, а также другие книги серии «Библиотека математического кружка» (см. список литературы в конце книги).

ЗАДАЧИ

1. ВВОДНЫЕ ЗАДАЧИ

Собранные здесь задачи, как правило, являются просто упражнениями для развития логического мышления и не связаны ни с каким определенным разделом математики; впрочем, в этот цикл входят и несколько задач, которые можно отнести к арифметике (см., например, задачи 25—29). Часть задач этого цикла можно связать с теорией графов (о ней см., например, названную на стр. 383 книгу [43]), изучающей системы точек (*вершин* графа; рис. 1, *а*), некоторые из которых связаны между собой линиями (*ребрами* графа); иногда на этих линиях стрелками указано направление движения по ребру — и тогда граф называется *ориентированным* (рис. 1, *б*). На



а) б)

Рис. 1.

языке теории графов можно, скажем, сформулировать те из нижеприведенных задач, которые касаются транспортных сетей (причем сеть дорог с односторонним движением по ним естественно изображать ориентированным графом) или отношений знакомства между людьми: группу лиц можно изобразить системой точек, соединяя между собой те пары точек, которые соответствуют знакомым [1]).

[1]) В задачах этого цикла отношение знакомства всегда считается *симметричным*, т. е. полагается, что если A знаком с B, то B знаком с A; если отказаться от этого условия, то систему знакомств придется изображать ориентированным графом.

Большинство задач этого цикла не требуют почти никаких знаний по математике; с этой точки зрения они доступны учащимся 5-х—6-х классов средней школы. Впрочем, при решении некоторых задач используется метод математической индукции (см. о нем [42]), который изучается лишь в старших классах школы. В решении других задач может оказаться полезным так называемый «принцип клеток» Дирихле[1]), в образной форме часто формулируемый следующим образом: *пусть мы имеем* 7 *кроликов и* 5 *клеток* (или, вообще, m кроликов и $n<m$ клеток); *тогда, если рассадить этих кроликов по клеткам, то хотя бы в одной клетке обязательно окажутся два* (или более) *кролика.*

1. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий; с другой стороны, из тех же 200 учеников в каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем среди отобранных 10 выбран самый низкий. Кто из двоих окажется выше (если это разные лица) — самый низкий из самых высоких учеников, или самый высокий из самых низких?

2. Каждый из людей, когда-либо живших на земле, обменялся с другими определенным числом рукопожатий. Доказать, что число людей, обменявшихся нечетным числом рукопожатий, четно.

3. Доказать, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

4. На заседании присутствуют несколько человек (разумеется, больше одного человека — иначе какое же это было бы «заседание»?).

а) Может ли быть, что никакие двое из присутствующих не имеют одинакового числа знакомых?

б) Доказать, что при любом числе участников заседания может случиться так, что никакие трое из присутствующих не имеют одинакового числа знакомых.

5. На некотором собрании присутствовало $2n$ человек, каждый из которых был знаком не менее чем с n присутствующими. Доказать, что за круглый стол на 4 лица можно посадить четырех из присутствующих так, чтобы каждый сидел между своими знакомыми.

6. На конгресс приехало большое число ученых; одни из них были раньше знакомы друг с другом, другие —

[1]) Поль Лежен Дирихле (1805—1859) — выдающийся немецкий математик.

нет. При этом оказалось, что никакие два ученых, имеющих одно и то же число знакомых, не имеют общих знакомых. Доказать, что среди присутствующих на конгрессе ученых найдется ученый, знакомый ровно с одним участником конгресса.

7. На конгресс приехало 1000 делегатов из разных стран. Известно, что каждые трое из них могут говорить друг с другом без помощи остальных (однако при этом возможно, что одному из трех лиц придется служить переводчиком для двух других). Доказать, что всех делегатов конгресса можно так разместить в гостинице с двуместными номерами, что в каждом номере будут помещены делегаты, которые могут говорить друг с другом.

8. На международной конференции присутствуют 17 ученых. Каждые два из них беседуют друг с другом на определенном языке; при этом всего все 17 человек знают три языка. Доказать, что среди участников конференции найдутся трое, которые говорят друг с другом на одном и том же языке.

9. На некотором собрании присутствовало n человек. Известно, что каждые два знакомых из них не имеют никаких общих знакомых, а каждые два незнакомых между собой лица имеют ровно двух общих знакомых.

а) Доказать, что все присутствующие имеют одно и то же число знакомых.

б) При каких n возможно условие задачи?

10. В городе «Многообразие» живут 10 000 жителей, каждые два из которых либо враждуют, либо дружат между собой. Каждый день не более чем один житель города может «начать новую жизнь», т. е. перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми врагами; при этом любые три жителя могут подружиться между собой. Доказать, что все без исключения жители могут подружиться между собой. Какого наименьшего числа дней наверное достаточно для этого?

*11**. В стране Оз имеется несколько замков, из каждого из которых ведут три пути. Странствующий рыцарь выехал из своего родового замка и пустился в путешествие по стране. Рыцарь любит разнообразие; поэтому, доезжая до очередного замка, он каждый раз поворачивает налево, если в предшествующий раз повернул направо, и поворачивает направо, если до этого он повернул налево. (Проезжая первый на своем пути замок, рыцарь может повернуть в любую сторону.) Докажите, что когда-нибудь рыцарь вернется в свой замок.

12*. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врагов. Доказать, что Мерлин — советник Артура — может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

13. а) Известно, что среди 80 монет имеется одна фальшивая, более легкая, чем остальные, имеющие все одинаковый вес. При помощи четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

б) Известно, что среди n монет есть одна фальшивая, более легкая, чем остальные, имеющие все одинаковый вес. Каково наименьшее число k такое, что k взвешиваниями на чашечных весах без гирь всегда можно выделить фальшивую монету?

14. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размеру и внешнему виду, алюминиевые, остальные — дюралевые (более тяжелые). Как при помощи не более 11 взвешиваний на чашечных весах без гирь определить число дюралевых кубиков?

Примечание. В задаче предполагается, что все кубики могут быть алюминиевые, но дюралевыми все они быть не могут (ведь, если бы все кубики оказались одного веса, то без этого условия мы никак не смогли бы определить, алюминиевые они или дюралевые).

15*. Среди 12 монет имеется одна фальшивая. Известно, что фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но не известно, легче она настоящих или тяжелее. Настоящие монеты все одного веса. С помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить фальшивую монету и одновременно установить, легче она или тяжелее остальных.

Примечание. В условиях задачи 15 тремя взвешиваниями можно выделить фальшивую монету не только из 12, но и из 13 монет; в последнем случае нельзя, однако, определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Для случая 14 монет необходимы уже четыре взвешивания.

Можно также доказать (однако это доказательство является довольно сложным!), что если у нас имеется произвольное число N монет, одна из которых является фальшивой и имеет иной вес, чем остальные, то *наименьшее число k взвешиваний на чашечных весах без гирь, обеспечивающее возможность найти эту монету и одновременно указать, легче ли она или тяжелее остальных, равно* $\log_3(2N+3)$, *если*

$2N+3$ *является целой степенью тройки, и равно* $[\log_3(2N+3)]+1$, *если* $2N+3$ *степенью тройки не является* (т. е. если число $\log_3(2n+3)$ — не целое; квадратные скобки здесь обозначают целую часть числа — см. стр. 37); при $N=12$ это и дает нам $k=3$. Было бы интересно также указать, чему равно наименьшее число k_1 взвешиваний, позволяющих в этих общих условиях лишь найти фальшивую монету, не определяя, легче ли она или тяжелее остальных (при $N=12$ или 13 число $k_1=3$, а при $N=14$ уже $k_1=4$; общее значение величины $k_1=k_1(N)$ пока, кажется, никем не определено).

По поводу решения общей «задачи об N монетах» (опирающегося, впрочем, на далекие от содержания настоящей книги идеи) см. книгу [44], где также подробно обсуждаются причины, с которыми связан возникший в последние десятилетия большой интерес математиков и связистов к задачам типа задач 13—15.

16. а) К хозяину гостиницы однажды пришел постоялец, не имевший денег, но обладавший серебряной цепочкой, состоящей из семи звеньев. Хозяин согласился держать этого постояльца неделю, при условии, что тот будет ему ежедневно отдавать в виде платы одно из звеньев цепочки. Какое наименьшее число звеньев надо распилить для того, чтобы владелец цепочки смог ежедневно в течение семи дней расплачиваться с хозяином (быть может, забирая у него при этом отданные ранее звенья и выдавая взамен их другие)?

б) Цепь состоит из 2000 звеньев. Какое наименьшее число звеньев надо распилить для того, чтобы любое число звеньев от 1 до 2000 можно было набрать, взяв некоторое число из образовавшихся частей?

17. В городе Лиссе все станции метро связаны между собой, т. е. с любой станции можно проехать (возможно с пересадками) на любую другую. Доказать, что при этом можно закрыть одну станцию метро (без права проезда через нее) так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было проехать на любую другую станцию.

18*. На всех улицах города Зурбагана существовало двустороннее движение. Когда, однако, городским властям потребовалось произвести ремонт всех дорог, они вынуждены были временно ввести на части улиц одностороннее движение, оставив движение на остальных улицах двусторонним; после этого, напротив, односторонним было сделано движение по тем улицам, которые ранее не ремонтировались, а по улицам, где движение ранее было односторонним, снова было разрешено ехать в обоих направлениях. При этом в период ремонта дорог в обоих случаях можно было проехать из любого пункта Зурбагана в любой другой. Доказать, что в Зурбагане можно ввести одностороннее движение по всем улицам так, чтобы проезд из любого пункта города в любой другой оставался возможным.

19*. В стране Дельфинии имеется n городов, каждые два из которых соединены шоссе, причем движение по всем шоссе является односторонним. Доказать, что если $n \neq 2$ или 4, то направления движения по шоссе можно выбрать так, чтобы из каждого города в любой другой можно было попасть с заездом не более чем еще в один город; если же $n=2$ или 4, то так движение организовать нельзя.

20*. В Швамбрании имеется 100 городов; при этом если два города A и B не соединены прямой телефонной связью, то имеются регулярные авиарейсы из A в B и наоборот, а если между A и B прямая телефонная связь есть, то таких рейсов нет. Известно, что в Швамбрании каждые два города могут быть (может быть — через посредство нескольких промежуточных пунктов) соединены между собой телефоном и что из каждого города в каждый другой можно долететь самолетом,— возможно, с несколькими посадками в пути. Докажите, что в Швамбрании имеются такие 4 города, что из каждого из них можно и дозвониться и долететь в любой другой, используя, в случае необходимости, в качестве промежуточных пунктов лишь два других города этой четверки.

21. Можно ли ходом шахматного коня попасть из левого нижнего угла доски в правый верхний, побывав на каждом поле ровно один раз?

22. З а д а ч а о к о р о л е - с а м о у б и й ц е. На шахматной доске размером 1000×1000 клеток стоит белый король и 499 черных ладей. Доказать, что при произвольном положении фигур (и при произвольной игре черных) король может «сыграть в поддавки», т. е. за ряд ходов стать на находящееся под боем одной из ладей поле, вынудив тем самым себя побить. (Фигуры на нашей доске ходят по обычным правилам.)

23. 12 полей расположены по кругу и на четырех соседних полях стоят четыре разноцветные фишки: красная, желтая, зеленая и синяя.

Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре любых поля на пятое (если оно свободно) в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки могут стать снова на те же четыре поля. Как они могут при этом переставиться?

24. Среди принятых в университет студентов имеется ровно 50 знающих английский язык, ровно 50 знающих французский язык и ровно 50 знающих немецкий язык (при этом, разумеется, среди студентов могут быть такие, которые знают сразу два или даже все три языка, так что общее число знающих хоть один язык студентов, вообще говоря, меньше $3 \cdot 50 = 150$). Докажите, что всех студентов можно разбить на 5 таких (вообще говоря — не совпадающих по численности) групп, что в каждой группе ровно 10 человек будут знать английский язык, ровно 10 человек — французский и ровно 10 человек — немецкий

25. а) На спортивных соревнованиях выступают 20 спортсменов; судят соревнования 9 судей. Каждый судья расставляет в своем списке соревнующихся в порядке от 1-го до 20-го в соответствии с тем, как он расценил их выступления, причем впоследствии оказалось, что оценки всех судей разнятся не слишком значительно: ни один спортсмен не получил у двух судей места, отличающиеся более чем на три. В основу окончательного распределения мест положено «среднее место» спортсмена по оценкам 9 судей, т. е. сумма всех приписанных ему мест, деленная на число судей (на 9). Каково наибольшее возможное значение «среднего места» лучшего из 20 спортсменов?

б) Теннисная федерация присвоила квалификационные номера всем теннисистам страны: 1-й номер — сильнейшему из них, 2-й — следующему по силе, и т. д.; при этом известно, что в состязании теннисистов, номера которых в квалификационном списке разнятся более чем на две единицы, всегда побеждает теннисист с меньшим номером. 1024 теннисиста страны устраивают соревнования по олимпийской системе, т. е. так, что после каждого этапа соревнований все проигравшие выбывают из игры, а оставшиеся разбиваются на пары соперников в следующем туре случайным образом. Спрашивается, какой наибольший номер может иметь победитель таких соревнований?

26*. Спартакиада продолжалась n дней; на ней были разыграны N комплектов медалей; при этом в 1-й день был вручен 1 комплект медалей и 1/7 часть от оставшегося их количества; во 2-й день — 2 комплекта медалей и 1/7 часть от оставшегося их количества; ...; в предпоследний, $(n-1)$-й день — $(n-1)$ комплект медалей и 1/7 часть всех оставшихся медалей; наконец, в последний день были вручены n последних комплектов медалей. Сколько дней продолжалась спартакиада и сколько комплектов медалей на ней разыгрывалось?

27. Пять приятелей, один из которых имел обезьяну, купили однажды мешок орехов, которые они предполагали утром следующего дня поделить между собой. Однако ночью один из приятелей проснулся и захотел орехов; он разделил все орехи в мешке на пять равных частей, причем у него остался один лишний орех, который он отдал обезьяне, и взял себе пятую часть. Вслед за ним проснулся другой из хозяев орехов; не зная, что орехи уже кто-то брал, он разделил все оставшееся содержимое мешка снова на пять частей, причем оставшийся лишний орех отдал обезьяне, и взял себе пятую часть. Затем последовательно проделали ту же операцию оставшиеся трое приятелей; при этом каждый из них, не зная о поступке остальных, делил все орехи на пять частей, брал себе пятую часть и каждый раз оставался один лишний орех, который отдавали обезьяне. Наконец, утром все пятеро вместе достали мешок, разделили оставшиеся орехи на пять частей, а один орех, оказавшийся лишним, снова отдали обезьяне. Требуется определить наименьшее число орехов в мешке, при котором возможен подобный раздел их.

28. Два брата продали принадлежащее им обоим стадо овец, взяв за каждую овцу столько рублей, сколько было овец в стаде. Полученные деньги братья поделили следующим образом: сначала старший брат взял себе десять рублей из вырученной суммы, затем взял десять рублей второй брат, после этого первый брат взял еще десять рублей, и т. д. При этом младшему брату не хватило десяти рублей; поэтому он взял все оставшиеся после дележа мелкие деньги, а кроме того, чтобы дележ был справедливым, старший брат отдал младшему свой перочинный нож. Во что был оценен перочинный нож?

29. а) С какого дня чаще начинается новый год: с субботы или с воскресенья?

б) На какой день недели чаще всего приходится 30-е число месяца?

2. ПЕРЕСТАНОВКИ ЦИФР В ЧИСЛЕ

30. Какие целые числа от зачеркивания последней цифры уменьшаются в целое число раз?

31. а) Найти все целые числа, начинающиеся с цифры 6 и от зачеркивания этой цифры уменьшающиеся в 25 раз.

б) Доказать, что не существует целых чисел, которые при зачеркивании первой цифры уменьшаются в 35 раз.

32*. Целое число уменьшается в 9 раз при зачеркивании некоторой его цифры; при этом полученное число тоже делится на 9.

а) Доказать, что для того, чтобы разделить полученное число на 9, тоже достаточно вычеркнуть в нем одну цифру.

б) Найти все целые числа, удовлетворяющие условию задачи.

33. а) Найти все числа, которые при зачеркивании третьей цифры уменьшаются в целое число раз.

б)* Найти все числа, которые при зачеркивании второй цифры уменьшаются в целое число раз.

34. а) Найти наименьшее целое число, начинающееся с цифры 1 и такое, что если переставить эту цифру в конец, то число увеличится втрое. Найти все такие числа.

б) Какими цифрами могут начинаться отличные от нуля целые числа, увеличивающиеся втрое от перестановки первой цифры в конец? Найти все такие числа.

35. Найти наименьшее натуральное число, оканчивающееся цифрой 6, которое увеличивается в 4 раза при перенесении его последней цифры в начало числа.

36. Доказать, что нет целых чисел (отличных от нуля), которые от перестановки начальной цифры в конец увеличиваются в 5 раз, в 6 раз или в 8 раз.

37. Доказать, что нет целых чисел (отличных от нуля), которые увеличиваются вдвое от перестановки начальной цифры в конец.

38. а) Доказать, что нет отличных от нуля целых чисел, которые от перестановки начальной цифры в конец увеличиваются в 7 или в 9 раз.

б) Доказать, что нет отличных от нуля целых чисел, которые увеличиваются в 4 раза от перестановки начальной цифры в конец.

39. Найти наименьшее целое число, начинающееся цифрой 7 и уменьшающееся втрое от перестановки этой цифры в конец Найти все такие числа.

40. а) Доказать, что отличное от нуля целое число не может быть меньше в 2, 3, 5, 6, 7 или 8 раз своего обращенного (т. е. числа, состоящего из тех же цифр, записанных в обратном порядке).

б)* Найти все целые числа, которые в 4 раза или в 9 раз меньше своего обращенного.

41. а) Найти шестизначное число, которое увеличивается в 6 раз, если три последние цифры числа, не меняя их порядка, переставить в начало числа.

б) Доказать, что не существует восьмизначного числа, увеличивающегося в 6 раз при перестановке четырех последних цифр на первые четыре места с сохранением их порядка.

42. Найти шестизначное число, произведения которого на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6 записываются теми же цифрами, что и оно само, но в другом порядке.

43. Найти все трехзначные числа, равные среднему арифметическому всех чисел, получающихся из заданного числа всевозможными перестановками его цифр (включая, разумеется, и «тождественную перестановку», оставляющую все цифры числа на месте).

44. Пусть A — некоторое целое положительное число, A' — число, составленное из тех же цифр, но переставленных в каком-то другом порядке. Доказать, что если $A+A'=10^{10}$, то A делится на 10.

45. Пусть M — некоторое 17-значное число, N — число, полученное «переворачиванием» M, т. е. записываемое теми же цифрами, следующими однако, в обратном порядке. Доказать, что хотя бы одна цифра десятичной записи числа $M+N$ — четная.

3. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Начатые задачами этого цикла темы, в основной своей части относящиеся к «высшей арифметике» — к теории чисел,— находят некоторое продолжение в дальнейших разделах книги, в первую очередь — в циклах 4, 5 и 11. По поводу общих идей, лежащих в основе решения многих из приведенных ниже задач, читателя можно отослать к статье [45], брошюре [46] или к изложениям начал теории чисел (см., например, связанные с так называемой «теорией сравнений» разделы учебников [64] — [67] или статьи [68]). Особо хочется порекомендовать читателю в связи с материалом настоящего цикла задач раздел 2 книги [5], по характеру изложения наиболее подходящий для учащихся старших и средних классов школы.

46. Доказать, что при всяком целом n

а) $n^3 - n$ делится на 3;

б) $n^5 - n$ делится на 5;

в) $n^7 - n$ делится на 7;

г) $n^{11} - n$ делится на 11;

д) $n^{13} - n$ делится на 13.

Примечание. Отметим, что $n^9 - n$ уже не обязательно делится на 9 (например, $2^9 - 2 = 510$ не делится на 9).

Задачи а) — д) составляют частные случаи одной более общей теоремы: см. ниже задачу 340 (стр. 71).

47. Доказать, что при всяком целом n

а) $3^{6n} - 2^{6n}$ делится на 35 (здесь $n \geqslant 0$);

б) $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120;

в) $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121.

48. Доказать, что при всех целых m и n

а)* $mn(m^{60} - n^{60})$ делится на 56 786 730;

б) $m^5 + 3m^4n - 5m^3n^2 - 15m^2n^3 + 4mn^4 + 12n^5$ не равно 33.

49. При каких целых положительных n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

50. Существует ли такое натуральное число n, что $n^2 + n + 1$ делится на 1955?

51. Какие остатки может давать сотая степень целого числа при делении на 125?

52. Доказать, что если целое число N взаимно просто с 10, то 101-я степень числа N оканчивается теми же тремя цифрами, что и N (так, например, 1233^{101} оканчивается цифрами 233, а 37^{101} — цифрами 037).

53. Найти трехзначное число, всякая целая степень которого оканчивается тремя цифрами, составляющими первоначальное число.

54*. Пусть N — четное число, не делящееся на 10. Какова будет цифра десятков числа N^{20}? Какова будет цифра сотен числа N^{200}?

55. Доказать, что сумма

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k,$$

где n есть произвольное целое положительное число, а k нечетно, делится на $1+2+3+\ldots+n$.

56. Вывести признак делимости чисел на 11.

57. Число 123456789(10)(11)(12)(13)(14) написано по 15-ричной системе счисления, т. е. это число равно

$(14)+(13)\cdot 15+(12)\cdot 15^2+(11)\cdot 15^3+\ \ldots\ +2\cdot 15^{12}+15^{13}$. Какой остаток дает оно при делении на 7?

58. Доказать, что единственными числами K такими, что если N делится на K, то и любое число, полученное из N перестановкой цифр, делится на K, являются 1, 3 и 9. (Для $K=1$ это свойство очевидно, для $K=3$ и $K=9$ следует из известных признаков делимости на 3 и на 9.)

---

59. Найти наименьшее целое число, записываемое одними единицами, которое делится без остатка на число $\underbrace{333...33}_{100\text{ троек}}$.

60. Пусть a — последняя цифра целого числа $N=2^k$, A — число, в которое обращается N, если зачеркнуть в нем эту последнюю цифру. Доказать, что при всех $k>3$ число aA делится на 6.

61. Доказать, что $27\,195^8-10\,887^8+10\,152^8$ делится без остатка на 26 460.

62. Доказать, что $11^{10}-1$ делится на 100.

63. Доказать, что $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.

64. Доказать, что число, составленное из 3^n одинаковых цифр, делится на 3^n (так, число 222 делится на 3, число 777 777 777 делится на 9, и т. д.).

65. Найти остаток от деления на 7 числа

$$10^{10}+10^{(10^2)}+\ldots+10^{(10^{10})}.$$

66. а) Найти последнюю цифру чисел $9^{(9^9)}$, $2^{(3^4)}$.

б) Найти две последние цифры чисел 2^{999}, 3^{999}.

в) * Найти две последние цифры числа $14^{(14^{14})}$.

67. Доказать, что

а) две последние цифры десятичных записей чисел 9^{9^9} и $9^{9^{9^9}}$ (где, например, 9^{9^9} означает $9^{(9^9)}$) одинаковы;

б)* шесть последних цифр десятичных записей чисел $7^{7^{7^7}}$ и $7^{7^{7^{7^{7^7}}}}$ одинаковы.

68. а) Какова последняя цифра числа

$$\left(\ldots\left(\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot 7}}}\right)$$

(возведение в степень 7 повторяется 1000 раз)? Каковы две последние цифры этого числа?

б) Какова последняя цифра числа

$$7^{\left(7^{\cdot^{\cdot^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}}\cdots}\right)}$$

записанного с помощью 1001 семерки, аналогично числу задачи а), однако с иным порядком возведения в степень? Каковы две последние цифры этого числа?

69*. Определить пять последних цифр числа

$$N=9^{\left(9^{\cdot^{\cdot^{\left(9^{\left(9^9\right)}\right)}}\cdots}\right)},$$

записанного с помощью 1001 девятки аналогично числу задачи 68б).

70. При каких натуральных n сумма 5^n+n^5 делится на 13? Каково наименьшее n, удовлетворяющее этому условию?

71. Каковы две последние цифры числа

$$n^a+(n+1)^a+(n+2)^a+\ldots+(n+99)^a,$$

где n — произвольное целое неотрицательное число и

а) $a=4$; б) $a=8$?

72*. Найти последние 1000 цифр числа

$$N=1+50+50^2+50^3+\ldots+50^{999}.$$

73. Натуральное число M делится на 7; доказать, что если число цифр числа делится на 6, то при переносе последней цифры в начало мы получим число N, также делящееся на 7.

---

74. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n-1)\cdot n=n!$$

(читается: n факториал). Так предыдущую задачу можно короче сформулировать так: сколькими нулями оканчивается число 100! ?

75. а) Доказать, что произведение n последовательных целых чисел делится на $n!$.

б) Доказать, что дробь $\frac{n!}{a!\,b!\ldots k!}$ есть число целое, если только $a+b+\ldots+k\leqslant n$.

в) Доказать, что $(n!)!$ делится на $n!^{(n-1)!}$.

г)* Доказать, что произведение n последовательных целых чисел, образующих арифметическую прогрессию, разность которой взаимно проста с $n!$, делится на $n!$.

Примечание. Задача 75г) является обобщением задачи 75а).

76. Делится ли на 7 число сочетаний из 1000 элементов по 500?

77. а) Найти все числа n между 1 и 100, такие, что $(n-1)!$ не делится на n.

б) Найти все числа n между 1 и 100, такие, что $(n-1)!$ не делится на n^2.

78*. Найти все целые числа n, делящиеся на все целые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$.

79. а) Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не может быть полным квадратом целого числа.

б) Доказать, что сумма одинаковых четных степеней трех последовательных целых чисел не может равняться четной степени целого числа.

в) Доказать, что сумма одинаковых четных степеней девяти последовательных целых чисел не может равняться никакой степени целого числа (разумеется, с показателем, бо́льшим 1).

80. а) Пусть A и B — два различных семизначных числа, каждое из которых составлено из всех цифр от 1 до 7. Доказать, что A не делится на B.

б) Из всех цифр от 1 до 9 составить три трехзначных числа, относящихся друг к другу как $1:2:3$.

81. Квадрат целого числа оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами. Какими?

82. Доказать, что если обе стороны прямоугольника и его диагональ выражаются целыми числами, то площадь прямоугольника делится на 12.

83. Доказать, что если все коэффициенты квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

— целые нечетные числа, то корни уравнения не могут быть рациональными.

84. Доказать, что если сумму простых дробей

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

(n — целое число) обратить в десятичную, то полученная дробь будет смешанной периодической.

85. Доказать, что числа

а) $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$;

б) $N = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m}$;

в) $K = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$

(n, m — целые положительные) не могут быть целыми.

86. а) Доказать, что дробь $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ несократима ни при каком целом значении a.

б) Указать все (натуральные) числа, на которые может оказаться сократимой дробь $\frac{5n+6}{8n+7}$ при целом n.

---

87. 1953 цифры выписаны по кругу. Доказать, что если при чтении этих цифр в направлении вращения часовой стрелки, начиная с какой-то цифры, получится 1953-значное число, делящееся на 27, то и при чтении этих цифр в том же направлении, начиная с любого другого места, тоже получится 1953-значное число, делящееся на 27.

88. Доказать, что существует делящееся на 5^{1000} число, десятичная запись которого не содержит нулей.

89. Доказать, что все числа вида 10 001, 100 010 001, 1 000 100 010 001, ...— составные.

90. Доказать, что каждые два числа последовательности

$$2+1,\quad 2^2+1,\quad 2^4+1,\quad 2^8+1,\quad 2^{16}+1,\ \ldots,\quad 2^{2^n}+1,\ \ldots$$

являются взаимно простыми.

Примечание. Из результата настоящей задачи, в частности, следует, что существует бесконечно много простых чисел (см. также по этому поводу задачи 234 и 349). В самом деле, если бы число простых чисел было конечным, то не могло бы существовать бесконечно много чисел, каждые два из которых взаимно просты.

91. Доказать, что если одно из чисел $2^n - 1$ и $2^n + 1$, где $n > 2$, простое, то второе является составным (при $n = 2$ оба числа $2^n - 1 = 3$ и $2^n + 1 = 5$ — простые).

92. а) Доказать, что если p и $8p - 1$ — простые числа, то $8p + 1$ — составное число.

б) Доказать, что если p и $8p^2 + 1$ — простые числа, то $8p^2 - 1$ — простое число.

93. Доказать, что квадрат любого простого числа, кроме чисел 2 и 3, при делении на 12 дает в остатке 1.

94. Доказать, что если три простых числа, больших числа 3, образуют арифметическую прогрессию, то разность прогрессии делится на 6.

95*. а) Десять простых чисел, меньших 3000, составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

б) Доказать, что не существует 11 простых чисел, меньших 20 000, которые составляли бы арифметическую прогрессию.

96. а) Доказать, что из пяти последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое со всеми остальными.

б) Доказать, что из 16 последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно число, взаимно простое со всеми остальными.

4. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ АРИФМЕТИКИ

97. Число A записывается в десятичной системе счисления при помощи 666 троек, а число B — при помощи 666 шестерок. Из каких цифр состоит произведение $A \cdot B$?

98. Найти частное и остаток от деления числа A, записываемого с помощью 1001 семерки, на число 1001.

99. Найти наименьший квадрат, начинающийся с шести двоек.

100. Существуют ли такие целые числа m и n, что $m^2 = n^2 + 1954$?

101. Дописать к 523 ... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, на 8 и на 9.

102. Найти четырехзначное число, которое при делении на 131 дает в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

103. а) Доказать, что сумма всех n-значных чисел $(n > 2)$ равна $494\underbrace{99\ldots9}_{(n-3)\text{раз}}55\underbrace{00\ldots0}_{(n-2)\text{раз}}$ (так, сумма всех трехзначных чисел равна 494 550, а сумма всех шестизначных чисел 494 999 550 000).

б) Найти сумму всех четырехзначных четных чисел, которые можно записать цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5 (одна и та же цифра в числе может повторяться).

104. Сколько и каких цифр понадобится для того, чтобы записать все целые числа от 1 до 100 000 000 включительно?

105. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 206 788-м месте.

106. Будет ли дробь 0,1234567891011121314..., которая получится, если выписать после нуля подряд все целые числа, периодической?

107. Каждое из целых чисел от единицы до миллиарда включительно заменяется суммой цифр числа; однозначные числа при этом, разумеется, не меняются, а остальные уменьшаются. Затем каждое из вновь полученных чисел снова заменяется суммой его цифр — и так до тех пор, пока не получится миллиард однозначных чисел. Каких чисел будет больше среди полученных чисел — единиц или двоек?

108. Может ли являться полным квадратом целое число, запись которого в десятичной системе счисления содержит

а) некоторое количество шестерок и некоторое количество нулей;

б) цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9 (каждую — по одному разу), причем цифра 5 стоит на последнем месте?

109. На карточках написаны все пятизначные числа от 11 111 до 99 999 включительно (число таких чисел, очевидно, равно 88 889). Затем эти карточки произвольным образом выложили в одну цепочку. Доказать, что полученное таким путем 444 445-значное число ($444\,445 = 88\,889 \cdot 5$) не является степенью двойки.

110. Найти все десятизначные числа такие, что 1-я цифра числа равна числу нулей в его десятичной записи, 2-я цифра — числу единиц, и т. д. вплоть до десятой цифры, равной числу девяток в записи числа.

111. На какое целое число надо умножить 999 999 999, чтобы получить число, состоящее из одних единиц?

112. Пусть A — некоторое натуральное число. Доказать, что существует бесконечно много таких (натуральных) чисел N, записываемых цифрами 1, 2, ..., 9 (без нулей!), что числа N и AN имеют одинаковые суммы цифр[1]).

---

[1]) *Оговорка об отсутствии нулей в десятичной записи чисел* N связана с тем, что если приписать к записи N любое число нулей в конце, то суммы цифр чисел N и AN, разумеется, не изменятся; поэтому без этой оговорки из существования о д н о г о удовлетворяющего *условию задачи числа* N *сразу же следовало бы существование бесконечного множества* таких чисел.

113. Пусть $n \geqslant 2$ и $a_1, a_2, \ldots$ — все не более, чем n-значные неотрицательные целые числа, сумма цифр которых четна, а $b_1, b_2, \ldots$ — те не более чем n-значные числа, сумма цифр которых нечетна. Доказать, что

$$a_1^m + a_2^m + \ldots = b_1^m + b_2^m + \ldots$$

при всех (натуральных) $m < n$. Будет ли верно утверждение задачи также и при $m \geqslant n$?

114. В числовом треугольнике

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,2\,3\,2\,1 \\ 1\,3\,6\,7\,6\,3\,1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

каждое число равно сумме трех чисел, расположенных в предыдущей строке над этим числом и его соседями справа и слева; в случае отсутствия в предыдущей строке одного из двух таких чисел они заменяются нулями.

Доказать, что в каждой строке, начиная с третьей, найдется четное число.

115. Дана треугольная таблица чисел:

$$\begin{array}{c} 0\ 1\ 2\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ 1956\quad 1957\quad 1958 \\ 1\ 3\ 5\ \ldots\ldots\ldots\ 3913\quad 3915 \\ 4\ 8\ \ldots\ldots\ldots\ 7828 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

в которой каждое число (кроме чисел верхней строки) равна сумме двух стоящих над ним чисел предшествующей строки. Доказать, что последнее число, стоящее в самой нижней строке этой таблицы, делится на 1958.

116. Расстояние от пункта A до пункта B равно 999 км. Вдоль соединяющей A и B дороги стоят километровые столбы, на которых указаны расстояния до A и до B — надписи на них выглядят так:

$$0\,|\,999,\quad 1\,|\,998,\quad 2\,|\,997,\ \ldots,\quad 999\,|\,0.$$

Сколько из этих столбов таких, на которых имеются лишь две различные цифры?

117. Мальчик, проезжая в автобусе мимо кинотеатра, успел заметить только часы (но не минуты!) начала четырех сеансов:

1-й сеанс — 12 час. ... мин.;
2-й сеанс — 13 час. ... мин.;
. . . .
7-й сеанс — 23 час. ... мин.;
8-й сеанс — 24 час. ... мин.

Как по этим данным восстановить начала всех сеансов (предполагается, что продолжительность всех восьми сеансов одинакова)?

118. Шоссе, по которому круглосуточно ходит автобус, пересекает железную дорогу. По дороге каждый час проходят два поезда, которые достигают шоссе ровно в n час. и в n час. 38 мин., где n принимает все значения от 0 до 23; каждый раз, когда проходит поезд, опускается на 5 мин. шлагбаум, преграждающий путь по шоссе. Требуется так составить расписание автобусов, чтобы они ходили с одним и тем же интервалом T мин. между машинами и чтобы ни одна машина не задерживалась на переезде. При каких интервалах между автобусами, меньших получаса, так спланировать движение возможно?

---

119. Чему равно наибольшее возможное значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр?

120. Вычеркнуть 100 цифр из числа

$$1234567891011121З...979899100$$

так, чтобы полученное после этого число было

а) возможно бо́льшим; б) возможно меньшим.

121. Из всех цифр от 1 до 9 составить три трехзначных числа, произведение которых было бы

а) наименьшим; б) наибольшим.

122. Сумма нескольких последовательных целых положительных чисел равна 1000. Найти эти числа.

123. а) Доказать, что всякое число, не являющееся степенью двойки, может быть представлено в виде суммы по меньшей мере двух последовательных целых положительных чисел, а для степеней двойки такое представление невозможно.

б) Доказать, что всякое составное нечетное число может быть представлено в виде суммы по меньшей мере двух последовательных нечетных чисел, а ни одно простое число нельзя представить в таком виде. Какие четные числа можно представить в виде суммы нескольких последовательных нечетных чисел?

в) Доказать, что каждую степень целого положительного числа n (разумеется, с показателем, большим 1) можно представить в виде суммы n последовательных нечетных чисел.

124. Доказать, что произведение четырех последовательных чисел в сумме с единицей дает полный квадрат.

125. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырех попарно различных можно составить геометрическую пропорцию. Доказать, что среди этих чисел найдется n одинаковых.

126. Даны 27 гирь, веса которых равны соответственно $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 27^2$. Разложить эти гири на три группы равного веса.

127. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно разложить на чашках весов, по шесть на каждой чашке, так, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют один и тот же вес.

128*. Четыре (произвольные) числа a, b, c, d выписаны рядом друг с другом. Под этими числами выписывается новая четверка чисел $a_1=ab$, $b_1=bc$, $c_1=cd$, $d_1=da$; под ними выписываются числа $a_2=a_1b_1$, $b_2=b_1c_1$, $c_2=c_1d_1$, $d_2=d_1a_1$, и т. д. Доказать, что либо все полученные таким образом четверки чисел различны, либо все они, начиная с некоторой, совпадают между собой.

129. Дан произвольный набор из N (где N — полная степень двух: $N=2^k$) чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N$, каждое из которых равно $+1$ или -1. Исходя из этих чисел, следующим образом составляется новый набор чисел, каждое из которых также равно $+1$ или -1: $a'_1 = a_1a_2$, $a'_2 = a_2a_3, \ldots, a'_{N-1} = a_{N-1}a_N$, $a'_N = a_Na_1$; затем по числам $a'_1, a'_2, \ldots, a'_N$ точно так же находятся числа $a''_1, a''_2, \ldots, a''_N$, и т. д. Доказать, что в конце концов мы получим набор, состоящий из одних лишь чисел $+1$.

130*. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $n>2$,— целые числа; по этим числам составляется новая система чисел $a'_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$, $a'_2 = \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots$, $a'_{n-1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{2}$, $a'_n = \frac{a_n+a_1}{2}$; по числам $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ точно так же находятся числа $a_1''\left(=\frac{a_1'+a_2'}{2}\right), a_2'', \ldots, a_n''$, и т. п. Доказать, что если все получаемые таким путем числа — целые, то $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

131. Пусть $x=1$, y, z — произвольные три числа; x_1, y_1, z_1 — абсолютные величины $|x-y|$, $|y-z|$, $|z-x|$ попарных разностей этих чисел; x_2, y_2, z_2 — абсолютные величины попарных разностей чисел x_1, y_1, z_1 (т. е. числа $|x_1-y_1|$, $|y_1-z_1|$, $|z_1-x_1|$); x_3, y_3, z_3 — абсолютные величины разностей чисел x_2, y_2, z_2, и т. д. Известно, что для какого-то n тройка чисел x_n, y_n, z_n не отличается от тройки чисел x, y, z. Чему равны числа y и z?

132*. а) Даны четыре произвольных целых положительных числа A, B, C, D. Доказать, что если образовать из них четыре числа A_1, B_1, C_1, D_1, равных соответственно разностям между A и B, между B и C, между C и D и между D и A (мы каждый раз вычитаем меньшее число из большего), затем из чисел A_1, B_1, C_1, D_1 образовать точно так же новую четверку чисел A_2, B_2, C_2, D_2, и т. д., то через несколько шагов мы обязательно придем к четверке нулей.

Так, например, начиная с четверки чисел 32, 1, 110, 7, мы последовательно получим

$$\begin{array}{rrrr}
32, & 1, & 110, & 7; \\
31, & 109, & 103, & 25; \\
78, & 6, & 78, & 6; \\
72, & 72, & 72, & 72; \\
0, & 0, & 0, & 0.
\end{array}$$

б) Сохраняет ли силу утверждение задачи а), если (положительные) числа A, B, C, D являются рациональными, но не обязательно целыми? А если эти числа иррациональны?

133*. а) Расположить числа от 1 до 100 таким образом, чтобы никакие 11 (не обязательно последовательных!) из этих чисел не следовали одно за другим в порядке возрастания или убывания.

б) Доказать, что в каком бы порядке ни расположить числа от 1 до 101, всегда из этих чисел можно выбрать 11 (не обязательно последовательных!) чисел, которые следуют одно за другим в порядке возрастания или убывания.

134. а) Из первых 200 целых чисел от 1 до 200 выбрано 101 число. Доказать, что среди выбранных чисел найдется пара таких, что одно из них делится на другое.

б) Выбрать из первых 200 целых чисел 100 чисел так, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

в) Доказать, что если хотя бы одно из 100 целых чисел, не превосходящих 200, меньше 16, то одно из этих чисел обязательно делится на другое.

135. Доказать, что

а) из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100;

б) из любых 100 целых чисел всегда можно выбрать несколько чисел (быть может — одно), сумма которых делится на 100;

в) если числа задачи б) положительны и не превышают 100, а их сумма равна 200, то можно отобрать несколько чисел так, чтобы их сумма равнялась 100;

г)* из любых 200 целых чисел можно выбрать 100 чисел, сумма которых делится на 100.

136. Дана невозрастающая последовательность a_1, a_2, ..., a_n положительных чисел, сумма которых равна 1, а самое большее из них равно $\frac{1}{2k}$, где k — целое:

$$\frac{1}{2k}=a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant \ldots \geqslant a_n>0,\ a_1+a_2+\ldots+a_n=1.$$

Доказать, что из этих чисел можно выбрать k таких чисел, что самое маленькое из них больше половины самого большого.

---

137. По кругу выписаны p крестиков и q нуликов; число пар стоящих рядом крестиков обозначим через a, а число пар стоящих рядом нуликов — через b. Доказать, что $a-b=p-q$.

138. Пусть i_1, i_2, ..., i_n — это числа 1, 2, ..., n, но только расставленные в каком-то, воообще говоря, новом порядке. Доказать, что при n четном произведение $(1-i_1)(2-i_2)(3-i_3)\ldots(n-i_n)$ может быть как четным, так и нечетным; однако при n нечетном оно обязательно четно.

139. Дано n чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, каждое из которых равно $+1$ или -1. Доказать, что если $x_1x_2+x_2x_3+\ldots$ $\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$, то n делится на 4.

140. Доказать, что совокупность всех десятизначных чисел, записываемых исключительно цифрами 1 и 2, можно разбить на такие две группы, что запись суммы любых двух чисел из одной группы будет содержать не менее двух цифр 3.

141. Из цифр 1 и 2 составлено пять 100-значных чисел; при этом известно, что у каждых двух чисел ровно в r разрядах совпадают цифры, однако ни в одном разряде не совпадают все пять цифр. Доказать, что это возможно лишь в том случае, если r заключено в пределах: $40 \leqslant r \leqslant 60$.

142. Имеются два набора знаков «+» и «—» по 1958 знаков в каждом наборе. Доказать, что за некоторое число «шагов», на каждом из которых позволяется менять произвольно выбранные 11 знаков 1-го набора, можно 1-й набор превратить во 2-й. (Наборы считаются одинаковыми, если у них на одинаковых местах стоят одинаковые знаки.)

143*. Шахматист для тренировки играет не менее одной партии в день; при этом, чтобы не переутомиться, он играет не более чем 12 партий в неделю. Доказать, что можно найти несколько таких последовательных дней, в течение которых он сыграет ровно 20 партий.

144. Пусть N — произвольное целое положительное число. Доказать, что существует целое число, кратное N, которое в десятичной системе счисления записывается одними лишь цифрами 0 и 1. При этом, если N взаимно просто с 10 (т. е. не делится ни на 2, ни на 5), то существует делящееся на N число, составленное из одних только единиц (если N не взаимно просто с 10, то, разумеется, никакое число вида $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}}$ не может делиться на N).

145. Расположить на числовой оси систему неперекрывающихся (не имеющих общих внутренних точек или общих концов) отрезков длины 1 так, чтобы для любой (бесконечной) арифметической прогрессии (с произвольным первым членом прогрессии и какой-угодно разностью!) хоть один ее член попал внутрь одного из отрезков нашей системы.

146. Пусть m и n — два взаимно простых целых положительных числа. Доказать, что если дроби:

$$\frac{m+n}{m}, \quad \frac{2(m+n)}{m}, \quad \frac{3(m+n)}{m}, \ldots, \frac{(m-1)(m+n)}{m};$$
$$\frac{m+n}{n}, \quad \frac{2(m+n)}{n}, \quad \frac{3(m+n)}{n}, \ldots, \frac{(n-1)(m+n)}{n}$$

изобразить точками на числовой оси, то в каждый из интервалов (1, 2), (2, 3), (3, 4), ..., $(m+n-2, m+n-1)$ оси попадает ровно одна из дробей (см. рис. 2, где положено $m=3$, $n=4$).

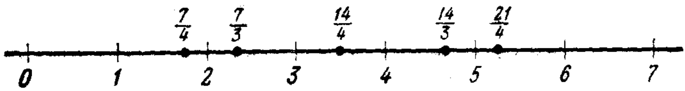


Рис. 2.

147*. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — какие-то целые положительные числа, такие, что каждое из этих чисел меньше 1000, а общее наименьшее кратное любых двух чисел больше 1000. Доказать, что сумма обратных величин чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ меньше двух.

148*. Дробь $\frac{q}{p}$ с нечетным простым знаменателем $p \neq 5$ разложена в бесконечную периодическую десятичную дробь. Доказать, что если число цифр в периоде дроби четно, то среднее арифметическое всех цифр периода равно 4,5 (т. е. совпадает со средним арифметическим всех цифр 0, 1, 2, ..., 9; это означает, что «большие» и «маленькие» цифры встречаются в периоде дроби одинаково часто). Если же число цифр в периоде дроби нечетно, то среднее арифметическое всех цифр обязательно отлично от 4,5.

149*. Доказать, что если разложить дроби

$$\frac{a_1}{p}, \quad \frac{a_2}{p^2}, \quad \frac{a_3}{p^3}, \ldots, \frac{a_n}{p^n}, \ldots$$

(p — простое, отличное от 2 и 5, $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ — какие угодно целые числа, взаимно простые с p) в бесконечные периодические десятичные дроби, то несколько первых дробей (может быть, одна) будут иметь одинаковое число цифр в периоде, а каждая из последующих — в p раз больше цифр в периоде, чем предыдущая.

Так, например, $\frac{1}{3}=0,(3)$, $\frac{4}{9}=0,(4)$, $\frac{10}{27}=0,(370)$, $\frac{80}{81}=0,(987654320)$, $\frac{116}{243}$ имеет 27 цифр в периоде, $\frac{653}{729}$ имеет 81 цифру в периоде, и т. д.

5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

150. а) Найти четырехзначное число, являющееся точным квадратом и такое, что его первые две цифры равны между собой и последние две цифры также равны между собой.

б) Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найти все такие числа.

151. Найти четырехзначное число, равное квадрату суммы двух двузначных чисел, образованных двумя первыми и двумя последними цифрами числа.

152. Найти все четырехзначные числа, являющиеся полными квадратами и записываемые

а) четырьмя четными цифрами;

б) четырьмя нечетными цифрами.

153. а) Найти все трехзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

б) Найти все целые числа, равные сумме квадратов своих цифр.

154. Найти все целые числа, равные

а) квадрату суммы цифр числа;

б) сумме цифр куба числа.

155. Решить в целых числах уравнения:

а) $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^2$;

б) $1!+2!+3!+\ldots+x!=y^z$.

156. Сколькими способами можно разложить 2^n на сумму четырех квадратов целых положительных чисел?

157. а) Доказать, что равенство

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

для целых x, y, z верно только при $x=y=z=0$.

б) Найти целые числа x, y, z, v, такие, что

$$x^2+y^2+z^2+v^2=2xyzv.$$

158*. а) При каких целых значениях k возможно равенство

$$x^2+y^2+z^2=kxyz,$$

где x, y, z — целые положительные числа?

б) Найти в пределах первой тысячи всевозможные тройки целых чисел, сумма квадратов которых делится на их произведение.

159. Решить в целых числах уравнение

$$x^3-2y^3-4z^3=0.$$

160. Решить в целых числах уравнение

$$x^2+x=y^4+y^3+y^2+y.$$

161. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y}+(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}.$$

162. Решить в целых числах x, y, z уравнение

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+x}}}_{y \text{ корней}}=z.$$

163*. Доказать, что уравнение $x^2+x+1=py$ имеет решения в целых числах x, y для бесконечно многих простых значений коэффициента p.

164*. Найти четыре целых (положительных) числа таких, что квадрат каждого из них, сложенный с суммой трех остальных, тоже является полным квадратом.

165. Найти все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

166. Сумма обратных величин трех целых положительных чисел равна единице. Каковы эти числа?

167. а) Доказать, что уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, где $n>1$ — натуральное число, имеет при n простом ровно три решения в натуральных числах x, y (где решения $x=a$, $y=b$ и $x=b$, $y=a$ при $a\neq b$ считаются различными), а при составном n — более трех решений.

б) Найти все решения в целых числах уравнения задачи а) при $n=14$.

в)* Решить в целых числах x, y, z уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ (указать формулы, дающие все решения).

168. а) Найти все целые положительные, не равные между собой числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$x^y=y^x.$$

б) Найти все рациональные положительные, не равные между собой числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$x^y=y^x$$

(указать формулу, дающую все решения).

169. В шахматном турнире участвовали два ученика 7-го класса и некоторое число учеников 8-го класса. Каждый участник играл с каждым другим один раз. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а все восьмиклассники набрали одинаковое число очков (в турнире каждому участнику за выигранную партию засчитывается 1 очко, а за партию, окончившуюся вничью, 1/2 очка). Сколько восьмиклассников участвовало в турнире?

170. В шахматном турнире участвовали ученики 9-го и 10-го классов. Каждый участник играл с каждым другим один раз. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, а они набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько учеников 9-го класса участвовало в турнире и сколько они набрали очков?

171*. Целочисленным треугольником называется треугольник, длины сторон которого выражаются целыми числами. Найти все целочисленные треугольники, периметр каждого из которых равен его площади.

Задача 171 открывает большую тему в учении о решении уравнений в целых числах; мы здесь не затрагиваем ее глубже именно в связи с ее необъятностью (эта проблематика частично освещена в указанной в списке литературы книге [53]). Так, например, представляет интерес вопрос о целочисленных треугольниках с углами, соизмеримыми с «полным» углом в 360°,— можно доказать, что никаких *углов, соизмеримых с полным углом и отличных от* 60°, 90° *и* 120°, *целочисленный треугольник иметь не может,* причем нетрудно получить формулы, дающие длины сторон всех целочисленных треугольников с данным углом α, где $\alpha=60°$, или 90°, или 120° (целочисленные *прямоугольные* треугольники часто называют пифагоровыми треугольниками). Можно также искать целочисленные треугольники, величины двух углов которых имеют заданное отношение, скажем, один угол вдвое, втрое, впятеро или вшестеро больше другого,— например, несложно доказать, что *наименьший целочисленный треугольник, один угол которого вдвое больше другого, имеет стороны* 4, 5, 6, *в то время как наименьшие возможные длины сторон целочисленного треугольника, один угол которого вшестеро больше другого, таковы*: 30 421, 46 656, 72 930. Дальнейшие задачи возникают, если, скажем, накладывать определенные условия и на углы и на стороны целочисленного треугольника: так, нетрудно указать сколь угодно много пифагоровых треугольников, *у которых гипотенуза* или *один катет являются полными квадратами*, но не существует ни одного пифагорова треугольника, сразу *две стороны которого являлись бы полными квадратами*. При этом среди целочисленных прямоугольных треугольников (пифагоровых треугольников), *гипотенуза* каждого из которых *является полным квадратом*, существует бесконечно много таких, *сумма катетов которых* тоже *дает полный квадрат*, однако стороны всех таких треугольников весьма велики: как показал еще в 1643 г. П. Ферма[1]), *наименьший из пифагоровых треугольников, стороны которых удовлетворяют этим условиям, имеет стороны*:

$$a = 1\,061\,652\,293\,520$$
$$b = 4\,565\,486\,027\,761,$$
$$c = 4\,687\,298\,610\,289.$$

6. МАТРИЦЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ФУНКЦИИ

Матрицей *размера* $m \times n$ (или $(m \times n)$-матрицей) называется просто таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов; так, например, ниже выписаны (2×4)-матрица, (3×3)-матрица (квадратная матрица 3-го порядка), (3×1)-матрица и (1×5)-матрица [$(1\times n)$-матрицы и $(m\times1)$-матрицы называются также векторами — соответственно *векторами-строками* и *векторами-столбцами*]:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/3 & 1/7 \\ 2/7 & -4/3 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -11 & 0 & 7 \\ 12 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$[10 \quad -9 \quad 8 \quad -7 \quad 6].$$

Матрица, все элементы которой представляют собой *целые* числа, называется целочисленной — так, из выписанных выше матриц целочисленными являются вторая и четвертая (но не первая и не третья). Термин «матрица» пока не вошел в школьную программу по математике и не используется в нижеследующих задачах; однако большая важность этого понятия (см., например, [55] или [56]) заставляет нас упомянуть этот термин в названии настоящего цикла.

[1]) Пьер Ферма (1602—1665) — великий французский математик, один из основоположников теории чисел.

Числовой последовательностью называется упорядоченный набор чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

(чаще всего — бесконечный). Для задания последовательности надо указать правило образования ее членов $a_1, a_2, \ldots$; это правило может иметь вид *формулы*, позволяющей по произвольно заданному номеру n вычислить число a_n, или *алгоритма*, указывающего, как тем или иным путем найти a_n для любого конкретного значения n. Так, например, для фигурирующей в нескольких из задач этого цикла так называемой последовательности Фибоначчи[1])

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots \qquad (*)$$

(числа Фибоначчи; о них см. [57] или [58]) этот алгоритм задается правилами[2]):

$$a_1 = a_2 = 1; \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ при } n > 2. \qquad (**)$$

Впрочем, в математике приходится иногда иметь дело и с так называемыми «случайными последовательностями», образование членов которых не регулируется жесткими правилами (ср. с задачей 192).

Под функцией $y=f(x)$ понимается закон $f: x \mapsto y$ отображения множества X «допустимых» значений аргумента x в множество Y значений функции y; при этом каждому значению $x \in X$ должно соответствовать единственное значение $y=f(x)$. В «высшей арифметике» (в теории чисел) главный интерес представляют функции, связанные с целыми числами — такие, для которых область определения X или область Y значений функции состоит из целых чисел. Если область определения $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ есть множество всех натуральных чисел, то аргумент x функции чаще обозначается буквой n; при этом сама функция $n \mapsto y(n)$ или $n \mapsto a_n$ есть просто числовая последовательность $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Типичным (и часто встречающимся) примером функции, у которой область значений Y состоит из целых чисел, является так называемая целая часть $[x]$ числа x, т. е. *наибольшее не превосходящее x целое число* (так что, например, $[2{,}5]=2$, $[4]=4$, $[-3{,}2]=-4$); близкой к $[x]$ является и функция (x) — *ближайшее к x целое число* (если таких чисел два, то (x) принимается равным большему из них, так что $(2{,}5)=3$, $(4)=4$, $(-3{,}2)=-3$; ср. графики функций $[x]$ и (x) на рис. 3, *а*, *б*). В некоторых вопросах математики встречается также функция $\{x\} = x - [x]$ — *дробная часть* числа x (рис. 3, *в*; для сравнения на рис. 3, *г* изображен график функции $|x-(x)|$, указывающей *отклонение x от ближайшего целого числа*). Но наибольшую роль в теории чисел играют «чисто арифметические» функции, для которых и область определения X и область значений Y состоят из целых чисел;

---

[1]) Леонардо Пизанский по прозвищу Фибоначчи (1180—1240) — крупнейший математик европейского средневековья.

[2]) Существуют и другие описания чисел Фибоначчи (*) — так, например, из правил (**) можно вывести явную формулу

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

зависимости n-го числа Фибоначчи u_n от его номера n.

в качестве примеров таких функций можно назвать фигурирующие в некоторых из собранных ниже задач *число делителей* $\tau(n)=\tau_n$ (натурального) числа n, *сумму* его *делителей* $\sigma(n)=\sigma_n$ или (неявно участвующую в задаче 197) так называемую *функцию Мёбиуса*[1]) $\mu(n)$, равную 1 при $n=1$, равную 0 при n, кратном хоть одному квадрату натурального числа, и равную $(-1)^k$ при $n=p_1p_2\ldots p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа. [Заметим,

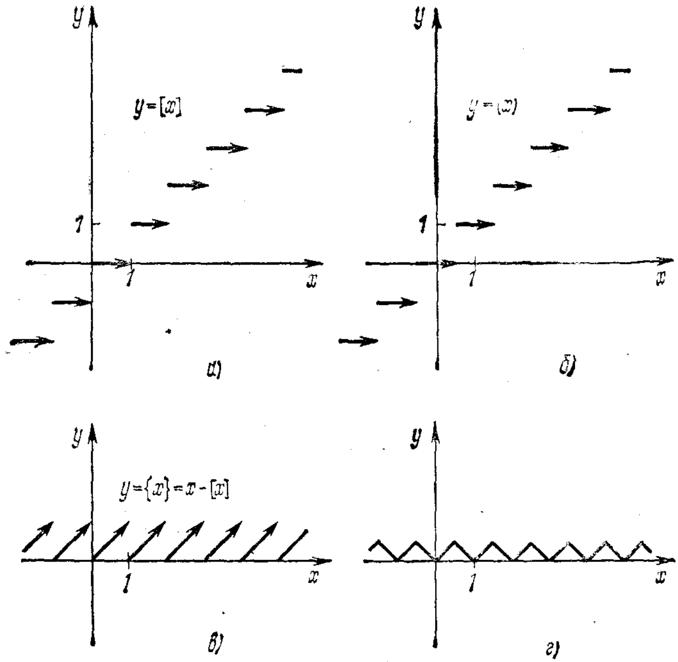


Рис. 3.

кстати, что все три функции $\tau(n)$, $\sigma(n)$ и $\mu(n)$ обладают так называемым «мультипликативным свойством»: если $\varphi(n)$ любая из этих функций, то $\varphi(n_1n_2)=\varphi(n_1)\cdot\varphi(n_2)$ для любых двух **взаимно простых** натуральных чисел n_1 и n_2.]

Собранные в этом цикле задачи являются довольно разнообразными по содержанию и по методам их решения; в частности, в некоторых задачах используется так называемая «целочисленная решетка» — множество всех точек плоскости с целочисленными коорди-

---

[1]) Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868) — выдающийся немецкий математик, специализировавшийся, в первую очередь, в области геометрии.

натами, плодотворность применения которой в теоретико-числовых исследованиях была установлена еще Г. Минковским[1]) и Г. Ф. Вороным[2]).

172. Числа 1, 2, 3, ..., n^2 расположены в виде квадратной таблицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \ldots & 3n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \ldots & n^2 \end{bmatrix}.$$

Из этой таблицы выбирается произвольное число, а строка и столбец, содержащие это число, вычеркиваются. Затем из оставшихся чисел снова выбирается одно число, и снова вычеркиваются строка и столбец, содержащие это число,— и так до тех пор, пока в таблице не останется единственное число, которое автоматически попадает в число отобранных. Чему равна сумма всех выбранных таким путем чисел?

173. Квадратная таблица из n^2 клеток заполнена целыми числами от 1 до n так, что в каждой строке и в каждом столбце таблицы встречаются все числа от 1 до n. Доказать, что если таблица симметрична относительно диагонали, ведущей из ее левого верхнего угла в правый нижний угол, и n нечетно, то на этой диагонали встретятся все числа от 1 до n. Будет ли верно это утверждение также и в том случае, когда n четно?

174. n^2 целых чисел от 1 до n^2 выписаны в квадратную таблицу размером $n \times n$: при этом число 1 стоит на любом месте в таблице; 2 принадлежит строке, порядковый номер которой равен номеру столбца, которому принадлежит 1; число 3 принадлежит строке, номер которой совпадает с номером столбца, содержащего число 2, и т. д. На сколько отличается сумма чисел строки, содержащей число 1, от суммы чисел столбца, содержащего число n^2?

---

[1]) Герман Минковский (1864—1906) — выдающийся немецкий ученый, внесший большой вклад в геометрию, в физику (теория относительности) и в теорию чисел; один из основоположников «геометрической» теории чисел.

[2]) Георгий Федосьевич Вороной (1868—1908) — выдающийся русский математик, один из основоположников «геометрической» теории чисел.

175. Дана прямоугольная таблица размером $m \times n$, во все клетки которой вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знаки у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца. Доказать, что, применяя эту операцию несколько раз, мы всегда можем прийти к таблице, у которой суммы чисел каждой строки и каждого столбца неотрицательны.

176. 800 чисел выписаны в виде прямоугольной таблицы, имеющей 100 строк и 80 столбцов; при этом произведение суммы всех чисел любого столбца на сумму всех чисел любой строки равно числу, стоящему в пересечении этого столбца и этой строки. Известно, что число, стоящее в правом верхнем углу таблицы, положительно. Чему равна сумма всех составляющих таблицу чисел?

177. 64 неотрицательных числа с общей суммой 1956 записаны на 64 клетках шахматной доски; при этом известно, что сумма чисел, выписанных на каждой из двух диагоналей доски, равна 112, и что числа, занимающие клетки, симметричные относительно одной или симметричные относительно другой диагонали, равны между собой. Доказать, что сумма чисел, выписанных в любом ряду (т. е. в любой строке или в любом столбце) доски, меньше 518.

178. В клетках шахматной доски размером $n \times n$ расставлены некоторые числа так, что при любой расстановке на доске n ладей, никакие две из которых не бьют друг друга, сумма закрытых этими ладьями чисел будет одной и той же. Обозначим число, стоящее на пересечении i-й строки доски и j-го ее столбца, через a_{ij}. Доказать, что существуют два таких набора чисел $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $a_{ij} = x_i + y_j$.

179. В клетках шахматной доски размером $n \times n$ расставлены числа; число, стоящее на пересечении p-й строки и q-го столбца, обозначено через x_{pq}. Доказать, что если для любых i, j и k (где $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$) имеет место тождество $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$, то существуют n таких чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$, что $x_{ij} = t_i - t_j$.

180. В некоторых клетках шахматной доски размером $n \times n$ стоят звездочки; известно, что если вычеркнуть любой набор строк доски (только, разумеется, не все!), то найдется столбец, в котором имеется ровно одна незачеркнутая звездочка. (В частности, если вовсе никакие строки не вычеркивать, то тоже найдется столбец, в котором имеется ровно одна звездочка.) Доказать, что если вычеркнуть любой набор столбцов (но не все), то найдется строка, в которой имеется ровно одна незачеркнутая звездочка.

*181**. Во всех, кроме одной, клетках шахматной доски размером $n \times n$ стоят знаки «+», а в одной клетке стоит знак «—»; при этом

а) $n=4$ и знак «—» стоит с краю доски, но не в ее углу;

б) $n=8$ и знак «—» стоит не в углу доски.

Разрешается одновременно менять все знаки в одном (произвольно взятом) столбце, или в одной (произвольной) строке, или в одном (произвольно выбранном) «наклонном» ряду, параллельном диагонали доски. (В частности, можно изменить знак в любом угловом поле, которое образует самостоятельный «наклонный ряд».) Доказать, что любым числом «допустимых» изменений знаков нельзя избавиться от знака «—», т. е. прийти к доске, во всех клетках которой стоит знак «+».

182. а) Во всех клетках шахматной доски размером 8×8 стоят знаки «+» или «—». Разрешается, выделив на доске любой квадрат размером 3×3 или 4×4, поменять знаки во всех клетках этого квадрата. Мы хотим при помощи подобных операций добиться того, чтобы все стоящие на доске знаки стали знаками «+»; всегда ли это возможно?

б) Во всех клетках (обыкновенной) шахматной доски стоят натуральные числа; разрешается увеличивать на единицу все числа, стоящие в клетках любого «малого» квадрата из четырех соседних клеток доски, или все числа, стоящие в (любых) двух соседних строках доски, или, наконец, все числа, стоящие в двух (любых) соседних столбцах доски. Всегда ли подобными операциями можно добиться того, чтобы все числа доски делились на 10?

183. а) Имеются три кучки камней; играющему с ними мальчику разрешается брать по одному камню одновременно из всех трех кучек или удваивать число камней в одной (произвольной) кучке. Сможет ли мальчик за несколько подобных «ходов» выбрать из кучек все камни?

б) Во всех клетках прямоугольной таблицы, имеющей 8 строк и 5 столбцов, расставлены натуральные числа. Разрешается удвоить число одного столбца (любогс) или вычесть единицу из всех чисел одной строки. Доказать, что несколькими «допустимыми» преобразованиями таблицы чисел можно добиться того, что во всех ее клетках окажутся одни нули.

184. Таблица из двух столбцов целых положительных чисел и какого-то числа строк выписывается по следующему правилу. В верхней строке мы пишем произвольные числа a и b; далее под a выписываем (целое положительное) число a_1, равное $\frac{a}{2}$, если a четно, и равное $\frac{a-1}{2}$, если a нечетно, а под b выписываем число $b_1 = 2b$. Далее мы поступаем с числами a_1 и b_1 точно так же, как раньше поступили с числами a и b: под a_1 мы пишем число a_2, равное $\frac{a_1}{2}$, если a_1 четно, и равное $\frac{a_1-1}{2}$, если a_1 нечетно; под b_1 же мы пишем число $b_2=2b_1$. Под a_2 и b_2 мы располагаем числа a_3 и b_3, образованные из a_2 и b_2 точно так же, как числа a_2 и b_2 образуются из чисел a_1 и b_1, и т. д.; этот процесс мы кончаем в тот момент, когда доходим до некоторого числа $a_n=1$ (которому отвечает число $b_n=2b_{n-1}$). Доказать, что сумма всех стоящих в правом столбце чисел b_i, которым отвечают нечетные числа a_i (здесь $i=0, 1, \ldots, n$; под a_0 и b_0 мы понимаем числа a и b), равна произведению ab.

---

185. Доказать, что каждое натуральное число либо является числом Фибоначчи (членом последовательности Фибоначчи (*), см. стр. 37), либо может быть представлено в виде суммы нескольких (различных) чисел Фибоначчи.

186. Доказать, что сумма никаких восьми последовательных чисел Фибоначчи (см. задачу 185) не является числом Фибоначчи.

187. Доказать, что если натуральное число n делится на 5, то и n-е число Фибоначчи u_n (см. задачу 185) также делится на 5.

188. Найдется ли среди 100 000 001 первых чисел Фибоначчи (см. задачу 185) число, оканчивающееся четырьмя нулями?

189. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ образована по следующему правилу: $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$ при $n>1$. Доказать, что $14<a_{100}<18$.

190. Последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ такова, что

$a_1=0,\ |a_2|=|a_1+1|,\ |a_3|=|a_2+1|, \ldots, |a_n|=|a_{n-1}+1|.$

Доказать, что среднее арифметическое $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ всех чисел не меньше $-\frac{1}{2}$.

191*. Последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ составляется по следующему правилу:

$$a_0,\ a_1,\ a_2=|a_0-a_1|,\ a_3=|a_1-a_2|, \ldots$$

(и вообще $a_n=|a_{n-2}-a_{n-1}|$ при всех $n \geqslant 2$); продолжается последовательность до первого нуля. Известно, что каждое входящее в последовательность число не превосходит 1967. Какое наибольшее количество чисел может содержать такая последовательность?

192. Подряд выписывается бесконечная последовательность цифр $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4, \ldots$, где под $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ понимается любая из цифр, кроме девятки. Доказать, что среди чисел α_1, $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}, \ldots$ (где под $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ понимается число $\alpha_1 \cdot 10+\alpha_2$, и т. д.) имеется бесконечно много составных.

193. В последовательности 1975... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности

а) подряд цифры 1234; б) вторично четверка цифр 1975?

194. Выписываются подряд все числа, кратные девяти:

$$9,\ 18,\ 27,\ 36,\ 45,\ 54,\ 63,\ 72,\ 81,\ 90,\ 99,\ 108,\ 117, \ldots \quad (*)$$

и для каждого из этих чисел находится сумма его цифр:

$$9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 9,\ 18,\ 9,\ 9, \ldots \quad (**)$$

На каком месте последовательности (**) впервые появится число 81 и каково будет следующее за ним число? Что раньше встретится в этой последовательности: 4 раза подряд число 27 или 3 раза подряд число 36? Что еще можно сказать о чередовании чисел в последовательности (**)?

---

195. Рассмотрим следующую последовательность наборов (натуральных) чисел. Первый набор I_0 образуют две единицы 1,1. Затем между этими числами вставим их сумму $1+1=2$; мы получим набор I_1: 1, 2, 1. Потом между каждыми двумя из чисел набора I_1 вставим сумму этих чисел; мы получим набор I_2: 1, 3, 2, 3, 1; затем, поступая таким же образом и с набором I_2, мы придем к набору I_3: 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1, и т. д. Сколько раз в миллионном наборе $I_{1\,000\,000}$ встретится число 1973?

196. Имеется (конечная) последовательность нулей и единиц такая, что различны все пятерки последовательных цифр, которые можно из нее выделить (причем эти пятерки могут, разумеется, и перекрываться подобно пятеркам 01011 и 01101, расположенным так: $\ldots 0\overline{1011}\underline{01}\ldots$). Доказать, что если последовательность нельзя продолжить с сохранением сформулированного ее свойства, то первые четыре цифры последовательности совпадают с ее последними четырьмя цифрами.

197. В одну строку выписаны все делители числа $N=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37$. Под числом 1 и теми числами, которые представляют собой произведение четного числа простых множителей, подписано число $+1$, а под числами, представляющими собой произведение нечетного числа простых множителей, подписано число -1. Доказать, что сумма всех выписанных в нижней строке чисел равна нулю.

198. Пусть p и q — два взаимно простых натуральных числа. Натуральное число n условимся называть «хорошим», если его можно представить в виде $px+qy$, где x и y — целые неотрицательные числа, и «плохим» в противном случае.

а) Доказать, что существует такое число A, что если сумма двух целых чисел равна A, то обязательно одно из них «хорошее», а второе — «плохое».

б) Если числа p и q заданы, то как найти число всевозможных «плохих» натуральных чисел?

199. Доказать, что если число n неотрицательно, то его можно (и притом единственным образом!) представить в виде $n=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где x и y — целые неотрицательные числа.

200. Пусть t — произвольное положительное число; число несократимых дробей $\frac{p}{q}$, числитель p и знаменатель q которых не превосходят t, обозначим через $d(t)$.

Чему равна сумма

$$S = d\left(\frac{100}{1}\right) + d\left(\frac{100}{2}\right) + d\left(\frac{100}{3}\right) + \ldots + d\left(\frac{100}{99}\right) + d\left(\frac{100}{100}\right)?$$

---

201. Доказать следующие свойства целой части числа (см. стр. 37):

1) $[x+y] \geqslant [x]+[y]$;

2) $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$, n — целое число;

3) $\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$;

4) $[x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \left[x+\frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] = [nx]$.

202. Упростить сумму

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots,$$

где n — целое положительное число.

203*. Доказать, что если p и q — взаимно простые целые числа, то

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \left[\frac{3p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right] =$$
$$= \left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

204. Доказать, что

а) $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n =$
$$= \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

где τ_n — число делителей натурального числа n;

б) $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n =$
$$= \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + 3\left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right],$$

где σ_n — сумма делителей натурального числа n.

205. Существует ли такое целое положительное число n, что «дробная часть» числа $(2+\sqrt{2})^n$, т. е. разность

$$\{(2+\sqrt{2})^n\} = (2+\sqrt{2})^n - [(2+\sqrt{2})^n],$$

(см. стр. 37) больше 0,999999?

206*. а) Доказать, что при любом целом положительном n число $[(2+\sqrt{3})^n]$ нечетно.

б) Найти наивысшую степень 2, на которую делится число $[(1+\sqrt{3})^n]$.

207. Доказать, что если p — простое число, большее 2, то разность

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$$

делится на p.

208*. Доказать, что если p — простое число, то разность

$$C_n^p - \left[\frac{n}{p}\right]$$

делится на p (C_n^p — число сочетаний из n элементов по p; n — произвольное целое положительное число, не меньшее p).

Так, например, $C_{11}^5 = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 462$; $C_{11}^5 - \left[\frac{11}{5}\right] = 462 - 2$ делится на 5.

209. Указать все такие числа α, что числа $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, ..., $[N\alpha]$, где N — фиксированное натуральное число, все различны и числа $\left[\frac{1}{\alpha}\right]$, $\left[\frac{2}{\alpha}\right]$, $\left[\frac{3}{\alpha}\right]$, ..., $\left[\frac{N}{\alpha}\right]$ тоже все различны.

В задаче 209 требуется найти такое число α, чтобы были различны числа $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, ..., $[N\alpha]$ и $[\beta]$, $[2\beta]$, $[3\beta]$, ..., $[N\beta]$, где $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Более содержательной является задача об определении таких α и β (где уже не обязательно $\beta = \frac{1}{\alpha}$), чтобы бесконечные последовательности $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, ...; $[\beta]$, $[2\beta]$, $[3\beta]$, ... состояли из попарно различных чисел; так, например, можно доказать, что *выписанные последовательности содержат все без исключения натуральные числа, причем каждое число — ровно по одному разу, в том и только в том случае, когда α иррационально и* $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

210*. Доказать, что в равенстве

$$N=\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\frac{N}{8}+\ldots+\frac{N}{2^n}+\ldots$$

(N — произвольное целое положительное число) можно заменить все дроби ближайшими к ним целыми числами:

$$N=\left(\frac{N}{2}\right)+\left(\frac{N}{4}\right)+\left(\frac{N}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{N}{2^n}\right)+\ldots$$

(относительно обозначений см. стр. 37).

7. ОЦЕНКИ СУММ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

211. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

212. а) Доказать, что

$$\frac{1}{15}<\frac{1}{10\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

б)* Доказать, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{12}.$$

Примечание. Результат задачи б), очевидно, представляет собой усиление результата задачи а).

213. Какое из чисел больше: 31^{11} или 17^{14}?

214. Какое из чисел больше:

а) $A=2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$ или $B=3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$, где в записи числа A фигурируют 1001 двойка, а в записи числа B — 1000 троек;

б) B или $C=4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}}$, где в записи числа C фигурируют 999 четверок? (В этой задаче под $a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a_{n-1}^{a_n}}}}}}}$ всюду понимается $a_1^{\left(a_2^{\left(a_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\left(a_{n-1}^{a_n}\right)}}}}\right)}\right)}$.)

215. Доказать, что в десятичной системе счисления записи чисел 1974^n и 1974^n+2^n при любом натуральном n содержат одинаковое количество цифр.

216. Среди всех чисел вида 36^m-5^n, где m и n — натуральные числа, найти наименьшее по абсолютной величине.

217. Доказать, что

$$\frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}$$

(C_{100}^{50} — число сочетаний из 100 элементов по 50).

218. Что больше $99^n + 100^n$ или 101^n (n — целое положительное число)?

219. Что больше 100^{300} или $300!$?

220. Доказать, что для любого целого положительного n

$$2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

221. Что больше $(1{,}000001)^{1\,000\,000}$ или 2?

222. Что больше 1000^{1000} или 1001^{999}?

223. Доказать, что для любого целого $n > 6$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

224*. Доказать, что при $m > n$ (m, n — целые положительные числа)

а) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Так, например, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, а $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27} > 2\frac{1}{4}$.

б) $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n \geqslant 2)$.

Так, например, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$, а $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81} < 3\frac{3}{8}$.

Из задачи а) следует, что в последовательности чисел $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3$, ..., $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ... каждое последующее число б о л ь ш е предыдущего. А так как, с другой стороны, ни одно из чисел не превосходит 3 (см. задачу 220), то при $n \to \infty$ величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится к некоторому определенному пределу (заключенному, очевидно, между 2 и 3). Этот предел обозначается буквой e; приближенно он равен 2,718281828459045...

Аналогично, задача б) утверждает, что в последовательности чисел $\left(1+\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(1+\frac{1}{4}\right)^5, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ldots$ каждое последующее **меньше** предыдущего. А так как все эти числа больше 1, то величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ при n, неограниченно возрастающем, стремится к какому-то пределу. При этом числа второй последовательности все более приближаются к числам первой последовательности (отношение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{n}$ все меньше отличается от 1); следовательно, этот предел должен равняться тому же самому числу e. Число e играет в математике очень большую роль и встречается в самых разнообразных вопросах (см., например, задачу 225 или примечания к задачам 231 и 234).

225. Доказать, что при любом целом n, большем шести, справедливы неравенства

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ есть предел выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$.

Этот результат является усилением результата задачи 223. Из него, в частности, следует, что **для любых двух чисел** a_1 и a_2, **таких, что** $a_1 < e < a_2$ (т. е., например, для $a_1=2{,}7$, $a_2=2{,}8$ или $a_1=2{,}71$, $a_2=2{,}72$, или $a_1=2{,}718$, $a_2=2{,}719$, и т. д.) **при всех** n, **бо́льших некоторого определенного числа** (различного для различных a_i) **имеют место неравенства**

$$\left(\frac{n}{a_1}\right)^n > n! > \left(\frac{n}{a_2}\right)^n.$$

Таким образом, число e является той «границей», которая отделяет числа a такие, что $\left(\frac{n}{a}\right)^n$ растет «быстрее» $n!$, от чисел a таких, что $\left(\frac{n}{a}\right)^n$ растет «медленнее» $n!$ (существование такой границы следует из задачи 223).

Действительно, $\left(\frac{n}{a_2}\right)^n < n!$ при любом n, большем шести (ибо $a_2 > e$, а при $n>6$, в силу задачи 225, $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$). Далее, из результатов задач 220 и 224 вытекает, что при $n \geqslant 3$ выполняются неравенства

$$n > e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}, \quad n^{n+1} > (n+1)^n, \quad \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1};$$

следовательно, при $n \geqslant 3$ величина $\sqrt[n]{n}$ убывает, если n растет. Легко видеть, что при n достаточно большом, $\sqrt[n]{n}$ становится сколь угодно близким к единице: это следует, например, из того, что $\lg \sqrt[10^k]{10^k} = \frac{k}{10^k}$ при достаточно большом k будет сколь угодно малым. Выберем теперь N так, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt[N]{N} < \frac{e}{a_1}$; тогда при $n > N$ тем более будет $\sqrt[n]{n} < \frac{e}{a_1}$, откуда, в силу результата задачи 225, следует, что $n! < \left(\frac{n}{\frac{e}{\sqrt[n]{n}}}\right)^n < \left(\frac{n}{a_1}\right)^n$.

Неравенство задачи 225 допускает значительное уточнение. А именно, можно показать, что при больших n число $n!$ приближенно равно $C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, где C есть постоянное число, равное $\sqrt{2\pi}$:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(точнее, можно доказать, что *при n, стремящемся к бесконечности, отношение*

$$n!:\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]$$

стремится к единице — см. задачу 161 книги [6]).

---

226. Доказать, что

$$\frac{1}{k+1}n^{k+1} < 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}\frac{1}{k+1}n^{k+1}$$

(n и k — произвольные целые числа).

Примечание. Из результата задачи 226 следует, в частности, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

227. Доказать, что при всяком целом $n > 1$:

а) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$;

б) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$.

228*. а) Определить целую часть числа

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

б) Определить сумму

$$\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\frac{1}{\sqrt{10\,002}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$$

с точностью до $\frac{1}{50}$.

229*. Найти целую часть числа

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}.$$

230. а) Определить сумму

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}$$

с точностью до 0,006.

б) Определить сумму

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{1000!}$$

с точностью до 0,000000015.

231. Доказать, что сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

превзойдет любое наперед заданное число N, если только n достаточно велико.

Примечание. Результат настоящей задачи может быть значительно уточнен. А именно, можно показать, что рассматриваемая сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$ при больших n мало отличается от $\log n$ (логарифм берется при основании $e=2{,}718\ldots$). Точнее говоря, можно доказать, что при любом n разность

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$$

не превосходит единицы (см., например, [6]).

232. Доказать, что если в сумме

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

вычеркнуть все члены, у которых в знаменателе встречается цифра 9, то сумма оставшихся членов при любом n будет меньше 80.

233. а) Доказать, что при любом n

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

б) Доказать, что при любом n

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1\frac{3}{4}.$$

Очевидно, что неравенство задачи б) является усилением неравенства задачи а). Еще более сильный результат содержится в задаче 332. Именно из этой задачи вытекает, что при любом n сумма

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

меньше чем $\frac{\pi^2}{6}=1{,}6449340668\ldots$ (но для любого числа N, меньшего чем $\frac{\pi^2}{6}$, например для $N=1{,}64$ или $N=1{,}644934$, можно найти такое n, что сумма $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ будет больше N).

234*. Рассмотрим сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{p},$$

где в знаменателях дробей стоят все простые числа от 2 до некоторого простого числа p. Доказать, что эта сумма может быть сделана больше любого наперед заданного числа N (для этого следует только выбрать число p достаточно большим).

Примечание. Результат настоящей задачи может быть значительно уточнен. А именно, можно показать, что при больших p сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}$ сравнительно мало отличается от $\log\log p$ (логарифм берется при основании $e=2{,}718\ldots$). Точнее говоря, можно доказать (см., например, [6] или [69]), что *при любом p разность*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{p}-\log\log p$$

не превосходит числа 15.

Отметим еще, что сравнение результата настоящей задачи с результатами задач 232 и 233 позволяет утверждать, что простых чисел имеется в ряду всех целых чисел «довольно много» (в частности, из этой задачи следует, что их бесконечно много). Можно, например, сказать, что простые числа встречаются в ряду натуральных чисел «чаще», чем квадраты или чем числа, в записи которых нет цифры 9, поскольку сумма обратных величин всех квадратов или сумма обратных величин всех целых чисел, в записи которых не фигурирует девятка, ограничены, а сумма обратных величин всех простых чисел может быть сделана сколь угодно большой.

8. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ИЗ АЛГЕБРЫ

В то время как бóльшая часть содержания настоящей книги относится к арифметике (и к «высшей арифметике» — к теории чисел), циклы задач 8—10 посвящены алгебре. При этом при решении отдельных задач этих циклов могут оказаться полезными, например, представление о так называемой основной теореме алгебры, утверждающей, что *каждое алгебраическое уравнение степени n* (с вещественными или с произвольными комплексными коэффициентами) *имеет ровно n* (вещественных или комплексных) *корней* (которые, однако, не обязаны быть все различны); формулы Виета[1]), указывающие связь корней уравнения с его коэффициентами; знание правил деления «углом» произвольных многочленов; тригонометрическая форма или геометрическое представление комплексных чисел (см. в конце книги литературу к циклам 8—10).

235. Доказать, что

$$(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$$

делится на

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$

236. Разложить на множители выражение

$$a^{10}+a^5+1.$$

237. Доказать, что многочлен

$$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$$

делится на $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1$.

---

238. а) Разложить на множители выражение

$$a^3+b^3+c^3-3abc.$$

б) Воспользовавшись результатом задачи а), найти общую формулу для решения кубического уравнения

$$x^3+px+q=0.$$

[1]) Франсуа Виета (1540—1603) — видный французский математик, один из создателей современной алгебраической символики (а тем самым — и алгебры).

Примечание. Отметим, что результат настоящей задачи позволяет решить всякое уравнение третьей степени. Действительно, пусть

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0$$

есть какое-то кубическое уравнение (коэффициент при x^3 всегда можно считать равным 1, так как в противном случае мы можем разделить все уравнение на этот коэффициент). Сделаем в этом уравнении подстановку: $x=y+c$. Тогда получим:

$$y^3+3cy^2+3c^2y+c^3+A(y^2+2cy+c^2)+B(y+c)+C=0,$$

или

$$y^3+(3c+A)y^2+(3c^2+2Ac+B)y+(c^3+Ac^2+Bc+C)=0.$$

Отсюда видно, что положив $c=-\frac{A}{3}$ (т. е. $x=y-\frac{A}{3}$), мы придем к уравнению

$$y^3+\left(\frac{3A^2}{9}-\frac{2A^2}{3}+B\right)y+\left(-\frac{A^3}{27}+\frac{A^3}{9}-\frac{AB}{3}+C\right)=0,$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение данной задачи:

$$y^3+py+q=0, \quad \text{где} \quad p=-\frac{A^2}{3}+B, \ q=\frac{2A^3}{27}-\frac{AB}{3}+C.$$

239. Решить уравнение

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

240*. Найти действительные корни уравнения

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}} \quad \left(0<a<\frac{1}{4}\right).$$

241. Найти действительные корни уравнения

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n \text{ радикалов}}=x$$

(все квадратные корни считаются положительными).

242. Решить уравнение

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots_{\ddots\, 1+\frac{1}{x}}}}}=x$$

(в выражении слева знак дроби повторяется n раз).

243. Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

(все квадратные корни считаются положительными).

244. Решить уравнение

$$|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2.$$

245. Решить уравнение

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}=0.$$

246. Решить уравнение $x^3-[x]=3$, где, как обычно, $[x]$ — целая часть числа x (см. стр. 37).

247. Система двух уравнений второй степени

$$\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ (x-a)^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений этой суммы уменьшается до трех или до двух?

248. а) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax+y=a^2, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

При каких значениях a эта система вовсе не имеет решений и при каких имеет бесконечно много решений?

б) Тот же вопрос относительно системы

$$\begin{cases} ax+y=a^3, \\ x+ay=1. \end{cases}$$

в) Тот же вопрос относительно системы

$$\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=a, \\ x+y+az=a^2. \end{cases}$$

249. Найти условия, которым должны удовлетворять данные числа α_1, α_2, α_3, α_4 для того, чтобы система 6 уравнений с 4 неизвестными

$$\begin{cases} x_1+x_2=\alpha_1\alpha_2, \\ x_1+x_3=\alpha_1\alpha_3, \\ x_1+x_4=\alpha_1\alpha_4, \\ x_2+x_3=\alpha_2\alpha_3, \\ x_2+x_4=\alpha_2\alpha_4, \\ x_3+x_4=\alpha_3\alpha_4 \end{cases}$$

имела решения. Найти значения неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4.

250. Сколько действительных решений имеет система

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1? \end{cases}$$

251. Найти все вещественные решения системы

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$$

252. Найти всевозможные решения x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 системы уравнений:

$$x_1+x_3=xx_2,\ x_2+x_4=xx_3,\ x_3+x_5=xx_4,$$

$$x_4+x_1=xx_5,\ x_5+x_2=xx_1.$$

253. Найти всевозможные системы таких четырех вещественных чисел, что сумма каждого из них с произведением остальных равна 2.

254. Решить систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{aligned} |a-b|y+|a-c|z+|a-d|t&=1, \\ |b-a|x \qquad\qquad +|b-c|z+|b-d|t&=1, \\ |c-a|x+|c-b|y \qquad\qquad +|c-d|t&=1, \\ |d-a|x+|d-b|y+|d-c|z \qquad\qquad &=1; \end{aligned}$$

здесь a, b, c, d — какие-то четыре попарно различных вещественных числа.

255. Дана система n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$ax_1^2+bx_1+c=x_2, \quad ax_2^2+bx_2+c=x_3, \ldots$$

$$\ldots, ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n, \quad ax_n^2+bx_n+c=x_1$$

(здесь $a\neq 0$). Доказать, что эта система не имеет ни одного решения, если $(b-1)^2-4ac<0$, имеет единственное решение при $(b-1)^2-4ac=0$ и более одного решения при $(b-1)^2-4ac>0$.

256. Пусть все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (где $n\geqslant 2$) положительны; сколько вещественных решений имеет система уравнений:

$$x_1x_2=a_1,\ x_2x_3=a_2,\ \ldots,\ x_{n-1}x_n=a_{n-1},\ x_nx_1=a_n?$$

257. а) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

б) Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \lg x?$$

---

258. Известно, что

$$\begin{gathered} a_1 - 4a_2 + 3a_3 \geqslant 0, \\ a_2 - 4a_3 + 3a_4 \geqslant 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{98} - 4a_{99} + 3a_{100} \geqslant 0, \\ a_{99} - 4a_{100} + 3a_1 \geqslant 0, \\ a_{100} - 4a_1 + 3a_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Пусть $a_1 = 1$; чему равны тогда числа $a_2, a_3, \ldots, a_{100}$?

259. Пусть a, b, c, d — какие угодно четыре положительных числа. Доказать, что три неравенства

$$\begin{gathered} a + b < c + d, \\ (a+b)(c+d) < ab+cd, \\ (a+b)cd < (c+d)ab \end{gathered}$$

не могут иметь место одновременно.

260. Доказать, что дробь

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}},$$

где в числителе стоят n радикалов, а в знаменателе — $(n-1)$ радикалов, при любом $n \geqslant 1$ будет больше $\frac{1}{4}$.

261. Произведение трех положительных чисел равно 1; их сумма больше суммы обратных величин этих чисел. Доказать, что из трех рассматриваемых чисел одно больше единицы, а два остальных — меньше единицы.

262. Сумма 1959 положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1959}$ равна 1; доказать, что сумма всевозможных произведений по 1000 разных сомножителей из числа наших чисел меньше 1. [В число рассматриваемых произведений включаются все, отличающиеся друг от друга хоть одним сомножителем, но не произведения, отличающиеся только *порядком* сомножителей — такие произведения считаются одинаковыми и засчитывается из них лишь одно.]

263. Пусть $N \geqslant 2$ — некоторое натуральное число. Чему равна сумма всех дробей вида $\frac{1}{mn}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа такие, что $1 \leqslant m < n \leqslant N$ и $m + n > N$?

264. 1973 положительных числа a_1, a_2, a_3, ..., a_{1973} таковы, что

$$a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = a_3^{a_4} = \ldots = (a_{1972})^{a_{1973}} = (a_{1973})^{a_1}.$$

Доказать, что $a_1 = a_{1973}$.

265*. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$, то $x_1^n + x_2^n$ при любом целом n является целым числом, не делящимся на 5.

266. Может ли выражение

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{999}+a_{1000})^2=$$
$$=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{999}^2+a_{1000}^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{999}a_{100},$$

где некоторые из чисел a_1, a_2, ..., a_{999}, a_{1000} положительны, а другие отрицательны, содержать одинаковое число положительных и отрицательных попарных произведений?

Рассмотрите аналогичную задачу для выражения

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{9999}+a_{10000})^2.$$

267. Доказать, что любую целую степень числа $\sqrt{2}-1$ можно представить в виде $\sqrt{N}-\sqrt{N-1}$, где N — целое число (так, например, $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$, а $(\sqrt{2}-1)^3 = 5\sqrt{2}-7 = \sqrt{50}-\sqrt{49}$).

268. Доказать, что выражение $99999+111111\sqrt{3}$ нельзя представить в виде $(A+B\sqrt{3})^2$, где A и B — целые числа.

269. Доказать, что $\sqrt[3]{2}$ нельзя представить в виде $p+q\sqrt{r}$, где p, q, r — рациональные числа.

270. Известно, что A имеет вид $A = \left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m$ где m, $n \geqslant 2$ — натуральные числа. Доказать, что A можно также представить в виде $A = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$, где k — натуральное число.

271. Существуют ли такие рациональные числа x, y, z и t, что при некотором натуральном n

$$(x+y\sqrt{2})^{2n}+(z+t\sqrt{2})^{2n}=5+4\sqrt{2}?$$

272. Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь двумя ковшами емкости $\sqrt{2}$ литров и $2-\sqrt{2}$ литров, перелить из одной из них в другую ровно 1 литр воды?

273. При каких рациональных x выражение $3x^2-5x+9$ будет представлять собой квадрат рационального числа?

---

274. Дискриминант $\Delta=p^2-4q$ квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ имеет величину порядка 10; доказать, что если при округлении свободного члена q уравнения мы изменили его на величину порядка 0,01, то значения корней уравнения изменятся на величину порядка 0,001.

275. *Округлением* числа мы назовем целое число, отличающееся от исходного менее чем на 1. Доказать, что любые n положительных чисел можно округлить так, что сумма любого количества этих чисел будет отличаться от суммы их округлений не более чем на $\frac{n+1}{4}$.

276. В десятичной записи положительного числа a отброшены все десятичные знаки, начиная с четвертого знака после запятой, т. е. взято округление с недостатком a_0 числа a с точностью до 0,001. Полученное число a_0 делится на само число a и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Указать все числа, которые при этом могут получиться.

277*. Пусть α — произвольное иррациональное число. Очевидно, что каково бы ни было целое число n, та из дробей ряда $\frac{0}{n}=0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$, которая ближе всего к α, отличается от α не больше чем на половину $\frac{1}{n}$. Доказать, что существуют такие n, для которых дробь со знаменателем n, наиболее близкая к α, отличается от α меньше чем на $0{,}001\cdot\frac{1}{n}$.

278. а) Доказать, что если α записывается десятичной дробью 0,999..., начинающейся со 100 девяток, то и

$\sqrt{\alpha}=0,999\ldots$ записывается десятичной дробью, начинающейся со 100 девяток.

б)* Вычислить значение корня $\sqrt{0,\underbrace{1111\ldots111}_{100 \text{ единиц}}}$ с точностью до 1) 100; 2) 101; 3) 200; 4) 300 знаков после запятой.

279. а) Что больше

$$\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2+2,00000000004} \text{ или } \frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2+2,00000000002}?$$

б) Пусть $a>b>0$. Что больше

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}{1+a+a^2+\ldots+a^n} \text{ или } \frac{1+b+b^2+\ldots+b^{n-1}}{1+b+b^2+\ldots+b^n}?$$

280. Даны n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Найти число x, такое, чтобы сумма

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

имела наименьшее возможное значение.

281. а) Даны четыре действительных попарно неравных числа $a_1<a_2<a_3<a_4$. Расположить эти числа в таком порядке $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$ (i_1, i_2, i_3, i_4 — те же номера 1, 2, 3, 4, только как-то переставленные), чтобы сумма

$$\Phi=(a_{i_1}-a_{i_2})^2+(a_{i_2}-a_{i_3})^2+(a_{i_3}-a_{i_4})^2+(a_{i_4}-a_{i_1})^2$$

имела наименьшее возможное значение.

б)* Даны n действительных попарно неравных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Расположить эти числа в таком порядке $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}$, чтобы сумма

$$\Phi=(a_{i_1}-a_{i_2})^2+(a_{i_2}-a_{i_3})^2+\ldots+(a_{i_{n-1}}-a_{i_n})^2+(a_{i_n}-a_{i_1})^2$$

имела наименьшее возможное значение.

282. а) Доказать, что каковы бы ни были действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$, всегда

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}.$$

При каких условиях имеет место равенство?

б) Пирамида называется **прямой**, если в основание пирамиды можно вписать окружность и центр этой окружности совпадает с основанием высоты пирамиды. Доказать, что прямая пирамида имеет меньшую боковую поверхность, чем всякая другая пирамида той же высоты, основание которой имеет ту же площадь и тот же периметр.

Примечание. Неравенство задачи а) составляет частный случай так называемого неравенства Минковского, согласно которому

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+\ldots+l_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+\ldots+l_2^2}+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2+\ldots+l_n^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2+\ldots+(l_1+\ldots+l_n)^2}.$$

*283**. Доказать, что при любых значениях действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеет место неравенство

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{a_{n-1}^2+(1-a_n^2)}+\sqrt{a_n^2+(1-a_1)^2} \geqslant \frac{n\sqrt{2}}{2}.$$

При каких значениях этих чисел левая часть неравенства точно равна правой части?

284. Доказать, что если числа x_1 и x_2 по абсолютной величине не превосходят единицу, то

$$\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2} \leqslant 2\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}.$$

При каких значениях x_1 и x_2 левая часть этого неравенства точно равна правой части?

---

285. Что больше $\cos\sin x$ или $\sin\cos x$?

286. Доказать, не пользуясь логарифмическими таблицами, что

а) $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2$; б) $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_\pi 2}>2$.

287. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha<\beta$, то

а) $\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta$, б) $\operatorname{tg}\alpha-\alpha<\operatorname{tg}\beta-\beta$.

288*. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha<\beta$, то $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}<\frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}$.

289. Найти соотношение между $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$.

290. Доказать, что каковы бы ни были коэффициенты $a_{31}, a_{30}, \ldots, a_2, a_1$, сумма

$$\cos 32x+a_{31}\cos 31x+a_{30}\cos 30x+\ \ldots\ +a_2\cos 2x+a_1\cos x$$

не может принимать при всех x только положительные значения.

291. Пусть некоторые из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны $+1$, а остальные равны -1. Доказать, что

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)45^\circ=$$
$$=a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}}.$$

Так, например, при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ получаем:

$$2\sin\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)45^\circ=2\cos\frac{45^\circ}{2^{n-1}}=$$
$$=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ корней}}.$$

9. АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

292. Найти сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1-3x+3x^2)^{743}(1+3x-3x^2)^{744}.$$

293. В каком из выражений

$$(1+x^2-x^3)^{1000} \text{ и } (1-x^2+x^3)^{1000}$$

будет стоять после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

294. Доказать, что в произведении

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})\times$$
$$\times(1+x+x^2+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется членов, содержащих x в нечетной степени.

295. Найти коэффициент при x^{50} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражениях:

а) $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\ldots+x^{1000}$;

б) $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1000}$.

*296**. Определить коэффициент при x^2 после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$\underbrace{(\ldots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\text{ раз}}.$$

297. Найти остаток от деления многочлена

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$$

а) на $x-1$; б) на x^2-1.

298. Неизвестный многочлен дает при делении на $x-1$ остаток 2, а при делении на $x-2$ — остаток 1. Какой остаток дает этот многочлен при делении на $(x-1)(x-2)$?

299. При делении многочлена $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ получаются частное и остаток. Найти в частном коэффициент при x^{14}.

300. Найти все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество

$$xP(x-1)\equiv(x-26)P(x).$$

301. Дан многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с

а) натуральными; б) целыми

коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$; сумму цифр числа $P(n)$ обозначим через $s(n)$ (ясно, что величина $s(n)$ имеет смысл лишь в том случае, если число $P(n)$ — натуральное; в противном случае $s(n)$ просто не существует).

Доказать, что если последовательность $s(1)$, $s(2)$, $s(3), \ldots$ содержит бесконечно много чисел, то она содержит бесконечно много одинаковых чисел.

302. Доказать, что многочлен $x^{200}y^{200}+1$ нельзя представить как произведение $f(x)\cdot g(y)$ двух многочленов: от одного переменного x и от одного переменного y.

303. Квадратный трехчлен $p(x)=ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $p(x)=x$ не имеет (вещественных) корней. Доказать, что тогда и уравнение $p(p(x))=x$ также не имеет вещественных корней.

304. Квадратный трехчлен $p(x)=ax^2+bx+c$ таков, что если $|x|\leqslant 1$, то и $|p(x)|\leqslant 1$. Доказать, что в таком случае из $|x|\leqslant 1$ следует также $|p_1(x)|\leqslant 2$, где $p_1(x)=cx^2+bx+a$.

305. Доказать, что если x_1 — корень уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

а x_2 — корень уравнения

$$-ax^2+bx+c=0, \tag{2}$$

то найдется промежуточный между ними корень x_3 уравнения

$$\frac{a}{2}x^2+bx+c=0, \tag{3}$$

т. е. такой, что либо $x_1\leqslant x_3\leqslant x_2$, либо $x_1\geqslant x_3\geqslant x_2$.

306. Пусть α и β — корни уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

а γ и δ — корни уравнения

$$x^2+Px+Q=0.$$

Выразить произведение

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\delta)$$

через коэффициенты данных уравнений.

307. Даны два уравнения:

$$x^2+ax+1=0, \quad x^2+x+a=0.$$

Определить все значения коэффициента a, при которых эти уравнения имеют хотя бы один общий корень.

308. а) Найти целое число a такое, что

$$(x-a)(x-10)+1$$

разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

б) Найти такие отличные от нуля не равные между собой целые числа a, b, c, чтобы многочлен четвертой степени с целыми коэффициентами

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

можно было представить в виде произведения двух других многочленов с целыми коэффициентами.

309. При каких отличных друг от друга целых числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлены с целыми коэффициентами

а) $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)-1$,

б) $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+1$

разлагаются в произведения других многочленов?

310*. Доказать, что при любых отличных друг от друга целых числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлен

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

не разлагается в произведение двух других многочленов с целыми коэффициентами.

311. Доказать, что если многочлен

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами принимает при четырех целых значениях x значение 7, то он не может принимать значение 14 ни при каком целом значении x.

312. Доказать, что если многочлен 7-й степени с целыми коэффициентами

$$a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$$

при 7 целых значениях x принимает значения $+1$ и -1, то его нельзя представить в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами.

313. Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

принимает при $x=0$ и $x=1$ нечетные значения, то уравнение $P(x)=0$ не имеет целых корней.

314*. Доказать, что если многочлен

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами при двух целых значениях $x=p$ и $x=q$ $(p>q)$ равен по абсолютной величине 1 и уравнение $P(x)=0$ имеет рациональный корень a, то $p-q$ равно 1 или 2 и $a=\frac{p+q}{2}$.

315*. Доказать, что многочлены

а) $x^{2222}+2x^{2220}+4x^{2218}+6x^{2216}+8x^{2214}+\ldots$

$$\ldots+2218x^4+2220x^2+2222;$$

б) $x^{250}+x^{249}+x^{248}+x^{247}+x^{246}+\ldots+x^2+x+1$

не могут быть разложены в произведения многочленов с целыми коэффициентами.

316. Доказать, что если два многочлена с целыми коэффициентами в произведении дают многочлен с четными коэффициентами, не все из которых делятся на 4, то в одном из перемножаемых многочленов все коэффициенты — четные, а в другом — не все четные.

317. Доказать, что все рациональные корни многочлена

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами и с коэффициентом при старшей степени x равным 1, являются целыми.

318*. Доказать, что не существует такого многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

что все числа $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, ..., являются простыми.

Примечание. Предложение, сформулированное в задаче, было впервые доказано Л. Эйлером[1]). Ему же принадлежат примеры многочленов, значения которых при многих последовательных целых значениях x являются простыми (так, например, в случае многочлена $P(x)=x^2-79x+1601$ 80 чисел $P(0)=1601$, $P(1)=1523$, $P(2)$, $P(3)$, ..., $P(79)$ являются простыми).

319. Доказать, что если многочлен

$$P(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n$$

при всех целых значениях x принимает целые значения, то его можно представить в виде суммы многочленов

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{x(x-1)}{1\cdot 2},\ldots$$

$$\ldots,\ P_n(x)=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n},$$

обладающих тем же свойством (в силу задачи 75 а)), взятых с целыми коэффициентами.

320. а) Доказать, что если многочлен n-й степени $P(x)$ принимает целые значения при $x=0, 1, 2, \ldots, n$, то он принимает целые значения и при всех целых значениях x.

---

[1]) Работавший, главным образом, в России и в Германии швейцарец Леонард Эйлер (1707—1783) был, бесспорно, крупнейшим математиком XVIII в., внесшим значительный вклад во все разделы математической науки.

б) Доказать, что всякий многочлен степени n, принимающий при каких-то $n+1$ последовательных целых значениях x целые значения, принимает целое значение при всяком целом x.

в) Доказать, что если многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения при $x=0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2$, то он принимает целое значение и при любом целом значении x, являющемся полным квадратом (но не обязательно принимает целые значения при всех целых x).

Привести пример многочлена, принимающего целые значения при каждом целом значении x, являющемся полным квадратом, но при некоторых других целых x принимающего дробные значения.

10. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

321. а) Доказать, что

$$\cos 5\alpha=\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\sin^2\alpha+5\cos\alpha\sin^4\alpha,$$
$$\sin 5\alpha=\sin^5\alpha-10\sin^3\alpha\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos^4\alpha.$$

б) Доказать, что при каждом целом n

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - - C_n^6\cos^{n-6}\alpha\sin^6\alpha + \ldots,$$
$$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha - \ldots,$$

где обозначенные точками члены, закон образования которых легко подметить, выписываются до тех пор, пока сохраняют смысл биномиальные коэффициенты.

Примечание. Задача б), очевидно, является обобщением задачи а).

322. Выразить $\operatorname{tg} 6\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

323. Доказать, что если $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$, то $x^n+\frac{1}{x^n}=$ $=2\cos n\alpha$.

324. Доказать, что

$$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+2\alpha)+\ldots+\sin(\varphi+n\alpha)= =\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и

$$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\ldots+\cos(\varphi+n\alpha)=$$
$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\left(\varphi+\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

325. Упростить

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha$$

и

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha.$$

326. Упростить

$$\cos\alpha+C_n^1\cos 2\alpha+C_n^2\cos 3\alpha+\ldots+C_n^{n-1}\cos n\alpha+$$
$$+\cos(n+1)\alpha$$

и

$$\sin\alpha+C_n^1\sin 2\alpha+C_n^2\sin 3\alpha+\ldots+C_n^{n-1}\sin n\alpha+$$
$$+\sin(n+1)\alpha.$$

---

327. Доказать, что если m, n, p — произвольные целые числа, то

$$\sin\frac{m\pi}{p}\sin\frac{n\pi}{p}+\sin\frac{2m\pi}{p}\sin\frac{2n\pi}{p}+\sin\frac{3m\pi}{p}\sin\frac{3n\pi}{p}+\ldots$$
$$\ldots+\sin\frac{(p-1)m\pi}{p}\sin\frac{(p-1)n\pi}{p}=$$
$$=\begin{cases}-\frac{p}{2}, & \text{если } m+n \text{ делится на } 2p, \text{ а } m-n \text{ не делится на } 2p;\\ \frac{p}{2}, & \text{если } m-n \text{ делится на } 2p, \text{ а } m+n \text{ не делится на } 2p;\\ 0, & \text{если } m+n \text{ и } m-n \text{ одновременно делятся или одновременно не делятся на } 2p.\end{cases}$$

328. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\cos\frac{6\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=$$
$$=-\frac{1}{2}.$$

329. Составить уравнение, корнями которого являлись бы числа:

а) $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}, \sin^2\frac{2\pi}{2n+1}, \sin^2\frac{3\pi}{2n+1}, \ldots, \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$;

б) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}, \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1}, \ldots, \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$.

330. Упростить суммы:

а) $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$;

б) $\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots$

$$\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

331. Упростить произведения:

а) $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$

и

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n};$$

б) $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}$

и

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

332. Вывести из результатов задач 330 а) и б), что при любом целом положительном n сумма

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

заключается между $\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6}$ и $\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6}$.

Примечание. Из результата задачи 332, в частности, следует, что

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

где под суммой бесконечного ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$

понимается предел, к которому стремится величина $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$ (ср. также раздел «Четыре формулы для числа π» книги [6], в котором дается существенное развитие этого результата).

---

333. а) На окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, взята точка M. Доказать, что сумма квадратов расстояний от этой точки до всех вершин n-угольника не зависит от положения точки на окружности и равна $2nR^2$, где R есть радиус окружности.

б) Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки M, взятой в плоскости правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, до всех вершин n-угольника зависит только от расстояния l точки M от центра O многоугольника и равна $n(R^2+l^2)$, где R есть радиус окружности, описанной около n-угольника.

в) Доказать, что утверждение предыдущей задачи остается в силе и в том случае, когда точка M не лежит в плоскости n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$.

334. На дуге A_1A_n окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, взята точка M. Доказать, что:

а) если n четно, то сумма квадратов расстояний от точки M до вершин n-угольника с четными номерами равна сумме квадратов расстояний от этой же точки до нечетных вершин;

б) если n нечетно, то сумма расстояний от точки M до вершин n-угольника с четными номерами равна сумме расстояний от этой же точки до нечетных вершин.

Примечание. Геометрическое доказательство теоремы задачи 334 б) см. в решении задачи 137 книги [8].

335. Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, равен R. Доказать, что:

а) сумма квадратов всех сторон и всех диагоналей n-угольника равна n^2R^2;

б) сумма всех сторон и всех диагоналей n-угольника равна $n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}R$;

в) произведение всех сторон и всех диагоналей n-угольника равно $n^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

336*. Найти сумму 50-х степеней всех сторон и всех диагоналей правильного 100-угольника, вписанного в окружность радиуса R.

---

337. Известно, что $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$; какое наибольшее и какое наименьшее значения может иметь модуль $|z|$ комплексного числа z?

338. Пусть сумма n комплексных чисел равна нулю; доказать, что среди них найдутся два числа, аргументы которых разнятся не менее чем на 120°.

Можно ли заменить здесь величину 120° меньшей?

339. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n, z$ — такие комплексные числа, что

$$\frac{1}{z-c_1}+\frac{1}{z-c_2}+\ldots+\frac{1}{z-c_n}=0.$$

Доказать, что если числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ представляются на комплексной плоскости вершинами выпуклого n-угольника, то число z представляется точкой, лежащей внутри этого n-угольника.

11. НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

340. Теорема Ферма. Доказать, что если p есть простое число, то разность a^p-a при любом целом a делится на p.

Примечание. Частными случаями этой теоремы являются предложения задач 46 а)—д).

341. Теорема Эйлера. Пусть N есть какое-то целое число и r — число чисел ряда $1, 2, 3, \ldots, N-1$, взаимно простых с N. Доказать, что если a есть произвольное целое число, взаимно простое с N, то разность a^r-1 делится на N.

Примечание. Если число N — простое, то все выписанные числа взаимно просты с N, т. е. $r=N-1$, и теорема Эйлера сводится к следующей: разность $a^{N-1}-1$, где N — простое, делится на N. Отсюда видно, что теорему Ферма (см. задачу 340) можно рассматривать как частный случай теоремы Эйлера.

Если $N=p^n$, где p — простое, то из $N-1=p^n-1$ чисел $1, 2, 3, \ldots, N-1$ не будут взаимно простыми с $N=p^n$ только числа $p, 2p, 3p, \ldots, N-p=(p^{n-1}-1)p$. Таким образом, в этом случае $r=(p^n-1)-(p^{n-1}-1)=p^n-p^{n-1}$, и теорема Эйлера сводится к следующей: разность $a^{p^n-p^{n-1}}-1$, где p — простое, а a не делится на p, обязательно делится на p^n.

Если $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные между собой простые числа, то число r простых чисел, меньших N и взаимно простых с N, дается формулой

$$r=N\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

(см., например, [64]—[68]). Если $N=p^n$ — степень простого числа p, то эта формула дает

$$r=p^n\left(1-\frac{1}{p}\right)=p^n-p^{n-1},$$

т. е. результат, полученный выше.

342*. Согласно теореме Эйлера разность 2^k-1, где $k=5^n-5^{n-1}$, делится на 5^n (см. задачу 341, в частности, примечание к этой задаче). Доказать, что ни при каком k, меньшем чем 5^n-5^{n-1}, разность 2^k-1 не делится на 5^n.

343. Выпишем подряд последовательные степени числа 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ...

Легко заметить, что в этом ряду чисел последние цифры периодически повторяются с периодом 4:

2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...

Доказать, что и последние 10 цифр в этом ряду чисел, начиная с некоторого числа, также будут периодически повторяться. Найти длину периода и номер числа в ряду, начиная с которого наблюдается периодичность.

344*. Доказать, что существует такая степень числа 2, последние 1000 цифр которой все будут единицами и двойками.

---

345. Пара (различных) натуральных чисел m и n называется «хорошей», если эти числа состоят из одинаковых простых делителей, взятых, однако, в (вообще говоря) несовпадающих степенях (пример: $90=2\cdot3^2\cdot5$ и $150=2\cdot3\cdot5^2$), и «очень хорошей», если «хорошими» являются и пара m, n и пара $m+1$, $n+1$ (пример: $6=2\cdot3$ и $48=2^4\cdot3$ — ведь $6+1=7$, а $48+1=49=7^2$). Конечно или бесконечно число «очень хороших» пар натуральных чисел?

346. Пусть a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, ... — произвольная (бесконечная) арифметическая прогрессия, начальный член a и разность d которой являются натуральными числами. Доказать, что прогрессия содержит бесконечно много членов, разложение которых на простые множители содержит одни и те же множители (но взятые, разумеется, в разных степенях).

347. Теорема Вильсона[1]). Доказать, что если целое число p — простое, то число $(p-1)!+1$ делится на p; если же p — составное, то $(p-1)!+1$ не делится на p.

348. Доказать, что

а) для каждого простого числа p можно найти такие целые числа x и y, что x^2+y^2+1 делится на p;

б)* если простое число p дает при делении на 4 остаток 1 (и для нечетных простых чисел — только в этом случае), существует такое целое число x, что x^2+1 делится на p.

Задача 348 связана с проблематикой, касающейся *представления натуральных чисел в виде сумм степеней* (с показателями степени $n>1$) *других натуральных чисел* (эта проблематика отражена в большинстве книг и статей, отнесенных в списке литературы к этому циклу задач). Так, из результата задачи 348б) можно вывести, что *натуральное число N в том и только в том случае может быть представлено в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, когда в разложение N на простые множители все простые множители вида* $4n+3$ (множители, дающие при делении на 4 остаток 3) *входят в четных степенях.* Из результата задачи 348а) можно вывести красивую теорему о том, что *все* без исключения *натуральные числа могут быть представлены в виде суммы квадратов четырех* (или меньшего количества) *натуральных чисел*; последний результат, в свою очередь, позволяет установить, что *все натуральные числа могут* также *быть представлены* в виде суммы ограниченного числа четвертых степеней натуральных чисел, — скажем, *в виде суммы* 53 (*или меньшего количества) полных четвертых степеней натуральных чисел.* (Более тонкие средства позволяют заменить здесь оценку 53 на 21, однако и этот результат, видимо, не является окончательным: скорее всего каждое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем 19 полных четвертых степеней целых чисел.) Доказано также, что *всякое целое число представимо в виде суммы кубов не более чем девяти целых чисел* (вот здесь число 9 не может быть заменено меньшим!).

Все эти предложения охватываются следующей замечательной теоремой: *для любого целого положительного числа k существует такое целое число N* (разумеется, зависящее от k), *что каждое целое положительное число представимо в виде суммы не более чем N слагаемых, являющихся k-ми степенями целых чисел.* Эта послед-

[1]) Александр **Вильсон** (1714—1786) — шотландский астроном и математик-любитель, профессор астрономии в Глазго.

няя теорема имеет несколько различных доказательств, но до самого последнего времени были известны лишь такие ее доказательства, которые используют очень сложный математический аппарат (относящийся к высшей математике). Лишь в 1942 г. ленинградский математик Ю. В. Линник дал чисто арифметическое ее доказательство (см. [72]), которое, однако, является исключительно сложным. Установлено также, например, что *каждое рациональное число может быть представлено в виде суммы не более чем трех кубов рациональных чисел*, хотя, например, число 1 *не может* быть представлено в виде суммы кубов двух рациональных чисел (доказательство этого последнего факта имеется, например, в книгах [53] и [54]).

349. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел.

350. а) Доказать, что среди членов арифметических прогрессий 3, 7, 11, 15, 19, 23, ... и 5, 11, 17, 23, 29, 35, ... имеется бесконечно много простых чисел.

б)* Доказать, что среди членов арифметической прогрессии

$$11,\ 21,\ 31,\ 41,\ 51,\ 61,\ \ldots$$

имеется бесконечно много простых чисел.

Аналогично решению задач 350 а)—б), но несколько сложнее, можно также доказать, что и среди членов арифметической прогрессии 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... имеется бесконечно много простых чисел. Имеет место и общее предложение о *существовании бесконечного числа простых чисел в каждой арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с ее разностью*, однако доказательство этого предложения является чрезвычайно сложным (интересно отметить, что не использующее высшей математики, хотя и очень сложное, доказательство этой классической теоремы теории чисел было найдено впервые лишь в 1950 г. датским математиком А. Сельбергом; до этого были известны лишь доказательства, относящиеся к высшей математике).

РЕШЕНИЯ

1. Пусть A — первый из двух выбранных учеников, а B — второй. *Если A и B стоят в одном поперечном ряду*, то B выше A, ибо A — самый низкий ученик в своем поперечном ряду; если A и B стоят в одном продольном ряду, то B также выше A, ибо B самый высокий ученик в своем продольном ряду; наконец, если A и B стоят в разных поперечных и разных продольных рядах и C стоит в том же поперечном ряду, что и A, и в том же продольном ряду, что и B, то B выше A, так как B выше C, а A ниже C.

2. Составим общую сумму чисел всех рукопожатий, сделанных когда-либо каждым из людей. Эта сумма обязательно четна, потому что каждое рукопожатие, которым обменялись два лица A и B, увеличивает на 1 число рукопожатий, сделанных A, и на 1 число рукопожатий, сделанных B, и, следовательно, дает слагаемое 2 в общей сумме. Но, с другой стороны, эта сумма составляется из чисел рукопожатий, сделанных каждым отдельным человеком. Из четности суммы вытекает, что число нечетных слагаемых в ней четно, что и требовалось доказать.

3. Пусть A — одно из данных лиц; ясно, что либо 1° A имеет среди присутствующих трех знакомых B_1, B_2 и B_3; либо 2° имеются трое лиц C_1, C_2 и C_3, ни с одним из которых A не знаком (среди 5 отличных от A лиц у него есть либо трое знакомых, либо трое незнакомых). В случае 1° если B_1, B_2 и B_3 попарно незнакомы, то они образуют требуемую тройку; если же, например, B_1 и B_2 знакомы, то имеем тройку попарно знакомых лиц A, B_1 и B_2. Аналогично, если в случае 2° C_1, C_2 и C_3 попарно знакомы, то они образуют нужную нам тройку; если же, скажем, C_1 не знаком с C_2, то мы приходим к тройке A, C_1 и C_2.

4. а) Каждое из N присутствующих лиц может иметь $0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$ знакомых. Здесь мы имеем N возможных значений числа знакомых; однако если некто имеет 0 знакомых, то никто не имеет $N-1$ знакомых (и наоборот — если некто имеет $N-1$ знакомого, то никто не имеет 0 знакомых). Отсюда уже следует, что двое лиц с *одним и тем же* числом знакомых обязательно существуют (ср. со сказанным о принципе Дирихле на стр. 10).

б) Занумеруем присутствующих на заседании N лиц номерами $1, 2, \ldots, N$ и рассмотрим такое «распределение знакомств»: пусть для всех значений $i=0, 1, 2, \ldots$, где $i<\frac{N}{2}$, лицо с номером $N-i$ знакомо со всеми лицами, кроме первых i лиц (т. е. N-е лицо знакомо со всеми без исключения; $(N-1)$-е — со всеми, кроме 1-го лица; $(N-2)$-е — со всеми, кроме 1-го и 2-го; ...); все же лица с номерами i, где $1\leqslant i\leqslant\frac{N+1}{2}$ между собой незнакомы. В таком случае, при

$N=3$, очевидно, 1-е и 2-е лица знакомы лишь с 3-м, а 3-е лицо имеет двух знакомых; аналогично, при $N=4$ 1-е лицо знакомо лишь с 4-м; 2-е — с 4-м и с 3-м; 3-е — с 4-м и со 2-м; 4-е имеет трех знакомых. Точно так же можно убедиться, что при $N=2k+1$ нечетном числа n_i знакомых у i-го лица имеют значения: $n_1=1$, $n_2=2$, ..., $n_k=k$, $n_{k+1}=k$, $n_{k+2}=k+1$, ..., $n_N=N-1$, а при $N=2k+2$ четном $n_1=1$, $n_2=2$, ..., $n_{k+1}=k+1$, $n_{k+2}=k+1$, $n_{k+3}=k+2$, ..., $n_N=N-1$. Таким образом, здесь во всех случаях *никакие трое лиц не имеют одинакового числа знакомых*.

5. Если все присутствующие знакомы друг с другом, то возможность рассадить таким образом 4-х человек сомнения не вызывает. Пусть теперь A и B *незнакомы* между собой. Каждый из них имеет среди остальных $2n-2$ присутствующих не менее n знакомых; так как $n+n=2n=(2n-2)+2$, то у A и B имеется, минимум, два общих знакомых C_1 и C_2 — и мы можем посадить A и B напротив друг друга, а между ними посадить C_1 и C_2.

6. Рассмотрим ученого A, имеющего среди присутствующих *наибольшее* число n знакомых (или одного из таких ученых, если их несколько); при этом $n>0$, поскольку мы предположили, что некоторые из участников конгресса знакомы друг с другом. Все знакомые A имеют разное число знакомых (ибо любые два из них имеют общего знакомого A); при этом ни один из них не имеет больше чем n знакомых. Поэтому один из знакомых A (некто B) обязательно имеет *одного* знакомого, второй — двух, третий — трех, ..., наконец, последний (n-й) знакомый A, так же как и A, имеет n знакомых. Существование лица B и доказывает утверждение задачи.

7. Выберем каких-то трех делегатов конгресса; среди них найдутся двое, знающие один язык — их-то мы и поместим в одном номере гостиницы. Из оставшихся 998 делегатов снова отберем троих, среди которых снова найдутся двое, которых можно будет разместить в одном номере — и т. д., пока у нас не останутся всего 4 делегата A, B, C и D. Если каждые два из них могут говорить между собой, то с размещением этих делегатов не будет никаких трудностей; если же A и B между собой не говорят, то и C, и D могут служить для них переводчиками (что и делает возможным общение в тройках A, B, C и A, B, D делегатов); это позволяет поместить, скажем C в один номер с A, а D — в один номер с B.

8. Пусть A — какой-то один из присутствующих на конференции ученых; с каждым из 16 остальных он говорит на одном из трех (или на меньшем числе, если он не владеет всеми тремя) языков. Нетрудно видеть, что имеется такой язык (назовем его «тарабарским»), на котором A разговаривает не менее чем с 6 учеными: в самом деле, в противном случае собеседников у A будет не больше чем $5\cdot3=15$, а по условию задачи любые два ученых могут говорить между собой. Если двое из этих 6 ученых говорят между собой на тарабарском языке, то утверждение задачи доказано; если же это не так, то между собой 6 ученых говорят лишь на *двух* языках.

Пусть теперь B — произвольный из выделенных 6 ученых. Ясно, что найдутся такие 3 из 5 остальных ученых, с которыми он говорит на одном и том же («таратарабарском») языке: ведь если бы это было не так, то среди 5 ученых B мог бы иметь не более чем $2\cdot2=4$ собеседников. Если хоть какие-то два — скажем C и D — из этих трех участников конференции говорят между собой на таратарабарском языке, то мы уже получаем тройку ученых B, C и D, разговаривающих между собой на одном языке; если же эти трое ученых между собой говорят на третьем («таратаратарабарском») языке, то они и составляют искомую тройку.

9. а) Выберем одного из собравшихся A; всех знакомых с ним лиц мы обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Ясно, что никакие два из этих двух лиц не знакомы друг с другом и каждые два лица — скажем, A_i и A_j — имеют двух общих знакомых: A и некоторое лицо A_{ij}; здесь $i, j = 1, 2, \ldots, k$ и $i \neq j$. При этом никакие два из $\frac{k(k-1)}{2}$ лиц A_{ij}, очевидно, не совпадают, ибо в противном случае это лицо имело бы с A не менее трех общих знакомых. С другой стороны, так как каждое не знакомое с A лицо имеет с A двух общих знакомых (очевидно, из числа лиц $A_1, A_2, \ldots, A_k$), то $A_{12}, A_{13}, \ldots, A_{k-1,k}$ — это все не знакомые с A лица, и, значит, общее число n присутствующих на собрании людей равно

$$n = 1 + k + \frac{k(k-1)}{2} \qquad (*)$$

(1 — это A; k — это лица A_i; $\frac{k(k-1)}{2}$ — это лица A_{ij}).

Заметим теперь, что в силу равенства (*), которое можно переписать еще и так:

$$k^2 + k - (2n-2) = 0, \qquad (**)$$

имеем

$$k = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (2n-2)} = \frac{\sqrt{8n-7} - 1}{2}$$

(второй корень квадратного уравнения (**) $k' = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 2n - 2}$ не подходит, ибо он отрицателен). Таким образом, число k знакомых с некоторым лицом A лиц однозначно определяется по общему числу n присутствующих на собрании лиц, т. е. оно является одним и тем же для *всех* лиц A.

б) В силу (*) имеем

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + 1, \qquad (***)$$

т. е. n должно быть на единицу больше так называемого *треугольного числа*[1] $\frac{k(k+1)}{2}$. При этом для записываемого по формуле (***) числа n количество знакомых у каждого из присутствующих лиц равно k; здесь $k = 1, 2, 3, \ldots$ — произвольное натуральное число.

10. Пусть A, B и C — какие-то три жителя города. Ясно, что *возможен случай, когда все они дружат между собой*; *возможно* также, *что один из них (скажем, A) не дружит ни с B, ни с C, а B и C дружат между собой*: тогда для того, чтобы A, B и C все подружились, достаточно, чтобы A «начал новую жизнь». Нетрудно

[1]) По этому поводу см., например, [64], стр. 122—123.

также видеть, что два других случая: когда *все три жителя* A, B *и* C *между собой враждуют* и когда *один житель,— например*, тот же A,— *дружит с* B *и с* C, *а те враждуют между собой*, уже *невозможны*: в этих случаях среди трех пар A, B; A, C и B, C жителей Многообразия имеется нечетное (3 или 1) число $в$ пар врагов и четное (0 или 2) число $д$ пар друзей; при любых изменениях отношений в этой тройке лиц (во всех случаях, когда A, B или C «начинают новую жизнь») четность чисел $в$ и $д$ не меняется (нечетное число $в$ может замениться лишь нечетным же числом $в'$, а четное число $д$ — четным же числом $д'$), в силу чего все лица A, B и C никогда не смогут подружиться между собой (число $в$ не сможет стать равным 0).

Описанное строение «отношения дружбы» между любыми тремя лицами A, B и C доказывает, что в пределах всего города это отношение можно описать весьма просто: в городе имеются две группы жителей (*две партии* $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$), *такие, что все жители принадлежат либо к одной, либо к другой партии* (но никогда — к обеим сразу), *причем каждые два члена одной партии между собой дружат, а жители, принадлежащие к разным партиям, обязательно враждуют*. В самом деле, присоединим к нашим трем жителям A, B и C города Многообразие еще одного жителя D; в таком случае, если A и B дружат между собой и D дружит хоть с одним из них, то он дружит и со вторым — и, значит, принадлежит к партии, в которую входят и A, и B; если же A и B между собой враждуют, то D дружит лишь с одним из них (но с одним дружит непременно!). Это рассуждение обеспечивает возможность разбиения *четверки* жителей A, B, C и D на две партии $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ (впрочем, одна из этих партий может быть и «пустой»: так будет, если все жители A, B, C и D дружат между собой). Поступая так же и дальше, т. е. последовательно присоединяя к уже рассмотренным жителям города по одному человеку, мы докажем возможность разбиения на две партии *всех* 10 000 жителей города.

Теперь доказательство утверждения задачи не представляет уже никакого труда. Если все жители города дружат между собой, то нам и доказывать нечего; если же ни одна из партий $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ не «пуста», то мы предложим каждый день одному из участников партии $\mathscr{M}$ «начинать новую жизнь», т. е., попросту, переходить в партию $\mathscr{N}$. Если в партии $\mathscr{M}$ имеется k человек, то все жители города смогут подружиться за k дней; отсюда ясно, что 5000 дней (≈ 14 лет) заведомо будет достаточно для того, чтобы все жители города смогли подружиться (ибо хоть одна из партий $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ содержит не более 5000 членов).

11. Естественно называть «дорогой» отрезок пути между двумя замками; все замки страны Оз связаны каким-то конечным числом n дорог. Если рыцарь странствует по стране достаточно долго, то он проедет достаточно много дорог; если это число $\geqslant 4n+1$, то хоть по одной дороге AB (где A и B — замки) он проедет не менее 5 раз. При этом не менее 3 раз он проедет по этой дороге *в одном и том же направлении* (скажем, от A к B); поэтому, если из замка B, кроме BA, ведут еще две дороги BC и BD, то рыцарь минимум дважды,— скажем, после i-го и после j-го посещения замка B, где $j>i$,— сворачивал, выезжая из B (куда он оба раза приезжал из A) в одну и ту же сторону, скажем, в сторону замка C. Но из условий задачи тогда следует, что не только в i-е и в j-е посещение B рыцарь приехал в B из одного замка — из замка A,— но и в A он оба раза приезжал из одного и того же замка (из замка P в обозначениях рис. 4: ведь если рыцарь после B свернул на дорогу BC, т. е. налево, то в A он должен был свернуть направо, т. е. приехать в A он должен был из P). Аналогично этому устанавливается, что *полностью совпадают пути рыцаря, предшествующие двум рассматриваемым посещениям замка* B; так, в замок P он оба раза попал из

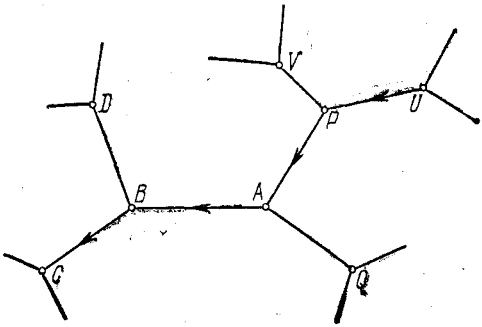


Рис. 4.

одного и того же замка (из замка U рис. 4), и т. д. Но тогда, если рыцарь до i-го посещения B миновал, начиная с выезда из своего замка X, какое-то число k замков, то и за k замков до j-го посещения B он снова был в X, что и доказывает утверждение задачи.

12. Условимся называть «друзьями» любых двух рыцарей, не являющихся врагами; далее, начнем с того, что рассадим всех рыцарей за круглым столом п р о и з в о л ь н о. Пусть где-то за столом

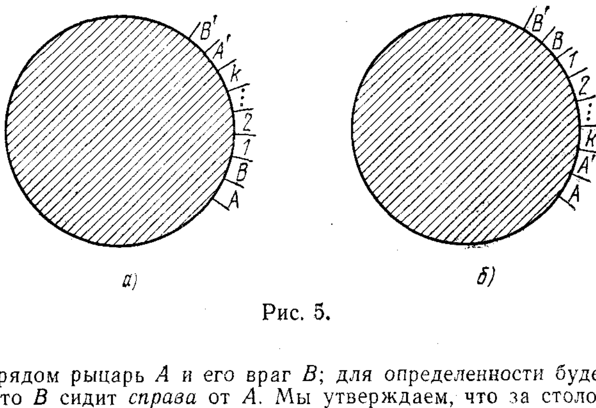


Рис. 5.

сидят рядом рыцарь A и его враг B; для определенности будем считать, что B сидит *справа* от A. Мы утверждаем, что за столом *найдется такое место, где рядом сидят рыцари* A' — *друг* A *и* B' — *друг* B, *причем* B' *сидит справа от* A' (см. рис. 5, *а*). В самом деле, рыцарь A имеет не менее n друзей; мест справа от них также имеется n, а врагов у B не более $n-1$ — значит, хоть одно из мест справа от друга A' рыцаря A занимает друг B' рыцаря B. *Пересадим* теперь *в обратном порядке всех рыцарей, сидящих справа от А, начиная с рыцаря В и вплоть до рыцаря A'* (рис. 5, *б*). Ясно, что при этом изменятся лишь пары A, B и A', B' соседей — они заменятся на пары друзей A, A' и B, B'. Таким образом, число пар сидящих рядом врагов уменьшится минимум на 1 (оно уменьшится даже на 2, если рыцари A' и B' — враги). Продолжая пересаживать рыцарей таким же образом и далее, Мерлин может окончательно разъединить за столом все пары сидящих рядом врагов.

13. а) Разделим наши монеты на три группы: две группы по 27 монет и одну в 26 монет. При первом взвешивании поместим на чашки весов группы по 27 монет. Если весы не уравновесятся, то фальшивая монета находится на более «легкой» чашке. Если же весы окажутся в равновесии, то фальшивая монета содержится в группе из 26 монет. Таким образом, нам достаточно научиться решать задачу: тремя взвешиваниями выделить фальшивую монету из группы в 27 монет (задача выделить фальшивую монету из группы в 26 монет может быть сведена к этой задаче, например, добавлением к группе из 26 монет еще одной произвольной монеты из числа остальных 54).

При втором взвешивании разделим группу в 27 монет на три группы по 9 монет в каждой. Поместив на обе чашки весов по группе из 9 монет, найдем группу из 9 монет, в которой содержится фальшивая монета.

Разделив группу из 9 монет, одна из которых фальшивая, на три группы по 3 монеты, мы третьим взвешиванием выделим тройку монет, в которой содержится фальшивая.

Наконец, тем же путем при четвертом взвешивании найдем фальшивую монету.

б) Пусть k — натуральное число, удовлетворяющее неравенствам $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$. Покажем, что это число k удовлетворяет условиям задачи.

Прежде всего покажем, что при помощи k взвешиваний всегда можно определить фальшивую монету. Разделим наши монеты на три группы так, чтобы в двух равных группах было по 3^{k-1} (или меньше) монет, а число монет в третьей группе было бы не больше 3^{k-1} (это возможно, ибо $n \leqslant 3^k$). Положив на чашки весов две группы из равного числа монет, мы определим, в какой из трех групп содержится фальшивая монета (ср. с решением задачи а)). Таким образом, после первого взвешивания мы выделим группу из 3^{k-1} монет, среди которых содержится фальшивая (если окажется, что фальшивая монета находится в группе, содержащей меньше 3^{k-1} монет, то мы можем дополнить эту группу монет произвольными монетами до 3^{k-1}). При каждом последующем взвешивании будем делить наши монеты на три равные группы и определять, в какой из них находится монета. Таким образом, после k взвешиваний мы придем к группе из одной монеты, т. е. выделим фальшивую монету.

Теперь остается показать, что k есть м и н и м а л ь н о е число взвешиваний, с помощью которых всегда можно выделить фальшивую монету, т. е. что при любых способах взвешивания результаты взвешиваний могут сложиться таким неблагоприятным для нас образом, что после $k-1$ взвешиваний фальшивая монета не будет выделена.

При каждом взвешивании монеты распадаются на три группы: монеты, попавшие на одну чашку, попавшие на другую чашку и не попавшие ни на одну из чашек. Если на чашки весов было положено одинаковое число монет и весы уравновесились, то фальшивая монета заведомо находится в группе монет, не попавших при взвешивании ни на одну чашку. Если одна из чашек перетянет (при равном числе монет на чашках), то фальшивая монета находится на второй чашке. Наконец, если на чашки весов было положено разное число монет, то в случае, когда перетянула чашка, где монет больше, фальшивая монета может оказаться в любой из трех групп и такое взвешивание вообще не даст нам никаких сведений о местонахождении фальшивой монеты. Пусть теперь при произвольно производимых взвешиваниях результат взвешивания каждый раз оказывается наиболее неблагоприятным, т. е. фальшивая монета каждый раз оказывается в той из трех групп, которая содержит наибольшее число монет. Тогда при каждом взвешивании число монет группы, содержащей фальшивую монету, убывает не более чем в 3 раза (ибо при делении некоторого числа монет на три группы всегда по крайней мере одна из трех групп содержит не менее чем треть от общего числа монет); поэтому после $k-1$ взвешиваний число монет группы, содержащей фальшивую монету, остается не меньшим чем $\frac{n}{3^{k-1}}$, и так как $n > 3^{k-1}$, то после $k-1$ взвешиваний фальшивая монета не будет выделена.

Примечание. Можно коротко записать ответ задачи в такой форме: минимальное число взвешиваний, необходимое для выделения фальшивой монеты из группы в n монет, есть $\left[\log_3\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]+1$, где прямые скобки обозначают целую часть числа (см. стр. 37).

14. Положим на чашки весов по одному кубику (первое взвешивание). При этом могут иметь место два различных случая.

1°. При первом взвешивании одна чашка весов перетянула. В таком случае из двух взвешиваемых кубиков один обязательно является алюминиевым, а второй — дюралевым. Далее кладем эти два кубика на одну чашку весов, а на вторую — последовательно по паре оставшихся кубиков (разбиение 18 оставшихся кубиков на 9 пар производим произвольно). Если какая-нибудь пара кубиков перетягивает нашу пару, то это значит, что оба кубика во второй паре дюралевые; если перетягивает первая пара, то оба кубика второй пары — алюминиевые; если обе пары имеют один вес, то, значит, вторая пара тоже содержит один алюминиевый и один дюралевый кубики. Таким образом, в случае 1° мы можем определить число дюралевых кубиков при помощи 10 взвешиваний (одно взвешивание и еще 9).

2°. При первом взвешивании чашки весов остались в равновесии. В таком случае кубики первой пары или оба алюминиевые, или оба дюралевые. Кладем, далее, эти два кубика на одну чашку весов, а на вторую — последовательно кладем по паре кубиков из числа оставшихся 18. Пусть первые k из этих пар оказываются одного веса с первоначальной, а $(k+1)$-я пара — другого веса. (Если $k=9$, то все кубики оказываются одного веса и, следовательно, дюралевых кубиков нет вовсе; случай $k=0$ ничем не отличается от общего случая). Предположим для определенности, что $(k+1)$-я пара оказалась более тяжелой, чем первоначальная (рассуждение мало изменилось бы, если $(k+1)$-я пара оказалась бы более легкой). В таком случае первые два кубика, а следовательно, и кубики тех k пар, которые оказались с ними одного веса, обязательно алюминиевые. Итак, мы произвели пока $1+(k+1)=k+2$ взвешиваний и выделили при этом $k+1$ пар алюминиевых кубиков. Теперь положим на чашки весов по кубику из последней взвешенной пары ($(k+3)$-е взвешивание). Если оба кубика окажутся одинакового веса, то оба они должны быть дюралевыми; в противном случае — один из них алюминиевый, а второй дюралевый. В обоих случаях мы можем после $k+3$ взвешиваний указать пару из двух кубиков, один из которых алюминиевый, а второй дюралевый. С помощью этой пары мы $8-k$ взвешиваниями определим число дюралевых кубиков среди оставшихся $20-2(k+2)=16-2k$ кубиков аналогично тому, как мы поступали в случае 1°. Общее число взвешиваний в случае 2° будет равно $k+3+(8-k)=11$.

15. Разделим наши монеты на три группы по четыре монеты в каждой. При первом взвешивании поместим на каждую чашку весов по группе из четырех монет. Возможны два варианта:

1°. Чашки весов уравновесились.

2°. Одна из чашек перевесила.

Рассмотрим оба варианта в отдельности.

1°. При первом взвешивании чашки весов уравновесились. Следовательно, фальшивая монета находится в оставшейся группе, а 8 монет на весах — настоящие. Перенумеруем монеты из оставшейся группы: 1, 2, 3, 4. Положим при втором взвешивании монеты 1, 2 и 3 на одну чашку, а на другую — три монеты из числа восьми заведомо настоящих. Возможны два случая:

А) Чашки весов уравновесились. Тогда монета 4 — фальшивая. Сравнивая третьим взвешиванием ее с настоящей, мы находим, легче она или тяжелее, чем настоящая.

Б) Одна из чашек перетянула. В этом случая фальшивой является одна из монет 1, 2 или 3. При этом, если перетянула чашка с настоящими монетами, то фальшивая монета легче настоящих; одним взвешиванием мы без труда выделяем более легкую из трех монет: 1, 2 и 3 (ср. с решением задачи 13а)). Если же перетянула чашка с монетами 1, 2, 3, то фальшивая монета тяжелее настоящих; и в этом случае ее легко определить одним взвешиванием.

2°. При первом взвешивании одна из чашек весов перетянула. Тогда все монеты в оставшейся группе — настоящие. Обозначим монеты, лежавшие на перетянувшей чашке, через 1, 2, 3, 4 (если одна из этих монет фальшивая, то она тяжелее настоящих), а монеты на другой чашке — через $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ (если одна из этих монет фальшивая, то она легче настоящих). При втором взвешивании поместим на одну чашку монеты 1, 2 и $1'$, а на другую — монеты 3, 4 и $2'$. Возможны опять-таки различные случаи:

А) Чашки уравновесились. Тогда фальшивая одна из монет $3'$ или $4'$ (и при этом она легче настоящих). При третьем взвешивании поместим на одну чашку весов монету $3'$, а на вторую — монету $4'$; та из этих монет, которая окажется легче другой, и будет фальшивой.

Б) Перетянула чашка с монетами 1, 2, $1'$. В этом случае монеты 3, 4 и $1'$ — настоящие; в самом деле, если бы одна из монет 3, 4 была бы тяжелее остальных или монета $1'$ была бы легче остальных, то при втором взвешивании чашка, на которой лежат монеты 3, 4 и $2'$, должна была бы перетянуть, чего на самом деле не случилось, Итак, фальшивой является одна из монет 1, 2 (в этом случае фальшивая монета тяжелее настоящих) или $2'$ (в этом случае фальшивая монета легче настоящих). Положим при третьем взвешивании на одну чашку монету 1, а на другую — монету 2. Если чашки уравновесились, то фальшивая монета $2'$, а если одна из чашек перетянула, то на перетянувшей чашке лежит фальшивая монета.

В) Перетянула чашка с монетами 3, 4, $2'$. Рассуждая аналогично предыдущему, мы заключаем, что монеты 1, 2 и $2'$ — настоящие и что либо одна из монет 3, 4 фальшивая и тяжелее настоящих, либо монета $1'$ фальшивая и легче настоящих. При третьем взвешивании положим на одну чашку монету 3, а на другую — монету 4. Если весы уравновесились, то фальшивая монета $1'$. Если же одна из чашек перетянула, то на ней и находится фальшивая монета.

16. а) Достаточно распилить одно третье звено; при этом цепочка распадется на две части, содержащие соответственно 2 и 4 звена, и на одно отдельное (распиленное) звено. В первый день постоялец отдаст это звено; во второй — заберет его обратно и отдаст взамен часть цепочки, состоящую из двух звеньев; в третий — добавит снова распиленное звено; в четвертый — заберет все, что дал раньше, и передаст часть цепочки из четырех звеньев; в пятый — добавит еще раз распиленное звено; в шестой — возьмет обратно это звено и даст взамен часть цепочки из двух звеньев; в седьмой — отдаст последнее звено.

б) Удобно сначала разобрать следующую задачу: при каком наибольшем n достаточно распилить k звеньев n-звенной цепи для того, чтобы любое число звеньев от 1 до n можно было получить, взяв некоторые из образовавшихся частей цепи? Для решения этой задачи рассмотрим, каково наиболее выгодное расположение k распиленных звеньев. Так как после перепиливания k звеньев у нас будет k отдельных (распиленных) звеньев, то любое число звеньев от 1 до k мы сможем набрать уже только из них. Но $k+1$ звеньев мы уже не сможем получить, если у нас не будет части, состоящей из $k+1$ или менее звеньев. Ясно, что наиболее выгодно будет иметь часть точно из $k+1$ звеньев; тогда из этой части и k отдельных звеньев мы сможем набрать любое число от 1 до $2k+1$. Для того чтобы можно было получить также $2k+2=2(k+1)$ звеньев, нам надо будет иметь еще часть, содержащую $2(k+1)$ или менее звеньев; наиболее выгодно для нас будет, если эта часть будет содержать ровно $2(k+1)$ звеньев. Теперь мы можем уже составить все числа от 1 до $2k+1+2(k+1)=4k+3$; следующая по величине часть, которая нам необходима,— это часть, содержащая $4(k+1)$ звеньев. Продолжая рассуждать таким же образом, убедимся, что наиболее выгодным будет, если $k+1$ частей, получающихся после того, как мы распилили k звеньев (отдельные k звеньев, получающихся при этом, мы здесь не засчитываем в число частей), будут иметь соответственно следующие числа звеньев:

$$k+1,\ 2(k+1),\ 4(k+1),\ 8(k+1), \ldots,\ 2^k(k+1).$$

В этом случае любое число звеньев от 1 и до

$$n = k + \{k+1+2(k+1)+4(k+1)+\ldots+2^k(k+1)\} = \\ = k+(2^{k+1}-1)(k+1) = 2^{k+1}(k+1)-1$$

можно будет составить из частей цепи.

Итак, если $2^k k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1)-1$, то можно обойтись k разрывами цепи, но нельзя обойтись $k-1$ разрывами. В частности,

при $2 \leqslant n \leqslant 7$	$k=1$,	при $160 \leqslant n \leqslant 383$	$k=5$,
при $8 \leqslant n \leqslant 23$	$k=2$,	при $384 \leqslant n \leqslant 895$	$k=6$,
при $24 \leqslant n \leqslant 63$	$k=3$,	при $896 \leqslant n \leqslant 2047$	$k=7$.
при $64 \leqslant n \leqslant 159$	$k=4$,		

Итак, мы видим, что при $n=2000$ наименьшее число распиленных звеньев равно 7. Условия задачи будут выполнены, если выбрать эти звенья так, чтобы получающиеся 8 частей цепи (7 отдельных звеньев мы здесь не считаем) имели соответственно 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и 977 звеньев.

17. Пусть S — какая-то станция метро, T — *самая далекая* от S станция, т. е. такая, что кратчайший путь из S в T ведет через большее (или, по крайней мере, не меньшее) число станций, чем кратчайший путь от S до любой другой станции. Закроем теперь станцию T. При этом из S мы по-прежнему сможем проехать в любую другую (не закрытую) станцию U, ибо кратчайший путь из S в U никак не может вести через T — ведь иначе станция U была бы расположена дальше от S, чем станция T. Поэтому, если U и V — две какие угодно отличные от T станции метро, то из одной из них мы заведомо сможем проехать в другую, минуя T: для этого достаточно, например, если U и V отличны от S, проехать из U в S, а оттуда — в V.

18. Будем доказывать утверждение задачи методом математической индукции по числу городских перекрестков (из которых исходят более двух дорог). Если в Зурбагане имеются всего *два* перекрестка A и B, то утверждение задачи очевидно: из A в B ведут не менее двух дорог (если бы такая дорога была одна, то при введении по ней одностороннего движения — скажем, в направлении от A к B — мы не смогли бы проехать из B в A); поэтому установив по одной из этих дорог движение от A к B, а по второй — от B к A, мы сможем проехать от любого перекрестка до любого, отличного от него. Это простое рассуждение неожиданно «работает» и в общей ситуации. Предположим, что *для всех городов, число перекрестков в которых не превосходит n, утверждение задачи* уже *доказано*; рассмотрим теперь новый город (пусть это и будет Зурбаган), имеющий $n+1$ перекресток. Рассмотрим два соседних из этих перекрестков — перекрестки A и B, соединенные улицей AB. Ясно, что поскольку после введения на улице AB (при ее ремонте) одностороннего движения — скажем, от A к B — проехать от B к A было возможно, то из перекрестка B в перекресток A ведет некоторая не включающая улицы AB «цепочка» улиц. (Разумеется, эту «цепочку» можно считать не имеющей самопересечений — ведь если бы она дважды проходила через один и тот же перекресток C, то «цикл» между первым вхождением в C и последующим вхождением в ту же точку мы могли бы просто отбросить.) Таким образом, мы приходим к существованию в Зурбагане «кольца» s — замкнутой сети улиц, ведущей из A в B, а затем (через ряд «промежуточных» перекрестков) — снова в A. Рассмотрим теперь условный город, план которого получается из плана Зурбагана «склеиванием» всех перекрестков нашего кольца s в один перекресток S, из которого исходят все улицы, реально «упирающиеся» в

кольцо s[1]). Число перекрестков такого условного города меньше $n+1$; поэтому, по предположению индукции, в нем можно ввести по всем улицам одностороннее движение с соблюдением требований задачи. Если мы затем оставим движение по всем не входящим в кольцо s улицам таким же, каким оно было в этом условном «городе», а по кольцу s пустим движение в одном (безразлично каком!) направлении, то на всех улицах Зурбагана будет установлено одностороннее движение — и притом с любого перекрестка можно будет проехать в любой другой.

19. Ясно, что если в стране имеются 2 города, соединенные одним шоссе с односторонним движением по нему, то из одного города вообще не удастся попасть во второй. Если городов 4, то мы можем считать их вершинами четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$; при этом либо движение по контуру четырехугольника является «циклическим» (рис. 6, *а*), либо хоть одна из вершин — например, вершина A_1 — такова, что две проходящие через нее стороны четырехугольника изображают ведущие *из* города шоссе (рис. 6, *б*). Но в

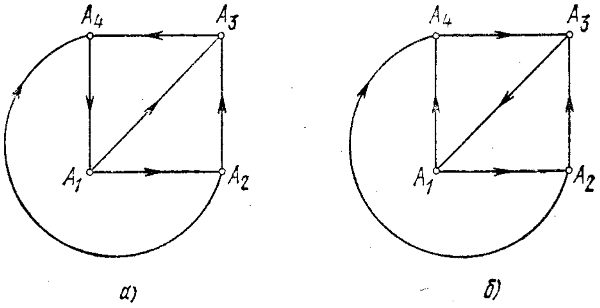


Рис. 6.

первом случае вершины четырехугольника равноправны и любой выбор направлений по диагоналям четырехугольника по существу не отличается от любого другого, а меж тем, на рис. 6, *а* мы не можем с заездом в один лишь город проехать из A_3 в A_2. Если же шоссе A_1A_2 и A_1A_4 ведут из A_1, то для того, чтобы мы могли с соблюдением требований задачи проехать из A_2 и из A_4 в A_1, направления движения на шоссе A_2A_3, A_4A_3 и A_3A_1 надо выбрать такими, как указано стрелками на рис. 6, *б*; но при этом мы снова приходим к «симметричной» ситуации, позволяющей ограничиться рассмотрением варианта, отвечающего какому-то (какому угодно!)

[1]) «План» города здесь можно понимать просто как таблицу, в которой перечислены все улицы города и все перекрестки, причем указано, какие улицы упираются в какие перекрестки — реально может случиться, что полученный описанным образом план «условного города» нарисовать на листе бумаги будет нельзя (а только лишь на глобусе или более сложной поверхности — нам это совершенно неважно).

выбору направления движения по шоссе A_2A_4,— а в случае рис. 6, *б* из A_4 в A_2 нельзя проехать с заездом в один лишь город. При $n = 3$ или 6 выбор направлений движения с соблюдением всех поставленных требований возможен (см. рис. 7, *а* и *б*; на рис. 7, *б* мы даже ограничились изображением не всех шоссе).

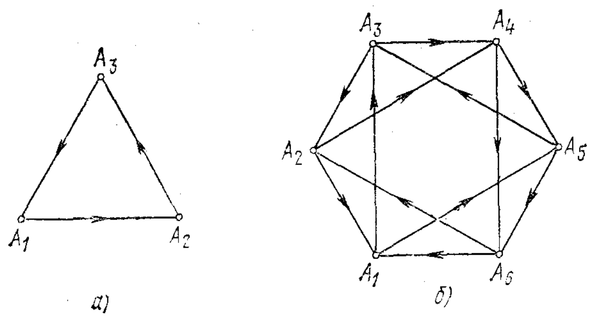


Рис. 7.

Далее воспользуемся методом математической индукции. А именно, пусть *для* некоторого *числа n городов утверждение задачи* уже доказано; покажем, что тогда оно *будет справедливо и для* на 2 большего *числа городов* $n+2$. Для этого направления движения на всех шоссе, соединяющих любые два из первых n городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, мы установим такими, чтобы из любого из этих городов в любой другой можно было проехать с заездом не более чем в один «промежуточный» город (это возможно в силу предположения индукции). Далее, по всем шоссе, ведущим из $(n+1)$-го города A_{n+1} в один из городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, направим движение в сторону городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а из каждого из этих городов направим движение в сторону $(n+2)$-го города A_{n+2} (рис. 8); тогда из A_{n+1} в каждый из городов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и из каждого из этих городов в A_{n+2} можно будет попасть без заездов в какой-либо другой город. Наконец, направим движение по соединяющему A_{n+1} и A_{n+2} шоссе от A_{n+2} к A_{n+1} — тогда из A_{n+2} в A_{n+1} мы попадем «за один шаг», а из A_{n+2} в любой из городов A_1,

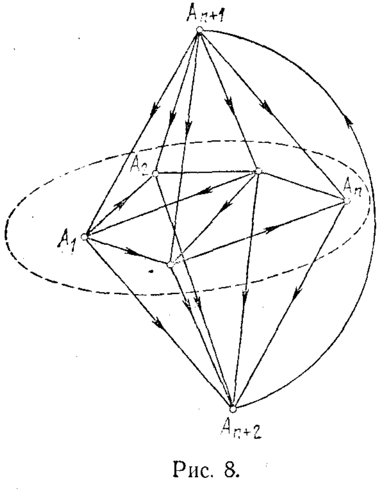


Рис. 8.

$A_2, \ldots, A_n$ и из любого из этих городов в A_{n+1} — за два «шага» (с заездом, соответственно, в A_{n+1} или в A_{n+2}).

Так как утверждение задачи справедливо для $n = 3$ и для $n = 6$, то из доказанного следует, что оно также справедливо для всех нечетных $n \geqslant 3$ и для всех чётных $n \geqslant 6$.

20. Вот более «математическая» формулировка той же задачи. На плоскости (на карте Швамбрании) имеется 100 точек (городов); каждые две точки соединены либо сплошной линией (это означает, что между соответствующими городами имеется прямая телефонная связь), либо пунктирной линией (означающей наличие авиарейсов из одного города в другой); при этом *известно, что из любой из заданных точек* (из любого города) *в любую другую можно пройти как по цепочке сплошных линий,* соединяющих наши точки, *так и по цепочке пунктирных линий.* Нам требуется доказать, что в таком случае *среди имеющихся* 100 *точек можно выбрать такие* 4, *что* здесь тоже *из каждой точки можно пройти в любую из трех других как по цепочке сплошных, так и по цепочке пунктирных линий, используя при этом лишь линии, соединяющие наши* 4 *точки.*

Доказывать это утверждение мы будем от противного: предположим, что такой четверки не существует, и, пользуясь этим, выделим из наших 100 точек-городов *бесконечную* их последовательность, что, разумеется, невозможно.

Мы начнем с некоторых (каких угодно!) точек A_1 и A_2, соединенных *сплошной* линией. По условию A_1 и A_2 можно также соединить цепочкой *пунктирных* линий; пусть $A_1A_3A_3'A_3'' \ldots A_2$ — кратчайшая из таких цепочек, т. е. цепочка, проходящая через наименьшее число промежуточных точек (городов). В таком случае любые две не соседние точки этой цепочки соединены *сплошной* линией — ведь иначе мы могли бы сократить нашу цепочку, просто

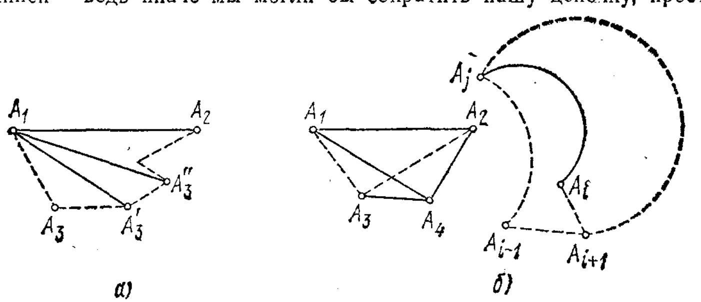


Рис. 9.

отбросив все города, промежуточные между этими двумя. Но отсюда следует, что если бы наша цепочка содержала более одного промежуточного города — скажем, содержала бы города A_3, A_3' и A_3'' (где A_3'' может и совпадать с A_2), — то города A_1, A_3, A_3' и A_3'' (см. рис. 9, *а*) уже образовывали бы требуемую четверку городов (по нашему предположению отсутствующую!), поэтому A_1 и A_2 соединены «пунктирным двусторонником» $A_1A_3A_2$.

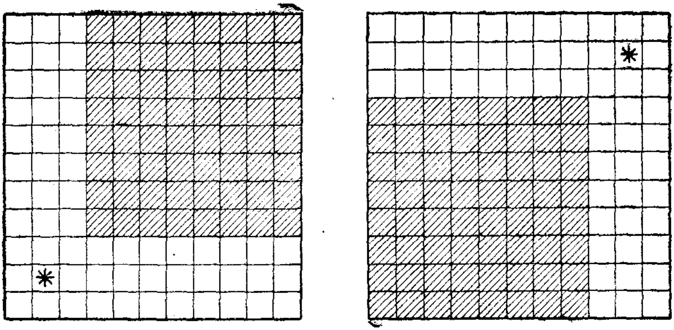
Рассмотрим теперь (соединенные пунктирной линией!) города A_2 и A_3; в точности, как и ранее, устанавливается, что существует состоящий всего из двух звеньев *сплошной* путь $A_2A_4A_3$ из A_2 в A_3. Докажем, что точка A_4 *соединена с* A_1 *сплошной линией*. В самом деле, если бы A_4 и A_1 были соединены пунктирной линией, то A_1, A_2, A_3 и A_4 образовывали бы запрещенную по нашему предположению четверку городов с требуемыми свойствами (ср. рис. 9, *б*).

Итак, мы нашли такие 4 точки A_1, A_2, A_3 и A_4, что A_2 соединена с A_1 сплошной линией; A_3 соединена с A_1 и с A_2 пунктирными линиями; A_4 соединена с A_1, A_2 и A_3 сплошными линиями. Далее воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что мы уже нашли такие точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i$, что каждая из точек $A_3, A_5, \ldots$ (точек с нечетными номерами) соединена со всеми предшествующими точками *пунктирными* линиями, а каждая из точек $A_2, A_4, \ldots$ (точек с четными номерами) соединена с каждой из предшествующих ей точек *сплошными* линиями, и покажем, что этот ряд точек можно продолжить. Пусть, для определенности, линия $A_{i-1}A_i$ является *сплошной*; рассмотрим кратчайшую *пунктирную ломаную* $A_{i-1}A_{i+1}A_i$, соединяющую A_{i-1} и A_i. Ясно, что точка A_{i+1} не совпадает ни с одной из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{i-2}$ (и, конечно, A_{i-1}, A_i) — ведь все предшествующие A_{i-1} точки соединены с одной из точек A_{i-1}, A_i сплошной линией, а со второй — пунктирной, в то время как A_{i+1} соединена пунктирными линиями с ними обеими. С другой стороны, со всеми точками $A_1, A_2, \ldots, A_{i-2}$ (а также и с A_{i-1}, A_i) точка A_{i+1} соединена *пунктирными* линиями, ибо если линия A_jA_{i+1} (где $j<i-1$) — сплошная, то точки A_j, A_{i-1}, A_i, A_{i+1} образуют «запрещенную» по нашему предположению четверку точек (рис. 9, *б*).

Тем самым мы «продолжили на один шаг» конструируемую цепочку $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots$ точек-городов, которую, таким образом, можно сделать сколь угодно длинной.

21. Для того чтобы обойти все 64 клетки шахматной доски, побывав на каждом поле один раз, конь должен сделать 63 хода. Так как при каждом ходе конь переходит с белого поля на черное или с черного на белое, то после ходов с четными номерами конь будет попадать на поля того же цвета, что и исходное, а после ходов с нечетными номерами — на поля другого цвета. Поэтому конь не может 63-м ходом попасть на поле, находящееся на одной диагонали с исходным, так как эти поля окрашены в один цвет.

22. Король может избрать следующую «самоубийственную» (но ведь самоубийство и является его целью!) стратегию: сначала он перейдет в нижний левый угол доски, а оттуда двинется по диагонали слева вверх направо. После того, как король сделает 1-й ход по диагонали, он окажется на помеченном звездочкой на рис. 10, *а* поле; при этом если хоть одна ладья (после ответа черных на последний ход короля) окажется вне заштрихованного на этом рисунке квадрата размера 997×997, то король сможет стать под удар следующим своим ходом. Аналогично устанавливается, что после 998 ходов по диагонали, когда король окажется на поле, помеченном звездочкой на рис. 10, *б*, все черные ладьи должны будут находиться в заштрихованном на этом рисунке квадрате. При этом если в процессе движения короля хоть одна ладья осталась на той же горизонтальной строке или на том же вертикальном столбце шахматной доски, где она стояла ранее, то король в процессе своего движения пересечет эту строку или этот столбец — и тем самым окажется под боем. Поэтому, если «черные» стремятся не брать короля, то за время движения короля от положения рис. 10, *а* до положения рис. 10, *б* (король за это время сделал 997 ходов) каждая из 499 ладей должна сделать минимум 2 хода (ибо каждым ходом она меняет либо строку, на которой стоит, либо столбец, но никогда — строку и столбец одновременно); но на $2 \cdot 499 = 998$



а) б)

Рис. 10.

ходов у ладей не хватит времени (королю ведь достаточно сделать лишь 997 ходов!).

23. Изменим порядок расположения полей по кругу, а именно, расположим их в порядке, при котором можно было бы переходить с одного поля на соседнее. Иными словами, после поля *1* поместим *6* (ибо по условию задачи с поля *1* можно перейти на *6*), после *6* поместим поле *11* (с поля *6* можно перейти на *11*), затем *4* (ибо с поля *11* можно перейти на 4), и т. д. При этом мы получим порядок полей, изображенный на следующей схеме:

$$\begin{tikzcd}
\text{К} & & & \text{С} & & \text{Ж} \\
1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & 6 \arrow[r, leftrightarrow] & 11 \arrow[r, leftrightarrow] & 4 \arrow[r, leftrightarrow] & 9 \arrow[r, leftrightarrow] & 2 \arrow[d, leftrightarrow] \\
8 \arrow[r, leftrightarrow] & 3 \arrow[r, leftrightarrow] & 10 \arrow[r, leftrightarrow] & 5 \arrow[r, leftrightarrow] & 12 \arrow[r, leftrightarrow] & 7 \\
& \text{З} & & & &
\end{tikzcd}$$

Мы можем считать, что имеем 12 полей, расположенных именно таким образом (ведь фактически занимаемое полем место значения не имеет) и занумерованных так, как это указано на нашей схеме. При этом фишки первоначально стояли так, как это обозначено на схеме буквами сверху и снизу полей (буква **К** обозначает красную фишку, буква **Ж** — желтую, буква **З** — зеленую и буква **С** — синюю). Правило движения фишек при этом новом расположении полей оказывается чрезвычайно простым — каждая фишка может сдвинуться на одно поле влево или вправо, если только это соседнее поле не занято.

Теперь совершенно ясно, что единственный способ, каким фишки могут поменяться местами, — это двигаться по кругу в одном или другом направлении: ведь ни одна фишка не может «перегнать» другую, ибо другая преграждает ей путь. Таким образом, если фишка **К** займет поле *4*, то фишка **С** должна будет занять поле *2*, фишка **Ж** — поле *3* и фишка **З** — поле *1*. Если фишка **К** займет поле *2*, то фишка **С** должна будет занять поле *3*, фишка **Ж** — поле *1*, фишка **З** — поле *4*. Если фишка **К** займет поле *3*, то фишка **С** должна будет занять поле *1*, фишка **Ж** — поле *4* и фишка **З** — поле *2*.

Никакие другие новые расположения фишек невозможны.

24. Докажем, прежде всего, что *если в некотором коллективе студентов каждый из трех языков — а* (английский), *ф* (французский) *и н* (немецкий) *знают ровно n человек, где $n \geqslant 2$, то можно составить такую группу студентов, в которой каждый язык будут знать ровно* 2 *человека.* Ясно, что из сформулированного предложения утверждение задачи уже вытекает: выбрав (и исключив из рассмотрения) указанную группу студентов, мы придем к совокупности студентов, в которой каждый из трех языков знают ровно $50 - 2 = 48$ студентов; из этой совокупности студентов мы снова можем выбрать группу, в которой каждый язык знают ровно 2 студента, после чего у нас останется коллектив, в котором каждый язык знают ровно $48 - 2 = 46$ студентов, и т. д. Объединив затем пять отобранных таким образом небольших групп, в которых каждый язык знают по 2 человека, мы получим первую из интересующих нас групп, в которой каждый язык знают ровно 10 человек; далее так же (т. е. исходя из «маленьких» групп, в которых каждый язык знают ровно 2 студента) мы станем составлять вторую и третью группы студентов (каждая из них будет состоять из 5 «маленьких» групп).

Для доказательства напечатанного выше курсивом утверждения можно использовать метод математической индукции. В самом деле, ясно, что если $n = 2$, то наше утверждение выполняется (рассматриваемая группа здесь — это совокупность всех студентов); предположим теперь, что оно верно для всех значений n, меньших некоторого, и докажем, что в таком случае оно справедливо и для этого значения n. Условимся обозначать число студентов, знающих только английский язык, через $N_а$; знающих английский и французский языки, но не немецкий, через $N_{аф}$, и т. д.; соответственно символ $а$ (или $а'$, или $а''$) будет обозначать студента, знающего только *английский* язык; символ $аф$ (или $(аф)'$) — студента, знающего языки $а$ и $ф$, но не $н$, и т. д. Если при этом $N_а \neq 0$, $N_ф \neq 0$, $N_н \neq 0$, то мы просто исключим из нашего коллектива трех студентов $а$, $ф$ и $н$ и придем к новой совокупности студентов, для которой наше утверждение выполняется в силу предположения индукции; аналогично этому, если $N_{афн} \neq 0$, то мы откинем студента $афн$ и снова придем к новому коллективу, для которого наше утверждение верно. Далее, если $N_{аф} \neq 0$, $N_{ан} \neq 0$ и $N_{фн} \neq 0$, то сформулированное предложение выполняется тривиально — требуемую группу составляют три студента $аф$, $ан$ и $фн$. Наконец, если два из чисел $N_{аф}$, $N_{ан}$ и $N_{фн}$ отличны от нуля, а третье,— скажем, последнее из них — равно нулю, то отличны от нуля числа $N_ф$ и $N_н$ (ибо в объединении всех студентов $аф$, $(аф)'$, и т. д. и всех студентов *ан*, $(ан)'$, и т. д. больше студентов знают язык *а*, чем язык *ф* и чем язык *н*); поэтому мы можем исключить из числа студентов двух студентов *аф* и *н* и снова прийти к коллективу студентов, в котором каждый язык знают $n-1$ человек и в котором, по предположению индукции, требуемую «малую» группу студентов составить можно. Аналогично, если скажем, лишь $N_{аф} \neq 0$, а $N_{ан} = N_{фн} = 0$, то, очевидно, $N_н \neq 0$ — и мы можем снова использовать предположение индукции, удалив студентов *аф* и *н*. [Заметим, что равенства $N_{аф} = N_{ан} = N_{фн} = 0$ (и $N_{афн} = 0$) противоречат предположению, что хоть одно из чисел $N_а$, $N_ф$ и $N_н$ равно нулю.]

Примечание. Ясно, что числа 50 и 10 в условии этой задачи являются случайными: в точности так же можно доказать, что если в нашем коллективе студентов каждый из трех языков (где, впрочем, и число 3 можно пытаться заменять другими) знают ровно n студентов, то из описанных «малых» групп можно конструировать группы, в которых каждый из языков знают любое не большее n заданное *четное* число m студентов; однако предположение о четности m здесь является существенным (попытайтесь доказать это!)

25. а) Ясно, что наименьшее значение «среднего места» равно 1 — это значение достигается, если все судьи приписали 1-е место *одному и тому же* спортсмену. С другой стороны, 5 или более спортсменов получить (у разных судей) первое место не могут: в самом деле, эти $n \geqslant 5$ спортсменов получили бы тогда в совокупности у девяти судей 9 первых мест и $9n-9 \geqslant 9\cdot 5-9=36$ иных мест (ибо всего 9 судей приписывают им $9n$ мест); по условию задачи ни одно из этих мест не может быть ниже 4-го, что невозможно, так как мест с 3-го по 4е судьи указывают лишь $3\cdot 9=27$. Таким образом, остается лишь рассмотреть случаи, когда 1-е место (у разных судей) получили 2, 3 или 4 спортсмена.

1° Если 1-е место судьями приписано лишь *двум* спортсменам, то один из них назван 1-м не менее чем пятью судьями — и так как остальными судьями он поставлен не ниже чем на 4-е место, то «среднее место» этого спортсмена не ниже $\frac{1}{9}(5\cdot 1+4\cdot 4) = \frac{21}{9} \left(=2\frac{1}{3}\right)$.

2° Если 1-е место приписано *трем* спортсменам, то в совокупности эти спортсмены получили 9 первых мест и еще $3\cdot 9-9=18$ иных мест, ни одно из которых не может быть ниже четвертого; но так как 9 судей могут указать лишь 9 четвертых мест, то в «худшем» случае наши спортсмены получили 9 четвертых и 9 третьих мест. Таким образом, общая сумма приписанных этим трем спортсменам мест не больше $9\cdot 1+9\cdot 4+9\cdot 3=72$, в силу чего хоть один из них имеет не большую $\frac{72}{3}=24$ сумму мест и «среднее место», не худшее $\frac{24}{9} \left(=2\frac{2}{3}\right)$.

3° Наконец, если 1-е место приписано *четырем* спортсменам, то эти 4 лица получили в совокупности 9 первых мест и еще $4\cdot 9-9=27$ иных мест, не низших 4-го; из них 9 могут быть 4-ми местами, 9 — 3-ми и последние 9 — 2-ми. Таким образом, общая сумма мест четырех спортсменов здесь равна $9\cdot 1+9\cdot 2+9\cdot 3+$ $+9\cdot 4=90$ $(<4\cdot 23)$; а значит, лучший из этих четырех спортсменов имеет сумму мест, не большую 22, и «среднее место», не худшее $\frac{22}{9}\left(=2\frac{4}{9}<2\frac{2}{3}\right)$.

Итак, «среднее место» лучшего спортсмена никак не может быть ниже $2\frac{2}{3}$; при этом равняться $2\frac{2}{3}$ оно может лишь в том случае, когда каждый из трех лучших спортсменов получил у трех судей 1-е место, у трех других — 3-е и у трех последних — 4-е (так что в этом случае победителями соревнований явятся сразу три спортсмена).

Примечание. Разумеется, те же рассуждения, где лишь вместо k-го места фигурирует $(21-k)$-е, показывает что «среднее место» *последнего* спортсмена никак не может быть выше $18\frac{1}{3}$ (но может равняться $18\frac{1}{3}$).

б) Ясно, что после каждого тура соревнований номер сильнейшего из оставшихся участников соревнований не уменьшается; при этом увеличиться он может не более чем на 2 (если сильнейшего теннисиста случайно победил теннисист, номер которого на две единицы выше, чем у него). Так как $1024=2^{10}$ и после каждого тура число участников соревнований уменьшается вдвое, то всего мы будем иметь 10 туров соревнования, после которых останется лишь $2^0=1$ теннисист — победитель соревнования. Поскольку после каждого тура номер лучшего из оставшихся теннисистов может возрасти на 2, то отсюда, как будто, вытекает, что победителем соревнований может оказаться 21-й по списку теннисист.

На самом деле, однако, и 21-*й теннисист не имеет шансов оказаться победителем.* В самом деле, для этого необходимо, чтобы на каждом этапе соревнований выбывали два сильнейших игрока; другими словами, надо, чтобы в первом туре выбыли 1-й и 2-й игроки, проигравшие, соответственно, 3-му и 4-му; во втором туре выбыли 3-й и 4-й игроки, проигравшие, соответственно, 5-му и 6-му, и т. д. Но в таком случае в полуфинальных соревнованиях должны были выбыть 17-й и 18-й игроки, проигравшие 19-му и 20-му; поэтому 19-й и 20-й игроки выходят в финал — и победителем соревнований становится один из них, а не игрок с номером 21.

Покажем, наконец, что 20-*й игрок победителем соревнований оказаться может.* В самом деле, при наличии всего $2^1=2$ игроков, разумеется, победителем может оказаться игрок с номером $2=2\cdot 1$; если же теннисистов $2^2=4$, то победителем может стать теннисист с номером $2\cdot 2=4$: в паре первых двух игроков может победить 2-й, в паре двух других — 4-й, а 4-й, в принципе, может и выиграть финал у 2-го. Аналогично, если игроков $2^3=8$, то победителем может оказаться 6-й теннисист: в самом деле, если четверо сильнейших игроков попадут в одну подгруппу, то в ней сильнейшим может оказаться 4-й; во второй подгруппе 6-й теннисист может и выиграть у 5-го; при этом в финале он встретится с 4-м, которого может и победить. Точно так же с помощью метода ма-

тематической индукции легко доказать, что *победителем в соревнованиях* 2^n *теннисистов может оказаться* $(2n)$-й по силе *теннисист*: для этого лишь надо, чтобы первые $2n-2$ игрока попали в одну подгруппу из 2^{n-1} игроков, где (в силу предположения индукции) победителем может стать $(2n-2)$-й теннисист; во второй же подгруппе победителем вполне может стать $(2n)$-й игрок, которому после этого надо лишь в финале выиграть у $(2n-2)$-го игрока,— может быть, и трудная, но возможная задача.

26. Обозначим число комплектов медалей, оставшихся не врученными к началу i-го дня соревнования, через N_i, где $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$; можно, впрочем, считать, что величина N_i имеет смысл и при $i > n$, обращаясь в этих случаях в 0. Из условий задачи (и нашего соглашения) вытекает, что $N_1 = N$, $N_n = n$, $N_{n+i} = 0$; кроме того, значения N_i и N_{i+1} связаны соотношением:

$$N_{i+1} = N_i - i - \frac{1}{7}(N_i - i) = \frac{6}{7}(N_i - i),$$

$$\text{или } N_i = \frac{7}{6} N_{i+1} + i. \qquad (*)$$

Из (*) последовательно находим

$$N_n = n \left(= \frac{7}{6} N_{n+1} + n\right);$$

$$N_{n-1} = \frac{7}{6} n + (n-1);$$

$$N_{n-2} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 n + \frac{7}{6}(n-1) + (n-2);$$

$$N_{n-3} = \left(\frac{7}{6}\right)^3 n + \left(\frac{7}{6}\right)^2 (n-1) + \frac{7}{6}(n-2) + (n-3);$$

. . . .

$$N_i = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-i} n + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-i-1} (n-1) + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-i-2} (n-2) + \ldots + i$$

(общая формула, разумеется, без всякого труда доказывается методом математической индукции).

Таким образом, мы получаем:

$$N = N_1 = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} n + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} (n-1) + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-3} (n-2) + \ldots$$

$$\ldots + 1 = n\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-3} + \ldots + 1\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + 2\left(\frac{7}{6}\right)^{n-3} + \ldots + (n-2)\frac{7}{6} + (n-1)\right] = S_1 \cdot n - S_2,$$

где через S_1 и S_2 обозначены две заключенные в квадратные скобки суммы. Но по формуле суммы членов геометрической прогрессии, очевидно,

$$S_1=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+\ldots+1=\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^n-1}{\frac{7}{6}-1}=6\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right];$$

с другой стороны, как легко видеть,

$$\left(\frac{7}{6}\right)\cdot S_2-S_2=\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+\ldots+\left(\frac{7}{6}\right)-(n-1)=$$
$$=S_1-n=6\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right]-n,$$

так что

$$S_2=36\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right]-6n,$$

и, следовательно,

$$N=6\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right]n-36\left[\left(\frac{7}{6}\right)^n-1\right]+6n=6\,(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^n+36. \tag{**}$$

Так как N — целое число, то и число $\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}$, а значит и $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ должны быть целыми; поэтому n кратно 6. С другой стороны, очевидно, что при всех $k \geqslant 2$ имеет место неравенство $6k-6<6^{6k-1}$, или $k-1<6^{6k-2}$ (почему?) — и, значит, дробь $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ при $n>6$ не может быть целым числом. Таким образом, мы приходим к единственному возможному решению задачи: $n=6$ и, значит (в силу (**)) $N=36$.

27. Первое решение. Пусть n — число орехов, которое досталось утром каждому из приятелей; в таком случае $5n+1$ есть число орехов, которое было утром в мешке. Последний из проснувшихся ночью, очевидно, взял себе $\frac{5n+1}{4}$, а до этого в мешке было $5\,\frac{5n+1}{4}+1=\frac{25n+9}{4}$ орехов. Предпоследний проснувшийся взял себе $\frac{1}{4}\cdot\frac{25n+9}{4}$, а до этого в мешке было $5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{25n+9}{4}+$ $+1=\frac{125n+61}{16}$ орехов; третий взял себе $\frac{1}{4}\cdot\frac{125n+61}{16}$, а до этого в мешке было $5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{125n+61}{16}+1=\frac{625n+369}{64}$ орехов; второй взял себе $\frac{1}{4}\cdot\frac{625n+369}{64}$, а до этого в мешке было $5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{625n+369}{64}+1=$

$=\frac{3125n+2101}{256}$ орехов; наконец, первый взял себе $\frac{1}{4}\cdot\frac{3125n+2101}{256}$, а первоначально в мешке было

$$N=5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3125n+2101}{256}+1=\frac{15\,625n+11\,529}{1024}=$$

$$=15n+11+\frac{265n+265}{1024}$$

орехов. Так как это число должно быть целым, то $265(n+1)$ должно делиться на 1024. Наименьшее значение n, удовлетворяющее этому условию, равно, очевидно, 1023 и в этом случае

$$N=15\cdot 1023+11+265=15\,621.$$

В т о р о е р е ш е н и е. Эту задачу можно решить значительно быстрее и почти без всяких подсчетов, если внимательно рассмотреть те условия, которые накладывает ее содержание на общее число N орехов. Первое условие задачи заключается в том, что при первом разделе на пять частей в остатке остается один орех. Это условие означает, что N при делении на 5 должно дать в остатке 1, т. е. $N=5l+1$; числа, удовлетворяющие этому условию, встречаются в натуральном ряду чисел с интервалом в пять чисел, и, зная одно такое число, мы можем найти неограниченно много других, прибавляя к нему (или вычитая из него) числа, кратные 5. Второе условие задачи утверждает, что $k=\frac{4}{5}(N-1)=4l$ дает при делении на 5 остаток 1, т. е. $k=5l_1+1$. Это требование равносильно тому, что l дает при делении на 5 остаток 4 или что $N=$ $=5l+1$ дает при делении на 25 остаток 21; числа, удовлетворяющие этому условию, встречаются в числовом ряду с интервалом в 25 чисел, и, зная одно такое число, мы можем получить сколько угодно других, прибавляя к нему (или вычитая из него) числа, кратные 25. Точно так же третье условие задачи утверждает, что $k_1=$ $=\frac{4}{5}(k-1)=4l_1$ дает при делении на 5 остаток 1; это условие определяет остаток от деления числа l_1 на 5 или остатки от деления чисел k и l на 25, или остаток от деления N на 125. Все условия задачи определяют остаток от деления числа N на $5^6=15\,625$; числа, удовлетворяющие этим условиям, встречаются в натуральном ряду чисел с интервалом в 15 625.

Мы могли бы подсчитать остаток, который дает при делении на 5^6 число N, но в этом нет нужды. Дело в том, что одно число, удовлетворяющее всем условиям задачи, является очевидным. Этим числом является -4. Действительно, при делении на 5 число -4 дает в частном -1 и в остатке $+1$; поэтому, если вычесть из -4 число 1 и взять $\frac{4}{5}$ от полученной разности, уже делящейся на 5, то мы получим то же число -4. Также и при всех последующих делениях на 5 мы будем иметь тот же остаток $+1$. Правда, число -4 не может служить ответом нашей задачи, так как, по условию, число N должно быть положительным; но, зная одно число, удовлетворяющее условиям задачи, мы можем получить сколько угодно других, прибавляя к нашему числу кратные 5^6. Наименьшее положительное число, удовлетворяющее условиям, есть, очевидно, $-4+5^6=$ $=15\,625-4=15\,621$.

28. Обозначим число овец в стаде через n; в таком случае братья взяли за каждую овцу n рублей и, следовательно, всего выручили $N=n\cdot n=n^2$ рублей. Пусть d есть число целых десятков числа n, а e — число единиц; тогда $n=10d+e$ и

$$N=(10d+e)^2=100d^2+20de+e^2.$$

Из условий дележа следует, что старшему брату досталось одной десяткой больше, чем младшему, т. е. что общая сумма N содержит нечетное число десятков (и какой-то остаток). Но $100d^2+20de=20d(5d+e)$ делится на 20 (содержит четное число десятков); следовательно, число e^2 должно содержать нечетное число десятков. Так как e меньше 10 (e есть остаток от деления числа n на 10), то e^2 может иметь только одно из следующих значений:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81.$$

Но из этих чисел только 16 и 36 содержат нечетное число десятков; следовательно, e^2 равно 16 или 36. Оба эти числа оканчиваются на 6; значит, тот остаток, который получил младший брат взамен нехвативших ему 10 рублей, равен 6 рублям, и старший получил на 4 рубля больше младшего. Поэтому, для того чтобы раздел был справедливым, старший должен еще доплатить младшему 2 рубля. Следовательно, перочинный нож был оценен в 2 рубля.

29. а) Наш календарь устроен следующим образом. Каждый год имеет 365 дней. Исключением являются годы, номера которых делятся на 4: эти годы (високосные годы) имеют лишний 366-й день (29 февраля). Однако и это правило имеет исключения: годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, имеют не 366 дней, а 365, т. е. не являются високосными; так, 1900 и 1800 гг. не были високосными, не будет високосным и 2100 г., в то время как 2000 г. будет високосным (2000 делится на 400). Задача заключается в том, чтобы выяснить, каким днем чаще бывает по нашему календарю 1 января: субботой или воскресеньем.

Промежутки, через которые следуют друг за другом числа 1 января, не всегда постоянны, но эти промежутки изменяются периодически, с периодом в 400 лет. При этом 400 лет содержат целое число недель: действительно, невисокосный год содержит 52 недели и еще 1 день, а високосный — 52 недели и 2 дня; в течение четырех лет (из которых один високосный) набегает, таким образом, сверх $4\cdot 52$ недель еще 5 дней; в течение 400 лет должно было бы набежать еще 500 дней, но так как три года, делящиеся на 100, но не делящиеся на 400, не являются високосными, то за 400 лет сверх $400\cdot 52$ недель набегает всего $500-3=497$ дней, т. е. ровно 71 неделя. Поэтому нам достаточно выяснить, каким днем чаще бывает 1 января за какие-либо 400 лет; этим днем будет чаще 1 января и за любые другие 400 лет.

Рассмотрим теперь промежуток в 400 лет с 1901 по 2301 г. Отметим, что если в течение 28 лет каждый четвертый год является високосным (т. е. эти 28 лет не содержат года, номер которого делится на 100, но не делится на 400), то эти 28 лет содержат целое число недель: в течение каждых четырех лет набегает сверх целого числа недель еще 5 дней, а за 28 лет набегает $5\cdot 7=35$ дней, т. е. 5 недель. Теперь отметим, что 1 января 1952 г. было вторником. Так как каждый невисокосный год содержит целое число недель и один день, а високосный — целое число недель и 2 дня, то 1 января 1953 г. — четверг (1952 г. — високосный), 1 января 1954 г. — пятница, 1 января 1955 г. — суббота, и т. д.; точно так же 1 января 1951 г. было понедельником, 1 января 1950 г. было воскресеньем, и т. д. Таким образом, подсчитываем, что за 28 лет с 1929 по 1956 г. 1 января является каждым из семи дней недели ровно по 4 раза. Точно такое же распределение дней, с которых начинается новый год, было и в течение 28 лет с 1901 по 1928 г. (напоминаем, что 28 лет, среди которых каждый четвертый является високосным, содержит целое число недель, и, следовательно, через каждые 28 лет будет повторяться точно такое же распределение первых дней года, как и в предыдущие 28 лет); такое же распределение первых дней года будет и в периоды 1957—1984, 1985—2012 (2000 г., как делящийся на 400, будет високосным), 2013—2040, 2041—2068 и 2069—2096 гг. Итак, в промежутке 1901—2096 гг. 1 января будет одинаковое число раз каждым днем недели.

Далее, 1 января 2097 г. будет тем же самым днем, что 1 января 1901 г. или 1 января 1929 г., т. е. вторником, 1 января 2098 г. будет средой, 1 января 2099 г. — четвергом, 1 января 2100 г. — пятницей, 1 января 2101 г. — субботой (2100 год не будет високосным). Последующие 28 лет будут отличаться от промежутка 1901—1928 гг. тем, что они начались не со вторника, а с субботы; это вызовет соответствующую перестановку дней, которыми будут являться 1 января; однако, так как в течение 28 лет с 1901 по 1928 г. 1 января было ровно по 4 раза каждым днем недели, то и в промежутке с 2101 по 2128 г. 1 января будет каждым днем недели по 4 раза. Это соображение относится и к промежуткам 2129—2156 гг. и 2157—2184 гг.; 2185 г. начнется с того же самого дня, что и 2101, т. е. с субботы. Это позволяет определить, с каких дней будут начинаться годы с 2185 по 2201. Простой подсчет показывает, что в промежутке между 2185 и 2200 гг. 1 января будет по 2 раза понедельником, средой, четвергом, пятницей и субботой и по 3 раза — воскресеньем и вторником. 1 января 2201 г. будет четвергом. В течение $3 \cdot 28 = 84$ лет с 2201 по 2284 г. 1 января будет каждым днем недели одинаковое число раз. 1 января 2285 г. будет тем же днем, что и 1 января 2201 г., т. е. четвергом. Это позволяет определить распределение дней, с которых начинается год в интервале с 2285 по 2300 г.; оказывается, в течение этого интервала 1 января будет по 2 раза понедельником, вторником, средой, четвергом и субботой и по 3 раза — воскресеньем и пятницей. Таким образом, сверх тех периодов, в течение которых 1 января бывает одинаковое число раз каждым днем недели, мы получили еще $2+2=4$ понедельника, $1+3+2=6$ вторников, $1+2+2=5$ сред, $1+2+2=5$ четвергов, $1+2+3=6$ пятниц, $2+2=4$ субботы и $3+3=6$ воскресений. Отсюда следует, что 1 января чаще бывает воскресеньем, чем субботой.

б) Аналогично решению задачи 29а) можно показать, что в интервале 400 лет 30-е число бывает воскресеньем 687 раз, понедельником 685 раз, вторником 685 раз, средой 687 раз, четвергом 684 раза, пятницей 688 раз, субботой 684 раза. Итак, чаще всего 30-е число приходится на пятницу.

30. Легко видеть, что при зачеркивании последней цифры целое число уменьшается не меньше чем в 10 раз. Ровно в 10 раз уменьшаются при зачеркивании последней цифры числа, оканчивающиеся нулем; следовательно, все эти числа удовлетворяют условию задачи.

Допустим теперь, что целое число x при зачеркивании последней цифры уменьшается в целое число раз, большее чем 10, а именно в $10+a$ раз ($a \geqslant 1$); пусть y — число целых десятков числа x (не цифра, а число!); z — цифра единиц: $x = 10y + z$. После отбрасывания последней цифры число x переходит в число y; поэтому наши условия дают

$$x = (10 + a) \cdot y,$$

или

$$10y + z = (10 + a) \cdot y,$$

откуда

$$z = ay.$$

Так как $z < 10$, то и $y < 10$, $a < 10$; следовательно, числа, обладающие нужным свойством, двузначны и при отбрасывании последней цифры могут уменьшиться не более чем в 19 раз. Теперь легко видеть, что при зачеркивании последней цифры в 11 раз уменьшаются только числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99; в самом деле, если $10 + a = 11$, то $a = 1$; следовательно, $z = ay = y$, $x = 10y + z = 11y$, где $y = 1, 2, 3, \ldots, 9$. Аналогично найдем, что в 12 раз уменьшаются лишь числа 12, 24, 36, 48; в 13 раз — 13, 26, 39; в 14 раз — 14, 28; в 15, 16, 17, 18 и 19 раз — только соответственно числа 15, 16, 17, 18 и 19.

31. а) Пусть искомое число имеет $k+1$ цифр; в таком случае оно имеет вид $6 \cdot 10^k + y$, где y есть k-значное число (которое может начинаться с одного или нескольких нулей). По условию задачи имеем:

$$6 \cdot 10^k + y = 25 \cdot y,$$

откуда

$$y = \frac{6 \cdot 10^k}{24}.$$

Отсюда вытекает, что k не может быть меньше 2 (иначе $6 \cdot 10^k$ не делилось бы на 24). При $k \geqslant 2$ число y оказывается равным $25 \cdot 10^{k-2}$, т. е. имеет вид $25\underbrace{0\ldots0}_{(k-2)\text{ нулей}}$. Поэтому все искомые числа имеют вид $625\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

б) Решая задачу: найти число, начинающееся с данной цифры a и уменьшающееся при зачеркивании этой цифры в 35 раз, аналогично задаче а), мы придем к следующему равенству:

$$y = \frac{a \cdot 10^k}{34},$$

где y — целое число (см. решение задачи а)). Но это равенство, очевидно, не может иметь места ни при каких целых $a \leqslant 9$ и k.

Примечание. Совершенно аналогично решениям задач 31а) и б) можно показать, что число, начинающееся с известной цифры a, может уменьшаться при зачеркивании этой цифры в целое число b раз только в том случае, если $b-1$ *есть большее a число, такое, что все простые делители $b-1$, отличные от 2 и 5, входят (и притом в не меньшей степени) также и в состав числа a* (т. е. что $\frac{a}{b-1}$ есть правильная дробь, которую можно превратить в конечную десятичную дробь). Так, например, никакое число не может при зачеркивании первой цифры уменьшаться в 85 раз ($85-1=84$ делится на $3 \cdot 7$, а никакая цифра не может одновременно делиться на 3 и на 7), а число, уменьшающееся при зачеркивании первой цифры в 15 раз, должно начинаться с цифры 7 ($15-1=14$ делится на 7). Общий вид чисел, которые при зачеркивании известной первой цифры a уменьшаются в данное число b раз, легко найти.

32. а) Покажем прежде всего, что никакое число N не может уменьшиться в 9 раз при зачеркивании цифры, стоящей дальше чем на втором месте. Действительно, если это не так, то обозначая цифры числа N через $a_0, a_1, \ldots, a_n$, т. е. полагая

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n = N,$$

мы заключим, что число $\frac{N}{9}$ имеет n цифр, первые две из которых a_0 и a_1, т. е.

$$a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \ldots = \frac{N}{9}.$$

Умножая последнее равенство на 10 и вычитая первое, получим:

$$\frac{N}{9} < 10^{n-1},$$

что невозможно, так как

$$\frac{N}{10} = a_0 \cdot 10^{n-1} + \ldots \geqslant 10^{n-1}.$$

С другой стороны, из признака делимости на 9 вытекает, что если число N делится на 9 одновременно с числом, получаемым из N вычеркиванием одной цифры, то эта цифра есть 0 или 9. Таким образом, в нашем случае возможно только, что первая или вторая цифра числа N равна 0 или 9 и вычеркивание этой цифры равносильно делению N на 9. Но первая цифра N не может равняться 0, а если бы она была равна 9, то число $\frac{N}{9}$ имело бы столько же цифр, сколько N, и не могло получаться из N вычеркиванием одной цифры. Далее, если вторая цифра N равна 9 и число, получаемое из N зачеркиванием этой цифры, равно $\frac{N}{9}$, то мы имеем:

$$N = a_0 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$$\frac{N}{9} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

откуда опять, умножая второе равенство на 10 и вычитая из него первое, получим:

$$\frac{N}{9} < 10^{n-1}$$

(ибо $a_2 \leqslant 9$). Таким образом, мы убеждаемся, ч т о д л я т о г о, ч т о б ы уменьшить число N в 9 раз, в нем надо зачеркнуть цифру 0, стоящую на втором месте.

Теперь мы имеем:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$$\frac{N}{9} = a_0 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Отсюда следует

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^n + a_0 \cdot 10^{n-1} = N - a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 9$$

и, наконец,

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{N}{9} = \frac{N}{9} - a_0 \cdot 10^{n-1};$$

последнее означает, что, для того чтобы разделить число $\frac{N}{9}$ на 9, в нем достаточно зачеркнуть первую цифру.

б) Имеем (см. решение задачи а)):

$$\frac{N}{9} = N - a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 9,$$

откуда сразу следует

$$N = \frac{a_0 \cdot 10^{n-1} \cdot 81}{8}.$$

Теперь, считая a_0 равным соответственно 1, 2, 3, и т. д., получим, что N может быть равно одному из чисел 10 125, 2025, 30 375, 405, 50 625, 6075, 70 875 или отличаться от одного из этих чисел каким-то количеством нулей в конце (a_0 не может быть равно 8 или 9, так как в этом случае вторая цифра N уже не будет нулем).

33. а) Аналогично решению задачи 32 а) в предположении, что целое число N уменьшается в m раз при зачеркивании третьей цифры, имеем:

$$N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n,$$

$$10 \cdot \frac{N}{m} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + a_3 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n \cdot 10.$$

При $m < 10$ получаем $\frac{10-m}{m} N < 10^{n-1}$, что невозможно, так как $\frac{10-m}{m} > \frac{1}{10}$, а $\frac{1}{10} N = a_0 \cdot 10^{n-1} + \ldots \geqslant 10^{n-1}$. При $m > 11$ получаем $\frac{m-10}{m} \cdot N < 10^{n-1}$, что невозможно по аналогичной причине $\left(\text{ибо } \frac{m-10}{m} > \frac{1}{10}\right)$. Наконец, если $m = 11$, то должно быть $\frac{1}{11} N < 10^{n-1}$, т. е. $\frac{N}{m} = \frac{N}{11}$ имеет на две цифры меньше, чем N, что тоже невозможно, Таким образом, единственным возможным случаем является $m=10$; следовательно, условию задачи удовлетворяют числа, все цифры которых кроме первых двух — нули, и только эти числа.

Примечание. Совершенно аналогично можно показать, что единственные целые числа, уменьшающиеся в целое число раз при вычеркивании k-й цифры, где $k>3$, суть числа, все цифры которых кроме первых $k-1$ — нули.

б) Аналогично решению задачи 32 имеем, принимая, что целое число N уменьшается при вычеркивании второй цифры в m раз:

$$N=a_0\cdot 10^n+a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_n,$$

$$\frac{N}{m}=a_0\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_n.$$

Отсюда следует

$$\frac{N}{m}=N-a_0\cdot 10^n-a_1\cdot 10^{n-1}+a_0\cdot 10^{n-1},$$

или после несложных преобразований

$$N=\frac{(9a_0+a_1)\cdot 10^{n-1}\cdot m}{m-1}. \qquad (*)$$

Последнее выражение можно еще представить в следующем виде:

$$N=a_0\cdot 10^n+a_1\cdot 10^{n-1}-a_0\cdot 10^{n-1}+\frac{(9a_0+a_1)\cdot 10^{n-1}}{m-1}.$$

Но, с другой стороны, мы знаем, что N есть $(n+1)$-значное число, начинающееся с цифр a_0 и a_1:

$$N=a_0\cdot 10^n+a_1\cdot 10^{n-1}+a_2\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_n,$$

где можно считать, что не все цифры $a_2, \ldots, a_n$ равны нулю (противоположный случай сводится к рассмотрению двузначных чисел N; см. решение задачи 30). Таким образом, должно иметь место неравенство

$$0<-a_0\cdot 10^{n-1}+\frac{(9a_0+a_1)\cdot 10^{n-1}}{m-1}<10^{n-1},$$

или, что равносильно,

$$a_0<\frac{9a_0+a_1}{m-1}<a_0+1. \qquad (**)$$

Итак, окончательно мы имеем следующие результаты. Искомые числа N выражаются формулой (*), где $0\leqslant a_0\leqslant 9$, $0\leqslant a_1\leqslant 9$; так как N целое, а m и $m-1$ взаимно просты, то отсюда следует, что простую дробь $\frac{9a_0+a_1}{m-1}$ можно обратить в десятичную. При этом возможные значения a_0, a_1 и m должны удовлетворять неравенству (**) (кроме того, отдельно следует присоединить к возможным значениям N двузначные числа, полученные в решении задачи 30).

Теперь остается только последовательно рассмотреть все возможные значения a_0.

1°. $a_0 = 1$. В этом случае неравенство (**) дает

$$1 < \frac{18}{m-1}, \quad m-1 < 18; \quad \frac{9}{m-1} < 2, \quad m-1 > 4;$$

придавая $m-1$ последовательно значения 5, 6, 7, ..., 17 и выбирая каждый раз подходящие значения a_1, мы получаем следующие значения N:

$N = 108$; 105; 10 125, 1125, 12 375, 135, 14 625, 1575, 16 875; 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198; 1625, 195; 192, 180 625, 19 125,

к каждому из которых еще можно приписать в конце произвольное число нулей.

Аналогично далее получаем:

2°. $a_0 = 2$:

$N = 2025$, 21 375, 225, 23 625, 2475, 25 875; 231, 242, 253, 264, 275, 286, 297; 2925.

3°. $a_0 = 3$:

$N = 30\,725$, 315, 32 625, 3375, 34 875; 341, 352, 363, 374, 385, 396.

4°. $a_0 = 4$:

$N = 405$, 41 625, 4275, 43 875; 451, 462, 473, 484, 495.

5°. $a_0 = 5$:

$N = 50\,625$ 5175, 52 875; 561, 572, 583, 594.

6°. $a_0 = 6$:

$N = 6075$; 61 875; 671, 682, 693.

7° $a_0 = 7$:

$N = 781$, 792.

8°. $a_0 = 8$:

$N = 891$.

Значению $a_0 = 9$ не отвечает ни одно значение N.

Всего, включая результаты задачи 30, мы получаем для числа N 104 значения, к каждому из которых еще можно приписать в конце произвольное количество нулей.

34. а) Первое решение. Обозначим (m-значное) число, которое получается, если отбросить у искомого числа первую цифру 1, через X. В таком случае мы по условию задачи имеем:

$$(1 \cdot 10^m + X) \cdot 3 = 10X + 1,$$

откуда

$$X = \frac{3 \cdot 10^m - 1}{7}.$$

Из последнего равенства уже нетрудно определить число X. Для этого надо число $3 \cdot 10^m = 30\,000...$ делить на 7, пока в остатке не получится 1. В результате имеем:

$$
\begin{array}{r|l}
3000\ldots0 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 42\,857 \\
\underline{20} & \\
14 & \\
\underline{60} & \\
56 & \\
\underline{40} & \\
35 & \\
\underline{50} & \\
\underline{49} & \\
1 &
\end{array}
$$

Таким образом, наименьшее возможное значение числа X равно 42 857, а наименьшее значение искомого числа 142 857.

В процессе деления можно было бы не останавливаться на первой единице, а продолжать деление до следующей, и т. д.; при этом мы получили бы числа

$$\underbrace{\underbrace{142\,857}\,\underbrace{142\,857}\ldots\underbrace{142\,857}}_{k \text{ раз}},$$

тоже удовлетворяющие условию задачи.

Второе решение. Обозначим вторую цифру искомого числа через x, третью — через y, и т. д., т. е. предположим, что искомое число имеет вид $\overline{1xy\ldots zt}$ (черта наверху означает, что здесь мы имеем не произведение $1\cdot x\cdot y\ldots z\cdot t$, а число, составленное из цифр 1, x, y, ..., z, t). В таком случае по условию задачи имеем:

$$\overline{1xy\ldots zt}\cdot 3=\overline{xy\ldots zt1}.$$

Отсюда следует, что $t=7$ (ни в каком ином случае произведение слева не оканчивалось бы на 1). Следовательно, цифра десятков числа, которое стоит справа, равна 7. Но это возможно только, если произведение $z\cdot 3$ оканчивается на $7-2=5$ (два десятка справа получаются за счет произведения последней цифры искомого числа 7 на 3), т. е. $z=5$. Теперь мы знаем уже цифру сотен числа справа: 5; поэтому цифра сотен искомого числа должна давать при умножении на 3 число, оканчивающееся на $5-1=4$ (1 есть цифра десятков произведения $5\cdot 3$). Вычисления закончатся тогда, когда мы придем к первой цифре 1. Их удобно расположить следующим образом:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & & 4\,2\,8\,5\,7 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \times 3 = & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\,1 \\
4-1=3, & 2-0=2, & 8-2=6, & 5-1=4, & 7-2=5 & & &
\end{array}
$$

(вычисления проводятся справа налево). Таким образом, наименьшим числом, удовлетворяющим условиям задачи, будет 142 857.

Если в наших вычислениях не останавливаться на первой полученной единице, а продолжать дальше, то мы получим другие числа, удовлетворяющие условию задачи:

$$\underbrace{\underbrace{142\,857}\ \underbrace{142\,857}\ldots\underbrace{142\,857}}_{k\ \text{раз}}.$$

б) Так как при увеличении такого числа втрое количество цифр его не увеличилось, то первая цифра числа может быть равна только 1, 2 или 3.

Как мы видели в решении задачи а), она может быть равна 1. Покажем теперь, что она не может быть равна 3.

Действительно, если первая цифра искомого числа равна 3, то вторая цифра, равная первой цифре утроенного данного числа, равна 9. Но результат умножения на 3 числа, начинающегося с цифр 39, имеет больше цифр, чем само исходное число; поэтому оно не может получаться из первоначального числа перенесением первой цифры в конец.

Предоставляем читателям самостоятельно доказать, что искомые числа могут начинаться с цифры 2. Наименьшее подобное число есть 285 714; все такие числа, начинающиеся с цифры 2, имеют вид

$$\underbrace{\underbrace{285\,714}\ \underbrace{285\,714}\ldots\underbrace{285\,714}}_{k\ \text{раз}}$$

(доказательство аналогично решению задачи а)).

35. Первое решение. Пусть число X удовлетворяет условиям задачи:

$$X=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}6} \quad \text{и} \quad 4X=\overline{6a_1a_2\ldots a_{n-1}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, 6 — цифры числа X. Так как последняя цифра X есть 6, то последняя цифра a_{n-1} числа $4X$ есть 4; таким образом, $X=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}46}$, что позволяет найти предпоследнюю цифру $a_{n-2}=8$ числа $4X$. Записав теперь X в виде $\overline{\ldots 846}$, мы сможем найти, что $a_{n-3}=3$, и т. д. Этот процесс мы будем продолжать до тех пор, пока не получим в числе $4X$ цифры 6, которую можно считать перенесенной из конца числа X. Так мы находим, что наименьшее возможное число, удовлетворяющее условию задачи, есть $X=153\,846$; при этом $4X=615\,384$.

Второе решение. Так как искомое число X оканчивается цифрой 6, то его можно записать в виде $X=10x+6$, где x — число, получающееся из X зачеркиванием последней цифры 6. Если число x является n-значным, то из условия задачи вытекает, что

$$4\cdot(10x+6)=6\cdot 10^n+x,$$

т. е.

$$39x=6\cdot(10^n-4), \quad \text{или} \quad x=\frac{2(10^n-4)}{13}. \qquad (*)$$

Число 10^n-4, очевидно, равно 6, или 96, или 996, или 9996, ... Наименьшее из таких чисел, кратное 13,— это число $99\,996=13\cdot 7692$; ему отвечает значение $n=5$. Но в таком случае равенство (*) дает $x=15\,384$, и, значит, $X=153\,846$.

36. Если при увеличении числа в 5 раз количество его цифр не меняется, то искомое число должно начинаться с цифры 1. При перенесении этой цифры в конец мы получим число, оканчивающееся цифрой 1. Но такое число не может делиться на 5.

Так же доказывается, что не существует чисел, увеличивающихся в 6 или 8 раз от перестановки начальной цифры в конец.

37. Первое решение. Так как произведение искомого числа на 2 имеет то же самое число цифр, то первая цифра числа не может быть больше 4. Так как при перенесении первой цифры в конец мы должны получить четное число (удвоенное исходное число), то первая цифра должна быть четной. Поэтому она может быть равна только 2 или 4.

Теперь, предполагая, что первая цифра искомого числа равна 2 или 4, и обозначая число, получаемое из искомого отбрасыванием первой цифры, через X, мы получим аналогично первому решению задачи 34а):

$$(2\cdot 10^m + X)\cdot 2 = 10\cdot X + 2, \quad \text{откуда} \quad X = \frac{4\cdot 10^m - 2}{8} = \frac{2\cdot 10^m - 1}{4},$$

или

$$(4\cdot 10^m + X)\cdot 2 = 10\cdot X + 4, \quad \text{откуда} \quad X = \frac{8\cdot 10^m - 4}{8} = \frac{2\cdot 10^m - 1}{2}.$$

Но обе полученные формулы для числа X невозможны (целое число не может быть равно дроби, числитель которой нечетен, а знаменатель четен).

Второе решение. Как и в первом решении, убеждаемся, что первая цифра числа может быть равна только 2 или 4. Далее получаем в принятых ранее обозначениях (см. второе решение задачи 34а)):

$$\overline{2xy\ldots zt}\cdot 2 = \overline{xy\ldots zt2} \text{ или } \overline{4xy\ldots zt}\cdot 2 = \overline{xy\ldots zt4}.$$

В первом случае t может быть равно только 1 или 6 (в противном случае произведение слева не может оканчиваться цифрой 2). Но если $t=1$, то мы получаем слева число, не делящееся на 4, а справа — число, делящееся на 4 (оканчивающееся на 12). Если $t=6$, то, наоборот, слева будет стоять число, делящееся на 4, а справа — не делящееся на 4 (оканчивающееся на 62).

Во втором случае t может быть равно 2 или 7. Но если $t=2$, то аналогично второму решению задачи 34а) находим, что $z=1$ или 6; при $z=1$ произведение слева делится на 8 (произведение на 2 числа, оканчивающегося на 12), а число справа — не делится на 8 (оканчивается на 124); при $z=6$ число справа делится на 8, а произведение слева — только на 4. Аналогично показывается, что t не может равняться 7.

38. а) Первое решение. Число, увеличивающееся при перенесении первой цифры в конец в 7 раз, должно начинаться с цифры 1 (иначе число, большее первоначального в 7 раз, будет иметь больше цифр, чем первоначальное). Обозначая далее m-значное число, полученное из исходного отбрасыванием первой цифры, через X, мы будем иметь (ср. с решением задачи 34а))

$$(1\cdot 10^m + X)\cdot 7 = 10\cdot X + 1,$$

откуда получаем:

$$X = \frac{7\cdot 10^m - 1}{3}.$$

Но очевидно, что подобное число X ни при каком m не будет m-значным $\left(\frac{7\cdot 10^m - 1}{3} > 10^m\right)$.

Аналогично можно доказать, что не существует чисел, увеличивающихся в 9 раз от перестановки начальной цифры в конец.

Второе решение. Как в первом решении, показываем, что искомое число может начинаться только с цифры 1. Далее, имеем в принятых обозначениях:

$$\overline{1xy\ldots zt}\cdot 7 = \overline{xy\ldots zt1}.$$

Отсюда следует, что произведение $t\cdot 7$ оканчивается цифрой 1. Следовательно, $t=3$. Подставим это значение t: имеем $\overline{1xy\ldots z3}\cdot 7 = \overline{xy\ldots z31}$. Ввиду того что $3\cdot 7 = 21$, а произведение числа $\overline{z3}$ на 7 оканчивается на 31, произведение $z\cdot 7$ должно оканчиваться на 1. Следовательно, z также равно 3. Таким же образом доказывается, что каждая следующая (если рассматривать с конца) цифра нашего числа равна 3. Но начальная цифра должна быть 1. Этого мы никогда достичь не можем. Поэтому чисел, увеличивающихся в 7 раз от перестановки начальной цифры в конец, не существует.

Аналогично можно доказать, что не существует чисел, увеличивающихся от перестановки начальной цифры в конец в 9 раз.

б) Первое решение. Так как произведение искомого числа на 4 имеет не больше цифр, чем само число, то первая цифра числа должна быть не больше 2. Так как при перенесении первой цифры в конец мы получаем четное число, то первая цифра должна быть равна 2. Далее, обозначая через X m-значное число, которое получается из искомого при отбрасывании первой цифры, имеем:

$$(2\cdot 10^m + X)\cdot 4 = 10X + 2, \quad \text{откуда} \quad X = \frac{8\cdot 10^m - 2}{6},$$

что невозможно, так как $\frac{8\cdot 10^m - 2}{6} > 10^m$ (ср. с первым решением задачи а)).

Второе решение. Как в первом решении, получаем, что первая цифра искомого числа может быть только 2. Далее имеем:

$$\overline{2xy\ldots zt}\cdot 4 = \overline{xy\ldots zt2},$$

откуда следует, что $t=3$ или 8 ($t\cdot 4$ оканчивается на 2).

Если бы t равнялось 8, то число справа оканчивалось бы на 82 и не могло бы делиться на 4. Если же $t=3$, то

$$\overline{2xy\ldots z3}\cdot 4 = \overline{xy\ldots z32},$$

откуда

$$\overline{2xy\ldots z0}\cdot 4 = \overline{xy\ldots z20}$$

и

$$\overline{2xy\ldots z}\cdot 4 = \overline{xy\ldots z2}.$$

Таким образом, мы видим, что число $\overline{2xy\ldots z}$ обладает тем же свойством, что и $\overline{2xy\ldots zt}$. Поэтому, применив те же рассуждения, получим $z=3$. Продолжая дальше эти вычисления и двигаясь последовательно справа налево, мы получим, что в десятичной записи нашего числа стоят только цифры 3. В то же время оно начинается с 2. Значит, такого числа не существует.

39. Первое решение. Обозначим неизвестные пока цифры искомого числа через $x, y, \ldots, z, t$. В таком случае в обозначениях второго решения задачи 34 а) имеем:

$$\overline{7xy \ldots zt} \cdot \frac{1}{3} = \overline{xy \ldots zt7},$$

или

$$\overline{xy \ldots zt7} \cdot 3 = \overline{7xy \ldots zt}.$$

Теперь сразу ясно, что $t=1$; после этого мы можем определить цифру z ($17 \cdot 3$ оканчивается на 51; значит, $z=5$) и так последовательно с конца находить новые и новые цифры искомого числа. Вычисление следует прекратить тогда, когда мы придем к цифре 7. Его удобно расположить следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} 2413793103448275862068965517 & & 7241379310344827586206896551 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 7 \cdot 3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

(вычисления проводятся справа налево). Таким образом, наименьшим числом, удовлетворяющим условиям задачи, будет 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551.

Если в наших вычислениях не останавливаться на первой семерке, а продолжать дальше, то мы получим другие числа, удовлетворяющие условию задачи. Все такие числа будут иметь вид

$$\underbrace{\underbrace{7241379310344827586206896551}\ldots\underbrace{7241379310344827586206896551}}_{k \text{ раз}}.$$

Второе решение. Пусть $\overline{7xyz \ldots t}$ — искомое число. Тогда при делении его на 3 получится число $\overline{xyz \ldots t7}$. Запишем это в виде

$$\overline{7xyz \ldots t} \;\Big|\; \frac{3}{\overline{xyz \ldots t7}}.$$

Отсюда ясно, что $x=2$. Если мы запишем в делимом и частном это значение, то можно будет найти вторую цифру частного; воспользовавшись ею, можно будет найти третью цифру делимого; отсюда можно найти третью цифру частного, и т. д. Процесс закончится тогда, когда последняя полученная цифра частного будет 7, а выписанное делимое разделится на 3 без остатка.

Легко видеть, что это число является искомым, так как если мы в нем переставим 7 из начала в конец, то получится число, записанное нами в качестве частного, т. е. втрое меньшее.

Так как до этого места мы по написанным уже цифрам с необходимостью получали следующую, то указанное число будет наименьшим, обладающим требуемым свойством. Вычисления можно расположить так: в верхней строке будем выписывать цифры делимого, во второй строке — число, при делении которого на 3 получается очередная цифра частного, а в нижней — эту цифру:

7 2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2
7 12 4 11 23 27 9 3 1 10 13 14 24 8 22 17 25 18 6 2
2 4 1 3 7 9 3 1 0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0
0 6 8 9 6 5 5 1
20 26 28 19 16 15 5 21
6 8 9 6 5 5 1 7

Итак, наименьшее число, обладающее требуемым свойством: 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551.

Третье решение. Аналогично первому решению задачи 34 а), используя похожие обозначения, будем иметь:

$$(7\cdot 10^m + X)\cdot\frac{1}{3} = 10X + 7,$$

откуда

$$X = \frac{7\cdot 10^m - 21}{29}.$$

Таким образом, задача сводится к определению такого числа вида 70 000..., которое при делении на 29 дает в остатке 21. Предоставляем читателю самому проверить, что при этом мы приходим к тому же результату, что и в первых двух решениях.

Примечание. Аналогично можно решить следующую задачу:

Найти наименьшее число, начинающееся с известной цифры, которое уменьшается в 3 раза от перестановки первой цифры в конец. Для того чтобы можно было искать и решения, начинающиеся с цифр 1 и 2, будем считать, что 0 может стоять в начале числа.

Если в начале числа стоит цифра 0, то легко убедиться, что требуемым свойством обладает лишь число 0. Выпишем остальные числа, обладающие этим свойством:

1 034 482 758 620 689 655 172 413 793
2 068 965 517 241 379 310 344 827 586
3 103 448 275 862 068 965 517 241 379
4 137 931 034 482 758 620 689 655 172
5 172 413 793 103 448 275 862 068 965
6 206 896 551 724 137 931 034 482 758
8 275 862 068 965 517 241 379 310 344
9 310 344 827 586 206 896 551 724 137

Таким же способом можно решить задачу:

Найти наименьшее целое число, начинающееся заданной цифрой a и уменьшающееся от перестановки этой цифры в конец в l раз. Найти все такие числа.

40. а) По условию задачи имеем:

$$\overline{xy\ldots zt}\cdot a = \overline{tz\ldots yx},$$

где a есть одно из чисел 2, 3, 5, 6, 7 или 8.

Если $a = 5$, то x должно равняться 1, так как иначе число $\overline{xy\ldots zt}\cdot 5$ будет иметь больше цифр, чем $\overline{xy\ldots zt}$ (случай $x = 0$

исключаем, так как в этом случае $\overline{y\ldots zt} = 2 \cdot \overline{tz\ldots y}$, т. е. мы приходим к той же задаче с $a = 2$). Но число $\overline{tz\ldots y1}$ не может делиться на 5. Аналогично доказываем, что a не может быть равно 6 или 8.

Если $a = 7$, то x тоже должно равняться 1. Но в таком случае t должно равняться трем,— иначе $\overline{1y\ldots zt} \cdot 7$ не будет оканчиваться цифрой 1. А равенство $\overline{1y\ldots z3} \cdot 7 = \overline{3z\ldots y1}$, очевидно, является абсурдным (левая часть равенства явно больше правой).

Если $a = 2$, то x не может быть больше 4. А так как число $\overline{tz\ldots yx}$ в этом случае четно, то x должно быть равно 2 или 4. Но при $x = 4$ цифра t (первая цифра числа $\overline{4y\ldots zt} \cdot 2$) может быть равна только 8 или 9, а ни $\overline{4y\ldots z8} \cdot 2$, ни $\overline{4y\ldots z9} \cdot 2$ не могут оканчиваться на 4. Если $x = 2$, то t (первая цифра числа $\overline{2y\ldots zt} \cdot 2$) может быть равна только 4 или 5; но ни $\overline{2y\ldots z4} \cdot 2$, ни $\overline{2y\ldots z5} \cdot 2$ не могут оканчиваться на 2.

Наконец, если $a = 3$, то x не может быть больше 3. Если $x = 1$, то t должно быть равно 7 ($t \cdot 3$ оканчивается на 1); если $x = 2$, то t должно быть равно 4; если $x = 3$, то t должно быть равно 1. Но в первом случае $\overline{tz\ldots yx}$ больше, чем $\overline{xy\ldots zt} \cdot 3$, а во втором и в третьем — меньше.

б) Пусть $\overline{xy\ldots zt}$ — такое число; тогда

$$\overline{xy\ldots zt} \cdot 4 = \overline{tz\ldots yx}.$$

Так как $\overline{xy\ldots zt} \cdot 4$ имеет то же число цифр, что и $\overline{xy\ldots zt}$, то x может быть равен лишь 0, 1 или 2; так как $\overline{tz\ldots yx}$ делится на 4, то x должен быть четным. Следовательно, x может быть равен 0 или 2.

Пусть $x = 0$. Очевидно, что число 0 обладает требуемым свойством. Будем допускать десятичные записи, в начале которых может стоять один или несколько нулей. Тогда мы имеем $\overline{y\ldots zt} \cdot 4 = \overline{tz\ldots y0}$, откуда $t = 0$ (ибо $t < 4$) и $\overline{y\ldots z} \cdot 4 = \overline{z\ldots y}$: если число обладает требуемым свойством и начинается нулем, то оно оканчивается также нулем, и число, которое получится, если мы зачеркнем первый и последний нули, также будет обладать требуемым свойством.

Поэтому достаточно рассмотреть случай $x = 2$. Тогда имеем $\overline{2y\ldots zt} \cdot 4 = \overline{tz\ldots y2}$. Ввиду того что $2 \cdot 4 = 8$, t может быть равно лишь 8 или 9. Но произведение $t \cdot 4$ оканчивается на 2; следовательно, $t = 8$, т. е. можно написать $\overline{2y\ldots z8} \cdot 4 = \overline{8z\ldots y2}$. Так как $23 \cdot 4 > 90$, y может быть равно лишь 0, 1 или 2; но при любом z в произведении $\overline{z8} \cdot 4$ цифра десятков нечетная. Следовательно, $y = 1$. Так как нам известны две последние цифры произведения $\overline{2y\ldots z8} \cdot 4$, то для предпоследней цифры z этого числа остаются лишь две возможности: z может быть равно лишь 2 или 7. Но $21 \times 4 > 82$, значит, $z = 7$.

Итак, наше число имеет вид $\overline{21\ldots 78}$. Если оно четырехзначно, то мы получаем число 2178, удовлетворяющее условию задачи. Рассмотрим теперь случай, когда число цифр рассматриваемого числа больше 4. В этом случае имеем:

$$\overline{21uv\ldots rs78}\cdot 4 = \overline{87sr\ldots vu12},$$

или после очевидных преобразований

$$84\cdot 10^{k+2} + 312 + \overline{uv\ldots rs00}\cdot 4 = 87\cdot 10^{k+2} + 12 + \overline{sr\ldots vu00},$$
$$\overline{uv\ldots rs}\cdot 4 + 3 = \overline{3sr\ldots vu}.$$

Так как число $\overline{uv\ldots rs}$ при умножении на 4 дает число, имеющее больше цифр, чем оно само, и при этом начинающееся с цифры 3 (или, в крайнем случае, с комбинации цифр 29), то u может быть равно только 9, 8 или 7. Так как $\overline{3sr\ldots vu}$ нечетно, то u может быть равно только 9 или 7. Рассмотрим эти случаи последовательно.

1°. $u = 9$. В таком случае, очевидно, получаем:

$$\overline{9v\ldots rs}\cdot 4 + 3 = \overline{3sr\ldots v9},$$

откуда следует, что $s = 9$ ($s\cdot 4$ оканчивается на 6; если $s = 4$, то $\overline{34r\ldots v9}$ меньше, чем $\overline{9v\ldots r4}\cdot 4 + 3$) и

$$\overline{9v\ldots r9}\cdot 4 + 3 = \overline{39r\ldots v9},\quad \overline{v\ldots r}\cdot 4 + 3 = \overline{3r\ldots v},$$

т. е. число, получаемое из $\overline{uv\ldots rs}$ отбрасыванием цифры 9 в начале и в конце, обладает тем же свойством, что и само число $\overline{uv\ldots rs}$. В частности, $\overline{uv\ldots rs}$ может равняться 9, 99, 999, и т. д.; при этом мы получаем числа

$$21\,978,\ 219\,978,\ 2\,199\,978,\ \ldots,$$

удовлетворяющие условию задачи.

2°. $u = 7$. В этом случае имеем:

$$\overline{7v\ldots rs}\cdot 4 + 3 = \overline{3sr\ldots v7},$$

откуда аналогично тому, как мы рассуждали в начале решения задачи, легко получить, что $s = 1$; $v = 8$; $r = 2$, т. е. что число $\overline{uv\ldots rs}$ имеет вид $\overline{78\ldots 21}$ и что число, которое получается из $\overline{uv\ldots rs}$ отбрасыванием 78 в начале и 21 в конце, в 4 раза меньше своего обращенного.

Отсюда видно, что если число, в 4 раза меньшее своего обращенного, отлично от чисел ряда

$$0,\ 2178,\ 21\,978,\ 219\,978,\ \ldots,\ 21\underbrace{99\ldots 9}_{k\ \text{цифр}}78,\ 21\underbrace{99\ldots 99}_{(k+1)\ \text{цифр}}78,\ \ldots, \qquad (*)$$

то в начале и в конце его стоит одна и та же последовательность цифр, составляющих одно из чисел этого ряда, и если зачеркнуть эти цифры (и в начале и в конце), то получится также число, в 4 раза меньшее своего обращенного, или, как в случае числа 21 782 178, при этом будут зачеркнуты все цифры нашего числа.

Поэтому десятичная запись любого числа, в 4 раза меньшего своего обращенного, имеет вид

$$P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1$$

или же

$$P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_nP_{n-1}\ldots P_2P_1,$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — последовательности цифр, составляющие какие-либо числа из написанного выше ряда (*). Таковы, например, числа:

$$2\,197\,821\,978,\ 2\,199\,782\,178\,219\,978,$$

$$21\,978\,021\,997\,800\,219\,978\,021\,978,\ 02\,199\,999\,780$$

(последнее число следует считать решением задачи, если условиться, что можно в начале десятичной записи числа ставить 0).

Аналогично доказывается, что все числа, в 9 раз меньшие своего обращенного, получаются из чисел ряда

$$0,\ 1089,\ 10\,989,\ 109\,989,\ \ldots,\ 10\underbrace{99\ldots9}_{k\ \text{раз}}89,\ 10\underbrace{99\ldots99}_{(k+1)\ \text{раз}}89,\ \ldots$$

таким же образом, как и числа, в 4 раза меньшие своего обращенного, получаются из чисел ряда (*).

41. а) Обозначим число, составленное первыми тремя цифрами искомого числа N, через p, а число, образуемое тремя последними цифрами числа N, — через q. В таком случае условие задачи дает

$$1000q+p=6(1000p+q)\quad (=6N),$$

откуда

$$(1000q+p)-(1000p+q)=999(q-p)=5N,$$

т. е. N делится на 999.

Далее, $p+q=(1000p+q)-999p=N-999p$, откуда следует, что $p+q$ тоже делится на 999. Но p и q — трехзначные числа, которые, очевидно, не могут оба равняться 999; следовательно,

$$p+q=999.$$

Теперь без труда находим:

$$(1000q+p)+(1000p+q)=1001(p+q)=7N$$

и, значит,

$$7N=999\,999,\qquad N=142\,857.$$

б) Совершенно аналогично решению задачи а), обозначая через p число, образуемое первыми четырьмя цифрами искомого числа N, а через q — число, образуемое последними четырьмя цифрами, находим:

$$7N=10\,001\,(p+q)=99\,999\,999,$$

что невозможно при целом N (ибо 99 999 999 не делится на 7).

42. Пусть x — число, удовлетворяющее этому условию. Так как $6x$, так же как и x, — шестизначное число, то первая цифра десятичной записи числа x равна 1. Поэтому:

1) первые цифры десятичной записи чисел x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ и $6x$ все различны, следовательно, составляют полный набор цифр, участвующих в десятичной записи числа x;

2) все цифры в десятичной записи числа x различны между собой.

Среди этих цифр нет 0, поэтому последняя цифра числа x нечетна (иначе $5x$ оканчивается нулем) и отлична от 5 (иначе $2x$ оканчивается нулем). Вследствие этого последние цифры десятичной записи чисел x, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ и $6x$ все различны, а значит, также составляют полный набор цифр, участвующих в десятичной записи числа x. Поэтому среди них есть 1. Оканчиваться на 1 может лишь число $3x$, так как $2x$, $4x$ и $6x$ оканчиваются на четные цифры, $5x$ оканчивается на 5, а в десятичной записи x уже есть 1 (первая цифра). Следовательно, x оканчивается цифрой 7, $2x$ — цифрой 4, $3x$ — цифрой 1, $4x$ — цифрой 8, $5x$ — цифрой 5 и $6x$ — цифрой 2. Так как первые цифры этих чисел — цифры того же набора, расположенные в возрастающем порядке, то можно написать:

$$\begin{aligned} x\cdot 1 &= 1****7,\\ x\cdot 2 &= 2****4,\\ x\cdot 3 &= 4****1,\\ x\cdot 4 &= 5****8,\\ x\cdot 5 &= 7****5,\\ x\cdot 6 &= 8****2 \end{aligned}$$

(звездочки стоят на месте неизвестных нам пока цифр).

Отметим теперь, что в выписанной таблице не только в каждой строке стоят в каком-то порядке шесть разных цифр 1, 2, 4, 5, 7 и 8, но и в каждом столбце стоят в каком-то порядке те же самые шесть р а з н ы х цифр. Действительно, предположим, например, что в числах $x\cdot 2$ и $x\cdot 5$ на третьем месте стоит одна и та же цифра a (a может иметь одно из двух значений, не занятых первыми и последними цифрами рассматриваемых двух чисел). В таком случае разность $x\cdot 5 - x\cdot 2 = x\cdot 3$ будет представлять собой шестизначное число, в десятичной записи которого на третьем месте стоит цифра 0 или цифра 9 (это следует из правила вычитания многозначных чисел «столбиком»). Но это невозможно, так как мы знаем, что число $x\cdot 3$ записывается цифрами 1, 2, 4, 5, 7 и 8.

Сложим теперь числа

$$\begin{aligned} x\cdot 1 &= 1****7,\\ x\cdot 2 &= 2****4,\\ x\cdot 3 &= 4****1,\\ x\cdot 4 &= 5****8,\\ x\cdot 5 &= 7****5,\\ x\cdot 6 &= 8****2 \end{aligned}$$

«столбиком», учитывая, что сумма цифр каждого столбца равна $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 27$. Мы получим:

$$x\cdot 21 = 2\,999\,997,$$

или $x = 142\,857$. Это и есть искомое число; действительно,

$$\begin{aligned} x &= 142857,\\ 2x &= 285714,\\ 3x &= 428571,\\ 4x &= 571428,\\ 5x &= 714285,\\ 6x &= 857142. \end{aligned}$$

43. Пусть $N = \overline{xyz} = 100x + 10y + z$ — искомое число, x, y, z — цифры числа. Перестановками цифр из N получаются числа $N_1 = \overline{yxz} = 100y + 10x + z$, ..., $N_5 = \overline{zyx} = 100z + 10y + x$. Сумма $N + N_1 + \ldots + N_5$ всех этих чисел должна равняться ушестеренному числу N, откуда без труда получаем:

$$(2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2)(x + y + z) = 6(100x + 10y + z)$$

(ибо в шестерке чисел N, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 каждая из цифр, например, x, 2 раза встречается на первом месте, 2 раза — на втором и 2 раза — на третьем), или

$$37(x + y + z) = 100x + 10y + z,$$

т. е.

$$63x = 27y + 36z.$$

Сокращая обе части на 9, находим:

$$7x = 3y + 4z, \text{ или } 7(x - y) = 4(z - y).$$

Но разности $x - y$ и $z - y$ по абсолютной величине не превосходят 9, откуда вытекает, что последнее равенство возможно лишь, если

$$x - y = 0,\ z - y = 0, \text{ или } x - y = 4,\ z - y = 7, \text{ или}$$
$$x - y = -4,\ z - y = -7.$$

При этом если $z - y = 7$, то $z = 9$, 8 или 7; если $z - y = -7$, то $y = 9$, 8 или 7; поэтому (отбрасывая сомнительное «решение» $N = 000$) получаем 15 возможных значений числа N:

$N = 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 407,$
$518, 629, 370, 481$ или 592.

44. Ясно, что числа A и A' должны быть 10-значными; пусть $A = \overline{a_{10}a_9a_8 \ldots a_1}$ и $A' = \overline{a'_{10}a'_9a'_8 \ldots a'_1}$ (a_{10}, a_9, a_8, ..., a_1 — последовательные цифры числа A, а a'_{10}, a'_9, ..., a'_1 — цифры числа A'). Представим себе процесс сложения «столбиком» чисел A и A'. Ясно, что в сумме может получиться число $10^{10} = 10\,000\,000\,000$ лишь в том случае, если существует такой номер i (где $0 \leqslant i \leqslant 9$), что

$$a_1 + a'_1 = 0,\ a_2 + a'_2 = 0,\ \ldots,\ a_i + a'_i = 0,$$
$$a_{i+1} + a'_{i+1} = 10,\ a_{i+2} + a'_{i+2} = 9,\ \ldots,\ a_{10} + a'_{10} = 9 \quad (*)$$

(если $i = 9$, то равных девяти сумм $a_{i+2} + a'_{i+2}$, $a_{i+3} + a'_{i+3}$, ... просто нет, а если $i = 0$, то отсутствуют равные нулю суммы $a_1 + a'_1, \ldots, a_i + a'_i$). Сложим теперь все суммы (*); мы получим

$$\left(a_1 + a'_1\right) + \left(a_2 + a'_2\right) + \ldots + \left(a_{10} + a'_{10}\right) = 10 + 9(9 - i).$$

А так как $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{10}$ — это о д н и и т е ж е цифры (только взятые в разном порядке), то в правой части последнего равенства стоит четное число $2(a_1+a_2+\ldots+a_{10})$; поэтому число $10+9(9-i)$ тоже *четно*. Отсюда следует, что число i — обязательно *нечетно*, т. е. i не может быть нулем ($i=1$, или 3, или 5, ...); поэтому $a_1+a_1'=0$, т. е. $a_1=a_1'=0$. Но это и означает, что числа A и A' делятся на 10.

45. Представим себе выписанные друг под другом числа M и N и процесс сложения «столбиком» этих чисел; при этом пусть все цифры полученной суммы $M+N$ — *нечетные*. Отсюда следует, что сумма цифр последнего столбика нечетна; а тогда и сумма цифр первого столбика, отличающегося от последнего столбца лишь порядком цифр, также нечетна. Но это возможно лишь в том случае, если при сложении цифр 2-го столбца из этого столбца в первый не переносится единица, т. е. если сумма цифр 2-го (а значит — и предпоследнего) столбца меньше 10. Поэтому из предпоследнего столбца также не переносится в 3-й от конца столбец единица: ведь случай, когда сумма цифр предпоследнего столбца равна 9 (т. е. <10), но единица из этого столбца в следующий все же переносится за счет заимствованной из последнего столбца единицы, явно невозможен, ибо в этом случае предпоследняя цифра суммы $M+N$ будет равна 0, т. е. окажется ч е т н о й. Таким образом, *два последних* (*и два первых*) *столбца* нашей *суммы* никак *не влияют на остальные цифры суммы* $M+N$; поэтому мы можем отбросить в числах M и N по две первые и две последние цифры — и продолжать наши рассмотрения, исходя уже из «усеченных» (13-значных) чисел M_1 и N_1.

Составим теперь сумму M_1+N_1 чисел M_1 и N_1; при этом, как и выше, можно показать, что *если все цифры числа* M_1+N_1 *нечетные, то при сложении столбиком 13-значных чисел* M_1 *и* N_1 *два последних и два первых столбца не влияют на «средние» цифры суммы* M_1+N_1 (на все цифры, кроме двух первых и двух последних). Поэтому мы можем «усечь» также и числа M_1 и N_1, отбросив в каждом из них по две последние и по две первые цифры и перейдя, таким образом, к 9-значным числам M_2 и N_2. С числами M_2 и N_2 мы затем производим ту же операцию, переходя к 5-значным числам M_3 и N_3; наконец, мы таким же образом «усекаем» числа M_3 и N_3, переходя к (однозначным!) числам M_4 и N_4, записываемым одной («средней») цифрой чисел M и N. Но ясно, что цифры (точнее — цифра!) числа $M_4+N_4=2M_4$ не могут быть нечетными (ибо число $2M_4$ четно!); этим и устанавливается, что также и все цифры суммы $M+N$ не могут быть нечетными.

П р и м е ч а н и е. Ясно, что проведенное рассуждение имеет общий характер, сохраняя силу для любых двух «перевернутых» чисел M и N, число цифр в каждом из которых имеет вид $4n+1$, т. е. дает при делении на 4 остаток 1. Если же число цифр числа M (и «перевернутого» числа N) не имеет вида $4n+1$, то сумма $M+N$ м о ж е т записываться одними лишь нечетными цифрами (докажите это!).

46. а) $n^3-n=(n-1)n(n+1)$, а из трех последовательных целых чисел одно обязательно делится на 3.

б) $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Если целое число оканчивается одной из цифр 0, 1, 4, 5, 6 или 9, то один из первых трех множителей делится на 5. Если n оканчивается одной из цифр 2, 3, 7 или 8, то n^2 оканчивается на 4 или 9 и n^2+1 делится на 5.

в) $n^7-n=n(n-1)(n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+1)$. Если n делится на 7 или дает при делении на 7 остаток 1 или 6, то один из первых трех множителей делится на 7. Если n дает при делении на 7 остаток 2 ($n=7k+2$), то n^2 дает при делении на 7 остаток 4 ($n^2=49k^2+28k+4$) и, следовательно, n^2+n+1 делится на 7. Точно так же показывается, что если n дает при делении на 7 остаток 4, то n^2+n+1 делится на 7, а если n дает при делении на 7 остаток 3 или 5, то n^2-n+1 делится на 7.

г) $n^{11}-n=n(n-1)(n+1)(n^8+n^6+n^4+n^2+1)$. Если n делится на 11 или дает при делении на 11 остаток 1 или 10, то один из первых трех множителей делится на 11. Если n дает при делении на 11 остаток 2 или 9 ($n=11k\pm 2$), то n^2 дает при делении на 11 остаток 4 ($n^2=121k^2\pm 44k+4$, n^4 — остаток $5=16-11$, n^6 — остаток $9=20-11$ ($n^6=n^4\cdot n^2=(11k_1+5)\times$ $\times(11k_2+4)=121k_1k_2+11(4k_1+5k_2)+20$) и n^8 — остаток $3=$ $=25-22$; отсюда следует, что $n^8+n^6+n^4+n^2+1$ делится на 11. Точно так же показывается, что $n^8+n^6+n^4+n^2+1$ делится на 11, если n дает при делении на 11 остаток ± 3, ± 4 или ± 5.

д) $n^{13}-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)(n^4+n^2+1)$. Аналогично решению предыдущих задач замечаем, что если n делится на 13 или дает при делении на 13 остаток ± 1, то один из первых трех множителей делится на 13; если n дает при делении на 13 остаток ± 5, то n^2+1 делится на 13; если n дает при делении на 13 остаток ± 2 или ± 6, то n^4-n^2+1 делится на 13; если n дает при делении на 13 остаток ± 3 или ± 4, то n^4+n^2+1 делится на 13.

47. а) Разность одинаковых четных степеней делится на сумму оснований; поэтому $3^{6n}-2^{6n}=27^{2n}-8^{2n}$ делится на $27+8=35$.

б) Нетрудно проверить, что

$$n^5-5n^3+4n=n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Но из пяти последовательных целых чисел одно наверное делится на 5, по крайней мере одно на 3 и по крайней мере два на 2, причем из этих двух последних чисел одно наверное делится на 4. Таким образом, произведение пяти последовательных целых чисел всегда делится на $5\cdot 3\cdot 2\cdot 4=120$ (ср. с решением задачи 46а)).

в) Воспользуемся тождеством

$$n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33.$$

Для того чтобы это выражение делилось на 11, необходимо, чтобы $(n+7)(n-4)$ делилось на 11. Но так как $(n+7)-(n-$ $-4)=11$, то оба сомножителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Поэтому если $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится и на 121 и, следовательно, $(n+7)(n-4)+33$ не может делиться на 121.

48. а) Нетрудно проверить, что

$$56\,786\,730=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 31\cdot 61;$$

таким образом, остается доказать, что наше выражение делится на каждый из этих простых делителей. Если m и n оба нечетны, то $m^{60}-n^{60}$ — четно; следовательно, $mn(m^{60}-n^{60})$ обязательно четно (делится на 2). Далее из результата задачи 46 следует, что если k равно 3, 5, 7, 11 или 13 и n не делится на k, то разность $n^{k-1}-1$ обязательно будет делиться на k. Отсюда, в частности, вытекает, что если m и n не делятся на 3, то $m^{60}-1=(m^{30})^2-1$ и $n^{60}-1=(n^{30})^2-1$ делятся на 3, т. е. m^{60} и n^{60} дают при делении на 3 один и тот же остаток 1; следовательно, если mn не делится на 3, то $m^{60}-n^{60}$ делится на 3 и, значит, произведение $mn(m^{60}-n^{60})$ делится на 3 во всех случаях. Точно так же доказывается, что разность

$$m^{60}-n^{60}=(m^{15})^4-(n^{15})^4=(m^{10})^6-(n^{10})^6=$$
$$=(m^6)^{10}-(n^6)^{10}=(m^5)^{12}-(n^5)^{12}$$

делится на 5, если ни m, ни n не делятся на 5; делится на 7, если ни m, ни n не делятся на 7; делится на 11, если ни m, ни n не делятся на 11; делится на 13, если ни m, ни n не делятся на 13. Таким образом, мы доказали, что $mn(m^{60}-n^{60})$ всегда делится на $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.

Аналогично показывается, что выражение $mn(m^{60}-n^{60})$ делится на 31 и на 61 (так как $n^{31}-n$ при всяком целом n делится на 31 и $n^{61}-n$ при всяком целом n делится на 61; см. ниже задачу 340).

б) Представим данное выражение в виде

$$(m-2n)(m-n)(m+n)(m+2n)(m+3n).$$

При $n\neq 0$ все пять сомножителей этого произведения попарно различны. Между тем число 33 нельзя разложить более чем на четыре различных целых множителя (разложение на четыре множителя возможно несколькими способами, например, $33=(-11)\times\times 3\cdot 1\cdot(-1)$ или $33=11\cdot(-3)\cdot 1\cdot(-1)$).

При $n=0$ наше выражение есть m^5 и не равно 33 ни при каком целом m.

49. Заметим, прежде всего, что $323=17\cdot 19$; таким образом, нам надо выяснить, когда выписанное в условии задачи число N делится и на 17, и на 19. Пусть сначала число $n=2k$ — четное. Ясно, что 20^n-3^n при всех n делится на $20-3=17$; с другой стороны, $16^n-1^n=16^{2k}-1^{2k}$ делится на $16^2-1^2=(16-1)\times\times(16+1)=15\cdot 17$, а значит, при четном n также и число 16^n-1 делится на 17, т. е. в этом случае $N=(20^n-3^n)+(16^n-1)$ делится на 17. С другой стороны, число 20^n-1 при всех n делится на $20-1=19$, а число $16^n-3^n=16^{2k}-3^{2k}$ делится на $16^2-3^2=(16-3)(16+3)=19\cdot 13$, т. е. также делится на 19; поэтому и число $N=(20^n-1)+(16^n-3^n)$ делится на 19. Таким образом, *при всех четных n число N на 323 делится.* С другой стороны, если $N=2k+1$ нечетно, то число 20^n-3^n по-прежнему делится на 17; поскольку же $16^{2k}-1$ делится на 17, то 16^{2k} при делении на 17 дает остаток 1, а значит, число $16^{2k+1}=16^{2k}\cdot 16$ при делении на 17 дает остаток $1\cdot 16=16$; поэтому число $16^n-1=16^{2k+1}-1$ на 17 не делится (оно дает при делении на 17 остаток 15). Таким образом, *при n нечетном число N* не делится уже на 17 — и тем более оно *не делится на 323.*

Итак, число N делится на 323 в том и только в том случае, когда *n — четное.*

50. Если число n оканчивается, соотвественно, цифрой 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то n^2 оканчивается цифрой 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 и, значит, n^2+n оканчивается на 0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0, а число n^2+n+1 оканчивается цифрой 1, 3, 7, 3, 1, 1, 3, 7, 3, 1. Таким образом, *число* n^2+n+1 никогда не кончается цифрой 0 или 5, т. е. *никогда* не делится на 5 (а значит, *не делится* и *на* 1955).

51. Всякое целое число или делится на 5 или может быть представлено в одном из следующих четырех видов $5k+1$, $5k+2$, $5k-2$ или $5k-1$. Если число делится на 5, то его сотая степень, очевидно, делится на $5^3=125$. Далее, по формуле бинома Ньютона получим:

$$(5k\pm 1)^{100}=(5k)^{100}\pm\ldots+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}(5k)^2\pm 100\cdot 5k+1,$$

где все невыписанные члены содержат множитель $5k$ в степени, не меньшей 3, и, следовательно, делятся на 125. Аналогично

$$(5k\pm 2)^{100}=(5k)^{100}\pm\ldots+\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}(5k)^2\cdot 2^{98}\pm 100\cdot 5k\cdot 2^{99}+2^{100}.$$

Но $\frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}(5k)^2=125\cdot 990k^2$ и $100\cdot 5k=125\cdot 4k$ делятся на 125. Что касается числа 2^{100}, то его можно представить в виде

$$(5-1)^{50}=5^{50}-\ldots+\frac{50\cdot 49}{1\cdot 2}\cdot 5-50\cdot 5+1,$$

откуда видно, что оно дает при делении на 125 остаток 1.

Итак, сотая степень числа, делящегося на 5, делится на 125; сотая степень числа, не делящегося на 5, дает при делении на 125 остаток 1.

52. Нам надо доказать, что если N взаимно просто с 10, то $N^{101}-N=N(N^{100}-1)$ делится на 1000, т. е. что $N^{100}-1$ делится на 1000. Прежде всего совершенно ясно, что если N нечетно, то $N^{100}-1=(N^{50}+1)(N^{25}+1)(N^{25}-1)$ делится на 8. Далее, из результата предыдущей задачи следует, что если N не делится на 5, то $N^{100}-1$ делится на 125. Таким образом, мы видим, что действительно $N^{100}-1$ при N, взаимно простом с 10, делится на $8\cdot 125=1000$.

53. Пусть N — искомое число; тогда, в частности, N^2-N оканчивается тремя нулями, т. е. делится на 1000. Так как $N^2-N=N(N-1)$, а N и $N-1$ — взаимно простые числа, то это возможно *лишь в том случае, когда одно из этих чисел делится на 8, а второе — на 125* (на 1000 ни одно из этих чисел само делиться не может, так как N трехзначно).

Если N есть трехзначное число, делящееся на 125, то $N-1$, как легко проверить, будет делиться на 8, лишь если $N=625$, $N-1=624$. Так же легко проверяется, что если $N-1$ есть трехзначное число, делящееся на 125, то N будет делиться на 8 лишь при $N-1=375$, $N=376$.

Заметим теперь, что так как $N^{k-1}-1$ при любом целом $k\geqslant 2$ делится без остатка на $N-1$, то $N^k-N=N(N^{k-1}-1)$ при любом целом k будет делиться без остатка на $N(N-1)=N^2-N$; поэтому если N^2-N оканчивается тремя нулями, то и N^k-N при любом целом $k\geqslant 2$ будет оканчиваться тремя нулями, т. е. N^k будет оканчиваться теми же тремя цифрами, что и N. Отсюда вытекает, что числа 625 и 376 (и только они) удовлетворяют условиям задачи.

54. Найдем две последние цифры числа N^{20}. Число N^{20} делится на 4 (ибо N четно). Далее, число N не делится на 5 (иначе оно делилось бы на 10) и, значит, представимо в виде $5k \pm 1$ или в виде $5k \pm 2$ (ср. с решением задачи 51). Но число

$$(5k \pm 1)^{20} = (5k)^{20} \pm 20(5k)^{19} + \ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}(5k)^2 \pm 20 \cdot 5k + 1$$

дает при делении на 25 остаток 1, а число

$$(5k \pm 2)^{20} = (5k)^{20} \pm 20\,(5k)^{19} \cdot 2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}(5k)^2 \cdot 2^{18} \pm 20 \cdot 5k \cdot 2^{19} + 2^{20}$$

дает при делении на 25 тот же остаток, что и число $2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 = (1025 - 1)^2$, т. е. тоже остаток 1. Из того, что число N^{20} дает при делении на 25 остаток 1, следует, что последними двумя цифрами этого числа могут быть лишь цифры 01, 26, 51 или 76. Учитывая еще, что N^{20} должно делиться на 4, получим, что двумя последними цифрами этого числа могут быть лишь цифры 76. Итак, цифрой десятков числа N^{20} будет цифра 7.

Найдем теперь три последние цифры числа N^{200}. Число N^{200} делится на 8. Далее, так как N взаимно просто с 5, то N^{100} дает при делении на 125 остаток 1 (см. решение задачи 51): $N^{100} = 125k + 1$. Но тогда и $N^{200} = (125k + 1)^2 = 125^2k^2 + 250k + 1$ дает при делении на 125 остаток 1. Следовательно, N^{200} может оканчиваться цифрами 126, 251, 376, 501, 626, 751 или 876; но так как N^{200} делится на 8, то оно должно оканчиваться цифрами 376. Итак, цифра сотен числа N^{200} равна 3.

Примечание. Нетрудно видеть, что уже число N^{100} обязательно оканчивается тремя цифрами 376.

55. Сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ равна $\frac{n(n+1)}{2}$; следовательно, нам надо доказать, что если k нечетно, то $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ делится на $\frac{n(n+1)}{2}$.

Отметим прежде всего, что при k нечетном $a^k + b^k$ делится на $a + b$. Рассмотрим теперь отдельно два случая:

А. Число n четно. В таком случае сумма S_k делится на $n + 1$, так как каждая из сумм

$$1^k + n^k,\ 2^k + (n-1)^k,\ 3^k + (n-2)^k,\ \ldots,\ \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^k$$

делится на

$$1 + n \left[= 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = \ldots = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right];$$

сумма S_k делится также на $\frac{n}{2}$, ибо $1^k + (n-1)^k$, $2^k + (n-2)^k$, $3^k + (n-3)^k$, $\ldots, \left(\frac{n}{2} - 1\right)^k + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^k$, $\left(\frac{n}{2}\right)^k \cdot n^k$ все делятся на $\frac{n}{2}$.

Б. Число n нечетно. В этом случае сумма S_k делится на $\frac{n+1}{2}$, так как 1^k+n^k, $2^k+(n-1)^k$, $3^k+(n-2)^k, \ldots, \left(\frac{n-1}{2}\right)^k+$ $+\left(\frac{n+3}{2}\right)^k$, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$ все делятся на $\frac{n+1}{2}$; S_k делится также на n, так как $1^k+(n-1)^k$, $2^k+(n-2)^k$, $3^k+(n-3)^k, \ldots, \left(\frac{n-1}{2}\right)^k+$ $+\left(\frac{n+1}{2}\right)^k$, n^k все делятся на n.

56. Пусть

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_{n-2}\cdot 10^{n-2}+\ldots+a_1\cdot 10+a_0$$

— данное число (a_n, a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots, a_1$, a_0 — цифры числа, которые могут принимать значения $0, 1, 2, \ldots, 9$).

Вычтем из N число

$$M=a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots\pm a_n,$$

представляющее собой алгебраическую сумму цифр числа N, взятых с чередующимися знаками. Группируя подходящим образом члены, мы получим число

$$N-M=a_1(10+1)+a_2(10^2-1)+a_3(10^3+1)+$$
$$+a_4(10^4-1)+\ldots+a_n(10^n\pm 1),$$

делящееся на 11, ибо каждое его слагаемое делится на 11. (Из того, что при перемножении чисел остатки, даваемые ими при делении на некоторое число, перемножаются, легко вывести, что

$$10^k=(11-1)^k$$

дает при делении на 11 остаток -1 при k нечетном и остаток $+1$ при k четном.) Таким образом, разность $N-M$ делится на 11, т. е. число N делится или не делится на 11 одновременно с числом M.

57. Число 15 дает при делении на 7 остаток 1. Отсюда следует, что и

$$15^2=(7\cdot 2+1)\cdot(7\cdot 2+1)=7n_1+1$$

дает при делении на 7 остаток 1,

$$15^3=15^2\cdot 15=(7n_1+1)\cdot(7\cdot 2+1)=7n_2+1$$

дает при делении на 7 остаток 1, и вообще любая степень числа 15 при делении на 7 дает остаток 1. Если мы теперь вычтем из заданного нам числа сумму $1+2+3+4+\ldots+14=105$, то, сгруппировав соответствующим образом члены, мы получим:

$$13(15-1)+12(15^2-1)+$$
$$+11(15^3-1)+\ldots+2(15^{12}-1)+1(15^{13}-1),$$

т. е. число, делящееся на 7. Но из того, что разность заданного числа и числа $105=7\cdot 15$ делится на 7, следует, что исходное число тоже делится на 7.

58. Пусть K есть n-значное число. Среди $(n+2)$-значных чисел, начинающихся цифрами 1, 0 (т. е. среди чисел вида $\overline{10a_1a_2\ldots a_n}$, где 1, 0, $a_1, \ldots, a_n$ — цифры числа), всегда найдется, по крайней мере, одно, делящееся на K. Пусть это число есть $\overline{10b_1b_2\ldots b_n}$. Тогда, по условию, числа $\overline{b_1b_2\ldots b_n10}$ и $\overline{b_1b_2\ldots b_n01}$ оба делятся на K. Их разность равна 9 и также делится на K. Но у 9 делителями служат лишь 1, 3 и 9, откуда и следует наше утверждение.

59. Ясно, что $d = \underbrace{333\ldots33}_{100\text{ троек}} = 3\cdot\underbrace{111\ldots11}_{100\text{ единиц}} = 3n$; поэтому искомое число $N = \underbrace{1111\ldots11}_{k\text{ единиц}}$ должно делиться без остатка на числа n и 3 (n не делится на 3, ибо сумма цифр числа n, равная 100, не делится на 3). Но если число $k = 100q + r$, где $r < 100$ (но $r \geqslant 0$), то, очевидно, $N = \underbrace{11\ldots11}_{100q\text{ единиц}}\underbrace{00\ldots00}_{r\text{ нулей}} + \underbrace{11\ldots11}_{r\text{ единиц}} = M + R$,

где $R = \underbrace{11\ldots11}_{r\text{ единиц}}$, а $M = \underbrace{11\ldots11}_{100q\text{ единиц}}\underbrace{00\ldots00}_{r\text{ нулей}}$ делится на n (для того чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе процесс деления «углом» M на n). Таким образом, N делится на n в том и только в том случае, когда $R = 0$, т. е. когда $r = 0$, и, значит, k делится на 100.

Теперь, если $k = 100q$, то сумма цифр числа N равна $100q$; она делится на 3 (а значит — и N делится на 3) в том и только в том случае, если q делится на 3. Поэтому, наименьшее число $N = \underbrace{111\ldots11}_{k\text{ единиц}}$, делящееся на d, будет состоять из 300 единиц.

60. Поскольку a, очевидно, число четное, то нам надо только доказать, что произведение aA делится на 3. Так как последняя цифра числа $2^{k+1} = 2N$ та же, что и у числа $2a$ (где a — последняя цифра N), то, последовательно умножая степени двойки еще на 2 (т. е. последовательно увеличивая показатель степени), мы найдем, что последние цифры чисел ряда $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, ... образуют следующую периодически повторяющуюся последовательность:

$$2,\ 4,\ 8,\ 6,\quad 2,\ 4,\ 8,\ 6,\quad 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ \ldots$$

С другой стороны, если $2^k = N$ дает при делении на 3 остаток 1, то число $2^{k+1} = 2N$ дает при делении на 3 остаток 2, а если $N = 3l + 2$, то число $2^{k+1} = 2N$ имеет вид $3\cdot(2l) + 4 = 3\cdot(2l+1) + 1$, т. е. дает при делении на 3 остаток 1; поэтому та же последовательность степеней двойки дает при делении на 3 следующие чередующиеся остатки:

$$2,\ 1,\ 2,\ 1,\quad 2,\ 1,\ 2,\ 1,\quad 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \ldots$$

Таким образом, если число N кончается цифрой 2 или 8 (если $a = 2$ или $a = 8$), то N при делении на 3 дает остаток 2, а если $a = 4$, то N при делении на 3 дает остаток 1 (случай же, когда $a = 6$, нам вообще не интересен, ибо здесь произведение $aA = 6A$ наверняка будет делиться на 6). Отсюда следует, что во всех этих трех случаях число $N - a = 10A$ делится на 3, а значит, и A будет делиться на 3. Таким образом, произведение aA делится на 6 при всех $k \geqslant 1$; однако при $k = 1$, 2 или 3 это заключение неинтересно, ибо здесь $A = 0$ (и $aA = 0$ делится на любое число).

61. Нам надо показать, что число

$$N = 27\,195^8 - 10\,887^8 + 10\,152^8$$

делится без остатка на $26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Доказательство проводится в два приема.

1°. $N = 27\,195^8 - (10\,887^8 - 10\,152^8)$.

Но $27\,195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$; следовательно, это число делится на $5 \cdot 7^2$. С другой стороны, разность, заключенная в круглые скобки, делится на

$$10\,887 - 10\,152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

(ибо разность восьмых степеней двух чисел делится на разность оснований). Отсюда следует, что N делится на $5 \cdot 7^2$.

2°. $N = (27\,195^8 - 10\,887^8) + 10\,152^8$.

Но $10\,152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$ делится на $2^2 \cdot 3^3$. С другой стороны, разность, заключенная в круглые скобки, делится на

$$27\,195 - 10\,887 = 16\,308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151.$$

Таким образом, N делится на $2^2 \cdot 3^3$.

Так как N делится на $5 \cdot 7^2$ и $2^2 \cdot 3^3$, то N делится и на произведение этих чисел, равное 26 460.

62. Нетрудно проверить, что

$$11^{10} - 1^{10} =$$
$$= (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

Легко видеть, что второй сомножитель в правой части делится на 10, так как он представляет собой сумму 10 слагаемых, каждое из которых оканчивается на 1.

Итак, $11^{10} - 1$ есть произведение 10 на число, делящееся на 10, и, значит, делится на 100.

63. $2222^{5555} + 5555^{2222} =$

$$= (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222}).$$

Из трех выражений, стоящих в круглых скобках, первое делится на $2222 + 4 = 2226 = 7 \cdot 318$ (сумма нечетных степеней делится на сумму оснований) и, следовательно, делится на 7; второе тоже делится на 7, так как оно делится на $5555 - 4 = 5551 = 7 \cdot 793$ (разность любых целых степеней делится на разность оснований). Что касается третьего выражения, то его можно переписать в виде

$$4^{2222}(4^{3333} - 1) = 4^{2222}(64^{1111} - 1),$$

откуда видно, что оно делится на разность $64 - 1 = 63$ и, следовательно, делится на 7 (разность одинаковых целых степеней делится на разность оснований).

64. Воспользуемся методом математической индукции. Число $\overline{aaa}$, составленное из трех одинаковых цифр a (черта наверху поставлена, чтобы не путать с произведением $a \cdot a \cdot a$), делится на 3 (так как сумма цифр этого числа, равная $3a$, делится на 3). Далее, предположим, что наше утверждение уже доказано для каждого числа, составленного из 3^n одинаковых цифр. Число, составленное из 3^{n+1} одинаковых цифр, можно представить в следующем виде:

$$\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}} = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{3^n \text{ раз}}}\cdot\underbrace{100\ldots 0}_{3^n \text{ цифр}}\underbrace{100\ldots 01}_{3^n \text{ цифр}}.$$

Но из двух сомножителей первый в силу предположения индукции делится на 3^n, а второй делится на 3 (сумма цифр этого числа равна 3); следовательно, все произведение делится на 3^{n+1}

65. Заметим прежде всего, что $10^6-1=999\,999$ делится на 7 (так как $999\,999=7\cdot 142\,857$). Отсюда легко следует, что 10^N, где N — какое угодно целое число, дает при делении на 7 такой же остаток, как и 10^r, где r есть остаток от деления N на 6. Действительно, если $N=6k+r$, то

$$10^N-10^r=10^{6k+r}-10^r=10^r(10^{6k}-1)=$$
$$=10^r\cdot(10^6-1)(10^{6k-6}+10^{6k-12}\ldots+10^6+1)$$

делится на 7.

Но любая целая степень 10 дает при делении на 6 остаток 4; в самом деле, $10^n-4=\underbrace{999\ldots 96}_{(n-1)\text{ раз}}$ всегда делится на $2\cdot 3=6$ (в силу признаков делимости на 2 и на 3). Таким образом, все сложные показатели степени у слагаемых нашей суммы дают при делении на 6 остаток 4. Следовательно, каждое из этих 10 слагаемых дает при делении на 7 такой же остаток, как и число 10^4, а вся сумма — такой же остаток, как и число

$$10^4+10^4+10^4+10^4+10^4+10^4+10^4+10^4+10^4+10^4=$$
$$=10^5=100\,000=7\cdot 14\,285+5.$$

Итак, искомый остаток равен 5.

66. а) Каждая четная степень 9 представима в виде

$$9^{2n}=81^n=\underbrace{81\cdot 81\ \ldots\ 81}_{n\text{ раз}}$$

и, следовательно, оканчивается цифрой 1. Каждая нечетная степень 9 представима в виде $9^{2n+1}=9\cdot 81^n$ и, следовательно, оканчивается цифрой 9 (как произведение числа, оканчивающегося единицей, на 9). В частности, $9^{(9^9)}$ есть нечетная степень 9; значит, $9^{(9^9)}$ оканчивается цифрой 9.

Заметим теперь, что любая целая степень 6 оканчивается цифрой 6; действительно, $6^1=6$, и если 6^n оканчивается на 6, то и $6^{n+1}=6^n\cdot 6$ оканчивается на 6. Но 16^n оканчивается на ту же цифру, что и 6^n; следовательно, любая целая степень 16 оканчивается цифрой 6. Таким образом, любая степень двойки, кратная четырем, оканчивается шестеркой (ибо $2^{4n}=16^n$). Но 3^4-1 делится на $3+1=4$; значит, $2^{(3^4-1)}$ оканчивается цифрой 6, а $2^{(3^4)}=$ $=2\cdot 2^{(3^4-1)}$ оканчивается цифрой 2 (как произведение 2 на число, оканчивающееся шестеркой).

б) Нам надо найти остаток от деления 2^{999} на 100 (это и есть две последние цифры числа 2^{999}). Покажем прежде всего, что при делении на 25 число 2^{1000} дает остаток 1. Действительно, $2^{10}+1=1024+1=1025$ делится на 25; следовательно, и $2^{20}-1=(2^{10}+1)(2^{10}-1)$ делится на 25, а $2^{1000}-1=(2^{20})^{50}-1$ делится на $2^{20}-1$. Отсюда вытекает, что последние две цифры числа 2^{1000} могут образовать число 01, или $01+25=26$, или $01+50=51$, или $01+75=76$; но так как 2^{1000}, конечно, делится на 4, то этими цифрами могут быть только 76. Таким образом, 2^{999} равно частному от деления числа, оканчивающегося на 76, на 2, т. е. оно может оканчиваться только цифрами 38 или 88 (так как $76:2=38$, $176:2=88$). Но так как это число делится на 4, то оно оканчивается цифрами 88.

Найдем теперь остаток от деления числа 3^{999} на 100. Напомним, что каждая четная степень 9 оканчивается цифрой 1, а каждая нечетная степень 9 — цифрой 9 (см. решение задачи а)). Воспользовавшись этим, найдем остаток от деления числа 9^5+1 на 100:

$$9^5+1=(9+1)\cdot(9^4-9^3+9^2-9+1)=10\cdot(9^4-9^3+9^2-9+1),$$

а в алгебраической сумме, стоящей в скобках, каждое из трех положительных слагаемых оканчивается на 1 и каждое из двух отрицательных слагаемых — на 9; таким образом, число 9^4+9^2+1 оканчивается на 3, а число 9^3+9 — на 8 и, значит, все выражение, стоящее в скобках, оканчивается на 5. Итак, число 9^5+1 при делении на 100 дает остаток $10\cdot5=50$. Отсюда вытекает, что число $9^{10}-1=(9^5+1)\cdot(9^5-1)$ делится на 100, а так как $3^{1000}-1=9^{500}-1=(9^{10})^{50}-1$ делится на $9^{10}-1$ (разность целых степеней делится на разность оснований), то и $3^{1000}-1$ делится на 100. Таким образом, число 3^{1000} оканчивается цифрами 01. Но это число делится на 3; следовательно, его число сотен при делении на 3 должно давать в остатке 2 (если бы при делении сотен на 3 в остатке оставалась одна сотня или ни одной, то это число сотен плюс 01 не могло бы делиться на 3). Итак, мы нашли, что число $3^{999}=3^{1000}:3$ должно оканчиваться теми же двумя цифрами, что и число $201:3=67$.

в) Нам надо найти остаток от деления числа $14^{(14^{14})}=(7\cdot2)^{(14^{14})}$ на 100,— это и есть две последние цифры числа $14^{(14^{14})}$. Найдем в отдельности остаток от деления на 100 чисел $7^{(14^{14})}$ и $2^{(14^{14})}$.

Число $7^4-1=2\,401-1=2\,400$ делится на 100. Отсюда следует, что если $n=4k$ делится на 4, то 7^n-1 делится на 100 (ибо $7^{4k}-1=(7^4)^k-(1)^k$ делится на 7^4-1). Но $14^{14}=2^{14}\cdot7^{14}$ делится на 4; следовательно, $7^{(14^{14})}-1$ делится на 100 и, значит, число $7^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 01.

Далее, в решении задачи б) было показано, что $2^{20}-1$ делится на 25; следовательно, если $n=20k$ делится на 20, то 2^n-1 делится на 25. Найдем теперь остаток от деления числа 14^{14} на 20. Очевидно, $14^{14}=2^{14}\cdot7^{14}$. Но $2^{14}=4\cdot2^{12}$; так как $2^{12}-1=(2^4)^3-1$ делится на $2^4-1=16-1=15$, то $4(2^{12}-1)$ делится на 20, а следовательно, $2^{14}=4\cdot2^{12}$ дает при делении на 20 остаток 4. Далее, $7^{14}=49\cdot7^{12}$; так как 7^{12} дает при делении на 20 остаток 1 (так как 12 делится на 4, то $7^{12}-1$ делится на 100), то $49\cdot7^{12}$ дает при делении на 20 такой же остаток, как и число 49, т. е. 9. Таким образом, $14^{14}=2^{14}\cdot7^{14}$ дает при делении на 20 такой же остаток, как и произведение $4 \cdot 9 = 36$, т. е. остаток 16: $14^{14} = 20K + 16$. А отсюда следует, что $2^{(14^{14})} = 2^{16} \cdot 2^{20K}$ дает при делении на 25 такой же остаток, как и число $2^{16} = 65\,536$, т. е. $2^{(14^{14})}$ может оканчиваться только цифрами 11, 36, 61 или 86. Но так как $2^{(14^{14})}$ делится на 4, то $2^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 36.

Итак, число $7^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 01, а число $2^{(14^{14})}$ — цифрами 36. Следовательно, их произведение $7^{(14^{14})} \cdot 2^{(14^{14})} = 14^{(14^{14})}$ оканчивается цифрами 36.

67. а) Ясно, что оба числа 9^{9^9} и $9^{9^{9^9}}$ оканчиваются цифрой 9 (ср. с решением задачи 66а)) — таким образом, последние цифры у них совпадают. Далее, по формуле бинома Ньютона,

$$A = 9^{9^9} = (10-1)^{9^9} =$$

$$= 10^a - C_a^1 \cdot 10^{a-1} + C_a^2 \cdot 10^{a-2} - \ldots + C_a^1 \cdot 10 - 1$$

и

$$B = 9^{9^{9^9}} = (10-1)^{9^{9^9}} =$$

$$= 10^b - C_b^1 \cdot 10^{b-1} + C_b^2 \cdot 10^{b-2} - \ldots + C_b^1 \cdot 10 - 1,$$

где $a = 9^9$ и $b = 9^{9^9}$; таким образом, две последние цифры рассматриваемых чисел совпадают с двумя последними цифрами чисел

$$C_a^1 \cdot 10 - 1 = 10a - 1 \quad и \quad C_b^1 \cdot 10 - 1 = 10b - 1.$$

Но (см. снова решение задачи 66а)) числа $a = 9^9$ и $b = 9^{9^9}$ оба оканчиваются цифрой 9; поэтому числа $10a$ и $10b$ оканчиваются цифрами 90 — и числа A и B оканчиваются цифрами 89.

б) Аналогично решению задачи а) здесь можно найти шесть последних цифр двух рассматриваемых чисел (причем роль лежащего в основе решения задачи а) равенства $9 = 10 - 1$ здесь будет играть соотношение $7^2 = 50 - 1$) и убедиться, что эти цифры одинаковы. Однако в виду некоторой громоздкости такого решения (ведь речь здесь идет не о двух, а о шести последних цифрах!) мы предпочтем пойти по другому пути.

Нам надо убедиться, что совпадают 6 последних цифр чисел $A = 7^a$ и $B = 7^b$, где теперь $a = 7^{7^{7^7}}$ и $b = 7^{7^7}$, т. е. что разность

$$A - B = 7^a - 7^b = 7^b(7^{a-b} - 1)$$

(а значит, и число

$$D = 7^d - 1,$$

где $d = a - b$) делится на $1\,000\,000 = 2^6 \cdot 5^6$; таким образом, задача сводится к выяснению того, на какие степени *двойки* и *пятерки* делится число D, имеющее вид $7^d - 1$, где d — некоторое натуральное число. Рассмотрим отдельно вопросы о делимости числа D на 2^α (где нам надо доказать, что $\alpha \geqslant 6$) и о делимости D на 5^β.

1°. Пусть $C = 7^c - 1$, где $c = 2^p q$ (здесь q нечетно); мы утверждаем, что при этом $C = 2^{\alpha_p} P$, где P нечетно, а (зависящий лишь от p, но не от q!) показатель степени α_p при $p > 1$ удовлетворяет («рекуррентному») соотношению:

$$\alpha_p = \alpha_{p-1} + 1. \qquad (*)$$

Но поскольку число $7^{(2^1)} - 1 = 7^2 - 1 = 48$ делится на $2^4 = 16$ (но не на 2^5) и, значит, $\alpha_1 = 4$, то из (*) с очевидностью вытекает:

$$\alpha_p = p + 3 \quad \text{при всех} \quad p \geqslant 1$$

— если наибольшая степень двойки, на которую делится число c, равна $p \geqslant 1$, то наибольшая степень α_p двойки, на которую делится число $C = 7^c - 1$, равна $p + 3$ (при $p = 0$ имеем $\alpha_0 = 1$, поскольку число $7^{2^0} - 1 = 7 - 1 = 6$ делится лишь на 2).

Покажем сперва, что число α_p не зависит от q; это вытекает из следующей формулы:

$$7^{(2^p q)} - 1 = \left(7^{2^p}\right)^q - 1^q =$$
$$= \left[7^{2^p} - 1\right]\left\{\left[7^{(2^p)q-1}\right] + \left[7^{(2^p)}\right]^{q-2} + \left[7^{(2^p)q-3}\right] + \ldots + 1\right\},$$

где стоящая в фигурной скобке сумма нечетного числа q нечетных слагаемых, очевидно, нечетна — и, значит, *число $7^{2^p q} - 1$ делится на ту же степень двойки, что и число $7^{2^p} - 1$.* Поэтому далее можно считать, что $q = 1$, т. е. заменить число $C = 7^{2^p q} - 1$ числом $C_p = 7^{2^p} - 1$.

Теперь нам остается лишь воспользоваться формулой

$$C_p = 7^{2^p} - 1 = \left(7^{2^{p-1}}\right)^2 - 1^2 =$$
$$= \left[7^{2^{p-1}} - 1\right]\left[7^{2^{p-1}} + 1\right] = C_{p-1} \cdot C'.$$

Поскольку 7 дает при делении на 4 остаток -1, то 7^m дает при делении на 4 остаток -1 при m нечетном и остаток $+1$ при m четном, а значит, $7^{2^n} + 1$ (и даже $7^{2n} + 1$) *при любом* (натуральном) n дает при делении на 4 остаток 2, т. е. *делится на 2, но не делится уже на 2^2*. Таким образом, в равенстве $C_p = C_{p-1} \cdot C'$ левая часть C_p делится на 2^{α_p}, число C_{p-1} делится на $2^{\alpha_{p-1}}$, а C' делится лишь на 2, откуда и вытекает формула (*). [Ясно, что случай $p = 1$ является особым, ибо здесь $C' = 7^{2^0} + 1 = 7 + 1 = 8$ делится не только на 2^1, но на 2^3 — отличие возникает вследствие того, что в этом единственном случае показатель степени 2^0 в выражении для C' — число нечетное.]

Итак, для определения показателя степени α в формуле $D = 7^d - 1 = 2^\alpha \cdot Q$ (где Q нечетно) надо лишь выяснить, на какую степень двойки делится число $d = a - b = 7^{a_1} - 7^{b_1} = 7^{b_1}(7^{d_1} - 1)$ (т. е. число $7^{d_1} - 1$), где $a_1 = 7^{7^{7^7}}$, $b_1 = 7^7$, $ad_1 = a_1 - b_1$. А для этого, как мы знаем, необходимо (и достаточно) установить, на какую степень двойки делится показатель степени $d_1 = a_1 - b_1 = 7^{a_2} - 7^{b_2} = 7^{b_2}(7^{d_2} - 1)$, где $a_2 = 7^{7^7}$, $b_2 = 7$ и $d_2 = a_2 - b_2 = 7^{a_3} - 7^{b_3} = 7^{b_3}(7^{d_3} - 1)$, где теперь $b_3 = 1$, $a_3 = 7^7$

и $d_3 = a_3 - b_3 = 7^7 - 1$. Но поскольку число 7 — нечетно, то $d_3 = 7^7 - 1$ делится лишь на $2^{\alpha_0} = 2^1 = 2$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что число $7^{d_3} - 1$ делится на $2^{\alpha_1} = 2^4$; таким образом, число $d_2 = 7^{b_3}(7^{d_3} - 1)$ делится на 2^4 — и, значит, число $7^{d_2} - 1$ делится на $2^{\alpha_4} = 2^7$. Но если $d_1 = 7^{b_2}(7^{d_2} - 1)$ делится на 2^7, то $7^{d_1} - 1$ делится на $2^{\alpha_7} = 2^{10}$; поэтому и $d = 7^{b_1}\ (7^{d_1} - 1)$ делится на 2^{10}, и, следовательно, $D = 2^d - 1$ делится на $2^{\alpha_{10}} = 2^{13}$.

2°. Совершенно аналогично рассматривается и вопрос о делимости чисел $C = 7^c - 1$, где теперь только уместно считать $c = 5^r s$, на степени пятерки; однако здесь целесообразно оговорить, что (не делящееся на 5) число s делится, по крайней мере, на 2^2, ибо случай, когда s нечетно или делится лишь на 2, но не на 4, приводит к несколько иным выводам. При $s = 4s_1$, или $c = 5^r \cdot 4s_1$, где s_1 — целое, наибольшая степень β_r пятерки, на которую делится число C, как и выше, зависит лишь от показателя степени r в формуле для c, т. е. число β_r не зависит от s_1; при этом по-прежнему имеет место аналогичное (*) («рекуррентное») соотношение

$$\beta_r = \beta_{r-1} + 1. \tag{**}$$

А так как число $7^4 - 1 = (7^2)^2 - 1 = (7^2 + 1)(7^2 - 1) = 50 \cdot 48$ делится на $5^2 = 25$, т. е. $\beta_0 = 2$, то из (**) следует, что *при всех* $r \geqslant 0$

$$\beta_r = r + 2$$

— если показатель степени c в выражении $C = 7^c - 1$ делится на 4 и наибольшая степень пятерки, на которую делится c, равна r, то наибольшая степень β_r пятерки, на которую делится C, равна $r + 2$.

Для доказательства независимости β_r от s_1 достаточно воспользоваться формулой:

$$C = 7^c - 1 = 7^{5^r \cdot 4s_1} - 1 = \left(7^{5^r \cdot 4}\right)^{s_1} - 1^{s_1} =$$
$$= \left[7^{5^r \cdot 4} - 1\right]\left\{\left[7^{(5^r \cdot 4)}\right]^{s_1 - 1} + \left[7^{(5^r \cdot 4)}\right]^{s_1 - 2} + \ldots + 7^{(5^r \cdot 4)} + 1\right\}.$$

Но так как $7^4 = (7^2)^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 + 1$ дает при делении на 5 остаток 1, то и число $(7^4)^n$ при любом n дает при делении на 5 остаток 1; поэтому в фигурной скобке в правой части последней формулы стоит сумма s_1 чисел, каждое из которых дает при делении на 5 остаток 1, откуда, поскольку s_1 не делится на 5, вытекает, что эта сумма не делится на 5. Поэтому *число $C = 7^{5^r \cdot 4s_1} - 1$ делится на ту же степень пятерки, что и число $E_r = 7^{5^r \cdot 4} - 1$*, что позволяет в дальнейшем считать $s_1 = 1$, т. е. заменить число C числом E_r.

Далее,

$$E_r = 7^{5^r \cdot 4} - 1 = \left(7^{5^{r-1} \cdot 4}\right)^5 - 1^5 =$$
$$= \left(7^{5^{r-1} \cdot 4} - 1\right)\left\{\left(7^{5^{r-1} \cdot 4}\right)^4 + \left(7^{5^{r-1} \cdot 4}\right)^3 + \left(7^{5^{r-1} \cdot 4}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 7^{5^{r-1} \cdot 4} + 1\right\} = E_{r-1} \cdot E'.$$

Отсюда, прежде всего, следует, что E_r делится на E_{r-1}, т. е. E_r

делится на не меньшую степень пятерки, чем E_{r-1}, другими словами $\beta_r \geqslant \beta_{r-1}$, или, так как $\beta_0 = 2$,

$$2 = \beta_0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots$$

Таким образом, при всех $r \geqslant 1$ число $E_{r-1} = 7^{5^{r-1} \cdot 4} - 1$ делится на 25, а значит число $e_{r-1} = e = 7^{5^{r-1} \cdot 4}$ дает при делении на 25 остаток 1, — и любая степень e^k числа e также дает при делении на 25 остаток 1. А так как стоящее в фигурных скобках в правой части формулы для E_r выражение E' равно сумме $e^4 + e^3 + e^2 + e + 1$, то оно дает при делении на 25 остаток 5, т. е. E' делится на 5^1, но не делится на 5^2. Отсюда и из формулы $E_r = E_{r-1} \cdot E'$ и вытекает соотношение (**).

Обратимся теперь снова к интересующему нас числу $A - B = 7^b \cdot D$, где $D = 7^d - 1$. Поскольку, как мы видели выше, число d на 4 делится (оно делится даже на $2^{10} = 1024$), то нам остается только выяснить, на какую степень пятерки делится число $d = 7^{a_1} - 7^{b_1} = 7^{b_1}(7^{d_1} - 1)$, где $d_1 = a_1 - b_1$ (см. конец п. 1° решения настоящей задачи). Но так как d_1 также делится на 4 (и даже на 2^7), то наша задача сводится к определению того, на какую степень 5 делится число $d_1 = 7^{a_2} - 7^{b_2} = 7^{b_2}(7^{d_2} - 1)$, где $d_2 = a_2 - b_2 = 7^{a_3} - 7^{b_3} = 7^{b_3}(7^{d_3} - 1)$ делится на 4 (даже на 2^4) и $d_3 = 7^7 - 1$. Но, как мы знаем, число d_3 делится на 2 и не делится на 4, т. е. $d_3 = 2f$, где f — *нечетно;* поэтому $7^{d_3} - 1 = 49^f - 1 = (50 - 1)^f - 1$ на 5 не делится (дает при делении на 5 остаток — 2, т. е. остаток 3); с другой стороны, число $7^{d_3} - 1$ (как и число $d_2 = 7^{b_3}(7^{d_3} - 1)$) уже делится на 4. Но отсюда следует, что число $7^{d_2} - 1$ делится на $5^{\beta_0} = 5^2$ (и не делится на более высокую степень пятерки); поэтому $d_1 = 7^{b_2}(7^{d_2} - 1)$ делится на 5^2 и $d = 7^{b_1}(7^{d_1} - 1)$ делится на $5^{\beta_2} = 5^4$, а $D = 7^d - 1$ (и рассматриваемое в этой задаче число $A - B = 7^b \cdot D$) делится на $5^{\beta_4} = 5^6$.

Это рассуждение и завершает решение задачи.

Примечание. Ясно, что совершенно аналогично решению этой задачи можно установить, что числа A_{n+2} и A_n, составленные наподобие фигурирующих в настоящей задаче чисел A и B из $(n+2)$-х, соответственно из n семерок, имеют $2n - 2$ одинаковые последние цифры; рекомендуем читателю самостоятельно постараться оценить число одинаковых последних цифр у чисел A_n и A_m, составленных из n, соответственно из m семерок (здесь естественно начинать со случая небольших разностей $n - m$).

68. а) Если перемножить два числа, одно из которых оканчивается на цифру a, а второе на цифру b, то их произведение будет оканчиваться на ту же цифру, что и произведение ab. Это замечание позволяет просто решить поставленную задачу. Будем последовательно производить возвышения в степень, следя только за последней цифрой числа: 7^2 оканчивается цифрой 9, $7^3 = 7^2 \cdot 7$ оканчивается цифрой 3, $7^4 = 7^3 \cdot 7$ оканчивается цифрой 1 и $7^7 = 7^4 \cdot 7^3$ оканчивается цифрой 3.

Далее, точно таким же образом найдем, что $(7^7)^7$ оканчивается снова цифрой 7 (действительно, $(7^7)^2$ оканчивается цифрой 9, $(7^7)^3$ оканчивается цифрой 7, $(7^7)^4$ оканчивается цифрой 1 и $((7^7)^7$ оакнчивается цифрой 7). Отсюда следует, что число $((7^7)^7)^7$ оканчивается той же цифрой, что и число 7^7, т. е. цифрой 3, число $\left(((7^7)^7)^7\right)^7$ оканчивается снова цифрой 7, и т. д. Продолжая таким же образом, мы после нечетного числа возведений в степень 7 будем каждый раз приходить к числу, оканчивающемуся цифрой 3, а после четного числа возведений в степень 7 — к числу, оканчивающемуся цифрой 7. Так как 1000 есть число четное, то интересующее нас число оканчивается цифрой 7.

Если одно число оканчивается двузначным числом A, а второе — двузначным числом B, то их произведение оканчивается на те же самые две цифры, что и произведение $A \cdot B$. Это позволяет найти и две последние цифры интересующего нас числа. Как прежде, проверяем, что 7^7 оканчивается двумя цифрами 43, а $(7^7)^7$ оканчивается теми же цифрами, что и 43^7, а именно цифрами 07. Отсюда следует, что, возводя последовательно числа 7, 7^7, $(7^7)^7, \ldots$ в степень 7, мы после нечетного числа возведений в степень будем приходить к числу, оканчивающемуся цифрами 43, а после четного числа возведений — к числу, оканчивающемуся цифрами 07. Следовательно, искомое число оканчивается цифрами 07.

б) В решении задачи а) мы видели, что 7^4 оканчивается цифрой 1. Отсюда следует, что $7^{4k} = (7^4)^k$ тоже оканчивается цифрой 1 и 7^{4k+l}, где l есть одно из чисел 0, 1, 2 или 3, оканчивается той же цифрой, что и 7^l $\left(7^{4k+l} = 7^{4k} \cdot 7^l\right)$. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы определить, какой остаток дает при делении на 4 число, являющееся степенью, в которую надо возвести 7, чтобы получить число задачи.

Степень, в которую в задаче возводится число 7, сама представляет собой 7 в некоторой очень большой степени; нам надо выяснить, какой остаток дает эта степень семи при делении на 4. Но $7 = 8 - 1$; отсюда следует, что $7^2 = (8-1) \cdot (8-1)$ дает при делении на 4 остаток 1, $7^3 = 7^2 \cdot (8-1)$ дает при делении на 4 остаток -1 (или, что то же самое, остаток 3) и вообще каждая четная степень 7 дает при делении на 4 остаток 1, а нечетная — остаток -1 (т. е. $+3$). Но интересующая нас в настоящем случае степень 7 заведомо является числом нечетным (так как она сама есть степень 7), а следовательно, фигурирующее в условии задачи число имеет вид 7^{4k+3} и, следовательно, оканчивается той же цифрой, что и 7^3, т. е. цифрой 3.

Так как 7^4 оканчивается цифрами 01, то 7^{4k+l} оканчивается даже теми же двумя цифрами, что и 7^l. Следовательно, интересующее нас число оканчивается теми же двумя цифрами, что и число 7^3, т. е. цифрами 43.

69. Рассмотрим последовательно числа:

1°. $Z_1 = 9$,

2°. $$Z_2 = 9^{Z_1} = (10-1)^{Z_1} = \\ = 10^{Z_1} - C_{Z_1}^1 \cdot 10^{Z_1 - 1} + \ldots + C_{Z_1}^1 \cdot 10 - 1,$$

где опущенные члены разложения все делятся на 100. Но $C_{Z_1}^1 = 9$; следовательно, две последние цифры числа Z_2 будут теми же самыми, что и две последние цифры числа $9 \cdot 10 - 1 = 89$.

$$3^\circ.\ Z_3 = 9^{Z_2} = (10-1)^{Z_2} =$$
$$= 10^{Z_2} - C_{Z_2}^1 \cdot 10^{Z_2-1} + \ldots - C_{Z_2}^2 \cdot 10^2 + C_{Z_2}^1 \cdot 10 - 1.$$

Но Z_2 оканчивается на 89; следовательно, $C_{Z_2}^1 = Z_2$ оканчивается на 89, а $C_{Z_2}^2 = \frac{Z_2(Z_2-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\ldots 89 \cdot \ldots 88}{1 \cdot 2}$ (точками обозначены неизвестные цифры) оканчивается цифрой 6. Следовательно, три последние цифры числа Z_3 будут теми же самыми что и три последние цифры числа $-600 + 890 - 1 = 289$.

$$4^\circ.\ Z_4 = 9^{Z_3} = (10-1)^{Z_3} =$$
$$= 10^{Z_3} - C_{Z_3}^1 \cdot 10^{Z_3-1} + \ldots + C_{Z_3}^3 \cdot 10^3 - C_{Z_3}^2 \cdot 10^2 + C_{Z_3}^1 \cdot 10 - 1.$$

Так как Z_3 оканчивается на 289, то и $C_{Z_3}^1 = Z_3$ оканчивается на 289;

$$C_{Z_3}^2 = \frac{Z_3(Z_3-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\ldots 289 \cdot \ldots 288}{1 \cdot 2}$$

оканчивается на 16;

$$C_{Z_3}^3 = \frac{Z_3(Z_3-1)(Z_3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\ldots 289 \cdot \ldots 288 \cdot \ldots 287}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

оканчивается цифрой 4. Следовательно, четыре последние цифры числа Z_4 будут теми же самыми, что и последние четыре цифры числа $4000 - 1600 + 2890 - 1 = 5289$.

$$5^\circ.\ Z_5 = 9^{Z_4} = (10-1)^{Z_4} = 10^{Z_4} - C_{Z_4}^1 \cdot 10^{Z_4-1} + \ldots$$
$$\ldots - C_{Z_4}^4 \cdot 10^4 + C_{Z_4}^3 \cdot 10^3 - C_{Z_4}^2 \cdot 10^2 + C_{Z_4}^1 \cdot 10 - 1.$$

Так как Z_4 оканчивается на 5289, то $C_{Z_4}^1 = Z_4$ оканчивается на 5289;

$$C_{Z_4}^2 = \frac{Z_4(Z_4-1)}{1 \cdot 2} = \frac{\ldots 5289 \cdot \ldots 5288}{1 \cdot 2}$$

оканчивается на 116;

$$C_{Z_4}^3 = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{\ldots 5289 \cdot \ldots 5288 \cdot \ldots 5287}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

оканчивается на 64; наконец,

$$C_{Z_4}^4 = \frac{Z_4(Z_4-1)(Z_4-2)(Z_4-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{\ldots 5289 \cdot \ldots 5288 \cdot \ldots 5287 \cdot \ldots 5286}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

оканчивается цифрой 6. Следовательно, Z_5 оканчивается на те же самые пять цифр, что и число

$$-60\,000 + 64\,000 - 11\,600 + 52\,890 - 1 = 45\,289.$$

Далее из того, что последние четыре цифры числа Z_5 совпадают с последними четырьмя цифрами числа Z_4, следует, что последние пять цифр числа $Z_6 = 9^{Z_5} = (10-1)^{Z_5}$ совпадают с последними пятью цифрами числа $Z_5\ (=9^{Z_4})$. Точно так же показывается, что все числа ряда

$$Z_5,\ Z_6 = 9^{Z_5},\ Z_7 = 9^{Z_6},\ \ldots,\ Z_{1000} = 9^{Z_{999}},\ Z_{1001} = 9^{Z_{1000}}$$

оканчиваются на одни и те же пять цифр, а именно на 45 289. Но Z_{1001} это и есть число N условия задачи.

70. Найдем, прежде всего, остатки от деления на 13 чисел 5^n и n^5 для ряда первых значений $n = 0, 1, 2, \ldots$ При этом удобнее начать с чисел 5^n:

n	0	1	2	3	4	. . .
Число 5^n	1	5	25	125	625	. . .
Остаток от деления 5^n на 13	1	5	-1	-5	1	. . .

[Здесь мы пишем «остаток -1» вместо «остаток 12» и «остаток -5» вместо «остаток 8», что позволяет очень просто находить все следующие остатки: если 5^n дает при делении на 13 остаток -1, т. е. $5^n = 13k - 1$, где k — целое, то $5^{n+1} = 5^n \cdot 5 = (13k-1)5 = 13(5k) - 5$ дает при делении на 13 остаток -5; аналогично, если 5^m дает при делении на 13 остаток -5, т. е. $5^m = 13l - 5$, то $5^{m+1} = 5^m \cdot 5 = (13l-5)5 = 13(5l) - 25 = 13(5l-2) + 1$ дает при делении на 13 остаток 1.] Продолжать таблицу далее нам нет нужды: поскольку $5^4 = 13q + 1$, то $5^5 = 5^4 \cdot 5 = (13q+1)5$ дает при делении на 13 тот же остаток, что и число 5 (остаток 5); число $5^6 = 5^4 \cdot 5^2 = (13q+1)5^2$ дает при делении на 13 тот же остаток, что и число 5^2 (остаток -1), и т. д.; таким образом, *в нашем «ряду остатков» последовательно чередуются числа* 1, 5, -1, -5.

Аналогично можно составить и таблицу остатков от деления на 13 чисел n^5, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и т. д. Но число $(13p+r)^5 = \underbrace{(13p+r)\,(13p+r)\ldots(13p+r)}_{5\text{ множителей}}$ дает при делении на 13 тот же остаток, что и число r^5; поэтому нам достаточно ограничиться значениями $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 12$. Далее, если число n равно (или дает при делении на 13 остаток) s, а число n^2 дает при делении на 13 остаток t, то число $n^5 = n^2 \cdot n^2 \cdot n$ дает при делении на 13 тот же остаток, что и произведение $t \cdot t \cdot s$ — это обстоятельство может облегчить составление требуемой таблицы для значений $n = 4, 5, 6$. Наконец, заметим еще, что если число n^5 дает при делении на 13 остаток u, то число $(13-n)^5 = \underbrace{(13-n)\,(13-n)\ldots(13-n)}_{5\text{ множителей}}$ дает при делении на 13 тот же остаток, что и число $(-n)^5$, т. е. остаток $-u$, или $13-u$.

Теперь мы можем составить нашу таблицу:

n	0	1	2	3	4	5
n^5	0	1	32	243		
n^2					16	25
Остаток от деления n^2 на 13					3	-1
Остаток от деления n^5 на 13	0	1	6	-4	$3 \cdot 3 \cdot 4$, или -3	$-1(-1)5=5$

n	6	7	8	9	10	11	12	...
n^5								
n^2	36							
Остаток от деления n^2 на 13	-3							
Остаток от деления n^5 на 13	$-3 \cdot -3 \cdot 6$, или 2	-2	-5	3	4	-6	-1	...

(отвечающие значениям $n = 7, 8, \ldots, 12$ остатки выписываются исходя из того, что числа n^5 и $(13-n)^5$ дают при делении на 13 «дополнительные» остатки u и $-u$). После же значения $n = 12$ в нашей таблице будут «периодически» повторяться те же остатки 0, 1, 6, -4, -3, 5, 2, -2, -5, 3, 4, -6, -1.

Так как первая таблица имеет «период» 4, а вторая — «период» 13, то значение $4 \cdot 13 = 52$ является «периодом» объединения обеих таблиц: при увеличении n на число 52 (или на любое число, кратное 52) остатки от деления на 13 обоих чисел 5^n и n^5 не меняются. Далее, нас могут интересовать лишь те столбцы второй таблицы, которые отвечают остаткам ± 1 и ± 5 (ибо в первой таблице чередуются лишь остатки 1, 5, -1, -5). Но в пределах от $n = 0$ до $n = 51$ остаток 1 во второй таблице отвечает значениям $n = 1$, $1 + 13 = 14$, $1 + 2 \cdot 13 = 27$ и $1 + 3 \cdot 13 = 40$; из этих четырех чисел лишь 14 имеет вид $4x + 2$, которому в первой таблице соответствует остаток -1; таким образом, число $n = 14$ удовлетворяет требуемому условию ($5^{14} + 14^5$ делится на 13). Аналогично, остаток -1 во второй таблице в тех же пределах отвечает значениям $n = 12$, $12 + 13 = 25$, $12 + 2 \cdot 13 = 38$ и $12 + 3 \cdot 13 = 51$; из этих чисел лишь 12 имеет вид $4y$, который в первой таблице приводит к остатку 1. Точно так же остаток 5 во второй таблице отвечает значениям $n = 5$, $5 + 13 = 18$, $5 + 2 \cdot 13 = 31$ и $5 + 3 \cdot 13 = 44$, а остаток -5 — значениям $n = 8$, $8 + 13 = 21$, $8 + 2 \cdot 13 = 34$ и $8 + 3 \cdot 13 = 47$; но из первых четырех чисел лишь 31 имеет вид $4z + 3$, обеспечивающий остаток -5 от деления 5^{31} на 13, а из последних четырех чисел только 21 имеет вид $4w + 1$, обеспечивающий остаток 5 от деления 5^{21} на 13. Таким образом, в пределах $0 \leqslant n \leqslant 52$ требуемому условию удовлетворяют следующие четыре натуральных числа: $n = 12$, 14, 21 и 31; все же множество удовлетворяющих условию задачи натуральных чисел состоит из следующих четырех «серий» чисел:

$$n = 52m + 12,\quad n = 52m + 14 \quad (\text{т. е. } n = 26(2m) + 12 \text{ и } n = 26(2m+1) - 12);$$

$$n = 52m + 21 \quad \text{и} \quad n = 52m + 31 \quad (\text{т. е. } n = 52m \pm 21);$$

здесь $m = 0, 1, 2, \ldots$ (и лишь в формуле $n = 52m - 21$ надо считать $m > 0$).

Ясно, что наименьшее n, удовлетворяющее условиям задачи — это $n = 12$.

71. Ясно, что две последние цифры чисел $n, n^2, n^3, \ldots$, где n — целое неотрицательное число, зависят лишь от двух последних цифр числа n — это следует из правила умножения многозначных чисел «столбиком». С другой стороны, последние цифры 100 последовательных целых неотрицательных чисел обязательно пробегают ряд значений 00, 01, 02, ..., 99 (хотя, вообще говоря, и не в этом порядке); поэтому наша задача сводится к нахождению двух последних цифр суммы (при $a = 4$ и $a = 8$)

$$N_a = 0^a + 1^a + 2^a + \ldots + 99^a.$$

а) Если $n = 10x + y$ — двузначное число, то

$$n^4 = (10x + y)^4 = 10^4x^4 + 4\cdot 10^3x^3y + 6\cdot 10^2x^2y^2 + 4\cdot 10xy^3 + y^4,$$

причем на две последние цифры числа n^4 влияют лишь два последних слагаемых, ибо все остальные слагаемые оканчиваются двумя нулями. Следовательно, нам надо найти лишь две последние цифры сумм

$$\sum_x\sum_y 4\cdot 10xy^3 \quad \text{и} \quad \sum_x\sum_y x^0y^4 \quad \left(= 10\sum_y y^4\right),$$

где x и y независимо друг от друга пробегают значения от 0 до 9 и положено $0^0 = 1$ (так что $\sum_x x^0 = 0^0 + 1^0 + \ldots + 9^0 = 10$).

Заметим теперь, что при фиксированном y

$$\sum_x 4\cdot 10xy^3 = 4\cdot 10\,(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\cdot y^3 = 1800y^3$$

оканчивается двумя нулями; поэтому и $\sum_x\sum_y 4\cdot 10xy^3$ оканчивается двумя нулями — и не вносит никакого вклада в две последние цифры числа N_4. Итак, нам осталось лишь найти две последние цифры числа

$$10\sum_y y^4 = 10(0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 + 7^4 + 8^4 + 9^4) = 10S_4,$$

или последнюю цифру суммы S_4.

Но эту задачу решить легко: в нижеследующей таблице последовательно выписаны последние цифры чисел y, y^2 и y^4:

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
y^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

Поэтому последняя цифра суммы S_4 совпадает с последней цифрой суммы

$$0+1+6+1+\ldots+1=4(1+6)+5=33,$$

а значит, две последние цифры суммы N_4 (а также и фигурирующего в условии задачи числа) — это 30.

б) В точности аналогично решению задачи а) находим, что и при $a=8$ две последние цифры суммы N_8 (а значит, и интересующего нас числа) совпадают с двумя последними цифрами числа $10S_8$, где $S_8=0^8+1^8+\ldots+9^8$. Но из выписанной таблицы последних цифр чисел y^4, а также из равенства $y^{4k}=(y^4)^k$ следует, что *число* y^{4k} (где y — цифра) *оканчивается той же цифрой, что и* y^4. Поэтому и при $a=8$ две последние цифры рассматриваемого числа будут теми же, что и при $a=4$, т. е. это будут цифры 30.

Примечание. Нетрудно видеть, что тот же результат мы получим и при всех *кратных* 4 значениях a, т. е. при $a=4, 8, 12, 16, \ldots$

72. Согласно формуле для суммы членов геометрической прогрессии

$$N=\frac{50^{1000}-1}{50-1}=\frac{50^{1000}-1}{49}.$$

Но $\frac{1}{49}$ обращается в чистую периодическую десятичную дробь, период которой, состоящий из 42 знаков, нетрудно найти простым делением:

$$\frac{1}{49}=0,(020408163265306122448979591836734693877551),$$

или сокращенно

$$\frac{1}{49}=0,(P),$$

где P изображает выписанную выше последовательность из 42 цифр.

Ближайшее к показателю степени 1000 целое кратное числа 42 есть $1008=24\cdot42$. Следовательно,

$$\frac{10^{1008}}{49}=10^{1008}\cdot\frac{1}{49}=\underbrace{PP\ldots P}_{24\text{ раза}},P\ldots$$

Таким образом, дробь

$$M=\frac{10^{1008}-1}{49}=10^{1008}\cdot\frac{1}{49}-\frac{1}{49}=\underbrace{PP\ldots P}_{24\text{ раза}}$$

есть целое число, состоящее из 1008 цифр, которые можно разбить на 24 группы из повторяющихся 42 цифр (фактически число M содержит не 1008 цифр, а 1007, так как наше число P начинается нулем).

Составим теперь разность между интересующим нас числом N и числом M:

$$N-M=\frac{5^{1000}\cdot10^{1000}-1}{49}-\frac{10^{1008}-1}{49}=\frac{5^{1000}-10^8}{49}\cdot10^{1000},$$

Так как разность $N - M$ двух целых чисел — целое число и 10^{1000} взаимно просто с 49, то $5^{1000} - 10^8$ должно делиться на 49. Следовательно, число $x = \frac{5^{1000} - 10^8}{49}$ является целым и разность $N - M = 10^{1000} \cdot x$ оканчивается на 1000 нулей. Таким образом, последние 1000 цифр числа N — те же самые, что и последние 1000 цифр числа M, а именно:

$$\underbrace{pPP \ldots P}_{23 \text{ раза}},$$

где p — группа из 34 цифр, являющихся последними 34 цифрами числа P.

73. Обозначим исходное число $M = 10A + a$, где a — последняя цифра M; тогда, полученное из M указанным способом число N будет, очевидно, равно $a \cdot 10^{6n-1} + A$, где $6n$ — число цифр числа M. Образуем теперь выражение

$$M - 3N = (10A + a) - (3 \cdot 10^{6n-1}a + 3A) = 7A - (3 \cdot 10^{6n-1} - 1)a.$$

Уменьшаемое M в левой части делится на 7 по условию; число $7A$, очевидно, делится на 7; если мы докажем, что на 7 делится и число $3 \cdot 10^{6n-1} - 1$ (а значит, и выражение $(3 \cdot 10^{6n-1} - 1)a$), то на 7 должно будет делиться и число $3N$, а значит и число N.

Число 10 дает при делении на 7 остаток 3, число 10^2 — тот же остаток, что и число $3 \cdot 3 = 9$, т. е. остаток 2, а значит, число $10^3 = 10^2 \cdot 10$ — остаток $2 \cdot 3 = 6$; число $10^6 = 10^3 \cdot 10^3$ дает при делении на 7 тот же остаток, что и $6 \cdot 6 = 36$, т. е. остаток 1, и, значит, это число имеет вид $7k + 1$; число $10^5 = 10^3 \cdot 10^2$ дает при делении на 7 тот же остаток, что и $6 \cdot 2 = 12$, т. е. остаток 5, другими словами, оно имеет вид $7l + 5$; поэтому

$$10^{6n-1} = 10^{6n-6} \cdot 10^5 = (10^6)^{n-1} \cdot 10^5 = \\ = \underbrace{(7k+1)(7k+1)\ldots(7k+1)}_{n-1 \text{ раз}}(7l+5) = 7K + 5,$$

т. е. это число дает при делении на 7 остаток 5. Наконец, число $3 \cdot 10^{6n-1}$ при делении на 7 дает тот же остаток, что и $3 \cdot 5 = 15$, т. е. остаток 1, а значит, число $3 \cdot 10^{6n-1} - 1$ делится на 7.

Это и доказывает утверждение задачи.

74. Число нулей в конце числа показывает, сколько раз 10 встречается сомножителем в этом числе. Число 10 равно произведению $2 \cdot 5$; в *произведении всех целых чисел от 1 до 100 множитель 2 входит* в большей степени, чем множитель 5. Следовательно, произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100$ делится на такую степень 10 (т. е. оканчивается на такое число нулей), сколько это произведение содержит множителей 5. Но до 100 имеется 20 чисел, кратных пяти, причем четыре из них (25, 50, 75 и 100) кратны также 25, т. е. содержат по два множителя 5. Следовательно, всего в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100$ число 5 встретится сомножителем 24 раза; поэтому и нулей в конце этого произведения будет 24.

75. Первое решение задач а) и б). Решим сначала задачу а). Пусть $t + 1$, $t + 2$, ..., $t + n$ будут n произвольных, последовательных целых чисел. Подсчитаем для каждого простого числа p наивысшую степень m, с которой оно входит в произведение $n!$, и наивысшую степень s, с которой оно входит в произведение $(t+1)\ldots$ $\ldots(t+n)$. Для этого обозначим через m_1 число чисел ряда $1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, в которые p входит по крайней мере в первой степени, через m_2 — число чисел того же ряда, в которые p входит по крайней мере во второй степени, и т. д. Тогда показатель, с которым p входит в $n!$, будет равен $m = m_1 + m_2 + \ldots$

Если теперь s_1 — число чисел ряда $t+1, \ldots, t+n$, делящихся на p, s_2 — число чисел этого же ряда, делящихся на p^2, и т. д., то показатель s, с которым p входит в произведение $(t+1)\ldots(t+n)$, равен $s = s_1 + s_2 + \ldots$

Но число чисел ряда $t+1, \ldots, t+n$, делящихся на p, не меньше чем m_1. Действительно, среди чисел $t+1, \ldots, t+n$ находятся также числа $t+p, t+2p, \ldots, t+m_1p$, а в каждом промежутке между $t+kp$ и $t+(k+1)p$ $(k=0, 1, 2, \ldots, m_1-1)$ есть хотя бы одно число, делящееся на p. Таким образом, $s_1 \geqslant m_1$; аналогично $s_2 \geqslant m_2$, и т. д., а потому $s \geqslant m$. Но это означает, что каждый простой сомножитель числа $n!$ входит в состав числа $(t+1)\ldots(t+n)$, причем в степени, не меньшей чем он входит в $n!$, т. е. число $(t+1)\ldots$ $\ldots(t+n)$ делится на $n!$.

б) Произведение первых a сомножителей в $n!$ совпадает с $a!$; произведение следующих b сомножителей в силу задачи а) делится на $b!$; произведение следующих c сомножителей — на $c!$, и т. д. Так как $a+b+c+\ldots+k \leqslant n$, то отсюда следует, что $n!$ разделится на $a!b!\ldots k!$

Другое решение задач а) и б). Решим сначала задачу б). Показатель m, с которым некоторое простое число p входит в $a!$, как мы видели, равен $m = m_1 + m_2 + \ldots$, где m_1 — число чисел ряда $1, 2, \ldots, a$, кратных p, m_2 — кратных p^2, и т. д. Но число чисел, кратных p, равно $\left[\frac{a}{p}\right]$, кратных p^2 — равно $\left[\frac{a}{p^2}\right]$ и т. д., где $\left[\frac{a}{p}\right]$, $\left[\frac{a}{p^2}\right], \ldots$ — целые части дробей $\frac{a}{p}, \frac{a}{p^2}, \ldots$ (см. стр. 37). Таким образом, $m = \left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a}{p^2}\right] + \ldots$ Пусть теперь p — любое простое число. Тогда показатель, с которым p войдет в числитель, равен $\left[\frac{n}{p}\right] +$ $+\left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$. Показатель, с которым p войдет в знаменатель, равен

$$\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{a}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{b}{p}\right] + \left[\frac{b}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \ldots$$

Но так как $n \geqslant a+b+\ldots+k$, то, используя результат задачи 201, 1), мы получим отсюда, что

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \left(\left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{b}{p}\right] + \ldots\right) + \left(\left[\frac{a}{p^2}\right] + \left[\frac{b}{p^2}\right] + \ldots\right) + \ldots,$$

т. е. p войдет в числитель в большей степени, чем в знаменатель. Значит, наша дробь есть целое число.

Решим теперь задачу а). Дополним для этого произведение $(t+1)\ldots(t+n)$ до $(t+n)!$. По только что доказанному дробь

$$\frac{(t+n)\ldots(t+1)\,t\,(t-1)\ldots 1}{n!\,t\,(t-1)\ldots 1}=\frac{(n+t)!}{n!t!}=\frac{(t+1)\ldots(t+n)}{n!}$$

есть число целое.

в) $(n!)!$ есть произведение $n!$ первых целых чисел. Но эти $n!$ чисел можно разбить на $(n-1)!$ групп по n последовательных целых чисел, а произведение чисел каждой из этих групп в силу результата задачи а) делится на $n!$.

г) Пусть рассматриваемые числа будут a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+(n-1)d$. Докажем сначала, что существует такое целое число k, что произведение kd дает при делении на $n!$ в остатке 1. Действительно, рассмотрим $n!-1$ чисел d, $2d$, $3d$, ..., $(n!-1)d$. Ни одно из этих чисел не делится на $n!$, так как d взаимно просто с $n!$. С другой стороны, никакие два произведения pd и qd, где p, q — целые числа, меньшие $n!$, не могут давать при делении на $n!$ одинаковые остатки, так как иначе разность $pd-qd=(p-q)d$ делилась бы на $n!$. Таким образом, рассматриваемые $n!-1$ чисел должны при делении на $n!$ давать $n!-1$ разных остатков, откуда вытекает существование числа k, такого, что произведение kd дает при делении на $n!$ остаток 1: $kd=r\cdot n!+1$.

Обозначим теперь ka через A. Тогда мы имеем:

$$\begin{aligned}
ka &= A,\\
k(a+d) &= A+kd=(A+1)+r\cdot n!,\\
k(a+2d) &= A=2kd=(A+2)+2r\cdot n!,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
k[a+(n-1)d] &= A+(n-1)kd=[A+(n-1)]+(n-1)r\cdot n!.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что произведение

$$k^n a(a+d)(a+2d)\ldots[a+(n-1)d]$$

дает при делении на $n!$ такой же остаток, как и произведение $A(A+1)(A+2)\ldots[A+(n-1)]$. Но последнее из этих двух произведений делится на $n!$ в силу задачи а), а k^n взаимно просто с $n!$, так как, если бы k не было взаимно просто с $n!$, kd тоже не могло бы быть взаимно просто с $n!$.

76. Число сочетаний из 1000 элементов по 500 равно $\frac{1000!}{(500!)^2}$. Так как 7 — простое число, то наивысшая степень, с которой 7 войдет в 1000! (см. второе решение задачи 75б), равна $\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{49}\right]+\left[\frac{1000}{343}\right]=142+20+2=164$. Наивысшая степень, с которой 7 войдет в 500!, равна $\left[\frac{500}{7}\right]+\left[\frac{500}{49}\right]+\left[\frac{500}{343}\right]=71+10+1=82$. Следовательно, наивысшая степень, с которой 7 войдет в знаменатель, равна $82\cdot 2=164$. Таким образом, и числитель и знаменатель содержат 7 в 164-й степени. После сокращения числитель не будет уже содержать множителем 7, и следовательно, целое число $\frac{1000!}{(500!)^2}$ не делится на 7.

77. а) Число $(n-1)!$ не делится на n только в том случае, если n — простое число или если $n=4$. Действительно, если n — составное число, которое можно представить в виде произведения двух неравных множителей a и b, то и a и b меньше $n-1$ и, следовательно, входят в состав $(n-1)!$; значит, $(n-1)!$ делится на $ab=n$. Если n есть квадрат простого числа p, большего двух, то $n-1=p^2-1>2p$. Поэтому и p и $2p$ входят в состав $(n-1)!$; значит, $(n-1)!$ делится на $p\cdot 2p=2p^2=2n$. Итак, условию задачи удовлетворяют только числа 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, т. е. число 4 и все простые числа меньшие 100.

б) $(n-1)!$ не делится на n^2 только в следующих случаях: n есть простое число, n есть удвоенное простое число, $n=8$, $n=9$. Действительно, если n не является ни простым числом, ни удвоенным простым числом, ни квадратом простого числа и не равно ни 8, ни 16, то n можно представить в виде $n=ab$, где a и b — различные числа, не меньшие 3. Мы будем считать, что $b>a$, $a\geqslant 3$. В таком случае числа a, b, $2a$, $2b$, $3a$ все меньше $n-1$ и при этом a, b и $2b$ заведомо различны, а из чисел $2a$ и $3a$ хотя бы одно отлично от чисел a, b и $2b$. Таким образом, в $(n-1)!$ входят множители a, b, $2b$, $2a$ или a, b, $2b$, $3a$ (а может быть, входят и все множители a, b, $2b$, $2a$, $3a$); во всех случаях $(n-1)!$ делится на $a^2b^2=n^2$.

Далее, если $n=p^2$, где p есть простое число большее 4, то $n-1>4p$ и $(n-1)!$ содержит множители p, $2p$, $3p$, $4p$ и, следовательно, делится на $p^4=n^2$. Если $n=2p$, то $(n-1)!$ не делится на p^2, а, следовательно, и на n^2; когда $n=8$ или 9, то $(n-1)!$ не делится на n^2 (7! не делится на 8^2 и 8! не делится на 9^2); когда $n=16$, то $(n-1)!$ делится на n^2 (15! содержит множители 2, $4=2^2$, $6=3\cdot 2$, $8=2^3$, $10=2\cdot 5$, $12=2^2\cdot 3$, $14=2\cdot 7$ и, следовательно, делится на $2^{1+2+1+3+1+2+1}=2^{11}=16^2\cdot 2^3$).

Таким образом, условию задачи б) удовлетворяют все числа, удовлетворяющие условию задачи а), и, кроме того, числа 6, 8, 9, 10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86, 94, т. е. все простые числа, все удвоенные простые числа и числа 8 и 9.

78. Предположим, что число n делится на все числа m, меньшие или равные $\sqrt{n}$. Составим общее наименьшее кратное K всех таких чисел m. В него, очевидно, будут входить все простые числа, меньшие $\sqrt{n}$, причем каждое простое число p в такой степени k, что $p^k\leqslant\sqrt{n}$, но $p^{k+1}>\sqrt{n}$. Предположим, что число простых чисел, меньших $\sqrt{n}$, равно l; эти простые числа мы обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Наименьшее общее кратное K всех чисел, меньших $\sqrt{n}$, представляет собой произведение $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_l^{k_l}$, где k_1 таково, что $p_1^{k_1}\leqslant\sqrt{n}<p_1^{k_1+1}$, k_2 таково, что $p_2^{k_2}\leqslant\sqrt{n}<p_2^{k_2+1}$, и т. д. Перемножив теперь l неравенств

$$\sqrt{n}<p_1^{k_1+1},\ \sqrt{n}<p_2^{k_2+1},\ldots,\ \sqrt{n}<p_l^{k_l+1},$$

получим:

$$(\sqrt{n})^l<p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\ldots p_l^{k_l+1}.$$

Но $p_1^{k_1+1}p_2^{k_2+1}\ldots p_l^{k_l+1} = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_l^{k_l}\cdot p_1p_2\ldots p_l \leqslant K^2$, ибо $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_l^{k_l} = K$, а следовательно, $p_1p_2\ldots p_l \leqslant K$. Таким образом, имеем:

$$(\sqrt{n})^l < K^2.$$

Но так как согласно нашему предположению n должно делиться на K, то $K \leqslant n$; следовательно, $(\sqrt{n})^l < n^2$. Отсюда $l < 4$; так как $p_1, \ldots, p_l$ — все простые числа, меньшие $\sqrt{n}$, то $p_4 = 7 > \sqrt{n}$ (четвертое простое число есть 7) и $n < 49$.

Перебирая все числа, меньшие 49, мы без труда убеждаемся, что из них требуемым свойством обладают только числа 24, 12, 8, 6, 4 и 2.

79. а) Обозначим пять последовательных целых чисел через

$$n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2.$$

Тогда

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = 5n^2+10 = 5(n^2+2).$$

Если бы число $5(n^2+2)$ было полным квадратом, то оно делилось бы на 25, следовательно, n^2+2 делилось бы на 5. Но это возможно лишь в том случае, если последняя цифра числа n^2 есть либо 8, либо 3, а никакой квадрат целого числа не оканчивается на эти цифры.

б) Из трех последовательных целых чисел одно наверное делится на 3, второе дает при делении на 3 остаток 1 и третье — остаток 2 или же, что равносильно, остаток -1. При перемножении чисел остатки от деления их на какое-либо число тоже перемножаются; в самом деле,

$$(pk+r)(qk+s) = pqk^2+pks+qkr+rs = k(pqk+ps+qr)+rs.$$

Поэтому, если число при делении на 3 дает остаток 1, то любая его степень при делении на 3 тоже дает остаток 1; если же число при делении на 3 дает остаток -1, то любая его нечетная степень при делении на 3 дает остаток -1, а любая четная — остаток 1.

Таким образом, из трех четных степеней последовательных целых чисел одна делится на 3, а две другие дают при делении на 3 остаток 1. Следовательно, сумма четных степеней трех последовательных целых чисел дает при делении на 3 остаток 2, или, что то же самое, остаток -1. А мы уже видели, что такой остаток не может дать при делении на 3 четная степень никакого целого числа.

Примечание. Интересно отметить, что в приведенном доказательстве нигде не используется тот факт, что четные степени, в которые возводятся три числа, одинаковы. Таким образом, имеет место следующее предложение — более общее, чем утверждение задачи: *сумма четных степеней* (может быть различных!) *трех последовательных целых чисел не может быть четной степенью никакого целого числа.*

в) Как мы видели в решении задачи б), сумма четных степеней трех последовательных целых чисел дает при делении на 3 остаток 2. Отсюда вытекает, что сумма четных степеней девяти последовательных чисел дает при делении на 3 остаток $2+2+2=6$, т. е. делится на 3. Докажем теперь, что сумма одинаковых четных степеней девяти последовательных целых чисел не делится на $3^2=9$; отсюда будет сразу следовать утверждение задачи.

Из девяти последовательных целых чисел одно обязательно делится на 9, одно дает при делении на 9 остаток 1, одно — остаток 2, и т. д. Отсюда следует, что если $2k$ есть общая степень в которую возводятся девять чисел, то наша сумма дает при делении на 9 тот же самый остаток, что и сумма

$$0+1^{2k}+2^{2k}+3^{2k}+4^{2k}+5^{2k}+6^{2k}+7^{2k}+8^{2k},$$

или сумма

$$2(1^k+4^k+7^k)$$

(так как 3^2 и 6^2 делятся на 9; 1^2 и $8^2=64$ дают при делении на 9 остаток 1; $2^2=4$ и $7^2=49$ дают при делении на 9 остаток 4; $4^2=16$ и $5^2=25$ дают при делении на 9 остаток 7).

Отметим теперь, что $1^3=1$, $4^3=64$ и $7^3=343$ все дают при делении на 9 остаток 1. Отсюда следует, что если $k=3l$, то $1^k+4^k+7^k=1^l+64^l+343^l$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма $1^l+1^l+1^l=3$, т. е. не делится на 9; если $k=3l+1$, то $1^k+4^k+7^k=1^l\cdot 1+64^l\cdot 4+343^l\cdot 7$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма $1\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 7=12$, т. е. не делится на 9; если $k=3l+2$, то $1^k+4^k+7^k=1^l\cdot 1+64^l\cdot 4^2+343^l\cdot 7^2$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма $1\cdot 1+1\cdot 16+1\cdot 49=66$, т. е. не делится на 9.

80. а) Сумма цифр каждого из чисел A и B равна

$$1+2+3+4+5+6+7=28;$$

отсюда следует, что оба числа дают при делении на 9 остаток 1 (каждое число дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма его цифр). Но если бы было $\frac{A}{B}=n$, или, что то же самое, $A=nB$, где n — целое число, отличное от 1, то из того, что $B=9N+1$, следовало бы, что $A=nB=9M+n$; таким образом, n должно давать при делении на 9 остаток 1. Наименьшее такое число n есть 10; но $\frac{A}{B}<10$, так как оба числа A и B состоят из 7 цифр.

б) Обозначим искомые числа через N, $2N$, $3N$. Каждое целое число дает при делении на 9 такой же остаток, как и его сумма цифр; поэтому сумма $N+2N+3N$ дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма $1+2+3+\ldots+9=45$, т. е. $6N$ (а следовательно, и $3N$) делится на 9.

Так как $3N$ трехзначно, то первая цифра числа N не может быть больше 3; поэтому последняя цифра N не может равняться 1 (так как в этом случае $2N$ оканчивается цифрой 2, а $3N$ — цифрой 3 и все три цифры 1, 2, 3 оказываются занятыми). Число N не может также оканчиваться цифрой 5 (в этом случае $2N$ оканчивалось бы нулем). Предположим теперь, что последняя цифра N есть 2; в таком случае последние цифры $2N$ и $3N$ равны соответственно 4 и 6. Для двух первых цифр $3N$ остаются возможными значения 1, 3, 5, 7, 8 и 9; так как сумма всех цифр $3N$ кратна 9, то первые две цифры $3N$ есть 3 и 9 или 5 и 7. Проверяя все представляющиеся случаи, находим одну тройку чисел, удовлетворяющих условию задачи: 192, 384, 576. Аналогично исследуются случаи, когда N оканчивается на 3, 4, 6, 7, 8 или 9; при этом обнаруживаются еще три решения задачи: 273, 546, 819; 327, 654, 981 и 219, 438, 657.

81. *Полный квадрат может оканчиваться только цифрами 0, 1, 4, 9, 6 и 5.* Далее, квадрат каждого четного числа, очевидно, делится на 4, а квадрат нечетного числа дает при делении на 4 остаток 1 ($(2k)^2 = 4k^2$, $(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1$); поэтому квадрат никакого числа не может оканчиваться цифрами 11, 99, 66 и 55 (числа, оканчивающиеся двумя цифрами 11, 99, 66 или 55, дают при делении на 4 соответственно остатки 3, 3, 2 и 3). Рассмотрим, наконец, какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на 16. Каждое целое число можно представить в одном из следующих видов:

$$8k, \quad 8k \pm 1, \quad 8k \pm 2, \quad 8k \pm 3 \quad \text{или} \quad 8k+4;$$

квадраты этих чисел имеют вид

$$16 \cdot (4k^2), \quad 16(4k^2 \pm k) + 1, \quad 16(4k^2 \pm 2k) + 4,$$
$$16(4k^2 \pm 3k) + 9 \quad \text{или} \quad 16(4k^2 + 4k + 1).$$

Таким образом, мы видим, что квадрат целого числа или делится на 16 или дает при делении на 16 один из остатков 1, 4 и 9. Число же, оканчивающееся цифрами 4444, дает при делении на 16 остаток 12 и, следовательно, не может быть полным квадратом.

Итак, если полный квадрат оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами, то эти цифры — четыре нуля (например, $100^2 = 10\,000$).

82. Обозначим стороны прямоугольника через x и y, а диагональ — через z; тогда по теореме Пифагора будем иметь:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Нам надо доказать, что произведение xy делится на 12. Покажем сначала, что это произведение делится на 3, а затем — что оно делится на 4. Так как

$$(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1 \quad \text{и} \quad (3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1,$$

то квадрат каждого числа, не кратного 3, дает при делении на 3 остаток 1. Поэтому, если бы ни x ни y не делились на 3, то сумма $x^2 + y^2$ давала бы при делении на 3 остаток 2 и поэтому не могла бы быть равна квадрату никакого целого числа. Следовательно, если $x^2 + y^2$ равно квадрату целого числа z, то хотя бы одно из чисел x и y делится на 3, а значит, и xy делится на 3.

Далее ясно, что оба числа x и y одновременно нечетными быть не могут; если $x = 2m+1$, $y = 2n+1$, то

$$x^2 + y^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2$$

не может равняться квадрату никакого целого числа (квадрат нечетного числа нечетен, а квадрат четного числа делится на 4). Если и x, и y — четные числа, то их произведение делится на 4. Предположим теперь, что x четно, а y — нечетно: $x = 2m$, $y = 2n+1$. Число z при этом будет нечетным (ибо $z^2 = x^2 + y^2$ нечетно): $z = 2p + 1$. В этом случае имеем:

$$(2m)^2 = (2p+1)^2 - (2n+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 - 4n^2 - 4n - 1,$$

или

$$m^2 = p(p+1) - n(n+1).$$

Отсюда вытекает, что m^2 четно (произведения последовательных целых чисел $p(p+1)$ и $n(n+1)$ оба четные); следовательно, m четно и $x=2m$ делится на 4. Значит, и в этом случае произведение xy делится на 4.

83. По формуле решения квадратного уравнения имеем:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

следовательно, для того чтобы корни уравнения были рациональны, надо, чтобы выражение b^2-4ac являлось полным квадратом. Положим $b=2n+1$, $a=2p+1$, $c=2q+1$; в таком случае будем иметь:

$$b^2-4ac=(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)=4n^2+4n-$$
$$-16pq-8p-8q-3=8\left(\frac{n(n+1)}{2}-2pq-p-q-1\right)+5.$$

Так как это число нечетно $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right.$ есть целое число, ибо произведение двух последовательных целых чисел всегда четно$\Big)$, то оно может быть квадратом только нечетного числа. Но каждое нечетное число можно представить в виде $4k\pm1$; квадрат этого числа равен

$$(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1=8(2k^2\pm k)+1$$

и, следовательно, всегда дает при делении на 8 остаток 1. Поскольку число b^2-4ac дает при делении на 8 остаток 5, оно не может являться полным квадратом.

84. Имеем:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

Числитель нашей дроби не делится на 3, а знаменатель делится, так как он является произведением трех последовательных целых чисел. Следовательно, в знаменателе есть множители, отличные от 2 и 5, а потому в разложении получится **бесконечная периодическая** десятичная дробь.

Из двух целых чисел n и $n+1$ одно должно быть четным. Если четно $n+1$, то n нечетно, следовательно, нечетно $3n^2$, а потому и весь числитель. Если же n четно, то и $n+2$ делится на 2 и, следовательно, знаменатель наверняка делится на 2^2; числитель же делится только на 2, так как если $n=2k$, то

$$3n^2+6n+2=12k^2+12k+2=2(6k^2+6k+1).$$

Поэтому знаменатель полученной после сокращения дроби не будет взаимно прост с 10, и десятичная дробь будет **смешанной** периодической.

85. а), б). Приведем все слагаемые в сумме

$$M=\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\left(\text{и } N=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}\right)$$

к общему знаменателю. Из всех дробей, входящих в нашу сумму, рассмотрим ту, в знаменателе которой стоит самая высокая степень двух (такая дробь может быть только одна). Тогда во все остальные дроби число 2 войдет дополнительным множителем, в то время как в этой дроби дополнительным множителем обязательно будет число нечетное. У всей дроби M (или N) знаменатель есть, конечно, число четное, а числитель, как мы видим, состоит из суммы некоторого числа четных чисел и одного нечетного. Следовательно, числитель есть число нечетное, а потому вся дробь не может быть целой.

в) Рассмотрим дробь в сумме K, в знаменателе которой стоит самая высокая (k-я) степень числа 3. Так как у нас знаменателями являются только нечетные числа, то дробь $\frac{1}{2\cdot 3^k}$ в сумме K отсутствует. Поэтому при приведении суммы дробей к общему знаменателю дополнительные множители всех дробей, кроме рассмотренной, будет делиться на 3, а дополнительный множитель этой дроби не будет делиться на 3. Следовательно, в сумме получим дробь, знаменатель которой делится на 3, а числитель не делится.

86. Дробь $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\frac{a^4+3a^2+1}{a^3+2a}=a+\frac{a^2+1}{a^3+2a}$, или — одновременно с дробью $\frac{a^2+1}{a^3+2a}$. Дробь $\frac{a^2+1}{a^3+2a}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\frac{a^3+2a}{a^2+1}=a+\frac{a}{a^2+1}$, или — одновременно с дробью $\frac{a}{a^2+1}$. Дробь $\frac{a}{a^2+1}$ сократима или несократима одновременно с дробью $\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$, или — одновременно с дробью $\frac{1}{a}$, которая при целом a, очевидно, несократима.

б) Если как число $ч=5n+6$, так и число $з=8n+7$ делятся на целое число d, то на d делится также их разность $p=з-ч=3n+1$ и разность $p_1=ч-p=2n+5$, а также разности $p_2=p-p_1=n-4$; $p_3=p_1-p_2=n+9$; $p_4=p_3-p_2=13$. Таким образом, на d обязательно должно делиться (простое!) число 13, откуда видно, что d может иметь лишь одно только значение 13. То, что значение $d=13$ возможно, легко показать на примере; так, если $n=4$, то дробь $\frac{5n+6}{8n+7}=\frac{26}{39}$ сократима на 13.

87. Ясно, что достаточно доказать утверждение задачи в предположении, что во второй раз мы начали чтение со второй цифры первоначального числа: ведь, сдвигаясь подобным образом на одну цифру, мы можем последовательно перейти от заданной начальной цифры числа к любой другой, принимаемой в новом чтении за начальную; если же на каждом шаге мы будем получать делящееся на 27 число, то оно будет делиться на этот множитель и после любого количества подобных «шагов». Итак, пусть первая цифра прочитанного первоначально 1953-значного числа $a_1 = a$; образуемое остальными цифрами 1952-значное число обозначим через B. В таком случае наше «первое» число равно $a \cdot 10^{1952} + B$, а прочитанное, начиная со 2-й цифры (с начала числа B), число будет равно $B \cdot 10 + a$.

Нам дано, что число $a \cdot 10^{1952} + B$ делится на 27. Но число $10^{1952} - 1$ состоит из 1952 девяток; разделив это число на 9, мы получим число из 1952 выписанных подряд единиц, дающее при делении на 3 такой же остаток, как и сумма его цифр 1952, т. е. остаток 2; следовательно, число $10^{1952} - 1$ дает при делении на 27 остаток $2 \cdot 9 = 18$, а число 10^{1952} — остаток 19. Поэтому, обозначив остаток от деления числа B на 27 через b, мы получим, что $a \cdot 10^{1952} + B$ дает при делении на 27 такой же остаток, как и число $19a + b$; таким образом, условие задачи утверждает, что число $M = 19a + b$ делится на 27.

Перейдем теперь к «новому» числу $B \cdot 10 + a$. Это число дает при делении на 27 тот же остаток, что и число $N = 10b + a$; таким образом, наша задача сводится к доказательству того, что если $M = 19a + b$ делится на 27, то и $N = 10b + a$ делится на 27. Но последнее утверждение очевидно, ибо $10M - N = 189a$ делится на 27 (так как $189 = 27 \cdot 7$), а $N = 10M - 189a$.

88. Очевидно, что десятичная запись всех чисел 5^n, где n — натуральное, оканчивается цифрой 5; поэтому и запись числа $a = 5^{1000}$ оканчивается цифрой 5 (не нулем!). Предположим теперь, что в записи числа a встречаются и нули; пусть первый из них (считая с конца!) стоит на i-м месте. Ясно, что число $5^{1000} \cdot 10^{i-1}$ оканчивается цифрами $5\underbrace{000\ldots 0}_{i-1 \text{ нулей}}$; поэтому $i-1$ последних цифр десятичной записи суммы $a_1 = 5^{1000} + 5^{1000} \cdot 10^{i-1}$ не отличаются от $i-1$ последних цифр числа a (т. е. все они отличны от нуля), а i-я с конца цифра числа a_1 есть 5 (т. е. тоже не нуль!). Исправив таким образом i-ю цифру (для чего нам пришлось заменить число a числом a_1, десятичная запись которого содержит больше цифр), мы перейдем к следующей от конца цифре (разумеется, цифре числа a_1), которая равна нулю (если только такая цифра есть), и точно таким же путем исправим и ее: если равна нулю j-я от конца цифра числа a_1 (где, конечно, $j > i$), то это число мы заменим числом $a_2 = a_1 + 5^{1000} \cdot 10^{j-1}$, которое также делится на 5^{1000} и у которого уже j последних цифр отличны от нуля (на j-м от конца месте стоит цифра 5).

Если продолжая этот процесс, мы придем к какому-то числу a_k (где $k = 0, 1, 2, \ldots$; под a_0 мы понимаем само число $a = 5^{1000}$), десятичная запись которого не содержит нулей, то утверждение задачи доказано; но так как число цифр чисел $a_0 = a, a_1, a_2, \ldots$ все время возрастает, то наш процесс может и никогда не кончиться. Однако если мы дошли в наших построениях до какого-то числа a_l, 1000 последних цифр которого отличны от нуля, то далее мы можем и не продолжать. В самом деле, число $a_l = 10^{1000} \cdot A + B$, где десятичную запись числа B составляют 1000 последних цифр числа a_l (и, значит, *все цифры числа B отличны от нуля*), а десятичная запись числа A состоит из всех предшествующих 1000-й цифр числа a_l. Отсюда следует, что

$$B = a_l - 10^{1000} A,$$

и, значит, число B делится на 5^{1000} (поскольку на 5^{1000} делятся и a_l и $10^{1000}\cdot A = 2^{1000}\cdot 5^{1000}\cdot A$).

89. Числа нашего ряда имеют вид $1+10^4+10^8+\ldots+10^{4k}$. Рассмотрим наряду с этими числами числа $1+10^2+10^4+10^6+\ldots$ $\ldots+10^{2k}$. Непосредственной проверкой нетрудно убедится в том, что

$$10^{4k+4}-1=(10^4-1)\cdot(1+10^4+10^8+\ldots+10^{4k}).$$
$$10^{2k+2}-1=(10^2-1)\cdot(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k}).$$

Кроме того, очевидно,

$$10^{4k+4}-1=(10^{2k+2}-1)\,(10^{2k+2}+1).$$

Сопоставляя все эти равенства, получаем:

$$10^{4k+4}-1=(10^4-1)(1+10^4+10^8+\ldots+10^k)=$$
$$=(10^2-1)(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k})(10^{2k+2}+1),$$

или, так как $\dfrac{10^4-1}{10^2-1}=10^2+1=101$,

$$(1+10^4+10^8+\ldots+10^{4k})\cdot 101=$$
$$=(1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k})(10^{2k+2}+1).$$

Так как 101 есть простое число, то или $1+10^2+10^4+\ldots+10^{2k}$, или $10^{2k+2}+1$ делится на 101; при этом, если $k>1$, то частное больше 1. Сократив на 101, мы получим, что число $1+10^4+10^8+\ldots$ $\ldots+10^{4k}$ при $k>1$ разлагается по крайней мере на два множителя, что и требовалось доказать. При $k=1$ мы имеем число 10^4+ $+1=10\,001$, которое тоже является составным ($10\,001=73\cdot 137$).

Примечание. Точно так же можно доказать, что и все числа ряда

$$\underbrace{100\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}\underbrace{100\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}1,\quad \underbrace{100\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}\underbrace{100\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}\underbrace{100\ldots0}_{(2k+1)\text{ раз}}1,\ \ldots$$

являются составными.

90. Заметим, что

$$2^{2^n}-1=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-1}}-1\right)=$$
$$=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}-1\right)=\ldots$$
$$\ldots=\left(2^{2^{n-1}}+1\right)\left(2^{2^{n-2}}+1\right)\left(2^{2^{n-3}}+1\right)\ldots(2^2+1)(2+1)$$

(в силу формулы $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; последний множитель $2-1=1$ можно отбросить). Таким образом, число $2^{2^n}-1=(2^{2^n}+$ $+1)-2$ делится на все предыдущие числа нашего ряда. Отсюда следует, что если $2^{2^n}+1$ и $2^{2^k}+1$, где $k<n$, имеют общий делитель, то на этот общий делитель должно делиться и число 2. Но 2 не может быть общим делителем двух чисел последовательности, так как все эти числа нечетные; следовательно, каждые два числа последовательности являются взаимно простыми.

91. 2^n, разумеется, не может делиться на 3. Если 2^n дает при делении на 3 остаток 1, то 2^n-1 делится на 3; если 2^n дает при делении на 3 остаток 2, то 2^n+1 делится на 3. Поэтому во всех случаях одно из двух чисел 2^n-1 и 2^n+1 делится на 3, и следовательно, если оба эти числа больше 3, то они не могут быть одновременно простыми.

92. а) Если бы простое число $p>3$ давало при делении на 3 остаток 2, то $8p-1$ делилось бы на 3. Поэтому число p должно давать при делении на 3 остаток 1; но в этом случае $8p+1$ делится на 3. Если же $p=3$, то $8p+1=25$ — тоже составное число.

б) Если p не делится на 3, то p^2 дает при делении на 3 остаток 1 (см. решение задачи 79б)) и, следовательно, $8p^2+1$ делится на 3. Таким образом, должно быть $p=3$, $8p^2+1=73$. Но в этом случае и число $8p^2-1=71$ — простое число.

93. Простые числа кроме 2 и 3 дают при делении на 6 остаток 1 или 5, ибо если бы число давало при делении на 6 остаток 2 или 4, то оно было бы четным, а если бы оно давало остаток 3, то делилось бы на 3. Таким образом, любое простое число, большее 3, можно записать в виде $6n+1$ или $6n+5$. Квадраты этих выражений имеют вид $36n^2+12n+1$ и $36n^2+60n+25$. В обоих случаях при делении на 12 получается в остатке 1.

94. Из трех чисел, имеющих вид $6n+1$ или $6n+5$ (см. предыдущую задачу), по крайней мере два имеют одинаковый вид. Следовательно, их разность, равная d или $2d$, где d — разность прогрессии, делится на 6; поэтому d делится на 3. Кроме того, d как разность двух нечетных чисел делится на 2, поэтому d делится на 6. (См. также решение задачи 95а).)

95. а) Так как простые числа (кроме 2) — числа нечетные, то разность прогрессии — число четное. Далее, если бы разность прогрессии не делилась на 3, то три члена прогрессии a_1, a_1+d, a_1+2d все давали бы разные остатки при делении на 3 (разность никаких двух из них не делится на 3) и, следовательно, хотя бы одно из них делилось бы на 3, что невозможно, так как все члены прогрессии по условию — простые числа (если $a_1=3$, то a_1+3d тоже делится на 3). Точно так же, если бы d не делилось на 5, то все числа a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d и a_1+4d давали бы при делении на 5 разные остатки и, следовательно, одно из них делилось бы на 5. Аналогично показывается, что если все члены арифметической прогрессии — простые, то разность прогрессии должна делиться на 7. Итак, разность d искомой прогрессии должна быть кратна $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$; $d=210k$.

По условию задачи

$$a_{10}=a_1+9d=a_1+1890k<3000.$$

Но это неравенство невозможно при $k\geqslant2$; значит, $k=1$. Отсюда следует, что $a_1<3000-9d=1110$.

Далее $210=11\cdot19+1$; следовательно, $(m+1)$-й член прогрессии можно представить в виде

$$a_{m+1}=a_1+(11\cdot19+1)\cdot m=11\cdot19m+(a_1+m).$$

Отсюда следует, что если a_1 дает при делении на 11 остаток 2, то a_{10} делится на 11; если a_1 дает при делении на 11 остаток 3, то a_9 делится на 11, и т. д. Таким образом, доказываем, что a_1 не может давать при делении на 11 остаток 2, 3, 4, ... или 10. Если a_1 отлично от 11, то a_1 не может делиться на 11 (ибо a_1 — простое); значит, a_1 или равно 11, или дает при делении на 11 остаток 1. Далее, используя то, что $210 = 13 \cdot 16 + 2$ и, следовательно,

$$a_{m+1} = a_1 + (13 \cdot 16 + 2)m = 13 \cdot 16m + (a_1 + 2m),$$

можно показать, что a_1 при делении на 13 может давать только остатки 2, 4, 6, 8, 10 или 12. Учитывая, что a_1 нечетно (ибо все члены прогрессии нечетны), мы заключаем, что a_1 или равно 11 или имеет один из следующих видов:

$$2 \cdot 11 \cdot 13l + 23 = 286l + 23,\ 286l + 45,\ 286l + 67,$$

$$286l + 155,\ 286l + 177 \text{ или } 286l + 199.$$

Поскольку $a_1 < 1\,110$, нам остается только проверить следующие возможные значения a_1:

11; 23, 309, 595, 881; 45, 331, 615, 903; 67, 353, 637, 925; 155, 441, 727, 1 013; 177, 463, 749, 1 035; 199, 485, 771, 1 057.

Простыми из этих чисел являются только:

11, 23, 881, 331, 67, 353, 727, 1 013, 463 и 199.

Проверив соответствующие 10 прогрессий, мы найдем единственную прогрессию, удовлетворяющую условиям задачи:

199, 409, 619, 829, 1 039, 1 249, 1 459, 1 669, 1 879, 2 089.

б) Задача решается аналогично задаче а). Прежде всего, если a_1 отлично от 11, то совершенно аналогично решению задачи а) показывается, что знаменатель d прогрессии должен быть пропорционален $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2\,310$ ($d = 2\,310k$); отсюда вытекает, что

$$a_n = a_1 + 23\,100k > 20\,000.$$

Остается исследовать случай $a_1 = 11$; здесь можно только утверждать, что $d = 210k$. Воспользовавшись тем, что $210 = 13 \cdot 16 + 2$, мы сможем записать следующее выражение для общего члена прогрессии:

$$a_{n+1} = 11 + (13 \cdot 16 + 2)kn = 13(16kn + 1) + 2(kn - 1).$$

Но при $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$ удается подобрать такой номер $n < 10$, что $kn - 1$ делится на 13 и, следовательно, a_{n+1} делится на 13 и не является простым; это значение n будет соответственно равно 1, 7, 9, 10, 8, 2, 5, 3, 4. Если же $k = 6$, $d = 210 \cdot 6 = 1\,260$, то

$$a_4 = 11 + 3 \cdot 1\,260 = 3791$$

делится на 17. Таким образом, если $a_1 = 11$, то $k > 10$, а следовательно, $d \geqslant 2\,100$ и опять $a_{10} > 20\,000$.

Примечание. В задачах а) и б), в соответствии с обычным употреблением термина «простое число», мы считали все члены прогрессии положительными. Если же не требовать этого (т. е. называть «простым» такое целое число n, которое не имеет делителей, отличных от ± 1 и $\pm n$), то удовлетворяющие условиям задачи б) прогрессии существуют (вот пример такой прогрессии — 11, 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089).

96. а) Если два неравных числа отличаются одно от другого не больше чем на 4, то они не могут иметь общих делителей, больших 4, Таким образом, два числа из наших пяти последовательных чисел могут иметь или общий делитель 2, или общий делитель 3, или общий делитель 4, или быть взаимно простыми. Из пяти последовательных чисел по крайней мере два будут нечетны; из двух последовательных нечетных чисел по крайней мере одно не будет делиться на 3. Следовательно, среди наших чисел имеется хотя бы одно нечетное число, не делящееся на 3; это число заведомо будет взаимно просто с остальными четырьмя числами.

б) Решение этой задачи близко к решению задачи а), но значительно сложнее. Если два неравных числа отличаются друг от друга не больше чем на 15, то они не могут иметь общих делителей больших 15. Так как два числа заведомо взаимно просты, если они не имеют общих простых делителей, то, для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно показать, что среди 16 последовательных целых чисел можно найти число, не имеющее с остальными 15 числами — общих делителей 2, 3, 5, 7, и 13: это число и будет взаимно просто со всеми остальными.

Прежде всего из 16 чисел вычеркнем как не удовлетворяющие нашим требованиям восемь четных чисел; после этого у нас останется восемь последовательных нечетных чисел. Из восьми последовательных нечетных чисел, очевидно, на 3 делятся или 1-е, 4-е, 7-е, или 2-е, 5-е, 8-е, или 3-е, 6-е; на 5 делятся или 1-е и 6-е, или 2-е и 7-е, или 3-е и 8-е, или же только одно число; на 7 делятся или 1-е и 8-е, или же только одно число; на 11 и 13 делится не больше одного числа. Если среди наших восьми последовательных нечетных чисел имеется не больше пяти чисел, делящихся на 3, или на 5, или на 7, то среди этих восьми чисел найдется число, не делящееся ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11, ни на 13; это число заведомо будет взаимно просто со всеми остальными. Рассмотрим теперь все те случаи, когда чисел, делящихся или на 3, или на 5, или на 7, будет не меньше 6.

Пусть среди наших восьми нечетных последовательных чисел на 3 делятся три числа; тогда на 5 могут делиться два из оставшихся чисел только в том случае, если одно из крайних чисел делится на 3, а второе — на 5. Вычеркнув эти пять чисел, мы оставим 2-е, 5-е и 6-е числа, или же 7-е, 4-е, и 3-е числа. Рассмотрим сначала первый случай. 2-е, 5-е и 6-е нечетные числа являются в ряду всех 16 последовательных чисел 4-м, 10-м и 12-м или 3-м, 9-м и 11-м числами. Ни одно из этих чисел не может иметь ни с одним из остальных 15 чисел общий делитель 13, так как каждое из остальных чисел отличается от него меньше чем на 13. Следовательно, если эти три числа не делятся ни на 3, ни на 5, то одно из них (а именно, то, которое не делится ни на 7, ни на 11) будет взаимно просто со всеми остальными числами. Точно так же проводится доказательство и в том случае, когда после вычеркивания чисел, делящихся на 3 и на 5, остаются 3-е, 4-е и 7-е числа.

Если из наших восьми чисел на 3 делятся три числа, то на 7 не могут делиться никакие два из оставшихся. Если же на 3 делятся только два числа, 3-е и 6-е, то возможно, что из оставшихся на 7 делятся два, а именно 1-е и 8-е, и на 5 делятся два: 2-е и 7-е. Вычеркнув эти шесть чисел, мы оставим из наших восьми нечетных чисел 4-е и 5-е, которые не будут уже делиться ни на 3, ни на 5, ни на 7. Оба эти числа будут взаимно простыми с каждым из остальных 15 чисел нашей последовательности, так как каждое из остальных чисел отличается от них меньше чем на 11 и поэтому не может иметь с ними общий делитель 11 или 13.

Итак, мы полностью доказали, что из 16 последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с остальными.

Примечание. Аналогично, но более просто доказывается, что из 8 или из 10, или из любого другого числа, меньшего 16, последовательных целых чисел всегда можно выбрать одно, взаимно простое с остальными. Для 17 чисел это предложение уже неверно: например, среди 17 последовательных чисел от 1 184 до 1 220 нет ни одного взаимно простого со всеми остальными. По-видимому, и для любого другого числа k, большего 16, можно найти k последовательных целых чисел, среди которых нет ни одного взаимно простого со всеми остальными; однако доказательство этого общего предложения, как будто, неизвестно.

97. Искомое число будет равно произведению $A_1 \cdot B_1$, где A_1 состоит из 666 цифр 9, а B_1 — из 666 цифр 2. Но A_1 на 1 меньше числа 10^{666}, выражаемого единицей с 666 нулями. Поэтому умножить *число B_1 на это число — то же самое*, что умножить B_1 на 10^{666} (при этом получится число, состоящее из 666 двоек и 666 нулей) и из результата вычесть число B_1. Нетрудно видеть, что получаемая разность будет иметь вид $\underbrace{22\ldots2}_{665\text{ раз}}1\underbrace{77\ldots7}_{665\text{ раз}}8$.

98. Число 777 777 делится без остатка на 1001 и дает в частном 777. Поэтому число $\underbrace{777\ldots7}_{996\text{ раз}}00000$ дает при делении на 1001 в частном

$$\underbrace{777000777000\ldots777}_{\text{группа 777000 повторяется 166 раз}}0000.$$

Так как, кроме того, число 77 777 дает при делении на 1001 в частном 77 и в остатке 700, то частное от деления A на 1 001 имеет вид

$$\underbrace{777000777000\ldots777000}_{\text{группа 777000 повторяется 166 раз}}77,$$

а остаток равен 700.

99. Так как число 222 222 не является полным квадратом, то десятичная запись искомого числа имеет вид $222222a_7a_8\ldots a_n$, где a_7, a_8, $\ldots$, a_n — какие-то неизвестные нам цифры.

Предположим сначала, что число n цифр искомого числа четно: $n = 2k$. Будем теперь извлекать корень из этого числа по обычным правилам:

$$\sqrt{22\,22\,22\,a_7a_8\ldots a_{2k-1}a_{2k}} = 471\,405$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 16 \\
87 & 6\,22 \\
7 & 6\,09 \\
\hline
941 & 13\,22 \\
1 & 9\,41 \\
\hline
9424 & 3\,81\,a_7a_8 \\
4 & 3\,76\,9\,6 \\
\hline
942805 & x_1x_2x_3\,a_9a_{10}a_{11}a_{12} \\
5 & 4\;7\;1\;4\;0\;2\;5 \\
\hline
\end{array}$$

(пятая цифра результата есть 0, так как x_1, очевидно, может быть равно только 4 или 5 и, следовательно, меньше 9; по аналогичной причине шестая цифра, если она последняя, есть 5).

Остаток равен нулю, если $a_9 = 4$, $a_{10} = 0$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 5$; $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$, откуда легко выводим $a_8 = 6 + 1 = 7$, $a_7 = (7 + 9) - 10 = 6$. Таким образом, наименьшее число, имеющее четное число цифр и удовлетворяющее условию задачи, есть $222\,222\,674\,025 = 471\,405^2$.

Аналогично рассматривается случай, когда $n = 2k + 1$ нечетно:

$$\sqrt{2\,22\,22\,2a_7a_8a_9\ldots a_{2k}a_{2k+1}} = 149071\ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
24 & 1\,22 \\
4 & 96 \\
\hline
289 & 26\,22 \\
9 & 26\,01 \\
\hline
29807 & 21\,2a_7a_8a_9 \\
7 & 20\,86\,4\,9 \\
\hline
298141 & x_1x_2x_3x_4a_{10}a_{11} \\
1 & 2\,9\,8\,1\,4\,\ 1 \\
\hline
298142 & x_5x_6x_7x_8x_9x_{10}a_{12}a_{13}
\end{array}$$

Так как число, образованное цифрами x_1, x_2, не меньше $33 = (= 119-86)$ и не больше 43 $(= 129-86)$, то шестая цифра корня равна 1, причем на этом процесс извлечения корня не обрывается, а продолжается дальше. Следовательно, наименьшее число, имеющее нечетное число цифр и удовлетворяющее условию задачи, не менее чем тринадцатизначно, т. е. превосходит число 222 222 674 025. Итак, искомым числом будет 222 222 674 025.

100. Из равенства $m^2 = n^2 + 1954$ вытекает, что числа m^2 и n^2 — *одинаковой четности* (т. е. оба четные или оба нечетные); следовательно, то же можно сказать и о числах m и n. Но в таком случае число $1954 = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ обязательно должно делиться на 4 (ибо числа $m + n$ и $m - n$ — оба четные), в то время как 1954 на 4 не делится. Следовательно, требуемых чисел m и n не существует.

101. Искомое шестизначное число, начинающееся с цифр 523 и делящееся без остатка на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$, можно представить в виде $523\,000 + X$, где X — трехзначное число. Но непосредственное деление дает $523\,000 = 504 \cdot 1037 + 352$, т. е. 523 000 дает при делении на 504 остаток 352. Так как сумма числа 523 000 и трехзначного числа X должна делиться на 504, то отсюда следует, что X может быть равно либо

$$504 - 352 = 152,$$

либо

$$2 \cdot 504 - 352 = 656$$

(ибо число $3 \cdot 504 - 352$ уже четырехзначно). Итак, условию задачи удовлетворяют два числа: 523 152 и 523 656.

102. Пусть N — искомое число. По условию задачи мы имеем:

$$N = 131k + 112 = 132l + 98,$$

где k и l — целые положительные числа. При этом так как N

четырехзначно, то, очевидно,

$$l = \frac{N-98}{132} < \frac{10\,000-98}{132} \leqslant 75.$$

Далее, имеем:

$$131k + 112 = 132l + 98; \quad 131(k-l) = l - 14.$$

Отсюда видно, что если $k-l$ отлично от нуля, то $l-14$ по абсолютной величине превосходит 130, что невозможно, если $l \leqslant 75$. Таким образом, должно быть $k-l=0$, $k=l$, откуда сразу получаем:

$$l-14=0,\ k=l=14,$$

$$N = 131\cdot 14 + 112 = (132\cdot 14 + 98) = 1946.$$

103. а) Выписанное в условии задачи $2n$-значное число можно преобразовать так:

$$4\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} + 4\cdot 10^{2n-3} + 9\,(10^{2n-4} + 10^{2n-5} + \ldots$$

$$\ldots + 10^{n}) + 5\cdot 10^{n-1} + 5.10^{n-2} = 4\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} +$$

$$+ 4\cdot 10^{2n-3} + 9\cdot 10^{n}\,\frac{10^{n-3}-1}{9} + 5\cdot 10^{n-1} + 5\cdot 10^{n-2} =$$

$$= 4\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} + 5\cdot 10^{2n-3} - 10^{n} + 5\cdot 10^{n-1} +$$

$$+ 5\cdot 10^{n-2} = \frac{1}{2}\,(8\cdot 10^{2n-1} + 18\cdot 10^{2n-2} + 10\cdot 10^{2n-3} -$$

$$- 2\cdot 10^{n} + 10^{n} + 10^{n-1}) = \frac{1}{2}\,(9\cdot 10^{2n-1} + 9\cdot 10^{2n-2} - 9\cdot 10^{n-1}) =$$

$$= \frac{[(10^{n}-1) + 10^{n-1}]\cdot 9\cdot 10^{n-1}}{2}.$$

Но этому же равна и сумма арифметической прогрессии с разностью 1, первым членом 10^{n-1} и последним членом $10^{n}-1$ (число членов прогрессии равно $10^{n} - 10^{n-1} = 9\cdot 10^{n-1}$) — сумма всех n-значных чисел.

б) Число тех из рассматриваемых чисел, у которых на первом месте стоит данная цифра a (a может быть равно 1, 2, 3, 4 или 5), есть $6\cdot 6\cdot 3 = 108$ (ибо на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, а на третьем месте — любая из трех цифр 0, 2, 4, так как рассматриваются только четные числа). Отсюда общая сумма всех целых тысяч, содержащихся во всех наших числах, равна $(1+2+3+4+5)\cdot 108\cdot 1000 = 1\,620\,000$.

Аналогично, число чисел, у которых на втором месте стоит данная цифра, равно $5\cdot 6\cdot 3 = 90$, так как на первом месте может стоять одна из пяти цифр 1, 2, 3, 4 или 5. Отсюда общая сумма всех целых сотен (после вычета всех целых тысяч), содержащихся во всех наших числах, равна $(1+2+3+4+5)\cdot 90\cdot 100 = 135\,000$.

Таким же образом получаем, что общая сумма всех целых десятков равна $(1+2+3+4+5)\cdot 90\cdot 10 = 13\,500$ и, наконец, сумма единиц равна $(2+4)\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 1 = 1080$.

Искомая сумма равна

$$1\,620\,000 + 135\,000 + 13\,500 + 1080 = 1\,769\,580.$$

104. Рассмотрим сначала все целые числа от 0 до 99 999 999; при этом те из этих чисел, которые имеют меньше восьми цифр, дополним слева нулями так, чтобы они стали восьмизначными. Мы будем иметь 100 000 000 восьмизначных чисел, для записи которых нам потребуется, очевидно, 800 000 000 цифр. При этом здесь каждая из 10 цифр будет использована равное число раз, поскольку все они совершенно равноправны (нуль может стоять на первом месте точно так же, как и всякая другая цифра). Следовательно, каждая цифра будет у нас использована 80 000 000 раз.

Теперь подсчитаем, сколько здесь будет лишних нулей (т. е. нулей, приписанных спереди чисел, имеющих меньше восьми цифр). Однозначных чисел (не считая нуля) имеется всего девять, двузначных чисел $99-9=90$, трехзначных чисел $999-99=900$, и т. д. Так как к однозначной цифре мы приписали слева семь нулей, к двузначной — шесть, и т. д., то общее число лишних нулей (не считая цифр первого числа, которое у нас записывалось так: 00 000 000) будет равно

$$7\cdot 9+6\cdot 90+5\cdot 900+4\cdot 9\,000+3\cdot 90\,000+2\cdot 900\,000+$$
$$+1\cdot 9\,000\,000=11\,111\,103.$$

Припишем теперь 1 слева первого числа 00 000 000; при этом мы получим все целые числа от 1 до 100 000 000. Мы видим, что для записи этих чисел требуется 80 000 000 двоек, троек, и т. д. до девяток, 80 000 001 единица (одну лишнюю единицу мы приписали слева числа 00 000 000) и $80\,000\,000-11\,111\,103=68\,888\,897$ нулей.

105. Однозначных чисел всего имеется девять, двузначных всего имеется $99-9=90$, трехзначных $999-99=900$ и вообще n-значных $9\cdot 10^{n-1}$.

Однозначные числа займут в выписанном нами ряду девять мест, двузначные $90\cdot 2=180$ мест, трехзначных $900\cdot 3=2700$ мест, четырехзначные $9000\cdot 4=36\,000$ мест, пятизначные $90\,000\cdot 5=$ $=450\,000$ мест. Отсюда видно, что интересующая нас цифра будет принадлежать пятизначному числу.

Цифры, принадлежащие не более чем четырехзначным числам, будут иметь номера от 1 и до $9+180+2700+36\,000=38\,889$. Для того чтобы узнать, сколько пятизначных чисел уложится в промежутке от 38 889-го места до 206 788-го, надо разделить разность $206\,788-38\,889=167\,899$ на 5 (деление с остатком):

$$206\,788-38\,889=5\cdot 33\,579+4.$$

Таким образом, искомая цифра будет принадлежать 33 580-му пятизначному числу, т. е. числу 43 579 (так как первое пятизначное число есть 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте. Следовательно, искомая цифра есть 7.

106. Допустим, что дробь 0,1234 ... — периодическая, n — число цифр периода, k — число цифр до периода. Рассмотрим число $N=$ $=10^m$, где m — какое-нибудь целое число, не меньшее чем $n+k$; это есть единица с m нулями на конце. При составлении нашей дроби мы выписываем подряд в с е целые числа; следовательно, где-то будет расположено и число N. Но из того, что в ряду цифр нашей бесконечной десятичной дроби где-то стоят подряд $m\geqslant n+k$ нулей, следует, что период дроби состоит из одних нулей. Так как это, очевидно, невозможно, то дробь 0,1234 ... — *непериодическая.*

107. Хорошо известно, что каждое целое положительное число N дает при делении на 9 тот же остаток, что и сумма его цифр. (Это следует из того, что стоящая на $(k+1)$-м от конца месте цифра a_k десятичной записи N символизирует слагаемое $a_k \cdot 10^k$ в разложении N по степеням десяти; но $a_k \cdot 10^k = a_k \cdot (99\ldots 9+1) = 99\ldots 9a_k + a_k$ дает при делении на 9 тот же остаток, что и a_k.) Отсюда вытекает, что если число N дает при делении на 9 остаток $r \neq 0$, то при многократной замене числа суммой его цифр мы в конце концов придем к однозначному числу r, а если N делится на 9 — к числу 9. Таким образом, единицы среди нашего миллиарда однозначных чисел будут соответствовать числам 1, 10, 19, 28, ..., 1 000 000 000, дающим при делении на 9 остаток 1, а двойки — числам 2, 11, 20, 29, ..., 999 999 992, дающим при делении на 9 остаток 2. Но первых чисел, очевидно, на одно больше, чем вторых; поэтому *единиц мы получим на одну больше, чем двоек.*

108. а) Не может. Если десятичная запись числа $N = n^2$ оканчивается нулем, то она обязательно оканчивается четным числом нулей и число N_1, получаемое из N вычеркиванием этих нулей в конце, также является полным квадратом; поэтому достаточно доказать, что не может являться полным квадратом число, записываемое лишь цифрами 6 и 0 и кончающееся цифрой 6. Но такое число кончается либо цифрами 06, либо цифрами 66, т. е. оно *делится на* 2 и *не делится на* 4; а значит, не может быть полным квадратом.

б) Не может. Если десятичная запись числа $N = n^2$ оканчивается цифрой 5, то и n должно оканчиваться той же цифрой, т. е. $n = 10n_1 + 5, n^2 = (10n_1+5)^2 = 100n_1^2 + 100n_1 + 25 = 100n_1(n_1+1) + 25$; таким образом, число $N = 100N_1 + 25$ оканчивается цифрами 25 и $N_1 = n_1(n_1+1)$. Но ясно, что последняя цифра произведения $n_1(n_1+1)$ совпадает с последней цифрой произведения последних цифр чисел n_1 и n_1+1, которая может представлять собой лишь цифру 0, 2 или 6, ибо произведения $0 \cdot 1$, $4 \cdot 5$, $5 \cdot 6$ и $9 \cdot 0$ кончаются цифрой 0, произведения $1 \cdot 2$, $3 \cdot 4$, $6 \cdot 7$ и $8 \cdot 9$ — цифрой 2 и произведения $2 \cdot 3$ и $7 \cdot 8$ — цифрой 6. Таким образом, последней цифрой числа N_1 — и третьей от конца цифрой числа N — обязательно является цифра 6, ибо ни комбинацией цифр 025, ни цифрами 225 число N кончаться не может (запись N вообще не содержит цифры 0, а цифру 2 содержит лишь один раз). Но если $N = 1000N_2 + 625$, то N делится на $5^3 = 125$ (ибо и $1000N_2$, и 625 делятся на 125); а тогда, поскольку N есть полный квадрат, N делится даже на $5^4 = 625$. Но если N делится на 5^4, то и число $1000N_2 = N - 625$ делится на 5^4, а значит, N_2 делится на 5. Если же N_2 делится на 5, то оканчиваться запись этого числа может лишь цифрами 0 или 5; а это значит, что запись числа N оканчивается четырьмя цифрами 0625 или 5625, что, однако, невозможно (ибо запись N содержит лишь одну цифру 5 и вовсе не содержит цифры 0).

109. Для того, чтобы доказать требуемое утверждение, достаточно проверить, что 444 445-значное число A, полученное выписыванием друг за другом 88 889 пятизначных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{88\,889}$, делится на какое-либо отличное от 2 число. Но *A делится на* 11 111. В самом деле, наше число $A = a_1a_2a_3\ldots a_{88}a_{887}a_{88\,888}a_{88\,889}$, очевидно, равно $A = a_{88\,889} + a_{88\,888} \cdot 10^5 + a_{88\,887} \cdot 10^{10} + \ldots + a_1 \cdot 10^{44\,440} =$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{88\,888} + a_{88\,889}) + a_{88\,888}(10^5 - 1) + \\ + a_{88\,887}(10^{10} - 1) + \ldots + a_1(10^{44\,440} - 1). \qquad (*)$$

А так как $a_1, a_2, \ldots, a_{88\,889}$ — это **все** целые числа от 11 111 до 99 999, то их сумма равна

$$11\,111 + 11\,112 + 11\,113 + \ldots + 99\,999 =$$
$$= \frac{11\,111 + 99\,999}{2} \cdot 88\,889 = 11\,111 \cdot 5 \cdot 88\,889$$

т. е. она делится на 11 111. Все остальные слагаемые правой части формулы (*) тоже делятся на 11 111 (ибо при всех натуральных k разность $10^{5k} - 1 = (10^5)^k - 1^k$ делится на разность оснований $10^5 - 1 = 99\,999 = 9 \cdot 11\,111$, а значит и на 11 111); поэтому A делится на 11 111.

110. Пусть искомое число $X = \overline{a_0a_1a_2\ldots a_9}$ (где $a_0, a_1, \ldots, a_9$ — цифры числа); при этом a_0 есть количество нулей среди цифр X, a_1 — количество единиц, a_2 — количество двоек, и т. д. Поэтому сумма всех цифр X равна

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2 + \ldots + a_9 \cdot 9,$$

откуда получаем

$$a_0 = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 + 6a_7 + 7a_8 + 8a_9. \qquad (*)$$

Равенство $a_0 = 0$ исключается условиями задачи (иначе число X не было бы 10-значным; впрочем, условие $a_0 \neq 0$ сразу следует и из (*)); равенство $a_0 = 1$ приводит к невозможным значениям $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = 8$ (ибо всего мы должны иметь 10 цифр), все остальные цифры — нули; равенство $a_0 = 2$ совместимо лишь с (также невозможными!) значениями $a_0 = a_2 = 2$, $a_1 = 6$, все остальные цифры — нули, или $a_0 = 2$, $a_3 = 1$, $a_1 = 7$, остальные цифры — нули. Пусть теперь $a_0 = i > 2$; равенство (*) мы перепишем так:

$$a_0 = i = a_2 + 2a_3 + \ldots + (i-1)a_i + \ldots + 8a_9 \qquad (**)$$

(если $i = 3$, то слагаемые $2a_3$ и $(i-1)a_i$ совпадают; если $i = 9$, то совпадают $(i-1)a_i$ и $8a_9$). При этом a_i — число равных i цифр числа X — отлично от нуля (ибо $a_0 = i$); с другой стороны, (**) невозможно при $a_i > 1$, так что $a_i = 1$. Поэтому (**) можно переписать так:

$$1 = a_2 + 2a_3 + \ldots + (i-2)a_{i-1} + ia_{i+1} + \ldots + 8a_9, \qquad (***)$$

откуда сразу следует, что $a_2 = 1$, а все отличные от a_0, a_1, a_2 и a_i цифры числа X равны нулю. Но если $a_2 = 1$, то среди цифр числа X есть двойка, которой, очевидно, может быть лишь цифра a_1. Таким образом, в десятичной записи X отличны от нуля лишь цифры $a_0\ (=i)$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $a_i = 1$, т. е. среди цифр X есть i нулей, 2 единицы, 1 двойка и 1 цифра i, откуда (поскольку X 10-значно) $i = 10 - 2 - 1 - 1 = 6$.

Итак, $X = 6\,210\,001\,000$ (легко проверить, что это число действительно удовлетворяет всем условиям задачи).

111. Так как $A = 999\,999\,999 = 1\,000\,000\,000 - 1$, то произведение $AX = 10^9X - X = \overline{x_1x_2\ldots x_k000\,000\,000} - \overline{x_1x_2\ldots x_k}$, где $X = \overline{x_1x_2\ldots x_k}$ — произвольное натуральное число (записываемое цифрами $x_1, x_2, \ldots, x_k$). Нам требуется, чтобы число AX записывалось одними единицами, т. е. чтобы было

$$\overline{\overline{x_1x_2\ldots x_k}000\,000\,000} - \overline{x_1x_2\ldots x_k} = \overline{11\ldots1111},$$

или

$$\overline{\overline{x_1x_2\ldots x_k}000\,000\,000} - \overline{11\ldots1111} = \overline{x_1x_2\ldots x_k}.$$

А так как все цифры вычитаемого нам известны, то мы можем производить вычитание «столбиком», последовательно определяя все цифры числа X, начиная с последней:

$$\begin{array}{r} (7)\ \overbrace{(8)\ \ldots\ (8)\ (8)}^{8\ \text{цифр}}\ (9) \\ 000\,000\,000 \\ \underline{\ldots 1\ \ 1\ \ldots\ 1\ \ 1\ \ 1\ 111\,111\,111} \\ \ldots 6\ \ \underbrace{7\ \ldots\ 7\ \ 7\ \ 7}_{9\ \text{цифр}}\ 888\,888\,889 \end{array},$$

где сверху в скобках выписываются последовательно определяемые цифры числа X. Этот процесс придется продолжать до тех пор, пока мы не придем к группе единиц, которые при образовании разности сократятся: ведь только за счет того, что полученное в разности число X будет в нашей записи начинаться с группы (разумеется, не учитываемых) нулей, можно будет добиться совпадения записей X в уменьшаемом и в разности!

Окончательно мы приходим к следующему значению числа $X = X_0$:

$$X_0 = \underbrace{11\ldots1}_{9\ \text{цифр}}\ \underbrace{22\ldots2}_{9\ \text{цифр}}\ \underbrace{33\ldots3}_{9\ \text{цифр}}\ldots\underbrace{77\ldots7}_{9\ \text{цифр}}\ \underbrace{88\ldots8}_{8\ \text{цифр}}\ 9;$$

запись этого числа состоит из $\underbrace{9+9+\ldots9}_{7\ \text{слагаемых}} + 8 + 1 = 72$ цифр.

Полученное число X_0 является, очевидно, **н а и м е н ь ш и м** из всех обладающих требуемым свойством, но оно не является *единственным* таким числом. У нас процесс вычитания завершился, когда в начале образующего разность числа X появились 9 цифр 0, которые мы просто отбросили, считая, что их можно не засчитывать, ибо ими запись X начинается. Можно, однако, счесть все эти цифры 0 «существенными», выписать их вслед за цифрами 1 в уменьшаемом и продолжать вычитание. Ясно, что после этих девяти нулей у нас снова начнут появляться цифры числа X_0 — и запись X приобретет вид:

$$X_1 = \overline{\overline{X}_0\ \underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{цифр}}\ \overline{X}_0},$$

где $\overline{X}_0$ — десятичная запись числа X_0. Вообще, как следует из нашего рассуждения, все удовлетворяющие условию задачи числа X имеют вид:

$$X = X_n = \overline{\overline{X}_0\ \underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{цифр}}\ \overline{X}_0\ \underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{цифр}}\ \overline{X}_0\ \underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{цифр}}\ \overline{X}_0\ldots\overline{X}_0\ \underbrace{00\ldots0}_{9\ \text{цифр}}\ \overline{X}_0},$$

где число n наборов из девяти последовательных нулей может быть любым: $n = 0, 1, 2, \ldots$; число X_n состоит из $72(n+1) + 9n = 81n + 72$ цифр.

112. Пусть число $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$ n-значно. Мы можем, разумеется, считать, что $a_1 \neq 0$, ибо нули в конце записи A можно просто отбросить — это не изменит суммы цифр числа AN для любого N. Рассмотрим теперь число $N = 10^m - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{m \text{ девяток}}$, где $m \geqslant n$. Очевидно, что число

$$AN = 10^m A - A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 \underbrace{000\ldots0}_{m \text{ нулей}}} - \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1} =$$

$$= \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 (a_1 - 1) \underbrace{999\ldots9}_{m-n \text{ девяток}} (9 - a_n)(9 - a_{n-1}) \ldots (9 - a_2)(10 - a_1)}$$

имеет ту же сумму $9m$ цифр, что и число N.

113. Заметим, прежде всего, что утверждение задачи можно считать верным и при $m = 0$ (в таком случае оговорка $n \geqslant 2$ становится необязательной — мы можем допускать и $n = 1$), если только положить $0^0 = 1$ (поскольку $a^0 = 1$ для всех a). Пусть, например, $n = 1$; обозначая все четные цифры (включая и цифру 0) через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, а нечетные цифры — через $\beta_1, \beta_2, \ldots$, получим:

$$\alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \ldots = 0^0 + 2^0 + 4^0 + 6^0 + 8^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

и

$$\beta_1^0 + \beta_2^0 + \ldots = 1^0 + 3^0 + 5^0 + 7^0 + 9^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

Перейдем теперь к следующему значению n: пусть $n = 2$; через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ мы по-прежнему обозначим все четные и все нечетные цифры, а через $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2 \ldots$ — все не более чем двузначные числа с четной, соответственно с нечетной суммами цифр. Так как, очевидно, каждое число A_i имеет либо вид $\overline{\alpha_k \alpha_l} (= 10\alpha_k + \alpha_l)$, либо вид $\overline{\beta_k \beta_l} (= 10\beta_k + \beta_l)$, а числа B_j, напротив, имеют вид $\overline{\alpha_k \beta_l} = 10\alpha_k + \beta_l$ и $\overline{\beta_k \alpha_l} = 10\beta_k + \alpha_l$, то, обозначая через ΣA_i и через ΣB_j сумму всевозможных не более чем двузначных неотрицательных чисел с четной, соответственно с нечетной суммами цифр, а через $\Sigma \alpha_k$ и $\Sigma \beta_l$ — сумму всех четных и всех нечетных цифр, получим:

$$\sum A_i = \sum (10\alpha_k + \alpha_l) + \sum (10\beta_k + \beta_l) =$$
$$= 10\left(\sum \alpha_k + \sum \beta_k\right) + \left(\sum \alpha_l + \sum \beta\right)$$

и, аналогично,

$$\sum B_j = \sum (10\alpha_k + \beta_l) + \sum (10\beta_k + \alpha_l) =$$
$$= 10\left(\sum \alpha_k + \sum \beta_k\right) + \left(\sum \beta_l + \sum \alpha_l\right);$$

эти два равенства и доказывают, что $\Sigma A_i = \Sigma B_j$.

В точности то же рассуждение лежит в основе общего доказательства требуемого утверждения методом математической индукции. Пусть мы уже установили справедливость его для некоторого n (и всех $m < n$); рассмотрим следующее натуральное число $n + 1$ (и какую-то степень $m < n + 1$). Условимся обозначать все не более чем n-значные неотрицательные числа с четной, соответственно с нечетной суммами цифр, через $a_1, a_2, \ldots$ и через $b_1, b_2, \ldots$, далее, как и раньше, все не более чем $(n+1)$-значные числа с четной, соответственно с нечетной суммами цифр обозначим через $A_1, A_2, \ldots$ и через $B_1, B_2, \ldots$; наконец, сохраним обозначения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ для четных и для нечетных цифр. По предположению индукции имеем

$$\sum_k a_k^p = \sum_k b_k^p \quad (= s_{n,p}) \qquad \text{для всех } p < n; \tag{*}$$

кроме того, условимся обозначать через

$$S_{n,p} = \sum_k a_k^p + \sum_k b_k^p \tag{**}$$

сумму p-х степеней всех не более чем n-значных чисел.

Заметим далее, что каждое число A_i имеет либо вид $\overline{a_k\alpha_l} = 10a_k + \alpha_l$, либо вид $\overline{b_k\beta_l} = 10b_k + \beta_l$; аналогично, числа B_j могут иметь форму $\overline{a_k\beta_l} = 10a_k + \beta_l$ или $\overline{b_k\alpha_l} = 10b_k + \alpha_l$. Используя аналогичные употребленным выше обозначения, найдем

$$\sum_i A_i^m = \sum (10a_k + \alpha_l)^m + \sum (10b_k + \beta_l)^m; \quad \text{здесь} \quad m < n+1.$$

Но, по формуле бинома Ньютона, например,

$$(10a_k + \alpha_l)^m = 10^m \cdot a_k^m + C_m^1 \cdot 10^{m-1} a_k^{m-1} \alpha_l + \\ + C_m^2 \cdot 10^{m-2} a_k^{m-2} \alpha_l^2 + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 10 a_k \alpha_l^{m-1} + \alpha_l^m.$$

Поэтому, используя обозначения (*), получим:

$$\sum (10a_k + \alpha_l)^m = 10^m \sum a_k^m + C_m^1 \cdot 10^{m-1} \sum a_k^{m-1} \sum \alpha_l + \\ + C_m^2\, 10^{m-2} \sum a_k^{m-2} \sum \alpha_l^2 + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 10 \sum a_k \sum \alpha_l^{m-1} + \\ + \sum \alpha_l^m = 10^m \sum a_k^m + C_m^1 \cdot 10^{m-1} s_{n,m-1} \sum \alpha_l + \\ + C_m^2 \cdot 10^{m-2} s_{n,m-2} \sum \alpha_l^2 + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 10 s_{n,1} \sum \alpha_l^{m-1} + \sum \alpha_l^m$$

и, аналогично,

$$\sum (10b_k + \beta_l)^m = 10^m \sum b_k^m + C_m^1 \cdot 10^{m-1} \sum b_k^{m-1} \sum \beta_l + \\ + C_m^2 10^{m-2} \sum b_k^{m-2} \sum \beta_l^2 + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 10 \sum b_k \sum \beta_l^{m-1} + \\ + \sum \beta_l^m = 10^m \sum b_k^m + C_m^1 \cdot 10^{m-1} s_{n,m-1} \sum \beta_l + \\ + C_m^2 \cdot 10^{m-2} s_{n,m-2} \sum \beta_l^2 + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 10 s_{n,1} \sum \beta_l^{m-1} + \sum \beta_l^m.$$

Таким образом,

$$\sum A_i^m = \sum (10a_k + \alpha_l)^m + \sum (10b_k + \beta_l)^m = \\ = 10^m S_{n,m} + C_m^1 \cdot 10^{m-1} s_{m,m-1} S_{1,1} + C_m^2 \cdot 10^{m-2} s_{n,m-2} S_{1,2} + \ldots \\ \ldots + C_m^{m-1} \cdot 10 s_{n,1} S_{1,m-1} + S_{1,m}.$$

Используя те же обозначения (*) и (**), формулу бинома Ньютона и производя аналогичные преобразования, мы придем к точно **т а к о м у ж е** выражению для суммы

$$\sum B_j^m = \sum (10a_k + \beta_l)^m + \sum (10b_k + \alpha_l)^m,$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Несправедливость выписанного в условии задачи тождества для степеней $m \geqslant n$ следует уже из того, что при $n = m = 1$ имеем:

$$\sum \alpha_i^1 = \sum \alpha_i = 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20, \text{ а}$$

$$\sum \beta_j^1 = \sum \beta_j = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

114. Выпишем в каждой строке, начиная с третьей, четыре первых числа и поставим на месте четного числа букву *ч*, а на месте нечетного числа — букву *н*. Получится полоса:

н ч н ч

н н ч н

н ч ч ч

н н н ч

н ч н ч

. . . .

. . . .

Мы видим, что пятая строка полосы совпала с первой. С другой стороны, четность или нечетность первых четырех чисел каждой строки нашего числового треугольника зависит только от четности или нечетности первых четырех чисел предыдущей строки; следовательно, в нашей полосе строки будут периодически повторяться через каждые четыре строки. Так как в каждой из четырех первых строк полосы имеется четное число, то отсюда вытекает, что оно будет и во всех последующих строках.

115. Докажем, что *сумма чисел каждой строки нашей таблицы делится на* $1958 : 2 = 979$, причем *сумма чисел каждой строки, начиная со* 2-й, *делится* даже *на* 1958; отсюда уже следует утверждение задачи, поскольку в последней (нижней) строке имеется единственное число и «сумма чисел» этой строки совпадает с этим числом. Ясно, что сумма S_1 чисел верхней строки (сумма первых 1958 чисел натурального ряда, образующих арифметическую прогрессию) равна $^1/_2(1958 \cdot 1959)$, т. е. S_1 делится на $1958 : 2$. Далее сумма S_2 чисел 2-й строки, очевидно, равна: $S_2 = (0 + 1) + (1 + 2) + (2 + 3) + \ldots \ldots + (1956 + 1957) + (1957 + 1958) = 2S_1 - (0 + 1958)$, поскольку почти все слагаемые суммы S_1 входят в выписанное выражение S_2 дважды — исключение составляют лишь «крайние» члены 0 и 1958, которые входят в S_2 по одному разу. Но поскольку и $2S_1$ и $0 + 1958 = 1958$ делятся на 1958, то и сумма S_2 на 1958 делится.

Перейдем теперь к 3-й строке нашей таблицы. Ясно, что сумма S_3 всех чисел этой строки равна

$$S_3 = (1 + 3) + (3 + 5) + \ldots + (3913 + 3915) = 2S_2 - (1 + 3915);$$

в самом деле, в выражении для S_3 фигурируют дважды все числа из 2-й строки, кроме одних лишь «крайних» чисел 1 и 3915, которые входят в сумму S_3 по одному разу. Но числа второго ряда 1 и 3915 имеют следующее происхождение: $1 = 0 + 1$ и $3915 = 1957 + 1958$; поэтому

$$1 + 3915 = (0 + 1) + (1957 + 1958) =$$
$$= (0 + 1958) + (1 + 1957) = 2 \cdot 1958$$

делится на 1958, откуда и вытекает, что также и сумма S_3 делится на 1958.

Это рассуждение может быть продолжено. Так, сумма S_4 всех чисел 4-й строки равна

$$S_4 = 2S_3 - (4 + 7828),$$

где 4 $(= 1 + 3)$ и 7828 $(= 3913 + 3915)$ — «крайние» числа 3-й строки. Но из правила образования нашей таблицы сразу следует, что

$$4 + 7828 = (1 + 3) + (3913 + 3915) =$$
$$= (0 + 1) + (1 + 2) + (1956 + 1957) + (1957 + 1958) =$$
$$= (0 + 1958) + (1 + 1957) + (1 + 1957) + (2 + 1956) = 4 \cdot 1958$$

делится на 1958, откуда и вытекает делимость на 1958 суммы S_4. Точно так же устанавливается делимость на 1958 суммы чисел всех последующих строк (формальное доказательство можно провести методом математической индукции), что и завершает доказательство требуемого утверждения.

116. Ясно, что если на столбе указаны числа $\overline{xyz}|\overline{x_1y_1z_1}$ (где x, y, ... — цифры), то $\overline{x_1y_1z_1} = 999 - \overline{xyz}$ и, значит, $z_1 = 9 - z$, $y_1 = 9 - y$, $x_1 = 9 - x$. (Если $x = 9$ или $x = y = 9$, то цифры $x_1 = 0$, или $x_1 = y_1 = 0$ на столбе не проставляются.) Отсюда сразу следует, что если $x = y = z$ (и, значит, $x_1 = y_1 = z_1 = 9 - x$), то наши условия будут выполнены; это дает 10 удовлетворяющих условию задачи столбов (отвечающих расстояниям $0 = 000$, 111, 222, ..., 999 км от пункта A). Если же число $\overline{xyz}$ записывается двумя разными цифрами, то эти цифры должны быть таковы, что каждая из них дополняет вторую до числа 9 — в этом случае и число $\overline{x_1y_1z_1} = \overline{9 - x, 9 - y, 9 - z}$ будет записываться теми же цифрами. Подобных пар цифр существует, очевидно, пять: (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6) и (4, 5); а трехзначных чисел, записывающихся двумя данными цифрами a и b, имеется всего шесть: три из них записываются двумя цифрами a и одной цифрой b (которая может занимать любое из 3-х имеющихся мест) и, аналогично, три числа записываются одной цифрой a и двумя цифрами b. Таким образом, мы получаем еще $5 \cdot 6 = 30$ удовлетворяющих условию задачи расстояний искомого столба от пункта A; поэтому общее число удовлетворяющих сформулированным требованиям столбов: $10 + 30 = 40$.

117. Первое решение. Семь сеансов (считая от начала сеанса до начала следующего) заняли меньше 13 часов (1-й сеанс начался не раньше 12 час, а 7-й кончился до 1 часа ночи), а 5 сеансов заняли больше 9 часов (2-й сеанс начался до 14 час., а 6-й кончился не раньше 23 час.). Следовательно, длительность сеанса меньше чем 1 час. 52 мин. и больше чем 1 час 48 мин. Отсюда длительность сеанса равна 1 час. 50 мин., ибо она выражается всегда числом минут, кратным 5.

Так как первый сеанс кончится до 14 час., то он мог начаться либо в 12 час. 00 мин., либо в 12 час. 05 мин.; соответственно этому второй сеанс начинается в 13 час. 50 мин. или в 13 час. 55 мин., и т. д.

Если не требовать, чтобы длительность сеанса была кратной пяти минутам, то мы получим не два, а большее число возможных решений задачи.

Второе решение. Пусть $12+y$ — начало 1-го сеанса, а x — продолжительность сеанса (x и y выражаются в часах). Тогда сеансы начинаются в следующие часы:

1-й в $12+y$ (от 12 час. до 13 час.);

2-й в $12+y+x$ (от 13 час. до 14 час.);

7-й в $12+y+6x$ (от 23 час. до 24 час.);

8-й в $12+y+7x$ (от 24 час. до 1 час.);

отсюда

$$12 \leqslant 12+y < 13, \quad \text{или} \quad 0 \leqslant y < 1,$$
$$13 \leqslant 12+x+y < 14, \quad \text{или} \quad 1 \leqslant x+y < 2,$$
$$23 \leqslant 12+6x+y < 24, \quad \text{или} \quad 11 \leqslant 6x+y < 12,$$
$$24 \leqslant 12+7x+y < 25, \quad \text{или} \quad 12 \leqslant 7x+y < 13.$$

Отбрасывая неравенства, вытекающие из других, получим систему:

$$0 \leqslant y < 1; \ 1 \leqslant x+y < 2; \ 11 \leqslant 6x+y; \ 7x+y < 13,$$

которую нетрудно решить графически (рис. 11). Решение (x, y) дает любая точка из заштрихованного четырехугольника PQQ_1P_1.

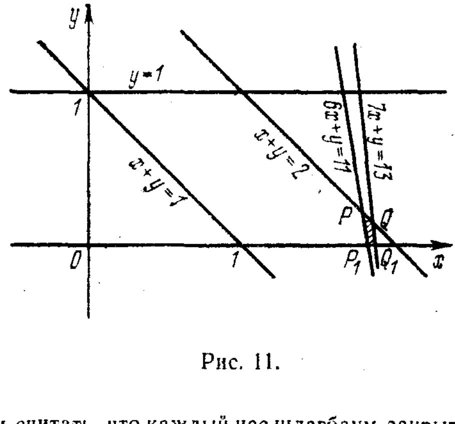


Рис. 11.

118. Будем считать, что каждый час шлагбаум закрыт от 0 мин. до 5 мин. и от 38 мин. до 43 мин. Если указанные 5-минутные интервалы начинаются, скажем, за 1 мин. до подхода поезда к шлагбауму, то мы просто «переведем часы назад на 1 мин.» (а после решения задачи, чтобы исправить составленное с использованием неверных часов расписание движения автобусов, снова переведем на 1 мин. стрелки часов). Отметим на циферблате часов все положения минутной стрелки, отвечающие моментам, когда автобус проходит шлагбаум — для этого пометим черточкой время t_0 мин. прохождения первого (с начала суток) автобуса, а затем, двигаясь в направлении вращения часовой стрелки, станем отмечать последующие моменты $t_0 + T$, $t_0 + 2T$, и т. д., откладывая каждый раз по циферблату дугу, отвечающему интервалу в T мин. Нам надо так выбрать t_0 и T_0,

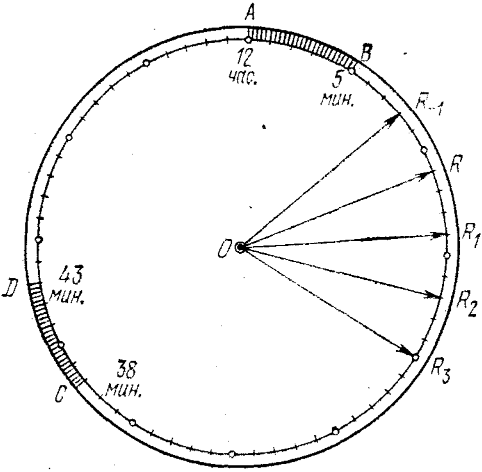


Рис. 12.

чтобы ни одна из полученных отметок не попала в «запрещенные» (заштрихованные на рис. 12) интервалы времени от 0 до 5 мин. и от 38 до 43 мин.

Заметим, прежде всего, что *среди полученных таким образом отметок на циферблате могут иметься на более* 12 *различных*[1]). В самом деле, пусть R и R_1 — две ближайшие друг к другу отметки на циферблате, которым отвечает угол $ROR_1 = \alpha^\circ$ (где O — центр циферблата), соответствующий временно́му интервалу в τ мин.; отметки R и R_1 указывают моменты времени $t_0 + iT$ и $t_0 + jT$, где i

[1]) Ясно, что общее число отметок на циферблате, в принципе, может быть даже бесконечно большим. [Можно доказать, что бесконечно большим это число отметок будет в том случае, если интервал T *несоизмерим* с интервалом в 1 час., отвечающим «полному» повороту минутной стрелки (повороту на угол в 360°), причем если это последнее обстоятельство имеет место, то отметки на циферблате будут расположены «плотно», т. е. среди них найдутся отметки, удаленные от произвольно выбранной точки M циферблата на (дуговое) расстояние, меньшее любого наперед заданного (сколь угодно малого!) числа ε.]

и j — какие-то целые числа. В таком случае два автобуса — i-й и j-й (где мы считаем $j > i$) — следуют один за другим через целое число k часов $\pm\tau$ минут; для определенности условимся считать, что временной интервал между автобусами равен k час. $+\tau$ мин., так что $\smile RR_1$ имеет на циферблате направление вращения часовой стрелки (рис. 12; в рассуждениях почти ничего не изменилось бы, если бы $\smile RR_1$ имела обратное направление). В таком случае $[j+(j-i)]$-й (т. е. $(2j-i)$-й) автобус будет следовать за j-м через k час. τ мин., и моменту его проезда через железнодорожный путь отвечает на циферблате отметка R_2 такая, что $\smile R_1R_2 = \smile RR_1 = \alpha°$; $[(2j-i)+1+(j-i)]$-му (т. е. $(3j-2i)$-му) автобусу отвечает такая отметка R_3, что $\smile R_2R_3 = \alpha°$, и т. д. С другой стороны, $[i-(j-i)]$-й (т. е. $(2i-j)$-й) автобус следует за k час. и τ мин. до i-го, т. е. ему отвечает отметка R_{-1} такая, что R_{-1} и R_1 расположены по разные стороны от R и $\smile R_{-1}R = \smile RR_1 = \alpha°$, и т. д. Таким путем мы получим на циферблате «сетку» отметок, расположенных друг от друга на «дуговом» растоянии в $\alpha°$, или на «временно́м» расстоянии в τ мин.; ясно, что если $\tau < 5$ (или $\alpha < 30°$, поскольку 5 мин. на циферблате отвечает центральный угол в $30°$), то хоть одна из этих отметок попадет в «запрещенный» интервал времени и соответствующему автобусу путь через переезд будет закрыт. Но если на циферблате имеется система отметок, причем наименьшее из (дуговых) расстояний между отметками $\geqslant 30°$, то общее число отметок $\leqslant \frac{360°}{30°} = 12$.

Итак, расписание движения автобусов указывается на циферблате $k \leqslant 12$ отметками $R, R_1, R_2, \ldots$; из сказанного выше вытекает, что $\smile RR_1 = \smile R_1R_2 = \smile R_2R_3 = \ldots$, т. е. что $RR_1R_2\ldots R_{k-1}$ ($= M_k$) — это вписанный в окружность циферблата п р а в и л ь н ы й k-угольник. Нам надо найти все k, отвечающие правильным многоугольникам M_k, которые можно так повернуть вокруг центра O циферблата, чтобы ни одна вершина M_k не попала на заштрихованные на рис. 12 дуги AB и CD. Ясно, что при $k=1$ (один автобус в час) или $k=2$ (два автобуса; здесь надо указать на циферблате две д и а м е т р а л ь н о п р о т и в о п о л о ж н ы е отметки R и R_1, не попадающие на дуги AB и CD) это возможно; условие $T < 30$ мин. требует указать решения задачи, отвечающие значениям $k > 2$. С другой стороны, очевидно, что значение $k = 12$ (т. е. $\alpha° = 30°$ и $\tau = 5$ мин.) нам не подходит: свободной от отметок дуга AB может быть лишь в том случае, если ее концы A и B совпадают с какими-то отметками R и R_1; но в таком случае 9-я отметка отвечает моменту времени $0+8\cdot 5$ мин. $= 40$ мин.— и она попадает на дугу CD. Аналогично, не подходят нам также значения $k = 10, 9$ и $7 \left(\text{т. е. значения } \tau = \frac{60}{10} = 6 \text{ мин.}, \ \frac{60}{9} = 6\frac{2}{3} \text{ мин. и } \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7} \text{ мин.}\right)$; так, если $\tau = 6$ мин., то ближайшая за A отметка R, если только она не попадает на дугу AB, должна разместиться где-то внутри (временно́го) интервала [5 мин., 6 мин.]; но тогда 7-му автобусу ответит отметка, приходящаяся на временно́й интервал $[5+6\cdot 6 = 41$ мин., $6+6\cdot 6 = 42$ мин.$]$, целиком принадлежащий «запрещенной» дуге CD. (Проверьте сами, что если отметка R попадает на интервал $\left[5 \text{ мин.}, \ 6\frac{2}{3} \text{ мин.}\right]$, соответственно $\left[5 \text{ мин.}, \ 8\frac{4}{7} \text{ мин.}\right]$, то 6-й, соответственно 5-й автобус неизбежно попадут в интервал

CD.) Напротив, значения $k = 11$, 8, 6, 5, 4 и 3, отвечающие значениям $\tau = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ мин., $\frac{60}{5} = 12$ мин., $\frac{60}{4} = 15$ мин. и $\frac{60}{3} = 20$ мин., являются допустимыми: так, например, если $k = 11$, то автобусы могут проезжать шлагбаум, скажем, в моменты времени 5 мин., $10\frac{5}{11}$ мин., $15\frac{10}{11}$ мин., $21\frac{4}{11}$ мин., $26\frac{9}{11}$ мин., $32\frac{3}{11}$ мин., $37\frac{8}{11}$ мин., $43\frac{2}{11}$ мин., $48\frac{7}{11}$ мин., $54\frac{1}{11}$ мин. и $59\frac{6}{11}$ мин., а если $k = 5$, то возможно следующее расписание движения автобусов: автобусы проходят шлагбаум в 8 мин., $8 + 12 = 20$ мин., 32 мин., 44 мин. и 56 мин.

Таким образом, при $T < 30$ мин. *требуемым образом движение автобуса можно организовать при* $T = 20$ мин., 15 мин., 12 мин., $7\frac{1}{2}$ мин. *и* $5\frac{5}{11}$ мин. — *и только при этих значениях* T.

119. Пусть $N = \overline{abc}$, где a, b, c — цифры числа; ясно, что для «круглых» чисел $N = 100, 200, \ldots, 900$ имеем $\frac{N}{a+b+c} = 100$. Далее, если число N — не «круглое», то $b + c > 0$ и $a + b + c \geqslant a + 1$, а так как старшая цифра N равна a, то $N < (a+1)\,100$ и

$$\frac{N}{a+b+c} < \frac{(a+1)\cdot 100}{a+1} = 100.$$

Таким образом, *наибольшее значение рассматриваемого отношения равно* 100; *достигается это значение лишь для «круглых» чисел.*

Примечание. Точно так же доказывается, что наибольшее значение отношения k-значного числа $N = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1}$ к сумме $a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1$ его цифр равно 10^{k-1}; достигается оно лишь для «круглых» чисел, $k - 1$ последних цифр которых — нули.

120. В данном числе 192 цифры; в числе, полученном из него вычеркиванием 100 цифр — 92 цифры.

а) Первые цифры интересующего нас числа должны быть возможно большими. Мы можем сделать так, чтобы это число начиналось с 5 девяток, заимствовав эти девятки из чисел 9, 19, 29, 39 и 49; при этом нам придется вычеркнуть $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$ цифры. После этого следующая цифра уже не может быть сделана девяткой, так как для этого нам пришлось бы вычеркнуть еще 19 цифр (чтобы «добраться» до ближайшей девятки — цифры числа 59); при этом вычеркнуто будет $84 + 19 = 103$ цифры, т. е. больше чем нужно.

Ближайшая к оставшимся цифрам восьмерка относится к числу 58; для того чтобы она следовала непосредственно за девятками, пришлось бы вычеркнуть еще 17 цифр, что тоже невозможно (ибо $84 + 17 = 101 > 100$). Поэтому лучшее, что мы можем сделать, — это вычеркнуть еще 15 цифр, предшествующих семерке в числе 57. Итак, всего мы вычеркнули пока $84 + 15 = 99$ цифр; нам позволено вычеркнуть еще одну цифру. Ясно, что целесообразно вычеркнуть пятерку в числе 58; итак, требуемое число:

$$9999978596061\ldots100.$$

б) Мы можем добиться, чтобы оставшееся число начиналось с 5 нулей (эти нули фигурируют в записи чисел 10, 20, 30, 40 и 50); при этом вычеркнуты будут $10+19+19+19+19=86$ цифр. До следующего нуля (в числе 60) мы добраться не можем; однако, вычеркнув всего одну пятерку, мы сделаем так, чтобы за 5 нулями в полученном числе следовала единица. Следующую за этим цифру мы не можем сделать также единицей; однако, вычеркнув еще одну пятерку, мы сделаем следующую цифру двойкой. Это рассуждение можно продолжить; так мы убедимся, что, вычеркнув всего $86+$ $+1+1+1+1=90$ цифр, мы придем к числу, начинающемуся с комбинации цифр: 000001234, вслед за которыми следуют цифры 5556575858596061... Ясно, что цифра, следующая за выписанными выше первыми девятью цифрами искомого числа, может быть пятеркой, но не может быть меньше 5; для того же, чтобы она оказалась пятеркой, нам вообще не потребуется никаких вычеркиваний цифр. После этого мы,— наконец-то!— получаем возможность добраться до нуля вычеркнув 10 предшествующих ему цифр (что еще допустимо); поэтому интересующее нас число таково:

$$0000012345061626 3\ldots 100$$

(это число начинается с пяти нулей, так что реально оно содержит 87 значащих цифр).

121. а) Первые цифры трех искомых чисел должны быть наименьшими; следовательно, эти числа в десятичной записи имеют вид:

$$\overline{1Aa},\quad \overline{2Bb},\quad \overline{3Cc},$$

где символ $\overline{xyz}$ обозначает число, записываемое цифрами x, y, z.

Докажем, что: 1) $A<B<C$; 2) $a<b<c$; 3) каждая из цифр a, b, c больше каждой из цифр A, B, C.

Действительно:

1) Если бы, например, было $A>B$, то мы имели бы $\overline{Aa}>\overline{Bb}$ и $\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}-\overline{2Aa}\cdot\overline{1Bb}=(100+\overline{Aa})\cdot(200+\overline{Bb})-(200+\overline{Aa})\times$ $\times(100+\overline{Bb})=100(\overline{Aa}-\overline{Bb})>0$ и, следовательно, $\overline{1Bb}\cdot\overline{2Aa}\times$ $\times\overline{3Cc}<\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}\cdot\overline{3Cc}$.

2) Если бы, например, было $a>b$, то мы имели бы

$$\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}-\overline{1Ab}\cdot\overline{2Ba}=(10\cdot\overline{1A}+a)(10\cdot\overline{2B}+b)-$$

$$-(10\cdot\overline{1A}+b)(10\cdot\overline{2B}+a)=(10\cdot\overline{2B}-10\cdot\overline{1A})(a-b)>0$$

и, следовательно, $\overline{1Ab}\cdot\overline{2Ba}\cdot\overline{3Cc}<\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}\cdot\overline{3Cc}$.

3) Если бы было $C>a$, $C=a+x$, где $x>0$ (в силу 1) и 2) C — самая большая из цифр A, B, C, а a — самая маленькая из цифр a, b, c), то мы имели бы

$$\overline{1Aa}\cdot\overline{3Cc}-\overline{1Ac}\cdot\overline{3ac}=\overline{1Aa}\cdot(\overline{3ac}+10x)-(\overline{1Aa}+x)(\overline{3ac})=$$

$$=x(10\cdot\overline{1Aa}-\overline{3ac})>0$$

и, следовательно, $\overline{1AC}\cdot\overline{2Bb}\cdot\overline{3ac}<\overline{1Aa}\cdot\overline{2Bb}\cdot\overline{3Cc}$.

Из 1), 2) и 3) следует

$$A<B<C<a<b<c,$$

и искомое произведение имеет вид

$$147 \cdot 258 \cdot 369.$$

б) Искомое произведение должно иметь вид

$$\overline{9Aa} \cdot \overline{8Bb} \cdot \overline{7Cc}.$$

Аналогично решению задачи а) можно доказать, что 1) $A < B < C$, 2) $a < b < c$, 3) каждая из цифр a, b, c меньше каждой из цифр A, B, C.

Из 1), 2) и 3) следует, что

$$a < b < c < A < B < C$$

и, следовательно, искомое произведение имеет вид

$$941 \cdot 852 \cdot 763.$$

122. Нам дано, что $m + (m+1) + \ldots + (m+k) = 1000$. По формуле суммы членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{2m+k}{2} \cdot (k+1) = 1000,$$

или

$$(2m+k)(k+1) = 2000.$$

Так как

$$(2m+k) - (k+1) = 2m - 1$$

нечетно, то из двух последних множителей один четен, а второй нечетен. Кроме того, очевидно, $2m + k > k + 1$. Отсюда вытекает, что наша задача имеет следующие решения:

$$2m+k = 2000, \quad k+1 = 1, \quad m = 1000, \quad k = 0;$$
$$2m+k = 400, \quad k+1 = 5, \quad m = 198, \quad k = 4;$$
$$2m+k = 80, \quad k+1 = 25, \quad m = 28, \quad k = 24;$$
$$2m+k = 125, \quad k+1 = 16, \quad m = 55, \quad k = 15.$$

123. а) Пусть наше число N отлично от любой степени 2. Тогда имеет место равенство

$$N = 2^k(2l+1),$$

где 2^k — наибольшая степень 2, на которую делится N (k может быть равно нулю), а $2l+1$ — наибольший нечетный делитель числа N. Далее, имеем:

$$(2^k - l) + (2^k - l + 1) + \ldots + (2^k - l + 2l - 1) + (2^k - l + 2l) =$$
$$= \frac{(2l+1)(2^k - l + 2^k - l + 2l)}{2} = 2^k(2l+1) = N.$$

При этом, если несколько первых из этих $2l+1$ последовательных целых чисел будут отрицательными (т. е. $l > 2^k$), то их можно будет сократить с первыми положительными числами и N опять представится в виде суммы некоторого числа (меньшего $2l+1$) положительных целых чисел.

Предположим теперь, что какое-нибудь число вида 2^k можно представить в виде суммы m последовательных целых положительных чисел $n, n+1, \ldots, n+m-2, n+m-1$. Тогда

$$2^{k+1} = 2[n + (n+1) + \ldots + (n+m-2) + (n+m-1)] = \\ = m(n+n+m-1) = m(2n+m-1).$$

Но разность $(2n+m-1) - m = 2n-1$ нечетна, следовательно, одно из чисел, m или $2n+m-1$, нечетно (причем оба они отличны от 1, ибо $m > 1$ и $n > 0$). Значит, последнее равенство невозможно (ибо 2^{k+1} не имеет нечетных делителей, отличных от 1).

б) Имеем:

$$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + \ldots + (2m-1) = \\ = \frac{(2n+1)+(2m-1)}{2}\cdot(m-n) = (m+n)\cdot(m-n).$$

Поэтому если число N представимо в виде суммы последовательных нечетных чисел, то оно составное (разлагается на множители $m+n$ и $m-n$). С другой стороны, каждое нечетное составное число N можно представить в виде произведения двух *нечетных* множителей a и b $(a \geqslant b)$ и, следовательно, $N = ab = (m+n)(m-n)$, где $m = \frac{a+b}{2}$, $n = \frac{a-b}{2}$, есть сумма нечетных чисел от $a-b+1$ до $a+b-1$.

Далее, в формуле $N = (m+n)(m-n)$ множители $m+n$ и $m-n$ оба четны или оба нечетны; если N четно, то эти множители, очевидно, должны быть четными. Но в таком случае N делится на 4 (и $m+n$ и $m-n$ делятся на 2); следовательно, если четное число N не делится на 4, то его нельзя представить в виде суммы последовательных нечетных чисел. Если же $N = 4n$ делится на 4, то N можно представить в виде суммы двух последовательных нечетных чисел $2n-1$ и $2n+1$.

в) Легко видеть, что

$$n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \ldots + (n^{k-1} - 1) + \\ + (n^{k-1} + 1) + \ldots + (n^{k-1} + n - 3) + (n^{k-1} + n - 1) = \\ = \frac{(n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} + n - 1)}{2}\cdot n = n^k$$

(все слагаемые этой суммы нечетны, ибо n^{k-1} и n одновременно четны или нечетны).

124. Обозначим эти числа через n, $n+1$, $n+2$, $n+3$. Сумма их произведения и единицы имеет вид

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = [n(n+3)][(n+1)(n+2)] + 1 = \\ = (n^2+3n)(n^2+3n+2) + 1 = \\ = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2;$$

следовательно, эта сумма является квадратом целого числа $(n^2 + 3n + 1)$.

125. Докажем, что эти числа принимают не более четырех различных значений. Допустим, что это неверно и среди наших $4n$

чисел существует пять чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, попарно различных между собой. Будем считать, что $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

Рассмотрим числа a_1, a_2, a_3 и a_4. Согласно нашему условию из них можно составить геометрическую пропорцию; следовательно, произведение двух из этих чисел (крайних членов пропорции) равно произведению двух других. Но это возможно только, если

$$a_1a_4 = a_2a_3$$

(равенство $a_1a_3 = a_2a_4$ невозможно, так как $a_1 < a_2$, $a_3 < a_4$; еще очевиднее, что не может иметь места равенство $a_1a_2 = a_3a_4$).

Рассмотрим теперь числа a_1, a_2, a_3, a_5. Таким же образом, как и выше, можно доказать, что $a_1a_5 = a_2a_4$. Следовательно, $a_1a_4 = a_1a_5$, $a_4 = a_5$, что противоречит нашему предположению.

Итак, мы доказали, что каждое из $4n$ чисел принимает одно из не более чем четырех различных значений. Поэтому какое-нибудь из этих значений принимается не менее чем n числами.

126. Разложим сначала девять гирь, веса которых равны соответственно n^2, $(n+1)^2$, $(n+2)^2, \ldots,$ $(n+8)^2$, на три группы следующим образом:

I группа n^2, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$:

$$n^2 + (n+5)^2 + (n+7)^2 = 3n^2 + 24n + 74;$$

II группа $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+8)^2$:

$$(n+1)^2 + (n+3)^2 + (n+8)^2 = 3n^2 + 24n + 74;$$

III группа $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$:

$$(n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+6)^2 = 3n^2 + 24n + 56.$$

Таким образом, мы видим, что вес первой и второй групп один и тот же, а третья — легче их на 18. Затем следующие за ними девять гирь разложим аналогично, однако так, чтобы первая и третья группы имели одинаковый вес, а вторая была легче их на 18; наконец, последующие девять гирь разложим так, чтобы вторая и третья группы имели одинаковый вес, а первая была легче их на 18. Сгруппировав затем все первые, все вторые и все третьи группы этих трех разбиений, мы получим разложение любых 27 последовательных гирь на три группы равного веса.

127. Из условия задачи, прежде всего, следует, что *все гири одновременно имеют или* *ч е т н ы й*, *или* *н е ч е т н ы й* *вес*. *Действительно*, из того, что каждые 12 гирь можно разбить на две группы равного веса, следует, что общий вес каждых 12 гирь четен. При этом общий вес 12 гирь останется четным и в том случае, если произвольную из них заменить отложенной 13-й гирей. А это возможно только в том случае, если вес каждой из 12 гирь четен или нечетен одновременно с весом отложенной 13-й гири, что и приводит к нашему заключению.

Вычтем теперь из весов всех гирь вес самой легкой гири (или самых легких, если их несколько). При этом мы, очевидно, получим новую систему гирь, которая тоже удовлетворяет условиям задачи; следовательно, веса всех новых гирь тоже имеют одинаковую четность. А так как среди новых гирь имеются «гири» нулевого веса, то вес всех новых гирь должен быть *четным*. Разделим веса всех гирь на два; при этом мы получим новую систему гирь, тоже удовлетворяющую условиям задачи.

Предположим теперь, что не все исходные гири имеют одинаковый вес. В таком случае не все гири второй системы, веса которых получаются из весов первоначальных гирь вычитанием веса наилегчайших гирь, будут «нулевыми». В этом случае путем последовательного деления весов всех гирь на два мы в конце концов придем к системе гирь, часть из которых имеет четный вес (например, вес «нуль»), а часть — нечетный вес. Но мы уже показали, что такая система гирь не может существовать. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

Примечание. В условии задачи требовалось, чтобы веса всех гирь были *целыми* числами. Однако нетрудно видеть, что если считать веса гирь числами *рациональными*, а не целыми, результат задачи не изменится. Действительно, в этом случае, умножив веса всех гирь на некоторый множитель (приведя все веса к общему знаменателю и отбросив знаменатель), можно свести задачу к случаю целых весов. Более того, если позволить весам гирь быть произвольными *иррациональными* числами, мы все равно сможем утверждать, что все они равны между собой: это следует из того, что можно найти рациональные числа, сколь угодно близкие к данным иррациональным числам (рекомендуем читателю попытаться самостоятельно провести полное доказательство; следует, впрочем, предупредить, что сделать это аккуратно не так уж просто).

128. Заметим, прежде всего, что если для каких-то натуральных k и $l \neq k$ полученные описанным образом четверки a_k, b_k, c_k, d_k и a_l, b_l, c_l, d_l одинаковы, то *либо все числа* $a_k = a_l$, $b_k = b_l$, $c_k = c_l$, $d_k = d_l$ *равны нулю, либо все они положительны.* В самом деле, если хоть одно из чисел a, b, c, d, равно *нулю*, то не позже чем на четвертом «шагу» мы приходим к строчке из одних лишь нулей, которая затем неограниченно повторяется; при этом ранее никакие две из выписанных четверок чисел не совпадают. Действительно, если равно нулю ровно одно из наших чисел, скажем $a = 0$, то первые 4 четверки выглядят так:

$$0,\ b,\ c,\ d;\ 0,\ bc,\ cd,\ 0;\ 0,\ bc^2d,\ 0,\ 0;\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$$

— здесь никакие две из первых трех четверок не могут совпасть, поскольку нули в них стоят на разных местах. Ясно также, что если более чем одно из чисел a, b, c, d равно нулю, то к четверке нулей мы также придем не позже чем на 4-м шагу, причем и здесь легко проверить, что не состоящие из одних нулей четверки обязательно будут все различны.

Сказанным исчерпывается разбор случая, когда $abcd = 0$; пусть теперь $abcd \neq 0$. Ясно, что здесь все числа всех четверок будут отличны от нуля. Далее, если среди чисел a, b, c, d отрицательным является только одно — скажем, первое, — то обозначая положительное число символом «+», а отрицательное — символом «—», мы придем к следующему чередованию знаков в первых пяти последовательностях:

$$-+++;\ -++-;\ -+-+;\ ----;\ ++++;$$

таким образом, здесь 5-я четверка состоит из одних лишь положительных чисел, причем ранее никакие две четверки не могут совпасть, ибо чередование знаков в них различно. Из выписанной схемы видно также, что если среди чисел a, b, c, d имеются два соседних отрицательных (как во 2-й из выписанных четверок: ведь упорядочение чисел в четверках здесь надо считать «циклическим», так что 1-е и 4-е числа являются «соседними»), или два не соседних отрицательных (как в 3-й четверке), или четыре отрицательных (как в 4-й четверке), то также не позже чем на 4-м шагу мы придем к одним лишь положительным числам (и ранее этого четверки будут различными). Аналогично рассматривается случай четверки из трех отрицательных и одного положительного числа, на первом же шагу переходящей во 2-ю из выписанных выше четверок:

$$+---;\ -++-;\ -+-+;\ ----;\ ++++.$$

Итак, далее мы можем считать *все числа a, b, c, d положительными*; положим еще $abcd = p$. При этом, очевидно,

$$a_1b_1c_1d_1 = (ab)(bc)(cd)(da) = (abcd)^2 = p^2;$$

аналогично, $a_2b_2c_2d_2 = (a_1b_1c_1d_1)^2 = p^4$; $a_3b_3c_3d_3 = p^8$ и вообще $a_kb_kc_kd_k = (p)^{2^k}$ (где $k = 0, 1, 2, \ldots$; под a_0, b_0, c_0, d_0 мы понимаем исходные числа a, b, c, d). Поэтому, если четверки a_k, b_k, c_k, d_k и a_l, b_l, c_l, d_l (где $l > k$) совпадут, то

$$p^{2^k} = a_kb_kc_kd_k = a_lb_lc_ld_l = p^{2^l} \text{ и, значит, } p^{2^l-2^k} = 1, \text{ т. е. } p = 1.$$

Пусть теперь $abcd = 1$ (ясно, что нам надо разобрать лишь этот случай). В таком случае, поскольку $cd = \frac{1}{ab}$, то из двух чисел ab и cd одно $\geqslant 1$, а второе $\leqslant 1$; для определенности положим, что $ab = \alpha \geqslant 1$, а $cd = \frac{1}{\alpha} \leqslant 1$. Аналогично, из пар чисел bc и $da = \frac{1}{bc}$ одно не меньше, а второе не больше единицы; для определенности будем считать, что $bc = \beta \geqslant 1$, а $da = \frac{1}{\beta} \leqslant 1$ и что $\alpha \geqslant \beta$ (все иные варианты, по существу, не отличаются от рассматриваемого). В таком случае мы последовательно получаем следующие четверки чисел:

$$a, b, c, d;\ \alpha, \beta, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta};\ \alpha\beta, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\alpha\beta}, \frac{\alpha}{\beta};\ \beta^2, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}, \alpha^2.$$

При этом во 2-й четверке наибольшее число равно α; в 3-й оно равно $\alpha\beta \geqslant \alpha$; в 4-й четверке оно равно $\alpha^2 \geqslant \alpha\beta$, и т. д. (заметим, что 4-я четверка отличается от 2-й только тем, что роль α и β в ней играют числа α^2 и β^2).

Итак, мы видим, что *наибольшее из чисел четверки все время не убывает*. Если $\alpha > 1$, $\beta > 1$, то наибольшее число даже все время р а с т е т; поэтому здесь никакие две четверки, каждая из которых отлична от 1-й, не могут совпадать между собой. Более того, если отлично от 1 хоть одно из двух чисел α и β, то и тогда никакие две четверки чисел, отличные от 1-й четверки, никогда не совпадут. В самом деле, если $\alpha > 1$, а $\beta = 1$, то 2-я и следующие за ней четверки имеют вид:

$$\alpha, 1, \frac{1}{\alpha}, 1;\ \alpha, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \alpha;\ 1, \frac{1}{\alpha^2}, 1, \alpha^2;$$

таким образом, здесь через два шага наибольшее число четверки увеличивается (что не позволяет четверке совпасть с какой-либо из предшествующих), а в двух первых четверках числа тоже различны. Поэтому, если совпадают между собой k-я и l-я четверки, где $l > k > 1$, то $\alpha = \beta = 1$; но в таком случае *все четверки чисел, начиная со* 2-й, *совпадают между собой* (это — четверки из одних единиц).

Мы до сих пор игнорировали в наших рассуждениях 1-ю четверку a, b, c, d; следовало бы еще выяснить, не может ли она совпасть с одной из последующих. Но это исключено из-за того, что, как мы видели, во всех четверках чисел, начиная со 2-й, имеются две пары чисел, произведение которых равно 1; поэтому, если четверка a, b, c, d совпадает с одной из последующих и, скажем, $bc = \beta > 1$ и $ab = \alpha \geqslant \beta > 1$, то (поскольку $cd = \frac{1}{\alpha} < 1$ и $da = \frac{1}{\beta} < 1$) придется считать, что $ac = bd = 1$. Это предположение приводит к следующим значениям чисел 1-й четверки:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},\ \sqrt{\alpha\beta},\ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}},\ \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

(почему?), что снова позволяет воспользоваться сравнением наибольших чисел α и $\sqrt{\alpha\beta}$ 1-й и 2-й четверок, совпадающих лишь при $\beta = \alpha$, т. е. тогда, когда наша 1-я четверка совпадает со 2-й четверкой, отвечающей случаю $\beta = 1$, и «эволюционирует» далее, как эта 2-я четверка. Аналогично рассматривается и случай $\beta = 1$.

Это рассуждение и завершает доказательство теоремы.

Примечание. Решение задачи позволяет также оценить количество «шагов», необходимых для того, чтобы все получаемые четверки чисел стали совпадать друг с другом (в том случае, когда эти четверки не все различны): для случая $abcd = 0$, как мы видели, совпадают все четверки, начиная с 4-й; для случая положительных чисел a, b, c, d, таких, что $ab = bc = cd = da = 1$, совпадают все четверки, начиная со 2-й (а если эти равенства не выполняются, то никакие две четверки не совпадают между собой); для случая не обязательно положительных чисел могут понадобиться еще 4 шага для того, чтобы сделать все числа положительными.

129. Поскольку квадрат каждого из чисел a_i (где $i = 1, 2, \ldots, N = 2^k$) равен единице, то первые три последовательности чисел имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & \ldots & a_{N-1}, & a_N; \\ a_1a_2, & a_2a_3, & \ldots & a_{N-1}a_N, & a_Na_1; \end{array}$$

$$a_1a_2^2a_3 = a_1a_3,\quad a_2a_3^2a_4 = a_2a_4,\ \ldots,$$

$$a_{N-1}a_N^2a_1 = a_{N-1}a_1,\quad a_Na_1^2a_2 = a_Na_2;$$

таким образом, в 3-й последовательности все числа получаются умножением каждого из чисел последовательности на следующее за ним через одно (последовательность мы считаем «циклической», т. е.

полагаем, что за числом a_N следует a_1, затем a_2, и т. д.). Аналогично, еще через два шага мы будем иметь набор, получающийся из 3-го в точности так же, как 3-й получается из 1-го, т. е. набор

$$(a_1a_3)(a_3a_5) = a_1a_5;\ (a_2a_4)(a_4a_6) = a_2a_6, \ldots, (a_Na_2)(a_2a_4) = a_Na_4,$$

числа которого получаются из первого (циклического) набора перемножением чисел, следующих один за другим через 3. Еще через 4 шага мы получим набор, получающийся из 5-го в точности так же, 5-й набор получается из 1-го, т. е. набор

$$(a_1a_5)(a_5a_9) = a_1a_9,\quad (a_2a_6)(a_6a_{10}) = a_2a_{10}, \ldots,\quad (a_Na_4)(a_4a_8) = a_Na_8,$$

числа которого получаются из первоначального набора перемножением чисел, следующих один за другим через 7.

Вообще через 2^p шагов мы придем к набору

$$a_1a_{2^p+1},\quad a_2a_{2^p+2},\ \ldots,\ a_Na_{2^p},$$

получаемому из первоначального перемножением чисел, следующих один за другим через 2^p-1 чисел. Но отсюда следует, что через 2^k шагов мы придем к последовательности, получающейся из нашей (циклической!) последовательности перемножением чисел, следующих друг за другом через $2^k-1=N-1$ номеров, т. е. к последовательности

$$a_1a_1 = a_1^2 = 1,\quad a_2a_2 = a_2^2 = 1,\ \ldots,\ a_Na_N = a_N^2 = 1,$$

состоящей из одних единиц.

130. Покажем, прежде всего, что при переходе от исходного набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ к «производному» набору $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ наши числа «выравниваются», т. е. *разность между наибольшим и наименьшим из чисел не увеличивается.* В самом деле, поскольку полусумма (среднее арифметическое) двух чисел всегда не больше наибольшего из них (и равна наибольшему лишь, если числа равны), то наибольшее из чисел $a_1', a_2', \ldots, a_n'$, равное полусумме каких-то двух чисел первоначального набора, не превосходит наибольшего из этих двух чисел, а тем самым — и наибольшего из всех n чисел a_i; таким образом, *при переходе от набора a_i к набору a_i' наибольшее число может лишь уменьшиться.* Более того, из этого рассуждения видно, что наибольшее из чисел a_i' может р а в н я т ь с я наибольшему из чисел a_i лишь в том случае, когда в наборе a_i наибольшее число A встречается несколько раз, причем в этом наборе (считающемся упорядоченным циклически, т. е. так, что за a_n следует снова a_1) стоят п о д р я д два равных A числа. Далее, легко видеть, что если в наборе чисел a_i наибольшая по длине цепочка из следующих друг за другом равных A чисел имеет длину k (где $k<n$), то в наборе чисел a_i' будет иметься цепочка из следующих друг за другом $k-1$ равных A чисел: так, если $a_{i+1}=a_{i+2}=\ldots=a_{i+k}=A$ (а $a_i<A$ и $a_{i+k+1}<A$), то $a_{i+1}'=$ $=a_{i+2}'=\ldots=a_{i+k-1}'=A\left(\text{а } a_i'<A \text{ и } a_{i+k}'<A\right)$. Поэтому после $k-1$ шагов мы придем к числам $a_1^{(k-1)}, \ldots, a_n^{(k-1)}$, среди кото-

рых не будет двух следующих подряд равных A чисел, а на следующем, k-м шагу максимальное среди рассматриваемых чисел уменьшится; следовательно, *если не все числа a_i равны друг другу, мы можем быть уверены, что при $(n-1)$-кратном повторении описанной в условии задачи процедуры наибольшее из рассматриваемых чисел уменьшится*. Точно так же доказывается, что *наименьшее из рассматриваемых чисел никогда не уменьшается*, а если не все числа равны друг другу, то после $(n-1)$-кратного повторения нашей процедуры оно наверняка *увеличится*.

Но если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и все последовательно получаемые из них числа — целые, то «выравнивание» их, т. е. уменьшение разности между наибольшим и наименьшим, неизбежно приведет в конце концов к тому, что эта разность станет равной нулю, т. е. что все числа сравняются между собой. В самом деле, первоначально эта разность $A - a = \max\limits_i a_i - \min\limits_i a_i$ равнялась какому-то целому положительному числу p; при уменьшении $A = \max\limits_i a_i$ или при увеличении $a = \min\limits_i a_i$ эта разность уменьшается не меньше чем на единицу — и, следовательно, не более чем через p таких шагов она станет равной нулю. Поэтому, если мы покажем, что *не все равные между собой числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ никогда не приведут* нас *к системе одинаковых чисел*, то утверждение задачи будет доказано.

Рассмотрим теперь, как одинаковые числа $b_1 = a_1^{(m)}$, $b_2 = a_2^{(m)}, \ldots, b_n = a_n^{(m)}$ могут получиться из неодинаковых чисел

$$c_1 = a_1^{(m-1)}, \quad c_2 = a_2^{(m-1)}, \ldots, \quad c_n = a_n^{(m-1)}.$$

Ясно, что для этого нобходимо, чтобы числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$ «совпадали через одно», т. е. чтобы выполнялись равенства

$$c_1 = c_3 = c_5 = \ldots (= c) \quad \text{и} \quad c_2 = c_4 = c_6 = \ldots (= C). \qquad (*)$$

Но так как числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$ упорядочены циклически, т. е. число c_{n+1} надо считать совпадающим с c_1, то равенства (*) (где $C \neq c$) вовсе невозможны при $n = 2l + 1$ нечетном (когда числа $n + 1 = 2l + 2$ и 1 имеют разную четность); поэтому остается предположить, что *$n = 2l$ четно*. Сделаем теперь еще один «шаг назад», вернувшись от чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ к предшествующим им числам $d_1 = a_1^{(m-2)}$, $d_2 = a_2^{(m-2)}, \ldots, d_n = a_n^{(m-2)}$. Мы, очевидно, имеем

$$c_1 = \frac{d_1 + d_2}{2}, \quad c_3 = \frac{d_3 + d_4}{2}, \ldots, \quad c_{2l-1} = \frac{d_{2l-1} + d_{2l}}{2} \qquad (**)$$

и

$$c_2 = \frac{d_2 + d_3}{2}, \quad c_4 = \frac{d_4 + d_5}{2}, \ldots, \quad c_{2l} = \frac{d_{2l} + d_1}{2}; \qquad (***)$$

но из равенств (**) и (*) следует, что $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{2l} = 2lc$, а из равенств (***) и (*) — что $d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_{2l} = 2lC \neq 2lc$. Полученное противоречие и завершает доказательство.

131. Выясним, прежде всего, при каких числах x, y, z возможно совпадение троек (x_n, y_n, z_n) и (x, y, z). Так как все тройки чисел, начиная с x_1, y_1, z_1, заведомо неотрицательны, то и числа x, y, z должны быть *неотрицательными*. Условимся, далее, считать, что $x \geqslant y \geqslant z$ и $x_i \geqslant y_i \geqslant z_i$ при всех $i = 1, 2, 3, \ldots$ Поскольку, очевидно, $x_i = x_{i-1} - z_{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$ (где под x_0 и z_0 понимаются числа x и z), то $x \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots$, причем, если хоть одно число z_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ больше нуля, то $x_{i+1} < x_i < x$ (и все x_j, где $j > i$, также меньше x); поэтому, если $x_n = x$, то $z_i = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, должно быть $z = 0$ и $z_1 = 0$, откуда уже вытекает, что либо $y = x$ (и $z_1 = x - y = 0$), либо $y = z = 0$ (и $z_1 = y - z = 0$). Итак, мы видим, что для совпадения тройки чисел (x, y, z) с какой-либо тройкой (x_n, y_n, z_n) необходимо, чтобы исходная тройка имела (при $x = 1$) либо вид $(1, 1, 0)$, либо вид $(1, 0, 0)$. При этом второй случай можно сразу же откинуть, ибо от тройки $(1, 0, 0)$ мы переходим к (отличной от исходной) тройке $(1, 1, 0)$; поэтому, если $x = 1$ и тройка (x, y, z) совпадает с (x_n, y_n, z_n), то (x, y, z) — это тройка чисел $(1, 1, 0)$ (и тройки (x_n, y_n, z_n) при всех n имеют такое же строение).

132. а) Отметим, что четность или нечетность разности двух чисел зависит только от четности и нечетности уменьшаемого и вычитаемого. Условимся обозначать четные числа буквой *ч*, а нечетные — буквой *н*. Всего возможны следующие шесть существенно различных комбинаций начальных чисел A, B, C, D: 1° *ч*, *ч*, *ч*, *ч*; 2° *ч*, *ч*, *ч*, *н*; 3° *ч*, *ч*, *н*, *н*; 4° *ч*, *н*, *ч*, *н*; 5° *ч*, *н*, *н*, *н* и 6° *н*, *н*, *н*, *н*; все остальные комбинации могут быть получены из этих шести циклической перестановкой чисел (перестановкой без изменения порядка; при этом 1-е число считается следующим за 4-м). Проверим, что во всех случаях *не позднее чем через четыре шага мы придем к четверке четных чисел*. Действительно, комбинация 1° сразу состоит из четных чисел; в случае комбинации 6° мы в один шаг приходим к комбинации 1°; в случае комбинации 4° мы в один шаг приходим к комбинации 6° и, следовательно, в два шага — к комбинации 1°; в случае комбинации 3° мы в один шаг приходим к комбинации 4° и, следовательно, в три шага — к комбинации 1°; наконец, в случае комбинаций 2° и 5° мы в один шаг приходим к комбинации 3° (в случае комбинации 5° — к комбинации, получающейся из 3° циклической перестановкой) и, следовательно, в четыре шага — к комбинации 1°. Таким образом, мы во всех случаях через четыре шага придем к четверке четных чисел.

Продолжим теперь процесс образования новых четверок чисел; так же, как выше, мы убедимся, что еще через четыре шага мы придем к числам, делящимся на 4, еще через четыре шага — к числам, делящимся на 8, и т. д. Таким образом, продолжая процесс достаточно долго, мы сможем прийти к четверке чисел, делящихся на любую (сколь угодно высокую!) степень двух. Так как числа по абсолютной величине не увеличиваются, то это означает, что мы, в конце концов, придем к четверке чисел, состоящей из одних нулей (если все числа A, B, C, D меньше 2^n, то мы заведомо придем к четверке нулей через $4n$ шагов, но можем прийти к ней и значительно раньше).

Примечание. Аналогично можно показать, что если взять не 4, а 8, 16, ... или любое другое число $n = 2^k$ целых положительных чисел, то, поступая аналогично вышеизложенному, мы через конечное число шагов придем к системе n чисел, являющихся нулями. Если число n не является степенью двух, то дело обстоит по-другому; так, например, исходя из тройки чисел 1, 1, 0, мы никогда не придем к тройке 0, 0, 0:

$$\begin{array}{c} 1,\ 1,\ 0, \\ 0,\ 1,\ 1, \\ 1,\ 0,\ 1, \\ 1,\ 1,\ 0, \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \end{array}$$

(ср. с решением задачи 131).

б) Ясно, что если числа $A=\frac{a_1}{a_0}$, $B=\frac{b_1}{b_0}$, $C=\frac{c_1}{c_0}$, $D=\frac{d_1}{d_0}$ суть *рациональные дроби*, то, умножая их все на определенный множитель k (на общий знаменатель всех дробей, например, на $a_0b_0c_0d_0$), мы придем к *целым* числам $A'=kA$, $B'=kB$, $C'=kC$ и $D'=kD$, а из того, что утверждение задачи а) верно для чисел A', B', C' и D', следует, что оно верно также и для чисел A, B, C и D.

Если числа A, B, C, D *иррациональны*, то утверждение задачи а) может уже и не выполняться. Для доказательства этого достаточно указать хотя бы одну четверку чисел A, B, C, D, для которых это будет так. Положим $A=1$, $B=x$, $C=x^2$, $D=x^3$, где x — какое-то положительное число, которое мы можем выбрать по своему усмотрению. При этом, очевидно,

$$A_1=|x-1|,\ B_1=|x^2-x|=x|x-1|,$$
$$C_1=|x^3-x^2|=x^2|x-1|,$$
$$D_1=|x^3-1|=(x^2+x+1)|x-1|,$$

т. е. числа A_1, B_1, C_1, D_1 пропорциональны 1, x, x^2 и x^2+x+1. Поэтому, если мы сумеем подобрать x так, чтобы выполнялось равенство

$$x^2+x+1=x^3, \qquad (*)$$

то числа A_1, B_1, C_1, D_1 окажутся пропорциональными A, B, C, D — и наш процесс получения последовательных четверок чисел никогда не кончится. Но из рис. 13, на котором совместно изображены графики функций $y=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ (это есть *парабола*) и $y=x^3$ (*кубическая парабола*), видно, что соответствующие линии пересекаются в некоторой точке $M(x_0,\ y_0)$, так что $x=x_0$ — это есть (положительный) корень уравнения (*). Тем самым мы установили существование таких (очевидно — иррациональных!) чисел $A=1$, $B=x_0$, $C=x_0^2$ и $D=x_0^3$ $\left(=x_0^2+x_0+1\right)$, для которых утверждение задачи а) неверно.

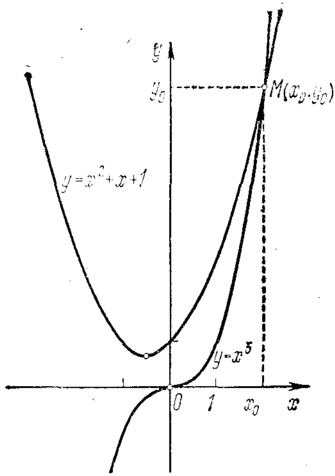


Рис. 13.

133. а) Нетрудно видеть, что следующее расположение 100 первых целых чисел удовлетворяет условию задачи:

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
70	69	68	67	66	65	64	63	62	61	80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
90	89	88	87	86	85	84	83	82	81	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91.

б) Пусть $a_1^{(1)}$ есть первое (самое левое) из выписанных чисел; $a_2^{(1)}$ — первое из оставшихся, большее чем $a_1^{(1)}$; $a_3^{(1)}$ — первое из следующих за $a_2^{(1)}$, большее чем $a_2^{(1)}$, и т. д. Таким образом мы составим последовательность возрастающих чисел $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots, a_{i_1}^{(1)}$. Если в этой последовательности имеется больше 10 чисел (т. е. если $i_1 > 10$), то задача уже решена Если же $i_1 \leqslant 10$, то мы вычеркнем все эти числа и из оставшихся $101 - i_1$ чисел составим точно таким же образом новую последовательность $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots, a_{i_2}^{(2)}$ возрастающих чисел. Продолжая этот процесс, мы выделим из наших 101 чисел ряд возрастающих последовательностей. Если хотя бы одна из этих последовательностей содержит больше 10 чисел, то наша задача уже решена; таким образом, нам остается только рассмотреть случай, когда в каждой из выделенных последовательностей имеется не больше 10 чисел.

Так как у нас имеется всего 101 число, то в рассматриваемом случае общее число k выделенных последовательностей возрастающих чисел не может быть меньше 11. В таком случае мы утверждаем, что *в ряду из 101 числа можно выбрать 11 чисел, следующих один за другим в убывающем порядке*. Эти числа мы будем выбирать с конца следующим образом. Последним из них будет последнее число $a_{i_k}^{(k)}$ последней из наших возрастающих последовательностей. Затем выберем число из предпоследней последовательности, расположенное слева от $a_{i_k}^{(k)}$ ближе всего к нему. Это число больше $a_{i_k}^{(k)}$, ибо в противном случае в процессе построения предпоследней последовательности мы бы выписали вслед за ним число $a_{i_k}^{(k)}$, в то время как на самом деле число $a_{i_k}^{(k)}$ попало в другую последовательность. Точно так же вслед за этим выписываем число из третьей от конца последовательности, расположенное слева от выбранного числа предпоследней последовательности, ближе всего к нему, и т. д. Таким образом мы построим последовательность чисел, которые идут возрастая, если их рассматривать в порядке справа налево, т. е. убывающую последовательность; число членов этой последовательности равно числу k выбранных возрастающих последовательностей, т. е. не меньше 11.

Примечание. Совершенно аналогично можно доказать, что $(n-1)^2$ целых положительных чисел можно расположить так, что никакие n из них не будут следовать одно за другим в порядке возрастания или убывания, но при любом расположении $k > (n-1)^2$ целых положительных чисел какие-то n из этих чисел обязательно будут следовать одно за другим в порядке возрастания или убывания.

134. а) Первое решение. Рассмотрим наибольшие нечетные делители выбранных 101 чисел, т. е. числа, которые получаются, если разделить каждое число на наибольшую степень двойки, которую оно содержит множителем. Так как различных нечетных чисел, не превосходящих 200, имеется всего 100, то среди этих наибольших нечетных делителей чисел будут два одинаковых. Но это означает, что среди наших 101 чисел имеются два, отличающихся одно от другого только тем, что множитель 2 входит в эти числа в разных степенях. Очевидно, что большее из этих чисел будет делиться на второе.

Второе решение. Можно также доказать это предложение методом математической индукции. Проверим, что если из четырех чисел 1, 2, 3 и 4 выбраны три числа, то одно из них делится на другое (еще легче видеть, что если из чисел 1, 2 выбраны два числа, то одно из них делится на второе). Докажем теперь, что если из $2n$ чисел от 1 до $2n$ нельзя выбрать $n+1$ чисел так, чтобы никакое из них не делилось на другое, то из первых $2(n+1)$ целых положительных чисел нельзя будет выбрать $n+2$ чисел так, чтобы ни одно из них не делилось на другое.

Действительно, рассмотрим какие-либо $n+2$ чисел, выбранных из первых $2(n+1)$ целых положительных чисел. Если среди них нет чисел $2n+1$ и $2n+2$ или есть только одно из этих чисел, то среди них есть $n+1$ чисел, не превосходящих $2n$, и по сделанному предположению одно из этих чисел обязательно делится на другое. Если среди них есть оба числа $2n+1$ и $2n+2$ и есть также число $n+1$, то мы уже имеем пару чисел, делящихся одно на другое, а именно, $n+1$ и $2n+2$. Наконец, если среди наших чисел есть числа $2n+1$ и $2n+2$, но нет числа $n+1$, то исключим из рассмотрения числа $2n+1$ и $2n+2$ и добавим $n+1$. Мы получим $n+1$ чисел, не превосходящих $2n$; по сделанному предположению одно из этих чисел делится на другое. Если это число не есть $n+1$, то мы уже получаем пару чисел из выбранных нами $n+2$ чисел, одно из которых делится на другое. Если же число, делящееся на другое, есть $n+1$, то и $2n+2$ делится на одно из выбранных чисел.

б) Выберем наши числа следующим образом: нечетные числа от 101 до 199 (50 чисел), нечетные числа от 51 до 99, умноженные каждое на 2 (25 чисел), нечетные числа от 27 до 49, умноженные каждое на 4 (12 чисел), нечетные числа от 13 до 25, умноженные каждое на 8 (7 чисел), нечетные числа от 7 до 11, умноженные каждое на 16 (3 числа), числа $3\cdot32$, $5\cdot32$, $1\cdot64$.

в) Предположим, что мы выбрали 100 целых чисел, не превосходящих 200, ни одно из которых не делится на другое; докажем, что среди этих чисел не может быть ни одного из чисел 1—15.

Как в первом решении задачи а), рассмотрим все наибольшие нечетные делители выбранных чисел; очевидно, это будут все нечетные числа, не превосходящие 200 (см. решение задачи а)). В частности, среди этих нечетных делителей есть числа 1, 3, 9, 27 и 81. Так как никакие два из чисел, отвечающих этим нечетным делителям, не делятся одно на другое, то число, содержащее нечетный делитель 27, должно делиться на 2 в степени не ниже первой; число, содержащее нечетный делитель 9,— на 2 в степени не ниже второй; число, содержащее делитель 3,— на 2 в степени не ниже третьей и число, содержащее делитель 1,— на 2 в степени не ниже четвертой. Но это значит, что числа 1, $2=1\cdot 2$, 3, $4=1\cdot 2^2$, $6=3\cdot 2$, $8=1\cdot 2^3$, 9 и $12=3\cdot 2^2$ не входят в число 200 чисел.

Точно так же, рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 5, 15 и 45, убеждаемся, что среди наших чисел нет чисел 5, $10=5\cdot 2$, 15; рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 7 и 21, убеждаемся, что среди 200 чисел нет числа 7; рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 11 и 33, убеждаемся, что среди наших чисел нет 11, и, рассматривая числа, имеющие наибольшими нечетными делителями 13 и 39, убеждаемся, что среди них нет числа 13.

Примечание. Аналогично решениям задач а) — в) можно показать, что из $2n$ (или меньше) первых целых положительных чисел нельзя выбрать $n+1$ чисел так, чтобы никакие два не делились одно на другое, но можно выбрать n (или меньше) таких чисел. При этом, если $3^k < 2n < 3^{k+1}$, то из $2n$ первых целых чисел нельзя выбрать n чисел, хотя бы одно из которых меньше 2^k и таких, что никакое из этих чисел не делится на другое, но можно выбрать n таких чисел, наименьшее из которых равно 2^k (так, из 200 чисел можно выбрать 100, наименьшее из которых равно 16 и ни одно из которых не делится на другое).

135. а) Рассмотрим наименьшие по абсолютной величине остатки, которые дают наши числа при делении на 100 (т. е. если какое-либо число a дает при делении на 100 остаток, больший 50, то мы будем производить деление с избытком и рассмотрим отрицательный остаток $-r$; $a=100q-r$, где $0<r<50$). Так, как положительных чисел, не превосходящих 50, существует всего 51 (а именно, 0, 1, 2, ..., 50), а остатков мы имеем 52, то два из этих остатков равны по абсолютной величине. Если эти остатки равны и по знаку, то *разность* соответствующих чисел делится на 100; если они противоположны, то *сумма* чисел делится на 100.

б) Пусть a_1, a_2, a_3 ..., a_{100} — данные числа (расположенные в произвольном порядке). Рассмотрим суммы

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\quad s_3=a_1+a_2+a_3,\ \ldots$$
$$\ldots,\ s_{100}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}.$$

Так как этих сумм имеется 100, то в том случае, когда ни одна из них не делится на 100, по крайней мере две из сумм дают при делении на 100 одинаковые остатки (ибо различных не равных нулю остатков от деления на 100 существует только 99). Вычтя из большей из двух сумм, дающих одинаковые остатки, меньшую, мы получим некоторую сумму вида $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_m$, которая будет делиться на 100.

Примечание. Разумеется, в точности аналогично решению этой задачи можно показать, что *из любых n целых чисел* (где n — произвольное натуральное число) *всегда можно отобрать несколько, сумма которых делится на n.*

в) Если все рассматриваемые числа равны между собой (и, значит равны 2), то утверждение задачи очевидно: сумма любых 50 чисел равна 100. Если, скажем, $a_1 \neq a_2$, то рассмотрим следующие суммы (ср. с решением задачи б)):

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2,$$
$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, \quad s_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{99}.$$

Как и выше, заключаем, что *либо одна из этих сумм делится на* 100, *либо* две из них дают при делении на 100 одинаковые остатки, а тогда *разность* $s_i - s_j$ этих *двух сумм определяет набор наших чисел, сумма которых делится на* 100. (Заметим, что поскольку $a_1 \neq a_2$ и $a_1, a_2 \leqslant 100$, «суммы» $s_1 = a_1$ и $s_2 = a_2$ не могут давать при делении на 100 одинаковые остатки.) Но если сумма некоторых из наших чисел (не всех — в нее наверное не входит число a_{100}) делится на 100, то, поскольку эта сумма положительна и меньше 200, она обязательно равна 100.

г) Заметим, прежде всего, что из *любых четырех целых чисел можно выбрать два, сумма которых делится на* 2, и что *из любых десяти целых чисел можно выбрать пять, сумма которых делится на* 5; эти утверждения, родственные тому, которое нам требуется доказать, разумеется, проще него (и, кроме того, используются в его доказательстве). Впрочем, все перечисленные оценки (включая и результат настоящей задачи) можно еще и несколько улучшить: два числа, сумма которых делится на 2, можно отобрать из любой совокупности т р е х чисел; точно так же пять чисел, сумма которых делится на 5, можно отобрать из любой совокупности д е в я т и чисел, а 100 *чисел, сумма которых делится на* 100, *можно отобрать из любой совокупности* 199 *чисел* (см. Примечание в конце решения задачи).

Итак, мы последовательно будем доказывать три факта.

1°. *Пусть даны* 3 числа a_1, a_2 *и* a_3; *из них можно выбрать* 2 *числа так, чтобы сумма этих чисел делилась на* 2. Это предложение является совершенно очевидным: достаточно выбрать два числа о д и н а к о в о й ч е т н о с т и (оба четные или оба нечетные), а такие числа среди наших трех конечно есть.

Ясно, что основным в этом простом рассуждении является возможность замены самих чисел a_1, a_2 и a_3 их *остатками* r_1, r_2 и r_3 *от деления на* 2: ведь если сумма остатков делится на 2, то и сумма самих чисел делится на 2. Но числа r_1, r_2 и r_3 могут иметь лишь значения 0 или 1 — и здесь совсем легко видеть, что среди них всегда есть 2, сумма которых делится на 2.

2°. Рассмотрим теперь 9 *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_9$; мы утверждаем, что *из них можно выбрать* 5 *чисел так, чтобы сумма этих чисел делилась на* 5. Заменим опять сами числа a_i (где $i = 1, 2, \ldots, 9$) их остатками r_i от деления на 5. Все числа r_i имеют одно из пяти значений 0, 1, 2, 3 или 4; с этими маленькими числами удобнее работать, чем с самими числами a_i. Но, кроме того, *ко всем* 9 *числам* r_i *можно прибавить одно и то же* (или отнять от них одно и то же) *произвольно выбранное число* c — ведь при этом остаток от деления суммы произвольных 5 наших чисел на 5 не изменится. [Разумеется, после этой операции «сдвига» остатков мы снова заменим полученные числа $r_i' = r_i \pm c$ их остатками от деления на 5; эти новые остатки мы по-прежнему будем обозначать через r_i.] Это замечание позволяет считать, что среди 9 чисел r_i (каждое из которых равно 0, 1, 2, 3 или 4) число 0 встречается реже, чем остальные остатки: ведь если бы среди наших чисел было больше всего чисел $k > 0$, то мы просто отняли бы от всех чисел по k.

При этом ясно, что число t нулей может заключаться в пределах $2 \leqslant t \leqslant 9$ ($t > 1$, так как среди 9 чисел хоть один остаток повторяется дважды!); при этом, если $t \geqslant 5$, то доказывать нечего: в этом случае мы имеем 5 делящихся на 5 чисел, сумма которых тоже, конечно, делится на 5.

Дальнейшие рассуждения несложны, но несколько кропотливы. Если $t = 2$, то в нашей совокупности девяти остатков r_i ни одно число не повторяется более чем 2 раза; другими словами, 4 остатка повторяются в этой совокупности дважды, и лишь один встречается однократно. Но тогда с помощью того же приема «сдвига» всех остатков на одно и то же число c мы можем добиться равенства этого «непарного» остатка числу 4. Но если совокупность чисел представляет собой набор чисел 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 (мы считаем, что здесь последовательно выписаны числа $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_9$), то, например, сумма $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_7$ делится на 5 (равна 5). Если же $t = 3$ или 4, то условимся считать, что $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ и что все числа $r_5, r_6, \ldots, r_9$ отличны от нуля; при этом число r_4 может равняться 0 или быть больше 0 — это нам безразлично. Далее, из совокупности 5 (отличных от 0) чисел r_5, r_6, r_7, r_8 и r_9 всегда можно отобрать несколько (больше одного!) чисел так, чтобы их сумма делилась на 5 — доказать это можно аналогично решению задачи б) (ср. с Примечанием в конце решения задачи б)). Дополнив же затем полученную совокупность чисел нужным числом нулей из числа чисел r_1, r_2 и r_3 до пяти чисел (возможно, впрочем, что нам не придется эти числа дополнять), мы и придем к совокупности пяти чисел, сумма которых делится на 5.

3°. Теперь мы можем установить, что *из совокупности произвольных* 199 *чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_{199}$ *всегда можно выбрать* 100 *чисел, сумма которых делится на* 100. Ясно, что из этих 199 чисел можно выбрать 99 пар чисел о д и н а к о в о й ч е т н о с т и: будем выделять такие пары последовательно; после того как мы отберем 98 пар, у нас останутся 3 числа, из которых, в силу п. 1°, последние 2 требуемых числа выбрать можно. Перенумеруем наши числа, считая, что a_1 и a_2, a_3 и $a_4, \ldots, a_{197}$ и a_{198} — числа одинаковой четности; затем заменим каждые два числа a_{2i-1} и a_{2i} (где $i = 1, 2, \ldots,$ 99) их полусуммой $b_i = \dfrac{a_{2i-1} + a_{2i}}{2}$. Ясно, что если среди 99 (целых) чисел b_i мы сможем выбрать 50, сумма которых делится на 50, то (в два раза большая) сумма всех чисел a_i, отвечающих 50 отобранным числам b_i, будет делиться на 100. Таким образом, нам достаточно установить, что *из каждых* 99 *целых чисел можно выбрать* 50, *сумма которых делится на* 50. Далее, в точности, как и выше, отберем из 99 чисел b_i 49 пар чисел о д и н а к о в о й ч е т н о с т и. Считая, что b_1 и b_2, b_3 и $b_4, \ldots, b_{97}$ и b_{98} — числа одинаковой четности, заменим каждые два числа b_{2k-1} и b_{2k} (где $k = 1,$ $2, \ldots, 49$) одним числом — их полусуммой $c_k = \dfrac{b_{2k-1} + b_{2k}}{2}$; при этом, *если сумма каких-то* 25 *чисел* c_k *будет делиться на* 25, *то сумма* 50 *отвечающих им чисел* b_i *будет делиться на* 50. Однако далее этот прием уже отказывается работать, так как 25 — число нечетное; поэтому теперь нам придется объединять числа c_k не в пары, а в п я т е р к и чисел.

Из каждых 9 *чисел*, как мы знаем, *можно выбрать* 5 *чисел, сумма которых делится на* 5; тем более из числа наших 49 чисел

c_k можно выбрать 5 таких чисел — назовем их c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. После этого у нас останется $49 - 5 = 44$ числа, из которых можно выбрать еще 5 чисел, сумма которых делится на 5,— и затем продолжать этот процесс далее. Выделив таким образом 8 пятерок чисел, таких, что сумма чисел в каждой пятерке делится на 5, мы придем к оставшейся совокупности $49 - 8 \cdot 5 = 9$ чисел, из которых, в силу п. 2°, нам удастся выбрать последнюю, девятую пятерку. Теперь заменим каждую пятерку чисел c_{5l-4}, c_{5l-3}, c_{5l-2}, c_{5l-1}, c_{5l} их средним арифметическим $d_l = \frac{c_{5l-4} + c_{5l-3} + \ldots + c_{5l}}{5}$. Ясно, что если мы найдем 5 *чисел* d_l, *сумма которых делится* на 5, то (в 5 раз большая этой суммы!) сумма отвечающих им чисел c_k будет делиться на 25, — а возможность выбора таких чисел c_k нам как раз и требуется доказать. Но (здесь мы снова апеллируем к п. 2°!) *из* 9 *чисел* d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8 *и* d_9, *пять чисел, сумма которых делится на* 5, *выбрать можно*, чем и завершается доказательство.

Примечание. В обобщение пп. 1°, 2° и 3° решения и задачи г) можно также установить, что *из каждых* $2n - 1$ *целых чисел* (где n — произвольное натуральное число) *можно выбрать* n *чисел так, чтобы сумма их делилась на* n; однако доказательство этого общего факта значительно сложнее вывода его частных случаев, отвечающих значениям $n = 2$, $n = 5$ или даже $n = 100$.

136. Так как сумма всех наших чисел равна 1, а наибольшее из них равно $\frac{1}{2k}$, то общее количество чисел не меньше $2k$. Будем доказывать наше утверждение от противного, т. е. предположим, что *в любой группе из* k *чисел нашей последовательности наименьшее не превосходит половины наибольшего*, и покажем, что это предположение приводит к противоречию. При сделанном предположении для группы из k чисел a_1, $a_2, \ldots, a_k$ (где $a_1 = \frac{1}{2k}$ — наибольшее число, а a_k — наименьшее) будем иметь $a_k \leqslant \frac{1}{2} a_1$; аналогично, из рассмотрения группы a_k, $a_{k+1}, \ldots, a_{2k-1}$ чисел получаем $a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2} a_k \leqslant \frac{1}{2^2} a_1$; из рассмотрения чисел a_{2k-1}, $a_{2k}, \ldots, a_{3k-2}$ (эта группа чисел существует лишь при $3k - 2 \geqslant n$) имеем $a_{3k-2} \leqslant \frac{1}{2} a_{2k-1} \leqslant \frac{1}{2^3} a_1$, и т. д. Суммируя все полученные неравенства, заключаем, что

$$S = a_1 + a_k + a_{2k-1} + a_{3k-2} + \ldots \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2^2} a_1 + \ldots < \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots\right) a_1 = 2a_1 \qquad (*)$$

(первые две суммы слева содержат лишь конечное число членов, а $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$ понимается бесконечная геометрическая прогрессия). А так как наша последовательность a_1, a_2, a_3, ...

является *невозрастающей*, то

$$\begin{aligned} a_2+a_{k+1}+a_{2k}+a_{3k-1}+\ldots &\leqslant S<2a_1,\\ a_3+a_{k+2}+a_{2k+1}+a_{3k}+\ldots &\leqslant S<2a_1, \qquad (^{**})\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k-1}+a_{2k-2}+a_{3k-3}+\ldots &\leqslant S<2a_1. \end{aligned}$$

Сложив, наконец, неравенство (*) и все неравенства (**), получим:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n<\underbrace{2a_1+2a_1+\ldots+2a_1}_{k\text{ слагаемых}}=2ka_1=$$
$$=2k\cdot\frac{1}{2k}=1,$$

в то время как по условию задачи $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

137. Будем обходить наш круг, например, по часовой стрелке, начиная с нулика, пока снова не придем к этому же нулику. При этом всех переходов от нулика (к нулику или крестику) будет столько, сколько нуликов, т. е. q. В числе этих переходов будут переходы к нулику — их столько, сколько пар рядом стоящих нуликов, т. е. b. Тогда переходов от нулика к крестику будет $q-b$.

Аналогично, при таком же обходе можно подсчитать число переходов от крестика к нулику — их будет $p-a$.

Но число переходов от нулика к крестику равно числу переходов от крестика к нулику, так как по завершении обхода мы должны остановиться опять на исходном нулике. Значит, $q-b=p-a$, откуда

$$a-b=p-q.$$

138. Ясно, что если какое-либо число $i_k=k$, то рассматриваемое произведение равно нулю (*четно*), а если мы переставим в ряду чисел $1, 2, 3, 4, \ldots, 2m-1, 2m$ каждые два соседних числа, придя к последовательности $i_1=2,\ i_2=1,\ i_3=4,\ i_4=3, \ldots,\ i_{2m-1}=2m,$ $i_{2m}=2m-1$, то произведение

$$(1-i_1)(2-i_2)\ldots(2m-i_{2m})=$$
$$=(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot 1=(-1)^m\cdot 1^m=(-1)^m$$

будет *нечетным*; поэтому нам остается лишь показать, что при $n=$ $=2m+1$ нечетном рассматриваемое произведение будет *четным* всегда.

Первое доказательство. Среди чисел $1, 2, \ldots, n=$ $=2m+1$ будет всего $m\left(<\frac{n}{2}=\frac{2m+1}{2}\right)$ *четных* (это будут числа $2, 4, \ldots, 2m$); поэтому среди чисел $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *четных чисел с нечетными номерами* будет не больше чем m (ибо мы имеем всего m четных чисел) и *нечетных чисел с четными номерами* будет тоже не больше m (ибо всего-то мы имеем m четных номеров). Таким образом, объединение всех номеров первого и второго классов не может охватывать все $n=2m+1$ номеров; поэтому найдется такой номер l, что либо и i_l и l четны, либо и i_l и l нечетны. Но в обоих случаях разность i_l-l будет четной; поэтому произведение всех множителей $k-i_k$, где $k=1, 2, \ldots, 2m+1$, заведомо будет *четным*.

Второе доказательство. Так как сумма всех рассматриваемых множителей

$$(1-i_1)+(2-i_2)+(3-i_3)+\ldots+(n-i_n)=$$
$$=(1+2+3+\ldots+n)-(1+2+3+\ldots+n)=0,$$

то при n нечетном все эти множители не могут быть нечетными (ибо сумма нечетного числа нечетных чисел нечетна). Поэтому среди этих множителей имеется хоть один **четный** — а значит, их произведение *четно*.

139. Ясно, что поскольку каждое из произведений x_1x_2, $x_2x_3, \ldots, x_nx_1$ равно $+1$ или -1, то сумма всех этих произведений может равняться нулю лишь в том случае, если число слагаемых в ней $n=2m$ — четно и m из этих слагаемых равны $+1$, а m других равны -1. Но если -1 равны ровно m произведений из числа x_1x_2, x_2x_3, $x_3x_4, \ldots, x_{n-1}x_n$, x_nx_1, то в цепочке $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_1$ происходит m перемен знаков. Отсюда уже следует, что число m должно быть четным ($m=2k$), а значит, n делится на 4 ($n=4k$), ибо первое и последнее числа этой цепочки совпадают, и, значит, число перемен знаков между ними не может быть нечетным.

140. Отнесем к одной группе все те числа, десятичная запись которых содержит *четное* число единиц; все же числа, в записи которых фигурирует *нечетное* число единиц, составят вторую группу. Пусть A и B — два различных десятизначных числа из одной группы. Если записи A и B содержат **одно и то же** число n единиц (где $1 \leqslant n \leqslant 9$, ведь если $n=0$ или $n=10$, то числа A и B не могут быть различными), то, предположив, что на каком-то определенном (i-м) месте в записи A стоит цифра 1, а в записи B — цифра 2, мы вынуждены будем считать, что на другом (j-м) месте, напротив, в записи A стоит 2, а в записи B — цифра 1: ведь записи обоих чисел содержат поровну единиц. Но в таком случае в записи суммы $A+B$ и на i-м и на j-м местах будет стоять цифра 3, т. е. эта запись будет содержать не меньше двух троек. Если же запись числа A включает n единиц, а запись B содержит $m \neq n$ единиц, где, скажем, $n>m$, то поскольку числа n и m — **одинаковой четности** (т. е. оба четные или оба нечетные: ведь A и B — числа из одной группы), то $n-m \geqslant 2$, и, значит, найдутся, по крайней мере, два такие места, скажем k-е и l-е, что в записи A на этих местах стоит цифра 1, а в записи B — цифра 2. Отсюда следует, что в записи суммы $A+B$ и на k-м, и на l-м местах (снова — не менее чем на двух местах) будет стоять цифра 3.

141. Выпишем наши пять 100-значных чисел одно под другим; в каждом разряде (т. е. в каждом столбце) рассмотрим всевозможные *пары* цифр. Из 5 цифр можно, очевидно, составить 10 пар цифр; поэтому всего мы будем иметь $10 \cdot 100 = 1000$ пар цифр. При этом в каждом столбе будут встречаться **обе** разные цифры 1 и 2; если среди них имеется одна цифра 1 и четыре цифры 2 (или наоборот), то пар одинаковых цифр будет 6, а если в столбце имеются две цифры 1 и три цифры 2 (или наоборот), то число пар одинаковых цифр будет равно 4. Таким образом, общее число пар одинаковых цифр (по всем 100 разрядам) может колебаться в пределах от $4 \cdot 100 = 400$ до $6 \cdot 100 = 600$.

С другой стороны, если $A=\overline{a_1a_2\ldots a_{100}}$ и $B=\overline{b_1b_2\ldots b_{100}}$ — два из наших чисел, то, как мы знаем, среди пар цифр a_1 и b_1, a_2 и b_2, ..., a_{100} и b_{100} будет равно r пар одинаковых чисел. А так как из 5 чисел можно образовать 10 пар чисел, то таким путем мы насчитаем $10r$ пар одинаковых чисел. Так мы приходим к двойному неравенству

$$400 \leqslant 10r \leqslant 600,$$

откуда и следует, что $40 \leqslant r \leqslant 60$.

Примечание. Разумеется, то же рассуждение показывает, что если считать наши пять чисел n-значными, то определенное таким же путем число r должно заключаться в пределах: $\frac{2}{5}n \leqslant r \leqslant \frac{3}{5}n$; рекомендуем читателю самостоятельно рассмотреть вопрос об аналогичных оценках числа r при замене количества 5 наших чисел другим их количеством.

142. Ясно, что достаточно убедиться в возможности с помощью наших «шагов» *изменить любой знак 1-го набора, не меняя ни одного из других знаков*: ведь тогда, меняя последовательно все те знаки 1-го набора, которые отличны от стоящих на тех же местах знаков 2-го набора, мы переведем 1-й набор во 2-й. Но изменить одновременно два произвольных знака — скажем, i-й знак σ_i и j-й знак σ_j — 1-го набора мы, очевидно, можем: для этого достаточно дополнить наши два знака еще какими-то 10 (разумеется, одними и теми же!) знаками $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{10}}$ 1-го набора до двух групп σ_i, $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{10}}$ и $\sigma_j, \sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{10}}$ из 11 знаков, а затем последовательно изменить сначала знаки $\sigma_i, \sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{10}}$, а затем — знаки $\sigma_j, \sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots, \sigma_{k_{10}}$. Теперь пусть σ_p — произвольно выбранный знак 1-го набора; дополним его еще 10 знаками $\sigma_{q_1}, \sigma_{q_2}, \ldots, \sigma_{q_{10}}$ до группы $\sigma_p, \sigma_{q_1}, \ldots, \sigma_{q_{10}}$ из 11 знаков, а затем сначала поменяем все эти знаки, а потом — с помощью описанного выше приема — знаки σ_{q_1} и σ_{q_2}, затем — знаки $\sigma_{q_3}, \sigma_{q_4}, \ldots$, наконец, — знаки σ_{q_9} и $\sigma_{q_{10}}$. При этом мы сохраним прежними все знаки 1-го набора, *кроме одного лишь знака* σ_p, — откуда и следует утверждение задачи.

143. Предположим, что за какой-то понедельник шахматист сыграл a_1 партий, за понедельник и вторник — a_2 партий, за три дня — a_3 партий, и т. д., наконец, за 77 дней — a_{77} партий. Рассмотрим теперь следующую совокупность чисел: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{77}$; $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $a_3 + 20, \ldots, a_{77} + 20$.

Всего мы имеем здесь $2 \cdot 77 = 154$ числа, каждое из которых не больше чем $132 + 20 = 152$ (число a_{77} не больше чем $11 \cdot 12 = 132$, так как 77 дней — это ровно 11 недель); следовательно, по крайней мере, два из этих 154 чисел равны между собой (ср. со сказанным на стр. 10). Но никакие два числа из ряда $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{77}$ не могут быть равны между собой (ибо шахматист каждый день играет не меньше одной партии); точно так же не могут быть равны между собой никакие два числа из ряда $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $a_3 + 20, \ldots$, $a_{77} + 20$. Таким образом, для каких-то k и l должно иметь место равенство

$$a_k = a_l + 20;$$

это равенство означает, что $a_k - a_l = 20$, т. е. что за $k - l$ дней, с $(l + 1)$-го по k-й включительно, шахматист сыграл ровно 20 партий.

144. Первое решение. Рассмотрим остатки от деления чисел

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{1111\ldots1}_{N \text{ единиц}}$$

на N. Так как этих чисел N, а различных не равных нулю остатков при делении на N может получиться только $N-1$, то если ни одно из этих чисел не делится на N (противное доказывало бы предложение задачи), то какие-то два из них, например

$$K=\underbrace{11\ldots1}_{k \text{ единиц}} \text{ и } L=\underbrace{1111\ldots1}_{l \text{ единиц}} \quad (l>k),$$

дают при делении на N один и тот же остаток. В таком случае разность

$$L-K=\underbrace{11\ldots1}_{l-k \text{ единиц}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ нулей}}$$

делится на N.

Если N взаимно просто с 10, то из делимости числа $L-K=\underbrace{11\ldots1}_{l-k \text{ единиц}}\cdot 10^k$ на N следует, что число $\underbrace{11\ldots1}_{l-k \text{ единиц}}$ делится на N.

Второе решение. Рассмотрим разложение числа $\frac{1}{N}$ в периодическую десятичную дробь:

$$\frac{1}{N}=0,\overline{b_1b_2\ldots b_k}\,(\overline{a_1a_2\ldots a_l}) \quad \left(\text{где } \overline{a_1a_2\ldots a_l} \text{ — период}\right).$$

По правилу обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные, мы будем иметь:

$$\frac{1}{N}=\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_ka_1a_2\ldots a_l}-\overline{b_1b_2\ldots b_k}}{\underbrace{999\ldots9}_{l \text{ девяток}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ нулей}}}.$$

Отсюда вытекает, что число $A=\underbrace{999\ldots9}_{l \text{ девяток}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ нулей}}$ делится на N. Но $A=9A_1$, где $A_1=\underbrace{11\ldots1}_{l \text{ единиц}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ нулей}}$. Рассмотрим теперь число

$$B=\underbrace{11\ldots1}_{l \text{ цифр}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ цифр}}\underbrace{11\ldots1}_{l \text{ цифр}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ цифр}}\ldots\underbrace{11\ldots1}_{l \text{ цифр}}\underbrace{00\ldots0}_{k \text{ цифр}},$$

получающееся, если число A_1 выписать 9 раз подряд. Очевидно, что B равно произведению числа A_1 на число

$$\underbrace{\underbrace{100\ldots0}_{(l+k) \text{ цифр}}\underbrace{100\ldots0}_{(l+k) \text{ цифр}}\ldots\underbrace{100\ldots0}_{(l+k) \text{ цифр}}}_{8 \text{ раз}}1,$$

делящееся на 9 (по признаку делимости на 9). Следовательно, число B, состоящее из одних единиц и нулей, делится на $9A_1=A$, а значит, и на N.

Если N взаимно просто с 10, то $\frac{1}{N}$ при обращении в десятичную дробь дает дробь чисто периодическую, так что B в этом случае будет состоять из одних единиц.

Примечание. Ясно, что если запись числа A состоит из p единиц, а запись B — из pq единиц, то B делится на A; поэтому (в предположении, что N взаимно просто с 10; впрочем, это верно и в общем случае) существует даже бесконечно много чисел, удовлетворяющих условию задачи.

145. Пусть a_N и $a_{N+1}=a_N+d$ — два последовательных члена нашей прогрессии; тогда расстояние между соответствующими точками A_N и A_{N+1} числовой оси равно разности d прогрессии. Пусть $d>0$; если число d — нецелое, то обозначим через $\alpha=\{d\}=d-[d]>0$ *дробную часть* числа d (ср. стр. 37), а если d — целое, то примем α равным 1 (во всех случаях α равно *разности между d и наибольшим из меньших d целых чисел*). Мы хотим так расположить наши отрезки длины 1, чтобы можно было утверждать, что *хоть одна из точек A_N попадет на один из отрезков системы*, иными словами, чтобы можно было исключить случай, когда все точки A_N попадают в *промежутки* между отрезками. Но если имеет место именно этот последний случай, то каждый из отрезков A_NA_{N+1} длины d будет состоять из целого числа отрезков системы (общая длина которых, разумеется, выражается целым числом) и некоторого числа промежутков между отрезками (включая сюда и два нецелых промежутка); ясно, что *общая длина всех этих промежутков* (и двух частей промежутков) никак *не может быть меньше α*. Поэтому, если нам удастся указать систему отрезков, в которой для достаточно больших номеров N число α нельзя «набрать» из длин (и частей длин) промежутков между отрезками, то для этой системы и будет выполняться стоящее в условии задачи требование.

Сказанное делает ясной следующую конструкцию. Расположим на положительной полуоси единичные отрезки, начиная с отрезка (1, 2), так, чтобы промежутки между соседними отрезками образовывали, скажем, *геометрическую прогрессию со знаменателем* $\frac{1}{2}$, т. е вслед за (1, 2) расположим отрезок (3, 4), затем — отрезок $\left(4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}\right)$, затем — отрезок $\left(5\frac{3}{4}, 6\frac{3}{4}\right)$, затем — отрезок $\left(6\frac{7}{8}, 7\frac{7}{8}\right)$, и т. д. (см. рис. 14); при этом каждый следующий промежуток будет

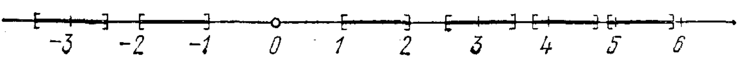


Рис. 14.

вдвое меньше предыдущего). Тогда сумма длин всех промежутков $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$, а сумма R_i длин всех промежутков, начиная с $(i+1)$-го, $\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{i+1}}+\frac{1}{2^{i+2}}+\ldots=\frac{1}{2^{i-1}}$ будет при достаточно большом i сколь угодно мала. Поэтому, каково бы ни было (отвечающее выбранной нами арифметической прогрессии с положительной разностью d) число $\alpha=\{d\}$ (или $\alpha=1$), всегда найдется такой номер i_0, что $\alpha > \frac{1}{2^{i_0-1}}$, т. е. $\alpha > R_{i_0}$. Следовательно, если N настолько велико, что все промежутки вплоть до i_0-го расположены слева от точки A_N (а этого всегда можно достигнуть, ибо при $d > 0$ последовательность $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ уходит неограниченно далеко вправо), то на отрезок $A_N A_{N+1}$ длины d могут попасть лишь начинающиеся с (i_0+1)-го промежутки длин $\frac{1}{2^{i_0}}, \frac{1}{2^{i_0+1}}, \frac{1}{2^{i_0+2}}, \ldots$ Но так как сумма R_{i0} длин всех этих промежутков меньше α, то обе точки A_N и A_{N+1} не могут одновременно принадлежать этим промежуткам — и хоть одна из них непременно попадет на отрезок нашей системы.

Мы до сих пор считали, что $d > 0$; для того чтобы доказать утверждение задачи и для арифметических прогрессий с отрицательной разностью d, достаточно продолжить нашу систему отрезков на отрицательную полуось числовой оси, скажем, отразив ее симметрично от нулевой точки O.

146. Прежде всего очевидно, что ни одна из рассматриваемых дробей не равна целому числу: действительно, если бы, например, какая-то дробь $\frac{k(m+n)}{m}$ (k — одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, m-1$) была целым числом, то $m+n$ должно было бы иметь общие делители с числом m (ибо $k < m$ и не может делиться на m); но тогда и число $n = (m+n) - m$ не было бы взаимно просто с m. Далее никакие две из этих дробей не равны друг другу: если бы было

$$\frac{k(m+n)}{m} = \frac{l(m+n)}{n}$$

(k — одно из чисел $1, 2, \ldots, m-1$; l — одно из чисел $1, 2, \ldots, n-1$), то мы имели бы

$$\frac{k}{m} = \frac{l}{n}; \quad m = \frac{k}{l} n,$$

и снова m и n не были бы взаимно простыми (так как $l < n$ и не может делиться на n).

Рассмотрим теперь некоторое целое положительное число A, меньшее $m+n$. Дроби

$$\frac{m+n}{m}, \frac{2(m+n)}{m}, \ldots, \frac{k(m+n)}{m}$$

остаются меньшими A, пока $k(m+n) < Am$, или $k < \frac{Am}{m+n}$; число таких дробей, очевидно, равно целой части $\left[\frac{Am}{m+n}\right]$ числа $\frac{Am}{m+n}$ [1]. Точно так же дроби

$$\frac{m+n}{n}, \frac{2(m+n)}{n}, \ldots, \frac{l(m+n)}{n}$$

остаются меньшими A, пока $l < \frac{An}{m+n}$; число таких дробей равно

[1] Относительно обозначений см. стр. 37.

целой части $\left[\frac{An}{m+n}\right]$ числа $\frac{An}{m+n}$. Числа $\frac{Am}{m+n}$ и $\frac{An}{m+n}$ оба не целые, ибо m, n и $m+n$ попарно взаимно просты; сумма этих двух чисел равна A:

$$\frac{Am}{m+n}+\frac{An}{m+n}=A.$$

Но если сумма двух чисел α и β, не являющихся целыми, равна целому числу A, то

$$[\alpha]+[\beta]=A-1;$$

доказательство этого предложения сразу следует из рис. 15. Таким образом,

$$\left[\frac{Am}{m+n}\right]+\left[\frac{An}{m+n}\right]=A-1,$$

откуда следует, что в интервале $(0, A)$ числовой оси имеется ровно $A-1$ наших дробей.

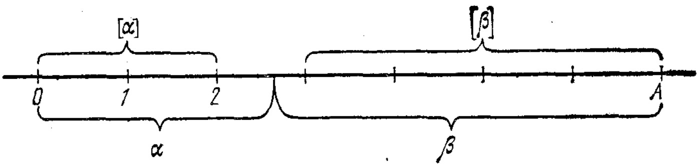


Рис. 15.

Из доказанного сразу вытекает утверждение задачи. Действительно, положим сначала $A=1$; мы получим, что в интервале $(0, 1)$ вовсе нет наших дробей. Далее, пусть $A=2$; из того, что в интервале $(0, 2)$ имеется одна дробь, вытекает, что одна дробь есть в интервале $(1, 2)$. Затем положим $A=3$; из того, что в интервале $(0, 3)$ содержатся две дроби, т. е. на одну больше, чем в интервале $(0, 2)$, вытекает, что в интервале $(2, 3)$ имеется одна из наших дробей. Продолжая рассуждать таким же образом, мы полностью докажем требуемое предложение.

147. Первое решение. Если число a заключено в интервале $\frac{1000}{m}\geqslant a>\frac{1000}{m+1}$, то всего имеется, очевидно, m целых чисел, не превосходящих 1000, кратных a (а именно a, $2a$, $3a$, ..., ma). Поэтому если мы обозначим через k_1 число тех из наших чисел, которые заключены между 1000 и $\frac{1000}{2}$; через k_2 — число чисел, заключенных между $\frac{1000}{2}$ и $\frac{1000}{3}$; через k_3 — число чисел, заключенных между $\frac{1000}{3}$ и $\frac{1000}{4}$, и т. д., то мы будем иметь всего

$$k_1+2k_2+3k_3+\ldots$$

чисел, не превосходящих 1000 и кратных хотя бы одному из наших чисел. Но по условию задачи все эти кратные различны; следовательно,

$$k_1+2k_2+3k_3+\ldots<1000.$$

Теперь остается заметить, что сумма обратных величин всех наших чисел меньше чем

$$k_1\frac{1}{\frac{1000}{2}}+k_2\frac{1}{\frac{1000}{3}}+k_3\frac{1}{\frac{1000}{4}}+\ldots=\frac{2k_1+3k_2+4k_3+\ldots}{1000}$$

(здесь мы заменили k_1 наибольших из наших чисел на $\frac{1000}{2}$; следующие k_2 чисел — на $\frac{1000}{3}$; следующие k_3 чисел — на $\frac{1000}{4}$, и т. д.). Но

$$2k_1+3k_2+4k_3+\ldots=$$
$$=(k_1+2k_2+3k_3+\ldots)+(k_1+k_2+k_3+\ldots)=$$
$$=(k_1+2k_2+3k_3+\ldots)+n<1000+n<2000;$$

следовательно, сумма обратных величин всех наших чисел меньше 2.

Второе решение. Приведем здесь еще один изящный вариант того же рассуждения. Число членов ряда 1, 2, ..., 1000, делящихся на целое число a_k, очевидно, равно целой части $\left[\frac{1000}{a_k}\right]$ дроби $\frac{1000}{a_k}$. Так как наименьшее общее кратное любых двух из чисел a_1, a_2, ..., a_n больше 1000, то среди чисел 1, 2, 3, ..., 1000 не найдется ни одного, делящегося одновременно на два из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Отсюда вытекает, что число членов ряда 1, 2, 3, ..., 1000, делящихся хотя бы на одно из чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, равно сумме

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right]+\left[\frac{1000}{a_2}\right]+\left[\frac{1000}{a_3}\right]+\ldots+\left[\frac{1000}{a_n}\right].$$

Так как в ряду 1, 2, 3, ..., 1000 всего имеется 1000 чисел, то должно быть

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right]+\left[\frac{1000}{a_2}\right]+\left[\frac{1000}{a_3}\right]+\ldots+\left[\frac{1000}{a_n}\right]\leqslant 1000.$$

Но целая часть дроби отличается от самой дроби меньше чем на единицу, т. е.

$$\left[\frac{1000}{a_1}\right]>\frac{1000}{a_1}-1,\ \left[\frac{1000}{a_2}\right]>\frac{1000}{a_2}-1,\ldots,\ \left[\frac{1000}{a_n}\right]>\frac{1000}{a_n}-1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1000}{a_1}-1\right)+\left(\frac{1000}{a_2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{1000}{a_n}-1\right)<1000,$$

т. е.

$$\frac{1000}{a_1}+\frac{1000}{a_2}+\frac{1000}{a_3}+\ldots+\frac{1000}{a_n}<1000+n<2000,$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}<2.$$

Примечание. Оценку настоящей задачи можно значительно уточнить. Рассмотрим все кратные наших чисел, не превосходящие 500. Очевидно, k_1 из наших чисел будут сами больше 500; k_2+k_3 чисел будут не большем 500, но больше $\frac{500}{2}$; k_4+k_5 чисел будут не больше $\frac{500}{2}$, но больше $\frac{500}{3}$, и т. д. Отсюда, в точности как в первом решении задачи, заключаем, что общее число чисел, не превосходящих 500 и кратных хотя бы одному из заданных n чисел, равно

$$(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots;$$

следовательно,

$$(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots<500.$$

Отметим теперь, что разность $500-[(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots]$ выражает число чисел, не превосходящих 500 и не кратных ни одному из наших чисел, а разность $1000-(k_1+2k_2+3k_3+\ldots)$ — число чисел, не превосходящих 1000 и не кратных ни одному из наших чисел. Следовательно,

$$500-[(k_2+k_3)+2(k_4+k_5)+3(k_6+k_7)+\ldots]<$$
$$<1000-(k_1+2k_2+3k_3+\ldots),$$

откуда получаем:

$$(k_1+k_2)+2(k_3+k_4)+3(k_5+k_6)+\ldots<500.$$

Теперь остается только заметить, что

$$2k_1+3k_2+4k_3+5k_4+6k_5+7k_6+\ldots<$$
$$<(k_1+2k_2+3k_3+4k_4+5k_5+6k_6+\ldots)+$$
$$+[(k_1+k_2)+2(k_3+k_4)+3(k_5+k_6)+\ldots]<$$
$$<1000+500=1500$$

и, следовательно, сумма обратных величин всех наших чисел, меньшая $\frac{2k_1+3k_2+4k_3+\ldots}{1000}$, наверняка меньше $1\frac{1}{2}$.

Аналогично, рассматривая кратные наших чисел, не превосходящие 333, можно доказать, что сумма обратных величин всех наших чисел даже меньше $1\frac{1}{5}$.

Отметим еще, что число 1000 в условии этой задачи можно заменить любым другим целым числом.

148. Рассмотрим, как образуется разложение простой дроби $\frac{q}{p}$ в периодическую десятичную дробь

$$\frac{q}{p} = \overline{A,\ a_1a_2 \ldots a_ka_1a_2 \ldots a_ka_1a_2 \ldots}$$

(здесь A — целое число, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — цифры периода дроби). Очевидно, что A есть частное от деления q на p:

$$q = Ap + q_1,$$

где остаток q_1 меньший p. Далее $\overline{Aa_1}$ есть частное от деления $10q$ на p ($\overline{Aa_1}$ составлено из цифр числа A и цифры a_1):

$$10q = \overline{Aa_1}\cdot p + q_2, \quad \text{где} \quad q_2 < p.$$

Точно так же

$$10^2 \cdot q = \overline{Aa_1a_2} \cdot p + q_3, \ \ldots, \ 10^k \ q = \overline{Aa_1a_2 \ldots a_k} \cdot p + q_{k+1}, \ \ldots$$

Период дроби начнется снова в тот момент, когда при делении какого-либо числа 10^kq на p мы получим тот же остаток $q_{k+1} = q_1$, что и при делении числа q на p. Таким образом, число k цифр в периоде дроби определится как наименьшая степень 10, такая, что 10^kq дает при делении на p тот же самый остаток, что и q. Последнее означает, что разность $10^kq - q = (10^k - 1)q$ делится на p или что разность $10^k - 1$ делится на p (ибо q, разумеется, взаимно просто с p).

Предположим теперь, что k четно: $k = 2l$; из того, что разность $10^{2l} - 1 = (10^l - 1)(10^l + 1)$ делится на p, следует, что либо $10^l - 1$ делится на p, либо $10^l + 1$ делится на p. Но $10^l - 1$ не может делиться на p, так как в противном случае 10^l давало бы при делении на p тот же самый остаток, что и q, и период дроби $\frac{q}{p}$ равнялся бы l, а не $k = 2l$. Таким образом, мы заключаем, что $10^l + 1$ делится на p.

Из последнего результата следует, что сумма $\frac{10^lq}{p} + \frac{q}{p}$ есть целое число. Но

$$\frac{10^lq}{p} + \frac{q}{p} = \overline{Aa_1a_2 \ldots a_l,\ a_{l+1}a_{l+2} \ldots a_{2l}a_1a_2 \ldots a_l \ldots} + \overline{A,\ a_1a_2 \ldots a_la_{l+1} \ldots a_{2l} \ldots};$$

таким образом, сумма дробей

$$\overline{0,\ a_{l+1}a_{l+2} \ldots a_{2l}a_1a_2 \ldots a_l \ldots} + \overline{0,\ a_1a_2 \ldots a_la_{l+1} \ldots a_{2l} \ldots}$$

есть целое число. Так как каждая из этих дробей меньше 1 и больше нуля, то эта сумма должна равняться $1 = 0{,}999\ldots$, что возможно только в том случае, если

$$a_1 + a_{l+1} = 9, \quad a_2 + a_{l+2} = 9, \quad \ldots, \quad a_l + a_{2l} = 9.$$

Из последних соотношений сразу следует, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2l}}{2l} = \frac{9}{2}.$$

Если же k нечетно, то равенство $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}=\frac{9}{2}$, очевидно, невозможно, так как знаменатель дроби, стоящей в левой части этого равенства, не делится на 2.

149. Число цифр в периодах дробей $\frac{a_n}{p^n}$ и $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ равно наименьшим целым положительным числам k и l, таким, что 10^k-1 делится на p^n, соответственно 10^l-1 делится на p^{n+1} (см. решение предыдущей задачи). Составим теперь разность

$$(10^l-1)-(10^k-1)=10^k(10^{l-k}-1).$$

Из того, что эта разность делится на p^n, следует, что $10^{l-k}-1$ делится на p^n. Покажем теперь, что из того, что $10^{l-k}-1$ делится на p^n и 10^k-1 делится на p^n, следует, что и 10^d-1, где d есть общий наибольший делитель чисел $l-k$ и k, делится на p^n.

Действительно, пусть $l-k=qk+r$. В таком случае имеем:

$$10^{l-k}-1=10^{qk+r}-1=10^r(10^{qk}-1)+(10^r-1).$$

Но $10^{qk}-1=(10^k)^q-1^q$ делится на 10^k-1, т. е. делится на p^n; следовательно, и 10^r-1 делится на p^n. Точно так же показывается, что и $10^{r_1}-1$, где r_1 есть остаток от деления k на r, делится на p^n; что $10^{r_2}-1$, где r_2 есть остаток от деления r на r_1, делится на p^n; что $10^{r_3}-1$, где r_3 есть остаток от деления r_1 на r_2, делится на p^n, и т. д.[1]). Но нетрудно показать, что ряд чисел $r, r_1, r_2, \ldots$ должен закончиться числом d. Действительно, так как $l-k$ и k делятся на d, то и $r=(l-k)-qk$ делится на d; так как k и r делятся на d, то и r_1 делится на d; так как r и r_1 делятся на d, то и r_2 делится на d, и т. д.; следовательно, все числа нашего ряда делятся на d. С другой стороны, если последнее число в этом ряду есть r_k (т. е. r_{k-1} делится на r_k, так что следующий за r_k остаток уже равен нулю), то r_{k-1} делится на r_k; r_{k-2} делится на r_k (ибо r_{k-1} и r_k делятся на r_k); r_{k-3} делится на r_k (ибо r_{k-2} и r_{k-1} делятся на r_k), и т. д; наконец, k и $l-k$ делятся на r_k. Но в таком случае неравенство $r_k>d$ противоречило бы тому, что d есть общий наибольший делитель $l-k$ и k.

По условию k есть наименьшее целое число, такое, что 10^k-1 делится на p^n. Поэтому из того, что 10^d-1 тоже делится на p^n, следует что $d=k$, $l-k$ кратно k и, значит, l кратно k: $l=km$.

Разложим теперь 10^l-1 на множители:

$$10^l-1=10^{km}-1=$$
$$=(10^k-1)(10^{(m-1)k}+10^{(m-2)k}+\ldots+10^k+1).$$

Так как 10^k-1 делится на p^n, то 10^k дает при делении на p^n остаток 1, откуда следует, что и $10^{2k}=10^k\cdot 10^k$ дает при делении на p^n остаток 1 и $10^{3k}=10^{2k}\cdot 10^k$ дает при делении на p^n остаток 1, и т. д. Следовательно, каждый член суммы, стоящей в скобках, дает при делении на p^n остаток 1 и, таким образом, вся сумма дает остаток m. Отсюда следует, что если 10^k-1 не делилось на p^{n+1},

[1]) Этот процесс получения ряда последовательных остатков r_1, r_2, r_3, … носит название алгоритма Евклида.

то наименьшее значение l, такое, что $10^l - 1$ делится на p^{n+1}, равно pk; при этом $10^{pk} - 1$ делится на p^{n+1}, но не делится на p^{n-2} (ибо выражение в скобках не делится на p^2).

Отсюда и вытекает утверждение задачи.

150. а) Пусть a — первая, а b — последняя цифра искомого числа N. Тогда это число равно $1000\,a + 100\,a + 10\,b + b = 1100\,a + 11\,b = 11(100\,a + b)$. Так как число N является точным квадратом, то из того, что оно делится на 11, вытекает, что оно делится и на 121, т. е. $\frac{N}{11} = 100a + b$ делится на 11. Но

$$100a + b = 99a + (a + b) = 11 \cdot 9a + (a + b).$$

Следовательно, $a + b$ делится на 11. Так как и a, и b не больше 9 и a не равно 0, то $1 \leqslant a + b \leqslant 18$, а потому $a + b = 11$.

Отсюда

$$100a + b = 11 \cdot 9a + 11 = 11(9a + 1),$$

$$\frac{N}{121} = \frac{100a + b}{11} = 9a + 1.$$

Так как N — точный квадрат, то $\frac{N}{121}$ — также точный квадрат. Но из чисел вида $9a + 1$, где a меняется от 1 до 9, только $9 \cdot 7 + 1 = 64$ является точным квадратом. Следовательно, $N = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2$.

б) Пусть a — цифра десятков этого числа, а b — цифра единиц. Тогда число равно $10a + b$, а число, записанное этими же цифрами в обратном порядке, равно $10b + a$. В силу условия задачи, $10a + b + 10b + a = 11(a + b) = k^2$.

Отсюда следует, что k^2 делится на 11, поэтому $a + b$ также делится на 11. Так как $a + b \leqslant 18$, то это возможно лишь в случае, если $a + b = 11$, $k^2 = 121$. Таким образом, искомыми числами являются

$$29,\ 38,\ 47,\ 56,\ 65,\ 74,\ 83,\ 92.$$

151. Обозначим двузначное число, образованное первыми двумя цифрами искомого числа N, через a, а число, образованное его двумя последними цифрами, — через b. В таком случае $N = 100a + b$, так что условие задачи дает

$$100a + b = (a + b)^2,$$

или

$$99a = (a + b)^2 - (a + b) = (a + b)(a + b - 1). \qquad (*)$$

Итак, произведение $(a + b)(a + b - 1)$ должно делиться на 99. Рассмотрим теперь отдельные возможные случаи.

1°. $a + b = 99k$, $a + b - 1 = \frac{a}{k}$. Так как a и b — двузначные числа, то $k \leqslant 2$, причем случай $k = 2$ сразу приводит к не удовлетворяющим основному равенству (*) значениям $a = 99$, $b = 99$. Таким образом, приходится считать, что

$$k = 1,\ a + b = 99,\ a = a + b - 1 = 98,\ N = 9801 = (98 + 1)^2.$$

2°. $a + b = 11m$, $a + b - 1 = 9n$, $mn = a$. В этом случае имеем $9n = 11m - 1$. Из того, что $11m - 1$ делится на 9, следует, что число m дает при делении на 9 остаток 5 (непосредственной проверкой убеждаемся, что если бы m давало при делении на 9 какой-либо другой остаток, то $11m-1$ не делилось бы на 9). Итак, $m=9t+5$, откуда следует, что $9n=99t+54$, $n=11t+6$. Теперь имеем:

$$a=mn=(9t+5)(11t+6)=99t^2+109t+30.$$

Так как a число двузначное, то отсюда сразу вытекает, что $t=0$. Следовательно, $a=30$, $a+b=11m=55$, $b=25$, $N=$ $=3025=(30+25)^2$.

3°. $a+b=9m$, $a+b-1=11n$, $mn=a$. Исследование, аналогичное тому, которое мы провели в случае 2°, дает единственный ответ $N=2025=(20+25)^2$.

4°. $a+b=33m$, $a+b-1=3n$ или $a+b=3m$, $a+b-1=$ $=33n$, что невозможно, так как $a+b$ и $a+b-1$ — числа взаимно простые.

5°. $a+b-1=99k, a+b=\frac{a}{k}$. В этом случае имеем $a+b-1=99$, $a+b=100$, $a=\frac{(a+b)(a+b-1)}{99}=100$, что невозможно. Итак, условию задачи удовлетворяют лишь числа 9801, 3025 и 2025.

152. а) Четырехзначное число, записываемое четырьмя четными цифрами, может начинаться с цифр 2, 4, 6 или 8; другими словами, оно заключено между 1999 и 3000, или между 3999 и 5000, или между 5999 и 7000, или между 7999 и 9000. Поэтому корень квадратный из этого числа заключается между 44 и 55, или между 63 и 71, или между 77 и 84, или между 89 и 95. Заметим еще, что так как $(10x+y)^2=100x^2+20xy+y^2$, то при $0\leqslant y\leqslant 9$ цифра десятков числа $(10x+y)^2$ четна или нечетна одновременно с цифрой десятков числа y^2. Поэтому корень квадратный из искомого числа не может оканчиваться цифрами 4 и 6.

Так как корень квадратный из искомого числа четен, то он может равняться лишь одному из следующих 10 чисел:

$$48,\ 50,\ 52,\ 68,\ 70,\ 78,\ 80,\ 82,\ 90 \text{ и } 92.$$

Непосредственная проверка показывает, что условию задачи удовлетворяют числа:

$$68^2=4624;\ 78^2=6084;\ 80^2=6400;\ 92^2=8464.$$

б) Рассуждения, аналогичные тем, которые привели нас к решению задачи а), показывают, что вовсе не существует четырехзначных чисел, являющихся полными квадратами и записывающихся четырьмя нечетными цифрами.

153. а) Обозначим цифры сотен, десятков и единиц искомого числа N соответственно через x, y, и z, так что $N=100x+10y+z$. В таком случае условие задачи дает

$$100x+10y+z=x!+y!+z!.$$

Отметим, что $7!=5040$ есть число четырехзначное; поэтому ни одна цифра числа N не может превосходить 6. Следовательно, само число N не превосходит 700, откуда вытекает, что ни одна его цифра не может превосходить 5 (ибо $6!=720>700$). Хотя бы одна цифра числа N равна 5, так как даже $3\cdot 4!=72<100$, а N трехзначно. При этом x не может быть равно 5, так как даже $3\cdot 5! = 360 < 500$. Отсюда следует также, что x не превосходит 3. Далее можно утверждать, что x не превосходит 2, так как даже $3! + 2\cdot 5! = 246 < 300$. Но число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то x не может быть больше 1, ибо даже $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Более того, так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, то мы заключаем, что y не может превосходить 4; следовательно, $z = 5$, так как хотя бы одна цифра числа N должна равняться 5. Таким образом, мы имеем $x = 1$, $4 \geqslant y \geqslant 0$ и $z = 5$; это позволяет легко обнаружить единственное решение задачи: $N = 145$.

б) Искомое число N не может иметь больше чем три цифры, так как даже $4\cdot 9^2 = 324$ — число трехзначное. Поэтому мы можем написать $N = 100x + 10y + z$, где x, y, z — цифры числа; при этом x или даже x и y одновременно могут быть равны нулю.

Из условия задачи имеем $100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2$, откуда

$$(100 - x)x + (10 - y)y = z(z - 1). \qquad (*)$$

Из последнего равенства прежде всего следует, что $x = 0$ — в противном случае число, стоящее в левой части равенства, не меньше чем $90 (x \geqslant 1,\ 100 - x \geqslant 90,\ (10 - y)y \geqslant 0)$, а число, стоящее справа, не больше чем $9\cdot 8 = 72$ (ибо $z \leqslant 9$). Следовательно, уравнение (*) имеет вид $(10 - y)y = z(z - 1)$. Легко проверить, что это последнее равенство не удовлетворяется ни при каких целых положительных x и y, не превосходящих 9, если только $y \neq 0$. Если $y = 0$, то мы имеем единственное очевидное решение $z = 1$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяет единственное число $N = 1$.

154. а) Очевидно, что искомое число N не может иметь более четырех цифр, так как сумма цифр пятизначного числа не превосходит $5\cdot 9 = 45$, а $45^2 = 2025$ — число четырехзначное. Далее, так как $4\cdot 9 = 36$, а $36^2 = 1296$, то при N четырехзначном первая цифра N не превосходит 1. Но $1 + 3\cdot 9 = 28$, а $28^2 = 784$ трехзначно; значит, N вообще не может быть четырехзначным числом. Итак, мы можем предположить, что $N = 100x + 10y + z$, где x, y, z — цифры искомого числа; при этом возможно, что $x = 0$ или даже $x = y = 0$.

Теперь условие задачи можно записать в виде

$$100x + 10y + z = (x + y + z)^2,$$

или

$$99x + 9y = (x + y + z)^2 - (x + y + z) = (x + y + z)(x+y+z - 1).$$

Таким образом, мы видим, что либо $x + y + z$, либо $x + y + z - 1$ делится на 9 (каждое из этих двух чисел делиться на 3 не может, так как они взаимно простые). Но $1 \leqslant x + y + z \leqslant 27$. Рассмотрим теперь отдельно все представляющиеся случаи.

1°. $x + y + z - 1 = 0$; $99x + 9y = 0$, $x = y = 0$, $z = 1$; $N = 1$.

2°. $x + y + z = 9$; $99x + 9y = 9\cdot 8 = 72$, $x = 0$, $9y = 72$, $y = 8$, $z = 1$; $N = 81 (= (8 + 1)^2)$.

3°. $x + y + z - 1 = 9$; $99x + 9y = 9\cdot 10 = 90$, $x = 0$, $9y = 90$, что невозможно.

4°. $x + y + z = 18$; $99x + 9y = 18\cdot 17 = 306$, $x = 3$, $y = 1$, $z = 18 - (3 + 1) = 14$, что невозможно.

5°. $x+y+z-1=18$; $99x+9y=19\cdot 18=342$, $x=3$, $y=5$, $z=19-(3+5)=11$, что невозможно.

6°. $x+y+z=27$; $99x+9y=27\cdot 26=702$, $x=7$, $y=1$, $z=27-(7+1)=19$, что невозможно.

Итак, условию задачи удовлетворяют только числа 1 и 81.

б) Куб трехзначного числа может содержать не более девяти цифр; поэтому сумма цифр куба этого числа не превосходит $9\cdot 9 = 81 < 100$. Отсюда следует, что искомое число не может быть трехзначным; аналогично показывается, что оно не может содержать и больше трех цифр. Итак, искомое число обязательно будет однозначным или двузначным.

Куб двузначного числа не может иметь более шести цифр; поэтому сумма цифр куба не превосходит $6\cdot 9=54$. Итак, искомое число не может превосходить 54. Но если куб числа, не превосходящего 54, даже и имеет шесть цифр, то первая цифра его равна 1; поэтому сумма цифр куба не превосходит $5\cdot 9+1=46$. Итак, искомое число не превосходит 46.

Если число не превосходит 46, то куб его содержит не более пяти цифр, и так как он меньше 99 999, то сумма цифр куба не превосходит $4\cdot 9+8=44$; так как куб числа 44 есть пятизначное число, оканчивающееся на 4, то и 44 больше суммы цифр своего куба. Итак, искомое число не превосходит 43.

Далее, так как сумма цифр каждого числа дает при делении на 9 такой же остаток, как и само число, то искомое число и его куб должны давать при делении на 9 одинаковые остатки. Но это возможно только в том случае, если искомое число дает при делении на 9 остаток -1, 0 или 1.

Итак, искомое число не превосходит 43 и дает при делении на 9 остаток -1, 0 или 1. Этим условиям удовлетворяют лишь следующие 13 чисел:

$$1,\ 8,\ 9,\ 10,\ 17,\ 18,\ 19,\ 26,\ 27,\ 28,\ 35,\ 36,\ 37.$$

Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяют числа:

$$1\,(1^3=1),\ 8\,(8^3=512),\ 17\,(17^3=4193),$$

$$18\,(18^3=5832),\ 26\,(26^3=17\,576),\ 27\,(27^3=19\,683).$$

155. а) Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x<5$ единственными решениями нашего уравнения будут числа $x=1$, $y=\pm 1$ и $x=3$, $y=\pm 3$. Докажем теперь, что при $x\geqslant 5$ решений нет. Для этого заметим, что $1!+2!+3!+4!=33$ оканчивается цифрой 3, а $5!, 6!, 7!, \ldots$ все оканчиваются нулем. Таким образом, при $x\geqslant 5$ сумма $1!+2!+\ldots+x!$ оканчивается цифрой 3, а поэтому не может равняться квадрату целого числа y (никакой квадрат целого числа не оканчивается на 3).

б) Рассмотрим два случая:

1°. $z=2n$ — четное число. Этот случай легко сводится к предыдущей задаче, ибо $y^{2n}=(y^n)^2$. Таким образом, при четном z решения таковы:

$$x=1;\ y=\pm 1;\ z\text{ — любое четное};$$

$$x=3;\ y=\pm 3;\ z=2.$$

2°. z — нечетное число. При $z=1$ годится любое значение x, причем $y=1!+2!+\ldots+x!$. Пусть $z\geqslant 3$. Заметим, что $1!+2!+$

$+3!+4!+5!+6!+7!+8!=46\,233$. Число $46\,233$ делится на 9, но не делится на 27, а при $n \geqslant 9$ число $n!$ делится на 27. Сумма $9!+10!+\ldots+x!$ делится на 27; поскольку, однако, $1!+2!+\ldots+8!$ делится на 9, но не делится на 27, вся сумма $1!+2!+\ldots+x!$ при $x \geqslant 8$ делится на 9, но не делится на 27. Для того чтобы y^z делилось на 9, необходимо, чтобы y делилось на 3. Но тогда y^z делится на 27 (ибо $z \geqslant 3$) и, следовательно, при $x \geqslant 8$, $z \geqslant 3$ решений в целых числах нет. Остается рассмотреть случай $x < 8$. Имеем $1! = 1 = 1^z$, где z — любое натуральное число; $1!+2! = 3$, т. е. не равно никакой целой, отличной от 1 степени никакого натурального числа; $1!+2!+3! = 3^2$, и далее:

$$\begin{aligned}
&1!+2!+3!+4! = 33,\\
&1!+2!+\ldots+5! = 153,\\
&1!+2!+\ldots+6! = 873,\\
&1!+2!+\ldots+7! = 5913.
\end{aligned}$$

Ни одно из чисел 33, 153, 873 и 5913 не является целой, отличной от единицы степенью никакого натурального числа. Таким образом, при нечетном z окончательно имеем лишь следующие решения:

$x = 1$, $y = 1$, $z =$ любое нечетное;

x — любое натуральное, $y = 1!+2!+\ldots+x!$, $z = 1$.

156. Пусть

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = 2^n.$$

Обозначим наибольшую степень двойки, на которую делятся все четыре числа a, b, c и d, через p. Сократив обе части нашего равенства на 2^{2p}, мы получим:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 = 2^{n-2p},$$

где из четырех чисел a_1, b_1, c_1, d_1, хотя бы одно является нечетным.

Если из четырех чисел a_1, b_1, c_1, d_1 только одно или три являются нечетными, то $a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2$ нечетно и наше равенство невозможно. Если из чисел a_1, b_1, c_1, d_1 два, например $a_1 = 2k+1$ и $b_1 = 2l+1$, являются нечетными, а остальные два, $c_1 = 2m$ и $d_1 = 2n$, четны, то мы имеем:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 = 4k^2+4k+1+4l^2+4l+1+4m^2+4n^2 = \\ = 2[2(k^2+k+l^2+l+m^2+n^2)+1],$$

что противоречит тому, что $a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 = 2^{n-2p}$ не имеет нечетных делителей (выражение в квадратных скобках не может равняться единице, так как в противном случае мы имели бы $k = l = m = n = 0$, $c_1 = d_1 = 0$ и $c = d = 0$). Если же все четыре числа $a_1 = 2k+1$, $b_1 = 2l+1$, $c_1 = 2m+1$, $d_1 = 2n+1$ нечетны, то мы имеем:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2 = 4k^2+4k+1+4l^2+4l+1+4m^2+4n_2 = \\ +4m+1+4n^2+4n+1 = \\ = 4[k(k+1)+l(l+1)+m(m+1)+n(n+1)+1].$$

Но произведение двух последовательных целых чисел всегда четно (один из сомножителей обязательно четен). Следовательно, выражение в квадратных скобках нечетно, и, значит, оно равно 1. Таким образом, $n-2p=2$, $n=2p+2$ и $k=l=m=n=0$, $a_1=b_1=c_1=d_1=1$, $a=b=c=d=2^p$.

Итак, если n есть число нечетное, то 2^n вовсе не разлагается на сумму четырех квадратов; если $n=2p$ четно, то 2^n допускает единственное разложение

$$2^{2p}=(2^{p-1})^2+(2^{p-1})^2+(2^{p-1})^2+(2^{p-1})^2.$$

157. а) Первое решение. Уравнение

$$x^2+y^2+z^2=2xyz$$

удовлетворяется значениями $x=0$, $y=0$, $z=0$. При этом если одно из чисел x, y, z равно 0, то и остальные должны быть равны 0, ибо сумма их квадратов в этом случае равна 0.

Пусть теперь все числа x, y, z, удовлетворяющие нашему уравнению, отличны от 0. Каждое из них можно представить в виде

$$x=2^\alpha x,\ y=2^\beta y_1,\ z=2^\gamma z_1,$$

где x_1, y_1, z_1 нечетны (если какое-нибудь из чисел x, y или z нечетно, то соответствующий показатель степени 2 равен 0).

Так как x, y, z входят в наше уравнение симметрично, то можно считать, что x делится на наименьшую степень 2, а z — на наибольшую, т. е что

$$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma.$$

Выясним, на какую степень 2 делится левая часть нашего равенства.

1°. Если $\alpha<\beta\leqslant\gamma$ или же $\alpha=\beta=\gamma$, то после вынесения за скобки $2^{2\alpha}$ в скобках будет стоять сумма нечетного и двух четных чисел или же сумма трех нечетных чисел, т. е. нечетное число.

2°. Если же $\alpha=\beta<\gamma$, то можно написать:

$$x=2^\alpha(2k+1),\quad y=2^\alpha(2l+1),\quad z=2^\alpha\cdot 2m.$$

В этом случае

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=2^{2\alpha}[(2k+1)^2+(2l+1)^2+(2m)^2]=\\&=2^{2\alpha}(4k^2+4k+1+4l^2+4l+1+4m^2)=\\&=2^{2\alpha+1}[2(k^2+k+l^2+l+m^2)+1],\end{aligned}$$

т. е. после вынесения за скобки $2^{2\alpha+1}$ в скобках остается нечетное число.

С другой стороны, правая часть равенства делится на $2^{\alpha+\beta+\gamma+1}$. Но правая часть равенства должна делиться на такую же степень 2, что и левая.

В случае 1° отсюда следует, что $2\alpha=\alpha+\beta+\gamma+1$. Так как $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$, то из этого равенства следует абсурдное неравенство $2\alpha\geqslant 3\alpha+1$.

В случае 2° отсюда следует, что $2\alpha+1=\alpha+\beta+\gamma+1$. Так как $\alpha=\beta<\gamma$, то отсюда следует неравенство $2\alpha+1>3\alpha+1$, которое также не может иметь места.

Следовательно, не существует решений в целых числах уравнения $x^2+y^2+z^2=2xyz$, отличных от решения $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Второе решение. Так как сумма квадратов чисел x, y и z четна, то либо все эти числа четны, либо одно из них четно, а два нечетны. Но в последнем случае сумма $x^2+y^2+z^2$ делилась бы только на 2, а произведение $2xyz$ — на 4 (сравните с первым решением задачи). Итак, мы можем считать, что x, y и z четны: $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$. Подставляя эти значения в наше исходное уравнение и сокращая на 4, получаем:

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4x_1y_1z_1.$$

Отсюда, в точности как выше, выводим, что числа x_1, y_1, z_1 — все четные. Но в таком случае, обозначив $x_1=2x_2$, $y_1=2y_2$, $z_1=2z_2$, мы для чисел $x_2=\frac{x_1}{2}=\frac{x}{4}$, $y_2=\frac{y}{4}$, $z_2=\frac{z}{4}$ получим уравнение

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2=8x_2y_2z_2,$$

откуда, как прежде, выводится, что эти числа тоже четные.

Продолжая тот же процесс, мы заключаем, что все числа

$$x,\ y,\ z;\ x_1=\frac{x}{2},\ y_1=\frac{y}{2},\ z_1=\frac{z}{2};\ x_2=\frac{x}{4},\ y_2=\frac{y}{4},\ z_2=\frac{z}{4};$$

$$x_3=\frac{x}{8},\ y_3=\frac{y}{8},\ z_3=\frac{z}{8};\ \ldots$$

$$\ldots;\ x_k=\frac{x}{2^k},\ y_k=\frac{y}{2^k},\ z_k=\frac{z}{2^k};\ \ldots$$

— четные (числа x_k, y_k, z_k должны удовлетворять уравнению $x_k^2+y_k^2+z_k^2=2^{k+1}x_ky_kz_k$). Но это возможно только в том случае, если $x=y=z=0$.

б) Так же, как и выше, доказывается, что единственным решением уравнения $x^2+y^2+z^2+v^2=2xyzv$ в целых числах является решение $x=0$, $y=0$, $z=0$, $v=0$.

Здесь специального рассмотрения заслуживает случай, когда наивысшие степени 2, на которые делятся x, y, z и v, одинаковы, т. е. когда

$$x=2^\alpha(2k+1),\ y=2^\alpha(2l+1),$$
$$z=2^\alpha(2m+1),\ v=2^\alpha(2n+1),$$

где α — целое неотрицательное число, а k, l, m и n — целые числа. Тогда

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+v^2&=2^{2\alpha}[(4k^2+4k+1)+(4l^2+4l+1)+\\&+(4m^2+4m+1)+(4n^2+4n+1)]=\\&=2^{2\alpha+2}(k^2+k+l^2+l+m^2+m+n^2+n+1)=\\&=2^{2\alpha+2}[k(k+1)+l(l+1)+m(m+1)+n(n+1)+1].\end{aligned}$$

Но выражение в квадратных скобках обязательно нечетно (см. выше, стр. 195). Поэтому наивысшая степень 2, на которую делится левая часть равенства, равна $2\alpha+2$. Правая же часть делится на $2^{4\alpha+1}$. Поэтому должно выполняться равенство $2\alpha+2=4\alpha+1$, что невозможно при целых α.

Второе решение задачи б) аналогично второму решению задачи а) и предоставляется читателю.

158. а) Пусть x, y, z — какие-то три целых положительных числа, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz. \qquad (*)$$

Покажем прежде всего, что всегда можно считать справедливыми неравенства

$$x \leqslant \frac{kyz}{2}, \ y \leqslant \frac{kxz}{2}, \ z \leqslant \frac{kxy}{2} \qquad (**)$$

(т. е., другими словами, что ни одно из слагаемых, стоящих в левой части уравнения (*), не превосходит половины правой части). Действительно, если бы было, например, $z > \frac{kxy}{2}$, то мы рассмотрели бы не числа x, y, z, а меньшие числа x, y и $z_1 = kxy - z$, которые, как нетрудно видеть, тоже удовлетворяют уравнению (*):

$$x^2 + y^2 + (kxy - z)^2 = kxy(kxy - z).$$

Если из этих новых чисел какое-нибудь опять будет больше произведения двух других, умноженного на $\frac{k}{2}$, то мы проведем снова аналогичную замену и так будем поступать до тех пор, пока не станут выполняться условия (**) (после этого наш процесс уже не приведет к уменьшению чисел x, y, z).

Будем считать, что $x \leqslant y \leqslant z$. Прежде всего из того, что $y \leqslant z \leqslant \frac{kxy}{2}$, следует

$$1 \geqslant \frac{kx}{2}; \ kx \geqslant 2.$$

Уравнение (*), очевидно, можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - z\right)^2 = \left(\frac{kxy}{2}\right)^2.$$

Так как $z \leqslant \frac{kxy}{2}$, , то при замене в левой части последнего равенства числа z на $y \leqslant z$ эта левая часть возрастает (или — в случае $y = z$ — не меняется); следовательно,

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - y\right)^2 \geqslant \frac{k^2x^2y^2}{4}.$$

Отсюда, раскрывая скобки, получаем:

$$x^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2.$$

Так как по условию $x \leqslant y$, то тем более

$$y^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2,$$

т. е.

$$kx \leqslant 3.$$

Таким образом, мы имеем $2 \leqslant kx \leqslant 3$, т. е. kx равно 2 или 3. Но если $kx = 2$, то уравнение (*) принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2yz, \quad \text{или} \quad x^2 + (y - z)^2 = 0,$$

откуда $x = 0$ и $kx = 0$, а не 2. Следовательно, $kx = 3$ и, значит, k может равняться только 1 или 3. Нетрудно убедиться на простых примерах, что эти значения k являются возможными (см. решение задачи б)).

б) Продолжим рассуждения, которые привели к решению задачи а). Выше мы имели $x^2 + 2y^2 \geqslant kxy^2$; так как $kx = 3$, то это неравенство можно переписать в виде

$$x^2 + 2y^2 \geqslant 3y^2, \quad \text{или} \quad x^2 \geqslant y^2.$$

Но мы предполагали, что $x \leqslant y$; следовательно, $x = y$. Полагая теперь в основном уравнении (*) $x = y$, $kx = 3$, мы получим:

$$2x^2 + z^2 = 3xz, \quad \text{или} \quad (z - x)(z - 2x) = 0.$$

Таким образом, $z = x$ или $z = 2x$. Но так как $z \leqslant \frac{kxy}{2} = \frac{3y}{2} = \frac{3x}{2}$, то z не может равняться $2x$; следовательно, $z = x$.

Итак, мы видим, что если только выполняются условия (**), то должно быть $x = y = z$. Но так как $kx = 3$, то x может быть равно только 1 или 3. Соответственно этому получаем два решения уравнения (*):

$$x = y = z = 1 \qquad (k = 3)$$

и

$$x = y = z = 3 \qquad (k = 1).$$

В решении задачи а) мы видели, что всякую тройку чисел x, y, z, удовлетворяющих уравнению (*), можно последовательными подстановками вида $z_1 = kxy - z$ привести к тройке чисел, удовлетворяющих неравенствам (**). Но если $z_1 = kxy - z$, то $z = kxy - z_1$; поэтому каждое решение уравнения (*) можно получить из выписанных выше наименьших решений последовательными подстановками вида $z_1 = kxy - z$. В частности, таким образом, получаем следующие решения уравнения (*), не превосходящие 1000:

1°. Случай $k = 3$.

$x =$	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	5	5
$y =$	1	1	2	5	13	34	89	233	5	29	169	13	29
$z =$	1	2	5	13	34	89	233	610	29	169	985	194	433

2°. Случай $k = 1$.

$x =$	3	3	3	3	3	3	3	6	6	15
$y =$	3	3	6	15	39	102	267	15	87	39
$z =$	3	6	15	39	102	267	699	87	507	582

(то, что решения, отвечающие значению $k = 1$, получаются из решений, отвечающие значению $k = 3$, простым умножением чисел x, y и z на 3, сразу следует из того, что так связаны между собой **наименьшие** решения уравнений $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$).

159. Из равенства $x^3 = 2(y^3 + 2z^3)$ (где x, y, z — целые) следует, что $x = 2x_1$ — четное, что позволяет переписать наше уравнение так:

$$8x_1^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0, \text{ или } 4x_1^3 - y^3 - 2z^3 = 0.$$

Так как $y^3 = 2\left(2x_1^3 - z^3\right)$, то $y = 2y_1$ — четное; поэтому имеем

$$4x_1^3 - 8y_1^3 - 2z^3 = 0, \quad \text{или } 2x_1^3 - 4y_1^3 - z^3 = 0.$$

Наконец, поскольку $z^3 = 2\left(x_1^3 - 2y_1^3\right)$, то и $z = 2z_1$ — четное, и мы получаем

$$2x_1^3 - 4y_1^3 - 8z_1^3 = 0, \quad \text{или } x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0.$$

Таким образом, если x, y, z — решение исходного уравнения, то все эти три числа — четные, причем их половины $x_1 = \frac{x}{2}$, $y_1 = \frac{y}{2}$, $z_1 = \frac{z}{2}$ удовлетворяют точно такому же уравнению:

$$x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0.$$

Отсюда следует, что и числа $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$ — четные, причем и числа x_2, y_2, z_2 удовлетворяют исходному уравнению, т. е. и они являются четными, и т. д. Окончательно мы заключаем, что целые числа x, y, z делятся на *любую* степень двойки, что, разумеется, возможно лишь в том случае, когда все они равны нулю. Итак, единственное решение исходного уравнения в целых числах имеет вид

$$x = y = z = 0.$$

160. Дополним левую часть уравнения до полного квадрата, для чего достаточно умножить обе части уравнения на 4 и прибавить к ним по 1:

$$(2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1.$$

Но

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (4y^4 + 4y^3 + y^2) + (3y^2 + 4y + 1) =$$
$$= (2y^2 + y)^2 + (3y^2 + 4y + 1) \ \left(= (P(y))^2 + Q(y)\right);$$

а так как квадратный трехчлен $Q(y) = 3y^2 + 4y + 1$ имеет (вещественные) корни $y_1 = -1$ и $y_2 = -\frac{1}{3}$, то при всех целых y, отличных от $y = -1$, этот трехчлен положителен (см. график функции $t = 3y^2 + 4y + 1$ на рис. 16, *а*), и, значит, $(2x+1)^2 > (P(y))^2 = (2y^2 + y)^2$.

С другой стороны, мы имеем

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 =$$
$$= (2y^2 + y + 1)^2 + (2y - y^2) \ \left(= (P_1(y))^2 + Q_1(y)\right).$$

Но график функции $Q_1(y) = 2y - y^2$ имеет изображенный на рис. 16, *б* вид (корни квадратного двучлена $Q_1(y)$ равны 0 и 2), и, значит, при всех целых y, отличных от 0, 1 и 2, имеем $Q_1(y) < 0$, откуда $(2x+1)^2 < (P_1(y))^2 = (2y^2+y+1)^2$.

Таким образом, при всех целых $y \neq -1$, 0, 1 и 2 имеет место двойное неравенство

$$(2y^2+y+1)^2 > (2x+1)^2 > (2y^2+y)^2,$$

т. е. при таких y величина $(2x+1)^2$ заключена между квадратами

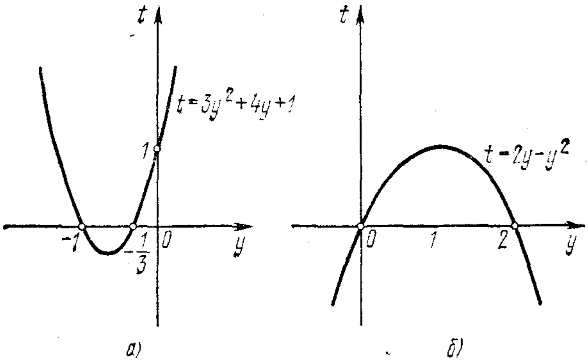


Рис. 16.

двух последовательных целых чисел $Q(y)$ и $Q_1(y)$, и поэтому число $2x+1$ не может быть целым.

Итак, если y — целое число, то x может быть целым лишь при $y=-1$, 0, 1 и 2, т. е. когда правая часть исходного уравнения равна 0, 0, 4 и 30. Нам осталось только решить 3 квадратных уравнения

$$x^2+x=c, \text{ где } c=0, 4 \text{ или } 30. \qquad (*)$$

Целые корни этих уравнений таковы:

$$x=0 \text{ или } -1 \text{ (при } c=0); \ x=5 \text{ или } -6 \text{ (при } c=30;$$
$$\text{при } c=4 \text{ уравнение } (*) \text{ целых корней не имеет).}$$

Таким образом, окончательно получаем следующий набор решений заданного уравнения в целых числах (здесь запись (a, b) означает, что $x=a$, $y=b$):

$$(0, -1), (-1, -1); (0, 0), (-1, 0); (5, 2), (-6, 2)$$

(всего 6 решений).

161. При $y=1$ мы приходим к квадратному уравнению

$$x^2+(x+1)^2=(x+2)^2, \quad \text{или} \quad x^2-2x-3=0,$$

имеющему единственный целый положительный корень $x=3$ (второй корень уравнения $x=-1$ отрицателен). Пусть теперь $y>1$. Заметим, что поскольку x^{2y} и $(x+2)^{2y}$ — числа одинаковой четности, то число $(x+1)^{2y}$ $[=(x+2)^{2y}-x^{2y}]$ будет четным; поэтому и число $x+1=2x_1$ — четное. Далее мы имеем

$$(2x_1)^{2y}=(x+1)^{2y}=(x+2)^{2y}-x^{2y}=$$
$$=(2x_1+1)^{2y}-(2x_1-1)^{2y}. \qquad (*)$$

Раскрыв скобки в стоящих справа выражениях с помощью формулы бинома Ньютона, получаем:

$$(2x_1)^{2y}=2\left[C_{2y}^1(2x_1)^{2y-1}+C_{2y}^3(2x_1)^{2y-3}+\ldots+C_{2y}^1(2x_1)\right],$$

что, уединяя в левую часть последний член правой части равенства, можно переписать еще и так:

$$2\cdot 2y\cdot 2x_1=$$
$$=(2x_1)^{2y}-2\cdot 2y\,(2x_1)^{2y-1}-2\cdot C_{2y}^3\,(2x_1)^{2y-3}-\ldots-2\cdot C_{2y}^3\,(2x_1)^3$$

(заметьте, что поскольку $y\geqslant 2$, то $2y\geqslant 4$). Но все стоящие справа члены, очевидно, делятся на $(2x_1)^3$, откуда вытекает, что *y должно делиться на* x_1^2.

Далее, разделив обе части равенства (*) на $(2x_1)^{2y}$, получим:

$$1=\left(1+\frac{1}{2x_1}\right)^{2y}-\left(1-\frac{1}{2x_1}\right)^{2y},$$

откуда следует, что $\left(1+\frac{1}{2x_1}\right)^{2y}=1+\left(1-\frac{1}{2x_1}\right)^{2y}<2$. Но, с другой стороны, в силу той же формулы бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{2x_1}\right)^{2y}=1+2y\cdot\frac{1}{2x_1}+C_{2y}^2\left(\frac{1}{2x_1}\right)^2+\ldots=$$
$$=1+\frac{y}{x_1}+\ldots>1+\frac{y}{x_1}$$

и, значит,

$$1+\frac{y}{x_1}<2,\text{ или }\frac{y}{x_1}<1,\text{ откуда }y<x_1,$$

что, однако, противоречит делимости y на x_1^3. Поэтому наше уравнение не имеет таких решений, что $y>1$ и все решения уравнения исчерпываются одним найденным выше: $y=1$, $x=3$.

162. Обозначим $\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}}_{y\text{ корней}}$ через $A_y(x)$; в таком случае, очевидно,

$$x+A_{y-1}(x)=x+\underbrace{\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x}}}_{y-1\text{ корней}}=z^2,\quad\text{или } A_{y-1}(x)=z^2-x$$

Таким образом, если число $A_y(x)=z$ — целое, то и число $A_{y-1}(x)$ $(=z^2-x)$ — целое; но тогда и число $A_{y-2}(x)$ $(=(z^2-x)^2-x)$ — тоже целое, и $A_{y-3}(x)$ — целое, ..., и $A_1(x)=\sqrt{x}$ — целое. А из того, что $\sqrt{x}=t$ — целое, следует, что $x=t^2$ (где t — целое).

Ясно, что для любого целого t значения $x = t^2$, $y = 1$, $z = t$ являются решениями нашего уравнения. Пусть теперь $y > 1$. При этом числа

$$A_1(x) = \sqrt{x} = t \text{ и } A_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{t^2 + t} = \sqrt{t(t+1)}$$

должны быть целыми; но числа t и $t+1$ — взаимно простые, откуда следует, что произведение $t(t+1)$ может быть полным квадратом, лишь если и t, и $t+1$ — полные квадраты, т. е. если $t = 0$. А если $t = 0$, то, очевидно, $x = 0$ и $A_y(x) = 0$ при любом x.

Таким образом, все решения рассматриваемого уравнения таковы: $x = t^2$, $y = 1$ и $z = t$ (где t — любое целое число; если корни понимаются в арифметическом смысле, то t следует считать натуральным числом), и $x = 0$, $y = t$ — произвольное натуральное число, $z = 0$.

163. Воспользуемся методом доказательства от противного: предположим, что выписанное в условии задачи уравнение имеет решения в целых x и y лишь для конечного числа простых значений p и что *наибольшим* из них является n-е простое число p_n. Составим теперь число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot p_n = x$ и рассмотрим выражение $X = x^2 + x + 1$. Так как число $X - 1 = x^2 + x = x(x+1)$ делится на все простые числа $2, 3, 5, \ldots, p_n$, то число X не может делиться ни на одно из них; поэтому число X имеет больший p_n простой делитель P, т. е. $X = Py$, где y — некоторое натуральное число. (Здесь не исключен, разумеется, случай $P = X$, $y = 1$.) Таким образом, для $p = P$ наше уравнение имеет решение x, y в целых числах, что противоречит предположению о том, что p_n — наибольшее простое значение коэффициента p, при котором такое решение существует. Полученное предположение и доказывает утверждение задачи.

Примечание. Очевидна близость этого рассуждения к известному доказательству теоремы о существовании бесконечного числа простых чисел (см. решение задачи 349).

164. Задача состоит в том, чтобы решить в целых положительных числах следующую систему уравнений (x, y, z и u — искомые числа):

$$\begin{aligned} x^2 + y + z + u &= (x+v)^2, \\ y^2 + x + z + u &= (y+w)^2, \\ z^2 + x + y + u &= (z+t)^2, \\ u^2 + x + y + z &= (u+s)^2, \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} y + z + u &= 2vx + v^2, \\ x + z + u &= 2wy + w^2, \\ x + y + u &= 2tz + t^2, \\ x + y + z &= 2su + s^2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Сложив все уравнения (*), получим:

$$(2v-3)x+(2w-3)y+(2t-3)z+(2s-3)u+v^2+$$
$$+w^2+t^2+s^2=0. \qquad (**)$$

Отметим прежде всего, что из равенства (**) следует, что хотя бы одно из чисел $2v-3$, $2w-3$, $2t-3$, $2s-3$ отрицательно, — иначе мы имели бы в левой части этого равенства сумму положительных чисел. Предположим, например, что $2v-3<0$. Это возможно только в том случае, если $v=0$ или $v=1$. В первом случае первое уравнение системы (*) сразу дает $y+z+u=0$, что невозможно, если y, z, u положительны. Поэтому надо считать, что все числа v, w, t, s положительны и $v=1$. В таком случае равенство (**) перепишется в виде

$$x=(2w-3)y+(2t-3)z+(2s-3)u+w^2+t^2+s^2+1. \qquad (***)$$

Рассмотрим теперь разные возможные случаи.

1°. Числа x, y, z, u все попарно различны. В этом случае и числа v, w, t, s все попарно различны; действительно, считая, например, что $v=w$, мы получим, вычитая друг из друга первые два равенства (*), $y-x=2v(x-y)$, что невозможно при v положительном и $x\neq y$. Далее, первое из равенств (*) в предположении $v=1$ дает $2x=y+z+u-1$, $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}$, что несовместимо с равенством (***), где коэффициенты при y, z и u в правой части — целые положительные (ибо w, t, s не могут быть равны 1, так как они не равны v, а $v=1$). Итак, этот случай является невозможным.

2°. Два из чисел x, y, z, u равны между собой; остальные различны. Здесь надо отдельно рассмотреть два подслучая.

А) $z=u$. В этом случае $t=s$. Равенство (***) и первое уравнение (*) здесь принимают вид

$$x=(2w-3)y+2(2t-3)z+w^2+2t^2+1;$$

$$2x=y+2z-1;$$

эти равенства по-прежнему несовместимы.

Б) $x=y$. Здесь $w=v=1$. Равенство (**) и первое из равенств (*) в этом случае соответственно имеют вид

$$2x=(2t-3)z+(2s-3)u+t^2+s^2+2$$

и

$$x=z+u-1.$$

Подставляя второе из этих равенств в первое, получим:

$$(2t-5)z+(2s-5)u+t^2+s^2+4=0, \qquad (***)$$

откуда следует, что хотя бы одно из двух чисел $2t-5$, $2s-5$ должно быть отрицательным. Пусть $2t-5<0$; так как $t>0$ и $t\neq1$ (ибо $v=1$; $t\neq v$, так как $z\neq x$), то, следовательно, $t=2$.

Теперь, прибавляя к третьему уравнению (*) удвоенное первое уравнение, находим $4z + 4x + 6 = 4x + 2z + 3u$, т. е. $z = \frac{3}{2}u - 3$.

Полагая в уравнении (****) $t = 2$, $z = \frac{3}{2}u - 3$, получим:

$$(4s - 13)u + 2s^2 + 22 = 0.$$

Отсюда ясно, что $4s - 13 < 0$. Так как $s > 0$, $s \neq 1$, $s \neq 2$, то, очевидно, $s = 3$. Подставляя все эти значения в уравнения (*), получаем систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными:

$$x + z + u = 2x + 1,$$
$$2x + u = 4z + 4,$$
$$2x + z = 6u + 9,$$

из которой без труда находим $x (= y) = 96$, $z = 57$, $u = 40$.

3°. Среди чисел x, y, z, u имеются две пары попарно равных. Пусть, например, $x = y$, $z = u$. В таком случае первое уравнение (*) дает $x = 2z - 1$; подставляя этот результат в уравнение (**):

$$x = (2t - 3)z + t^2 + 1,$$

находим:

$$(2t - 5)z + t^2 + 2 = 0.$$

Отсюда следует, что $2t - 5 < 0$, или так как $t > 0$, $t \neq 1$, то $t = 2$. Теперь уравнения (*) принимают вид

$$x + 2z = 2x + 1,$$
$$2x + z = 4z + 4,$$

откуда $x (= y) = 11$, $z (= u) = 6$.

4°. Три из чисел x, y, z, u равны между собой. Здесь тоже приходится отдельно рассматривать два подслучая.

А) $y = z = u$. В этом случае уравнение (***) и первое уравнение (*) принимают вид

$$x = 3(2w - 3)y + 3w^2 + 1; \quad 2x = 3y - 1$$

и, очевидно, являются несовместимыми.

Б) $x = y = z$. Первое уравнение (*) дает в рассматриваемом случае

$$2x + u = 2x + 1,$$

откуда $u = 1$; последнее уравнение (*) дает

$$3x = 2su + s^2 = 2s + s^2; \ x = \frac{s(s+2)}{3}.$$

Но x — целое число; следовательно, или s или $s + 2$ должно делиться на 3, т. е. $s = 3k$, $x = k(3k + 2)$, или $s = 3k - 2$, $x = (3k - 2)k$; здесь k — произвольное целое число.

5°. Все числа x, y, z, u равны между собой. В этом случае первое уравнение (*) сразу дает $3x = 2x + 1$, $x = 1$.

Итак, мы получаем следующие решения задачи:

$$x = y = 96,\ z = 57,\ u = 40;\ x = y = 11,\ z = u = 6;$$

$$x = y = z = k(3k \pm 2),\ u = 1;\ x = y = z = u = 1$$

(случай $k = 1$ и знака «—» в предшествующих формулах).

165. Обозначая искомые числа через x и y, имеем:

$$x + y = xy,$$

или

$$xy - x - y + 1 = 1,$$

$$(x-1)(y-1) = 1.$$

Но так как единицу можно только двумя способами разложить в произведение целых множителей, то сразу получаем:

$$x - 1 = 1,\ y - 1 = 1;\ x = 2,\ y = 2,$$

или

$$x - 1 = -1,\ y - 1 = -1;\ x = 0,\ y = 0.$$

166. Прежде всего устанавливаем, что хотя бы одно из трех чисел x, y, и z, таких, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1,$$

должно быть меньше 4: если бы все эти числа были $\geqslant 4$, то сумма $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ была бы $\leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Таким образом, если считать, что $x \leqslant y \leqslant z$, то для x остаются возможными только два значения: $x = 2$ и $x = 3$ (ибо $x > 1$). Рассмотрим эти две возможности в отдельности.

1) $x = 2$; тогда $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$. Приведя дроби к общему знаменателю и отбросив знаменатель, получим:

$$yz - 2y - 2z = 0, \quad yz - 2y - 2z + 4 = 4,$$

или

$$(y-2)(z-2) = 4.$$

Так как y и z больше 1, то $y - 2$ и $z - 2$ не могут быть отрицательными и возможны только следующие случаи:

А) $y - 2 = 2,\ z - 2 = 2;\ y = 4,\ z = 4.$

Б) $y - 2 = 1,\ z - 2 = 4;\ y = 3,\ z = 6.$

2) $x = 3$; тогда $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$, или

$$2yz - 3y - 3z = 0, \quad 4yz - 6y - 6z + 9 = 9, \quad (2y-3)(2z-3) = 9.$$

Так как $y \geqslant x = 3$, $2y - 3 \geqslant 3$, $2z - 3 \geqslant 3$, то возможен только один случай:

$$2y - 3 = 3,\ 2z - 3 = 3;\quad y = 3,\ z = 3.$$

Таким образом, все решения задачи даются следующими равенствами:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1;\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

167. а) Из уравнения, очевидно, следует, что $x, y > n$; положим $x = n + x_1$, $y = n + y_1$. В таком случае наше уравнение преобразуется так:

$$\frac{1}{n+x_1} + \frac{1}{n+y_1} = \frac{1}{n}, \text{ или } (n^2 + nx_1) + (n^2 + ny_1) =$$
$$= n^2 + nx_1 + ny_1 + x_1y_1, \text{ т. е. } x_1y_1 = n^2. \quad (*)$$

Но ясно, что при *n простом* равенство (*) допускает лишь три решения в натуральных числах x_1, y_1, а именно, $(x_1, y_1) = (n, n)$, или $(1, n^2)$, или $(n^2, 1)$, что приводит к трем решениям исходного уравнения:

$$(x, y) = (2n, 2n),\ (n+1,\ n(n+1)),\ (n(n+1),\ n+1). \quad (**)$$

Если же $n = ab$ — составное, то возможно также, скажем, решение $(x_1, y_1) = (a^2, b^2)$, что дает отличные от (**) значения x и y.

б) Если $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$, то, избавляясь от знаменателя дроби, мы получим:

$$nx + ny = xy,$$

что равносильно

$$(x - n)(y - n) = n^2$$

(ср. с решением задачи а)). Последнее уравнение имеет $2\nu - 1$ решений в целых числах, где ν есть число делителей числа n^2 (включая 1 и само число n^2): для того чтобы получить все эти решения, надо выписать 2ν возможных систем вида $x - n = d$, $y - n = \frac{n^2}{d}$ и $x - n = -d$, $y - n = -\frac{n^2}{d}$ (где d есть делитель числа n^2), кроме системы $x - n = -n$, $y - n = -n$, которая приводит к абсурдному в условиях данной задачи результату: $x = 0$, $y = 0$.

Если $n = 14$, то $n^2 = 196$ и делители числа $n^2 = 196$ имеют вид:

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 14,\ 28,\ 49,\ 98,\ 196.$$

Соответственно этому мы получаем следующие 17 решений нашего уравнения:

x	15	16	18	21	28	42	63	112	210	13	12
y	210	112	63	42	28	21	18	16	15	−182	−84

x	10	7	−14	−35	−84	−182
y	−35	−14	7	10	12	13

в) Заданное уравнение можно привести к виду

$$(x - z)(y - z) = z^2 \quad (*)$$

(см. решение задачи а)). Пусть теперь t есть общий наибольший делитель трех чисел x, y и z, т. е. $x = x_1t$, $y = y_1t$, $z = z_1t$, где x_1, y_1 и z_1 взаимно просты. Далее обозначим через m общий наибольший делитель чисел x_1 и z_1 и через n — общий наибольший делитель чисел y_1 и z_1, т. е. положим $x_1 = mx_2$, $z_1 = mz_2$; $y_1 = ny_2$, $z_1 = zn_2$, где x_2 и z_2, y_2 и z_2 взаимно просты. Числа m и n взаимно просты, ибо x_1, y_1 и z_1 взаимно просты. Так как z_1 делится и на m, и на n, то можем положить $z_1 = mnp$.

Подставим теперь в основное уравнение (*) $x = mx_2t$, $y = ny_2t$, $z = mnpt$. По сокращении на mnt^2 будем иметь:

$$(x_2 - np)(y_2 - mp) = mnp^2. \qquad (**)$$

Но x_2 взаимно просто с p, ибо m есть общий наибольший делитель чисел $x_1 = mx_2$ и $z_1 = mnp$; аналогично y_2 взаимно просто с p. По раскрытии же скобок в уравнении (**) мы получаем, что $x_2y_2 = x_2mp + y_2np$ делится на p. Отсюда следует, что $p = 1$, и наше уравнение принимает вид

$$(x_2 - n)(y_2 - m) = mn.$$

x_2 взаимно просто с n, ибо три числа $x_1 = mx_2$, $y_1 = ny_2$ и $z_1 = mn$ взаимно просты. Следовательно, $x_2 - n$ взаимно просто с n, а следовательно, $y_2 - m$ делится на n. Аналогично $x_2 - n$ делится на m. Таким образом, $x_2 - n = \pm m$, $y_2 - m = \pm n$; $x_2 = \pm y_2 = \pm m + n$ и, следовательно,

$$x = m(m+n)t,\ y = \pm n(m+n)t,\ z = mnt,$$

где m, n, t — произвольные целые числа.

168. а) Из равенства $x^y = y^x$ видно, что простые делители чисел x и y — одни и те же:

$$x = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n},\ y = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_n^{\beta_n},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — простые числа. Тогда, ввиду нашего равенства,

$$\alpha_1 y = \beta_1 x,\ \alpha_2 y = \beta_2 x,\ \ldots,\ \alpha_n y = \beta_n x.$$

Будем считать, что $y > x$; тогда из написанных равенств следует, что

$$\alpha_1 < \beta_1,\ \alpha_2 < \beta_2, \ldots, \alpha_n < \beta_n.$$

Следовательно, y делится на x, $y = kx$, где k — целое. Подставим это значение y в наше равенство:

$$x^{kx} = (kx)^x.$$

Отсюда, извлекая корень x-й степени, получим:

$$x^k = kx, \text{ или } x^{k-1} = k.$$

Так как $y > x$, то $k > 1$, откуда $x > 1$. Но легко видеть, что $2^{2-1} = 2$, а при $x > 2$ или $k > 2$ всегда $x^{k-1} > k$. Действительно, при $k > 2$, $x \geqslant 2$

$$x^{k-1} \geqslant 2^{k-1} > k,$$

так как уже $2^{3-1} > 3$, а при $k = 2$, $x > 2$

$$x^{k-1} = x > 2 = k.$$

Поэтому единственным решением нашего уравнения в целых положительных числах будет $x = 2$, $k = 2$, $y = kx = 4$.

б) Обозначим отношение $\dfrac{y}{x}$ через k, тогда $y = kx$. Подставляя это выражение для y в наше уравнение, получим:

$$x^{kx} = (kx)^x,$$

или, извлекая из обеих частей корень степени x и затем деля на x,

$$x^{k-1} = k,$$

откуда

$$x = k^{\frac{1}{k-1}}, \quad y = kk^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}.$$

Пусть рациональное число $\frac{1}{k-1}$ равно несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Подставляя это выражение для $\frac{1}{k-1}$ в наши формулы, получим:

$$k-1 = \frac{q}{p}, \ k = 1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p}, \ \frac{k}{k-1} = \frac{p+q}{q};$$

$$x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}, \ y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}.$$

Так как p и q взаимно просты, то, для того чтобы x и y были рациональными числами, нобходимо, очевидно, чтобы из целых чисел p и $p+q$ можно было извлечь корень степени q. Но так как при $q \geqslant 2$ и $p = n^q$ будет иметь место неравенство

$$n^q < p + q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2} n^{q-2} + \ldots,$$

то это возможно только при $q = 1$.

Итак, все положительные рациональные числа, удовлетворяющие нашему уравнению, даются формулой

$$x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p}, \ y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1},$$

где p — произвольное целое число (кроме 0 и -1).

169. Пусть n — число восьмиклассников, m — число очков, набранных каждым из них. В таком случае число очков, набранных всеми участниками турнира, равно $mn + 8$. Это число равно числу сыгранных партий. Так как участников турнира $n+2$ и каждый играл по одному разу с каждым из $n+1$ остальных, то ими всего было сыграно $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ партий (в произведении $(n+2)(n+1)$ каждая партия учитывается 2 раза). Таким образом, мы получаем:

$$mn + 8 = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

или, после несложных преобразований,

$$n(n + 3 - 2m) = 14.$$

Здесь n — целое число; число в скобках — также целое (ибо m — либо целое, либо дробь с знаменателем 2).

Так как n — делитель 14, то n может быть равно одному из чисел 1, 2, 7, 14. Значения $n = 1$ и $n = 2$ мы должны отбросить, так как в этом случае общее число участников не превышает 4 и два семиклассника не могли бы набрать вдвоем 8 очков.

Остается $n = 7$ и $n = 14$.

Если $n = 7$, то $7(7 + 3 - 2m) = 14$; $m = 4$.

Если $n = 14$, то $14(14 + 3 - 2m) = 14$; $m = 8$.

170. Пусть девятиклассников было n и набрали они m очков. Тогда десятиклассников было $10n$ и набрали они $4{,}5m$ очков. Всех же участников турнира было $11n$ и набрали они $5{,}5m$ очков.

Общее число набранных всеми очков равно числу сыгранных партий. Партий сыграно было $\frac{11n(11n-1)}{2}$. Отсюда

$$5{,}5m = \frac{11n(11n-1)}{2}$$

и, следовательно,

$$m = n(11n-1).$$

Каждый девятиклассник сыграл $11n - 1$ партий (ибо число участников турнира равно $11n$), а потому n девятиклассников могли набрать $n(11n-1)$ очков только в случае, если каждый из них выиграл все партии. Это возможно лишь при $n = 1$ (так как два девятиклассника не могут одновременно выиграть друг у друга). Итак, получаем единственное решение $n = 1$, $m = 10$.

171. По условию задачи имеем:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p,$$

где a, b, c — целые числа и $p = \frac{a+b+c}{2}$. Обозначим $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$; тогда будем иметь:

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z),$$

или, возведя обе части равенства в квадрат,

$$xyz = 4(x+y+z).$$

Здесь x, y и z — или целые положительные числа, или же половины нечетных целых чисел. Но второй случай невозможен, так как тогда слева у нас стояло бы дробное число, а справа — целое. Итак, x, y и z — целые.

Пусть теперь $x \geqslant y \geqslant z$. Из нашего уравнения найдем, что

$$x = \frac{4y+4z}{yz-4};$$

следовательно, мы будем иметь:

$$\frac{4y+4z}{yz-4} \geqslant y.$$

Последнее неравенство можно умножить на $yz - 4$ (ясно, что $yz - 4 > 0$, ибо иначе x было бы отрицательным) и рассматривать как квадратное неравенство относительно y:

$$y^2z - 8y - 4z \leqslant 0, \text{ т. е. } (y - y_1)(y - y_2) \leqslant 0, \qquad (*)$$

где y_1 и y_2 — корни уравнения $zy^2 - 8y - 4z = 0$, зависящие, разумеется, от z:

$$y_1 = \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}, \quad y_2 = \frac{4-\sqrt{16+4z^2}}{z}.$$

Но y_2 отрицательно и, значит, всегда $y - y_2 > 0$ (ибо y положительно); следовательно, для того чтобы выполнялось неравенство (*), надо чтобы было

$$y - y_1 \leqslant 0, \quad y \leqslant \frac{4+\sqrt{16+4z^2}}{z}.$$

Итак, имеем $yz \leqslant 4+\sqrt{16+4z^2}$ откуда и подавно $z^2 - 4 \leqslant \leqslant \sqrt{16+4z^2}$ (ибо $z \leqslant y$). Возведя обе части в квадрат, получим:

$$z^4 - 8z^2 + 16 \leqslant 16 + 4z^2; \quad z^4 \leqslant 12z^2,$$

что, очевидно, выполняется только при $z \leqslant 3$.

Рассмотрим теперь ряд возможных случаев.

1°. $z = 1$, $y \leqslant \dfrac{4+\sqrt{16+4}}{1} < 9$; $\quad x = \dfrac{4y+4z}{yz-4} = \dfrac{4y+4}{y-4}$ будет целым положительным только, если $y = 5$ (в этом случае $x = 24$), $y = 6$ (в этом случае $x = 14$), $y = 8$ (в этом случае $x = 9$).

2°. $z = 2$, $\quad y \leqslant \dfrac{4+\sqrt{16+4\cdot 4}}{2} < 5$; $\quad x = \dfrac{4y+4z}{yz-4} = \dfrac{4y+8}{2y-4} = \dfrac{2y+4}{y-2}$ будет целым и не меньшим y только, если $y = 3$ (в этом случае $x = 10$) и $y = 4$ (в этом случае $x = 6$).

3°. $z = 3$, $y \leqslant \dfrac{4+\sqrt{16+4\cdot 9}}{3} < 4$. При $z = y = 3$ $x = \dfrac{4y+4z}{yz-4}$ не будет целым.

Итак, мы получили следующие пять решений задачи:

x	y	z	$x+y+z=p$	a	b	c
24	5	1	30	6	25	29
14	6	1	21	7	15	20
9	8	1	18	9	10	17
10	3	2	15	5	12	13
6	4	2	12	6	8	10

172. Первую строку таблицы можно переписать так: $0+1$, $0+2, \ldots, 0+n$; последний столбец запишем в виде: $0+n$, $n+n$, $2n+n, \ldots, (n-1)n+n$. Каждое число таблицы представлено теперь в виде суммы двух чисел, причем первое слагаемое одинаково у всех чисел, стоящих в одной строке, а второе — у всех чисел одного столбца. Так как среди выбранных чисел будет по одному слагаемому из каждого столбца и по одному слагаемому из каждой строки, то сумма всех первых слагаемых выбранных чисел равна

$$0+n+2n+\ldots+(n-1)n=\frac{n^2(n-1)}{2},$$

а сумма вторых слагаемых —

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом, общая сумма S всех отобранных чисел равна

$$S=\frac{n(n^2-n)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

173. Пусть n нечетно. Если наша таблица симметрична относительно указанной в условии диагонали (эту диагональ мы будем называть «главной» и обозначать буквой d), то каждому числу, расположенному сверху от d, будет отвечать равное ему число, расположенное снизу от d: это число занимает место, симметричное относительно d месту, на котором стоит первое число. Отсюда следует, что совокупность всех расположенных сверху от d чисел совпадает с совокупностью чисел, расположенных снизу от d; поэтому, в совокупности всех не принадлежащих диагонали d чисел нашей таблицы любое число k встречается четное число a_k раз (возможно, что $a_k=0$). А так как в каждой из n строк таблицы каждое число k встречается точно один раз (ибо n мест этой строки занимают n чисел $1, 2, \ldots, n$), то всего число k встречается в нашей таблице нечетное число n раз; поэтому на диагонали d число k встретится нечетное число $n-a_k$ раз. Отсюда следует, что каждое число k (где $1\leqslant k\leqslant n$) хотя бы раз встретится на диагонали d (ибо нуль — число четное), а так как эта диагональ содержит всего n чисел, то каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встретится на ней ровно один раз. [Отсюда, в частности, вытекает, что $a_1=a_2=\ldots=a_n=n-1$.]

Пример таблицы $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ показывает, что при n четном сформулированное утверждение *может не выполняться*; близкие к приведенным выше рассуждения показывают, что при n четном оно даже *не может выполняться* (ибо в этом случае каждое число k встретится на главной диагонали d четное число $n-a_k$ раз).

174. Условимся обозначать число, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы, через a_{ij}; в таком случае $a_{ij}=1, \ldots, n^2$, где $i, j=1, \ldots, n$. Пусть теперь $1=a_{j_1j_2}$; тогда по условию задачи $2=a_{j_2j_3}$, $3=a_{j_3j_4}$, и т. д. — вплоть до $n^2=a_{j_{n^2}j_{n^2+1}}$. При этом числа $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_{n^2+1}$ разумеется, не все различны: ведь они могут иметь лишь n различных значений $1, 2, \ldots, n$. Заметим, что каждое конкретное значение k встречается в ряду чисел $j_1, j_2, j_2, j_3, j_3, \ldots, j_{n^2}, j_{n^2}, j_{n^2+1}$ ровно $2n$ раз, поскольку наша таблица содержит n чисел в k-й строке и n чисел в k-м столбце. А так как «внутри» цепочки $j_1, j_2, j_2, j_3, \ldots, j_{n^2}, j_{n^2+1}$ (т. е. не на первом и не на последнем месте) каждое число повторяется дважды, то из того, что значение j_1 должно входить в цепочку четное число $2n$ раз, следует, что

$j_{n^2+1} = j_1$ — наша цепочка обязательно завершается тем же числом j_1, которым она начиналась.

Таким образом, задача требует оценить разность между суммой чисел j_1-й строки таблицы и суммой чисел j_1-го ее столбца — столбца, номер которого совпадает с номером рассматриваемой строки. Но, в силу правила образования таблицы, если $a_{jj_1} = s$ (где $j \neq j_{n^2}$ и, следовательно, пара (j, j_1) не является в нашей цепочке последней, т. е. $s \neq n^2$), то $s + 1 = a_{j_1 j_2}$! другими словами, *каждому отличному от n^2 числу s из j_1-го столбца отвечает в j_1-й строке число $s+1$*. При этом полученные таким путем числа $s + 1 = a_{j_1 j_2}$ — это все числа j_1-й строки, *кроме* одного лишь *числа* 1 (которое, очевидно, не может следовать ни за каким из чисел j_1-го столбца, поскольку является самым малым в таблице); поэтому, если обозначить отличные от n^2 числа j_1-го столбца через $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, то отличные от 1 числа j_1-й строки будут равны $s_1 + 1, s_2 + 1, \ldots, s_{n-1} + 1$. А отсюда уже следует, что разность между суммой чисел j-го столбца и суммой чисел j-й строки будет равна:

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + n^2) - \\ - [(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + \ldots + (s_{n-1} + 1) + 1] = n^2 - n.$$

175. Ясно, что если a_{ij} — элемент таблицы, стоящий в ней на пересечении i-й строки и j-го столбца (где $i, j = 1, 2, \ldots$ или m, соответственно n), то во всех таблицах, получаемых из исходной «допустимыми» преобразованиями, на этом месте стоит либо число a_{ij}, либо число $-a_{ij}$ (ибо наши преобразования таблиц сводятся к *переменам знаков* некоторых из входящих в таблицу чисел). Поэтому общее число «допустимых» таблиц заведомо не превосходит 2^{mn}, т. е. конечно. (Число 2^{mn} равно количеству всевозможных наборов mn чисел a_{ij}, каждое из которых может иметь *два* значения.) Из конечности числа рассматриваемых таблиц следует, что среди них можно указать такую, для которой сумма всех входящих в нее чисел максимальна (или несколько таблиц с одной и той же суммой чисел, большей суммы чисел всех других допустимых таблиц). Но если в такой «максимальной» таблице сумма элементов какой-либо строки или какого-либо столбца отрицательна, то, поменяв знаки всех чисел этой строки или этого столбца, мы придем к новой «допустимой» таблице с большей суммой входящих в нее чисел; поэтому в «максимальной» таблице *суммы всех элементов любой строки и любого столбца* заведомо *неотрицательны*.

176. Обозначим сумму всех чисел таблицы буквой S; сумму всех чисел i-й строки (где $i = 1, 2, \ldots, 100$) — через s_i; сумму всех чисел j-го столбца (где $j = 1, 2, \ldots, 80$) — через σ_j; наконец, число, стоящее в пересечении i-й строки и j-го столбца, обозначим через a_{ij}. По условию задачи

$$a_{ij} = s_i \sigma_j, \qquad (*)$$

откуда

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{i,80} = \\ = s_i\sigma_1 + s_i\sigma_2 + \ldots + s_i\sigma_{80} = s_i(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{80}) = \\ = s_i S \ (i = 1, \ldots, 100),$$

и, значит, либо $S = 1$, либо все $s_i = 0$. Но если $s_i = 0$ при всех

$i = 1, \ldots, 100$, то, в силу (*), все элементы a_{ij} нашей таблицы равны нулю. А так как, по условию задачи, «угловой» элемент $a_{11} > 0$, то $S = 1$.

177. Из равенства чисел, выписанных в симметричных относительно диагонали клетках, следует, что среди наших 64 чисел не более 20 различных (см. рис. 17, на котором числами 1, 2, ..., 20 обозначены какие-то числа $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$, не обязательно все различные между собой); при этом числа, скажем, i-й строки (где $i = 1, 2, \ldots, 8$) совпадают с числами $(9-i)$-й строки и i-го и $(9-i)$-го столбцов. Если найдется такое i, то сумма чисел i-й строки больше 518, то то же справедливо и для $(9-i)$-й строки и для i-го и $(9-i)$-го столбцов (см. тот же рис. 17, где принято $i = 3$ и соответствующие строки и столбцы заштрихованы); сложив эти четыре (одинаковые) суммы чисел, мы получим результат, заведомо не меньший $4 \cdot 518 = 2072$. При этом в соответствующей сумме четыре числа, стоящие на клетках, отмеченных на рис. 17 двойной штриховкой, будут учитываться дважды, а числа, стоящие в остальных заштрихованных клетках — один раз; поэтому общая сумма всех выписанных в заштрихованных клетках чисел будет не меньше чем $2072 - \sigma$, где σ — сумма чисел, выписанных в дважды заштрихованных клетках. А так как, по условию задачи, $\sigma \leqslant 112$ (ибо 112 это сумма чисел, выписанных во **всех** диагональных клетках), то сумма «заштрихованных» чисел не меньше чем $2072 - 112 = 1960$ — в то время как сумма всех вообще выписанных чисел равна 1956. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

8	7	6	5	4	3	2	1
7	14	13	12	11	10	9	2
6	13	18	17	16	15	10	3
5	12	17	20	19	16	11	4
4	11	16	19	20	17	12	5
3	10	15	16	17	18	13	6
2	9	10	11	12	13	14	7
1	2	3	4	5	6	7	8

Рис. 17.

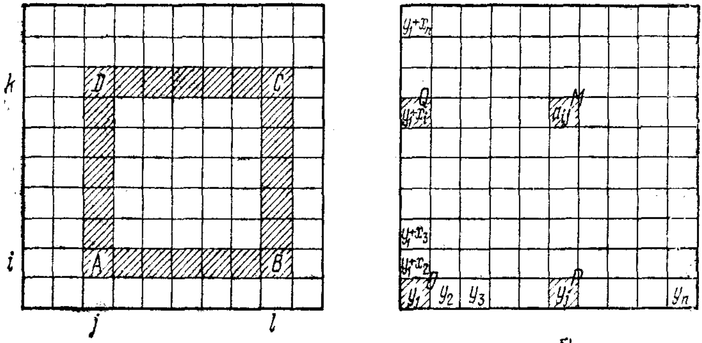
178. Заметим, что наше условие равносильно следующему: *для любых четырех номеров i, j, k и l, где $i \neq k$ и $i \neq l$, имеет место равенство:* $a_{ij} + a_{kl} = a_{ki} + a_{jl}$, другими словами, для любого взятого на доске прямоугольника $ABCD$ (рис. 18, *а*) сумма чисел, стоящих в двух его противоположных вершинах A и C, равна сумме чисел, стоящих в двух других вершинах B и D. В самом деле, предположим, что в вершинах A и C находятся две из наших n ладей; разумеется, эти ладьи можно будет переставить в клетки B и D с тем, чтобы они по-прежнему держали под боем i-ю и k-ю строку и j-й и l-й столбцы. Таким образом, при указанной перестановке сумма всех покрытых ладьями чисел не может измениться; поэтому-то сумма стоящих в клетках A и C чисел обязательно равна сумме чисел, стоящих в клетках B и D.

Далее уже все просто: обозначим числа, стоящие в нижней строке доски, через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а числа, стоящие в ее первом столбце, — через $y_1, y_1 + x_2, y_1 + x_3, \ldots, y_1 + x_n$ (рис. 18, *б*); кроме того, положим $x_1 = 0$. Ясно, что при этом для чисел нижней (1-й) строки и левого (1-го) столбца имеем $a_{1i} = y_i = x_1 + y_i$ (ибо $x_1 = 0$); $a_{j1} = x_j + y_1$. С другой стороны, если $i > 1$, $j > 1$, то стоящее в клетке M число a_{ij} можно вычислить, исходя из выделенного на рис. 18, *б* прямоугольника $MPOQ$: в силу доказанного ранее имеем

$$a_{ij} + y_1 = (x_i + y_1) + y_j, \text{ откуда } a_{ij} = x_i + y_j.$$

Нетрудно видеть, что если существуют такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $a_{ij} = x_i + y_j$, то в указанное в формулировке задачи условие, связанное с расстановкой на доске ладей (таких «допустимых» расстановок ладей будет $n!$ — почему?), обязательно выполняется.

179. Ясно, что при $j = k = i$ связывающее x_{ij}, x_{jk} и x_{ki} уравнение принимает вид $3x_{ii} = 0$; таким образом, $x_{ii} = 0$ при всех



а) *б)*

Рис. 18.

$i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть теперь $k = j \neq i$; тогда то же равенство принимает вид:

$$x_{ij} + x_{jj} + x_{ji} = 0,$$

откуда, в силу того, что $x_{jj} = 0$, имеем $x_{ji} = -x_{ij}$. Наконец, просуммируем все равенства, отвечающие номерам i, j, 1; i, j, 2; ..., i, j, n, где i и j — какие-то фиксированные номера; мы получим:

$$nx_{ij} + (x_{j1} + x_{j2} + \ldots + x_{jn}) - (x_{i1} - x_{i2} - \ldots - x_{in}) = 0$$

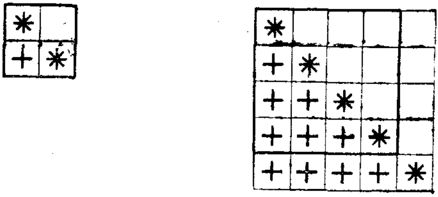
(здесь использовано то, что $x_{ki} = -x_{ik}$). Поэтому, обозначив

$$\frac{1}{n}(x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}) = t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

получим:

$$x_{ij} = t_i - t_j.$$

180. Ясно, что для «доски» размером 1×1 (состоящей из одной единственной клетки) утверждение задачи выполняется (здесь оно бессодержательно: ведь наша «доска» состоит из единственной клетки, в которой стоит звездочка); это делает возможным использование метода математической индукции. При $n = 2$, очевидно, доска будет содержать столбец (а следовательно, и строку), в котором имеется точно одна звездочка; переставив, если это понадобится, строки и столбцы так, чтобы свободное место оказалось правым верхним, мы придем к таблице, имеющей «треугольное» строение (см. рис. 19, *а*, где знак «+» означает, что в соответствующей клетке звездочка может как стоять, так и не стоять). Докажем, что и при произвольном *n строки и столбцы таблицы можно переставить так, чтобы таблица приняла «треугольный» вид*, т. е. чтобы все звездочки в таблице стояли на идущей сверху вниз направо диагонали и, быть может, под ней, — однако все клетки над диагональю обязательно были пустыми. В самом деле предположим,



а) *б*)

Рис. 19.

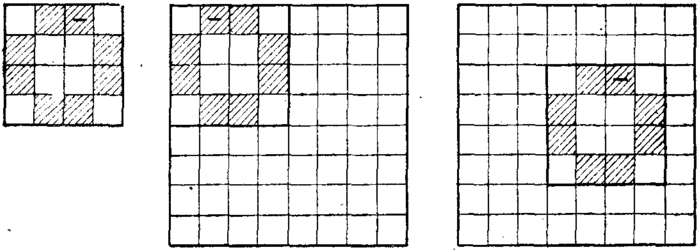
что это уже доказано для удовлетворяющих нашим условиям таблиц размером $(n-1) \times (n-1)$, и рассмотрим таблицу размером $n \times n$. Эта таблица содержит столбец, в котором имеется ровно одна звездочка; переставим этот столбец на последнее место, а затем переставим строки так, чтобы звездочка в нем оказалась внизу (рис. 19, *б*), и *вычеркнем* содержащую эту звездочку строку и последний столбец. При этом мы придем к таблице размером $(n-1) \times$ $\times (n-1)$, также удовлетворяющей условиям задачи; по предположению индукции строки и столбцы этой таблицы можно переставить так, чтобы она имела «треугольный» вид, после чего примет «треугольный» вид и исходная таблица.

«Треугольное» строение рассматриваемых таблиц (его можно считать «треугольным», ибо с точки зрения интересующих нас свойств таблиц допустимы любые перестановки строк и столбцов) доказывает равноправность строк и столбцов таблицы, а значит и справедливость утверждения задачи (наглядно очевидного для «треугольных» таблиц).

181. а) На доске размером 4×4 имеются 4 столбца, 4 строки и $2 \cdot 7 = 14$ параллельных диагонали рядов (из которых 4 «ряда», содержат лишь по одной угловой клетке); нетрудно убедиться, что каждый из этих $4 + 4 + 14 = 22$ вертикальных, горизонтальных или наклонных рядов содержит четное число (а именно — либо 0, либо 2) заштрихованных на рис. 20, *а* клеток. Но первоначально лишь одна из этих клеток содержала знак «—»; поэтому при всех наших переменах знаков число заштрихованных клеток, помеченных знаком «—», останется н е ч е т н ы м — и, значит, никогда не станет равным 0.

б) Где бы ни был расположенный на доске знак «—», мы всегда можем «вырезать» из нашей доски размером 8×8 «малую» доску размером 4×4 так, чтобы на ней расположение знаков было таким, как в условии задачи а) (см. рис. 20, *б — в*, где изображены два возможных варианта расположения знака «—» на большей доске). А так как наши изменения знаков на большой доске порождают на «малой» доске описанные в условии задачи а) перемены знаков, то требуемый результат следует из результата задачи а).

182. а) Подсчитаем, прежде всего, число всевозможных квадратов размером 3×3 и размером 4×4, которые можно разместить на



а) б) в)

Рис. 20.

шахматной доске. Ясно, что левый нижний угол квадрата размером 3×3 может совпасть с любой клеткой квадрата размером 6×6, заштрихованного на рис. 21 горизонтальной штриховкой, а левый нижний угол квадрата размером 4×4 — с любой клеткой (меньшего) квадрата размером 5×5, заштрихованного на том же рис. 21 вертикальной штриховкой; таким образом, всего мы имеем на доске $6 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 36 + 25 = 61$ квадрат размером 3×3, или 4×4. Поэтому, исходя из доски, на всех клетках которой стоят знаки «+», мы можем описанными операциями получить не более 2^{61} возможных распределений знаков во всех клетках доски, ибо в каждом из 61 рассматриваемых квадратов мы можем, независимо от остальных квадратов, изменить все знаки или не менять их. А так как всего возможных распределений знаков «+» и «—» в 64 клетках шахматной доски существует $2^{64} > 2^{61}$, то, исходя из доски с *одними лишь знаками* «+», *любое* распределение знаков на доске получить нельзя. Но если рассмотреть теперь какое-либо распределение знаков, которое *нельзя* получить описанным образом из распределения, содержащего только знаки «+», то, и обратно, исходя из этого распределения знаков, мы никогда не сможем прийти к одним лишь знакам «+», откуда и следует *отрицательный* ответ на вопрос задачи.

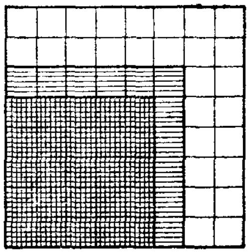


Рис. 21.

б) Эта задача очень близка к задаче а). Общее число «(2×2)-квадратов», которые можно выделить из шахматной доски, равно $7 \cdot 7 = 49$, а число пар соседних строк или соседних столбцов доски равно $7+7=14$; таким образом, мы имеем $10^{49+14}=10^{63}$ способов менять последние цифры чисел, стоящих в клетках доски. (К числу этих 10^{63} способов относится и тот, когда ни одна цифра не меняется). Отсюда следует, что, исходя из расположения чисел, такого, что все числа оканчиваются на 0, мы не можем получить *все* вообще возможные распределения последних цифр чисел, стоящих в 64 клетках доски, ибо число таких распределений равно $10^{64}>10^{63}$; поэтому найдутся такие распределения последних цифр, от которых *нельзя* перейти к «нулевому».

Примечание. Разумеется, решение (и отрицательный результат) задачи сохраняет силу и в том случае, если требуется добиться делимости всех чисел таблицы не на 10, а на любое другое натуральное число n, скажем на число 1976.

183. а) Сможет. Ясно, что, выбирая по одному камню из всех кучек, мальчик может добиться того, чтобы хоть в одной кучке остался единственный камень. Затем, удваивая число камней в той кучке (или в тех кучках), в которой имеется 1 камень, и снова вычитая по камню из всех кучек, мальчик уменьшит на единицу число камней в кучках, где оно отлично от 1, сохранив 1 камень в кучках, где этот камень был единственным. Продолжая поступать так же, мальчик может добиться того, чтобы во всех кучках осталось по одному камню; после этого он может забрать их все.

б) Эта задача во всем подобна задаче а) (заметим, что фигурирующие в задаче а) числа камней можно расположить в виде «таблицы» из одной строки и трех столбцов — по одному числу в столбце). В самом деле, если мы сначала будем рассматривать числа лишь одной,— скажем, 1-й — строки, то наши операции позволят удвоить любое из чисел этой строки или вычесть единицу из всех этих чисел; поэтому, в точности как в решении задачи а), можно обратить все числа этой строки в 0. После этого мы точно так же обратим в 0 все числа 2-й строки — и так поступим со всеми строками таблицы.

184. Запишем число a в «двоичной системе счисления» [1]), т. е. в виде

$$a=\alpha_n\cdot 2^n+\alpha_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\alpha_{n-2}\cdot 2^{n-2}+\ldots+\alpha_1\cdot 2+\alpha_0\cdot 1,$$

где все «цифры» $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ равны 0 или 1 (старшую «цифру» α_n числа a, разумеется, можно считать равной 1). Ясно, что если число a четно, то $\alpha_0=0$ и $a_1=\dfrac{a}{2}=\alpha_n\cdot 2^{n-1}+\alpha_{n-1}\cdot 2^{n-2}+\alpha_{n-2}\cdot 2^{n-3}+\ldots+\alpha_1\cdot 1$; если же a нечетно, то $\alpha_0=1$ — и число $a_1=\dfrac{a-1}{2}$ имеет точно такое же строение. Таким образом, если a записывается в двоичной системе счисления последовательностью «цифр» $a=\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1\alpha_0}$, то a_1 записывается в той же системе счисления как $a_1=\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\ldots\alpha_1}$; соответственно этому a_2 записывается как $a_2=\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2}$, a_3 — как $a_3=\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2}$, и т. д.— вплоть до числа $a_n=\alpha_n=1$. С другой стороны, очевидно, $b_1=2b$, $b_2=2b_1=2^2b$, $b_3=2^3b$, и т. д.— вплоть до числа $b_n=2^nb$.

---

[1]) См., например, [47].

Ясно, что $a_i = \overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_i} = \alpha_n\cdot 2^{n-i} + \alpha_{n-1}\cdot 2^{n-i-1} + \ldots$ $\ldots + \alpha_{i+1}\cdot 2 + \alpha_i\cdot 1$ (где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) будет нечетным, если «цифра» α_i равна 1 (напомним, что α_i может равняться лишь 0 или 1). Таким образом, в этом случае $b_i = 2^i b = (\alpha_i\cdot 2^i)b$. Поэтому интересующую нас сумму всех b_i, отвечающих нечетным a_i, можно записать так:

$$[\alpha_n\cdot 2^n + \alpha_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \ldots + \alpha_1\cdot 2 + \alpha_0\cdot 1]b = \\ = \overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}\cdot b = ab,$$

где в сумме $\alpha_n\cdot 2^n + \alpha_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \ldots + \alpha_1\cdot 2 + \alpha_0\cdot 1$ $(=a)$ реально участвуют лишь слагаемые, отвечающие равным 1 значениям «цифр» $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$.

185. Самое короткое решение этой задачи доставляет метод математической индукции. Условимся обозначать k-е число Фибоначчи, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, через u_k. Предположим, что наше утверждение уже доказано для всех натуральных чисел n, меньших k-го числа Фибоначчи u_k; справедливость его для всех чисел, например, меньших $u_5 = 5$, легко проверить непосредственно. Ясно, что то же утверждение будет выполняться и для числа u_k. Далее, поскольку все числа между u_k и $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ представимы в виде $u_k + m$, где $0 < m < u_{k-1}$, и поскольку, по предположению индукции, все меньшие u_{k-1} числа m могут быть представлены в виде суммы каких-то различных чисел Фибоначчи, номера которых меньше $k-1$, то число $n = u_k + m$ также представляется в виде суммы чисел Фибоначчи («старшее» из которых есть u_k, а номера остальных меньше $k-1$). Таким образом, мы установили, что наше предположение верно и для всех натуральных чисел, меньших u_{k-1}, откуда и вытекает его справедливость для всех натуральных чисел.

Примечание. Из доказанного следует, что в рассматриваемых суммах чисел Фибоначчи (где мы, разумеется, считаем, скажем, $2 = u_3$, но не $2 = 1 + 1 = u_1 + u_2$, или $4 = 3 + 1 = u_4 + u_2$, а не $4 = 2 + 1 + 1 = u_3 + u_2 + u_1$) *не могут фигурировать два «соседних» числа Фибоначчи* (почему?); нетрудно показать, что *всевозможные суммы чисел Фибоначчи, удовлетворяющие последнему условию — это* и есть *все натуральные числа,* причем каждое число встречается в последовательности всех таких сумм единственный раз (ср. с решением задачи 129 из книги [6]).

186. Нас интересуют суммы $s_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+8}$ восьми последовательных чисел Фибоначчи. Поскольку числа Фибоначчи, очевидно, монотонно возрастают: $u_1 = u_2 < u_3 < u_4 < \ldots < u_n < < u_{n+1} < \ldots$, то ясно, что утверждение задачи будет доказано, если мы покажем, что сумма s_k заключена между u_{k+9} и u_{k+10}, т. е. что $u_{k+9} < s_k < u_{k+10}$. Но ясно, что

$$u_{k+9} = u_{k+8} + u_{k+7} < u_{k+8} + u_{k+7} + u_{k+6} + \ldots + u_{k+1} = s_k;$$

таким образом, остается лишь доказать неравенство $s_k < u_{k+10}$. Нетрудно, однако, видеть, что *сумма* $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ *первых* n *чисел Фибоначчи на единицу меньше* $(n+2)$*-го числа* u_{n+2}; установить это можно, например методом математической индукции. В самом деле, очевидно, $S_2 = 1 + 1 = = 3 - 1 = u_4 - 1$; с другой стороны, если требуемое утверждение справедливо для какого-то номера n, то, заменяя n на $n+1$ и используя предположение индукции, получим:

$$S_{n+1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} =$$
$$= (u_{n+2} - 1) + u_{n+1} = (u_{n+1} + u_{n+2}) - 1 = u_{n+3} - 1,$$

— что и требовалось доказать. А теперь сразу получаем:

$$s_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+8} = S_{k+8} - S_k =$$
$$= (u_{k+10} - 1) - (u_{k+2} - 1) = u_{k+10} - u_{k+2} < u_{k+10},$$

чем и завершается решение задачи.

Примечания. 1. Ясно, что так же можно доказать, что *сумма любых m последовательных чисел Фибоначчи, где $m \geqslant 3$, не может быть числом Фибоначчи.*

2. Неравенство $s_k < u_{k+10}$ можно также доказать, последовательно преобразуя выражение для u_{k+01}:

$$u_{k+10} = u_{k+9} + u_{k+8} = (u_{k+8} + u_{k+7}) + u_{k+8} =$$
$$= u_{k+8} + u_{k+7} + (u_{k+7} + u_{k+6}) = u_{k+8} + u_{k+7} + u_{k+6} +$$
$$+ (u_{k+6} + u_{k+5}) = u_{k+8} + u_{k+7} + u_{k+6} + u_{k+5} + (u_{k+5} + u_{k+4}) = \ldots$$
$$\ldots = u_{k+8} + u_{k+7} + \ldots + u_{k+2} + (u_{k+2} + u_{k+1}) = s_k + u_{k+2} > s_k.$$

187. Условимся обозначать остатки от деления чисел Фибоначчи $u_1, u_2, u_3, \ldots$ на 5 через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Ясно, что из равенства $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$, где $k = 3, 4, 5, \ldots$, следует, что

$$\alpha_k = \begin{cases} \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}, & \text{если } \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} < 5; \\ \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} - 5, & \text{если } \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2} \geqslant 5. \end{cases} \qquad (*)$$

Формулы (*) позволяют выписать сколь угодно много членов последовательности α_k:

1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, ...

При этом для того, чтобы выписать любое число следующих далее членов последовательности α_k, нам уже нет нужды прибегать к формулам (*): ведь $\alpha_{21} = \alpha_1$, $\alpha_{22} = \alpha_2$, и, значит, (в силу (*)), $\alpha_{23} = \alpha_3$, $\alpha_{24} = \alpha_4$, и т. д., т. е. «последовательность остатков» $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ является *периодической* с периодом 20. А так как в первой серии из 20 остатков α_k на 5-м, 10-м, 15-м и 20-м местах стоят нули, но также и впоследствии на всех кратных 5 местах в этой последовательности будут стоять нули.

188. Оставим в каждом члене ряда Фибоначчи, записывающемся пятью и более цифрами, только последние четыре цифры. У нас получится последовательность чисел, каждое из которых меньше чем 10^4. Обозначим через a_k член этой последовательности, стоящий на k-м месте. Заметим, что если нам известно a_{k+1} и a_k, то мы можем вычислить a_{k-1}, ибо $(k-1)$-й член ряда Фибоначчи равен разности $(k+1)$-го и k-го членов, а последние четыре цифры разности можно определить по последним четырем цифрам уменьшаемого и вычитаемого. Отсюда следует, что если для некоторых номеров k и n окажется, что $a_k = a_{n+k}$, $a_{k+1} = a_{n+k+1}$, то тогда $a_{k-1} = a_{n+k-1}$, $a_{k-2} = a_{n+k-2}$, ..., $a_1 = a_{n+1}$. Но так как $a_1 = 0$, то это будет означать, что $a_{n+1} = 0$, т. е. что в ряде Фибоначчи на $(n+1)$-м месте стоит число, оканчивающееся четырьмя нулями.

Остается показать, что среди 10^8+1 пар

$$\begin{array}{ll} a_1, & a_2, \\ a_2, & a_3, \\ \cdots & \cdots \\ a_{10^8} & a_{10^8+1}, \\ a_{10^8+1}, & a_{10^8+2} \end{array}$$

найдутся хотя бы две одинаковые. Но это непременно будет так, ибо все числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10^8+2}$ не превышают 10^4, а из 10^4 чисел 0, 1, 2, 3, 4, ..., 9999 можно составить только $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$ различных пар (ибо первое число может принимать 10^4 различных значений и второе число может принимать 10^4 различных значений).

Примечание. Можно даже точно указать первое из чисел ряда Фибоначчи, оканчивающееся четырьмя нулями; номер этого числа 7501 (см. задачу 174 книги [5] и следствия из нее).

189. Поскольку при $n > 1$ имеем

$$a_n^2 = \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} > a_{n-1}^2 + 2,$$

то из $a_1^2 = 1$ получаем

$$a_2^2 > 1 + 2 = 3, \quad a_3^2 > 1 + 2 \cdot 2 = 5, \quad a_4^2 > 1 + 3 \cdot 2 = 7, \ldots$$
$$\ldots, a_{100}^2 > 1 + 99 \cdot 2 = 199,$$

откуда и следует, что $a_{100} > \sqrt{199} > 14$. Аналогично, используя неравенство

$$a_n^2 = \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2} \leqslant a_{n-1}^2 + 3,$$

также верное при всех $n > 1$ (причем в равенство оно обращается лишь при $n = 2$), получаем:

$$a_2^2 = 1 + 3 = 4, \quad a_3^2 < 1 + 2 \cdot 3 = 7, \quad a_4^2 < 1 + 3 \cdot 3 = 10, \ldots$$
$$\ldots, a_{100}^2 < 1 + 99 \cdot 3 = 298,$$

откуда вытекает, что $a_{100} < \sqrt{298} < 18$.

190. Первое решение. Дополним нашу последовательность чисел еще одним числом a_{n+1}, таким, что $|a_{n+1}| = |a_n + 1|$, возведем в квадрат все данные в условии задачи равенства (включая сюда и «дополнительное» равенство, связывающее числа a_n и a_{n+1}):

$$a_1^2 = 0, \quad a_2^2 = (a_1 + 1)^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1,$$
$$a_3^2 = (a_2 + 1)^2 = a_2^2 + 2a_2 + 1, \ldots, a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} + 1,$$
$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2a_n + 1,$$

и затем сложим их:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=0+a_1^2+a_2^2+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}^2+a_n^2+2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)+n\cdot 1.$$

Из последнего равенства следует, что

$$2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)=-n+a_{n+1}^2\geqslant -n,$$

а значит,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geqslant -\frac{1}{2}.$$

Второе решение. Заметим, что при $n=1$ рассматриваемое среднее арифметическое равно $\frac{a_1}{1}=0$; при $n=2$ (где, очевидно, $a_2^2=1$ и, значит, $a_2=+1$ или -1) оно равно $\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{0+a_2}{2}=\frac{a_2}{2}$, т. е. равно $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$; таким образом, в этих двух случаях требуемое неравенство выполняется. Воспользуемся теперь методом математической индукции: предположим, что в случае, когда количество рассматриваемых чисел меньше n, утверждение задачи справедливо, и покажем, что в таком случае оно будет выполняться также и для n чисел. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — удовлетворяющая условиям задачи последовательность n чисел, и пусть a_m (где m — один из номеров 1, 2, 3, ..., или n) — наименьшее из них. В таком случае, разумеется, можно считать, что $a_m<0$ (ибо если все наши числа неотрицательны, то нам и доказывать нечего: конечно, тут их среднее арифметическое больше $-\frac{1}{2}$) и что $a_m=-a_{m-1}-1$ (ибо лишь в этом случае $|a_m|=|a_{m-1}+1|$ и $a_m<a_{m-1}$), т. е. среднее арифметическое чисел a_{m-1} и a_m

$$\frac{a_{m-1}+a_m}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Заметим теперь, что *если исключить из нашей последовательности числа a_{m-1} и a_m, то оставшиеся $m-2$ числа также будут удовлетворять требуемым условиям.* В самом деле, ясно, что $m\neq 1$ (ибо $a_1=0$, а $a_m<0$) — именно поэтому мы и можем говорить о числе a_{m-1}. Далее, если $m=2$, то $a_m=a_2=-1$, $a_3=0$ (ибо $|a_3|=|a_2+1|$), и мы, разумеется, можем отбросить числа a_1 и a_2 и начинать последовательность сразу с $a_3(=0)$; аналогично, если $m=n$, то мы можем отбросить два последних числа a_{n-1} и a_n и оставшиеся числа по-прежнему будут удовлетворять требуемым равенствам. Наконец, если $3\leqslant m\leqslant n-1$, то

$$|a_{m-2}+1|=|a_{m-1}|=|-a_m-1| \text{ и } |a_{m+1}|=|a_m+1|=|-a_m-1|,$$

так что $|a_{m-2}+1|=|a_{m+1}|$ — и, значит, в самом деле числа $a_1, a_2, \ldots, a_{m-2}, a_{m+1}, \ldots, a_n$ будут удовлетворять требуемым в формулировке задачи условиям.

Теперь, по предположению индукции, выполняющемуся для $n-2$ чисел,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{m-2}+a_{m+1}+\ldots+a_n}{n-2} \geqslant -\frac{1}{2},$$

т. е. $$a_1+a_2+\ldots+a_{m-2}+a_{m+1}+\ldots+a_n \geqslant -\frac{1}{2}\ (n-2).$$

С другой стороны, как мы уже знаем,

$$\frac{a_{m-1}+a_m}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ т. е. } a_{m-1}+a_m = -1;$$

поэтому

$$a_1+a_2+\ldots+a_{m-2}+a_{m-1}+a_m+a_{m+1}+\ldots+a_n \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}(n-2)+(-1) = -\frac{1}{2}n, \text{т. е. } \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant -\frac{1}{2},$$

— что нам и требовалось доказать.

191. Нетрудно понять, что наибольшим числом нашей последовательности может быть лишь одно из первых двух чисел a_0 и a_1 (ибо каждое a_k при $k \geqslant 2$ обязательно $< \max[a_{k-1}, a_{k-2}]$[1]). Легко даже видеть, что в наибольшей по длине последовательности *самым большим является* именно *число* a_1, ибо если последовательность начинается с чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где $a_1 > a_2$, то ее можно, не меняя, «продолжить назад», условившись начинать так: $a_0 = a_1 - a_2$, a_1, $a_2 = |a_1 - a_0|$, $a_3, \ldots$ (здесь, очевидно, $a_1 > a_0 = a_1 - a_2$). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся лишь рассмотрением последовательностей, начинающихся с наибольшего числа a_1 (нам только при этом придется в окончательном ответе увеличить длину последовательности на 1 за счет «нулевого» по номеру числа $a_0 = a_1 - a_2$).

Ясно, что если наибольший член последовательности $a_1 = 1$, то последовательность состоит не более чем из двух чисел (продолжить ее можно лишь одним числом $a_2 = 1$); если наибольший член последовательности $a_1 = 2$, то количество входящих в последовательность чисел $\leqslant 3$ (если $a_2 = 2$, то последовательность имеет вид: 2, 2, а если $a_2 = 1$, то она такова: 2, 1, 1); если $a_1 = 3$, то число входящих в последовательность чисел $\leqslant 5$ (полагая, что $a_2 = 3$, 2 или 1, мы приходим к последовательностям: 3, 3; или 3, 2, 1; или, наконец, 3, 1, 2, 1, 1). Эти примеры подсказывают заключение о том, что «оптимальная» последовательность, по-видимому, должна начинаться с чисел $a_1 = n$, $a_2 = 1$. При этом начало ее выглядит так:

$$n,\ 1,\ n-1,\ n-2,\ 1,\ \ldots, \qquad (*)$$

откуда вытекает, что, обозначив количество чисел, составляющих последовательность (*), через k_n, мы получим:

$$k_n = 3 + k_{n-2} \qquad (**)$$

(ведь, начиная с 4-го члена $a_4 = n-2$, мы приходим к подобной же последовательности, где n заменено на $n-2$).

---

[1]) Ср. сноску на стр. 228.

Из соотношения (**) находим:

$k_1 = 2,\ k_2 = 3,\ k_3 = 3+2 = 5,\ k_4 = 3+3 = 6,$

$$k_5 = 3+5 = 8,\ k_6 = 3+6 = 9,\ \ldots;$$

все эти числа k_n задаются следующей формулой:

$$k_n = \left[\frac{3n+1}{2}\right], \qquad (***)$$

где квадратные скобки, как всегда (ср. стр. 37), обозначают ц е л у ю ч а с т ь числа. (Формулу (***), разумеется, совсем просто вывести из (**) с помощью м е т о д а м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и: для $n = 1$ и $n = 2$ она, как мы видели, справедлива; если (***) верно для значения $n - 2$, то для значения n это соотношение тоже верно:

$$k_n = k_{n-2} + 3 = \left[\frac{3(n-2)+1}{2}\right] + 3 = \left[\frac{3n+1}{2}\right].\Big)$$

Итак, мы уже построили (начинающуюся с наибольшего числа!) последовательность (*), длина k_n которой связана с величиной n наибольшего числа соотношением (***); покажем теперь, что *если описанная в условии задачи последовательность начинается с н а и б о л ь ш е г о числа $a_1 = n$, то длина ее не может превзойти* указываемого формулой (***) *числа k_n*. Доказывать это мы будем, естественно, п о и н д у к ц и и: предположим, что напечатанное курсивом утверждение уже доказано для всех значений n, меньших некоторого (а справедливость его для значений $n = 1$, 2 и 3 мы уже проверили), и покажем, что тогда оно будет справедливо и для значения n. В самом деле, пусть задана удовлетворяющая условиям задачи последовательность, начинающаяся числами:

$$n,\ m,\ \ldots,$$

где $m \leqslant n$. Далее рассмотрим ряд вариантов, отвечающих разным значениям m.

1°. Если $m = n$, то последовательность обрывается на 2-м члене; для нее наше утверждение, конечно, выполнено.

2°. Если n — четное число и $m = \frac{n}{2}$, то последовательность обрывается на 3-м члене: $n,\ \frac{n}{2},\ \frac{n}{2}$, и здесь тоже, разумеется, длина последовательности меньше k_n.

3°. Если $n > m > \frac{n}{2}$, то, отбросив в нашей последовательности первое число n, мы получим «в остатке» последовательность m, $n - m, \ldots$, тоже начинающуюся с бóльшего числа m; по предположению индукции, этот «остаток» содержит не более $k_m = \left[\frac{3m+1}{2}\right]$ чисел. Но так как одно число мы при этом отбросили и так как $m \leqslant n - 1$, то вся последовательность содержит не более чем

$$1 + \left[\frac{3m+1}{2}\right] \leqslant 1 + \left[\frac{3(n-1)+1}{2}\right] = \left[\frac{3n}{2}\right] \leqslant \left[\frac{3n+1}{2}\right] = k_n$$

чисел.

4°. Если, наконец, $m < \frac{n}{2}$, то наша последовательность начинается так: $n, m, n-m, n-2m, m, \ldots$ При этом если $n-2m \geqslant m$ (т. е. $m \leqslant \frac{n}{3}$), то «остаток» последовательности, получающийся после отбрасывания первых трех чисел (остаток, начинающийся с числа $n-2m$), таков, что наибольшим в этой последовательности чисел является первое ее число; поэтому, по предположению индукции, количество содержащихся в остатке чисел не превосходит

$$k_{n-2m} = \left[\frac{3(n-2m)+1}{2}\right] \leqslant \left[\frac{3(n-2)+1}{2}\right] = \left[\frac{3n+1}{2}\right] - 3$$

(ибо $m \geqslant 1$), и, значит, общее число чисел не превосходит $\left[\frac{3n+1}{2}\right] = k_n$.

Если же $n-2m < m$ (т. е. $m > \frac{n}{3}$), то поскольку здесь шестое число последовательности $m-(n-2m) < m$, то начинающийся с пятого числа m «остаток» будет таков, что в нем наибольшее число m стоит на первом месте; поэтому число чисел «остатка» $\leqslant k_m = \left[\frac{3m+1}{2}\right] \leqslant \left[\frac{3n+2}{4}\right]$ — и снова общее количество входящих в последовательность чисел $\leqslant k_m + 4 \leqslant \left[\frac{3n+2}{4}\right] + 4 \leqslant \left[\frac{3n+1}{2}\right] = k_n$.

Тем самым мы полностью доказали утверждение, относящееся к последовательностям, начинающимся с наибольшего числа. А отсюда следует, что заданная в условии задачи последовательность не может содержать больше чем $1 + k_{1967} = 1 + \left[\frac{3 \cdot 1967 + 1}{2}\right] = 2952$ числа; количество входящих в последовательность чисел равно 2952 в том и только в том случае, если она начинается с чисел: 1966, 1967, 1, 1966, 1965, 1, 1964, 1963, 1, ...

192. Будем доказывать наше утверждение от противного. Предположим, что в последовательности чисел α_1, $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, ... имеется лишь конечное число составных. Ясно, что в этом случае в последовательности цифр $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ имеется лишь конечное число четных цифр (ибо каждое число, десятичная запись которого кончается четной цифрой, является составным), и, значит, все цифры $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots$, начиная с какой-то n-й цифры, будут *нечетными*. Точно так же устанавливается, что в нашей последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ цифр будет лишь конечное число пятерок (ибо каждое число, оканчивающееся на 5, делится на 5); таким образом, начиная с какого-то места в последовательности будут встречаться лишь *единицы, тройки* и *семерки* (ибо девяток в ней нет по условию задачи). Но приписывание к числу тройки в конце не меняет остатка от деления этого числа на 3, а приписывание единицы или семерки увеличивает остаток от деления на 3 на единицу (ибо $7 = 2 \cdot 3 + 1$); поэтому если число единиц и семерок в нашем ряду цифр бесконечно, то каждое третье из оканчивающихся на 1 или на 7 чисел будут делиться на 3, т. е. будет составным. Таким образом, если стремиться к тому, чтобы лишь конечное число чисел ряда α_1, $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, $\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \ldots$ были составными, мы должны, начиная с какого-то N-го места в ряду цифр $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, приписывать в конце ранее имеющегося числа *тройку*; при этом мы приходим к последовательности чисел вида

$$M = \overline{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{N-1} \underbrace{333 \ldots 3}_{k \text{ раз}}} = 10^k A + 3B,$$

$$\text{где } A = \overline{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{N-1}} \text{ и } B = \underbrace{111 \ldots 1}_{k \text{ раз}}; \text{ здесь } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть теперь p — простой делитель числа A (возможно, совпадающий с A); можно считать p отличным от 2 и от 5, ибо если N достаточно велико, то $\alpha_{N-1} = 1$, 7 или 3 (значение $\alpha_{N-1} = 3$ здесь не исключается!). Но существует бесконечно много таких значений k, что *записываемое с помощью k единиц число B делится на p* (см. Примечание в конце решения задачи 144); всем этим значениям k отвечают *составные* (делящиеся на A) числа $M = 10^kA + 3B$, т. е. вопреки сделанному предположению среди чисел M имеется бесконечно много составных. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

193. а) Четность или нечетность последней цифры суммы четырех цифр (другими словами — самой этой суммы) зависит лишь от четности или нечетности рассматриваемых цифр. Если буквой *н* обозначить нечетное, а буквой *ч* — четное число, то легко видеть, что наша последовательность начинается так:

нннчнннчнннч ...,

причем далее она, очевидно, продолжается периодически: после каждых четырех нечетных чисел (*н*) следует одно четное число (*ч*). Но отсюда уже следует, что последовательность 1234, имеющая характер *нчнч*, нигде не может встретиться в нашем ряду цифр.

б) Различных четверок цифр, каждая из которых может иметь 10 значений: 0, 1, ..., 9, существует 10^4; поэтому в последовательности из 10 004 цифр обязательно два раза встретится одна и та же четверка (образованная соседними цифрами). Но если i-я, $(i+1)$-я, $(i+2)$-я и $(i+3)$-я цифры совпадают с j-й, $(j+1)$-й, $(j+2)$-й и $(j+3)$-й цифрами (где мы считаем $j < i$), то, в силу самого закона образования последовательности, $(i-1)$-я цифра совпадает с $(j-1)$-й, $(i-2)$-я — с $(j-2)$-й, и т. д. Поэтому $(i-j-1)$-я, $(i-j)$-я $(i-j+1)$-я и $(i-j+2)$-я цифры нашей последовательности обязательно совпадут с 1-й, 2-й, 3-й и 4-й цифрами, т. е. они образуют четверку 1975.

194. Ответ на первый вопрос задачи является совсем простым: ясно, что среди 8-значных и еще меньших чисел мы не можем встретить такого, сумма цифр которого равна $9 \cdot 9 = 81$, а среди 9-значных чисел таким является одно лишь число 999 999 999; соответственно этому в ряду (**) число 81 впервые встретится на 111 111 111-м месте; следующее за ним число ряда (**) будет 9 (сумма цифр числа 1 000 000 008).

Несложен и ответ на второй вопрос. Так как среди тех чисел ряда (**), которые отвечают не более чем трехзначным числам ряда (*), число 27 встретится единственный раз (на 111-м месте в этом ряду — в ряду (*) на этом месте стоит число 999), то здесь не приходится рассчитывать на четырехкратное повторение числа 27. Среди же четырехзначных чисел ряда (*) можно отыскать

4 последовательных числа, сумма цифр которых равна 27 — это будут числа 3969, 3978, 3987 и 3996; ясно, что соответствующие числа 27, 27, 27, 27 ряда (**) предшествуют первой тройке чисел 36 в этом ряду (и даже вообще первому числу 36, отвечающему числу 9999 ряда (*)).

Менее определенно сформулирован последний вопрос,— а между тем именно с ним и связаны пути подбора указанной выше четверки чисел 3969, ... Не останавливаясь на подробном обсуждении этого вопроса, укажем лишь, что строение чисел ряда (**) связано с монотонностью ряда цифр в числах, получаемых делением чисел ряда (*) на 9; в частности, числа 441 (= 3969 : 9), 442, 443, 444, отвечающие рассмотренной четверке чисел ряда (*), таковы, что их цифры не возрастают. Выпишем, например, в таблицу все числа от 1 до 110, где жирным набраны двузначные числа, для которых цифры числа (отличные от цифры 0) н е в о з р а с т а ю т, и трехзначные числа, цифры которых (снова отличные от 0) н е у б ы в а ю т.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**11**
12	13	14	15	16	17	18	19	20	**21**	**22**
23	24	25	26	27	28	29	30	**31**	**32**	**33**
34	35	36	37	38	39	40	**41**	**42**	**43**	**44**
45	46	47	48	49	50	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**
56	57	58	59	60	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**
67	68	69	70	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**
78	79	80	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**
89	90	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**
100	**101**	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**	**110**

Умножив все эти числа на 9 и образовав для каждого из них сумму цифр, мы придем к такой красивой таблице:

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	18
9	9	9	9	9	9	9	9	9	18	18
9	9	9	9	9	9	9	9	18	18	18
9	9	9	9	9	9	9	18	18	18	18
9	9	9	9	9	9	18	18	18	18	18
9	9	9	9	9	18	18	18	18	18	18
9	9	9	9	18	18	18	18	18	18	18
9	9	9	18	18	18	18	18	18	18	18
9	9	18	18	18	18	18	18	18	18	18
9	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18

Существуют и другие изящные конфигурации чисел последовательности (**).

195. Заметим, прежде всего, что каждый из наборов I_0, I_1, I_2, ... получается из предшествующего добавлением к нему некоторого количества новых чисел; при этом все ранее имевшиеся числа в новом наборе сохраняются. Легко видеть, далее, что все вновь появляющиеся в наборе I_n числа будут больше n; поэтому число 1973 в наборах с номерами, бо́льшими 1973, уже не возникает — и все такие наборы содержат о д н о и т о ж е количество чисел 1973. Докажем теперь, что *фиксированная пара чисел* a, b (где a стоит, скажем, с л е в а от b; таким образом, a, b и b, a мы считаем разными парами!) *встретится в последовательности* I_0, I_1, I_2, ..., I_n, ... *наборов ровно один раз, если числа* a *и* b *взаимно просты, и не встретится ни разу в противном случае.* Это утверждение очевидно для пар чисел a, b, наибольшее из которых не превосходит 2 (таких пар имеется всего две: 1, 2 и 2, 1 — и встречается каждая из этих пар один лишь раз, а именно, в последовательности I_1: 1, 2, 1); докажем его м е т о д о м м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и. Предположим, что наше утверждение уже доказано для всех таких пар чисел a, b что $\max[a, b] < n$[1]), и покажем что оно будет справедливо и для пар a, b, где $\max[a, b] = n$. В самом деле, пусть a, b — пара целых положительных чисел, где, скажем, $\max[a, b] = b = n$. Ясно, что пара a, b может появиться в каком-то наборе I_k лишь в том случае, если в предыдущем наборе I_{k-1} мы имели пару стоящих рядом чисел a, $b - a$. Но поскольку $\max[a, b-a] < \max[a, b] (= b = n)$, то в силу предположения индукции пара чисел a, $b - a$ встречалась в наших наборах $I_1, \ldots$ $\ldots, I_{k-1}$ один раз, если a и $b - a$ взаимно просты, и ни разу, если a и $b - a$ имеют общий делитель $d > 1$. Но отсюда сразу следует что и пара чисел a, b встречается в наших наборах один раз, если a и b взаимно просты, и не встречается вовсе в противном случае: ведь *числа a и b взаимно просты в том и только в том случае, если взаимно простыми являются числа a и $b - a$.*

Теперь уже ясно, что, поскольку число 1973 — простое (проверьте это!), в наших наборах по одному разу встретится каждая из пар чисел 1,1972; 2,1971; 3,1970; ...; 1971,2; 1972,1 — ведь все это суть пары взаимно простых чисел. А отсюда следует, что число 1973 встречается в наборах I_n с номерами $n > 1973$ (в частности, в наборе $I_{1\,000\,000}$) ровно 1972 раза (это число равно количеству пар 1,1972; 2,1971; ...; 1972,1).

П р и м е ч а н и е. Из решения задачи также следует, что *произвольное* натуральное *число N встречается в наборах I_n* (где $n > N$) *ровно* $\varphi(N)$ *раз, где* $\varphi(N)$ — *число чисел, меньших N и взаимно простых с N*; относительно вычисления (по числу N) величины $\varphi(N)$ см. Примечание к условию задачи 341 (стр. 71—72).

196. Пусть $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ (где все α_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — цифры 0 или 1) последние четыре цифры последовательности. Если бы в последовательности нигде не стояли подряд цифры $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 0$, то ее можно было бы продолжить, приписав в конце 0; аналогично, если бы из последовательности цифр нельзя было бы выделить пятерки цифр $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 1$, то мы могли бы приписать в конце цифру 1. Поэтому в нашей последовательности три раза встречаются последовательные четверки цифр $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ (за одной из них следует цифра 0; за второй — цифра 1; третья стоит в конце). Двум из этих четверок предшествуют цифры 0 и 1, а третьей уже не может предшествовать н и к а к а я цифра α_0 (ибо иначе в последовательности дважды встретилась бы пятерка цифр $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$); поэтому третий

[1]) Символ $\max[a, b]$ означает *большее* (точнее — *не меньшее*) из чисел a, b; так, $\max[2, 7] = 7$ и $\max[4, 4] = 4$.

раз четверка цифр $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ должна стоять в начале последовательности.

197. Число N представляет собой *произведение всех простых чисел от 2 до 37 включительно;* каждый делитель числа N представляет собой произведение некоторых из этих чисел. Покажем, что утверждение задачи справедливо для любого числа $N_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p_k$ — произведения k первых простых чисел[1]). Докажем наше утверждение методом математической индукции (по числу k). Ясно, что при $k = 1$ мы приходим к числу $N_1 = 2$, имеющему лишь два делителя 1 и 2, под которыми будут подписаны, соответственно, числа $+1$ и -1; здесь $+1 + (-1) = 0$. Далее, пусть наше утверждение уже доказано для числа N_k, равного произведению k первых простых чисел; другими словами, мы считаем доказанным, что число N_k имеет четное число $2n$ делителей (включая сюда числа 1 и N_k), n из которых представляют собой произведение четного числа простых сомножителей (эти делители мы условимся называть «четными»; к их числу относится, в частности, число 1, которое имеет четное число нуль простых множителей, поскольку 1 не причисляют ни к простым, ни к составным натуральным числам), а n остальных — произведение нечетного числа простых множителей (их мы назовем «нечетными» делителями N_k). Докажем, что утверждение задачи будет верно и для числа $N_{k+1} = N_k \cdot p_{k+1}$, где p_{k+1} — $(k+1)$-е простое число. Ясно, что все делители числа N_k являются также и делителями числа N_{k+1}; это дает $2n$ делителей N_{k+1}, из которых n являются «четными», а n остальных — «нечетными». Но наряду с этим число N_{k+1} имеет и делители, не являющиеся делителями числа N_k,— те, которые делятся на p_{k+1}. Их можно получить умножением всех делителей числа N_k на p_{k+1}; при этом n «четных» делителей N_k дадут n делителей N_{k+1}, каждый из которых состоит из нечетного числа простых множителей, а n «нечетных» делителей N_k дадут n «четных» делителей N_{k+1}. Таким образом, мы видим, что число N_{k+1} имеет всего $4n$ делителей, $2n (= n + n)$ из которых «четны» и $2n (= n + n)$ — «нечетны». Поэтому для него выписанные в нижнем ряду числа — это $2n$ чисел $+1$ и $2n$ чисел -1; в сумме они также дадут 0.

Примечание. Приведенное рассуждение позволяет даже несколько уточнить высказанное в условии утверждение: из него следует, что число N_k имеет 2^{k-1} «четных» и 2^{k-1} «нечетных» делителей (в частности, фигурирующее в условии задачи число $N = N_{12}$ имеет $2^{11} = 2048$ «четных» и 2048 «нечетных» делителей), и, значит, в случае числа N_k выписанный в нижней строке ряд чисел состоит из 2^{k-1} (2048 в случае числа N) чисел $+1$ и 2^{k-1} чисел -1.

198. Из того, что p и q — взаимно просты, с помощью алгоритма Евклида устанавливается, что *любое целое число n можно представить в виде:*

$$n = px + qy, \text{ где } x \text{ и } y \text{ — целые числа.} \qquad (*)$$

В самом деле, пусть $p > q$; тогда $p = qd + r$, где $0 < r < q$, т. е.

$$r = p \cdot 1 + q(-d) \; (= px_1 + qy_1)$$

[1]) Оно справедливо даже для всех «свободных от квадратов» натуральных чисел, т. е. таких, которые разлагаются в произведение попарно различных простых множителей.

(здесь d — частное, а r — остаток от деления p на q). Далее, имеем $q = rd_1 + r_1$, где $0 < r_1 < r$ (число r_1 — остаток от деления q на r); объединяя эти два равенства, получаем представление r_1 в виде (*):

$$r_1 = q - rd_1 = q - (px_1 + qy_1)d_1 = \\ = p(-x_1d_1) + q(1 - y_1d_1) = px_2 + qy_2,$$

где $x_2 (= -x_1d_1 = -d_1)$ и $y_2 (= 1 - y_1d_1 = 1 + dd_1)$ — целые числа. Затем, полагая $r = r_1d_2 + r_2$, где $0 < r_2 < r_1$, и пользуясь предшествующим равенством, мы точно так же можем представить r_2 в виде комбинации $px_3 + qy_3$ чисел p и q, и т. д. — вплоть до общего наибольшего делителя 1 чисел p и q. (Легко видеть, что последний отличный от нуля остаток будет *общим наибольшим делителем* чисел p и q — в рассматриваемом случае он равен 1.) Но если единицу можно записать в виде $1 = px_k + qy_k$, где x_k, y_k — целые числа, то и любое число $n = n \cdot 1 = n(px_k + qy_k) = p(nx_k) + q(ny_k)$ можно записать в виде (*).

Далее, из того, что p и q взаимно просты, вытекает, что *если n представляется в виде (*) двумя разными способами*:

$$n = px + qy = px' + qy', \text{ где } x,\ y;\ x',\ y' \text{ — целые}, \qquad (**)$$

то *$x - x'$ кратно q и $y - y'$ кратно p*: в самом деле, из (**), например, следует что $p(x - x') = -q(y - y')$, или $x - x' = -q\dfrac{y - y'}{p}$, и так как p и q не имеют общих простых делителей, то $x - x'$ делится на q. Последнее утверждение можно сформулировать как утверждение об «единственности» представления (*): *каждое целое число n можно — и притом единственным образом — записать в виде (*), где $0 \leqslant x < q$*: в самом деле, число x в формуле (*) всегда можно представить в виде $x = kq + x_0$, где $0 \leqslant x_0 < q$ (x_0 есть остаток от деления x на q); при этом

$$n = px + qy = p(kq + x_0) + qy = px_0 + q(pk + y) = px_0 + qy_0, \\ \text{где } 0 \leqslant x_0 < q \text{ и } x_0,\ y_0 \text{ — целые} \quad (***).$$

С другой стороны, два разных представления (***) (т. е. равенство (**), где $0 \leqslant x < q$ и $0 \leqslant x' < q$) невозможны, ибо при этом $|x - x'| < q$ и разность $x - x'$ не делится на q. Число n, очевидно, будет «хорошим», если y_0 в формуле (***) неотрицательно, и «плохим», если y_0 отрицательно: ведь если $n = px_0 + qy_0$, где $0 \leqslant x_0 < q$ и $y_0 < 0$, то, заменив x_0 на $x = x_0 - \lambda q$ и y_0 на $y = x_0 + \lambda p$, где λ — целое, мы никогда не придем к представлению (*) числа n, в котором x и y оба неотрицательны.

Эти замечания позволяют без труда решить задачу.

а) Очевидно, наименьшим «хорошим» числом является число $0 = 0 \cdot p + 0 \cdot q$; наибольшим «плохим» числом, в силу сказанного выше, является число вида (***), где x_0 — наибольшее из «допустимых» (положительных) чисел, т. е. $x_0 = q - 1$, а y_0 — наименьшее из отрицательных чисел, т. е. $y_0 = -1$; таким образом, наибольшее «плохое» число $P = p(q - 1) + q(-1) = pq - p - q$. При этом естественно считать, что эти два числа 0 и P как раз и «дополняют» друг друга до фигурирующего в условии задачи числа A, т. е. что за число A следует принять $P = pq - p - q$. И действительно, если число n имеет вид (***), то число

$$n' = A - n = (pq - p - q) - (px_0 + qy_0) = \\ = p(q - 1 - x_0) + q(-1 - y_0)$$

имеет тот же вид (***), где только роль x_0 играет число $x_0' = q-1-x_0$, а роль y_0 — число $y_0' = -1-y_0$. Но если $0 \leqslant x_0 \leqslant q-1$, то и $0 \leqslant x_0' \leqslant q-1$ и из чисел y_0 и y_0' одно положительно, а другое отрицательно; это и доказывает утверждение задачи.

б) Первое решение. Из результата задачи а) непосредственно следует, что среди чисел n, где $0 \leqslant n \leqslant P = pq-p-q$ (P — это наибольшее «плохое» число), ровно половина будет «плохими», а остальные — «хорошими»; так как при этом мы учтем все натуральные «плохие» числа, то интересующее нас количество t таких чисел

$$t = \frac{P+1}{2} = \frac{pq-p-q+1}{2} = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Второе решение. «Плохими» являются такие натуральные числа n, которые представимы в виде (***), где $0 \leqslant x_0 < q$, $y_0 < 0$ и $px_0 + qy_0 > 0$ (ибо число n положительно). На плоскости с координатами x_0, y_0 линии $x_0 = q$, $y_0 = 0$, $px_0 + qy_0 = 0$ выделяют заштрихованный на рис. 22 треугольник; нам надо найти число «целых точек» в этом треугольнике. Но ясно, что это число ровно вдвое меньше числа «целых точек» в прямоугольнике $OABC$ (на диагонали прямоугольника «целых точек» нет, ибо p и q взаимно просты). Так как число «целых точек» внутри прямоугольника, очевидно, равно $(p-1)\cdot(q-1)$, то мы приходим к тому же значению искомого числа t, что и выше.

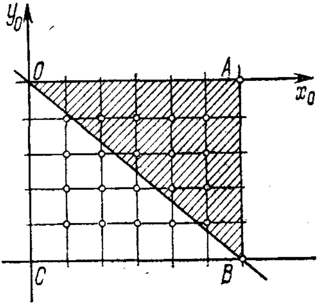


Рис. 22.

199. Первое решение. Нам надо доказать, что каждое целое неотрицательное число n единственным образом представляется в виде:

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \frac{(x+y)^2 + (x+y) + 2x}{2} = \frac{(x+y)^2 + (x+y)}{2} + x = \frac{X(X+1)}{2} + x,$$

где $X = x + y$ и, значит, $X \geqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant X$ (напомним, что числа x и y неотрицательны). Но ясно, что при фиксированном $X \geqslant 0$ и x, меняющемся в «допустимых» пределах от 0 до X, число $n = \frac{X(X+1)}{2} + x$ будет принимать все целые значения в пределах от $N_X = \frac{X(X+1)}{2}$ (случай $x = 0$) и до $N_X = \frac{X(X+1)}{2} + X$ (случай $x = X$), причем каждое из этих значений встретится по одному разу. Следующее целое число $N_X + 1 = \frac{X(X+1)}{2} + X + 1 = \frac{(X+1)(X+2)}{2}$ отвечает на единицу большему значению X (значению $X+1$) и величине $x = 0$; при изменении x от 0 до $X+1$ мы точно так же получим все целые числа от $N_{X+1}=\frac{(X+1)(X+2)}{2}$ до $N'_{X+1}=N_{X+2}-1$, и т. д. Это рассуждение доказывает утверждение задачи.

Второе решение. Перенумеруем все точки плоскости с неотрицательными координатами (x, y) в таком порядке, как это показано на рис. 23. Мы утверждаем, что при этом точка с координатами x, y получит номер $n=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$ — отсюда и будет следовать утверждение задачи, ибо в такой бесконечной цепочке точек x, y точка с (целым неотрицательным) номером n встретится ровно один раз.

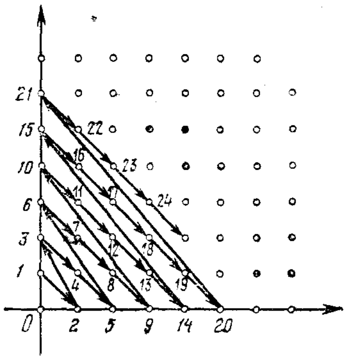


Рис. 23.

Доказательство можно провести индукцией по n. Ясно, что номер $n=0$ будет иметь точка с координатами (0,0) а номер 1 — точка с координатами (0,1); при этом

$$0=\frac{(0+0)^2+3\cdot 0+0}{2} \quad \text{и}$$

$$1=\frac{(0+1)^2+3\cdot 0+1}{2}.$$

Предположим теперь, что для всех точек нашей цепочки, вплоть до точки с номером n, требуемое утверждение уже доказано; при этом «n-я» точка пусть имеет координаты x, y. Если здесь $y\neq 0$, то «$(n+1)$-я» точка будет иметь координаты $x+1$, $y-1$ — и действительно

$$\frac{[(x+1)+(y-1)]^2+3(x+1)+(y-1)}{2}=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}+1=$$
$$=n+1;$$

если же $y=0$, то «$(n+1)$-я» точка имеет координаты $(0, x+1)$ — и также

$$\frac{(0+x+1)^2+3\cdot 0+(x+1)}{2}=\frac{(x+0)^2+3x+0}{2}+1=n+1.$$

200. Каждой несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где

$$0<p\leqslant 100,\quad 0<q\leqslant 100, \qquad (*)$$

сопоставим точку M с координатами p, q; при этом неравенства (*) указывают, что точка M расположена внутри заштрихованного на рис. 24 квадрата $\mathscr{K}=OACB$, ограниченного осями координат и прямыми $x=100$ и $y=100$ (или, в крайнем случае, M принадлежит стороне AC или стороне BC квадрата $\mathscr{K}$), а несократимость дроби $\frac{p}{q}$ означает, что на отрезке OM нет никаких отличных от M «целых» точек (точек с целыми координатами: в самом деле, равенства $p = kp_1$, $q = kq_1$, указывающие, что дробь $\frac{p}{q}$ можно сократить на k, означают, что отрезку OM принадлежит также целая точка $M_1(p_1\ q_1)$. При этом если высекаемый квадратом $\mathscr{K}$ на проходящей через O прямой l отрезок OP содержит n целых точек (p_0, q_0), $(2p_0, 2q_0)$, $(3p_0, 3q_0)$, ..., (np_0, nq_0) (где $M_0(p_0, q_0)$ — самая близкая к O из этих точек), то (поскольку $np_0 \leqslant 100$, $nq_0 \leqslant 100$) имеем $p_0 \leqslant \frac{100}{n}$ $\left(< \frac{100}{n-1} < \frac{100}{n-2} < \ldots < \frac{100}{1}\right)$ и $q_0 \leqslant \frac{100}{n} \left(< \frac{100}{n-1} < \frac{100}{n-2} < \ldots < \frac{100}{1}\right)$ и, значит несократимая дробь $\frac{p_0}{q_0}$ учитывается в слагаемых $d\left(\frac{100}{1}\right)$,

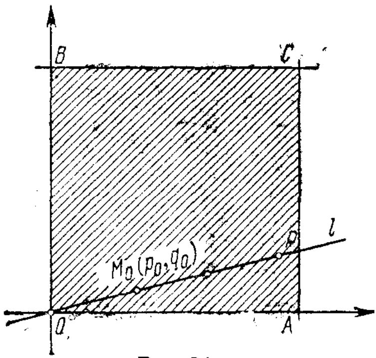


Рис. 24.

$d\left(\frac{100}{2}\right)$, ..., $d\left(\frac{100}{n}\right)$ суммы S, т. е. всего участвует в этой сумме n раз (а сократимые дроби $\frac{2p_0}{2q_0}$, $\frac{3p_0}{3q_0}$, ..., $\frac{np_0}{nq_0}$, разумеется, вообще не учитываются в сумме S). Таким образом, *вклад дроби $\frac{p_0}{q_0}$ в сумму S равен n*, т. е. *равен числу целых точек на отрезке OP*.

Из доказанного следует, что общее число учитываемых в сумме S дробей — т. е. численное значение суммы S — равно полному числу всех целых точек в квадрате $\mathscr{K}$, т. е. $S = 100 \cdot 100 = 10\,000$.

201. 1) Пусть x — любое действительное число. Тогда его можно представить в виде суммы $x = [x] + \alpha$, где α — неотрицательное число меньшее единицы. Представим теперь y в виде $y = [y] + \beta$ $(0 \leqslant \beta < 1)$. Тогда $x + y = [x] + [y] + \alpha + \beta$. Так как $\alpha + \beta \geqslant 0$, то из этого равенства видно, что $[x] + [y]$ есть целое число, не превосходящее $x + y$. А так как $[x + y]$ есть н а и б о л ь ш е е из таких целых чисел, то $[x + y] \geqslant [x] + [y]$.

2) П е р в о е р е ш е н и е. Представим x в виде $[x] + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha < 1$. Пусть целое число $[x]$ при делении на n дает в частном q и в остатке r, т. е. $[x] = qn + r$ $(0 \leqslant r \leqslant n - 1)$. В таком случае имеем:

$$\frac{[x]}{n} = q + \frac{r}{n}, \quad \left[\frac{[x]}{n}\right] = q, \quad x = qn + r + \alpha = qn + r_1,$$

где $r_1 = r + \alpha < n$, $\frac{x}{n} = q + \frac{r_1}{n}$, $\left[\frac{x}{n}\right] = q = \left[\frac{[x]}{n}\right]$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Рассмотрим все целые числа, делящиеся на n и не бо́льшие x. Их число, очевидно равно $\left[\frac{x}{n}\right]$. Рассмотрим также все целые числа, делящиеся на n и не большие $[x]$. Их число равно $\left[\frac{[x]}{n}\right]$. Но так как это — одни и те же числа, то их количества равны; следовательно, $\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right]$.

3) Если $(x) = [x]$ $\left(\text{т. е. } x - [x] < \frac{1}{2}\right)$, то $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x]$; $[2x] = 2[x]$ и $[2x] - [x] = 2[x] - [x] = [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$; если же $(x) = [x] + 1$ $\left(\text{т. е. } x - [x] \geqslant \frac{1}{2}\right)$, то $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [x] + 1$, $[2x] = 2[x] + 1$ — и опять $[2x] - [x] = 2[x] + 1 - [x] = [x] + 1 = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

4) Первое решение. Представим x в виде $x = [x] + \alpha$. Так как $0 \leqslant \alpha < 1$, то α содержится между некоторыми двумя соседними из дробей $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Пусть эти дроби будут $\frac{k}{n}$ и $\frac{k+1}{n}$, т. е. пусть $\frac{k}{n} \leqslant \alpha < \frac{k+1}{n}$; тогда имеем:

$$x + \frac{n-k-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k-1}{n} < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-k-1}{n} = [x] + 1,$$

$$x + \frac{n-k}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-k}{n} \geqslant [x] + \frac{k}{n} + \frac{n-k}{n} = [x] + 1$$

и

$$x + \frac{n-1}{n} = [x] + \alpha + \frac{n-1}{n} < [x] + \frac{k+1}{n} + \frac{n-1}{n} = [x] + \frac{n+k}{n} < [x] + 2.$$

Отсюда следует, что

$$[x] \leqslant \left[x + \frac{1}{n}\right] \leqslant \left[x + \frac{2}{n}\right] \leqslant \ldots \leqslant \left[x + \frac{n-k-1}{n}\right] < [x] + 1,$$

$$[x] + 1 \leqslant \left[x + \frac{n-k}{n}\right] \leqslant \left[x + \frac{n-k+1}{n}\right] \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant \left[x + \frac{n-1}{n}\right] < [x] + 2,$$

т. е.

$$[x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\left[x+\frac{2}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-k-1}{n}\right],$$

$$\left[x+\frac{n-k}{n}\right]=\left[x+\frac{n-k+1}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1.$$

Так как первых чисел $n-k$, а вторых k, то

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=$$

$$=(n-k)[x]+k([x]+1)=n[x]+k.$$

Но тому же равна и целая часть числа nx. Действительно, так как $k\leqslant n\alpha<k+1$, то $n\alpha=k+\beta$, где $0\leqslant\beta<1$. Следовательно,

$$[nx]=[n[x]+n\alpha]=[n[x]+k+\beta]=n[x]+k.$$

Таким образом, доказано, что

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Второе решение. Рассмотрим левую часть равенства. Если $0\leqslant x<\frac{1}{n}$, то все числа $x, x+\frac{1}{n}, \ldots, x+\frac{n-1}{n}$ меньше 1, а целая часть от них равна 0; $[nx]$ тоже равно 0. Поэтому для таких x равенство верно.

Пусть теперь x — произвольное. Если увеличить x на $\frac{1}{n}$, то все слагаемые в левой части сдвинутся на одно место вправо, а последнее слагаемое $\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$ перейдет в $[x+1]$, которое на 1 больше, чем $[x]$. Значит, с увеличением x на $\frac{1}{n}$ левая часть увеличивается на 1. Правая часть с увеличением x на $\frac{1}{n}$ тоже увеличивается на 1. Для любого x можно найти такое число α, заключенное между 0 и $\frac{1}{n}$ $\left(0\leqslant\alpha<\frac{1}{n}\right)$, что x отличается от α на $\frac{m}{n}$, где m — целое число. Отсюда следует, что равенство сохраняется при любом x.

202. Первое решение. В силу результата задачи 201 3) интересующая нас сумма (которая, очевидно, содержит лишь конечное число отличных от нуля членов) равна

$$\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{8}+\frac{1}{2}\right]+\ldots=$$

$$=\left([n]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n}{8}\right]\right)+\ldots=[n]=n.$$

Второе решение. При $n=1$ рассматриваемая сумма, очевидно, равна 1. Далее, при замене n на $n+1$ каждый член суммы либо не меняется, либо возрастает на 1; при этом реально возрастает на 1 единственный член этой суммы — отвечающий такому значению k, что 2^k есть наивысшая степень двойки, на которую делится $n+1$. В самом деле, если $n+1=2^k(2m+1)$, то

$$\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{2^k(2m+2)}{2^{k+1}}\right]=m+1,$$

$$\text{а} \quad \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[m+1-\frac{1}{2^{k+1}}\right]=m,$$

в то время как при $i \neq k$ имеем $\left[\dfrac{n+1+2^i}{2^{i+1}}\right]=\left[\dfrac{n+2^i}{2^{i+1}}\right]$ (почему?).

Отсюда, в силу принципа математической индукции, вытекает, что интересующая нас сумма при всех n равна n.

203. Отметим все точки плоскости с обеими целыми координатами («целые» точки), для которых $1 \leqslant x \leqslant q-1$, $1 \leqslant y \leqslant p-1$ (x и y — координаты точек). Эти точки лежат внутри прямоугольника $OABC$, длины сторон которого равны $OA=q$ и $OC=p$

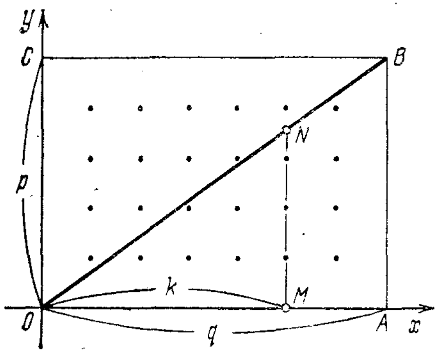


Рис. 25.

(рис. 25); число всех точек равно $(q-1)(p-1)$. Проведем диагональ OB прямоугольника. Ясно, что на этой диагонали не будет расположена ни одна «целая» точка (координаты x и y всех точек диагонали OB связаны соотношением $\dfrac{x}{y}=\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{q}{p}$; но так как q и p — взаимно простые, то не существует целых положительных чисел $x<p$ и $y<q$, таких, что $\dfrac{x}{y}=\dfrac{q}{p}$). Заметим теперь, что число «целых» точек, имеющих абсциссу, равную k (k — какое-то целое

положительное число, меньшее q), и расположенных под диагональю OB, равно целой части длины отрезка MN, изображенного на рис. 25. Так как $MN=\frac{OM}{OA}\cdot AB=\frac{kp}{q}$, то это число равно $\left[\frac{kp}{q}\right]$. Следовательно, сумма

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

равна общему числу всех «целых» точек, расположенных под диагональю OB. Но всего внутри прямоугольника имеется $(q-1)\times\times(p-1)$ «целых» точек; из симметрии расположения этих точек относительно центра прямоугольника $OABC$ следует, что ровно половина из них расположена под диагональю OB (здесь существенно, что на самой диагонали не лежит ни одна из точек). Таким образом,

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(q-1)(p-1)}{2}.$$

Точно так же доказывается, что

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

204. Первое решение. При $n=1$ мы в левой и правой частях равенств имеем по одному члену, равному 1; следовательно, в этом случае равенства справедливы. Докажем теперь, что если наше равенство справедливо для какого-то значения n, то оно будет справедливо и для значения $n+1$; в силу принципа математической индукции, отсюда будет следовать, что равенство справедливо при всех значениях n.

Отметим, что если $n+1$ не делится на k:

$$n+1=qk+r,$$

где остаток r заключен между 1 и $k-1$, то $n=qk+r'$, где $r'=r-1$, т. е. $0\leqslant r'\leqslant k-2$; отсюда следует, что в этом случае величины $\left[\frac{n+1}{k}\right]$ и $\left[\frac{n}{k}\right]$ совпадают (обе они равны q). Если же $n+1$ делится на k: $n+1=qk$, то, очевидно, $\left[\frac{n+1}{k}\right]=q$, $\left[\frac{n}{k}\right]=q-1$, т. е. $\left[\frac{n+1}{k}\right]=\left[\frac{n}{k}\right]+1$. Таким образом,

$$\left[\frac{n+1}{k}\right]=\left[\frac{n}{k}\right], \text{ если } k \text{ не есть делитель числа } n+1;$$

$$\left[\frac{n+1}{k}\right]=\left[\frac{n}{k}\right]+1, \text{ если } k \text{ есть делитель числа } n+1.$$

А отсюда вытекает, что:

а) $$\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n+1}\right]+\tau_{n+1},$$

т. е. если

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n,$$

то

$$\left[\frac{n+1}{1}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n+\tau_{n+1};$$

б) $$\left[\frac{n+1}{1}\right]+2\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+(n+1)\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+(n+1)\left[\frac{n}{n+1}\right]+\sigma_{n+1},$$

т. е. если

$$\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right]=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n,$$

то

$$\left[\frac{n+1}{1}\right]+2\left[\frac{n+1}{2}\right]+\ldots+(n+1)\left[\frac{n+1}{n+1}\right]=\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n+\sigma_{n+1}.$$

Второе решение. Число чисел ряда 1, 2, 3, ..., n, делящихся на какое-то выбранное число k, равно $\left[\frac{n}{k}\right]$ (это будут числа $k, 2k, 3k, \ldots, \left[\frac{n}{k}\right]k$); сумма делителей k всех таких чисел равна $k\left[\frac{n}{k}\right]$. Отсюда следует, что:

а) Сумма $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{k}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]$ равна числу чисел ряда 1, 2, 3, ..., n, делящихся на 1, плюс число чисел этого ряда, делящихся на 2, ..., плюс число чисел этого ряда, делящихся на n. Но этому же равна сумма $\tau_1+\tau_2+\tau_3+\ldots+\tau_n$.

б) Сумма $1\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+k\left[\frac{n}{k}\right]+\ldots+n\left[\frac{n}{n}\right]$ равна сумме делителей 1 всех чисел ряда 1, 2, 3, ..., n, плюс сумма делителей 2 всех чисел этого ряда, плюс сумма делителей 3 всех чисел этого ряда, ..., плюс сумма делителей n всех чисел этого ряда. Но этому же равна и сумма $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\ldots+\sigma_n$.

Третье решение. Приведем еще изящное геометрическое решение задачи, близкое ко второму решению. Рассмотрим равностороннюю гиперболу (график обратной пропорциональности) $y = \frac{k}{x}$, или, что то же самое, $xy = k$ (точнее, ветвь этой гиперболы, расположенную в первом координатном углу; см. рис. 26, *а*)).

Отметим, кроме того, в первом координатном углу все точки с целыми координатами. Тогда, если x есть делитель числа k, то на равносторонней гиперболе $xy = k$ есть целочисленная точка с абс-

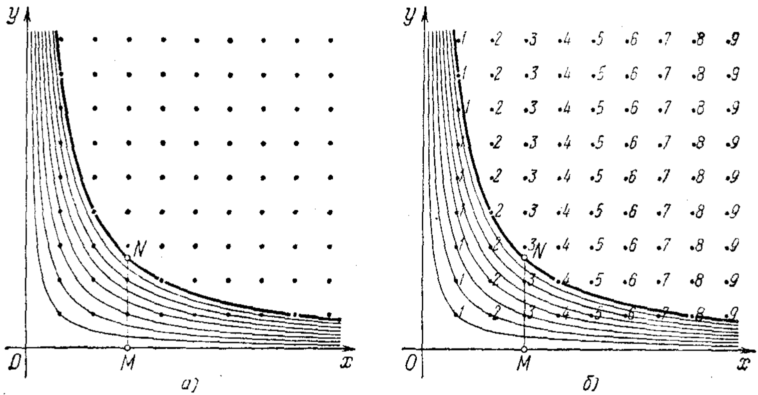


Рис. 26.

циссой x. Обратно, если гипербола $xy = k$ проходит через целочисленную точку с абсциссой x, то x есть делитель числа k. Таким образом, число τ_k делителей числа k равно числу целочисленных точек, лежащих на гиперболе $xy = k$; сумма делителей σ_k этого числа равна сумме абсцисс целочисленных точек, лежащих на гиперболе $xy = k$. Далее, воспользуемся еще тем, что все гиперболы $xy = 1$, $xy = 2$, $xy = 3$, ..., $xy = n - 1$ расположены ниже гиперболы $xy = n$. Отсюда можно сделать следующие выводы.

а) Сумма $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n$ равна числу всех целочисленных точек, лежащих под гиперболой $xy = n$ (и на самой гиперболе). Но, с другой стороны, ни одна из этих точек не имеет абсциссы, большей n; число же целочисленных точек с абсциссой k, расположенных под гиперболой, равно целой части длины отрезка MN, изображенного на рис. 26, *а*), т. е. $\left[\frac{n}{k}\right]$, так как $MN = \frac{n}{k}$ (сравните с решением задачи 203). Таким образом, имеем:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

б) Припишем каждой целочисленной точке номер, равный ее абсциссе (рис. 26, б)); в таком случае сумма $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n$ равна сумме номеров всех целочисленных точек, расположенных под гиперболой $xy = n$. С другой стороны, сумма номеров всех таких точек, имеющих абсциссу k, равна $k\left[\frac{n}{k}\right]$. Таким образом, имеем:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + 3\left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right].$$

205. Очевидно, что $(2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n$ есть целое число; действительно, если $(2+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, где a_n и b_n — целые числа, то $(2-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ (это вытекает из формулы бинома Ньютона, а также может быть доказано методом математической индукции). Так как $(2-\sqrt{2})^n < 1$, то отсюда следует, что

$$[(2+\sqrt{2})^n] = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n - 1$$

и, следовательно,

$$(2+\sqrt{2})^n - [(2+\sqrt{2})^n] = 1 - (2-\sqrt{2})^n.$$

Но так как $(2-\sqrt{2}) < 1$, то, взяв степень n достаточно большой, можно сделать выражение $(2-\sqrt{2})^n$ сколь угодно малым. А если $(2-\sqrt{2})^n < 0{,}000001$, то

$$(2+\sqrt{2})^n - [(2+\sqrt{2})^n] = 1 - (2-\sqrt{2})^n > 0{,}999999.$$

206. а) Первое решение. Так как $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ есть целое число и $(2-\sqrt{3})^n < 1$, то

$$[(2+\sqrt{3})^n] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$$

(сравните с решением задачи 205). Но, раскрыв скобки по формуле бинома Ньютона, получим, что

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2\left(2^n + C_n^2 2^{n-2}\cdot 3 + C_n^4 2^{n-4}\cdot 3^2 + \ldots\right)$$

делится на 2 и, следовательно, $[(2+\sqrt{3})^n] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$ нечетно.

Второе решение. Число $(2+\sqrt{3})^n$ можно представить в виде $a_n + b_n\sqrt{3}$, где a_n и b_n — целые числа. Докажем, что

$$a_n^2 - 3b_n^2 = 1.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Прежде всего для $n = 1$ имеем $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ и $2^2 - 3\cdot 1 = 1$.

Далее предположим, что для некоторого n

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3},$$

где $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$; в таком случае имеем:

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) =$$
$$= (2a_n + 3b_n) + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}.$$

Отсюда $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$; $b_{n+1} = a_n + 2b_n$. Следовательно,

$$a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 = a_n^2 - 3b_n^2 = 1.$$

Тем самым доказано, что $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ при любом n.

Отсюда следует, что

$$[a_n + b_n\sqrt{3}] = a_n + [b_n\sqrt{3}] = a_n + \left[\sqrt{3b_n^2}\right] =$$
$$= a_n + \left[\sqrt{a_n^2 - 1}\right] = a_n + (a_n - 1) = 2a_n - 1,$$

т. е. $[(2+\sqrt{3})^n] = [a_n + b_n\sqrt{3}]$ нечетно.

б) Заметим, что

$$[(1+\sqrt{3})^n] = \begin{cases} (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n - 1 & \text{при } n \text{ четном}, \\ (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Действительно, стоящая в нашей формуле справа сумма является целым числом (см. первое решение задачи а)). При n четном $0 < (1-\sqrt{3})^n < 1$, а при n нечетном $-1 < (1-\sqrt{3})^n < 0$.

Рассмотрим теперь отдельно случаи четного и нечетного n.

1) n четно, $n = 2m$; тогда

$$[(1+\sqrt{3})^{2m}] = (1+\sqrt{3})^{2m} + (1-\sqrt{3})^{2m} - 1 =$$
$$= \{(1+\sqrt{3})^2\}^m + \{(1-\sqrt{3})^2\}^m - 1 =$$
$$= (4+2\sqrt{3})^m + (4-2\sqrt{3})^m - 1 =$$
$$= 2^m\{(2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m\} - 1.$$

Но стоящее в фигурных скобках число является, очевидно, целым, и следовательно, число $[(1+\sqrt{3})^{2m}] = 2^m N - 1$ всегда нечетно. Таким образом, при четном n наивысшая степень 2, на которую делится $[(1+\sqrt{3})^n]$, равна нулю.

2) n нечетно, $n = 2m+1$; тогда

$$[(1+\sqrt{3})^{2m+1}] = (1+\sqrt{3})^{2m+1} + (1-\sqrt{3})^{2m+1} =$$
$$= (4+2\sqrt{3})^m(1+\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3})^m(1-\sqrt{3}) =$$
$$= 2^m\{(2+\sqrt{3})^m(1+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})^m(1-\sqrt{3})\} =$$
$$= 2^m\{((2+\sqrt{3})^m + (2-\sqrt{3})^m) +$$
$$+ \sqrt{3}((2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m)\}.$$

Пусть $(2+\sqrt{3})^m = a_m + b_m\sqrt{3}$, где a_m и b_m — целые числа; тогда $(2-\sqrt{3})^m = a_m - b_m\sqrt{3}$. Подставив эти значения, получим:

$$[(1+\sqrt{3})^{2m+1}] = 2^m\{a_m + b_m\sqrt{3} + a_m - b_m\sqrt{3} + \\ + \sqrt{3}(a_m + b_m\sqrt{3} - a_m + b_m\sqrt{3})\} = \\ = 2^m(2a_m + 6b_m) = 2^{m+1}(a_m + 3b_m).$$

Но $a_m + 3b_m$ нечетно. Действительно,

$$(a_m + 3b_m)(a_m - 3b_m) = a_m^2 - 9b_m^2 = (a_m^2 - 3b_m^2) - 6b_m^2 = 1 - 6b_m^2$$

(см. второе решение задачи а)). Так как $1-6b_m^2$ нечетно, то оба множителя $(a_m + 3b_m)$ и $(a_m - 3b_m)$ нечетны. Следовательно, наивысшая степень 2, на которую делится $[(1+\sqrt{3})^n]$ при нечетном $n = 2m+1$, равна

$$m+1 = \frac{n+1}{2} = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

207. Из того, что $(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$ — целое число и $-1 < (2-\sqrt{5})^p < 0$ (ибо p нечетно), следует, что

$$[(2+\sqrt{5})^p] = (2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p$$

(сравните с решениями задач 205 и 206). По формуле бинома Ньютона имеем:

$$(2+\sqrt{5})^p + (2-\sqrt{5})^p = \\ = 2\left(2^p + C_p^2 2^{p-2}5 + C_p^4 2^{p-4}5^2 + \ldots + C_p^{p-1}2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}\right),$$

так что

$$[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1} = \\ = 2\left(C_p^2 2^{p-2}5 + C_p^4 2^{p-4}5^2 + \ldots + C_p^{p-1}2\cdot 5^{\frac{p-1}{2}}\right).$$

Но все биномиальные коэффициенты

$$C_p^2 = \frac{p(p-1)}{1\cdot 2},\quad C_p^4 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots,\ C_p^{p-1} = p$$

делятся на простое число p (ибо числитель выражения для C_p^k делится на p, а знаменатель не делится). Значит, и разность $[(2+\sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ делится на p, что и требовалось доказать.

208. $C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$. Из p последовательных целых чисел $n, n-1, n-2, \ldots, n-p+1$ одно и только одно число делится на p; обозначим это число буквой N. В таком случае

$\left[\frac{n}{p}\right]=\frac{N}{p}$ и разность, стоящая в условии задачи, принимает вид

$$\frac{n(n-1)\ldots(N+1)N(N-1)\ldots(n-p+1)}{p!}-\frac{N}{p}.$$

Заметим теперь, что числа $n, n-1, \ldots, N+1, N-1, \ldots$ $\ldots, n-p+1$ дают при делении на p всевозможные остатки $1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, p-1$ (p последовательных целых чисел от $n-p+1$ до n дают при делении на p все остатки $0, 1, 2, \ldots, p-1$, причем каждый из них по одному разу). Отсюда следует, что разность

$$n(n-1)\ldots(N+1)(N-1)\ldots(n-p+1)-(p-1)!$$

делится на p (для доказательства достаточно перемножить почленно все равенства $n=k_1p+a_1$, $n-1=k_2p+a_2$, $\ldots$, $N+1=k_ip+a_i$, $N-1=k_{i+1}p+a_{i+1}$, $\ldots$, $n-p+1=k_{p-1}p+a_{p-1}$, где $k_1, k_2, \ldots, k_{p-1}$ — целые числа, а $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ равны числам $1, 2, \ldots, p-1$, взятым в каком-то неизвестном нам порядке). Умножая эту разность на целое число $\frac{N}{p}$, получим:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p}-\frac{N(p-1)!}{p};$$

новая разность, разумеется, будет по-прежнему делиться на p. Разделив, наконец, оба члена последней разности на $(p-1)!$, мы придем к требуемому результату (частное от деления на $(p-1)!$ также будет делиться на p, ибо $(p-1)!$ взаимно просто с p).

209. Пусть $\alpha>0$. Ясно, что значение $\alpha=1$ удовлетворяет условию задачи; если же $\alpha>1$ и, соответственно, $\frac{1}{\alpha}=\beta<1$, то $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[3\alpha]$, $\ldots$, $[N\alpha]$ все различны между собой — и нам лишь надо, чтобы были все различны числа $[\beta]$, $[2\beta]$, $[3\beta]$, $\ldots$, $[N\beta]$. Но поскольку $[N\beta]\leqslant N\beta<N$, то $[N\beta]\leqslant N-1$ — и единственная возможность для N неотрицательных чисел $[\beta]$, $[2\beta]$, $\ldots$, $[N\beta]$ принимать N различных значений доставляется равенствами

$$[\beta]=0,\ [2\beta]=1,\ [3\beta]=2, \ldots, [N\beta]=N-1. \qquad (*)$$

А так как равенство $[k\beta]=k-1$ равносильно неравенствам $k-1\leqslant k\beta<k$, т. е.

$$1-\frac{1}{k}\leqslant\beta<1 \qquad (k=1, 2, \ldots, N), \qquad (**)$$

то система равенств (*) равносильна неравенствам (**), т. е. двойному неравенству

$$1-\frac{1}{N}\leqslant\beta<1.$$

Итак, если $\alpha>1$, то $\frac{N-1}{N}\leqslant\beta=\frac{1}{\alpha}<1$, и, значит, $1<\alpha\leqslant\frac{N}{N-1}$, а если $\alpha<1$, то $\frac{N-1}{N}\leqslant\alpha<1$ (мы это, по существу, уже выше доказали). Присоединяя сюда значение $\alpha = 1$, заключаем, что при $\alpha > 0$ должно быть $\frac{N-1}{N} \leqslant \alpha \leqslant \frac{N}{N-1}$; аналогично этому устанавливается, что при $\alpha < 0$ должно быть $-\frac{N-1}{N} \geqslant \alpha \geqslant -\frac{N}{N-1}$.

210. Первое решение. Очевидно, что $(a) = \left[a + \frac{1}{2}\right]$; таким образом, равенство, которое нам требуется доказать, принимает вид

$$N = \left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{N}{8} + \frac{1}{2}\right] + \ldots$$

Пусть теперь

$$N = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$$

($a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ равны 0 или 1) — разложение числа N по степеням двойки (запись N в двоичной системе счисления). В таком случае, очевидно:

$$\left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right] = \left[a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 + \frac{a_0 + 1}{2}\right] =$$

$$= a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_1 + a_0,$$

$$\left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right] = \left[a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \ldots + \frac{a_1 + 1}{2} + \frac{a_0}{4}\right] =$$

$$= a_n \cdot 2^{n-2} + a_{n-1} \cdot 2^{n-3} + \ldots + a_1,$$

. . . .

$$\left[\frac{N}{2^n} + \frac{1}{2}\right] = \left[a_n + \frac{a_{n-1} + 1}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \ldots + \frac{a_0}{2^n}\right] = a_n + a_{n-1},$$

$$\left[\frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{a_0 + 1}{2} + \frac{a_{n-1}}{4} + \ldots + \frac{a_0}{2^{n+1}}\right] = a_n$$

и

$$\left[\frac{N}{2^{n+2}} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{N}{2^{n+3}} + \frac{1}{2}\right] = \ldots = 0$$

(напоминаем, что $a_n, \ldots, a_0$ равны 0 или 1). Таким образом, имеем:

$$\left[\frac{N}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{N}{4} + \frac{1}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right] + \ldots =$$

$$= a_n (2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1 + 1) +$$

$$+ a_{n-1} (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1 + 1) + \ldots + a_1 (1 + 1) + a_0 =$$

$$= a_n 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0 = N,$$

что и требовалось доказать.

Второе решение. Очевидно, что число нечетных чисел, не превосходящих N, равно $\frac{N}{2}$, если N четно, и равно $\frac{N+1}{2}=\left[\frac{N}{2}\right]+1$, если N нечетно, т. е. равно $\left(\frac{N}{2}\right)$. Точно так же число не превосходящих N четных чисел, не делящихся на 4, равно $\left[\frac{N}{4}\right]$, если N делится на 4 или дает при делении на 4 остаток 1, и равно $\left[\frac{N}{4}\right]+1$, если N дает при делении на 4 остаток 2 или 3; другими словами, это число всегда равно $\left(\frac{N}{4}\right)$. Точно так же число не превосходящих N чисел, делящихся на 4, но не делящихся на 8, равно $\left[\frac{N}{8}\right]$, если N делится на 8 или дает при делении на 8 остатки 1, 2 или 3, и равно $\left[\frac{N}{8}\right]+1$ в противном случае, т. е. это число всегда равно $\left(\frac{N}{8}\right)$. Аналогично доказывается, что $\left(\frac{N}{16}\right)$ равно числу не превосходящих N чисел, делящихся на 8 и не делящихся на 16; $\left(\frac{N}{32}\right)$ равно числу не превосходящих N чисел, делящихся на 16, но не делящихся на 32, и т. д. Таким образом мы переберем все целые числа от 1 до N; следовательно,

$$\left(\frac{N}{2}\right)+\left(\frac{N}{4}\right)+\left(\frac{N}{8}\right)+\ldots=N,$$

что и требовалось доказать.

211. Легко проверить, что $2^{10}=1024$; таким образом, $2^{100}=1024^{10}$. Так как $1000^{10}=10^{30}$ представляет собой число, составленное из единицы с 30 нулями, а $1024^{10}>1000^{10}$, то число $2^{100}=1024^{10}$ не может иметь меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}}<\left(\frac{1025}{1000}\right)^{10}=\left(\frac{41}{40}\right)^{10}=$$

$$=\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}<$$

$$<\frac{41}{40}\cdot\frac{40}{39}\cdot\frac{39}{38}\cdot\frac{38}{37}\cdot\frac{37}{36}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{35}{34}\cdot\frac{34}{33}\cdot\frac{33}{32}\cdot\frac{32}{31}=\frac{41}{31}<10,$$

так как

$$\frac{41}{40}<\frac{40}{39}<\frac{39}{38}\ \ldots,\ \text{и т. д.}$$

$$\left(\text{ибо } \frac{41}{40}=1+\frac{1}{40};\ \frac{40}{39}=1+\frac{1}{39},\ \text{и т. д.}\right).$$

Таким образом,

$$2^{100}=1024^{10}<10\cdot 1000^{10},$$

откуда следует, что 2^{100} содержит меньше 32 цифр. Итак, число 2^{100} состоит из 31 цифры.

Примечание. Эту задачу очень легко решить, если пользоваться логарифмами: так как $\log 2=0{,}30103$, то $\log 2^{100}=$ $=100\log 2=30{,}103$ и, следовательно, число 2^{100} имеет 31 цифру. Смысл задачи состоит в том, чтобы получить этот результат, не пользуясь логарифмами.

212. а) Первое решение. Обозначим произведение $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}$ через A и рассмотрим еще произведение $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}$. Так как

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{2},\quad \frac{4}{5}>\frac{3}{4},\quad \frac{6}{7}>\frac{5}{6},\quad \ldots,\quad \frac{98}{99}>\frac{97}{98},\quad 1>\frac{99}{100},$$

то $B>A$. Но

$$A\cdot B=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=\frac{1}{100}.$$

Отсюда следует, что

$$A^2<AB=\frac{1}{100},\quad \text{а значит,}\quad A<\frac{1}{10}.$$

Далее, $B<2A=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100}$, ибо

$$\frac{2}{3}<\frac{3}{4},\quad \frac{4}{5}<\frac{5}{6},\quad \frac{6}{7}<\frac{7}{8},\quad \ldots,\quad \frac{98}{99}<\frac{99}{100}.$$

Следовательно,

$$A\cdot 2A>AB=\frac{1}{100}\quad \text{и, значит,}\quad A>\frac{1}{10\sqrt{2}}.$$

Второе решение. Обозначим, как выше,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}=A.$$

Тогда

$$A^2=\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\frac{99^2}{100^2},$$

откуда

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdots\frac{99^2-1}{100^2}<A^2<$$

$$<\frac{1^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdots\frac{99^2}{100^2-1}.$$

Разлагая теперь числители дробей слева и знаменатели дробей справа по формуле разности квадратов, получим:

$$\frac{1}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{6\cdot 6}\cdots\frac{98\cdot 100}{100\cdot 100}<A^2<\frac{1}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 5}{5\cdot 7}\cdots\frac{99\cdot 99}{99\cdot 101},$$

или после сокращения

$$\frac{1}{200}<A^2<\frac{1}{101};\quad \frac{1}{10\sqrt{2}}<A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10},$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Совершенно так же можно доказать и более общее соотношение

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

б) Докажем, что при $n>1$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Доказательство проще всего провести методом математической индукции. При $n=1$ имеем:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{3\cdot 1+1}}.$$

Предположим теперь, что для какого-то значения n

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\dfrac{2n+1}{2n+2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\leqslant\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}.$$

Но

$$\left(\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}\right)^2=\frac{(2n+1)^2}{12n^3+28n^2+20n+4}=$$

$$=\frac{(2n+1)^2}{(12n^3+28n^2+19n+4)+n}=\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2(3n+4)+n}<\frac{1}{3n+4},$$

откуда следует, что

$$\frac{2n+1}{(2n+2)\sqrt{3n+1}}<\frac{1}{\sqrt{3n+4}}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<\frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Отсюда, в силу принципа индукции, заключаем, что при всяком n

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}},$$

причем равенство достигается только при $n=1$.

Подставим теперь в последнее неравенство $n=50$. Мы получим:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{\sqrt{3\cdot 50+1}}=\frac{1}{\sqrt{151}}=\frac{1}{12,288\ldots},$$

что даже сильнее того, что нам требовалось доказать.

213. Решение задачи вытекает из следующих двух очевидных неравенств:

$$31^{11}<32^{11}=(2^5)^{11}=2^{5\cdot 11}=2^{55}$$

и

$$17^{14}>16^{14}=(2^4)^{14}=2^{4\cdot 14}=2^{56}\ (>2^{55}),$$

откуда $31^{11}<17^{14}$. (Заметим, что десятичная запись чисел 31^{11} и 17^{14} содержит несколько десятков цифр; вычислить эти числа точно — нелегкая задача.)

214. а) Так как $2^{2^2}=2^4=16<27=3^3$, то, очевидно, при любом $n>1$ (и, в частности, при $n=1000$)

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2}}}}}}\ (n+1\ \text{число})<2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{3}}}}}}\ (n\ \text{чисел})\leqslant 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^{3}}}}}}\ (n\ \text{чисел}).$$

(При $n=2$ последнее неравенство обращается в равенство, но первое неравенство остается строгим; в единственном случае $n=1$ наше неравенство вообще меняет знак: ясно, что $4=2^2>3$.)

б) Докажем, что при любом $n>1$ (в частности, и при $n=1000$) имеет место неравенство

$$4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}\ (n-1\ \text{цифр})\leqslant 2^{2^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}\ (n\ \text{цифр})<3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\ (n\ \text{цифр});$$

здесь последнее неравенство очевидно, так что доказать надо лишь первое неравенство. Но его можно установить с помощью м е т о д а м а т е м а т и ч е с к о й и н д у к ц и и. Ясно, что при $n=2$, $n-2=0$ слева и справа стоит одно и то же число $4=2^2$; предположим, что соответствующее неравенство уже доказано для некоторого значения n, и рассмотрим «следующее» значение $n+1\geqslant 3$. Мы имеем:

$$4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}\ (n\ \text{четверок})=(2^2)^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}\ (n-1\ \text{четверка})<(2^2)^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}$$

($n-2$ тройки; здесь используется предположение индукции) $=$

$$=2^{2\cdot 2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\ (n-2\ \text{тройки})=2^{2^{\left(3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}+1\right)}}\ (n-2\ \text{тройки})<$$

$$<2^{2^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}}\ (n-1\ \text{тройка}),$$

ибо, очевидно, $3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ ($n-1$ тройка) $>3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}+1$ (в последней «сверхстепени» участвуют $n-1$ цифр).

Это рассуждение и завершает доказательство требуемого неравенства.

215. Пусть запись числа 1974^n содержит k цифр; это означает, что $10^{k-1} \leqslant 1974^n < 10^k$. (Так как $1974^n > 1000^n = 10^{3n}$, то ясно, что $k \geqslant 3n$.) Если запись числа $1974^n + 2^n$ содержит больше чем k цифр, то $1974^n + 2^n \geqslant 10^k$. Но поскольку $1974^n = 2^n \cdot 987^n$, а $1974^n + 2^n = 2^n(987^n + 1)$, то мы имеем, сокращая соответствущие неравенства на 2^n,

$$987^n < 2^{k-n} \cdot 5^k, \text{ а } 987^n + 1 \geqslant 2^{k-n} \cdot 5^k,$$

что возможно только, если $987^n + 1 = 2^{k-n} \cdot 5^k$ (а $987^n = 2^{k-n} \cdot 5^k - 1$).

Так как $k - n \geqslant 3n - n = 2n$, то при $n > 2$ число $2^{k-n} \cdot 5^n$ кратно 8 (и даже 16). С другой стороны, 987 дает при делении на 8 остаток 3; поэтому 987^n дает при делении на 8 тот же остаток, что и 3^n. Но возводя последовательно 3 в степени 1, 2, 3, ... и заменяя каждый раз само число остатком от его деления на 8, мы получим, что степени тройки дают при делении на 8 чередующийся ряд остатков: 3, 1, 3, 1; 3, 1; ...; поэтому число $987^n + 1$ может при делении на 8 давать лишь остатки 4 и 2 — и никогда не разделится на 8 без остатка. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

216. Так как 36^m при любом натуральном m кончается цифрой 6, а 5^n при любом натуральном n кончается цифрой 5, то при $36^m > 5^n$ разность $36^m - 5^n$ оканчивается цифрой 1, а при $36^m < 5^n$ разность $5^n - 36^m$ оканчивается цифрой 9; поэтому десятичная запись числа $N = |36^m - 5^n|$ может кончаться лишь цифрами 1 и 9, и наименьшие возможные значения его — это 1, 9 и 11. Но при $m = 1$, $n = 2$, очевидно, $N = 11$; покажем, что равенства $N = 9$ и $N = 1$ *невозможны*, т. е., что значение $N = 11$ и является н а и м е н ь ш и м. В самом деле, из равенства $5^n - 36^m = 9$ вытекало бы, что $5^n = 36^m + 9$ кратно 9, что невозможно; из равенства же $36^m - 5^n = 1$ вытекало бы, что $5^n = 36^m - 1 = 6^{2m} - 1 = (6^m + 1)(6^m - 1)$, т. е. что $6^m - 1 = 5^k$, а $6^m + 1 = 5^{n-k}$. Но число $6^m + 1$ оканчивается цифрой 7 — и никак не может быть степенью 5, что и требовалось доказать.

217. Имеем:

$$\frac{1}{2^{100}} C_{100}^{50} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100}{2^{50}(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 50) \cdot 2^{50}(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 50)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 100) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 100)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 100}.$$

Далее остается только применить результат задачи 212а).

218. Требуется определить, что больше: $101^n - 99^n$ или 100^n. Составим отношение

$$\frac{101^n - 99^n}{100^n} = \frac{(100+1)^n - (100-1)^n}{100^n} = \frac{2\left(C_n^1 \cdot 100^{n-1} + C_n^3 \cdot 100^{n-3} + \ldots\right)}{100^n} =$$

$$= 2\left(\frac{n}{100} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot 100^3} + \ldots\right).$$

Отсюда сразу ясно, что это отношение больше 1 при $n \geqslant 50$. Покажем, что при $n=49$ оно тоже больше 1:

$$2\left(\frac{49}{100}+\frac{49\cdot 48\cdot 47}{3!\cdot 100^3}+\ldots\right)>2\left(\frac{49}{100}+\frac{18\,424}{100^3}\right)>$$
$$>2\left(\frac{49}{100}+\frac{100^2}{100^3}\right)=1.$$

Покажем теперь, что при $n=48$ наше отношение будет уже меньше 1. Действительно,

$$2\left(\frac{48}{100}+\frac{48\cdot 47\cdot 46}{3!\cdot 100^3}+\frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{5!\cdot 100^5}+\ldots\right)<$$
$$<2\left(\frac{48}{100}+\frac{48^3}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot 100^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{48^5}{(1\cdot 2\cdot 3)\,(2\cdot 3)\,100^5}+\frac{48^7}{(1\cdot 2\cdot 3)\,(2\cdot 3)\,(2\cdot 3)\,100^7}+\ldots\right)=$$
$$=2\left(\frac{48}{100}+\frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^3+\frac{1}{6^2}\left(\frac{48}{100}\right)^5+\ldots\right)<$$
$$<2\,\frac{\frac{48}{100}}{1-\frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^2}=\frac{9600}{9616}<1.$$

Тем более, при $n<48$ отношение будет меньше 1.

Итак, окончательно получаем: 99^n+100^n больше чем 101^n при $n\leqslant 48$ и меньше чем 101^n при $n>48$.

219. Докажем предварительно, что произведение n последовательных целых чисел больше чем квадратный корень из произведения крайних чисел в степени n. Обозначим эти числа через a, $a+1$, ..., $a+n-1$. Тогда k-е число от начала будет $a+k-1$, k-е от конца $a+n-k$. Их произведение

$$(a+k-1)(a+n-k)=a^2+an-a+(k-1)(n-k)\geqslant$$
$$\geqslant a^2+an-a=a(a+n-1),$$

где равенство может достигаться только при $k=1$ или $k=n$. Другими словами, произведение двух чисел, равноотстоящих от концов (в случае нечетного n эти два числа могут, в частности, оба равняться среднему числу), всегда больше чем произведение крайних. Но тогда произведение всех чисел

$$a(a+1)\ldots(a+n-1)\geqslant[a(a+n-1)]^{\frac{n}{2}}=[\sqrt{a(a+n-1)}]^n,$$

где знак равенства имеет место только при $n=1$ или $n=2$.

Докажем теперь, что $300!>100^{300}$. Имеем:

$$1\cdot 2\ldots\ 25>\sqrt{25^{25}}=5^{25};$$
$$26\ldots\ 50>(\sqrt{26\cdot 50})^{25}>35^{25};$$

$$51 \ldots 100 > (\sqrt{51 \cdot 100})^{50} > 70^{50};$$

$$101 \ldots 200 > \sqrt{100^{100}} \cdot \sqrt{200^{100}} = 10^{200} \cdot 2^{50};$$

$$201 \ldots 300 > \sqrt{200^{100}} \cdot \sqrt{300^{100}} = 10^{200} \cdot 2^{50} \cdot 3^{50}.$$

Перемножая левые и правые части неравенств, получим:

$$300! > 5^{25} \cdot 35^{25} \cdot 70^{50} \cdot 10^{400} \cdot 2^{100} \cdot 3^{50} =$$

$$= 5^{50} \cdot 7^{25} \cdot 5^{50} \cdot 14^{50} \cdot 10^{400} \cdot 2^{100} \cdot 3^{50} = 10^{500} \cdot 7^{25} \cdot 14^{50} \cdot 3^{50} =$$

$$= 10^{500} \cdot 21^{25} \cdot 42^{25} \cdot 14^{25} > 10^{500} \cdot 20^{25} \cdot 40^{25} \cdot 14^{25} =$$

$$= 10^{550} \cdot 2^{25} \cdot 4^{25} \cdot 14^{25} = 10^{550} \cdot 112^{25} =$$

$$= 10^{600} \cdot 1{,}12^{25} > 10^{600} = 100^{300}.$$

Примечание. Более общий результат сформулирован в условии задачи 223.

220. Докажем, что для любого целого положительного $k \leqslant n$

$$1 + \frac{k}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Доказательство проведем методом индукции. Для $k = 1$ оно очевидно. Пусть теперь оно справедливо для некоторого k; докажем его для $k + 1$. Имеем:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant \left(1 + \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} > 1 + \frac{k+1}{n};$$

заметим, что здесь мы не пользовались тем, что $k \leqslant n$. Следовательно, это неравенство справедливо для любого целого положительного k. Полагая теперь $k \leqslant n$, получим:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k^2 + 2k + 1}{n^2} - \frac{k+1}{n^2} + \frac{k^2}{n^3} =$$

$$= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{n(k+1) - k^2}{n^3} <$$

$$< 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2},$$

ибо $n(k+1) > k^2$ при $n \geqslant k$.

Подставив в выведенные неравенства значение $k = n$, получим:

$$2 = 1 + \frac{n}{n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3.$$

221. В силу результата предыдущей задачи

$$(1{,}000001)^{1000000}=\left(1+\frac{1}{1\,000\,000}\right)^{1000000}>2.$$

222. Очевидно, имеем:

$$\frac{(1001)^{999}}{(1000)^{1000}}=\left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{1001}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{1001}<3\cdot\frac{1}{1001}<1$$

(см. задачу 220) и, следовательно,

$$1000^{1000}>1001^{999}.$$

223. Пусть неравенства задачи справедливы для некоторого n. Чтобы показать справедливость их для $n+1$, достаточно проверить справедливость следующих неравенств:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}:\left(\frac{n}{2}\right)^{n}\geqslant n+1\geqslant\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}:\left(\frac{n}{3}\right)^{n}.$$

После сокращения на $n+1$ эти неравенства приводятся к неравенствам $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\geqslant 1\geqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, которые следуют из неравенств $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$.

Остается только заметить, что для n, равного 6, утверждение задачи справедливо, ибо

$$\left(\frac{6}{2}\right)^{6}=3^6=729,\quad 6!=720,\quad \left(\frac{6}{3}\right)^{6}=2^6=64.$$

224. а) По формуле бинома Ньютона имеем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\ldots+C_n^{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

и аналогично

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Из сравнения этих выражений сразу следует, что $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>$ $>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, откуда и вытекает утверждение задачи.

б) Составим отношение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}:\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=$$

$$=\frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^{n}}{n^{2n+1}}=\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Но при $n\geqslant 2$

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}=1-n\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^4}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^6}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\frac{1}{n^8}-\ldots=$$

$$=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{n-1}{n^3}-\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right]-\ldots\leqslant$$

$$\leqslant 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^3}.$$

С другой стороны,

$$\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^4}<1.$$

Следовательно, $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$, и значит,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}:\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}<1,\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n},$$

откуда и следует утверждение задачи.

225. Доказательство проведем методом математической индукции.

1°. Докажем, что

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \qquad (*)$$

при любом целом положительном n. Действительно, при $n = 1$ это неравенство очевидно выполняется: $1! = 1 > \frac{1}{e}$. Предположим теперь, что неравенство (*) уже доказано, и покажем, что в таком случае будет выполняться неравенство

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

В силу результата задачи 224а)

$$e > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1.$$

Используя неравенство (*), получаем:

$$(n+1)! = (n+1)\,n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{n^n e}{(n+1)^n} =$$
$$= \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

В силу принципа математической индукции, отсюда вытекает, что неравенство (*) верно при любом целом положительном n.

2°. Перейдем к неравенству

$$n! < n\left(\frac{n}{e}\right)^n. \qquad (**)$$

Нам надо доказать, что это неравенство выполняется для всех целых n, больших 6. С помощью логарифмических таблиц (особенно удобны здесь таблицы натуральных логарифмов) нетрудно проверить, что при $n = 7$ неравенство (**) справедливо:

$$7! < 7\left(\frac{7}{e}\right)^7,$$

т. е. $6! < \left(\frac{7}{e}\right)^7$, ибо $\ln 6! = \ln 720 \approx 6{,}58$, а

$$\ln\left(\frac{7}{e}\right)^7 = 7(\ln 7 - 1) \approx 6{,}62.$$

Предположим теперь, что неравенство (**) уже доказано. В силу результата задачи 224 б)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e, \quad \text{т. е.} \quad \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} < 1.$$

А теперь из неравенства (**) выводим:

$$(n+1)! = (n+1)\,n! < (n+1)\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n =$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{n^{n+1}e}{(n+1)^{n+1}} =$$
$$= (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} < (n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

т. е. будет верно аналогичное неравенство, в котором n заменено на $n+1$. Так как при $n=7$ неравенство (**) верно, то отсюда, в силу принципа математической индукции, вытекает, что оно будет верно при любом целом n, большем 6, что и требовалось доказать.

226. Воспользуемся тем, что в сумме $S = x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1$ при $x > 1$ наибольшим является первый член и наименьшим — последний, а при $x < 1$ — наоборот. Отсюда следует, что

$$(k+1)x^k > S > k+1, \quad \text{если} \quad x > 1;$$
$$(k+1)x^k < S < k+1, \quad \text{если} \quad x < 1.$$

Умножив теперь обе части полученных неравенств на $x-1$, получим при $x \neq 1$

$$(k+1)x^k(x-1) > x^{k+1} - 1 > (k+1)(x-1).$$

Положим теперь в этом неравенстве $x = \frac{p}{p-1}$; тогда найдем:

$$\frac{(k+1)\,p^k}{(p-1)^{k+1}} > \frac{p^{k+1}-(p-1)^{k+1}}{(p-1)^{k+1}} > \frac{(k+1)\,(p-1)^k}{(p-1)^{k+1}};$$

аналогично, положив $x = \frac{p+1}{p}$, получим:

$$\frac{(k+1)\,(p+1)^k}{p^{k+1}} > \frac{(p+1)^{k+1}-p^{k+1}}{p^{k+1}} > \frac{(k+1)\,p^k}{p^{k+1}}.$$

Отсюда имеем:

$$(p+1)^{k+1} - p^{k+1} > (k+1)p^k > p^{k+1} - (p-1)^{k+1},$$

или, положив здесь последовательно $p = 1, 2, 3, \ldots, n,$

$$2^{k+1} - 1^{k+1} > (k+1)1^k > 1^{k+1} - 0,$$
$$3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)2^k > 2^{k+1} - 1^{k+1},$$
$$4^{k+1} - 3^{k+1} > (k+1)3^k > 3^{k+1} - 2^{k+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} > (k+1)n^k > n^{k+1} - (n-1)^{k+1}.$$

Сложив все эти неравенства, получим:

$$(n+1)^{k+1} - 1 > (k+1)(1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k) > n^{k+1},$$

или, разделив все члены неравенства на $k+1$,

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1}-\frac{1}{n^{k+1}}\right]\frac{1}{k+1}n^{k+1}>$$

$$>1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k>\frac{1}{k+1}n^{k+1}.$$

Но отсюда и следует неравенство, которое требовалось доказать.

227. а) Прежде всего очевидно

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n\ \text{раз}}=\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2+(n-1)}+\frac{3n}{2n^2+2(n-2)}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}\right]<$$

$$<\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{3n}{2n^2}+\frac{3n}{2n^2}+\ldots+\frac{3n}{2n^2}}_{(n+1)\ \text{раз}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\frac{3}{2n}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4n}<\frac{3}{4}+\frac{1}{n},$$

откуда и вытекает второе утверждение задачи.

б) Отметим прежде всего, что

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

Теперь получаем:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<$$

$$<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{2n-1\ \text{раз}}+\frac{1}{n}=\frac{2n}{n}=2.$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{3n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+\right.$$

$$+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-2)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\Bigg]>$$

$$>\frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}}_{(2n+1)\text{ раз}}\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1.$$

228. а) Прежде всего докажем, что

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

Действительно,

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$$

и аналогично доказывается вторая часть неравенства.

Теперь имеем:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}>1+2[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$

$$+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000})]=$$

$$=1+2(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{2})>2\cdot 1001-\sqrt{8}+1>$$

$$>2000-3+1=1998.$$

Аналогично

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<1+2[(\sqrt{2}-1)+$$

$$+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{999\,999})=$$

$$=1+2(\sqrt{1\,000\,000}-1)=1+2\cdot 999=1999.$$

Следовательно, целая часть суммы $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$ равна 1998.

б) Совершенно аналогично решению задачи а) получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}>$$

$$>2[(\sqrt{10\,001}-\sqrt{10\,000})+(\sqrt{10\,002}-\sqrt{10\,001})+\ldots$$

$$\ldots+(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000})]=$$

$$=2(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{10\,000})>2(1000-100)=1800$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<$$

$$<2\,[(\sqrt{10\,000}-\sqrt{9999})+(\sqrt{10\,001}-\sqrt{10\,000}+\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{999\,999})]=$$

$$=2\,(\sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{9999})=$$

$$=2000-\sqrt{39\,996}<2000-199{,}98=1800{,}02.$$

Следовательно, сумма $\frac{1}{\sqrt{10\,000}}+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}$ с точностью до 0,02 будет равна 1800.

229. Прежде всего отметим, что из сравнения двух выражений

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$$

и

$$\left(1+\frac{2}{3}\frac{1}{n}\right)^3=1+2\frac{1}{n}+\frac{4}{3}\frac{1}{n^2}+\frac{8}{27}\frac{1}{n^3}$$

следует, что при каждом целом положительном n

$$\left(1+\frac{2}{3}\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.$$

Отсюда имеем: $1+\frac{2}{3}\frac{1}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$. Умножая последнее неравенство на $n^{\frac{2}{3}}$, получаем: $n^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}}>(n+1)^{\frac{2}{3}}$ и окончательно

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right].$$

Аналогично

$$\left(1-\frac{2}{3}\frac{1}{n}\right)^3=1-2\frac{1}{n}+\frac{4}{3}\frac{1}{n^2}-\frac{8}{27}\frac{1}{n^3}>1-2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

$\left(\text{так как } \frac{1}{3}\frac{1}{n^2}-\frac{8}{27}\frac{1}{n^3}>\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\geqslant 0\right)$, откуда следует

$$1-\frac{2}{3}\frac{1}{n}>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{2}{3}},\qquad n^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}n^{-\frac{1}{3}}>(n-1)^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right].$$

Теперь можем написать:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}>$$

$$>\frac{3}{2}\left[\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2}\right)+\left(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{5^2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\sqrt[3]{1\,000\,001^2}-\sqrt[3]{1\,000\,000^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1\,000\,002\,000\,001}-\sqrt[3]{16}\right)>\frac{3}{2}\cdot 10\,000-\sqrt[3]{54}>$$

$$>15\,000-4=14\,996.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}<$$

$$<\frac{3}{2}\left[\left(\sqrt[3]{4^2}-\sqrt[3]{3^2}\right)+\left(\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{4^2}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\sqrt[3]{1\,000\,000^2}-\sqrt[3]{999\,999^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1\,000\,000\,000\,000}-\sqrt[3]{9}\right)<\frac{3}{2}(10\,000-2)=14\,997.$$

Таким образом, целая часть суммы $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{1\,000\,000}}$ равна 14 996.

230. а) Очевидно, имеем:

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}>\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{1000\cdot 1001}=$$

$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001}\right)=$$

$$=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}>0{,}1-0{,}001=0{,}099$$

и аналогично

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}<\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1000}=$$

$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right)=$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}<0{,}112-0{,}001=0{,}111.$$

Следовательно, сумма $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}$ с точностью до 0,006 равна 0,105.

б) Отметим прежде всего, что

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{1000!}>\frac{1}{10!}=\frac{1}{3\,628\,800}\approx 0{,}000000275.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{1000!}<$$

$$<\frac{1}{9}\left\{\frac{9}{10!}+\frac{10}{11!}+\frac{11}{12!}+\ldots+\frac{999}{1000!}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10-1}{10!}+\frac{11-1}{11!}+\frac{12-1}{12!}+\ldots+\frac{1000-1}{1000!}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}+\frac{1}{10!}-\frac{1}{11!}+\frac{1}{11!}-\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{999!}-\frac{1}{1000!}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9!}-\frac{1}{1000!}\right)<\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9!}=\frac{1}{3\,265\,920}\approx 0{,}000000305.$$

Таким образом, сумма $\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\ldots+\frac{1}{1000!}$ с точностью до 0,000000015 равна 0,00000029.

231. Докажем, что сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

можно сделать больше любого числа N. Будем считать N целым и возьмем $n=2^{2N}$; тогда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\frac{1}{2^{2N-1}+2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{2^{2N}-1}+\frac{1}{2^{2N}}\right)>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{2N\text{ раз}}>N+1$$

(каждая сумма в скобках больше $\frac{1}{2}$ в силу результата задачи 227а)).

Примечание. Можно было бы так же доказать утверждение задачи, исходя из результата задачи 227 б).

232. Обозначим через n_k число незачеркнутых слагаемых между $\frac{1}{10^k}$ и $\frac{1}{10^{k+1}}$, включая $\frac{1}{10^k}$, но не $\frac{1}{10^{k+1}}$. Если слагаемое $\frac{1}{q}$, расположенное между $\frac{1}{10^{k-1}}$ и $\frac{1}{10^k}$, не было зачеркнуто, то из слагаемых $\frac{1}{10q}, \frac{1}{10q+1}, \frac{1}{10q+2}, \ldots, \frac{1}{10q+8}, \frac{1}{10q+9}$, расположенных между

$\frac{1}{10^k}$ и $\frac{1}{10^{k+1}}$, будет зачеркнуто только последнее; если же слагаемое $\frac{1}{q}$ было зачеркнуто, то все слагаемые $\frac{1}{10q}, \frac{1}{10q+1}, \ldots, \frac{1}{10q+8}$, $\frac{1}{10q+9}$ также будут зачеркнуты. Отсюда следует, что

$$n_k = 9n_{k-1}.$$

Так как $n_0 = 8$ $\left(\text{из слагаемых } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{9} \text{ зачеркнуто только } \frac{1}{9}\right)$, то

$$n_1 = 8 \cdot 9 = 72, \quad n_2 = 8 \cdot 9^2, \quad \ldots, \quad n_k = 8 \cdot 9^k.$$

Пусть теперь в сумме $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ число $n < 10^{m+1}$. Дополним ее до суммы $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10^{m+1}-1}$, вычеркнем члены, знаменатели которых содержат девятку, и сгруппируем оставшиеся члены:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{88}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \ldots + \frac{1}{888}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{10^m} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{88\ldots8}_{(m+1)\text{ раз}}}\right) <$$
$$< 1 \cdot n_0 + \frac{1}{10} \cdot n_1 + \frac{1}{100} \cdot n_2 + \ldots + \frac{1}{10^{m-1}} \cdot n_{m-1} + \frac{1}{10^m} \cdot n_m,$$

так как вместо каждой скобки поставлено произведение наибольшего слагаемого этой скобки на число членов в скобке. Продолжим эту оценку дальше:

$$1 \cdot n_0 + \frac{1}{10} \cdot n_1 + \frac{1}{100} \cdot n_2 + \ldots + \frac{1}{10^{m-1}} \cdot n_{m-1} + \frac{1}{10^m} \cdot n_m =$$
$$= 8\left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{10^2} + \ldots + \frac{9^{m-1}}{10^{m-1}} + \frac{9^m}{10^m}\right) =$$
$$= 8 \cdot \frac{1 - \frac{9^{m+1}}{10^{m+1}}}{1 - \frac{9}{10}} < 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 8 \cdot 10 = 80.$$

Таким образом, утверждение задачи доказано.

233. а) Предположим, что в сумме $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ число n меньше чем 2^{k+1}. Рассмотрим сумму $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}$ и аналогично решению задачи 231 сгруппируем члены следующим образом:

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{(2^k)^2}+\frac{1}{(2^k+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}\right)<1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2^k)^2}+\frac{1}{(2^k)^2}+\ldots+\frac{1}{(2^k)^2}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{1-\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^k}<2,$$

что и требовалось доказать.

Примечание. Совершенно так же можно показать, что если число α больше 1, то при любом n

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}<\frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

Таким образом, при любом $\alpha>1$ сумма

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$$

остается ограниченной, сколь бы большое значение n мы ни брали (из задачи 231 следует, что при $\alpha\leqslant 1$ сумма $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$ может быть сделана сколь угодно большой, если только выбрать достаточно большое значение n).

б) Очевидно, имеем:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<$$

$$>\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}=$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}\right)-\frac{1}{4}.$$

Но, так как $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ при всех $k=2, 3, \ldots, n$,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1$$

и, следовательно,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{4}\right)=1\frac{3}{4},$$

что и требовалось доказать.

234. Докажем, прежде всего, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}<$$
$$<\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)\times\ldots$$
$$\ldots\times\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right),$$

где k — такое целое число, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, а p_l — наибольшее простое число, не превосходящее n. Действительно, раскроем скобки в правой части неравенства. Так как **каждое** целое число m от 1 до n представимо в виде произведения степеней простых чисел 1, 3, 5, ..., p_l:

$$m=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\alpha_3}\ldots p_l^{\alpha_l},$$

где все показатели $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_l$ — целые неотрицательные числа, не превосходящие, разумеется, k, то в этой сумме встретится член, равный $\frac{1}{m}$, который получится, если взять из первой скобки $\frac{1}{2^{\alpha_1}}$, из второй $\frac{1}{3^{\alpha_2}}$, из третьей $\frac{1}{5^{\alpha_3}}$, и т. д. Поэтому в правой части неравенства после раскрытия скобок будут стоять **все** слагаемые 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}$ и еще какие-то другие положительные слагаемые. Значит, правая часть нашего неравенства в самом деле больше левой.

Логарифмируя это неравенство, мы получим:

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)<$$
$$<\lg\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)\times\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\times\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right)\right]=$$

$$= \lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)+$$

$$+\lg\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^k}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\lg\left(1+\frac{1}{p_l}+\frac{1}{p_l^2}+\ldots+\frac{1}{p_l^k}\right).$$

Но для всякого целого k и целого $p \geqslant 2$

$$\lg\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots+\frac{1}{p^k}\right)<\frac{2\lg 3}{p}.$$

Действительно, имеем:

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots+\frac{1}{p^k}=\frac{1-\frac{1}{p^{k+1}}}{1-\frac{1}{p}}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}=$$

$$=1+\frac{1}{p-1}.$$

Но из результата задачи 220 следует

$$\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}<3,\ 1+\frac{1}{p-1}<\sqrt[p-1]{3},\ \lg\left(1+\frac{1}{p-1}\right)<\frac{\lg 3}{p-1},$$

и, очевидно,

$$\frac{2\lg 3}{p}>\frac{\lg 3}{p-1}.$$

Таким образом, мы заключаем, что

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<\frac{2\lg 3}{2}+\frac{2\lg 3}{3}+\frac{2\lg 3}{5}+\ldots+\frac{2\lg 3}{p_l}=$$

$$=2\lg 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right).$$

Если бы существовало такое число N, что для всякого целого положительного l сумма $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}$ была бы меньше N, то для всякого целого положительного числа n выполнялось бы неравенство

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)<$$

$$<2\lg 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right)<2(N-1)\lg 3;$$

отсюда после потенцирования следовало бы, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}<3^{2(N-1)}=N_1,$$

где N_1 не зависит от n. Но в задаче 231 было доказано, что такого числа N_1 не существует; следовательно, не существует и такого числа N, что для всякого целого положительного l

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}<N,$$

где p_l — l-е простое число в ряду натуральных чисел.

235. Нетрудно видеть, что $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$ (проверьте это!); поэтому достаточно доказать, что

$$P(a, b, c)=(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$$

делится на $a+b$, на $b+c$ и на $a+c$. Но, очевидно, многочлен (с буквенными коэффициентами) $P(x, b, c)=(x+b+c)^{333}-x^{333}-b^{333}-c^{333}$ от переменной x при подстановке в него вместо x значения $-b$ обращается в нуль; поэтому $P(x, b, c)$ делится на $x-(-b)=x+b$, а значит, $P(a, b, c)$ делится на $a+b$. Аналогично доказывается и то, что $P(a, b, c)$ делится на $b+c$ и на $c+a$ (это также следует из того, что буквы a, b, c входят в выражение для $P(a, b, c)$ симметрично).

236. $$a^{10}+a^5+1=\frac{(a^5)^3-1}{a^5-1}=\frac{a^{15}-1}{a^5-1}=$$

$$=\frac{(a^3)^5-1}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=\frac{(a^3-1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)}=$$

$$=\frac{(a^2+a+1)(a^{12}+a^9+a^6+a^3+1)}{a^4+a^3+a^2+a+1}.$$

Но непосредственное деление дает

$$\frac{a^{12}+a^9+a^6+a^3+1}{a^4+a^3+a^2+a+1}=a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1$$

и, следовательно,

$$a^{10}+a^5+1=(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1).$$

237. Первое решение. Обозначим наши многочлены соответственно через B и A. В таком случае имеем:

$$\begin{aligned}B-A&=(x^{9999}-x^9)+(x^{8888}-x^8)+(x^{7777}-x^7)+(x^{6666}-x^6)+\\&+(x^{5555}-x^5)+(x^{4444}-x^4)+(x^{3333}-x^3)+\\&+(x^{2222}-x^2)+(x^{1111}-x)=\\&=x^9[(x^{10})^{999}-1]+x^8[(x^{10})^{888}-1]+x^7[(x^{10})^{777}-1]+\\&+x^6[(x^{10})^{666}-1]+x^5[(x^{10})^{555}-1]+x^4[(x^{10})^{444}-1]+\\&+x^3[(x^{10})^{333}-1]+x^2[(x^{10})^{222}-1]+x[(x^{10})^{111}-1].\end{aligned}$$

Но каждое выражение в скобках делится на $x^{10}-1$, а следовательно, и на $A=\frac{x^{10}-1}{x-1}$. Таким образом, мы видим, что $B-A$ делится на A, а значит, и B делится на A.

Второе решение.

$$x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=$$

$$=\frac{x^{10}-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_9)}{x-1}=$$

$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_9),$$

где $\alpha_k=\cos\frac{2k\pi}{10}+i\sin\frac{2k\pi}{10}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 9)$, ибо корни уравнения $x^{10}-1=0$ — корни десятой степени из единицы — имеют именно такой вид. Следовательно, для того чтобы доказать наше утверждение, достаточно проверить, что

$$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1$$

делится на каждый из множителей $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, ..., $(x-\alpha_9)$. Но последнее равносильно тому, что уравнение

$$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+x^{6666}+x^{5555}+x^{4444}+$$
$$+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}+1=0 \qquad (*)$$

имеет корни α_1, α_2, α_3, ..., α_9. Проверим, что эти значения действительно удовлетворяют уравнению (*): так как $\alpha_k^{10}=1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9)$, то

$$\alpha_k^{9999}=\alpha_k^{9990+9}=\left(\alpha_k^{10}\right)^{999}\alpha_k^9=\alpha_k^9;$$

$$\alpha_k^{8888}=\alpha_k^{8880+8}=\left(\alpha_k^{10}\right)^{888}\alpha_k^8=\alpha_k^8,\ \text{и т. д.}$$

и

$$\alpha_k^{9999}+\alpha_k^{8888}+\alpha_k^{7777}+\alpha_k^{6666}+\alpha_k^{5555}+\alpha_k^{4444}+\alpha_k^{3333}+$$
$$+\alpha_k^{2222}+\alpha_k^{1111}+1=$$
$$=\alpha_k^9+\alpha_k^8+\alpha_k^7+\alpha_k^6+\alpha_k^5+\alpha_k^4+\alpha_k^3+\alpha_k^2+\alpha_k+1=0$$
$$(k=1,\ 2,\ldots,\ 9).$$

238. а) Первое решение. Имеем:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=$$
$$=a^3+3ab(a+b)+b^3+c^3-3abc-3ab(a+b)=$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3ab(c+a+b)=$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=$$
$$=[(a+b)+c]\,[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)=$$
$$=(a+b+c)\,[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]=$$
$$=(a+b+c)\,(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)=$$
$$=(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Второе решение. Заменим в обозначениях задачи букву a на x и положим $x+b+c=0$; преобразовав $(x+b+c)^3$, получим, что $x^3+b^3+c^3-3xbc=0$, если $x+b+c=0$. Поэтому уравнение $x^3-3bcx+b^3+c^3=0$ имеет корень $x=-b-c$, и многочлен $x^3-3bcx+b^3+c^3$ делится на $x-(-b-c)=x+b+c$, а значит $a^3+b^3+c^3-3abc$ делится на $a+b+c$. Выполнив непосредственно деление (для чего удобно рассматривать многочлены $a^3-3abc+b^3+c^3$ и $a+b+c$ расположенными по степеням буквы a), мы придем к прежнему результату:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

б) Подберем такие два числа a и b, чтобы иметь равенство

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx.$$

Для этого достаточно, чтобы было $a^3+b^3=q$, $ab=-\frac{p}{3}$; из этой системы двух уравнений с двумя неизвестными нетрудно определить a и b. Имеем $a^3+b^3=q$, $a^3b^3=-\frac{p^3}{27}$; отсюда следует, что a^3 и b^3 — корни квадратного уравнения $z^2-qz-\frac{p^3}{27}=0$ и, следовательно [1]),

$$a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{2}+\frac{p^3}{27}}}. \quad (*)$$

Теперь, в силу результата задачи а), имеем'

$$x^3+px+q=x^3+a^3+b^3-3abx=$$
$$=(a+b+x)\,(a^2+b^2+x^2-ab-ax-bx).$$

Следовательно, решение нашего кубического уравнения сводится к решению уравнения первой степени:

$$a+b+x=0,$$

откуда имеем:

$$x_1=-a-b,$$

или

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

и квадратного уравнения

$$x^2-(a+b)x+a^2+b^2-ab=0;$$

---

[1]) Числа a и b, определяемые по формулам (*), являются действительными, если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqslant 0$. Если же $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, то под знаком корня третьей степени в формулах (*) будут комплексные числа. В этом случае числа a и b тоже являются комплексными; их можно отыскать, например, с помощью формулы для корня n-й степени из комплексного числа. При этом за a можно с равным основанием принять любое из трех значений корня кубического из комплексного числа $\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$; тогда b определим из соотношения $ab=-\frac{p}{3}$.

Отсюда следует

$$x_2=\frac{a+b}{2}+\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i,\quad x_3=\frac{a+b}{2}-\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i,$$

где a и b определяются формулами (*).

239. Первое решение. Обозначим $\sqrt{a+x}$ через y; получим систему из двух уравнений.

$$\sqrt{a+x}=y,\quad \sqrt{a-y}=x.$$

Возведем эти уравнения в квадрат:

$$a+x=y^2,\ a-y=x^2.$$

Вычтем из первого второе:

$$x+y=y^2-x^2,$$

или

$$x^2-y^2+x+y=(x+y)(x-y+1)=0.$$

Отсюда имеются две возможности:

1) $x+y=0$; $y=-x$ и $x^2-x-a=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}};$$

2) $x-y+1=0$; тогда $y=x+1$ и $x^2+x+1-a=0$, откуда

$$x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a-\frac{3}{4}}.$$

Можно убедиться проверкой, что при соответствующем выборе знака у каждого из радикалов, встречающихся в исходном уравнении, корни x_1, x_2, x_3 и x_4 удовлетворяют этому уравнению [1]).

Второе решение. Освободимся от радикалов в нашем уравнении:

$$a-\sqrt{a+x}=x^2,$$

$$(a-x^2)^2=a+x,$$

$$x^4-2ax^2-x+a^2-a=0.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению четвертой степени. Однако это последнее уравнение является квадратным по отношению к a. Решим это уравнение относительно a, т. е. примем на время,

---

[1]) Если же, как это иногда делается, считать все корни положительными, то уравнение будет иметь единственный корень $x_3=-\frac{1}{2}+\sqrt{a-\frac{3}{4}}$, если $a\geqslant 1$, и вовсе не будет иметь корней, если $a<1$.

что x нам известно, а наоборот, a требуется определить:

$$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0,$$

$$a=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^4+4x^2+1-4x^4+4x}}{2}=$$

$$=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^2+4x+1}}{2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2},$$

$$a_1=x^2+x+1,\quad a_2=x^2-x.$$

Таким образом, мы видим, что уравнение

$$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0$$

имеет корни

$$a_1=x^2+x+1,\quad a_2=x^2-x,$$

откуда согласно общим свойствам квадратных уравнений

$$a^2-(2x^2+1)\,a+x^4-x=(a-a_1)\,(a-a_2)=$$

$$=(a-x^2-x-1)(a-x^2+x).$$

Таким образом, наше уравнение принимает вид

$$(x^2-x-a)(x^2+x-a+1)=0$$

и без труда решается:

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}},$$

$$x_{3,4}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a-1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{a-\frac{3}{4}}.$$

240. Первое решение. Обозначим

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=y,\quad -a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}=y_1.$$

В таком случае наше уравнение принимает вид

$$y=y_1.$$

Выразим теперь x через y_1. Простое вычисление дает

$$x=y_1^2+2ay_1+\frac{1}{16}.$$

Таким образом, мы видим, что x выражается через y_1 точно таким же образом, как y через x. Отсюда следует, что если мы начертим графики функций

$$y=x^2+2ax+\frac{1}{16}$$

и

$$y_1=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}},$$

то эти графики (параболы) будут симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 27; каждой точке $x = x_0$, $y = y_0$ первого графика отвечает симметричная относительно биссектрисы координатного угла точка $x = y_0$, $y = x_0$ второго графика). Точки пересечения этих двух графиков отвечают таким значениям x, что $y = y_1$, т. е. корням нашего уравнения; эти точки обязательно лежат на оси симметрии обеих кривых, т. е. удовлетворяют условию

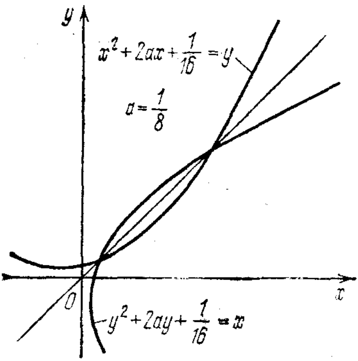


Рис. 27.

$$y = x = y_1.$$

Решая уравнение $y = x$, т. е.

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x,$$

мы получаем:

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

Можно убедиться проверкой, что при $0 < a < \frac{1}{4}$ оба эти корня являются действительными и удовлетворяют исходному уравнению.

Второе решение. Эту задачу можно решить и более обычным путем. Избавляясь от радикала в уравнении, получим:

$$\left(x^2 + 2ax + a + \frac{1}{16}\right)^2 = a^2 + x - \frac{1}{16},$$

или после раскрытия скобок и приведения подобных членов

$$x^4 + 4ax^3 + \left(4a^2 + 2a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(4a^2 + \frac{1}{4}a - 1\right)x + \frac{a}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} = 0.$$

Левую часть получившегося уравнения можно разложить на множители:

$$\left[x^4 + (2a - 1)x^3 + \frac{1}{16}x^2\right] + \left[(2a+1)x^3 + (4a^2 - 1)x^2 + \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{16}\right)x\right] +$$
$$+ \left[\left(2a + \frac{17}{16}\right)x^2 + \left(4a^2 + \frac{a}{8} - \frac{17}{16}\right)x + \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2}\right)\right] =$$
$$= \left[x^2 + (2a-1)x + \frac{1}{16}\right]\left[x^2 + (2a+1)x + \left(2a + \frac{17}{16}\right)\right].$$

Отсюда сразу получаем решения:

$$x^2+(2a-1)x+\frac{1}{16}=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{1-2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2-\frac{1}{16}};$$

$$x^2+(2a+1)x+2a+\frac{17}{16}=0,$$

$$x_{3,4}=-\frac{1+2a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+2a}{2}\right)^2-2a-\frac{17}{16}}.$$

При $0<a<\frac{1}{4}$ первые два корня являются действительными и удовлетворяют исходному уравнению; последние два корня — комплексные.

241. Для того чтобы при действительном x левая часть уравнения была действительна, необходимо, чтобы все подкоренные выражения были положительны. Обозначая эти положительные подкоренные выражения, начиная с последнего (т. е. с $3x$) и до первого, через $y_1^2,\ y_2^2,\ y_3^2, \ldots,\ y_{n-1}^2,\ y_n^2$, будем иметь:

$$3x=x+2x=y_1^2,$$

$$x+2y_1=y_2^2,$$

$$x+2y_2=y_3^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x+2y_{n-2}=y_{n-1}^2,$$

$$x+2y_{n-1}=y_n^2,$$

где все числа $y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n$ действительны и положительны. Само исходное уравнение в новых обозначениях примет вид

$$y_n=x.$$

Докажем теперь, что $y_1=x$. Действительно, предположим, например, что $x>y_1$. В таком случае из сравнения первого и второго из наших равенств будет следовать, что $y_1>y_2$. Точно так же из сравнения второго и третьего равенств находим, что $y_2>y_3$; далее, аналогично получаем, что

$$y_3>y_4>\ldots>y_{n-1}>y_n.$$

Таким образом, при $x>y_1$ будем иметь $x>y_n$, что противоречит уравнению. Аналогично доказывается, что и при $x<y_1$ не может быть $y_n=x$ (в этом случае обязательно $x<y_n$).

Так как $y_1^2=3x$, то, следовательно, должно быть

$$3x=x^2,$$

откуда сразу получаем два единственно возможных значения x:

$$x_1=3,\quad x_2=0.$$

Проверка показывает, что оба эти значения удовлетворяют нашему уравнению.

Примечание. Наметим здесь еще один метод решения уравнения

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{n \text{ радикалов}}=x. \qquad (*)$$

Подставим в левую часть этого уравнения вместо последнего числа x его выражение, даваемое равенством (*); получим:

$$x=\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{2n \text{ радикалов}}.$$

Далее, снова заменяя последнее x подобным же образом, будем иметь:

$$x=\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{3n \text{ радикалов}}=$$

$$=\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{4n \text{ радикалов}}=\ldots$$

На основании этого мы можем записать:

$$x=\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots}}}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{N \text{ радикалов}}. \qquad (**)$$

Отсюда получаем:

$$x=\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots}}}=$$

$$=\sqrt{x+2\left[\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\ldots}}}\right]}=\sqrt{x+2x}, \qquad (***)$$

откуда имеем $x=\sqrt{3x}$, $x^2=3x$ и, следовательно, $x_1=0$, $x_2=3$. В частности, это решение сразу показывает, что корни уравнения (*) не зависят от n (ибо уравнение (**) не зависит от n).

Приведенное рассуждение в таком виде нельзя, разумеется, считать решением задачи, поскольку не доказано существование предела (**) и не обоснованы преобразования (***). Однако это рассуждение можно сделать совсем строгим.

242. Будем последовательно упрощать дробь, стоящую слева:

$$1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x};\quad 1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=1+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1};$$

$$1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}=1+\frac{x+1}{2x+1}=\frac{3x+2}{2x+1};\ \ldots$$

Окончательно мы получим какое-то уравнение вида

$$\frac{ax+b}{cx+d}=x,$$

где a, b, c и d — неизвестные нам целые числа. Это уравнение равносильно *квадратному уравнению* $x(cx+d)=ax+b$; отсюда следует, что наше исходное уравнение может иметь *не больше двух* различных корней (тождеством это уравнение быть не может, так как иначе ему удовлетворяли бы *любые* значения x, а $x=0$, очевидно, уравнению не удовлетворяет).

Но два корня нашего уравнения нетрудно найти. Действительно, предположим, что x таково, что

$$1+\frac{1}{x}=x.$$

В таком случае, последовательно упрощая нашу дробь «с конца» мы будем получать

$$1+\frac{1}{x}=x;\ 1+\frac{1}{x}=x;\ 1+\frac{1}{x}=x;\ldots$$

и окончательно придем к тождеству

$$x=x.$$

Таким образом, мы видим, что корни уравнения $1+\frac{1}{x}=x$, или $x^2-x-1=0$, т. е.

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

удовлетворяют заданному уравнению. Никаких других корней это уравнение иметь не может.

Примечание. Наметим здесь еще один метод решения рассматриваемого уравнения (сравните с примечанием к решению задачи 241). Подставим в левую часть уравнения вместо x его выражение в виде многоэтажной дроби, даваемое самим уравнением. При этом мы получим точно такое же уравнение, где, однако, в многоэтажной дроби слева знак дроби будет повторяться $2n$ раз. Продолжая далее тот же процесс, мы будем приходить к таким же уравнениям, где слева будет стоять дробь, имеющая все больше и больше «этажей». На этом основании мы можем написать:

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = 1+\lim_{N\to\infty}\underbrace{\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+1+\cfrac{1}{1}}}}}_{\text{Знак дроби повторяется } N \text{ раз}}, \quad (*)$$

где слева стоит бесконечное выражение. Отсюда получаем:

$$x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}} = 1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}\right]} = 1+\frac{1}{x}, \quad (**)$$

т. е. то же квадратное уравнение для x, которое фигурировало и в приведенном выше решении задачи. Такое решение исходного уравнения сразу показывает, что корни его не могут зависеть от n.

Приведенное рассуждение в таком виде нельзя считать решением задачи, так как не доказано существование предела (*) и равенство x этому пределу и не обоснованы преобразования (**). Однако это рассуждение можно сделать вполне строгим.

243. Имеем:

$$x+3-4\sqrt{x-1} = x-1-4\sqrt{x-1}+4 =$$
$$= (\sqrt{x-1})^2-4\sqrt{x-1}+4 = (\sqrt{x-1}-2)^2$$

и аналогично

$$x+8-6\sqrt{x-1} = x-1-6\sqrt{x-1}+9 = (\sqrt{x-1}-3)^2.$$

Таким образом, наше уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

или, так как мы считаем все корни положительными,

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3| = 1,$$

где $|y|$ обозначает абсолютную величину числа y.

Рассмотрим теперь несколько случаев.

1°. Если $\sqrt{x-1}-2 \geqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3 \geqslant 0$, т. е. если $\sqrt{x-1} \geqslant 3$, $x-1 \geqslant 9$, $x \geqslant 10$, то $|\sqrt{x-1}-2| = \sqrt{x-1}-2$, $|\sqrt{x-1}-3| = \sqrt{x-1}-3$ и уравнение принимает вид

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1,$$

откуда

$$2\sqrt{x-1}=6, \quad x-1=9, \quad x=10.$$

2°. Если $\sqrt{x-1}-2\geqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3\leqslant 0$, т. е. если $\sqrt{x-1}\geqslant 2$, $x\geqslant 5$, но $\sqrt{x-1}\leqslant 3$, $x\leqslant 10$, то $|\sqrt{x-1}-2|=\sqrt{x-1}-2$, $|\sqrt{x-1}-3|=-\sqrt{x-1}+3$

и уравнение превращается в тождество

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1.$$

Таким образом, нашему уравнению удовлетворяют все значения x между $x=5$ и $x=10$.

3°. Если $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3\leqslant 0$, т. е. если $\sqrt{x-1}\leqslant 2$, $x\leqslant 5$, то $|\sqrt{x-1}-2|=-\sqrt{x-1}+2$, $|\sqrt{x-1}-3|=$ $=-\sqrt{x-1}+3$ и уравнение принимает вид

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1,$$

откуда

$$2\sqrt{x-1}=4, \quad x-1=4, \quad x=5.$$

4°. Случай $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$, $\sqrt{x-1}-3\geqslant 0$, очевидно, невозможен.

Таким образом, решением этого уравнения служат все значения x между $x=5$ и $x=10$, т. е. $5\leqslant x\leqslant 10$.

244. Для того чтобы решить это уравнение, мы будем искать сначала его корни, лежащие на отрезке от 2 до ∞, затем на отрезках от 1 до 2, от 0 до 1, от -1 до 0 и от $-\infty$ до -1.

1°. Пусть $x\geqslant 2$. Тогда $x+1>0$, $x>0$, $x-1>0$, $x-2\geqslant 0$; поэтому $|x+1|=x+1$, $|x|=x$, $|x-1|=x-1$; $|x-2|=$ $=x-2$, и мы получаем уравнение

$$x+1-x+3(x-1)-2(x-2)=x+2,$$

которое удовлетворяется тождественно.

Таким образом, любое число, большее либо равное 2, является корнем нашего уравнения.

2°. Пусть $1\leqslant x<2$. Тогда $x+1>0$, $x>0$, $x-1\geqslant 0$ и $x-2<0$ и, значит, $|x+1|=x+1$, $|x|=x$, $|x-1|=x-1$, $|x-2|=-(x-2)$.

Таким образом, мы получаем уравнение

$$x+1-x+3(x-1)+2(x-2)=x+2.$$

Отсюда $4x=8$, $x=2$, т. е. лежит вне отрезка $1\leqslant x<2$. Следовательно, наше уравнение не имеет корней, больших либо равных 1, но меньших 2.

3°. Пусть, далее, $0 \leqslant x < 1$. Тогда имеем:

$$|x+1| = x+1,\ |x| = x,$$

$$|x-1| = -(x-1),\ |x-2| = -(x-2).$$

Значит,

$$x+1-x-3(x-1)+2(x-2) = x+2,\quad x = -1,$$

т. е. лежит вне отрезка $0 \leqslant x < 1$.

Получаем, что корней, больших либо равных 0, но меньших 1, нет.

4°. Пусть теперь $-1 \leqslant x < 0$. Тогда $|x+1| = x+1$,

$$|x| = -x,\ |x-1| = -(x-1) \text{ и } |x-2| = -(x-2);$$

$$x+1+x-3(x-1)+2(x-2) = x+2,$$

что невозможно, т. е. на этом участке также нет корней.

5°. Наконец, пусть $x < -1$. При этом $|x+1| = -(x+1)$, $|x| = -x$, $|x-1| = -(x-1)$ и $|x-2| = -(x-2)$;

$$-(x+1)+x-3(x-1)+2(x-2) = x+2,\ x = -2.$$

Получаем еще один корень $x = -2$.

Окончательно уравнению удовлетворяют: число -2 и любое число, большее либо равное 2.

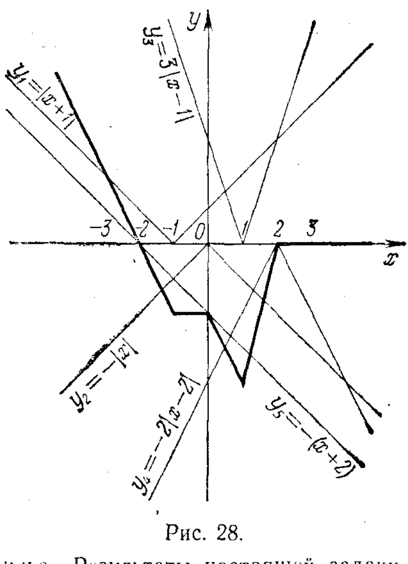


Рис. 28.

Примечание. Результаты настоящей задачи становятся совершенно ясными, если изобразить график функции

$$y = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| - (x+2).$$

На рис. 28 изображены тонкими линиями графики функций $y_1 = |x+1|$, $y_2 = -|x|$, $y_3 = 3|x-1|$, $y_4 = -2|x-2|$ и $y_5 =$

$= -(x+2)$ и жирной линией — график функции $y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$ («сложение графиков»). Из этого чертежа сразу видно, что y обращается в нуль на луче $x \geqslant 2$ и еще в одной точке $x = -2$.

245. Обозначим правую часть рассматриваемого уравнения n-й степени через $f_n(x)$. Легко видеть, что уравнение $f_1(x) = 0$, т. е. $1 - x = 0$, имеет корень $x_1 = 1$; уравнение $f_2(x) = 0$, т. е. $x(x-1) - 2x + 2 = 0$, или $x^2 - 3x + 2 = 0$, имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Докажем теперь, что *уравнение* $f_n(x) = 0$ *имеет* следующие *корни:*

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ \ldots,\ x_{n-1} = n-1,\ x_n = n. \qquad (*)$$

Воспользуемся методом математической индукции, т. е. предположим, что наше утверждение уже доказано для уравнения $f_n(x) = 0$, и проверим, что в таком случае уравнение $f_{n+1}(x) = 0$ имеет корни (*) и дополнительный корень $x_{n+1} = n+1$. Прежде всего, ясно, что поскольку

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!},$$

то если уравнение $f_n(x) = 0$ имеет корни (*), то те же корни имеет и уравнение $f_{n+1}(x)$. Наконец, равенство $f_{n+1}(n+1) = 0$, т. е.

$$1 - \frac{n+1}{1} + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} \frac{(n+1)n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{(n+1)!} = 0$$

можно, очевидно, записать так:

$$1 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + \ldots + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} = 0, \qquad (**)$$

где $C_{n+1}^k = \dfrac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}$ — так называемые *биномиальные коэффициенты;* но по формуле бинома Ньютона правая часть (**) равна $(1-1)^{n+1} = 0$, откуда и следует, что число $x_{n+1} = n+1$ также является корнем уравнения $f_{n+1}(x) = 0$.

246. Обозначим через $\{x\} = x - [x]$ так называемую *дробную часть* числа x (см. стр. 37); ясно, что $0 \leqslant \{x\} < 1$ и что $[x] = x - \{x\}$. Таким образом, наше уравнение можно переписать так:

$$x^3 - (x - \{x\}) = 3, \quad \text{или} \quad x^3 - x = 3 - \{x\},$$

откуда следует, что $2 < x^3 - x \leqslant 3$. Но, очевидно, при $x \geqslant 2$ мы имеем $x^3 - x = x(x^2-1) \geqslant 2(4-1) = 6 > 3$; при $x < -1$ имеем $x^2 - 1 > 0$ и $x^3 - x = x(x^2-1) < 0 < 2$; при $x = -1$ имеем $x^3 - x = 0 < 2$; при $-1 < x \leqslant 0$ имеем $x^3 - x \leqslant -x < 1$; при $0 < x \leqslant 1$ имеем $x^3 - x < x^3 \leqslant 1$. Поэтому должно быть $1 < x < 2$ и, значит, $[x] = 1$. А тогда исходное уравнение принимает вид:

$$x^3 - 1 = 3, \quad \text{откуда} \quad x^3 = 4 \quad \text{и} \quad x = \sqrt[3]{4}$$

— это и есть (единственное) решение задачи.

247. Из первого уравнения системы немедленно получаем:

$$y^2 = x^2,\ y = \pm x.$$

Подставляя это значение y^2 во второе уравнение, находим:

$$(x-a)^2 + x^2 = 1 \qquad (*)$$

— квадратное уравнение, которое, вообще говоря, дает два значения x. Так как каждому значению x отвечают два значения y, то всего система имеет *четыре* решения.

Число решений системы уменьшается до *трех*, если одно из значений x равно нулю; нулевому значению x (и только нулевому значению) соответствует единственное значение $y = 0$, а не два разных значения $y = \pm x$. Подставляя $x = 0$ в уравнение (*), получаем:

$$a^2 = 1,\quad a = \pm 1;$$

только при этих значениях a система имеет три решения.

Число решений системы уменьшается до *двух*, если уравнение для x имеет одно-единственное значение. Для того чтобы квадратное уравнение $(x-a)^2 + x^2 = 1$, или $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$, имело единственный корень (два совпадающих значения корня), надо, чтобы было

$$a^2 - 2(a^2 - 1) = 0,\ a^2 = 2,\ a = \pm\sqrt{2};$$

при этих значениях a система имеет два решения.

248. а) Решая систему, получаем:

$$x = \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1},\ y = \frac{-a^2 + a}{a^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что если $a + 1 \neq 0$ и $a - 1 \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}$, $y = \frac{-a}{a + 1}$. Если $a = -1$ или $a = +1$, то наши формулы теряют смысл; в первом случае мы приходим к системе

$$\begin{cases} -x + y = 1, \\ \ \ \ x - y = 1, \end{cases}$$

которая противоречива (не имеет решений), во втором случае — к системе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений (x произвольно, $y = 1 - x$).

б) Решая систему, получаем:

$$x = \frac{a^4 - 1}{a^2 - 1},\qquad y = \frac{-a^3 + a}{a^2 - 1}.$$

Таким образом, и здесь, если $a^2 - 1 \neq 0$, то система имеет единственное решение $x = a^2 + 1$, $y = -a$. В случаях же $a = -1$ и $a = 1$ мы приходим к системам

$$\begin{cases} -x + y = -1, \\ \ \ \ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

которые имеют бесконечно много решений.

в) Из первого и второго уравнений получаем:

$$y+z=1-ax \quad \text{и} \quad ay+z=a-x;$$

рассматривая эти два равенства как систему двух уравнений с двумя неизвестными y и z, имеем:

$$y=\frac{a-x-1+ax}{a-1}=\frac{(a-1)(1+x)}{a-1},$$

$$z=\frac{a(1-ax)-a+x}{a-1}=\frac{-x(a^2-1)}{a-1}.$$

Таким образом, если $a\neq 1$, то $y=1+x$, $z=-(1+a)x$; подставляя эти значения y и z в третье уравнение, находим:

$$x+(1+x)-a(1+a)x=a^2,\quad x(2-a-a^2)=a^2-1,$$

$$-x(a+2)(a-1)=a^2-1.$$

Поэтому при $a-1\neq 0$, $a+2\neq 0$ система имеет единственное решение

$$x=-\frac{a^2-1}{(a+2)(a-1)}=-\frac{a+1}{a+2},\quad y=1+x=\frac{1}{a+2},$$

$$z=-(a+1)x=\frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

В случаях $a=1$ и $a=-2$ мы приходим соответственно к системам

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=1, \\ x+y+z=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} -2x+y+z&=1, \\ x-2y+z&=-2, \\ x+y-2z&=4, \end{aligned}$$

первая из которых имеет бесконечно много решений, а вторая не имеет ни одного решения (складывая первые два уравнения второй системы, мы получаем $-x-y+2z=-1$, что противоречит третьему уравнению).

249. Вычитая второе уравнение из первого и шестое из пятого и приравнивая два полученных выражения для x_2-x_3, получим:

$$\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)=\alpha_4(\alpha_2-\alpha_3),\quad \text{или}\quad (\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)=0.$$

Точно так же, составляя по два различных выражения для разностей x_1-x_2 и x_1-x_3, получим еще два соотношения:

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)=0,\qquad (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)=0.$$

Из первого из полученных трех соотношений следует, что $\alpha_1=\alpha_4$ или $\alpha_2=\alpha_3$. Предположим для определенности, что $\alpha_2=\alpha_3=\alpha$. Из второго соотношения следует, что $\alpha_1=\alpha$ или $\alpha_4=\alpha$. Каждое из этих равенств обращает третье соотношение в тождество. Таким образом, *для того чтобы наша система была совместной, необходимо, чтобы три из четырех величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ были равны между собой.*

Предположим теперь, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$, $\alpha_4=\beta$. Вспоминая те выражения для разностей x_1-x_2, x_1-x_3, x_2-x_3, при помощи которых мы получили соотношения между α_1, α_2, α_3 и α_4, немедленно получаем:

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

Обозначим теперь $x_1 = x_2 = x_3$ просто через x, а x_4 — через y. В таком случае наши шесть уравнений с четырьмя неизвестными перейдут в два уравнения с двумя неизвестными:

$$2x = \alpha^2, \quad x + y = \alpha\beta,$$

откуда

$$x = \frac{\alpha^2}{2}; \quad y = \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Примечание. Аналогичными рассуждениями можно показать, что более общая система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_m = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_m, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_{m+1} = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}\alpha_{m+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m-1} + x_{n+m-2} + \ldots + x_{n-1} + x_n = \alpha_{n+m-1}\alpha_{n+m-2} \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n, \end{cases}$$

состоящая из C_n^m уравнений с n неизвестными $(n > m+1)$, будет разрешима только в следующих двух случаях:

1° $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = \alpha$; $\alpha_n = \beta$ $\left(\text{в этом случае } x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = \frac{\alpha^n}{n},\ x_n = \alpha^{n-1}\left(\beta - \frac{n-1}{n}\alpha\right)\right)$;

2° $n - m + 1$ или больше из величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равны нулю (в этом случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$).

250. Из первого уравнения получаем $x = 2 - y$; подставляем во второе:

$$2y - y^2 - z^2 = 1,$$

или

$$z^2 + y^2 - 2y + 1 = 0, \text{ т. е. } z^2 + (y-1)^2 = 0.$$

Каждое из слагаемых последнего равенства неотрицательно и, следовательно, равно нулю. Отсюда

$$z = 0, \quad y = 1$$

и, значит,

$$x = 1.$$

Таким образом, система имеет *единственное* действительное решение.

251. Если $x^4 + y^4 = 1$, то либо $x^4 = 1$, $y^4 = 0$, либо $x^4 = 0$, $y^4 = 1$, либо, наконец, $0 < x^4$, $y^4 < 1$ (ибо числа x^4 и y^4 неотрицательны). Но при $x^4 < 1$, $y^4 < 1$ мы имеем также $|x| < 1$ и $|y| < 1$, а в таком случае

$$x^4 = |x^4| = |x^3| \cdot |x| < |x^3|, \quad y^4 < |y^3|$$

$$\text{и} \quad |x^3| + |y^3| > x^4 + y^4 = 1,$$

откуда следует, что два числа x, y одного знака, такие, что $|x| < 1$, $|y| < 1$ не могут служить решением нашей системы. Еще яснее, что и два числа x, y разных знаков, где $|x| < 1$, $|y| < 1$, тоже не могут служить решением, ибо в этом случае

$$x^3 + y^3 \leqslant |x^3 + y^3| < \max(|x^3|, |y^3|) < 1.$$

Таким образом, решения системы приходится искать среди таких значений x, y, что $x^4 = 1$, $y^4 = 0$, или наоборот, т. е. среди пар $x = \pm 1$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = \pm 1$; ясно, что из этих четырех пар чисел решениями являются только *две*: $x = 1$, $y = 0$ и $x = 0$, $y = 1$.

252. Одно решение (точнее система решений) очевидно: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, x — произвольно; поэтому далее мы будем считать, что хоть одно из x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) отлично от нуля. Далее, из первого и последнего уравнений системы имеем

$$x_3 = xx_2 - x_1 \quad \text{и} \quad x_5 = xx_1 - x_2; \tag{*}$$

аналогично, второе и предпоследнее ее уравнения дают

$$x_4 = xx_3 - x_2 \quad \text{и} \quad x_4 = xx_5 - x_1. \tag{**}$$

Подставив в (**) x_3 и x_5 из (*), находим

$$x_4 = (x^2 - 1)x_2 - xx_1 \quad \text{и} \quad x_4 = (x^2 - 1)x_1 - xx_2. \tag{***}$$

Приравняем теперь правые части (***):

$$(x^2 - 1)x_2 - xx_1 = (x^2 - 1)x_1 - xx_2,$$

или

$$(x^2 + x - 1)x_1 = (x^2 + x - 1)x_2.$$

Далее естественно различать два случая. Если $x^2 + x - 1 \neq 0$, то, очевидно, $x_1 = x_2$. Но все неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 входят в наши уравнения симметрично (одинаково); поэтому точно так же можно установить, что в этом случае $x_2 = x_3$, $x_3 = x_4$, $x_4 = x_5$. Таким образом, здесь мы имеем $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$; подставив эти значения в исходные уравнения, находим, что $x = 2$. Наконец, если $x^2 + x - 1 = 0$ $\left(\text{т. е. } x^2 - 1 = -x \text{ и } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$, то (***) — это одно уравнение

$$x_4 = -x(x_2 + x_1). \tag{****}$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что в этом случае значения $x_3 = xx_2 - x_1$, $x_4 = -x(x_1 + x_2)$ и $x_5 = xx_1 - x_2$ удовлетворяют нашей системе при произвольных x_1 и x_2.

Ответ: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, x произвольно; $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ произвольны, $x = 2$; x_1 и x_2 произвольны,

$$x_3 = xx_2 - x_1,\ x_4 = -x(x_1 + x_2),\ x_5 = xx_1 - x_2,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

253. Пусть x, y, z, t — искомые числа и $xyzt = A$; заметим, что $A \neq 0$, поскольку если, например, $x = 0$, то условия задачи приводят к противоречивым равенствам $y = z = t = 2$ и $yzt = 2$. Далее, уравнение $x + yzt = 2$ можно переписать так:

$$x + \frac{A}{x} = 2, \text{ или } x^2 - 2x + A = 0.$$

Аналогично получаем

$$y^2 - 2y + A = 0,\ z^2 - 2z + A = 0,\ t^2 - 2t + A = 0.$$

Но уравнение $x^2-2x+A=0$ может иметь (при данном A) лишь два разных корня; поэтому среди чисел x, y, z, t имеется *не более двух различных*. Далее мы рассмотрим отдельно несколько возможных случаев.

1°. Если $x=y=z=t$, то наши уравнения дают

$x+x^3=2$, или $x^3+x-2=0$,

или, наконец, $(x-1)(x^2+x+2)=0$,

откуда $x_1=1$, $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$. Таким образом, здесь мы имеем единственное решение системы в вещественных числах: $x=y=z=t=1$.

2°. Если $x=y=z$, а t может быть и иным, то условия задачи дают

$$x+x^2t=2 \quad\text{и}\quad t+x^3=2. \qquad (*)$$

Вычитая равенства (*) одно из другого, получаем:

$$x^3-x^2t-x+t=0, \text{ или } (x-t)(x^2-1)=0;$$

поэтому либо $x=t$ (этот случай мы уже разобрали выше), либо $x=\pm1$. Но при $x=1$ первое из уравнений (*) сразу дает $t=1$ — и мы снова приходим к полученному выше решению; если же $x=-1$, то то же уравнение дает $t=3$.

3°. Если $x=y$ и $z=t$, то система сводится к следующей:

$$x+xz^2=2, \quad z+x^2z=2. \qquad (**)$$

Вычитая почленно эти уравнения, получаем:

$$x-z+xz^2-x^2z=0, \quad\text{или}\quad (x-z)(1-xz)=0.$$

Но равенство $x=z$ сразу приводит нас к случаю 1°, а если $xz=1$ и (в силу первого из уравнений (**)) $x+z=2$, то мы снова находим уже известное решение $x=z=1$.

Ответ: либо все 4 числа равны 1, либо три из них равны -1 и одно равно 3.

254. Для того чтобы подчеркнуть полную симметрию уравнений нашей системы относительно входящих в систему неизвестных и коэффициентов при этих неизвестных, обозначим $x=x_1$, $y=x_2$, $z=x_3$ и $t=x_4$; $a=a_1$, $b=a_2$, $c=a_3$, $d=a_4$; при этом наши уравнения можно будет записать так:

$$\sum_{j=1}^{4}|a_i-a_j|\,x_j=1 \qquad (i=1,\,2,\,3,\,4). \qquad (*)$$

Далее, пусть, например, $a_1>a_2>a_3>a_4$; тогда имеем

$$\begin{aligned}
&(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1,\\
&(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1, \qquad (**)\\
&(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1,\\
&(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_4-a_3)x_3=1.
\end{aligned}$$

Вычтем из первого уравнения системы (**) второе, из второго —

третье и из третьего — четвертое; мы получим:

$$(a_1-a_2)(-x_1+x_2+x_3+x_4)=0,$$
$$(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0,$$
$$(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0.$$

Так как числа a_1, a_2, a_3, a_4 попарно различны, то

$$x_1=x_2+x_3+x_4,\quad x_1+x_2=x_3+x_4,\quad x_1+x_2+x_3=x_4,$$

откуда следует, что

$$x_2=x_3=0,\qquad x_1=x_4,$$

а тогда (например, из последнего из уравнений (**)) находим:

$$x_1=\frac{1}{a_1-a_4}.$$

Проверка показывает, что значения $x_2=x_3=0$, $x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4}$ действительно удовлетворяют всем уравнениям системы.

Ответ: если $a>b>c>d$, то $x=t=\frac{1}{a-d}$, $y=z=0$.

255. Обозначим $x_2-x_1=X_1$, $x_3-x_2=X_2$, $\ldots$, $x_n-x_{n-1}=X_{n-1}$, $x_1-x_n=X_n$. Тогда $X_1+X_2+\ldots+X_{n-1}+X_n=0$, а заданную систему уравнений можно переписать так:

$$ax_1^2+(b-1)x_1+c=X_1,\quad ax_2^2+(b-1)x_2+c=X_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ ax_n^2+(b-1)x_n+c=X_n. \qquad (*)$$

Но ясно, что если дискриминант $\Delta=(b-1)^2-4ac$ стоящих в левой части (*) квадратных двучленов отрицателен, то все эти двучлены сохраняют знак (а именно, их знак совпадает со знаком a); поэтому *все неизвестные* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *должны иметь тот же знак, что и коэффициент* a *уравнений* — и сумма их не может равняться нулю, т. е. наша система не имеет вещественных решений. Если $\Delta=0$, то правые части уравнений (*) лишь при $x_1=\frac{1-b}{2a}$ (соответственно при $x_2=x_3=\ldots=x_n=\frac{1-b}{2a}$) принимают значение 0 (а при других значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ они имеют тот же знак, что и число a); поэтому равенство $X_1+X_2+\ldots+X_n=0$ возможно лишь при $X_1=X_2=\ldots=X_n=0$ и $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1-b}{2a}$. Наконец при $\Delta>0$ наша система имеет, по крайней мере, *два* разных решения

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=x_1^*\quad \text{и}\quad x_1=x_2=\ldots=x_n=x_2^*,$$

где $x_{1,2}^*=\frac{1-b\pm\sqrt{(1-b)^2-4ac}}{2a}$.

256. Рассмотрим отдельно два случая.

1°. n четно. Перемножив «нечетные» (т. е. 1-е, 3-е, ..., $(n-1)$-е) и «четные» уравнения нашей системы, получим:

$$x_1x_2x_3\ldots x_n=a_1a_3a_5\ldots a_{n-1}\ \text{и}\ x_1x_2x_3\ldots x_n=a_2a_4a_6\ldots a_n,$$

откуда ясно, что при $a_1a_3a_5\ldots a_{n-1} \neq a_2a_4a_6\ldots a_n$ система вовсе не имеет решений. Если же $a_1a_3a_5\ldots a_{n-1} = a_2a_4a_6\ldots a_n$, то, приняв значение x_1 каким угодно (конечно, отличным от 0), мы затем из 1-го, 2-го, . ., $(n-1)$-го уравнений системы последовательно находим:

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}, \quad x_3 = \frac{a_2}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}.$$

Подстановка всех этих значений в последнее уравнение показывает, что оно тоже удовлетворяется.

2°. n нечетно. Разделив произведение «нечетных» (1-го, 3-го, ..., n-го) уравнений на произведение «четных» уравнений, получим:

$$x_1^2 = \frac{a_1a_3a_5\ldots a_n}{a_2a_4\ldots a_{n-1}}, \quad \text{откуда} \quad x_1 = \pm\sqrt{\frac{a_1a_3a_5\ldots a_n}{a_2a_4a_6\ldots a_{n-1}}} \qquad (*)$$

(напомним, что все a_i положительны). Далее из 1-го, 2-го, ..., $(n-1)$-го уравнений последовательно находим:

$$x_2 = \frac{a_1}{x_1}, \quad x_3 = \frac{a_2}{x_2}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}}.$$

Проверка показывает, что при этом в силу (*) удовлетворяется также и последнее уравнение системы.

Ответ: 0, если n четно и $a_1a_3\ldots a_{n-1} \neq a_2a_4\ldots a_n$; бесконечно много, если n четно и $a_1a_3\ldots a_{n-1} = a_2a_4\ldots a_n$; 2, если n нечетно.

257. а) Заметим, прежде всего, что если x_0 является корнем уравнения, то $-x_0$ есть также корень. Следовательно, отрицательных корней столько же, сколько и положительных. Далее, число 0 есть корень уравнения. Таким образом, нам достаточно найти число положительных корней. Отметим теперь, что если $\frac{x}{100} = \sin x$, то

$$|x| = 100|\sin x| \leqslant 100 \cdot 1 = 100.$$

Мы получаем, что корень уравнения по абсолютной величине больше 100 быть не может.

Разделим участок оси Ox от $x = 0$ до $x = 100$ на отрезки длиной 2π (последний отрезок может иметь меньшую длину) и подсчитаем число корней нашего уравнения на каждом из этих отрезков. Обратимся к рис. 29.

На первом отрезке (от 0 до 2π) имеется один положительный корень (и один корень нуль), на каждом следующем, исключая последний, — по два корня. Для того чтобы определить число корней на последнем отрезке, оценим его размеры: $\frac{100}{2\pi}$ заключается, очевидно, между 15 и 16 $\left(\frac{100}{15} = 6{,}66\ldots > 2\pi;\ \frac{100}{16} = 6{,}25 < 2\pi\right)$; следовательно, всего мы имеем 15 отрезков длиной по 2π и один неполный отрезок. Длина этого последнего отрезка равна $100 - 15 \cdot 2\pi > 5 > \pi$; следовательно, на этом отрезке целиком помещается положительная полуволна синусоиды и, значит, на нём тоже имеются два корня.

Итак, всего мы имеем $1 + 14 \cdot 2 + 2 = 31$ положительный корень нашего уравнения. Столько же имеется отрицательных корней, и еще один корень равен нулю.

Окончательно общее число корней равно $31 \cdot 2 + 1 = 63$.

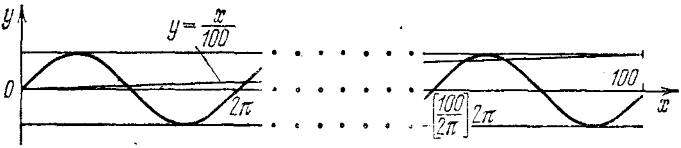


Рис. 29.

б) Решение этой задачи аналогично решению задачи а). Прежде всего очевидно, что если $\sin x = \lg x$, то $x \leqslant 10$ (в противном случае левая часть нашего равенства не больше 1, а правая — больше). Так как $2 \cdot 2\pi > 10$, то на участке оси Ox от $x = 0$ до $x = 10$ помещаются одна полная волна синусоиды $y = \sin x$ и часть следующей волны (рис. 30). График $y = \lg x$,

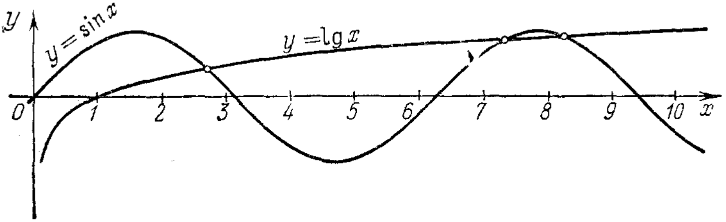


Рис. 30.

очевидно, пересекает первую волну синусоиды в одной точке. Далее, так как $2\pi + \frac{\pi}{2} < 10$, то в точке $x = \frac{5\pi}{2}$ имеем $\sin x = 1 > \lg x$ и, значит, график $y = \lg x$ пересекает первую половину второй положительной полуволны: так как $\lg x = 1 > \sin x$ в точке $x = 10$, то он должен пересечь и вторую половину этой полуволны. Таким образом, мы заключаем, что уравнение $\sin x = \lg x$ имеет всего *три* корня.

258. Сложив левые части всех наших неравенств, мы получим сумму чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$, каждое из которых берется с коэффициентом $1 + (-4) + 3 = 0$, т. е. число 0. Но если сумма 100 неотрицательных чисел равна нулю, то *все эти числа равны нулю*; таким образом, наша система неравенств реально обращается в систему равенств:

$$a_1 - 4a_2 + 3a_3 = 0, \quad a_2 - 4a_3 + 3a_4 = 0, \quad \ldots, \quad a_{100} - 4a_1 + 3a_2 = 0,$$

которую можно также переписать следующим образом:

$$a_1-a_2=3(a_2-a_3),\ a_2-a_3=3(a_3-a_4),\ a_3-a_4=$$
$$=3(a_4-a_5),\quad \ldots,\quad a_{99}-a_{100}=3(a_{100}-a_1),\quad a_{100}-a_1=3(a_1-a_2).$$

Теперь последовательно получаем:

$$a_1-a_2=3(a_2-a_3)=3^2(a_3-a_4)=3^3(a_4-a_5)=\ldots$$
$$\ldots=3^{99}(a_{100}-a_1)=3^{100}(a_1-a_2).$$

Но из равенства $a_1-a_2=3^{100}(a_1-a_2)$ следует, что $a_1-a_2=0$; поэтому и $a_2-a_3=\frac{1}{3}(a_1-a_2)=0$, и $a_3-a_4=\frac{1}{3}(a_2-a_3)=$ $=0, \ldots,$ и $a_{100}-a_1=\frac{1}{3}(a_{99}-a_{100})=0$.

Таким образом, *все* наши *числа* $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$ *равны между собой;* поэтому, если $a_1=1$, то и $a_2=a_3=\ldots=a_{100}=1$.

259. Первое решение. Перепишем наши неравенства следующим образом:

$$\begin{aligned} A&=-a-b+c+d>0,\\ B&=ab-ac-ad-bc-bd+cd>0,\qquad (*)\\ C&=abc+abd-acd-bcd>0,\end{aligned}$$

и рассмотрим уравнение

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)=$$
$$=x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+abcd=0.$$

Поскольку все коэффициенты этого уравнения в силу неравенств (*) и положительности чисел a, b, c, d положительны, то оно не имеет положительных корней (при $x>0$ и $P(x)=x^4+Ax^3+Bx^2+$ $+Cx+abcd>0$); но, с другой стороны, уравнение $P(x)=0$ имеет даже два положительных корня $x=a$ и $x=b$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Второе решение. Из первых двух неравенств задачи следует, что

$$(a+b)^2(c+d)<(c+d)(ab+cd),\quad \text{или}\quad (a+b)^2<ab+cd\qquad (**)$$

(ведь $c+d>0$); аналогично, из двух последних неравенств получаем:

$$(a+b)^2(c+d)cd<(ab+cd)(c+d)ab,\ \text{или}$$
$$(a+b)^2cd<(ab+cd)ab.\qquad (***)$$

Но так как $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geqslant 0$ и, значит, $(a+b)^2\geqslant 4ab$, то из неравенств (**) и (***) следует:

$$4ab<ab+cd\ \text{и}\ 4abcd<(ab+cd)ab,$$
$$\text{т. е.}\ cd>3ab\ \text{и}\ 4cd<ab+cd,\ \text{или}\ ab>3cd,$$

— но невозможно, чтобы одновременно было $cd>3ab$ и $cd<\frac{1}{3}ab$.

260. Так как, очевидно,

$$(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ радикалов}})\times$$

$$\times(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ радикалов}})=2^2-$$

$$-(2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ радикалов}})=2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ радикалов}},$$

то фигурирующая в условии задача дробь равна числу, обратному выражению

$$R_n=2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ радикалов}};$$

таким образом, остается лишь показать, что $R_n<4$. Докажем это методом математической индукции. Ясно, что $R_1=2<4$ и что

$$\text{если}\quad R_{n-1}<4,\quad\text{то и}\quad R_n=2+\sqrt{R_{n-1}}<2+\sqrt{4}=4.$$

Примечание. Нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=4$; в самом деле последовательность R_n *имеет предел*, так как она ограничена ($R_n<4$ при всех n) и монотонно возрастает ($R_{n+1}>R_n$, ибо R_{n+1} получается из R_n, если под знаком последнего радикала заменить 2 бóльшим числом $2+\sqrt{2}$); положив $\lim R_n=R=r^2$ и устремляя n в соотношении $R_{n+1}=2+\sqrt{R_n}$ к бесконечности, получим в пределе: $r^2=2+r$, или $(2-r)(1+r)=0$, т. е. $r=2$ (ведь $r>0$) и $R=4$. Отсюда следует, что при $n\to\infty$ предел выписанной в условии задачи дроби равен $\frac{1}{4}$; поэтому *улучшить данную в условии задачи оценку нельзя.*

261. Пусть a, b, c — данные числа; так как $abc=1$, то $c=\frac{1}{ab}$. Второе условие задачи утверждает, что

$$a+b+c>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\quad\text{или}\quad a+b+\frac{1}{ab}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab;\qquad(*)$$

но неравенство (*) можно преобразовать так:

$$ab-a-b+1<\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+1,$$

или

$$(a-1)(b-1)<\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\ \left(=\frac{1}{ab}(a-1)(b-1)\right).$$

Таким образом, неравенство (*) равносильно следующему:

$$\frac{1}{ab}(a-1)(b-1) > (a-1)(b-1), \text{ или } (a-1)(b-1)\left(\frac{1}{ab}-1\right) > 0.$$

Поэтому из трех чисел $a-1$; $b-1$ и $\frac{1}{ab}-1 (=c-1)$ имеется четное число отрицательных; другими словами, две из этих разностей отрицательны, а третья положительна, что нам и требовалось доказать. [Ясно, что все три разности положительными быть не могут, ибо если $a>1$ и $b>1$, то заведомо $c=\frac{1}{ab}<1$ и, значит, разность $\frac{1}{ab}-1<0$].

262. Ясно, что числа 1959 и 1000 в формулировке этой задачи являются случайными — факт, который нам требуется доказать, состоит в том, что *если все* $a_i > 0$ *и* $\sum a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, *то сумма* $S_{n,k} = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ *всевозможных произведений по* k *из* n *наших чисел* (где $1 \leqslant k < n$) *всегда* $\leqslant 1$, *причем, если* $k>1$, *то эта сумма строго* <1. Доказать это можно, например, методом математической индукции по числам n и k. Ясно, что при $n=1$ и при $n=2$ утверждение задачи справедливо; далее предположим его уже доказанным для всех n, меньших данного, а для этого n — справедливым для всех k, меньших фиксированного $k \geqslant 2$ (при любом n и $k=1$ утверждение задачи тривиально).

Рассмотрим теперь сумму $S_{n,k} = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$.

Выделяя в этой сумме все произведения, содержащие множитель a^n, получим:

$$S_{n,k} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}=1}^{n-1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_{k-1}}a_n + \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{n-1} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k} = S_{n-1,k-1}\cdot a_n + S_{n-1,k},$$

где $S_{n-1,k-1}$ и $S_{n-1,k}$ — суммы всевозможных произведений по $k-1$ и k сомножителей из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Но сумма этих последних $n-1$ чисел равна

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) - a_n = 1 - a_n.$$

Заменим теперь числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ числами $a_1' = \frac{a_1}{1-a_n}$, $a_2' = \frac{a_2}{1-a_n}$, $\ldots$, $a_{n-1}' = \frac{a_{n-1}}{1-a_n}$, сумма которых уже равна 1; суммы же всевозможных произведений по $k-1$ и по k из этих новых $n-1$ чисел мы обозначим через $S_{n-1,k-1}'$ и $S_{n-1,k}'$. По предположению индукции, $S_{n-1,k-1}' \leqslant 1$ и $S_{n-1,k}' < 1$; с другой стороны, в силу пропорциональности чисел a'_i и a_i (где $i = 1, \ldots, n-1$), очевидно, имеем:

$$S_{n-1,k-1} = S'_{n-1,k-1} \cdot (1-a_n)^{k-1} \leqslant (1-a_n)^{k-1}$$

$$\text{и} \quad S_{n-1,k} = S'_{n-1,k} \cdot (1-a_n)^k < (1-a_n)^k.$$

Теперь окончательно получаем:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} \cdot a_n + S_{n-1,k} < (1-a_n)^{k-1} \cdot a_n + (1-a_n)^k =$$
$$= (1-a_n)^{k-1}[a_n + (1-a_n)] = (1-a_n)^{k-1} < 1,$$

— что и требовалось доказать.

263. При $N = 2$ мы имеем лишь одну пару удовлетворяющих условию задачи чисел m и n, а именно, $m = 1$, $n = 2$; здесь «сумма» s_2 рассматриваемых дробей $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. При $N = 3$ таких пар чисел будет уже две (пары $m = 1$, $n = 3$ и $m = 2$, $n = 3$); сумма s_3 рассматриваемых дробей здесь $s_3 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$. Докажем теперь, что *для любого натурального $N > 1$ интересующая нас сумма s_N равна $\frac{1}{2}$.*

Так как для $N = 2$ и $N = 3$ сформулированное утверждение верно, то мы можем воспользоваться методом математической индукции. Предположим, что некоторая сумма $s_{N-1} = \frac{1}{2}$; докажем, что тогда и $s_N = \frac{1}{2}$. Ясно, что суммы s_{N-1} и s_N связаны следующим образом: для получения из суммы s_{N-1} суммы s_N надо, с одной стороны, исключить все слагаемые суммы s_{N-1}, имеющие вид $\frac{1}{mn}$, где $m + n = N$, т. е. имеющие вид $\frac{1}{i(N-i)}$ (здесь $1 \leqslant i < \frac{N}{2}$ и числа i и $N-i$ взаимно просты). С другой стороны, к сумме s_{N-1} надо прибавить всевозможные дроби вида $\frac{1}{jN}$, где $1 \leqslant j < N$ и числа j и N взаимно просты. Но так как для каждого i

$$\frac{1}{i(N-i)} = \frac{1}{iN} + \frac{1}{(N-i)N}$$

и числа i, $N-i$ взаимно просты тогда и только тогда, когда взаимно просты i и N, а значит и $N-i$ и N, то сумма s_N получается из суммы s_{N-1} исключением ряда дробей вида $\frac{1}{i(N-i)}$ и добавлением вместо каждой такой дроби «компенсирующей» ее суммы дробей $\frac{1}{iN} + \frac{1}{(N-i)N}$; поэтому $s_N = s_{N-1} \left(= \frac{1}{2}\right)$.

264. Мы утверждаем, что *все* наши 1973 *числа одинаковы*. В самом деле, пусть, это не так и, скажем, $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_i \neq a_{i+1}$. Для простоты перенумеруем наши числа циклически, присвоив номер 1 числу a_i, номер 2 — числу a_{i+1}, и т. д. — вплоть до числа a_{i-1}

которое теперь получит номер 1973. Итак, далее мы будем считать, что наши числа не все равны, причем $a_1 \neq a_2$, например $a_1 > a_2$ (случай $a_1 < a_2$ рассматривается аналогично).

Ясно, что из выписанных в условии задачи равенств следует, что либо все рассматриваемые числа больше 1, либо все они меньше 1, либо, наконец, все эти числа равны 1. Но в последнем случае все числа a_k (где $k = 1, 2, \ldots, 1973$) равны между собой, поэтому нам остается рассмотреть два других случая.

1°. *Все числа a_k больше* 1. В таком случае

из $a_1^{a_2} = a_2^{a_3}$ и $a_1 > a_2$ следует, что $a_2 < a_3$;

из $a_2^{a_3} = a_3^{a_4}$ и $a_2 < a_3$ следует, что $a_3 > a_4$;

из $a_3^{a_4} = a_4^{a_5}$ и $a_3 > a_4$ следует, что $a_4 < a_5$;

. . . .

. . . .

Таким образом, мы имеем:

$$a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < a_5 \ldots > a_{1972} < a_{1973} > a_1 < a_2.$$

Полученное противоречие $a_1 > a_2$ и $a_1 < a_2$ и доказывает, что в случае 1° обязательно $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{1973}$.

2°. *Все числа a меньше* 1. В этом случае

из $a_1^{a_2} = a_2^{a_3}$ и $a_1 > a_2$ следует, что $a_2 > a_3$;

из $a_2^{a_3} = a_3^{a_4}$ и $a_2 > a_3$ следует, что $a_3 > a_4$;

. . . .

. . . .

Таким образом, здесь мы имеем:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_{1973} > a_1.$$

Полученное противоречие $a_1 > a_1$ показывает, что и в этом случае все a_k обязательно равны между собой.

265. Предложение задачи является справедливым при $n = 1$ и $n = 2$, ибо

$$x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2, \quad x_1 + x_2 = 6,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (6)^2 - 2 \cdot 1 = 34.$$

Далее мы имеем:

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - x_1x_2\left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) =$$
$$= 6\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - 1 \cdot \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right),$$

или

$$x_1^n + x_2^n =$$
$$= 5\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) + \left[\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right)\right]. \quad (*)$$

Из этой формулы прежде всего следует, что если $x_1^{n-2}+x_2^{n-2}$ и $x_1^{n-1}+x_2^{n-1}$ — целые числа, то и $x_1^n+x_2^n$ — целое число, откуда, в силу принципа математической индукции, вытекает первое утверждение задачи.

Пусть теперь n есть первое натуральное число, такое, что $x_1^n+x_2^n$ делится на 5. Из формулы (*) следует, что в этом случае разность $\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}\right)-\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)$ также должна делиться на 5. Но, заменив в формуле (*) n на $n-1$, мы получим:

$$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}=$$
$$=5\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)+\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)-\left(x_1^{n-3}+x_2^{n-3}\right),$$

откуда следует, что

$$x_1^{n-3}+x_2^{n-3}=$$
$$=5\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)-\left[\left(x_1^{n-1}+x_2^{n-1}\right)-\left(x_1^{n-2}+x_2^{n-2}\right)\right]$$

тоже должно делиться на 5, что противоречит предположению о том, что для всех чисел m, меньших n, $x_1^m+x_2^m$ не делится на 5. Отсюда следует, что такого целого положительного n, для которого $x_1^n+x_2^n$ делится на 5, вовсе не может существовать. Легко видеть, что утверждение задачи верно и для целых отрицательных n: если $n<0$, то

$$x_1^n+x_2^n=\frac{1}{x_1^{-n}}+\frac{1}{x_2^{-n}}=\frac{x_1^{-n}+x_2^{-n}}{(x_1x_2)^{-n}}=x_1^{-n}+x_2^{-n}$$

— целое число, не делящееся на 5, так как $-n>0$.

266. Предположим, что сумма $a_1+a_2+\ldots+a_{1000}$ содержит n положительных и $1000-n$ отрицательных членов. В таком случае все попарные произведения n положительных членов (их, очевидно, будет $\frac{n(n-1)}{2}$) и все попарные произведения $1000-n$ отрицательных членов $\left(\text{их число равно } \frac{(1000-n)(1000-n-1)}{2}\right)$ будут положительными, а произведения положительных членов на отрицательные (их будет $n(1000-n)$) — отрицательны. Условие задачи требует, чтобы было

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(1000-n)(1000-n-1)}{2}=n(1000-n),$$

или

$$\frac{n^2-n+(1000-n)^2-(1000-n)}{2}=1000n-n^2,$$

$$2n^2-2000n+\frac{999\,000}{2}=0,$$

$$n=\frac{1000\pm\sqrt{1\,000\,000-999\,000}}{2}=\frac{1000\pm\sqrt{1000}}{2},$$

а это, очевидно, невозможно.

В случае второго выражения мы, рассуждая аналогично, придем к условию

$$n = \frac{10\,000 \pm \sqrt{10\,000}}{2} = \frac{10\,000 \pm 100}{2}.$$

Отсюда следует, что это выражение может содержать равное число положительных и отрицательных удвоенных произведений; для этого достаточно, чтобы исходный многочлен содержал $\frac{10\,000+100}{2} = 5050$ положительных членов и $\frac{10\,000-100}{2} = 4950$ отрицательных (или 5050 отрицательных членов и 4950 положительных).

267. Прежде всего имеем:

$$(\sqrt{2}-1)^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1};$$

$$(\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}.$$

Докажем теперь, что если только

$$(\sqrt{2}-1)^{2k-1} = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2}$$

можно представить в виде $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$, т. е. если $2B^2 - A^2 = 1$, то и число

$$(\sqrt{2}-1)^{2k+1} = B'\sqrt{2} - A'$$

можно представить в таком виде, т. е. $2B'^2 - A'^2 = 1$. Для этого достаточно заметить, что

$$(\sqrt{2}-1)^{2k+1} = (\sqrt{2}-1)^{2k-1}(\sqrt{2}-1)^2 =$$

$$= (B\sqrt{2}-A)(3-2\sqrt{2}) = (3B+2A)\sqrt{2} - (4B+3A);$$

следовательно,

$$B' = 3B + 2A, \quad A' = 4B + 3A$$

и

$$2B'^2 - A'^2 = 2(3B+2A)^2 - (4B+3A)^2 =$$

$$= 18\,B^2 + 24\,AB + 8\,A^2 - 16\,B^2 - 24\,AB - 9\,A^2 =$$

$$= 2B^2 - A^2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Точно так же показывается, что если число $(\sqrt{2}-1)^{2k} = C - D\sqrt{2}$ можно представить в виде $\sqrt{N} - \sqrt{N-1}$, то и число $(\sqrt{2}-1)^{2k+2} = C' - D'\sqrt{2}$ можно представить в таком виде.

Отсюда, в силу принципа математической индукции, вытекает утверждение задачи.

268. Если $(A + B\sqrt{3})^2 = C + D\sqrt{3}$, то $C = A^2 + 3B^2$, $D = 2AB$ и $(A - B\sqrt{3})^2 = A^2 + 3B^2 - 2AB\sqrt{3} = C - D\sqrt{3}$. Следовательно, если бы было $(A + B\sqrt{3})^2 = 99\,999 + 111\,111\sqrt{3}$, то было бы также $(A - B\sqrt{3})^2 = 99\,999 - 111\,111\sqrt{3}$, что невозможно, так как $99\,999 - 111\,111\sqrt{3}$ меньше нуля, а квадрат каждого действительного числа больше нуля.

269. Предположим, что $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$, и возведем обе части этого равенства в куб. В таком случае получим:

$$2=p^3+3p^2q\sqrt{r}+3pq^2r+q^3r\sqrt{r},$$

или

$$2=p(p^2+3q^2r)+q(3p^2+q^2r)\sqrt{r}.$$

Покажем теперь, что если $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$, то $\sqrt[3]{2}$ есть рациональное число. Действительно, если $q=0$, то $\sqrt[3]{2}=p$ есть рациональное число. Если $q\neq 0$ и $3p^2+q^2r\neq 0$, то из последнего равенства следует

$$\sqrt{r}=\frac{2-p(p^2+3q^2r)}{q(3p^2+q^2r)},$$

откуда

$$\sqrt[3]{2}=p+q\frac{2-p(p^2+3q^2r)}{q(3p^2+q^2r)},$$

т. е. опять рационально. Если же $3p^2+q^2r=0$, то

$$q^2r=-3p^2,\ \ 2=p[p^2+3(-3p^2)]=-8p^3,$$

и опять $\sqrt[3]{2}=-2p$ есть число рациональное.

Таким образом, нам остается только показать, что $\sqrt[3]{2}$ не является рациональным числом. Это доказательство хорошо известно. В самом деле, если $\sqrt[3]{2}$ равен несократимой дроби $\frac{m}{n}$, то $2=\frac{m^3}{n^3}$, $m^3=2n^3$. Таким образом, число m^3 (а также и m) есть четное число, следовательно, оно делится на 8. В таком случае $n^3=\frac{m^3}{2}$ тоже должно быть четным, а следовательно, и n четно, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Итак, предположение, что $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$, привело нас к абсурду.

270. Обозначим $\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}=x$; в таком случае

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{n+\sqrt{n^2-4}}=\frac{2(n-\sqrt{n^2-4})}{4}=\frac{n-\sqrt{n^2-4}}{2},$$

так что x удовлетворяет квадратному уравнению $x+\frac{1}{x}=n$. Но если число $x+\frac{1}{x}$ — целое $(=n)$, то число $x^m+\frac{1}{x^m}$ — тоже целое, что легко доказывается методом математической индукции: если считать уже известным, что все числа $a_i=x^i+\frac{1}{x^i}$ при всех $i\leqslant N$ — целые, то и число $a_{N+1}=$

$=x^{N+1}+\frac{1}{x^{N+1}}$ — тоже целое, как это вытекает из следующей выкладки:

$$a_N a_1 =$$

$$=\left(x^N+\frac{1}{x^N}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^{N+1}+\frac{1}{x^{N+1}}\right)+\left(x^{N-1}+\frac{1}{x^{N-1}}\right)=$$

$$=a_{N+1}+a_{N-1},$$

откуда

$$a_{N+1}=a_N a_1-a_{N-1}.$$

Таким образом, обозначив $x^m=y$, мы имеем $y+\frac{1}{y}=k$, где $k(=a_m)$ — натуральное число; решая это квадратное уравнение относительно y, получаем $y=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$. Но так как число $x=$ $=\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}>1$, то и $x^m=y>1$, откуда и следует, что $y=$ $=x^m=A=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ $\left(\text{а } \frac{1}{x^m}=\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}<1\right)$.

271. Заметим, прежде всего, что *вещественное число* α *не может двумя разными способами быть представлено в виде суммы* $\alpha=x+y\sqrt{2}$, *где* x *и* y *рациональны*, ибо если $\alpha=a+b\sqrt{2}=a_1+$ $+b_1\sqrt{2}$ (где a, b, a_1, b_1 рациональны), то $\sqrt{2}=\frac{a-a_1}{b_1-b}$, что (в силу рациональности разностей $a-a_1$ и b_1-b и иррациональности числа $\sqrt{2}$) возможно лишь при $a=a_1$ и $b=b_1$. Таким образом, из выписанного в условии задачи равенства, которое можно «развернуть» по формулам бинома Ньютона:

$$(X+Y\sqrt{2})+(Z+T\sqrt{2})=5+4\sqrt{2},$$

где

$$X=x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}\cdot 2y^2+\ldots;$$

$$Y=C_{2n}^1x^{2n-1}y+C_{2n}^3x^{2n-3}\cdot 2y^3+\ldots,$$

и т. д., вытекает

$$X+Z=5 \text{ и } Y+T=4. \qquad (*)$$

Вычтя теперь почленно из первого из равенств (*) второе равенство, умноженное на $\sqrt{2}$, получим:

$$(X-Y\sqrt{2})+(Z-T\sqrt{2})=5-4\sqrt{2},$$

$$\text{или}\quad (x-y\sqrt{2})^{2n}+(z-t\sqrt{2})^{2n}=5-4\sqrt{2}, \qquad (**)$$

которое, таким образом, обязательно должно выполняться, если только имеет место выписанное в условии задачи равенство. Однако из второй формы равенства (**) сразу следует его невозможность, ибо здесь левая часть равенства положительна, а его правая часть — отрицательна. Отсюда и вытекает, что и выписанное в условии задачи равенство *не может* иметь места.

272. Нельзя. В самом деле, пусть мы k_1 раз переливали воду из 1-й бочки во 2-ю первым ковшом и k_2 раз переливали тем же ковшом воду из 2-й бочки в 1-ю; окончательно мы при этом перелили из 1-й бочки во 2-ю $(k_1-k_2)\sqrt{2}=k\cdot\sqrt{2}$ литров воды, где целое число $k=k_1-k_2$ может быть и неположительным. Аналогично, переливая воду l_1 раз из 1-й бочки во 2-ю вторым ковшом и l_2 раз тем же ковшом переливая воду из 2-й бочки в 1-ю, мы всего перельем из 1-й бочки во 2-ю $(l_1-l_2)(2-\sqrt{2})=l\cdot(2-\sqrt{2})$ литров воды, где число l — целое; поэтому условие задачи требует выполнения равенства $k\sqrt{2}+l(2-\sqrt{2})=1$, или $(l-k)\sqrt{2}=2l-1$, т. е. $\sqrt{2}=\frac{2l-1}{l-k}$. Но так как число $\sqrt{2}$ — *иррациональное*, то последнее равенство может иметь место (при целых k и l), лишь если $l-k=0$ (т. е. $l=k$) и $2l-1=0$, откуда $l=\frac{1}{2}$, что, однако, невозможно, ибо l — целое число.

273. Первое решение. В задаче требуется найти все *рациональные* решения (x, y) (где $y\geqslant 0$) уравнения $3x^2-5x+9=y^2$ с двумя неизвестными x и y (ср. с циклом задач 5). Очевидно, что одно решение имеет вид $x=0$, $y=3$. Положим $x=x_1$, $y=y_1+3$; тогда получим:

$$3x_1^2-y_1^2-5x_1-6y_1=0.$$

Для всякого решения (x_1, y_1), отличного от $(0,0)$, $\frac{y_1}{x_1}=\frac{m}{n}$, где m и n — *взаимно простые целые числа*, $y_1=x_1\cdot(m/n)$; следовательно, имеем:

$$3x_1^2-\frac{m^2}{n^2}x_1^2-5x_1-6\frac{m}{n}x_1=0,$$

или, поскольку $x\neq 0$, $x_1=\frac{5n^2+6mn}{3n^2-m^2}$. Формула $x=\frac{5n^2+6mn}{3n^2-m^2}$ и дает полный ответ на вопрос задачи (ответ $x=0$ получается при $n=0$).

Второе решение. Если (x, y) — рациональная точка кривой второго порядка (*гиперболы*) $y^2=3x^2-5x+9$, то отношение $k=\frac{y-3}{x}$ рационально (может быть, бесконечно). С другой стороны, если k рационально, то прямая $y=kx+3$ пересекает кривую в двух рациональных точках: $(0, 3)$ и $\left(\frac{6k+5}{3-k^2}, \frac{3k^2+5k+9}{3-k^2}\right)$. Отсюда следует, что все рациональные точки кривой отвечают таким x, что $x=\frac{6k+5}{3-k^2}$.

274. Пусть $x^2+px+q=0$ и $y^2+py+q_1=0$ — исходное и «округленное» уравнения, где $|q_1-q|=|\varepsilon|\approx 0{,}01$. Вычитая второе уравнение из первого, найдем; $(x^2-y^2)+p(x-y)=q_1-q=\varepsilon$, или $(x-y)(x+y+p)=\varepsilon$, откуда, обозначив через x_1 и y_1 близкие друг другу корни двух наших уравнений, а через x_2 — второй корень первого из этих уравнений, так что $-(x_1+x_2)=p$, получим:

$$|y_1-x_1|=\frac{|\varepsilon|}{|x_1+y_1+p|}\approx\frac{|\varepsilon|}{|2x_1-(x_1+x_2)|}=\frac{|\varepsilon|}{|x_1-x_2|}=\frac{|\varepsilon|}{\Delta},$$

— что нам и требовалось доказать.

275. Ясно, что если среди наших чисел имеется несколько целых, то их можно просто отбросить — ведь разность между суммой округлений любого количества чисел и суммой самих этих чисел не изменится от дополнения множества чисел еще какими-то целыми числами, а сумма чисел при этом увеличится; поэтому если утверждение задачи верно для любых н е ц е л ы х чисел, то оно верно и для любых чисел. Обозначим теперь сами числа через $a_1, a_2, \ldots, a_n$; их *целые части* — через $[a_1], [a_2], \ldots, [a_n]$; их *дробные части* $\{a_i\}=a_i-[a_i]$ (где $i=1, 2, \ldots, n$) — через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (ср. выше, стр. 37); при этом условимся располагать числа так, чтобы их дробные части не убывали:

$$0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n<1.$$

Округлим теперь k первых чисел a_i (здесь $1\leqslant i\leqslant k$; выбор числа k, где $0\leqslant k\leqslant n$, мы еще уточним в дальнейшем) до (*меньших* их) чисел $[a_i]$; оставшиеся же $n-k$ чисел a_j (где $k<j\leqslant n$) округлим до *больших* чисел $[a_j]+1$. Ясно, что ошибка при замене суммы чисел суммой их округлений будет наибольшей для сумм $a_1+a_2+\ldots+a_k$ и $a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n$ — в первом случае она будет равна

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\leqslant k\alpha_k,$$

а во втором —

$$(1-\alpha_{k+1})+(1-\alpha_{k+2})+\ldots+(1-\alpha_n)\leqslant(n-k)(1-\alpha_{k+1}).$$

Таким образом, условие задачи будет выполнено, если k таково, что

$$k\alpha_k\leqslant\frac{n+1}{4}\quad\text{и}\quad(n-k)(1-\alpha_{k+1})\leqslant\frac{n+1}{4}.$$

Пусть теперь k — н а и б о л ь ш е е из таких целых чисел, что $k\alpha_k\leqslant\frac{n+1}{4}$, или $\alpha_k\leqslant\frac{n+1}{4k}$ (это k может равняться и 0); оговорка о том, что число k — н а и б о л ь ш е е в о з м о ж н о е, означает, что, заменив номер k на $k+1$, мы уже получаем $\alpha_{k+1}>\frac{n+1}{4(k+1)}$. Но из последнего неравенства следует, что

$$(n-k)(1-\alpha_{k+1})<(n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right).$$

Проверим, что $(n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right)\leqslant\frac{n+1}{4}$. Действительно, это неравенство равносильно неравенству

$$(n-k)(4k-n+3) \leqslant (n+1)(k+1);$$

последнее же равносильно очевидному, справедливому при всех n и k, неравенству

$$[n-(2k+1)]^2 \geqslant 0.$$

Примечание. *Из решения задачи нетрудно усмотреть, что при $n = 2l+1$ нечетном* улучшить оценку задачи нельзя (соответствующий пример мы получим, положив $a_1 = a_2 = \ldots a_n = \frac{1}{2}$, где, очевидно, оптимальным будет вариант, когда мы l чисел заменим нулями, а $l+1$ остальных — единицами или наоборот); если же $n = 2l$ *четно,* то величину $(n+1)/4$ в условии задачи можно уменьшить (почему- на сколько?).

276. Ясно, что при $a < 0{,}001$ округление a_0 числа a равно 0, а значит, и частное $\frac{a_0}{a}$ (и любое округление этого частного) равно 0; поэтому далее мы будем считать, что $a \geqslant 0{,}001$. Но при этом, разумеется, и $a_0 \geqslant 0{,}001$, в то время как «погрешность приближения» $\alpha = a - a_0 < 0{,}001$; поэтому интересующая нас дробь

$$d = \frac{a_0}{a} = \frac{a-\alpha}{a} = 1 - \frac{\alpha}{a}$$

заключена между 0 и 1: ясно, что $0 < d \leqslant 1$. Далее из того, что $\alpha < 0{,}001$, а $a_0 > 0{,}001$, следует, что $\alpha < a_0$ и, значит, $\alpha + \alpha = 2\alpha < a_0 + \alpha = a$, откуда $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$ и поэтому

$$d = 1 - \frac{\alpha}{a} > \frac{1}{2} \quad (\text{и } d \leqslant 1) \qquad (*)$$

— вот эта оценка дроби d является уже окончательной, ибо отношение $\delta = \frac{\alpha}{a}$ может принимать любое значение в пределах $0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}$ (а значит, d — любое значение в пределах $\frac{1}{2} < d \leqslant 1$). В самом деле, приняв a_0 равным 0,001, мы получим, что дробь $\delta = \frac{\alpha}{a_0+\alpha} = \frac{\alpha}{0{,}001+\alpha}$, откуда

$$\alpha = 0{,}001\,\frac{\delta}{1-\delta}; \qquad (**)$$

такое α при любом δ $\left(\text{где } 0 \leqslant \delta < \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \alpha < 0{,}001$, а соответствующее $a = 0{,}001 + \alpha$ отвечает значению $d = 1 - \delta$. Ясно, что если δ пробегает все значения между 0 и $\frac{1}{2}$, то d принимает все значения от $\frac{1}{2}$, до 1, т. е. d может иметь любое из следующих значений 0; 0,5; 0,501; 0,502; ...; 0,999; 1.

277. Рассмотрим 1001 число

$$0 \cdot \alpha = 0,\ \alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,\ 1000\alpha$$

и возьмем дробную часть каждого из этих чисел (разность между данным числом и наибольшим целым числом, не превосходящим данного). Эти дробные части будут представлять собой 1001 число, не превосходящее 1. Разделим теперь отрезок числовой оси от 0 до 1 на 1000 равных отрезков длины $\frac{1}{1000}$ (к каждому отрезку мы будем причислять его левый конец, но не причислять правый) и рассмотрим распределение точек, изображающих наши дробные части, по этим отрезкам. Так как число отрезков равно 1000, а число точек 1001, то, по крайней мере, в одном отрезке будут находиться две точки. Но это означает, что существуют два таких неравных числа p и q (оба не превосходящих 1000), что разность дробных долей чисел $p\alpha$ и $q\alpha$ меньше $\frac{1}{1000}$.

Пусть, например, $p > q$. Рассмотрим число $(p-q)\alpha = p\alpha - q\alpha$. Так как $p\alpha = P + d_1$, $q\alpha = Q + d_2$, где P и Q — целые числа, d_1 и d_2 — дробные доли $p\alpha$ и $q\alpha$, то $(p-q)\alpha = (P-Q) + d_1 - d_2$ отличается от целого числа $P-Q$ меньше чем на $\frac{1}{1000}$. Но это означает, что дробь $\frac{P-Q}{p-q}$ отличается от α меньше чем на $0{,}001 \cdot \frac{1}{p-q}$.

278. а) Если число α меньше 1, то и $\sqrt{\alpha}$ меньше 1. Предположим теперь, что десятичная дробь, равная $\sqrt{\alpha}$, начинается с меньшего числа девяток, чем 100; это означает, что $\sqrt{\alpha} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$. Возводя обе части последнего неравенства в квадрат, получим:

$$\alpha < 1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200}.$$

Но

$$1 - 2\left(\frac{1}{10}\right)^{100} + \left(\frac{1}{10}\right)^{200} < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}; \text{ поэтому } \alpha < 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}$$

и, значит, десятичная дробь, равная α, не может начинаться со 100 девяток.

б) Заметим, прежде всего что $0,\underbrace{1111\ldots111}_{100 \text{ единиц}} = \frac{1}{9}\cdot 0,\underbrace{9999\ldots999}_{100 \text{ девяток}} = \frac{1}{9}\times$ $\times\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}\right)$; таким образом, нам требуется оценить $\frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}}$. Далее мы ограничимся рассмотрением одной лишь задачи 4), из результата которой вытекают и результаты остальных задач.

Известно, что при любом $a \leqslant 1$ имеет место неравенство $\sqrt{1-a} < 1 - \frac{1}{2}a$, поскольку $\left(1 - \frac{1}{2}a\right)^2 = 1 - a + \frac{1}{4}a^2 > 1 - a$; поэтому

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}} < 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{100} \left(= 0,\underbrace{9999\ldots9995}_{100 \text{ девяток}}\right).$$

Уточним эту оценку — найдем два таких положительных числа c_1 и c_2, что

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{100}-c_1\left(\frac{1}{10}\right)^{200}>$$
$$>\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}}>1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{100}-c_2\left(\frac{1}{10}\right)^{200}.$$

Возведя в квадрат все члены двойного неравенства

$$1-\frac{1}{2}a-c_1a^2>\sqrt{1-a}>1-\frac{1}{2}a-c_2a^2,$$

получим:

$$1+\frac{1}{4}a^2+c_1^2a^4-a-2c_1a^2+c_1a^3>1-a>$$
$$>1+\frac{1}{4}a^2+c_2^2a^4-a-2c_2a^2+c_2a^3,$$

или, вычитая из всех частей неравенства $1-a$ и сокращая затем на a^2:

$$\left(\frac{1}{4}-2c_1\right)+c_1a+c_1^2a^2>0>\left(\frac{1}{4}-2c_2\right)+c_2a+c_2^2a^2.$$

Нас интересует случай $a=\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$; покажем, что здесь можно, например, принять $c_1=\frac{1}{8}+\frac{1}{100}a=0,125+\left(\frac{1}{10}\right)^{102}$ и $c_2=\frac{1}{8}+$ $+\frac{1}{10}a=0,125+\left(\frac{1}{10}\right)^{101}$. Действительно, при **любом** $a>0$

$$\frac{1}{4}-2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{100}a\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{100}a\right)a+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{100}a\right)^2a^2=$$
$$=\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{50}\right)a+\ldots>0;$$

с другой стороны, при $a=\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$

$$\frac{1}{4}-2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}a\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}a\right)a+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}a\right)^2a^2=$$
$$=-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)a+\left[\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{10}a\right)^2\right]a^2<0,$$

поскольку $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)a=\frac{3}{40}\left(\frac{1}{10}\right)^{100}$ явно больше последнего члена неравенства, близкого к $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{64}\right)a^2=\frac{37}{320}a^2=\frac{37}{320}\left(\frac{1}{10}\right)^{200}$.

Таким образом, мы имеем

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{100}-\left(0,125+\left(\frac{1}{10}\right)^{102}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{200}>\sqrt{0,\underbrace{999\ldots 99}_{100\text{ цифр}}}>$$

$$>1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{100}-\left(0,125+\left(\frac{1}{10}\right)^{101}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{200}.$$

Последнее двойное неравенство можно переписать так:

$$0,\underbrace{9999\ldots 999}_{100\text{ девяток}}4\underbrace{9999\ldots 999}_{99\text{ девяток}}87\underbrace{4999\ldots 999}_{99\text{ девяток}}>\sqrt{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{100}}>$$

$$>0,\underbrace{9999\ldots 999}_{100\text{ девяток}}4\underbrace{9999\ldots 999}_{99\text{ девяток}}87\underbrace{4999\ldots 999}_{98\text{ девяток}},$$

откуда, деля на 3, получаем, что с точностью до 301 знака после запятой

$$0,\underbrace{1111\ldots 111}_{100\text{ единиц}}\approx 0,\underbrace{3333\ldots 333}_{100\text{ троек}}1\underbrace{6666\ldots 666}_{100\text{ шестерок}}2\underbrace{4999\ldots 999}_{98\text{ девяток}}.$$

279. а) Обозначим 1,00000000004 через α, а 1,00000000002 — через β. В таком случае фигурирующие в условии задачи выражения примут вид $\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$ и $\frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}$. Так как $\alpha>\beta$, то, очевидно,

$$\frac{1+\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}=\frac{1+\beta}{\beta^2};$$

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha}=1:\left(\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\right)>1:\left(\frac{1+\beta}{\beta^2}\right)=\frac{\beta^2}{1+\beta},$$

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha}=1+\frac{\alpha^2}{1+\alpha}>1+\frac{\beta^2}{1+\beta}=\frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta},$$

и, наконец,

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}=1:\left(\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha}\right)<1:\left(\frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta}\right)=\frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}.$$

Таким образом, второе из двух выражений больше первого.

б) Обозначим фигурирующие в условии задачи выражения соответственно через A и B. Тогда, очевидно, имеем:

$$\frac{1}{A}=1+\frac{a^n}{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}=$$

$$=1+\frac{1}{\frac{1+a+a^2+\ldots+a^{n-1}}{a^n}}=1+\frac{1}{\frac{1}{a^n}+\frac{1}{a^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a}};$$

$$\frac{1}{B}=1+\frac{1}{\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{b}}.$$

Отсюда сразу следует, что $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ и, следовательно, $B > A$.

280. Будем исходить из формулы

$$(X-a)^2-(x-a)^2=X^2-x^2-2a(X-x).$$

Следовательно,

$$[(X-a_1)^2+(X-a_2)^2+\ldots+(X-a_n)^2]-$$
$$-[(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2]=$$
$$=n(X^2-x^2)-2(a_1+a_2+\ldots+a_n)(X-x).$$

Если положить в последнем выражении $x=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, то оно будет положительным; действительно, мы будем иметь:

$$[(X-a_1)^2+(X-a_2)^2+\ldots+(X-a_n)^2]-$$
$$-[(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2]=$$
$$=n(X^2-x^2)-2nx(X-x)=n(X^2-x^2-2Xx+2x^2)=$$
$$=n(X-x)^2\geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что искомым значением x является

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

281. а) Мы имеем всего три существенно различных расположения:

1°. a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\Phi_1=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2+(a_4-a_1)^2.$$

2°. a_1, a_3, a_2, a_4:

$$\Phi_2=(a_1-a_3)^2+(a_3-a_2)^2+(a_2-a_4)^2+(a_4-a_1)^2,$$

3°. a_1, a_2, a_4, a_3:

$$\Phi_3=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_4)^2+(a_4-a_3)^2+(a_3-a_1)^2.$$

Но легко видеть, что

$$\Phi_3-\Phi_1=-2a_2a_4-2a_1a_3+2a_2a_3+2a_1a_4=$$
$$=2(a_2-a_1)(a_3-a_4)<0;$$
$$\Phi_3-\Phi_2=-2a_1a_2-2a_3a_4+2a_2a_3+2a_1a_4=$$
$$=2(a_3-a_1)(a_2-a_4)<0.$$

Следовательно, требуемое расположение имеет вид: a_1, a_2, a_4, a_3.

б) Первое решение. Рассмотрим выражение

$$\Phi=(a_{i_1}-a_{i_2})^2+(a_{i_2}-a_{i_3})^2+\ldots+\left(a_{i_{n-1}}-a_{i_n}\right)^2+$$
$$+\left(a_{i_n}-a_{i_1}\right)^2,$$

где $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ — наши n чисел, расположенные в требуемом порядке. Пусть a_{i_α}, a_{i_β}, $(\alpha < \beta)$ — какие-то два из этих чисел. Мы утверждаем, что если a_{i_α} больше (или наоборот меньше) a_{i_β}, то $a_{i_{\alpha-1}}$ больше (соответственно меньше) $a_{i_{\beta+1}}$[1].

Действительно, если бы это было не так, т. е. если бы было $\left(a_{i_\alpha}-a_{i_\beta}\right)\left(a_{i_{\alpha-1}}-a_{i_{\beta+1}}\right)<0$, то перестановка, изменяющая порядок чисел $a_{i_\alpha}, a_{i_{\alpha+1}}, a_{i_{\alpha+2}}, \ldots, a_{i_\beta}$ на обратный, уменьшила бы величину суммы Ф, так как разность новой суммы Ф′ и первоначальной суммы Ф будет, очевидно, равна

$$\Phi'-\Phi=-2a_{i_{\alpha-1}}a_{i_\beta}-2a_{i_\alpha}a_{i_{\beta+1}}+2a_{i_{\alpha-1}}a_{i_\alpha}+2a_{i_\beta}a_{i_{\beta+1}}=$$
$$=2\left(a_{i_\alpha}-a_{i_\beta}\right)\left(a_{i_{\alpha-1}}-a_{i_{\beta+1}}\right).$$

Это замечание позволяет получить полное решение задачи. Прежде всего, так как циклическая перестановка всех чисел (т. е. перестановка, при которой сохраняется порядок чисел, выписанных одно за другим по кругу) не меняет величины суммы Ф, то мы можем считать, что a_{i_1} есть наименьшее из наших чисел a_i, т. е. $i_1=1$. Отсюда можно вывести, что a_{i_2} и a_{i_n} есть два следующих по величине числа. Действительно, если бы было, например $a_{i_\beta}<a_{i_2} (\beta \neq n)$, то мы имели бы $\left(a_{i_2}-a_{i_\beta}\right)\left(a_{i_1}-a_{i_{\beta+1}}\right)<0$, а если бы было $a_{i_\beta}<a_{i_n} (\beta \neq 2)$, то мы имели бы $\left(a_{i_1}-a_{i_{\beta-1}}\right)\left(a_{i_n}-a_{i_\beta}\right)<0$. Так как можно изменить порядок следования в цепочке $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, a_{i_n}, a_{i_1}$ на обратный без того, чтобы изменить сумму Ф, то мы можем считать, что $a_{i_2}<a_{i_n}$, $i_2=2$, $i_n=3$.

Далее мы утверждаем, что числа a_{i_3}, $a_{i_{n-1}}$ следуют по величине за уже использованными числами $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_n}$: действительно, если бы было, например, $a_{i_3}>a_{i_\beta}$ $(\beta \neq 1, 2;\ n-1, n)$, то мы имели бы $\left(a_{i_3}-a_{i_\beta}\right)\left(a_{i_2}-a_{i_{\beta+1}}\right)<0$. А так как, кроме того, должно быть $\left(a_{i_3}-a_{i_{n-1}}\right)\left(a_{i_2}-a_{i_n}\right)>0$, то $a_{i_3}<a_{i_{n-1}}$, т. е. $a_{i_3}=a_4$, $a_{i_{n-1}}=a_5$.

Точно так же показывается, что числа a_{i_4} и $a_{i_{n-2}}$ — следующие по величине за уже использованными и $a_{i_4}<a_{i_{n-2}}$ (т. е. $i_4=6$, $i_{n-2}=7$), что числа a_{i_5} и $a_{i_{n-3}}$ — следующие по величине за ранее использованными и $a_{i_5}<a_{i_{n-3}}$ ($i_5=8, i_{n-3}=9$), и т. д. Окончательно приходим к следующему расположению чисел:

$$\text{при } n=2k \text{ четном } a_1\begin{array}{l}\nearrow a_2-a_4-a_6-\ldots-a_{n-2}\searrow\\ \searrow a_3-a_5-a_7-\ldots-a_{n-1}\nearrow\end{array}a_n$$

$$\text{при } n=2k+1 \text{ нечетном } a_1\begin{array}{l}\nearrow a_2-a_4-a_6-\ldots-a_{n-1}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \,|\\ \searrow a_3-a_5-a_7-\ldots-a_n\end{array}$$

[1] Здесь мы условно считаем $a_{i_0}=a_{i_n}$.

(черточки указывают порядок следования чисел; так, например, для n четного имеем расположение $a_1, a_2, a_4, a_6 \ldots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}, \ldots$ $\ldots, a_7, a_5, a_3$).

Второе решение. Если каким-либо образом догадаться, что искомое расположение имеет такой вид, как указано в конце первого решения, то доказательство этого факта можно получить при помощи метода математической индукции. Действительно, при $n = 4$ доказательство получается весьма просто (см. решение задачи а)). Предположим теперь, что для какого-то четного n мы уже доказали, что сумма Φ_n, соответствующая выписанному в конце первого решения расположению чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$, меньше суммы Φ'_n, соответствующей любому другому расположению. Покажем теперь, что сумма Φ_{n+1}, соответствующая выписанному выше расположению $n+1$ чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}$, меньше суммы Φ'_{n+1}, соответствующей какому-либо другому расположению $n+1$ чисел. Имеем:

$$\Phi_{n+1} - \Phi_n = (a_n - a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_{n-1})^2 - (a_n - a_{n-1})^2 =$$
$$= 2a^2_{n+1} - 2a_n a_{n+1} - 2a_{n-1}a_{n+1} + 2a_{n-1}a_n =$$
$$= 2(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}).$$

С другой стороны, если в расположении, отвечающем сумме Φ'_{n+1}, число a_{n+1} стояло между какими-то числами a_α и a_β и Φ'_n отвечает расположению n чисел, которое получается из расположения $n+1$ чисел, приводящего к сумме Φ'_{n+1}, вычеркиванием числа a_{n+1}, то

$$\Phi'_{n+1} - \Phi'_n = (a_\alpha - a_{n+1})^2 + (a_{n+1} - a_\beta)^2 - (a_\alpha - a_\beta)^2 =$$
$$= 2a^2_{n+1} - 2a_\alpha a_{n+1} - 2a_\beta a_{n+1} + 2a_\alpha a_\beta =$$
$$= 2(a_{n+1} - a_\alpha)(a_{n+1} - a_\beta) \geqslant \Phi_{n+1} - \Phi_n.$$

Таким образом, мы видим, что

$$\Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1} = \left[\Phi_n - \Phi'_n\right] + \left[(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - (\Phi'_{n+1} - \Phi'_n)\right] \leqslant 0$$

(первая скобка неположительна в силу предположения индукции, вторая — по доказанному). При этом, если сумма Φ'_{n+1}, отличается от Φ_{n+1}, то либо $\Phi_n - \Phi'_n < 0$ (и, следовательно, $\Phi_{n+1} - \Phi'_{n+1} < 0$), либо $(\Phi_{n+1} - \Phi_n) - \left(\Phi'_{n+1} - \Phi'_n\right) < 0$ (и, следовательно, опять $\Phi_{n+1} < \Phi'_{n+1}$). Аналогично осуществляется переход от n к $n+1$, если n нечетно.

Третье решение. Задача имеет также несложное геометрическое решение. Изобразим числа $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ точками $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ на числовой оси; отрезки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ $\ldots A_{n-1}A_n$ обозначим соответственно через $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}$. В таком случае сумма $\Phi = (a_{i_1} - a_{i_2})^2 + (a_{i_2} - a_{i_3})^2 + \ldots + \left(a_{i_{n-1}} - a_{i_n}\right)^2 + \left(a_{i_n} - a_{i_1}\right)^2 = A_{i_1}A^2_{i_2} + A_{i_2}A^2_{i_3} + \ldots + A_{i_{n-1}}A^2_{i_n} + A_{i_n}A^2_{i_1}$ равна сумме квадратов длин звеньев «ломаной» $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3} \ldots A_{i_{n-1}}A_{i_n}A_{i_1}$ (все звенья которой лежат на одной прямой; рис. 31, a)).

Так как наша замкнутая ломаная покрывает весь отрезок A_1A_n, то каждый из отрезков $A_kA_{k+1} = d_k$ минимум два раза входит в нашу ломаную (один раз в направлении от A_k к A_{k+1}, второй раз — в обратном направлении). Поэтому, в каком бы порядке мы ни располагали точки, сумма Ф, если выразить ее через отрезки $d_1, d_2 \ldots$ $\ldots, d_{n-1}$ и раскрыть скобки, обязательно содержит член $2d_k^2$, а следовательно, и все члены $2d_1^2, 2d_2^2, \ldots, 2d_{n-1}^2$. Далее, пусть $A_{k-1}A_k = d_{k-1}$ и $A_kA_{k+1} = d_k$ — два соседних из рассматриваемых отрезков.

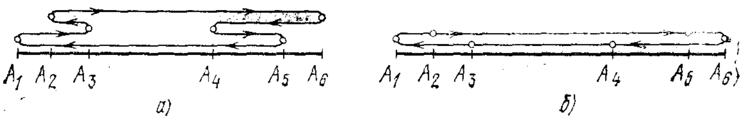


Рис. 31.

Очевидно, что если звено ломаной, покрывающее отрезок A_kA_{k+1} в направлении от A_k к A_{k+1}, начинается в точке A_k, то звено, покрывающее этот отрезок в обратном направлении, не может кончаться в точке A_k; поэтому во всех случаях должно существовать звено, которое покрывает одновременно отрезки $A_{k-1}A_k$ и A_kA_{k+1}. А отсюда вытекает, что сумма Ф во всех случаях должна содержать член $2d_{k-1}d_k$, а следовательно, и все члены $2d_1d_2, 2d_2d_3, \ldots, 2d_{n-2}d_{n-1}$.

Теперь остается только заметить, что в случае, если расположение точек таково, как указано в конце первого решения задачи, то

$$\Phi = 2d_1^2 + 2d_2^2 + \ldots + 2d_{n-1}^2 + 2d_1d_2 + 2d_2d_3 + \ldots + 2d_{n-2}d_{n-1}$$

(рис. 31, *б*)). Отсюда и из сказанного выше вытекает, что в этом случае сумма Ф будет наименьшей.

282. а) Отметим, прежде всего, что мы с самого начала можем считать все $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ положительными; в противном случае мы изменили бы знаки отрицательных чисел на противоположные: левая часть неравенства при этом не изменится, а правая может только увеличиться. Рассмотрим теперь ломаную $A_0A_1A_2 \ldots$ $\ldots A_n$, такую, что проекции отрезков $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ на ось Ox равны соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а проекции этих же отрезков на ось Oy — $b_1, b_2, \ldots, b_n$; при этом пусть каждая вершина ломаной расположена правее и выше предшествующей (рис. 32). В таком случае из теоремы Пифагора следует, что

$$A_0A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad A_1A_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \ldots, \; A_{n-1}A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$A_0A_n = \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n)^2},$$

откуда и получается неравенство задачи.

Ломаная $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ будет р а в н а отрезку A_0A_n только в том случае, если все звенья этой ломаной являются продолжениями одно другого (ломаная является отрезком прямой). Нетрудно видеть, что это обстоятельство будет иметь место в том случае, если

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$; лишь в этом случае имеет место равенство

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}.$$

б) Обозначим через h высоту пирамиды, через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — стороны основания $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = P)$ и через $b_1, b_2, \ldots, b_n$ —

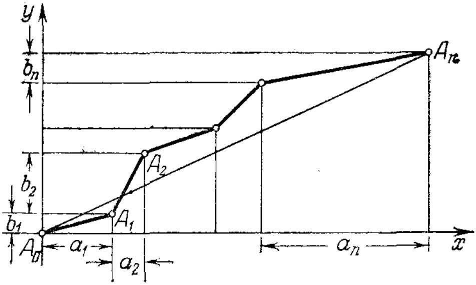


Рис. 32.

длины перпендикуляров, опущенных из основания высоты на стороны основания $\left(\frac{1}{2} a_1 b_1 + \frac{1}{2} a_2 b_2 + \ldots + \frac{1}{2} a_n b_n = S\right)$. В таком случае боковая поверхность Σ пирамиды будет равна

$$\frac{1}{2} a_1 \sqrt{b_1^2 + h^2} + \frac{1}{2} a_2 \sqrt{b_2^2 + h^2} + \ldots + \frac{1}{2} a_n \sqrt{b_n^2 + h^2}.$$

Но согласно неравенству задачи а)

$$2\Sigma = \sqrt{(a_1 b_1)^2 + (a_1 h)^2} + \sqrt{(a_2 b_2)^2 + (a_2 h)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{(a_n b_n)^2 + (a_n h)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 + (a_1 h + a_2 h + \ldots + a_n h)^2} =$$
$$= \sqrt{4S^2 + h^2 P^2},$$

причем равенство достигается только, если $a_1 b_1 : a_2 b_2 : \ldots : a_n b_n = a_1 h : a_2 h : \ldots : a_n h$, т. е. $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

Отсюда и вытекает утверждение задачи.

283. Рассмотрим отдельно случаи n четного и n нечетного.

1°. Число n четно. Построим ступенчатую ломаную $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n A_{n+1} A_{n+2}$ так, чтобы длины всех отрезков $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $\ldots$, $A_{n+1} A_{n+2}$ равнялись единице и отрезки $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $A_5 A_6$, $\ldots$, $A_{n-1} A_n$, $A_{n+1} A_{n+2}$ были бы параллельны между собой и перпендикулярны к отрезкам A_2A_3, A_4A_5, ..., A_nA_{n+1} (рис. 33; на нем $n = 4$). На каждом из отрезков A_iA_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, n+1$) или на его продолжении возьмем точку B_i так, чтобы длина отрезка B_iA_{i+1} равнялась a_i (a_{n+1} мы полагаем здесь равным a_1, т. е. B_{n+1} выберем так, чтобы было $B_{n+1}A_{n+2} = a_1$); при этом точку B_i мы будем располагать левее или ниже точки A_{i+1}, если $a_i > 0$, и

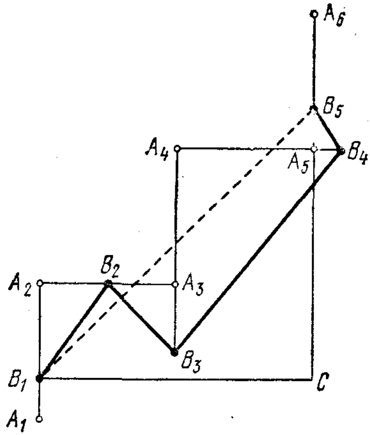


Рис. 33.

правее или выше точки A_{i+1}, если $a_i < 0$ (на рис. 33 $0 < a < 1$, $0 < a_2 < 1$; $a_3 > 1$; $a_4 < 0$). Проведем теперь ломаную $B_1B_2 \ldots B_{n+1}$. По теореме Пифагора

$$B_iB_{i+1} = \sqrt{B_iA_{i+1}^2 + B_{i+1}A_{i+1}^2}.$$

Но $B_iA_{i+1} = a_i$ и, как легко видеть, $B_{i+1}A_{i+1} = |1 - a_{i+1}|$; следовательно,

$$B_iB_{i+1} = \sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2}.$$

Таким образом, интересующая нас сумма

$$\sqrt{a_1^2 + (1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1-a_3)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1-a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1-a_1)^2}$$

равна длине ломаной $B_1B_2B_3 \ldots B_{n+1}$.

Очевидно, что длина ломаной $B_1B_2B_3 \ldots B_{n+1}$ всегда не меньше, чем длина отрезка B_1B_{n+1}. Вычислим теперь длину этого отрезка. С этой целью построим прямоугольный треугольник B_1CB_{n+1}

(рис. 33). Тогда

$$B_1C = A_2A_3 + A_4A_5 + \ldots + A_nA_{n+1} = \frac{n}{2}$$

и

$$CB_{n+1} = A_1A_2 + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n = \frac{n}{2}$$

(ибо $A_1B_1 = A_{n+1}B_{n+1} = |1 - a_1|$). Отсюда

$$B_1B_{n+1} = \sqrt{(B_1C)^2 + (CB_{n+1})^2} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2} = \frac{n\sqrt{2}}{2},$$

что и доказывает требуемое неравенство.

Теперь уже легко выяснить, в каком случае в этом неравенстве знак $\geqslant$ можно заменить знаком равенства. Для этого необходимо, чтобы все точки $B_2, B_3, \ldots, B_n$ лежали на прямой B_1B_{n+1} (т. е. B_i должно совпадать с точкой пересечения прямых B_1B_{n+1} и A_iA_{i+1}). Так как прямая B_1B_{n+1} образует угол 45° с прямой B_1C (ибо $B_1C = CB_{n+1}$), то это будет при

$$B_1A_2 = A_2B_2 = B_3A_4 = A_4B_4 = \ldots = B_{n-1}A_n = A_nB_n,$$

т. е. при $a_1 = (1 - a_2) = a_3 = (1 - a_4) = \ldots = a_{n-1} = (1 - a_n)$. Итак, при n четном равенство достигается при

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = a, \quad a_2 = a_4 = \ldots = a_n = 1 - a,$$

где a может быть любым.

2°. Число n нечетно[1]). Положим $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2, \ldots, a_{2n} = a_n$ и рассмотрим сумму

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{a_{2n-1}^2 + (1 - a_{2n})^2} + \sqrt{a_{2n}^2 + (1 - a_1)^2},$$

которая, очевидно, будет равна удвоенной сумме:

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2}$$

(каждое слагаемое этой последней суммы в первой сумме встречается дважды). Но по уже доказанному первая сумма $\leqslant \frac{2n\sqrt{2}}{2}$; отсюда вытекает, что

$$\sqrt{a_1^2 + (1 - a_2)^2} + \sqrt{a_2^2 + (1 - a_3)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \sqrt{a_{n-1}^2 + (1 - a_n)^2} + \sqrt{a_n^2 + (1 - a_1)^2} \geqslant \frac{n\sqrt{2}}{2},$$

т. е. мы получили требуемое неравенство.

---

[1]) Мы предоставляем читателю выяснить на примере $n = 3$, почему доказательство, проведенное для четного n, не проходит для n нечетного.

Знак равенства в последнем неравенстве имеет место только, если

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1} = 1 - a_2 = 1 - a_4 = \ldots = 1 - a_{2n}$$

(см. выше случай 1°). Но так как у нас $a_1 = a_{n+1}$ и n нечетно, то последнее равенство возможно только, если

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}.$$

284. Первое решение. Обе части равенства положительны, поэтому, возводя их в квадрат, получим:

$$1 - x_1^2 + 1 - x_2^2 + 2\sqrt{\left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)} \leqslant 4 - \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right),$$

т. е.

$$2\sqrt{\left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)} \leqslant 2 - 2x_1x_2,$$

$$\sqrt{\left(1 - x_1^2\right)\left(1 - x_2^2\right)} \leqslant 1 - x_1x_2.$$

Возведем опять обе части в квадрат:

$$1 - x_1^2 - x_2^2 + x_1^2x_2^2 \leqslant 1 - 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2;$$

перенося все члены направо, получим:

$$0 \leqslant (x_1 - x_2)^2.$$

Последнее неравенство очевидно; равенство здесь имеет место лишь при $x_1 = x_2$. Отсюда вытекает, что исходное неравенство всегда имеет место и обращается в равенство лишь при $x_1 = x_2$.

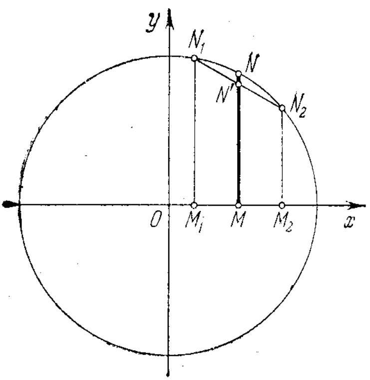


Рис. 34.

Второе решение. Эта задача имеет и геометрическое решение; аналогичные решения можно найти и для многих значительно более сложных задач. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 34). Координаты x, y точек этой окружности будут связаны соотношением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Отметим теперь на оси Ox две точки M_1 и M_2, имеющие абсциссы x_1 и x_2; так как $|x_1| \leqslant 1$ и $|x_2| \leqslant 1$, то обе точки будут расположены внутри (или на границе) единичной окружности. Восставим в этих точках перпендикуляры к оси абсцисс до пересечения их с верхней полуокружностью в точках N_1 и N_2; тогда, очевидно,

$M_1N_1=\sqrt{1-x_1^2}$ и $M_2N_2=\sqrt{1-x_2^2}$. Заметим теперь, что абсциссу $\frac{x_1+x_2}{2}$ будет иметь середина M отрезка M_1M_2[1]). Отсюда вытекает, что величина $\sqrt{1-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}$ будет равна длине отрезка MN, где N есть точка пересечения с окружностью перпендикуляра к оси абсцисс, восставленного в точке M. Но сумма $M_1N_1+M_2N_2$ равна удвоенной длине средней линии $N'M$ трапеции $M_1N_1N_2M_2$, т. е. меньше, чем удвоенная длина отрезка MN. Тем самым нужное нам неравенство доказано; из доказательства видно, что это неравенство обращается в равенство, лишь если точки M_1 и M_2 совпадают, т. е. если $x_1=x_2$.

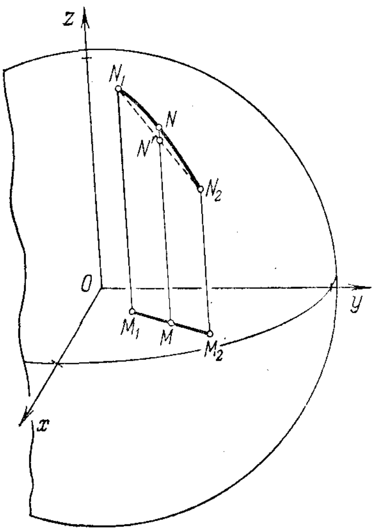


Рис. 35.

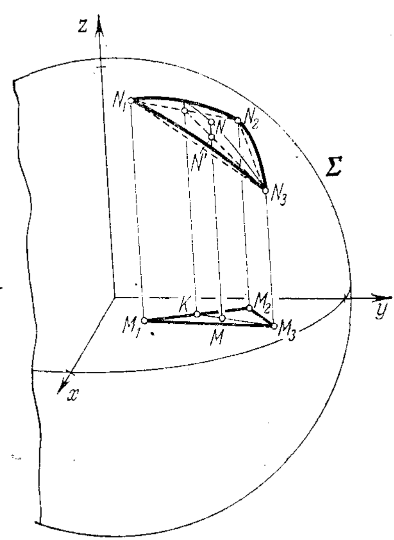


Рис. 36.

Примечание. Прием, примененный во втором решении задачи 284, позволяет вывести много интересных неравенств. Так, например, рассмотрим *сферу* с центром в начале координат и радиусом 1 (рис. 35); и пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки плоскости Oxy, расположенные внутри или на границе сферы, N_1 и N_2 —

[1]) Это утверждение очевидно, если x_1 и x_2 положительны; легко проверить, что оно остается справедливым и при любых знаках x_1 и x_2. (Заметим, впрочем, что приведенное в условии задачи неравенство достаточно доказать для положительных x_1 и x_2: действительно, если x_1 и x_2 неположительны, то, заменив эти числа их абсолютными значениями, мы не изменим левой части неравенства, а правую уменьшим.)

точки пересечения со сферой перпендикуляров к плоскости Oxy, восставленных в точках M_1 и M_2, N и N' — точки пересечения перпендикуляра, восставленного к плоскости Oxy в середине M отрезка M_1M_2, со сферой и с отрезком N_1N_2. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек M_1 и M_2, то

$$M_1N_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}, \quad M_2N_2 = \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2},$$

$$MN = \sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}, \quad MN' = \frac{1}{2}(M_1N_1 + M_2N_2),$$

и из того, что $MN' \leqslant MN$, вытекает, что

$$\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} \leqslant 2\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2}, \tag{*}$$

если только все подкоренные выражения положительны; равенство

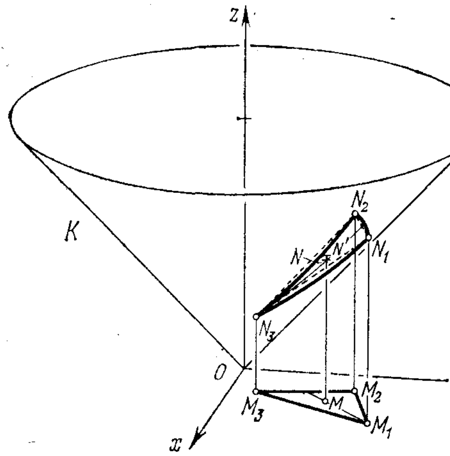


Рис. 37.

здесь имеет место только в том случае, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т. е. когда точки M_1 и M_2 совпадают.

Точно так же, восставив к плоскости Oxy перпендикуляры в трех точках M_1, M_2 и M_3 и в точке M пересечения медиан треугольника $M_1M_2M_3$ (рис. 36), придем к неравенству

$$\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} + \sqrt{1 - x_3^2 - y_3^2} \leqslant$$
$$\leqslant 3\sqrt{1 - \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2 - \left(\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2}, \tag{**}$$

выражающему, что отрезок MN' не превосходит отрезка MN. Неравенство (**) тоже имеет место во всех случаях, когда все подкоренные выражения положительны; равенство здесь имеет место, лишь когда $x_1 = x_2 = x_3$ и $y_1 = y_2 = y_3$, т. е. когда точки M_1, M_2 и M_3 все совпадают между собой.

Заменяя сферу конусом, вершина которого совпадает с началом координат, осью служит ось Oz и угол при вершине равен 90° (рис. 37), получим неравенство

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}\geqslant$$
$$\geqslant 3\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2}, \qquad (***)$$

справедливое при любых x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; равенство здесь будет иметь место только в том случае, когда $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$, т. е. когда точки N_1, N_2 и N_3 лежат на одной образующей конуса. Алгебраическое доказательство неравенств (*), (**) и (***) представляет очень большие трудности.

285. Так как $\sin\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right)$, то

$$\cos\sin x-\sin\cos x=\cos\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\cos x\right)=$$
$$=2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}.$$

Но

$$|\cos x+\sin x|=\sqrt{\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x}=$$
$$=\sqrt{1+\sin 2x}\leqslant\sqrt{2}$$

($|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}$, только если $\sin 2x=1$) и точно так же

$$|\cos x-\sin x|=\sqrt{\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x}=$$
$$=\sqrt{1-\sin 2x}\leqslant\sqrt{2}$$

($|\cos x-\sin x|=\sqrt{2}$, только если $\sin 2x=-1$). А так как $\frac{\pi}{2}\approx\frac{3,14}{2}=1,57$ больше чем $\sqrt{2}\approx 1,41$, то отсюда следует, что

$$\frac{\pi}{2}>\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}>0 \quad\text{и}\quad \frac{\pi}{2}>\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}>0,$$

значит, как $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x+\sin x}{2}$, так и $\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\cos x-\sin x}{2}$

всегда положительны. Таким образом, разность $\cos \sin x - \sin \cos x$ всегда положительна, т. е. $\cos \sin x$ при любом x больше чем $\sin \cos x$.

286. а) Обозначим $\log_2 \pi = a$, $\log_5 \pi = b$. Из равенства $2^a = \pi$, $5^b = \pi$ получаем $\pi^{1/a} = 2$, $\pi^{1/b} = 5$, $\pi^{1/a} \cdot \pi^{1/b} = 2 \cdot 5 = 10$, $\pi^{1/a+1/b} = 10$. Но $\pi^2 \approx 3{,}14^2 < 10$, откуда следует справедливость неравенства $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$, что и требовалось доказать.

б) Обозначим $\log_2 \pi = a$, $\log_\pi 2 = b$. В таком случае имеем $2^a = \pi$, $\pi^b = 2$; из второго равенства вытекает $2^{1/b} = \pi$, или $b = \frac{1}{a}$. Теперь наше неравенство принимает вид

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{1/a} > 2,$$

$$\frac{a^2+1}{a} > 2,$$

$$a^2 + 1 > 2a,$$

или $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 > 0$. Последнее неравенство является очевидным.

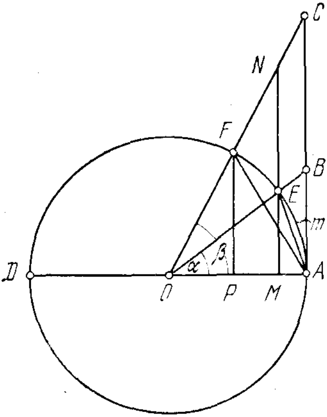


Рис. 38.

287. Первое решение. Требуется доказать, что если $\beta > \alpha$, то

а) $\sin \beta - \sin \alpha < \beta - \alpha$.

Но, очевидно,

$$\sin \beta - \sin \alpha = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2} < 2 \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot 1 = \beta - \alpha$$

(ибо для каждого отличного от нуля угла x первой четверти $\sin x < x$, $\cos x < 1$[1])).

б) $\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha > \beta - \alpha$.

Но, очевидно,

$$\beta - \alpha < \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} < \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha$$

(ибо для каждого отличного от нуля угла x первой четверти $\operatorname{tg} x > x$[1])).

Второе решение. Рассмотрим здесь только задачу а), так как решение задачи б) совершенно аналогично.

Проведем единичную окружность с центром в точке O, и пусть дуга AE равна α и дуга AF равна β. Если EM и FP — перпендику-

---

[1]) См., например, ниже стр. 345.

ляры, опущенные из точек E и F на радиус OA (рис. 38), то

$$S_{\Delta OEA}=\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\Delta OFA}=\frac{1}{2}\sin\beta$$

и

$$S_{\text{сект}\,OEA}=\frac{1}{2}\alpha,\quad S_{\text{сект}\,OFA}=\frac{1}{2}\beta,$$

где буква S, как обычно, означает, площадь.

Отсюда следует, что

$$\alpha-\sin\alpha=2S_{\text{сегм}\,AmE}$$

$$\beta-\sin\beta=2S_{\text{сегм}\,\dot{A}EF}$$

и, следовательно,

$$\alpha-\sin\alpha<\beta-\sin\beta.$$

288. Пусть AE и AF — дуги единичной окружности с центром в точке O, равные соответственно α и β, B и C — точки пересечения перпендикуляра, восставленного в точке A к диаметру OA, с прямыми OE и OF, M и N — точки пересечения перпендикуляра, опущенного из точки E на диаметр OA с прямыми OA и OF (см. рис. 38). Тогда имеем:

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,\qquad S_{\Delta OAC}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta,$$

$$S_{\text{сект}\,OAE}=\frac{1}{2}\alpha,\quad S_{\text{сект}\,OAF}=\frac{1}{2}\beta$$

и, следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{сект}\,OAE}},\quad \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}=\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{сект}\,OAF}}.$$

Но, как нетрудно видеть,

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{сект}\,OAE}}<\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{сект}\,OEF}}.$$

Действительно,

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{сект}\,OAE}}<\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OEM}},\quad \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{сект}\,OEF}}>\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}},$$

а

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OEM}}=\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OEN}}.$$

Из того, что $\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\text{сект}\,OEF}}>\dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{сект}\,OAE}}$, следует, что

$$\frac{S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}}{S_{\text{сект}\,OAE}+S_{\text{сект}\,OEF}}>\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{сект}\,OAE}},$$

т. е. что

$$\frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\text{сект}\,OAF}}>\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\text{сект}\,OAE}},$$

что и требовалось доказать.

289. Пусть

$$\arcsin\cos \arcsin x = \alpha.$$

Угол α заключен в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, ибо $0 \leqslant \cos\arcsin x \leqslant 1$ $\left(\text{так как} -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Далее, $\sin\alpha = \cos\arcsin x$; следовательно,

$$\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ и } x = \sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm\cos\alpha.$$

Точно так же, если $\arccos\sin\arccos x = \beta$, то $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (ибо $0 \leqslant \sin\arccos x \leqslant 1$, так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$) и $\cos\beta = \sin\arccos x$; следовательно,

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta \text{ и } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm\sin\beta.$$

Из того, что $\cos\alpha = \sin\beta\ (= \pm x)$, заключаем:

$$\alpha + \beta = \arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

290. Предположим, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + a_{29}\cos 29x + \ldots$$
$$\ldots + a_2\cos 2x + a_1\cos x \qquad (*)$$

при всех значениях x принимает только положительные значения. Заменим в этой сумме x на $x + \pi$; мы придем к выражению

$$\cos 32(x+\pi) + a_{31}\cos 31(x+\pi) + a_{30}\cos 30(x+\pi) +$$
$$+ a_{29}\cos 29(x+\pi) + \ldots + a_2\cos 2(x+\pi) + a_1\cos(x+\pi) =$$
$$= \cos 32x - a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x - a_{29}\cos 29x + \ldots$$
$$\ldots + a_2\cos 2x - a_1\cos x, \qquad (**)$$

которое тоже должно принимать при всех значениях x положительные значения. А в таком случае и полусумма выражений (*) и (**), равная

$$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + \ldots + a_4\cos 4x + a_2\cos 2x,$$

тоже будет принимать при всех x только положительные значения.

Теперь заменим в последнем выражении x на $x + \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\cos 32\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + a_{30}\cos 30\left(x + \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ a_{28}\cos 28\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + a_4\cos 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+ a_2\cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 32x - a_{30}\cos 30x +$$
$$+ a_{28}\cos 28x - \ldots + a_4\cos 4x - a_2\cos 2x,$$

Составив полусумму двух последних выражений, найдем, что сумма

$$\cos 32x + a_{28}\cos 28x + a_{24}\cos 24x + \ldots + a_8\cos 8x + a_4\cos 4x$$

тоже должна принимать при всех x только положительные значения.

Заменяя в последнем выражении x на $x + \frac{\pi}{4}$ и составляя полусумму полученного выражения и первоначального, мы придем к сумме

$$\cos 32x + a_{24}\cos 24x + a_{16}\cos 16x + a_8\cos 8x;$$

заменяя в ней x на $x + \frac{\pi}{8}$ и складывая полученное выражение с первоначальным, мы придем к сумме

$$\cos 32x + a_{16}\cos 16x;$$

наконец, точно так же убеждаемся, что выражение

$$\cos 32x$$

тоже должно принимать при всех значениях x только положительные значения. Но при $x = \frac{\pi}{32}$ последнее выражение равно -1. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

291. Будем исходить из формулы для синуса половинного угла:

$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{2 - 2\cos\alpha},$$

где знак корня берется в соответствии с известным правилом знаков для синуса. Пользуясь этой формулой, мы будем последовательно определять синусы углов

$$a_1\,45^\circ;\ \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2}\right)\cdot 45^\circ;\ \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4}\right)\cdot 45^\circ;\ \ldots$$

$$\ldots;\ \left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\cdot 45^\circ.$$

Предположим, что мы уже определили синус угла

$$\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \ldots + \frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ,$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ принимают какие-то значения, равные 1 или

-1. Так как

$$2\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}{2^k}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$=\left[\pm 90^\circ \pm \left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\ldots a_ka_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ\right],$$

где знак плюс соответствует $a_1=+1$, а знак минус $a_1=-1$, и

$$\cos\left[\pm 90^\circ \pm \left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ\right]=$$
$$=-\sin\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\ldots\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ,$$

то мы можем после этого определить синус следующего угла:

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}{2^k}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$=\pm\sqrt{2+2\sin\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ}.$$

При этом следует иметь в виду, что так как все рассматриваемые углы по абсолютной величине меньше 90° (ибо даже $\left(1+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\cdot 45^\circ=90^\circ-\frac{1}{2^n}90^\circ$ меньше 90°), а знак этих углов определяется знаком a_1, то корень квадратный в последних формулах следует брать со знаком плюс или минус в зависимости от знака a_1. Другими словами, можно написать:

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\ldots+\frac{a_1a_2\ldots a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}}{2^k}\right)\cdot 45^\circ =$$
$$=a_1\sqrt{2+2\sin\left(a_2+\frac{a_2a_3}{2}+\ldots+\frac{a_2a_3\ldots a_{k+1}}{2^{k-1}}\right)\cdot 45^\circ}.$$

Теперь, прежде всего, очевидно, что

$$2\sin a_1\, 45^\circ = a_1\sqrt{2}.$$

Отсюда последовательно получаем:

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}\right)\cdot 45^\circ = a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2}},$$

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}\right)\cdot 45^\circ = a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2}}},$$

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\frac{a_1a_2a_3a_4}{8}\right)\cdot 45^\circ =$$

$$= a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+a_4\sqrt{2}}}},$$

. . . .

$$2\sin\left(a_1+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1a_2a_3}{4}+\ldots+\frac{a_1a_2a_3\ldots a_n}{2^{n-1}}\right)\cdot 45^\circ =$$

$$= a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+a_3\sqrt{2+\ldots+a_n\sqrt{2}}}},$$

что и требовалось доказать.

292. Предположим, что разложение заданного выражения по степеням x имеет вид

$$(1-3x+3x^2)^{743}(1+3x-3x^2)^{744} = A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n,$$

где A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_n$ — неизвестные нам коэффициенты, сумму которых требуется определить, а n — степень этого выражения (которая, как легко видеть, равна $743\cdot 2+744\cdot 2=2974$). Положим в этом равенстве $x=1$; тогда получим:

$$1^{743}\cdot 1^{744} = A_0+A_1+A_2+\ldots+A_n.$$

Таким образом, искомая сумма равна единице.

293. Раскрыв скобки и сделав приведение подобных членов в двух рассматриваемых выражениях, мы получим два многочлена относительно x. Заменим теперь в наших выражениях x на $-x$. При этом нам придется заменить x на $-x$ также и в полученных многочленах, т. е. в каждом из них оставить прежние коэффициенты при x в четных степенях и заменить знаки коэффициентов на обратные при x в нечетных степенях. В частности, коэффициенты при x^{20} при этой операции не изменяется. Таким образом, мы видим, что наши два многочлена имеют те же коэффициенты при x^{20}, что и многочлены, получаемые при раскрытии скобок и приведении подобных членов в выражениях $(1+x^2+x^3)^{1000}$ и $(1-x^2-x^3)^{1000}$.

Но ясно, что первый из этих новых многочленов имеет больший коэффициент при x^{20}. Действительно, при раскрытии скобок в первом выражении мы получим исключительно положительные коэффициенты при различных степенях x, и при приведении подобных членов все эти коэффициенты будут складываться. Во втором выражении при раскрытии скобок мы получим при различных степенях x коэффициенты, имеющие те же абсолютные величины, что и коэффициенты первого многочлена, но знаки их могут быть различны — и при приведении подобных членов у нас произойдет уменьшение коэффициентов.

Итак, после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражениях $(1+x^2-x^3)^{1000}$ и $(1-x^2+x^3)^{1000}$ мы получим в первом из них больший коэффициент при x^{20}, чем во втором.

294. Утверждение задачи непосредственно вытекает из следующих преобразований:

$$1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+x^3+\ldots$$
$$\ldots+x^{99}+x^{100})=[(1+x^2+x^4+\ldots+x^{100})-$$
$$-x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{98})][(1+x^2+x^4+\ldots+x^{100})+$$
$$+x(1+x^2+x^4+\ldots+x^{98})]=$$
$$=(1+x^2+x^4+\ldots+x^{100})^2-x^2(1+x^2+x^4+\ldots+x^{98})^2.$$

295. а) Согласно формуле суммы геометрической прогрессии и формуле бинома Ньютона имеем:

$$(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\ldots+x^{1000}=$$
$$=\frac{\frac{x^{1001}}{1+x}-(1+x)^{1000}}{\frac{x}{1+x}-1}=\frac{x^{1001}-(1+x)^{1001}}{x-1-x}=(1+x)^{1001}-x^{1001}=$$
$$=1+1001x+C_{1001}^2\,x^2+C_{1001}^3\,x^3+\ldots+1001x^{1000}.$$

Таким образом, искомый коэффициент равен $C_{1001}^{50}=\frac{1001!}{50!\cdot 951!}$.

б) Обозначим наше выражение через $P(x)$. Тогда имеем:

$$(1+x)P(x)-P(x)=[(1+x)^2+2(1+x)^3+\ldots$$
$$\ldots+999(1+x)^{1000}+1000(1+x)^{1001}]-[(1+x)+2(1+x)^2+$$
$$+3(1+x)^3+\ldots+1000(1+x)^{1000}]=1000(1+x)^{1001}-$$
$$-[(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\ldots+(1+x)^{1000}]=1000(1+x)^{1001}-$$
$$-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{1+x-1}=1000(1+x)^{1001}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x}.$$

Отсюда

$$P(x)=\frac{1000(1+x)^{1001}}{x}-\frac{(1+x)^{1001}-(1+x)}{x^2}=$$
$$=1000\left[1001+C_{1001}^2x+C_{1001}^3x^2+\ldots+1001x^{999}+x^{1000}\right]-$$
$$-\left[C_{1001}^2+C_{1001}^3x+C_{1001}^4x^2+\ldots+1001x^{998}+x^{999}\right].$$

Таким образом, искомый коэффициент равен

$$1000C_{1001}^{51}-C_{1001}^{52}=\frac{1000\cdot 1001!}{51!\cdot 950!}-\frac{1001!}{52!\cdot 949!}=$$
$$=\frac{1001!}{52!\cdot 950!}[52\cdot 1000-950]=\frac{51050\cdot 1001!}{52!\cdot 950!}.$$

296. Найдем, прежде всего, свободный член, который получится, если в выражении

$$\underbrace{(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\text{ раз}}$$

раскрыть скобки и привести подобные члены. Он равен значению этого выражения при $x = 0$, т. е.

$$\underbrace{(\ldots(((-2)^2-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\ \text{раз}} =$$

$$= \underbrace{(\ldots((4-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k-1\ \text{раз}} =$$

$$= \underbrace{(\ldots((4-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k-2\ \text{раза}} = \ldots$$

$$\ldots = ((4-2)^2-2)^2 = (4-2)^2 = 4.$$

Обозначим теперь через A_k — коэффициент при x, через B_k — коэффициент при x^2 и через $P_k x^3$ — сумму членов, которые содержат x в более высоких степенях. Тогда имеем:

$$\underbrace{(\ldots((x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\ \text{раз}} = P_k x^3 + B_k x^2 + A_k x + 4.$$

С другой стороны,

$$\underbrace{(\ldots(((x-2)^2-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2}_{k\ \text{раз}} =$$

$$= (\underbrace{(\ldots((x-2)^2-2)^2\ldots-2)^2}_{k-1\ \text{раз}}-2)^2 =$$

$$= [(P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 4) - 2]^2 =$$

$$= (P_{k-1}x^3 + B_{k-1}x^2 + A_{k-1}x + 2)^2 =$$

$$= P_{k-1}^2 x^6 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^5 + \left(2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2\right)x^4 +$$

$$+ (4P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})x^3 + \left(4B_{k-1} + A_{k-1}^2\right)x^2 +$$

$$+ 4A_{k-1}x + 4 = \left[P_{k-1}^2 x^3 + 2P_{k-1}B_{k-1}x^2 +\right.$$

$$\left. + \left(2P_{k-1}A_{k-1} + B_{k-1}^2\right)x + (4P_{k-1} + 2B_{k-1}A_{k-1})\right]x^3 +$$

$$+ \left(4B_{k-1} + A_{k-1}^2\right)x^2 + 4A_{k-1}x + 4.$$

Отсюда

$$A_k = 4A_{k-1},\quad B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}.$$

Так как $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, то $A_1 = -4$. Следовательно, $A_2 = -4\cdot 4 = -4^2$, $A_3 = -4^3, \ldots$, и вообще $A_k = -4^k$.

Вычислим теперь B_k:

$$B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1} = A_{k-1}^2 + 4\left(A_{k-2}^2 + 4B_{k-2}\right) =$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2\left(A_{k-3}^2 + 4B_{k-3}\right) =$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + 4^3\left(A_{k-4}^2 + 4B_{k-4}\right) = \ldots$$

$$\ldots = A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + \ldots$$

$$\ldots + 4^{k-3}A_2^2 + 4^{k-2}A_1^2 + 4^{k-1}B_1.$$

Подставляя сюда

$$B_1 = 1,\ A_1 = -4,\ A_2 = -4^2,$$
$$A_3 = -4^3,\ \ldots,\ A_{k-1} = -4^{k-1},$$

получим:

$$B_k = 4^{2k-2} + 4\cdot 4^{2k-4} + 4^2\cdot 4^{2k-6} + \ldots + 4^{k-2}\cdot 4^2 + 4^{k-1}\cdot 1 =$$
$$= 4^{2k-2} + 4^{2k-3} + 4^{2k-4} + \ldots + 4^{k+1} + 4^k + 4^{k-1} =$$
$$= 4^{k-1}(1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{k-2} + 4^{k-1}) =$$
$$= 4^{k-1}\frac{4^k - 1}{4 - 1} = \frac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3}.$$

297. а) Первое решение. Так как при любом целом положительном k двучлен $x^k - 1$ делится на $x - 1$, то

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = (x-1) + (x^3-1) +$$
$$+ (x^9-1) + (x^{27}-1) + (x^{81}-1) + (x^{243}-1) + 6$$

даёт при делении на $x - 1$ остаток 6.

Второе решение. Обозначим частное от деления $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ на $x - 1$ через $q(x)$ и остаток через r. Тогда

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x-1) + r.$$

Полагая в этом равенстве $x = 1$, получим $6 = r$.

б) Аналогично второму решению предыдущей задачи предположим, что $q(x)$ есть частное от деления нашего многочлена на $x^2 - 1$, а $r_1x + r_2$ есть искомый остаток (остаток от деления многочлена на квадратный трехчлен является двучленом первой степени):

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = q(x)(x^2-1) + r_1x + r_2.$$

Полагая в последнем равенстве $x = 1$ и $x = -1$, мы получаем:

$$6 = r_1 + r_2 - 6 = -r_1 + r_2, \text{ откуда } r_1 = 6,\ r_2 = 0.$$

Таким образом, искомый остаток равен $6x$.

298. Пусть $p(x)$ есть наш неизвестный многочлен, $q(x)$ — частное от деления этого многочлена на $(x-1)(x-2)$, $r(x) = ax + b$ — искомый остаток:

$$p(x) = (x-1)(x-2)q(x) + ax + b. \qquad (*)$$

По условию задачи имеем:

$$p(x) = (x-1)q_1(x) + 2, \text{ откуда } p(1) = 2;$$
$$p(x) = (x-2)q_2(x) + 1, \text{ откуда } p(2) = 1.$$

Подставляя теперь в равенство (*) $x = 1$ и $x = 2$, получаем:

$$2 = p(1) = a + b,$$
$$1 = p(2) = 2a + b,$$

откуда

$$a = -1, \quad b = 3.$$

Таким образом, искомый остаток есть $-x + 3$.

299. Многочлен $x^4+x^3+2x^2+x+1$ можно разложить на множители; он равен $(x^2+1)(x^2+x+1)$. Отсюда легко усмотреть, что этот многочлен является делителем многочлена

$$x^{12}-1=(x^6-1)(x^6+1)=(x^3-1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

а именно:

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=\frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)}=$$
$$=\frac{x^{12}-1}{x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1}.$$

Разделить $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ — это то же самое, что разделить $x^{1951}-1$ на $x^{12}-1$, а затем результат помножить на $x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1$. Но легко видеть, что

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1}=x^{1939}+x^{1927}+x^{1915}+x^{1903}+\ldots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1}$$

(в этом легко убедиться, если произвести деление «углом» по правилам деления расположенных многочленов или если заметить, что $x^{1951}-1=x^7[(x^{12})^{162}-1]+x^7-1$ и воспользоваться известной формулой деления разности четных степеней двух одночленов на разность оснований). Отсюда следует, что искомый коэффициент совпадает с коэффициентом при x^{14} в произведении

$$\left(x^{1939}+x^{1927}+\ldots+x^{31}+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1}\right)\times$$
$$\times(x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1)$$

который равен -1.

300. Из выписанного в условии задачи тождества следует, что искомый многочлен $P(x)=P_n(x)$ (где n — степень многочлена) делится на x, т. е. $P_n(x)=xP_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ — какой-то новый многочлен степени $n-1$. Поэтому

$$P(x-1)=(x-1)P_{n-1}(x-1),$$

и, значит,

$$x(x-1)P_{n-1}(x-1)=xP(x-1)=(x-26)P(x),$$

в силу чего $P(x)$ делится и на $x-1$, т. е. $P_n(x)=x(x-1)P_{n-2}(x)$ (на $x-1$ делится многочлен $P_{n-1}(x)=(x-1)P_{n-2}(x)$). Но в таком случае $P(x-1)=(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)$, и мы получаем:

$$x(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)=$$
$$=(x-26)\;P_n(x)=(x-26)x(x-1)P_{n-2}(x),$$

— откуда следует, что $P_n(x)$ делится и на $x-2$ (т.е. $P_{n-2}(x)$ делится на $x-2$), и, значит, $P_n(x)=x(x-1)(x-2)P_{n-3}(x)$. Подставляя это значение $P(x)$ в исходное соотношение, мы аналогично убеждаемся в том, что $P(x)$ делится и на $x-3$, т. е. $P_n(x)=$ $=x(x-1)(x-2)(x-3)P_{n-4}(x)$, и т. д.

Продолжая поступать таким же образом, мы в конце концов приходим к следующей форме многочлена $P(x)$:

$$P(x) = P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-25)P_{n-26}(x).$$

Подставляя в заданное тождество это выражение многочлена $P(x)$, мы получим:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-26)P_{n-26}(x-1) =$$
$$= (x-26)x(x-1)\ldots(x-25)P_{n-26}(x),$$

откуда вытекает, что для многочлена $P_{n-26}(x) \equiv Q(x)$ степени $n-26$

$$Q(x-1) \equiv Q(x). \qquad (*)$$

Ясно, что если $Q(x) = Q_0(x) = c$ — многочлен нулевой степени (число!), то соотношение (*) имеет место; покажем, что оно имеет место только в этом случае. В самом деле, если $Q(x) = Q_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, где $k \geqslant 1$ и $a_0 \neq 0$, то, приравнивая с обеих сторон тождества (*)

$$a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \ldots = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots$$

коэффициенты при x^{k-1}, в силу формулы бинома Ньютона, получаем:

$$ka_0 + a_1 = a_1, \quad \text{или} \quad a_0 = 0,$$

что, однако, противоречит предположению $a_0 \neq 0$. Таким образом, $k = 0$, $Q(x) \equiv c$ и

$$P(x) = cx(x-1)(x-2)\ldots(x-25)$$

— многочлен 26-й степени.

301. а) Если все коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, то все числа $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$, ... имеют смысл. Рассмотрим такую степень десяти $N = 10^k$, что N больше всех коэффициентов a_0, a_1, a_2, ... многочлена $P(x)$. Тогда число $P(N) = P(10^k)$, очевидно, начинается с тех цифр, которыми записывается коэффициент a_0 многочлена; затем (после, быть может, некоторого числа нулей) идут цифры числа a_1; затем (возможно, опять после нулей) — цифры числа a_2, и т. д. — вплоть до цифр числа a_n; поэтому число $s(10^k) = S$ равно сумме всех цифр всех чисел a_0, a_1, ..., a_n. Но этому же самому числу S равны и величины $s(10^{k+1})$, $s(10^{k+2})$, ... откуда и следует, что в последовательности $s(1)$, $s(2)$, ... число S встречается бесконечно много раз.

б) Ясно, что если старший коэффициент a_0 многочлена $P(x)$ отрицателен, то среди чисел $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$, ... будет вообще лишь конечное число имеющих смысл (ибо при всех достаточно больших x многочлен $P(x)$ имеет тот же знак, что и его старший коэффициент a_0 — это следует, например, из того, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{a_0x^n} = 1$). Таким образом, остается лишь рассмотреть случай $a_0 > 0$. Но в этом случае, как мы покажем, *существует такое число $M > 0$, что у «сдвинутого» многочлена $\overline{P}(x) = P(x+M)$ все коэффициенты положительны.* Отсюда будет следовать, что последовательность $\overline{s}(1)$, $\overline{s}(2)$, $\overline{s}(3)$, ... сумм цифр чисел $\overline{P}(1)$, $\overline{P}(2)$, $\overline{P}(3)$, ... содержит бесконечно много одинаковых чисел, а так как, очевидно, $\bar{s}(1) = s(M+1)$, $\bar{s}(2) = s(M+2)$, $\bar{s}(3) = s(M+3)$, ..., то и последовательность $s(1)$, $s(2)$, $s(3)$, ... также содержит бесконечно много одинаковых чисел.

Итак, нам остается лишь доказать напечатанное выше курсивом утверждение. Но если

$$\bar{P}(x) = P(x+M) = \\ = a_0(x+M)^n + a_1(x+M)^{n-1} + a_2(x+M)^{n-2} + \ldots \\ \ldots + a_{n-1}(x+M) + a_n = \bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \bar{a}_2 x^{n-2} + \ldots + \bar{a}_{n-1} x + \bar{a}_n,$$

то, в силу формулы бинома Ньютона,

$$\bar{a}_i = a_0 \cdot C_n^i M^{n-i} + a_1 \cdot C_{n-1}^i M^{n-i-1} + \ldots + a_i,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $\bar{a}_i$ имеет вид многочлена (степени $n-i$) от M со старшим коэффициентом $a_0 \cdot C_n^i > 0$; поэтому все $\bar{a}_i$ (где $i = 1, 2, \ldots$; заметим, что $\bar{a}_0 = a_0 > 0$) при достаточно большом M будут положительны, что и требовалось доказать.

302. Пусть многочлены $f(x)$ и $g(y)$ имеют свободные члены a_0 (т. е. $f(x) \equiv a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$) и b_0. Положим в равенстве $x^{200}y^{200} + 1 \equiv f(x)g(y)$ переменное x равным 0; тогда получим $a_0g(y) \equiv 1$, т. е. $g(y) = \frac{1}{a_0}$; таким образом, $g(y)$ равно $\frac{1}{a_0}$ при всех y, т. е. это есть постоянная $\frac{1}{a_0}$ (многочлен нулевой степени). Аналогично доказывается, что $f(x) = \frac{1}{b_0}$, т. е. $f(x)\,g(y) = \frac{1}{a_0b_0} \neq x^{200}y^{200} + 1$. Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

303. Так как (квадратное) уравнение $p(x) = ax^2 + bx + c = x$ не имеет вещественных корней, то квадратный трехчлен $p(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$ при всех x принимает значения одного знака, скажем, $p(x) - x > 0$ при всех x. Но в таком случае для любого $x = x_0$ имеем $p(p(x_0)) - p(x_0) > 0$, т. е. $p(p(x_0)) > p(x_0)$, и так как, по предположению, $p(x_0) - x_0 > 0$, т. е. $p(x_0) > x_0$, то $p(p(x_0)) > x_0$ и, значит, x_0 не может служить корнем уравнения (4-й степени) $p(p(x)) = x$.

304. Будем считать, что $a \geqslant 0$ — в противном случае мы заменим многочлен $p(x)$ на (удовлетворяющий тем же условиям) многочлен $-p(x) = -ax^2 - bx - c$. Аналогично будем считать и что $b \geqslant 0$ — в противном случае мы заменим $p(x)$ на $p(-x) = ax^2 - bx + c$. Подставив теперь значения $x = 1$, $x = 0$ и $x = -1$ в неравенство $|p(x)| = |ax^2 + bx + c| \leqslant 1$, получим

$$|a+b+c| \leqslant 1, \ |c| \leqslant 1 \text{ и } |a-b+c| \leqslant 1, \text{ т. е. } |c| \leqslant 1 \\ \text{и } |a+b| \leqslant 2, \ |a-b| \leqslant 2$$

Далее, если $c \geqslant 0$ и, значит, (при $|x| \leqslant 1$) $0 \leqslant cx^2 \leqslant c$, а $-b \leqslant bx \leqslant b$, имеем

$$p_1x = cx^2 + bx + a \leqslant c + b + a \leqslant 1 \\ \text{и } p_1(x) = cx^2 + bx + a \geqslant 0 + (-b) + a = a - b \geqslant -2,$$

откуда следует, что $|p_1(x)| \leqslant 2$. Аналогично, при $c \leqslant 0$, когда $c \leqslant cx^2 \leqslant 0$ (и по-прежнему $-b \leqslant bx \leqslant b$),

$$p_1(x) = cx^2 + bx + a \leqslant 0 + b + a = a + b \leqslant 2$$

$$\text{и } p_1(x) = cx^2 + bx + a \geqslant c + (-b) + a = a - b + c \geqslant -1,$$

откуда вытекает, что и здесь $|p_1(x)| \leqslant 2$.

305. Исключим из рассмотрения мало интересный случай $a = 0$, когда три уравнения (1), (2) и (3) являются уравнениями 1-й степени, т. е. имеют единственный корень каждое, и все совпадают между собой (здесь $x_1 = x_2 = x_3$), а также случай, когда, скажем, $c = 0$ и наши три уравнения имеют корни $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $\left(\frac{b}{a}, 0\right)$ и $\left(-\frac{2b}{a}, 0\right)$ — здесь корень $x_3 = 0$ уравнения (3) заключен между любым корнем уравнения (1) и любым из корней уравнения (2)).

Далее, если $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$, то

$$\frac{a}{2} x_1^2 + bx_1 + c = \left(ax_1^2 + bx_1 + c\right) - \frac{a}{2} x_1^2 = -\frac{a}{2} x_1^2;$$

аналогично, если $-ax_2^2 + bx_2 + c = 0$, то

$$\frac{a}{2} x_2^2 + bx_2 + c = -ax_2^2 + bx_2 + c + \frac{3}{2} ax_2^2 = \frac{3}{2} ax_2^2.$$

Следовательно, величины $\frac{a}{2} x_1^2 + bx_1 + c$ $\left(= -\frac{1}{2} ax_1^2\right)$ и $\frac{a}{2} x_2^2 + bx_2 + c$ $\left(= \frac{3}{2} ax_2^2\right)$ имеют р а з н ы е знаки. Но это означает, что точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ параболы $y = f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$ лежат *по разные стороны от оси* x, откуда и следует, что существует промежуточная между этими точками точка $(x_3, 0)$ параболы, в которой эта кривая пересекает ось x; x_3 и есть искомый корень уравнения (3).

306. Если α и β — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q.$$

Следовательно,

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) =$$
$$= [(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)][(\delta - \alpha)(\delta - \beta)] = (\gamma^2 + p\gamma + q)(\delta^2 + p\delta + q).$$

Но

$$\gamma + \delta = -P, \quad \gamma\delta = Q$$

и, значит,

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \delta) = (\gamma^2 + p\gamma + q)(\delta^2 + p\delta + q) =$$
$$= \gamma^2\delta^2 + p\gamma^2\delta + q\gamma^2 + p\gamma\delta^2 + p^2\gamma\delta + pq\gamma + q\delta^2 + pq\delta + q^2 =$$
$$= (\gamma\delta)^2 + p\gamma\delta(\gamma+\delta) + q[(\gamma+\delta)^2 - 2\gamma\delta] + p^2\gamma\delta + pq(\gamma+\delta) + q^2 =$$
$$= Q^2 - pPQ + q(P^2 - 2Q) + p^2Q - pqP + q^2 =$$
$$= Q^2 + q^2 - pP(Q + q) + qP^2 + p^2Q - 2qQ.$$

307. Первое решение. Вычислим из второго уравнения коэффициент a и подставим его в первое уравнение. Тогда получим:

$$a = -(x^2 + x),$$
$$x^2 - (x^2 + x)x + 1 = 0,$$
$$x^3 - 1 = 0,$$
$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$x_1 = 1, \qquad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

и, следовательно, так как $a = -(x^2 + x)$, то $a_1 = -2$, $a_{2,3} = 1$.

Второе решение. Используя результат задачи 306, мы можем утверждать, что, для того чтобы наши уравнения имели хотя бы один общий корень, необходимо и достаточно, чтобы обращалось в нуль выражение

$$a^2 + 1 - a \cdot 1(a + 1) + 1 + a^3 - 2a = a^3 - 3a + 2 =$$
$$= (a - 1)(a^2 + a - 2) = (a - 1)^2(a + 2).$$

Отсюда получаем:

$$a_1 = -2, \; a_{2,3} = 1.$$

308. а) Пусть $(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$. Полагая в обеих частях равенства $x = -b$, получим:

$$(-b - a)(-b - 10) + 1 = (-b + b)(-b + c) = 0.$$

Отсюда

$$(b + a)(b + 10) = -1.$$

Так как a и b — целые, то $b + a$ и $b + 10$ — также целые. Но -1 может быть представлена в виде произведения двух целых чисел только одним способом: $-1 = 1 \cdot (-1)$. Поэтому имеются только две возможности:

1) $b + 10 = 1$, $b = -9$; тогда $b + a = -9 + a = -1$,

т. е. $a = 8$:

$$(x - 8)(x - 10) + 1 = (x - 9)^2.$$

2) $b + 10 = -1$, $b = -11$; тогда $b + a = -11 + a = 1$,

т. е. $a = 12$:

$$(x - 12)(x - 10) + 1 = (x - 11)^2.$$

б) Так как многочлен четвертой степени можно разложить или в произведение многочлена первой степени и многочлена третьей степени или в произведение двух многочленов второй степени, то нам следует рассмотреть отдельно два случая:

A) $x(x - a)(x - b)(x - c) + 1 = (x + p)(x^3 + qx^2 + rx + s)$ (*)

(коэффициенты в правой части равенства при x в первом множителе и при x^3 во втором множителе оба равны 1 или оба равны -1, так как в произведении этих множителей коэффициент при x^4 должен быть равен коэффициенту при x^4 в выражении $x(x-a)(x-b)\times \times(x-c)+1$, т. е. 1; равенство же $x(x-a)(x-b)(x-c)+1= =(-x+p_1)(-x^3+q_1x^2+r_1x+s_1)$ можно привести к виду (*), умножив оба сомножителя правой части на -1).

Положив в равенстве (*) последовательно $x=0$, $x=a$, $x=b$ и $x=c$ и учитывая, что 1 разлагается на множители только двумя способами $1=1\cdot 1=(-1)\cdot(-1)$, мы получим, что четыре различных числа $0+p=p$, $a+p$, $b+p$ и $c+p$ (напоминаем, что числа 0, a, b, c все различны) могут иметь только два значения $+1$ и -1, что невозможно.

Б) $x(x-a)(x-b)(x-c)+1=(x^2+px+q)(x^2+rx+s)$.

Отсюда, как и выше, получаем, что при $x=0$, $x=a$, $x=b$ и $x=c$ оба многочлена, как x^2+px+q, так и x^2+rx+s, принимают значения 1 или -1. Но квадратный трехчлен x^2+px+q не может принимать одно и то же значение α при трех различных значениях x (в противном случае квадратное уравнение $x^2+px+q-\alpha=0$ имело бы три различных корня), откуда следует, что при двух из четырех значений $x=0$, $x=a$, $x=b$, $x=c$ этот трехчлен принимает значение 1, а при двух других — значение -1. Предположим, что $0^2+p\cdot 0+q=q=1$, и пусть $x=a$ есть то из значений $x=a$, $x=b$ и $x=c$, при котором этот трехчлен принимает то же самое значение 1; в таком случае при $x=b$ и $x=c$ он принимает значение -1. Итак, мы имеем:

$$a^2+pa+1=1,\quad b^2+pb+1=-1,\quad c^2+pc+1=-1.$$

Из $a^2+pa=a(a+p)=0$ следует, что $a+p=0$, $p=-a$ (ибо, по предположению, $a\neq 0$). Таким образом, два последних равенства принимают вид

$$b^2-ab=b(b-a)=-2,\quad c^2-ac=c(c-a)=-2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$b^2-ab-c^2+ac=(b-c)(b+c)-a(b-c)=$$
$$=(b-c)(b+c-a)=0,$$

откуда, так как $b\neq c$, имеем: $b+c-a=0$, $a=b+c$, $b-a= =-c$, $c-a=-b$. Теперь из равенства

$$b(b-a)=-bc=-2$$

получаем следующие значения для b, c и a:

$$b=1,\quad c=2,\quad a=b+c=3,$$

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=x(x-3)(x-1)(x-2)+1=$$
$$=(x^2-3x+1)^2$$

и

$$b=-1,\ c=-2,\ a=b+c=-3,$$

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1=x(x+3)(x+1)(x+2)+1=$$
$$=(x^2+3x+1)^2.$$

Аналогично, если x^2+px+q принимает при $x=0$, и $x=a$ значение -1, при $x=b$ и $x=c$ значение $+1$, то мы имеем:

$$q=-1,\quad a^2+pa-1=-1,\quad b^2+pb-1=1,\quad c^2+pc-1=1,$$

откуда

$$p=-a,\ b(b-a)=c(c-a)=2,\ b^2-ab-c^2+ac=0,$$

$$(b-c)(b+c-a)=0,\quad a=b+c,\quad b-a=-c,\quad -bc=2.$$

Мы получаем, таким образом, еще две возможные системы значений для a, b и c:

$$b=2,\quad c=-1,\quad a=b+c=1,$$

$$x(x-a)(x-b)(x-c)=x(x-1)(x-2)(x+1)+1=$$
$$=(x^2-x-1)^2;$$

$$b=1,\quad c=-2,\quad a=b+c=-1,$$

$$x(x-a)(x-b)(x-c)=x(x+1)(x-1)(x+2)+1=$$
$$=(x^2+x-1)^2.$$

Примечание. Другое решение этой задачи приведено в заключительной части решения задачи 309 б).

309. а) Предположим, что

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)-1=p(x)q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, сумма степеней которых равна n; можно считать, что в обоих этих многочленах старший коэффициент равен 1 (сравните с решением предыдущей задачи). Подставляя в это равенство значения $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, ..., $x=a_n$ и учитывая, что -1 разлагается на два целых множителя единственным образом: $-1=1\cdot(-1)$, мы получим, что $p(x)=1$, $q(x)=-1$, или наоборот, при каждом из рассматриваемых значений x. Таким образом, мы видим, что сумма $p(x)+q(x)$ равна нулю при $x=a_1$, a_2, a_3, ..., a_n. Итак, уравнение $p(x)+$ $+q(x)=0$ имеет своими корнями $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_n=a_n$; отсюда следует, что многочлен $p(x)+q(x)$ делится на $x-a_1$, $x-a_2$, ..., $x-a_n$, а следовательно, и на произведение $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Но степень уравнения $p(x)+q(x)=0$, равная наибольшей степени многочленов $p(x)$, $q(x)$, меньше n (n есть степень выражения $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$). Отсюда следует, что $p(x)+q(x)$ не может делиться на произведение $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$, а следовательно, разложение, существование которого мы предположили, невозможно.

б) Предположим, что

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+1=p(x)q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, старшие коэффициенты которых равны 1. Подставив в это равенство значения $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, ..., $x=a_n$, мы получим, что при каждом из рассматриваемых значений x

$$p(x)=1,\quad q(x)=1\ \text{ или }\ p(x)=-1,\quad q(x)=-1.$$

Таким образом, $p(x)-q(x)$ обращается в нуль при n различных значениях x, и, следовательно, во-первых, $p(x)-q(x)\equiv 0$, $p(x)\equiv$

$\equiv q(x)$ (сравните с решением задачи а)) и, во-вторых, число n четно: $n = 2k$, где k есть степень каждого из многочленов $p(x) = q(x)$. Перепишем теперь наше равенство в виде

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\dots(x - a_{2k}) = [p(x)]^2 - 1,$$

или

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)\dots(x - a_{2k}) = [p(x) + 1][p(x) - 1].$$

Итак, произведение двух многочленов $p(x) + 1$ и $p(x) - 1$ обращается в нуль при $x = a_1$, $x - a_2$, $x = a_3$, ..., $x = a_{2k}$. Следовательно, при каждом из этих значений x обращается в нуль хотя бы один из сомножителей, а это значит, что или $p(x) + 1$, или $p(x) - 1$ делится на $x - a_1$, или $p(x) + 1$, или $p(x) - 1$ делится на $x - a_2$, и т. д. Так как многочлен степени k не может делиться на произведение больше чем k различных выражений вида $x - a_i$ и так как из того, что многочлен степени k со старшим коэффициентом 1 делится на произведение k выражений вида $x - a_i$, следует, что он равен этому произведению, то мы можем утверждать, что $p(x) + 1$ равно произведению k из $2k$ сомножителей левой части последнего равенства, а $p(x) - 1$ равно произведению остальных k сомножителей.

Предположим, например, что

$$p(x) + 1 = (x - a_1)(x - a_3)\dots(x - a_{2k-1}),$$
$$p(x) - 1 = (x - a_2)(x - a_4)\dots(x - a_{2k}).$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$2 = (x - a_1)(x - a_3)\dots(x - a_{2k-1}) - (x - a_2)(x - a_4)\dots(x - a_{2k}).$$

Подставив сюда, например, $x = a_2$, мы получим разложение числа 2 в произведение k целых множителей:

$$2 = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\dots(a_2 - a_{2k-1}).$$

Так как число 2 нельзя разложить в произведение больше чем трех различных множителей, то отсюда сразу следует, что $k \leqslant 3$. Но случай $k = 3$ тоже является невозможным по следующей причине. Число 2 может быть разложено в произведение трех различных сомножителей только одним единственным способом: $2 = 1 \cdot (-1) \times \times (-2)$. Предположим, что $k = 3$, $a_1 < a_3 < a_5$. Тогда $2 = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_5)$, где $a_2 - a_1 > a_2 - a_3 > a_2 - a_5$, и, следовательно, $a_2 - a_1 = 1$, $a_2 - a_3 = -1$, $a_2 - a_5 = -2$. Подставив в формулу

$$2 = (x - a_1)(x - a_3)(x - a_5) - (x - a_2)(x - a_4)(x - a_6)$$

$x = a_4$, мы придем к другому разложению 2 на три различных множителя: $2 = (a_4 - a_1)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5)$, где тоже $a_4 - a_1 > a_4 - a_3 > a_4 - a_5$. Отсюда следует, что $a_4 - a_1 = 1$, $a_4 - a_3 = -1$, $a_4 - a_5 = -2$ и, значит, $a_4 = a_2$, что противоречит условию задачи.

Итак, возможными являются только два случая: $k = 2$ и $k = 1$.

1°. Если $k = 1$, то мы имеем:

$$2 = (x - a_1) - (x - a_2),$$

откуда $a_2 = a_1 + 2$, и, обозначая a_1 просто через a, получим:

$$(x - a_1)(x - a_2) + 1 = (x - a)(x - a - 2) + 1 = (x - a - 1)^2$$

(сравните с решением задачи 308 а)).

2°. Если $k=2$, то имеем:

$$2=(x-a_1)(x-a_3)-(x-a_2)(x-a_4),$$

где будем считать $a_1<a_3$, $a_2<a_4$. Подставляя в последнее равенство $x=a_2$ и $x=a_4$, получим:

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3), \quad a_2-a_1>a_2-a_3,$$
$$2=(a_4-a_1)(a_4-a_3), \quad a_4-a_1>a_4-a_3.$$

Но 2 можно разложить на два множителя, следующих в убывающем порядке, только двумя способами: $2=2\cdot 1$ и $2=(-1)\times\times(-2)$. Так как, кроме того, $a_2-a_1<a_4-a_1$, то мы имеем:

$$a_2-a_1=-1, \quad a_2-a_3=-2,$$
$$a_4-a_1=2, \quad a_4-a_3=1,$$

откуда, обозначая a_1 через a, получим:

$$a_2=a-1, \quad a_3=a+1, \quad a_4=a+2$$

и

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1=$$
$$=(x-a)(x-a+1)(x-a-1)(x-a-2)+1=$$
$$=[x^2-(2a-1)x+a^2+a-1]^2$$

(ср. с решением задачи 308б)).

310. Аналогично решению предыдущей задачи из предполагаемого равенства

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2\ldots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x), \qquad (*)$$

где $p(x)$, $q(x)$ — какие-то многочлены с целыми коэффициентами (и с коэффициентами при старших членах, равными 1), следует, что либо $p(x)=1$, $q(x)=1$, либо $p(x)=-1$, $q(x)=-1$ при каждом из значений $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, ..., $x=a_n$. Покажем, что многочлен $p(x)$ (и, разумеется, также и $q(x)$) может быть либо при всех значениях $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ равен 1, либо при всех этих значениях x равен -1.

В самом деле, если бы, например, многочлен $p(x)$ при $x=a_i$ принимал значение 1, а при $x=a_j$ — значение -1, то при некотором промежуточном значении x, заключенном между a_i и a_j, он обращался бы в нуль (если график функции $y=p(x)$ при $x=a_i$ находится сверху от оси Ox, а при $x=a_j$ оказывается снизу от этой оси, то непрерывная кривая $y=p(x)$ где-то между $x=a_i$ и $x=a_j$ пересекает ось Ox), что невозможно, ибо левая часть равенства (*) всегда $\geqslant 1$ и потому в нуль обратиться не может.

Предположим, что как $p(x)$, так и $q(x)$ при $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=$ $=a_n$ принимают значения 1. В таком случае как $p(x)-1$, так и $q(x)-1$ обращаются в нуль при $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ и, следовательно $p(x)-1$ и $q(x)-1$ делятся на произведение $(x-a_1)\times\times(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Так как сумма степеней многочленов $p(x)$ и $q(x)$ равна степени $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$, т. е. $2n$, то $p(x)-1=(x-a_1)\ldots(x-a_n)$ и $q(x)-1=(x-a_1)\ldots$ $\ldots(x-a_n)$ (ср. с решением предыдущей задачи).

Таким образом, мы приходим к равенству

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x)=$$
$$=[(x-a_1)\ldots(x-a_n)+1][(x-a_1)\ldots(x-a_n)+1]=$$
$$=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+$$
$$+2(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+1,$$

откуда

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\equiv 0,$$

что неверно. Точно так же доказывается, что $p(x)$ и $q(x)$ не могут принимать в точках $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ значения -1 (в этом случае мы получили бы $p(x)=q(x)=(x-a_1)\times\times(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$).

Итак, мы видим, что разложение выражения

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами невозможно.

311. Пусть многочлен $P(x)$ равен 7 при $x=a$, $x=b$, $x=c$ и $x=d$. В таком случае уравнение $P(x)-7=0$ имеет четыре целых корня a, b, c и d. Это значит, что многочлен $P(x)-7$ делится на $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ [1]), т. е.

$$P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x),$$

где $p(x)$ может равняться 1.

Предположим теперь, что многочлен $P(x)$ принимает при целом значении $x=A$ значение 14. Подставив $x=A$ в последнее равенство, мы получим:

$$7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A),$$

что невозможно, так как целые числа $A-a$, $A-b$, $A-c$ и $A-d$ все различны, а 7 нельзя разложить в произведение пяти множителей, из которых по крайней мере четыре отличны друг от друга.

312. Если многочлен седьмой степени $P(x)$ разлагается в произведение двух многочленов $p(x)$ и $q(x)$ с целыми коэффициентами, то степень хотя бы одного из сомножителей не больше 3; будем считать, что этим сомножителем является $p(x)$. Если $P(x)$ при семи целых значениях x принимает значение ± 1, то $p(x)$ при тех же значениях x тоже принимает значения ± 1 (так как $p(x)q(x)=P(x)$). Среди семи целых значений x, при которых $p(x)$ принимает значения ± 1, найдутся четыре таких, при которых $p(x)$ принимает значение 1, или четыре таких, при которых $p(x)$ принимает значение -1. В первом случае уравнение третьей степени $p(x)-1=0$ имеет четыре корня, во втором случае уравнение $p(x)+1=0$ имеет четыре корня. Ни то, ни другое не может иметь места, так как, например, в первом случае $p(x)-1$ должно

---

[1]) Пусть $P(x)-7$ дает при делении на $x-a$ остаток r:

$$P(x)-7=(x-a)Q(x)+r.$$

Подставляя в это равенство $x=a$, получаем $7-7=0+r$, т. е. $r=0$, и, значит, $P(x)-7=(x-a)Q(x)$ делится на $x-a$.

было бы делиться на многочлен четвертой степени (сравните с решением задачи 309а)).

313. Пусть p и q — два целых числа, одновременно четных или нечетных. Тогда разность $P(p)-P(q)$ четна. Действительно, выражение

$$P(p)-P(q)=a_0(p^n-q^n)+a_1(p^{n-1}-q^{n-1})+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-2}(p^2-q^2)+a_{n-1}(p-q)$$

делится на четное число $p-q$.

В частности, при p четном разность $P(p)-P(0)$ четна. Но по условию $P(0)$ нечетно; следовательно, $P(p)$ также нечетно, а потому $P(p)\neq 0$. Аналогично при p нечетном разность $P(p)-P(1)$ четна; так как по условию $P(1)$ нечетно, то отсюда, как и выше, следует, что $P(p)\neq 0$.

Следовательно, $P(x)$ не может обращаться в нуль ни при каком целом значении x (как четном, так и нечетном), т. е. многочлен $P(x)$ не имеет целых корней.

314. Предположим, что уравнение $P(x)=0$ имеет рациональный корень $x=\frac{k}{l}$, т.е. $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$. Разложим многочлен $P(x)$ по степеням $x-p$, т. е. запишем его в виде

$$P(x)=c_0(x-p)^n+c_1(x-p)^{n-1}+$$
$$+c_2(x-p)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}(x-p)+c_n,$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторые целые числа, которые нетрудно найти, если известны $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (c_0 равно старшему коэффициенту a_0 многочлена $P(x)$, c_1 — старшему коэффициенту многочлена $P(x)-c_0(x-p)^n$ степени $n-1$, c_2 — старшему коэффициенту многочлена $P(x)-c_0(x-p)^n-c_1(x-p)^{n-1}$ степени $n-2$, и т. д.). Подставив $x=p$ в последнее выражение для $P(x)$, мы получим $c_n=P(p)=\pm 1$.

Подставив в это же выражение $x=\frac{k}{l}$ и умножив результат на l^n, мы получим:

$$l^nP\left(\frac{k}{l}\right)=c_0(k-pl)^n+c_1l(k-pl)^{n-1}+$$
$$+c_2l^2(k-pl)^{n-2}+\ldots+c_{n-1}l^{n-1}(k-pl)+c_nl^n=0,$$

откуда следует, что если $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$, то

$$\frac{c_nl^n}{k-pl}=\frac{\pm l^n}{k-pl}=-c_0(k-pl)^{n-1}-$$
$$-c_1l(k-pl)^{n-2}-\ldots-c_{n-2}l^{n-2}(k-pl)-c_{n-1}l^{n-1}$$

есть целое число. Но так как pl делится на l, а k взаимно просто с l $\left(\text{иначе дробь } \frac{k}{l} \text{ можно было бы сократить}\right)$, то $k-pl$ взаимно просто с l, а следовательно, $k-pl$ взаимно просто и с l^n. Отсюда, следует, что $\frac{\pm l^n}{k-pl}$ может быть целым числом только, если $k-pl=\pm 1$.

Точно так же докажем, что и $k-ql=\pm 1$.

Вычтя теперь равенство $k-pl=\pm 1$ из равенства $k-ql=$ $=\pm 1$, мы получим:

$$(p-q)l=0, \text{ или } (p-q)l=\pm 2.$$

Но $(p-q)l>0$, так как $p>q$ и $l>0$, а следовательно, $(p-q)l=2$, $k-pl=-1$, $k-ql=1$.

Итак, если $p-q>2$, то уравнение $P(x)=0$ вовсе не может иметь рациональных корней. Если же $p-q=2$ или $p-q=1$, то рациональный корень $\frac{k}{l}$ может существовать. При этом, складывая равенства

$$k-pl=-1, \quad k-ql=1,$$

мы получаем:

$$2k-(p+q)l=0, \frac{k}{l}=\frac{p+q}{2},$$

что и требовалось доказать.

315. а) Предположим, что наш многочлен можно разложить на множители с целыми коэффициентами:

$$x^{2222}+2x^{2220}+4x^{2218}+\ldots+2220x^2+2222=$$
$$=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0)\times$$
$$\times(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\ldots+b_0),$$

где $m+n=2222$. В таком случае $a_0b_0=2222$ и, следовательно, из двух целых чисел a_0, b_0 одно является четным, а другое — нечетным. Предположим, что a_0 есть четное число, а b_0 — нечетное. Мы утверждаем, что в таком случае все коэффициенты многочлена $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ должны быть четными. Действительно, предположим, что a_k есть первый с конца нечетный коэффициент этого многочлена. Коэффициент при x^k в произведении

$$(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0)(b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0)$$

будет равен

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\ldots+a_0b_k \qquad (*)$$

(в случае, если $k>m$, эта сумма окончится членом $a_{k-m}b_m$). Этот коэффициент равен соответствующему коэффициенту при x^k в исходном многочлене, т. е. равен нулю, если k нечетно, и представляет собой четное число, если k четно (ибо все коэффициенты многочлена, заданного в условии задачи, кроме первого, четны, а $k\leqslant$ $\leqslant n<2222$). Но так как, по предположению, все числа a_{k-1}, a_{k-2}, a_{k-3}, ..., a_0 четны, то в сумме (*) все члены, кроме первого, четны и, следовательно, четным должно быть и произведение a_kb_0, что невозможно, так как a_k и b_0 нечетны.

Таким образом, мы видим, что все коэффициенты многочлена $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ должны быть четны, что противоречит тому, что $a_n b_m$ должно равняться единице. Следовательно, неверно и наше предположение о возможности разложения данного многочлена в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

б) Положим $x = y + 1$. В таком случае мы получим:

$$x^{250} + x^{249} + x^{248} + \ldots + x + 1 =$$
$$= (y+1)^{250} + (y+1)^{249} + \ldots + (y+1) + 1 =$$
$$= \frac{(y+1)^{251} - 1}{(y+1) - 1} = \frac{1}{y}\left[(y+1)^{251} - 1\right] =$$
$$= y^{250} + 251y^{249} + C_{251}^{2} y^{248} + C_{251}^{3} y^{247} + \ldots + C_{251}^{2} y + 251.$$

Дальше, используя то, что все, кроме первого, коэффициенты полученного многочлена делятся на простое число 251 $\left(\text{ибо } C_{251}^{k} = \frac{251 \cdot 250 \cdot 249 \ldots (251 - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}\right)$ и что свободный член многочлена, равный 251, не делится на 251^2, мы можем почти дословно повторить рассуждения решения задачи а), заменив лишь четность и нечетность коэффициентов делимостью на 251. Таким образом, мы докажем, что если бы наш многочлен разлагался в произведение двух множителей, то все коэффициенты одного из сомножителей должны были бы делиться на 251, что невозможно, ибо первый коэффициент нашего многочлена равен 1.

316. Запишем многочлены в виде

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

и

$$B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m.$$

Так как по условию в произведении не все коэффициенты делятся на 4, то у обоих многочленов все коэффициенты не могут быть четными. Следовательно, у одного из них, например у многочлена B, не все коэффициенты четные. Допустим, что в многочлене A тоже есть нечетные коэффициенты. Рассмотрим первый из них (имеющий наименьший номер); пусть это будет коэффициент a_s. Пусть, далее, первый нечетный коэффициент многочлена B будет b_k. Рассмотрим коэффициент при x^{k+s} в произведении многочленов A и B. Степень x^{k+s} в произведении могла получиться только из таких степеней x, сумма показателей которых равна $k+s$; следовательно, этот коэффициент равен

$$a_0 b_{k+s} + a_1 b_{k+s-1} + \ldots + a_{s-1} b_{k+1} + a_s b_k +$$
$$+ a_{s+1} b_{k-1} + \ldots + a_{s+k} b_0.$$

В этой сумме все произведения, стоящие до члена $a_s b_k$, четны, так как четны все числа $a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}$. Также четны все произведения, стоящие после $a_s b_k$, так как $b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_0$ — четные числа. Произведение же $a_s b_k$ — число нечетное, так как и a_s, и b_k — числа нечетные. Следовательно, и наша сумма нечетна, что противоречит тому, что в произведении все коэффициенты четны. Таким образом, предположение, что у многочлена A есть нечетные коэффициенты, неверно, и, следовательно, все коэффициенты A — четные числа. А это и требовалось доказать.

317. Докажем, что при любом рациональном, но не целом значении x многочлен $P(x)$ не может быть целым числом, а значит, не равен нулю, ибо нуль — целое число.

Пусть $x = \frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты. Тогда

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= \frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n =$$
$$= \frac{p^n + a_1p^{n-1}q + a_2p^{n-2}q^2 + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n}{q^n} =$$
$$= \frac{p^n + q\left(a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}\right)}{q^n}.$$

Число p^n, как и p, взаимно просто с q; следовательно, $p^n + q(a_1p^{n-1} + \ldots + a_nq^{n-1})$ также взаимно просто с q, а значит, и с q^n. Поэтому у нас получилась несократимая дробь, которая не может быть равна целому числу.

318. Пусть N — некоторое целое число и $P(N) = M$. При любом целом k

$$P(N+kM) - P(N) = a_0[(N+kM)^n - N^n] +$$
$$+ a_1[(N+kM)^{n-1} - N^{n-1}] + \ldots + a_{n-1}[(N+kM) - N]$$

делится на kM (ибо $(N+kM)^l - N^l$ делится на $(N+kM) - N = kM$), а значит, и на M; поэтому $P(N+kM)$ делится на M при любом целом k.

Таким образом, если доказать, что среди значений $P(N+kM)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) встречаются числа, отличные от $\pm M$, то тем самым будет доказано, что не все они являются простыми. Но многочлен $P(x)$ n-й степени принимает любое значение A, самое большее для n различных значений x (ибо иначе уравнение n-й степени $P(x) - A = 0$ имело бы больше n корней). Таким образом, среди первых $2n+1$ значений $P(N+kM)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$) имеется по крайней мере одно, отличное от $+M$ и $-M$.

319. Заметим прежде всего, что каждый многочлен n-й степени $P(x)$ можно представить в виде суммы многочленов

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}, \ldots, P_n(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n},$$

взятых с некоторыми коэффициентами:

$$P(x) = b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x) + \ldots + b_1P_1(x) + b_0P_0(x).$$

Для доказательства этого заметим, что если $\frac{b_n}{n!}$ равно старшему коэффициенту многочлена $P(x)$, то $P(x)$ и $b_nP_n(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^n; если, кроме того, $\frac{b_{n-1}}{(n-1)!}$ равно старшему коэффициенту $P(x) - b_nP_n(x)$, то $P(x)$ и $b_nP_n(x) + b_{n-1}P_{n-1}(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^n и x^{n-1}; если, кроме того,

$\frac{b_{n-2}}{(n-2)!}$ равно старшему коэффициенту многочлена $P(x)-b_nP_n(x)-$ $-b_{n-1}P_{n-1}(x)$, то $P(x)$ и $b_nP_n(x)+b_{n-1}P_{n-1}(x)+b_{n-2}P_{n-2}(x)$ имеют одинаковые коэффициенты при x^n, x^{n-1} и x^{n-2}, и т. д.; таким образом, можно определить b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0 так, чтобы многочлены $P(x)$ и $b_nP_n(x)+b_{n-1}P_{n-1}(x)+\ldots+b_1P_1(x)+b_0P_0(x)$ полностью совпадали.

Пусть теперь многочлен n-й степени $P(x)$ таков, что $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(n)$ — целые числа. Как и всякий многочлен, его можно представить в виде

$$P(x)=b_0P_0(x)+b_1P_1(x)+b_2P_2(x)+\ldots+b_nP_n(x).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}P_1(0)&=P_2(0)=\ldots=P_n(0)=\\&=P_2(1)=P_3(1)=\ldots=P_n(1)=P_3(2)=\ldots=P_n(2)=\ldots\\&\ldots=P_{n-1}(n-2)=P_n(n-2)=P_n(n-1)=0,\\P_0(0)&=P_1(1)=P_2(2)=\ldots=P_{n-1}(n-1)=P_n(n)\equiv 1.\end{aligned}$$

Поэтому

$P(0)=b_0P_0(0)$, откуда $b_0=P(0)$;

$P(1)=b_0P_0(1)+b_1P_1(1)$, откуда $b_1=P(1)-b_0P_0(1)$;

$P(2)=b_0P_0(2)+b_1P_1(2)+b_2P_2(2)$,

откуда $b_2=P(2)-b_0P_0(2)-b_1P_1(2)$;

. . . .

$$P(n)=b_0P_0(n)+b_1P_1(n)+\ldots+b_{n-1}P_{n-1}(n)+b_nP_n(n),$$

откуда $b_n=P(n)-b_0P_0(n)-b_1P_1(n)-\ldots-b_{n-1}P_{n-1}(n)$.

Таким образом, все коэффициенты b_0, b_1, b_2, ..., b_n являются целыми числами.

320. а) Из решения задачи 319 следует, что подобный многочлен можно представить в виде суммы многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ с целыми коэффициентами. Отсюда и из того, что многочлены $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ принимают целые значения при каждом целом x (см. задачу 75а)), следует утверждение задачи.

б) Если многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots$ $\ldots+a_1x+a_0$ принимает целые значения при $x=k$, $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$, то многочлен $Q(x)=P(x+k)=a_n(x+k)^n+a_{n-1}(x+$ $+k)^{n-1}+\ldots+a_1(x+k)+a_0$ принимает целые значения при $x=0$, 1, 2, 3, ..., n. В силу задачи а) отсюда следует, что $Q(x)$ принимает целые значения при всех целых x. А отсюда мы заключаем, что и многочлен $P(x)=Q(x-k)$ принимает целые значения при всех целых x.

в) Пусть многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ принимает целые значения при $x=0$, 1, 4, 9, ..., n^2. Тогда многочлен $Q(x)=P(x^2)=a_n(x^2)^n+a_{n-1}(x^2)^{n-1}+\ldots+a_1x^2+a_0$ степени $2n$ принимает целые значения при $2n+1$ последовательных значениях $x=-n$, $-(n-1)$, $-(n-2)$, ..., -1, 0, 1, ..., $n-1$, n.

В самом деле, очевидно, $Q(0)=P(0)$, $Q(1)=Q(-1)=P(1)$, $Q(2)=Q(-2)=P(4)$, $Q(3)=Q(-3)=P(9)$, ..., $Q(n)=Q(-n)=$ $=P(n^2)$, а все эти числа по условию являются целыми. Следовательно, в силу задачи б) многочлен $Q(x)$ принимает целые значения при каждом целом значении x. А это и означает, что $P(k^2)=Q(k)$ при любом целом k есть число целое.

Примером может служить многочлен $P(x)=\frac{x(x-1)}{12}$ для которого

$$Q(x)=P(x^2)=\frac{x^2(x^2-1)}{12}=\frac{x^2(x-1)(x+1)}{12}=$$
$$=2\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

321. а) Используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона, будем иметь:

$$\cos 5\alpha+i\sin 5\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^5=$$
$$=\cos^5\alpha+5\cos^4\alpha\, i\sin\alpha+10\cos^3\alpha(i\sin\alpha)^2+$$
$$+10\cos^2\alpha(i\sin\alpha)^3+5\cos\alpha(i\sin\alpha)^4+(i\sin\alpha)^5=$$
$$=(\cos^5\alpha-10\cos^3\alpha\sin^2\alpha+5\cos\alpha\sin^4\alpha)+$$
$$+i(5\cos^4\alpha\sin\alpha-10\cos^2\alpha\sin^3\alpha+\sin^5\alpha).$$

Приравнивая действительные и мнимые части слева и справа, получаем требуемые формулы.

б) Аналогично решению задачи а) имеем:

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=$$
$$=\cos^n\alpha+C_n^1\cos^{n-1}\alpha i\sin\alpha+C_n^2\cos^{n-2}\alpha\,(i\sin\alpha)^2+$$
$$+C_n^3\cos^{n-3}\alpha\,(i\sin\alpha)^3+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\,(i\sin\alpha)^4+\ldots=$$
$$=\left(\cos^n\alpha-C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha+C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha-\ldots\right)+$$
$$+i\left(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha-C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha+\ldots\right).$$

Отсюда и вытекают нужные формулы.

322. Согласно формулам задачи 321 б) имеем:

$$\operatorname{tg}6\alpha=\frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha}=\frac{6\cos^5\alpha\sin a-20\cos^3\alpha\sin^3\alpha+6\cos\alpha\sin^5\alpha}{\cos^6\alpha-15\cos^4\alpha\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha\sin^4\alpha-\sin^6\alpha}.$$

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на $\cos^6\alpha$, получаем искомую формулу:

$$\operatorname{tg}6\alpha=\frac{6\operatorname{tg}\alpha-20\operatorname{tg}^3\alpha+6\operatorname{tg}^5\alpha}{1-15\operatorname{tg}^2\alpha+15\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}.$$

323. Уравнение $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ перепишем в виде

$$x^2+1=2x\cos\alpha,\quad\text{или}\quad x^2-2x\cos\alpha+1=0.$$

Значит,

$$x=\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-1}=\cos\alpha\pm i\sin\alpha.$$

Отсюда вытекает, что

$$x^n = \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha;$$

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\cos n\alpha \pm i\sin n\alpha} = \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha.$$

После сложения получим:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

324. Рассмотрим сумму

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi] + [\cos(\varphi+\alpha) + i\sin(\varphi+\alpha)] +$$
$$+ [\cos(\varphi+2\alpha) + i\sin(\varphi+2\alpha)] + \ldots + [\cos(\varphi+n\alpha) + i\sin(\varphi+n\alpha)].$$

Наша задача сводится к вычислению коэффициентов при мнимой и действительной частях этой суммы. Обозначая $\cos\varphi + i\sin\varphi$ через a и $\cos\alpha + i\sin\alpha$ через x и применяя формулу для произведения комплексных чисел и формулу Муавра, найдем, что рассматриваемая сумма равна

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n =$$

$$= \frac{ax^{n+1} - a}{x-1} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha - 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1} =$$

$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{[(\cos(n+1)\alpha - 1) + i\sin(n+1)\alpha]}{[(\cos\alpha - 1) + i\sin\alpha]} =$$

$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{-2\sin^2\frac{n+1}{2}\alpha + 2i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{-2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= (\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{2i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\left[\cos\frac{n+1}{2}\alpha + i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\right]}{2i\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right]} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \times$$

$$\times \frac{\left(\cos\frac{n+1}{2}\alpha + i\sin\frac{n+1}{2}\alpha\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(\varphi + \frac{n}{2}\right)\alpha + i\sin\left(\varphi + \frac{n}{2}\alpha\right)\right]$$

(здесь снова используется формула умножения комплексных чисел, а также то, что $\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Big)$. Отсюда сразу следуют требуемые формулы.

325. Воспользуемся тем, что $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$. Отсюда, используя результат предыдущей задачи, получим:

$$\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}[\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\ldots+\cos 2n\alpha+n]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{\sin\alpha}-1\right]+\frac{n}{2}=\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{n-1}{2}.$$

А так как $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, то

$$\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha=$$
$$=n-\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}-\frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}.$$

326. Требуется вычислить действительную часть и коэффициент при мнимой части суммы

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)+C_n^1(\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha)+$$
$$+C_n^2(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)+\ldots+(\cos(n+1)\alpha+i\sin(n+1)\alpha).$$

Обозначая $\cos\alpha+i\sin\alpha$ через x и используя формулу Муавра и формулу бинома Ньютона, преобразуем эту сумму следующим образом:

$$x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\ldots+x^{n+1}=x(x+1)^n=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\alpha+1+i\sin\alpha)^n=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}\alpha+i\sin\frac{n+2}{2}\alpha\right).$$

Отсюда следует, что

$$\cos\alpha+C_n^1\cos 2\alpha+C_n^2\cos 3\alpha+\ldots+\cos(n+1)\alpha=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha,$$
$$\sin\alpha+C_n^1\sin 2\alpha+C_n^2\sin 3\alpha+\ldots+\sin(n+1)\alpha=$$
$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha.$$

327. Воспользуемся формулой

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos (A - B) - \cos (A + B)].$$

Отсюда следует, что нашу сумму можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m-n)\pi}{p}+\cos\frac{2(m-n)\pi}{p}+\cos\frac{3(m-n)\pi}{p}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\cos\frac{(p-1)(m-n)\pi}{p}\right]-\frac{1}{2}\left[\cos\frac{(m+n)\pi}{p}+\right.$$
$$\left.+\cos\frac{2(m+n)\pi}{p}+\cos\frac{3(m+n)\pi}{p}+\ldots+\cos\frac{(p-1)(m+n)\pi}{p}\right].$$

Но сумма

$$\cos\frac{k\pi}{p}+\cos\frac{2k\pi}{p}+\cos\frac{3k\pi}{p}+\ldots+\cos\frac{(p-1)k\pi}{p}$$

равна $p-1$, если k делится на $2p$ (в этом случае каждое слагаемое суммы равно 1); в случае же, когда k не делится на $2p$, эта сумма, в силу результата задачи 324, равна

$$\frac{\sin\frac{pk\pi}{2p}\cos\frac{(p-1)k\pi}{2p}}{\sin\frac{k\pi}{2p}}-1=\sin k\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\left(k\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2p}\right)}{\sin\frac{k\pi}{2p}}-1=$$
$$=\begin{cases}0, & \text{если } k \text{ нечетно},\\ -1, & \text{если } k \text{ четно}.\end{cases}$$

Отметим еще, что оба числа $m+n$ и $m-n$ будут четны или нечетны одновременно; в частности, если $m+n$ или $m-n$ делится на $2p$, то и $m+n$ и $m-n$ — четные числа. Отсюда вытекает равенство, требуемое условием задачи.

328. Рассмотрим уравнение $x^{2n+1}-1=0$, корни которого:

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4\pi}{2n+1},\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad \cos\frac{4n\pi}{2n+1}+i\sin\frac{4n\pi}{2n+1}.$$

Так как коэффициент при x^{2n} в уравнении равен нулю, то сумма всех этих корней равна нулю:

$$\left[1+\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4\pi n}{2n+1}\right]+$$
$$+i\left[\sin\frac{2\pi}{2n+1}+\sin\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\sin\frac{4n\pi}{2n+1}\right]=0.$$

Следовательно, выражение в каждой скобке равно нулю, откуда, в частности,

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{4n\pi}{2n+1}=-1.$$

Но

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}=\cos\frac{4n\pi}{2n+1},\quad \cos\frac{4\pi}{2n+1}=\cos\frac{(4n-2)\pi}{2n+1},$$

и т. д., значит,

$$2\left[\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}\right]=-1,$$

т. е.

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}.$$

Примечание. Можно также решить эту задачу, исходя из формул задачи 324.

329. а) В силу результата задачи 321б) имеем:

$$\sin(2n+1)\alpha=C_{2n+1}^{1}(1-\sin^2\alpha)^n\sin\alpha-$$
$$-C_{2n+1}^{3}(1-\sin^2\alpha)^{n-1}\sin^3\alpha+\ldots+(-1)^n\sin^{2n+1}\alpha.$$

Отсюда вытекает, что числа $0, \sin\frac{\pi}{2n+1},\ \sin\frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi}{2n+1}$,

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2n+1}\right)=-\sin\frac{\pi}{2n+1},\ \sin\left(-\frac{2\pi}{2n+1}\right)=-\sin\frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \sin\left(-\frac{n\pi}{2n+1}\right)=-\sin\frac{n\pi}{2n+1}$$

являются корнями такого уравнения $(2n+1)$-й степени:

$$C_{2n+1}^{1}(1-x^2)^n x-C_{2n+1}^{3}(1-x^2)^{n-1}x^3+\ldots+(-1)^n x^{2n+1}=0.$$

Следовательно, числа $\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\ \sin^2\frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями уравнения n-степени:

$$C_{2n+1}^{1}(1-x)^n-C_{2n+1}^{3}(1-x)^{n-1}x+\ldots+(-1)^n x^n=0.$$

б) Заменим в формуле задачи 321б) n на $2n+1$ и запишем ее в следующем виде:

$$\sin(2n+1)\alpha=\sin^{2n+1}\alpha\left(C_{2n+1}^{1}\operatorname{ctg}^{2n}\alpha-C_{2n+1}^{3}\operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha+\right.$$
$$\left.+C_{2n+1}^{5}\operatorname{ctg}^{2n-4}\alpha-\ldots\right).$$

Отсюда следует, что при $\alpha=\frac{\pi}{2n+1},\ \frac{2\pi}{2n+1},\ \frac{3\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \frac{n\pi}{2n+1}$ имеет место равенство

$$C_{2n+1}^{1}\operatorname{ctg}^{2n}\alpha-C_{2n+1}^{3}\operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha+C_{2n+1}^{5}\operatorname{ctg}^{2n-4}\alpha-\ldots=0,$$

т. е. что числа $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n+1}\ \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1},\ldots,\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями следующего уравнения n-й степени:

$$C_{2n+1}^1 x^n - C_{2n+1}^3 x^{n-1} + C_{2n+1}^5 x^{n-2} - \ldots = 0.$$

330. а) Сумма корней уравнения n-й степени

$$x^n - \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} x^{n-1} + \frac{C_{2n+1}^5}{C_{2n+1}^1} x^{n-2} - \ldots = 0$$

(см. решение задачи 229 б)) равна коэффициенту при x^{n-1}, взятому с обратным знаком, т. е.

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2 \frac{n\pi}{2n+1} =$$

$$= \frac{C_{2n+1}^3}{C_{2n+1}^1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

б) Так как $\operatorname{cosec}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$, то из формулы задачи а) следует

$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \ldots$$

$$\ldots + \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3} + n = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

331. а) Первое решение. Числа $\sin^2 \frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2 \frac{2\pi}{2n+1}, \ldots$ $\ldots, \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями уравнения n-й степени, полученного в решении задачи 329а). Коэффициент при старшем члене x^n этого уравнения равен $(-1)^n \left[C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n-1} + 1\right]$. Но сумма в квадратных скобках составляет половину от общей суммы биномиальных коэффициентов $1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^{2n} + 1$, равной, как известно, $(1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1}$; следовательно, коэффициент при x^n в нашем уравнении равен $(-1)^n 2^{2n}$. Далее, свободный член этого уравнения есть $C_{2n+1}^1 = 2n+1$. Но произведение корней уравнения n-й степени равно свободному члену приведенного уравнения (уравнения с коэффициентом при старшем члене, равным единице), умноженному на $(-1)^n$, т. е. равно свободному члену, умноженному на $(-1)^n$ и деленному на коэффициент при старшем члене. Отсюда имеем:

$$(-1)^n \sin^2 \frac{\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\pi}{2n+1} \ldots \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1} = (-1)^n \frac{2n+1}{2^{2n}}$$

и, следовательно,

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \sin \frac{2\pi}{2n+1} \ldots \sin \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Второе решение. Корни уравнения $x^{2n}-1=0$ равны

$$1,\quad -1,\quad \cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n},\quad \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos\frac{3\pi}{n}+i\sin\frac{3\pi}{n},\ \ldots,\ \cos\frac{(2n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}.$$

Поэтому имеем:

$$x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\left(x-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}\right)\times$$

$$\times\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\times$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n+1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Но $\cos\frac{(2n-k)\pi}{n}=\cos\frac{k\pi}{n}$, $\sin\frac{(2n-k)\pi}{n}=-\sin\frac{k\pi}{n}$; отсюда следует, что

$$\left(x-\cos\frac{\pi}{n}-i\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1,$$

$$\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{(2n-2)\pi}{n}-i\sin\frac{(2n-2)\pi}{n}\right)=$$

$$=x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1,$$

. . . .

$$\left(x-\cos\frac{(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\times$$

$$\times\left(x-\cos\frac{(n+1)\pi}{n}-i\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right)=x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1.$$

Поэтому разложение многочлена $x^{2n}-1$ на множители можно переписать так:

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\ldots$$

$$\ldots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right).$$

Отсюда

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}=x^{2n-2}+x^{2n-4}+\ldots+x^2+1=$$

$$=\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right).$$

Положив здесь $x=1$ и воспользовавшись тем, что $2-2\cos\alpha=$ $=4\sin^2\frac{\alpha}{2}$, получим:

$$n=4^{n-1}\sin^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n},$$

откуда вытекает, что

$$\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

б) Требуемый результат может быть получен совершенно аналогично первому или второму решению задачи а); однако мы здесь не будем повторять этих решений, а сразу выведем нужные формулы из формул задачи а).

Так как

$$\sin\frac{\pi}{2n+1}=\sin\frac{2n\pi}{2n+1},\quad \sin\frac{3\pi}{2n+1}=\sin\frac{(2n-2)\pi}{2n+1},$$

$$\sin\frac{5\pi}{2n+1}=\sin\frac{(2n-4)\pi}{2n+1},\ \ldots,$$

то

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\sin\frac{6\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

(см. а)). Разделив эту формулу почленно на $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\ldots$ $\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ и воспользовавшись тем, что

$$\sin\frac{2\pi}{2n+1}=2\sin\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{\pi}{2n+1};\quad \sin\frac{4\pi}{2n+1}=$$

$$=2\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \sin\frac{2n\pi}{2n+1}=2\sin\frac{n\pi}{2n+1}\cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

получаем:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}.$$

Аналогично имеем:

$$\left(\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)=$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Но $\sin\frac{\pi}{n}=\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$, $\sin\frac{2\pi}{n}=\sin\frac{(n-2)\pi}{n}$, ..., $\sin\frac{\pi}{2}=1$;

поэтому

при $n=2k+1$ нечетном $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2k+1}\sin\frac{2\pi}{2k+1}\ldots\sin\frac{k\pi}{2k+1}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2k+1}}{2^k}\right)^2=\frac{n}{2^{n-1}};$$

при $n=2k$ четном $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2k}\sin\frac{2\pi}{2k}\ldots\sin\frac{(k-1)\pi}{2k}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{k}}{2^{k-1}}\right)^2=\frac{n}{2^{n-1}}$$

(см. задачу а)). Отсюда получаем:

$$\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{\frac{n}{2^{n-1}}}{\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Примечание. Разделив формулы задач 331а) и б) одну на другую, получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n}\ldots\operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n}=1.$$

Впрочем, второе из этих равенств совершенно очевидно, так как $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{(n-k)\pi}{2n}=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n}\operatorname{ctg}\frac{k\pi}{2n}=1$ при $k=1, 2, \ldots, n-1$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Из этого равенства и второй формулы задачи 331а) можно было бы просто вывести формулу $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=$ $=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Можно также получить эти формулы аналогично первому решению задачи 331а).

332. Покажем, что для любого положительного угла, меньшего $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

Имеем (рис. 39):

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\text{сект }AOB} = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

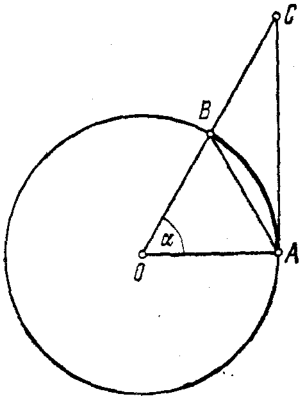


Рис. 39.

(радиус круга принимаем равным единице, углы измеряются в радианах). Но так как $S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект}AOB} < S_{\Delta AOC}$, то $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

Из того, что $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, следует, что $\operatorname{ctg}\alpha < \frac{1}{\alpha} < \operatorname{cosec}\alpha$. Поэтому из формул задач 330а) и б) вытекает:

$$\frac{n(2n-1)}{3} =$$

$$= \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1} <$$

$$< \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{3\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 <$$

$$< \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2n+1} +$$

$$+ \operatorname{cosec}^2\frac{3\pi}{2n+1} + \ldots + \operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

Разделив все члены последнего двойного неравенства на $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}$, будем иметь:

$$\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi^2}{6} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6},$$

что и требовалось доказать.

333. а) Предположим, что точка M взята на дуге A_1A_n окружности (рис. 40). Обозначим дугу MA_1 через α; в таком случае дуги

$MA_2, MA_3, \ldots, MA_n$ соответственно равны

$$\alpha+\frac{2\pi}{n},\quad \alpha+\frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \alpha+\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Но длина хорды AB окружности радиуса R равна $2R\sin\frac{\breve{AB}}{2}$ (это можно легко усмотреть из равнобедренного треугольника AOB,

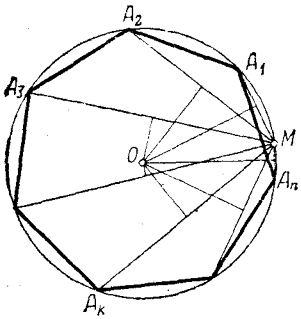


Рис. 40.

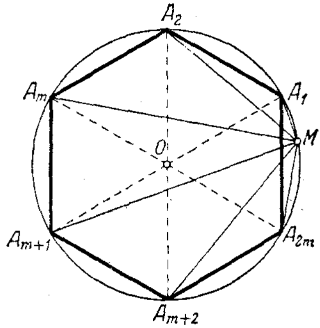
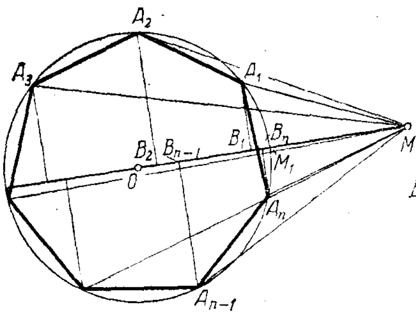
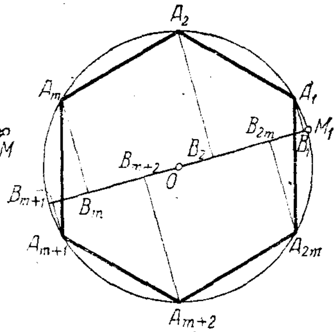


Рис. 41.



а)



б)

Рис. 42.

где O — центр окружности). Отсюда видно, что интересующая нас сумма равна

$$4R^2\left[\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

известной формулой $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, получим, что это выражение равно

$$S = \frac{n}{2} - \left[\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$$

Но по формуле задачи 324 имеем:

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) =$$
$$= \frac{\sin\pi\cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}} = 0,$$

следовательно, $S = \frac{n}{2}$. Отсюда и вытекает утверждение задачи.

Примечание. При $n = 2m$ четном (рис. 41) утверждение задачи является очевидным, так как, в силу теоремы Пифагора,

$$MA_1^2 + MA_{m+1}^2 = MA_2^2 + MA_{m+2}^2 = \ldots = MA_m^2 + MA_{2m}^2 = 4R^2.$$

б) Пусть A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n — перпендикуляры, опущенные из точек A_1, A_2, ..., A_n на прямую OM (рис. 42, a). В таком случае по известной теореме имеем:

$$MA_k^2 = MO^2 + OA_k^2 - 2MO\cdot OB_k = l^2 + R^2 - 2l\cdot OB_k$$

($k = 1, 2, \ldots, n$), где отрезки OB_k берутся со знаками + или — в зависимости от того, расположена ли точка B_k на луче OM или вне его. Следовательно,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 =$$
$$= n(l^2 + R^2) - 2l(OB_1 + OB_2 + \ldots + OB_n).$$

Но если $\angle MOA_1 = \alpha$, то

$$OB_1 = OA_1\cos\angle A_1OM = R\cos\alpha, \quad OB_2 = R\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right),$$

$$OB_3 = R\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right), \quad \ldots, \quad OB_n = R\cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

А так как в решении задачи а) было показано, что

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0,$$

то $OB_1 + OB_2 + \ldots + OB_n = 0$; отсюда и вытекает утверждение задачи.

Примечание. При $n = 2m$ четном (рис. 42, *б*), утверждение задачи доказывается геометрически: в этом случае $OB_1 + OB_{m+1} = OB_2 + OB_{m+2} = OB_m + OB_{2m} = 0$.

в) Пусть M_1 — проекция точки M на плоскость n-угольника (рис. 43). В таком случае имеем $MA_k^2 = M_1A_k^2 + MM_1^2$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) и, следовательно,

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \ldots + MA_n^2 =$$
$$= M_1A_1^2 + M_1A_2^2 + \ldots + M_1A_n^2 + n \cdot MM_1^2.$$

Но $M_1A_1^2 + M_1A_2^2 + \ldots + M_1A_n^2 = n\left(R^2 + OM_1^2\right)$ (см. задачу б)) и $l^2 = OM^2 = OM_1^2 + M_1M^2$. Отсюда и вытекает утверждение задачи.

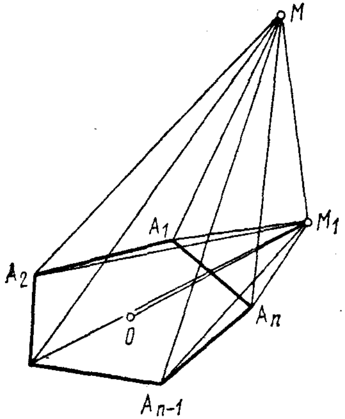


Рис. 43.

334. а) Утверждение задачи сразу следует из теоремы задачи 333а), если учесть, что при n четном четные (и нечетные) вершины n-угольника сами служат вершинами вписанных в окружность правильных $\frac{n}{2}$-угольников.

б) Пусть $n = 2m + 1$. Из решения задачи 333а) выводим, что достаточно доказать равенство между собой следующих сумм:

$$S_1 = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\pi}{2m+1}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{4\pi}{2m+1}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2m\pi}{2m+1}\right)$$

$$S_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2m+1}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{2m+1}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{(2m-1)\pi}{2m+1}\right).$$

Но, согласно задаче 324, имеем:

$$S_1 = \frac{\sin\frac{(m+1)\pi}{2m+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{m\pi}{2m+1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2m+1}},$$

$$S_2 = \frac{\sin\frac{m\pi}{2m+1}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2m+1} + \frac{(m-1)\pi}{2m+1}\right)}{\sin\frac{\pi}{2m+1}} = S_1,$$

что и доказывает теорему.

335. а) В силу задачи 333 а) сумма квадратов расстояний от точки окружности, описанной около правильного n-угольника, до всех его вершин равна $2nR^2$. Предполагая, что M совпадает с A_1, получаем, что сумма всех сторон и диагоналей n-угольника, выходящих из одной вершины, равна $2nR^2$. Если умножить эту сумму на n (число вершин n-угольника), то мы получим удвоенную сумму всех сторон и диагоналей n-угольника (так как каждая сторона или диагональ имеет два конца, то она будет фигурировать в такой сумме дважды). Отсюда искомая сумма равна $\frac{n}{2}\cdot 2nR^2 = n^2R^2$.

б) Сумма всех сторон и диагоналей правильного многоугольника, выходящих из одной вершины A_1, равна

$$2R\left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right] =$$

$$= 2R\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2R\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

(ср. задачу 334б)). Умножая эту сумму на n и деля пополам, получаем требуемый результат: $Rn\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$.

в) Произведение всех сторон и всех диагоналей n-угольника, выходящих из одной вершины, очевидно, равно

$$2^{n-1}R^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1}R^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

(см. задачу 331а)). Возводя это произведение в n-ю степень и извлекая затем квадратный корень, получаем требуемый результат.

336. Вычислим сумму 50-х степеней всех сторон и всех диагоналей 100-угольника, выходящих из одной вершины A_1. Задача сводится к нахождению суммы

$$\Sigma = \left(2R\sin\frac{\pi}{100}\right)^{50} + \left(2R\sin\frac{2\pi}{100}\right)^{50} + \ldots + \left(2R\sin\frac{99\pi}{100}\right)^{50}$$

(сравните с решением задачи 333а)). Таким образом, нам надо суммировать 50-е степени синусов некоторых углов. Но

$$\sin^{50}\alpha = \left(\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha) - (\cos\alpha - i\sin\alpha)}{2i}\right)^{50} =$$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^{50}}{-2^{50}} = -\frac{1}{2^{50}}\left(x - \frac{1}{x}\right)^{50},$$

где обозначено $\cos\alpha + i\sin\alpha = x$; в таком случае $\cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{x}$. Следовательно,

$$\sin^{50}\alpha = \frac{-1}{2^{50}}\left(x^{50} - C_{50}^{1}x^{49}\frac{1}{x} + C_{50}^{2}x^{48}\frac{1}{x^2} + \ldots + C_{50}^{24}x^{26}\frac{1}{x^{24}} - \right.$$

$$\left. - C_{50}^{25}x^{25}\frac{1}{x^{25}} + C_{50}^{26}x^{24}\frac{1}{x^{26}} + \ldots + C_{50}^{48}x^{2}\frac{1}{x^{48}} - C_{50}^{49}x\frac{1}{x^{49}} + \frac{1}{x^{50}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2^{50}}\left[\left(x^{50} + \frac{1}{x^{50}}\right) - C_{50}^{1}\left(x^{48} + \frac{1}{x^{48}}\right) + C_{50}^{2}\left(x^{46} + \frac{1}{x^{46}}\right) - \ldots\right.$$

$$\left. \ldots + C_{50}^{24}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - C_{50}^{25}\right] = -\frac{1}{2^{50}}\left(2\cos 50\alpha - \right.$$

$$\left. - 2C_{50}^{1}\cos 48\alpha + 2C_{50}^{2}\cos 46\alpha - \ldots + 2C_{50}^{24}\cos 2\alpha + C_{50}^{25}\right)$$

[здесь использовано то, что $x^k + \frac{1}{x^k} = (\cos k\alpha + i\sin k\alpha) + (\cos k\alpha - i\sin k\alpha) = 2\cos k\alpha$].

Итак, сумма Σ может быть переписана следующим образом:

$$\Sigma = -R^{50}\left[2\left(\cos 50\frac{\pi}{100} + \cos 50\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 50\frac{99\pi}{100}\right) - \right.$$

$$- 2C_{50}^{1}\left(\cos 48\frac{\pi}{100} + \cos 48\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 48\frac{99\pi}{100}\right) +$$

$$+ 2C_{50}^{2}\left(\cos 46\frac{\pi}{100} + \cos 46\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 46\frac{99\pi}{100}\right) -$$

. . . .

$$\left. + 2C_{50}^{24}\left(\cos 2\frac{\pi}{100} + \cos 2\frac{2\pi}{100} + \ldots + \cos 2\frac{99\pi}{100}\right) - 99C_{50}^{25}\right] =$$

$$= -R^{50}\left[2s_1 - 2C_{50}^{1}s_2 + 2C_{50}^{2}s_3 - \ldots + 2C_{50}^{24}s_{25} - 99C_{50}^{25}\right],$$

где через $s_1, s_2, \ldots, s_{25}$ обозначены суммы, стоящие в круглых скобках. Но из формулы задачи 324 сразу следует, что $s_1 = s_2 = \ldots = s_{25} = -1$. Следовательно, имеем:

$$\sum = R^{50}\left(2 - 2C_{50}^1 + 2C_{50}^2 - \ldots + 2C_{50}^{24} + 99C_{50}^{25}\right) =$$

$$= R^{50}\left(1 - C_{50}^1 + C_{50}^2 - C_{50}^3 + \ldots + C_{50}^{24} - C_{50}^{25} + C_{50}^{26} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + C_{50}^{48} - C_{50}^{49} + 1 + 100C_{50}^{25}\right) =$$

$$= R^{50}\left[(1-1)^{500} + 100C_{50}^{25}\right] = 100C_{50}^{25}R^{50}.$$

Отсюда сразу получаем, что сумма 50-х степеней всех сторон и всех диагоналей 100-угольника равна

$$\frac{100\Sigma}{2} = 5000C_{50}^{25}R^{50} = \frac{5000\cdot 50!}{(25!)^2}R^{50}.$$

337. Так как $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$ и $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|-z - \frac{1}{z}\right| = \left|-\bar{z} - \frac{1}{\bar{z}}\right|$, то достаточно рассмотреть лишь то из чисел $z, \bar{z}, -z$ и $-\bar{z}$, которое *лежит в первой четверти*. Если $|z|$ достигает наибольшего возможного значения, то $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ — наименьшего. Поэтому достаточно найти те z, модуль которых является *наибольшим* возможным; при этом $|z| \geqslant \left|\frac{1}{z}\right|$. Пусть аргумент φ числа z нам задан; $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда из рис. 44 имеем (напомним, что $\left|z + \frac{1}{z}\right| = a$; ниже обозначено $|z| = r$):

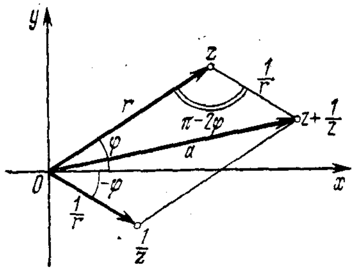


Рис. 44.

$$a^2 = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2\cos 2\varphi =$$

$$= r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 + 4\cos^2\varphi =$$

$$= \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 + 4\cos^2\varphi.$$

Так как, согласно нашему предположению, $r \geqslant \frac{1}{r}$, то с ростом r растет и разность $r - \frac{1}{r}$, и наоборот. Но $\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = a^2 - 4\cos^2\varphi \leqslant \leqslant a^2$; при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем $\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = a^2$. При этом $r - \frac{1}{r} = a$, $r = = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4})$.

Соответственно этому наибольшее значение $|z| = \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$ достигается при $z = \frac{i}{2}(a+\sqrt{a^2+4})$, а наименьшее $|z| = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)$ — при $z = -\frac{i}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)$.

338. Ясно, что три комплексных числа $1\ (=1+i\cdot 0=\cos 0+i\sin 0)$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $(=\cos\ 120°+i\ \sin\ 120°)$ и $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ $(=\cos(-120°)+i\sin(-120°))$ таковы, что аргументы каждых двух из них разнятся в точности на 120°, а сумма всех чисел равна нулю — поэтому заменить в условии задачи величину 120° большей заведомо *невозможно*. Пусть теперь $|\theta_i-\theta_j|<120°$, где $i, j=1, 2, \ldots, n$ и $i\neq j$ (здесь $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — аргументы наших комплексных чисел; ясно, что если одно из этих чисел равно нулю и, следовательно, не имеет однозначно определенного аргумента, то это число можно просто откинуть); докажем, что в этом случае равенство $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$ иметь места *не может*. В самом деле, из сделанного предположения вытекает, что отвечающие комплексным числам $z_1, z_2, \ldots, z_n$ точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ комплексной плоскости с полярными координатами $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), \ldots, (r_n, \theta_n)$ принадлежат некоторому меньшему 120° углу POQ, ограниченному лучами $\theta=\theta_k$ и $\theta=\theta_l$, где A_k и A_l — «крайние» из наших точек,

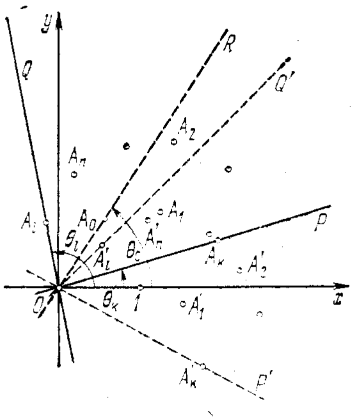


Рис. 45.

т. е. отвечающие числам z_k и z_l с «крайними» значениями аргументов (рис. 45). Пусть луч OR, отвечающий значению $\theta=\theta_0$ полярного угла,— это *биссектриса* $\angle POQ$, а $z_0=\cos\theta_0+i\sin\theta_0$ — комплексное число единичного модуля, изображаемое точкой A_0 этого луча. Так как числа $z_1'=\frac{z_1}{z_0}$ $[r_1\cos(\theta-\theta_0)+i\sin(\theta-\theta_0)]$, $z_2'=\frac{z_2}{z_0}, \ldots, z_n'=\frac{z_n}{z_0}$ имеют те же модули $r_1, r_2, \ldots, r_n$, что и числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, но аргументы $\theta_1-\theta_0, \theta_2-\theta_0, \ldots, \theta_n-\theta_0$ вместо аргументов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то отвечающие числам $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ точки $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ комплексной плоскости получаются из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ поворотом вокруг O на угол θ_0 по часовой стрелке. Но отсюда следует, что все эти точки принадлежат полученному из POQ указанным поворотом углу $P'OQ'<120°$, биссектриса OR' которого совпадает с осью Ox вещественных чисел. А отсюда, в свою очередь, вытекает, что вещественные части $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ чисел $z_1'=a_1'+ib_1'$, $z_2'=a_2'+ib_2'$, ...

..., $z'_n = a'_n + ib'_n$ все *положительны*; поэтому сумма

$$z'_1 + z'_2 + \ldots + z'_n = (a'_1 + ib'_1) + (a'_2 + ib'_2) + \ldots + (a'_n + ib'_n) =$$
$$= (a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n) + i(b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_n)$$

никак не может равняться нулю (ибо $a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n > 0$). Но из того, что

$$z'_1 + z'_2 + \ldots + z'_n = \frac{z_1}{z_0} + \frac{z_2}{z_0} + \ldots + \frac{z_n}{z_0} =$$
$$= (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \cdot \frac{1}{z_0} \neq 0,$$

следует, что также и $z_1 + z_2 + \ldots + z_n \neq 0$.

339. Предположим, что отвечающая комплексному числу z точка A комплексной плоскости не принадлежит выпуклому многоугольнику $C_1C_2 \ldots C_n$, вершины которого отвечают числам $c_1, c_2, \ldots, c_n$

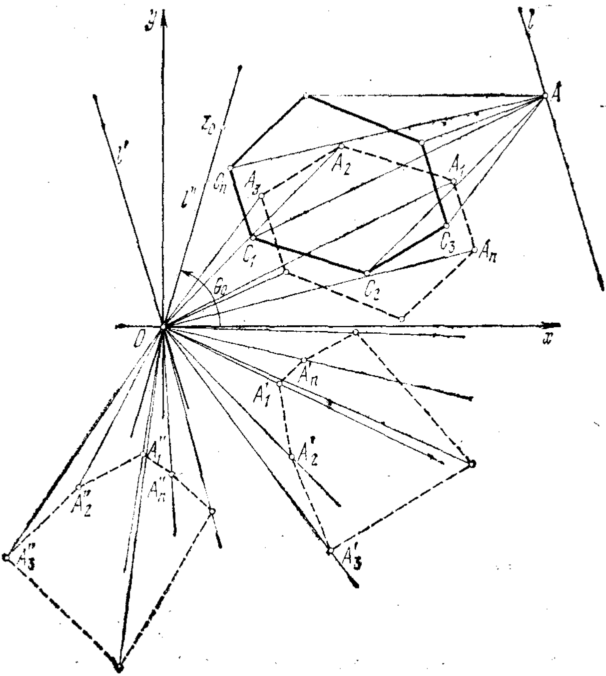


Рис. 46.

(рис. 46). В этом случае все лучи $AC_1, AC_2, \ldots, AC_n$ «направлены в одну сторону» в том смысле, что все эти лучи лежат по одну сторону от некоторой прямой l, проходящей через A. Заметим теперь, что, в силу правила вычитания комплексных чисел, числам $z_1 = z - c_1$, $z_2 = z - c_2$, ..., $z_n = z - c_n$ отвечают на комплексной плоскости такие точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что векторы $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \ldots, \overline{OA_n}$ равны векторам $\overline{C_1A}, \overline{C_2A}, \ldots, \overline{C_nA}$; поэтому все лучи OA_1, OA_2, ..., OA_n лежат по одну сторону от проходящей через O прямой $l'\|l$. С другой стороны, если $w' = \frac{1}{w}$, то при $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ имеем $w' = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$, т. е. числа ω и ω' изображаются такими точками B и B' комплексной плоскости, что лучи OB и OB' симметричны относительно оси Ox вещественных чисел. Отсюда следует, что числам $z_1' = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z - c_1}$, $z_2' = \frac{1}{z_2}$, ..., $z_n' = \frac{1}{z_n}$ отвечают такие точки $A_1', A_2', \ldots, A_n'$, что лучи $OA_1', OA_2', \ldots, OA_n'$ симметричны лучам $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ относительно оси Ox, откуда следует, что все эти лучи лежат по одну сторону от прямой l'', симметричной l' относительно оси Ox (см. тот же рис. 46).

Дальнейшая часть доказательства близка к решению задачи 338. Если $z_0 = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0$ — комплексное число модуля 1, изображаемое точкой прямой l'', то числа $z_1'' = \frac{z_1'}{z_0}$, $z_2'' = \frac{z_2'}{z_0}$, ..., $z_n'' = \frac{z_n'}{z_0}$, изображаются точками $A_1'', A_2'', \ldots, A_n''$, получаемыми из точек A_1', A_2', ..., A_n' поворотом вокруг O на угол θ_0; поэтому все они лежат по одну сторону от оси Ox, получаемой тем же поворотом из прямой l''. Но отсюда следует, что коэффициенты $b_1'', b_2'', \ldots, b_n''$ при мнимых частях чисел $z_1'' = a_1'' + ib_1''$, $z_2'' = a_2'' + ib_2''$, ..., $z_n'' = a_n'' + ib_n''$ все одного знака — и, значит,

$$z_1'' + z_2'' + \ldots + z_n'' = (a_1'' + a_2'' + \ldots + a_n'') + i(b_1'' + b_2'' + \ldots + b_n'') \neq 0,$$

ибо $b_1'' + b_2'' + \ldots + b_n'' \neq 0$. А из того, что

$$z_1'' + z_2'' + \ldots + z_n'' = \frac{z_1'}{z_0} + \frac{z_2'}{z_0} + \ldots + \frac{z_n'}{z_0} = (z_1' + z_2' + \ldots + z_n')\cdot\frac{1}{z_0} \neq 0,$$

вытекает, что также и

$$z_1' + z_2' + \ldots + z_n' = \frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \ldots + \frac{1}{z - c_n} \neq 0.$$

340. Первое решение. Пусть a не делится на p. В таком случае числа a, $2a$, $3a$, ..., $(p-1)a$ тоже не будут делиться на p и все будут давать при делении на p *разные* остатки: действительно, если бы ka и la (где $p - 1 \geqslant k > l$) давали бы при делении на p одинаковые остатки, то разность $ka - la = (k - l)a$ делилась бы на p, что невозможно, так как p простое, a не делится на p и $k - l$ меньше p. Но все возможные остатки при делении на p исчерпываются $p-1$ числами $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Таким образом, должно быть:

$$a = q_1p + a_1,\ 2a = q_2p + a_2,\ 3a = q_3p + a_3,\ \ldots,\ (p-1)a = \\ = q_{p-1}p + a_{p-1},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ — числа $1, 2, \ldots, p-1$, взятые в каком-то порядке. Перемножая все эти равенства, получим:

$$[1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (p-1)]a^{p-1} = Np + a_1a_2\ldots a_{p-1},$$

или

$$[1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (p-1)](a^{p-1}-1) = Np.$$

Отсюда следует, что $a^{p-1}-1$ делится на p, а значит, и a^p-a делится на p.

Если a делится на p, то утверждение теоремы Ферма является очевидным.

Второе решение. Теорема является очевидной при $a=1$, так как в этом случае $a^p - a = 1 - 1 = 0$ делится на любое число Будем теперь доказывать ее методом математической индукции, т. е. предположим, что нам уже известно, что $a^p - a$ делится на p, и докажем, что в этом случае $(a+1)^p-(a+1)$ делится на p.

По формуле бинома Ньютона

$$(a+1)^p-(a+1) = \\ = a^p + pa^{p-1} + C_p^2a^{p-2} + C_p^3a^{p-3} + \ldots + pa + 1 - a - 1 = \\ = (a^p - a) + pa^{p-1} + C_p^2a^{p-2} + \ldots + C_p^{p-2}a^2 + pa.$$

Но все биномиальные коэффициенты

$$C_p^k = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

делятся на простое число p, так как числитель выписанного выражения содержит множитель p, а знаменатель не содержит этого множителя. А так как, по предположению, и a^p-a делится на p, то $(a+1)^p-(a+1)$ делится на p.

Примечание. Приведем еще один изящный вариант того же самого доказательства. В силу того, что все биноминальные коэффициенты C_p^k делятся на p, разность

$$(A+B)^p - A^p - B^p = \\ = pA^{p-1}B + C_p^2A^{p-2}B^2 + \ldots + C_p^{p-2}A^2B^{p-2} + pAB^{p-2},$$

где A, B — какие угодно целые числа, всегда делится на p. Последовательным применением этого результата получаем, что

$$(A+B+C)^p - A^p - B^p - C^p = \\ = \{[(A+B)+C]^p - (A+B)^p - C^p\} + (A+B)^p - A^p - B^p$$

всегда делится на p,

$$(A+B+C+D)^p - A^p - B^p - C^p - D^p = \{[(A+B+C)+D]^p - \\ -(A+B+C)^p - D^p\} + (A+B+C)^p - A^p - B^p - C^p$$

всегда делится на p и вообще

$$(A+B+C+\ldots+K)^p-A^p-B^p-C^p-\ldots-K^p$$

всегда делится на p.

Положив теперь в последнем соотношении $A=B=C=\ldots$ $\ldots=K=1$ и взяв число этих чисел равным a, мы придем к теореме Ферма: a^p-a делится на p.

341. Доказательство теоремы Эйлера совершенно аналогично первому доказательству теоремы Ферма; r чисел, меньших N и взаимно простых с N, мы обозначим через $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r$. Рассмотрим r чисел $k_1a, k_2a, \ldots, k_ra$. Все они взаимно просты с N (ибо a взаимно просто с N по условию задачи), и все они дают при делении на N различные остатки (это доказывается в точности так же, как в решении задачи 340). Отсюда следует, что

$$k_1a=q_1N+a_1,\ k_2a=q_2N+a_2,\ \ldots,\ k_ra=q_rN+a_r,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — это те же числа $k_1, k_2, \ldots, k_r$, только расположенные в другом порядке. Перемножив все наши равенства, получим:

$$k_1k_2\ldots k_ra^r=MN+a_1a_2\ldots a_r,\quad k_1k_2\ldots k_r(a^r-1)=MN,$$

откуда и следует, что число a^r-1 делится на N.

342. Доказательство проведем методом математической индукции. Прежде всего очевидно, что при $n=1$ предложение задачи справедливо: $2^1-1=1$, $2^2-1=3$ и $2^3-1=7$ не делятся на 5. Докажем еще это предложение для $n=2$. Пусть 2^k есть наименьшая степень числа 2, дающая при делении на $5^2=25$ остаток 1 (т. е. такая, что 2^k-1 делится на 25); предположим, что $k<5^2-$ $-5=25-5=20$. Если 20 не делится на k, так что $20=qk+$ $+r$, где $r<k$, то мы будем иметь:

$$2^{20}-1=2^{qk+r}-1=2^r(2^{qk}-1)+(2^r-1).$$

Но $2^{20}-1$ делится на 25, в силу теоремы Эйлера, а $2^{qk}-1=$ $=(2^k)^q-1^q$ делится на 2^k-1, т. е., в силу нашего предположения, тоже делится на 25; следовательно, и 2^r-1, делится на 25, что противоречит тому, что k есть наименьшее число, для которого 2^k-1 делится на 25. Итак, k должно быть делителем числа 20, т. е. может равняться только 2, 4, 5 или 10. Но $2^2-1=3$, $2^5-1=31$ и $2^{10}-1=1023$ не делятся даже на 5, а $2^4-1=15$ делится на 5, но не делится на 25. Значит, действительно и для $n=2$ предложение задачи справедливо.

Предположим теперь, что для какого-то n предложение задачи справедливо, а для значения $n+1$ оно неверно: наименьшее k, такое, что 2^k-1 делится на 5^{n+1}, меньше чем $5^{n+1}-5^n=4\cdot5^n$. В точности, как выше (для $n=2$), доказывается, что k должно являться делителем числа $4\cdot5^n$. С другой стороны, аналогично доказывается, что число $5^n-5^{n-1}=4\cdot5^{n-1}$ должно являться делителем числа k: если бы было $k=q\cdot4\cdot5^{n-1}+r$, где $r<4\cdot5^{n-1}$, то число 5^r-1 делилось бы на 5^n, что противоречит предположению о справедливости утверждения задачи для числа n. Таким образом, для k остается единственное возможное значение, а именно: $k=$ $=4\cdot5^{n-1}$.

Так как число $2^{5^{n-1}-5^{n-2}}-1=2^{4\cdot5^{n-2}}-1$ делится на 5^{n-1} (в силу теоремы Эйлера) и не делится на 5^n (иначе предложение задачи не было бы справедливо для числа n), то $2^{4\cdot 5^{n-2}}=q\cdot 5^{n-1}+$ $+1$, где q не делится на 5. Воспользовавшись теперь формулой

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$

получим:

$$2^{4\cdot 5^{n-1}}-1=(2^{4\cdot 5^{n-2}})^5-1=(q\cdot 5^{n-1}+1)^5-1=$$
$$=5^{n+1}(q^5\cdot 5^{4n-6}+q^4\cdot 5^{3n-4}+2q^3\cdot 5^{2n-3}+2q^2\cdot 5^{n-2})+q\cdot 5^n,$$

откуда видно,что $2^{4\cdot 5^{n-1}}-1$ не делится на 5^{n+1}. Итак, действительно, из справедливости предложения задачи для какого-то n следует справедливость его и для $n+1$.

343. По теореме Эйлера (см. задачу 341) число $2^{5^{10}-5^9}-1=$ $=2^{4\cdot 5^9}-1=2^{7\,812\,500}-1$ делится на 5^{10}; следовательно, при $n\geqslant$ $\geqslant 10$ разность $2^{7\,812\,500+n}-2^n=2^n(2^{7\,812\,500}-1)$ делится на 10^{10}, т. е. последние 10 цифр чисел $2^{7\,812\,500+n}$ и 2^n совпадают. Это означает, что последние 10 цифр чисел ряда $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$ повторяются через каждые 7 812 500 чисел, причем эта периодичность начинается с десятого числа этого ряда — с числа 2^{10}.

То, что период на самом деле не меньше чем 7 812 500, следует из результата задачи 342.

Примечание. Аналогично доказывается, что последние n цифр чисел рассматриваемого ряда повторяются через каждые $4\cdot 5^{n-1}$ чисел, начиная с n-го числа этого ряда (так, например, последние две цифры повторяются, начиная со второго числа, через каждые 20 чисел).

344. Докажем даже более общее предложение, а именно, что *каково бы ни было целое число N, всегда найдется такая степень числа 2, последние N цифр которой все будут единицами и двойками.* Так как $2^5=32$ и $2^9=512$, то при $N=1$ и $N=2$ это утверждение справедливо. Далее доказательство мы проведем при помощи метода математической индукции. Предположим, что последние N цифр числа 2^n являются единицами и двойками, и докажем, что в таком случае найдется степень числа 2, последние $N+1$ цифр которой являются единицами и двойками. Согласно сделанному предположению $2^n=10^Na+b$, где b есть N-значное число, записываемое с помощью двух цифр: 1 и 2. Обозначим число $5^N-5^{N-1}=4\cdot 5^{N-1}$ буквой r; тогда согласно теореме Эйлера (задача 341) разность 2^r-1 будет делиться на 5^N. Отсюда вытекает, что если целое число k делится на 2^{N+1}, то разность $2^rk-k=$ $=k(2^r-1)$ будет делиться на $2\cdot 10^N$, т. е. N последних цифр чисел 2^rk и k будут совпадать, а $(N+1)$-е с конца цифры этих чисел будут одинаковой четности.

Рассмотрим теперь следующие пять степеней числа 2:

$$2^n,\ 2^{n+r}=2^r\cdot 2^n,\ 2^{n+2r}=2^r\cdot 2^{n+r},\ 2^{n+3r}=2^r\cdot 2^{n+2r},$$
$$2^{n+4r}=2^r\cdot 2^{n+3r}.$$

Согласно доказанному последние N цифр всех этих чисел совпадают между собой (т. е. все они оканчиваются тем же числом b, составленным из двоек и единиц, что и число 2^n), а $(N+1)$-е с конца цифры у всех у них одновременно четны или нечетны. Докажем теперь, что ни у каких двух из этих пяти чисел $(N+1)$-е с конца цифры не могут быть одинаковыми Действительно, разность любых двух из наших чисел представима в виде $2^{n+m_1 r}(2^{m_2 r}-1)$ где $m_1 = 0, 1, 2$ или 3, а $m_2 = 1, 2, 3$ или 4. Если бы эта разность делилась на 10^{N+1}, то число $2^{m_2 r}-1$ должно было бы делиться на 5^{N+1}; но так как

$$m_2 r = m_2 \cdot (5^N - 5^{N-1}) < 5 \cdot (5^N - 5^{N-1}) = 5^{N+1} - 5^N,$$

то это противоречит результату задачи 342.

Итак, $(N+1)$-е с конца цифры выписанных пяти чисел — это или 1, 3, 5, 7 и 9 (в каком-то неизвестном нам порядке) или же 0, 2, 4, 6 и 8. В обоих случаях хотя бы для одного из этих чисел $(N+1)$-я с конца цифра равна 1 или 2. Значит, во всех случаях существует степень числа 2, последние $N+1$ цифр которой все являются единицами и двойками; в силу принципа математической индукции отсюда следует требуемое предложение.

345. Ясно, что пара натуральных чисел n и n^2 является «хорошей» при любом $n > 1$. С другой стороны, пара чисел $n-1$ и $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ наверное будет «хорошей», если число $n+1$ представляет собой *целую степень двойки,* т. е. $n+1 = 2^k$, где $k \geqslant 1$ — целое число: в самом деле, в таком случае числа

$$n-1 \text{ и } n^2-1 = 2^k(n-1)$$

отличаются лишь тем, что во второе из них простой делитель 2 входит в степени, на k большей, чем в первое (число $n-1$ содержит простой делитель 2, ибо при $n+1 = 2^k$, т. е. при $n = 2^k-1$, также и число $n-1 = 2^k-2$ является четным). Отсюда уже вытекает бесконечность числа «очень хороших» пар: ведь такими являются, например, все пары чисел

$$n-1 = 2^k-2 \text{ и } n^2-1 = (n-1)(n+1) = 2^k(2^k-2),$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

346. Ясно, что начальный член a и разность d прогрессии можно считать числами взаимно простыми: ведь если бы и a, и d делились на какое-то число $k > 1$, то мы просто сократили бы все члены прогрессии на k. Если же a и d взаимно просты, то в силу теоремы Эйлера (задача 341) найдется такое целое число r, что a^r-1, а следовательно, и $a^{r+1}-a$ делятся на d. Но в таком случае $a^{r+1}-a = Nd$, т. е. $a^{r+1} = a+Nd$, где N — натуральное число, т. е. число a^{r+1} принадлежит нашей арифметической прогрессии. Более того, в таком случае также и все числа a^{rk+1}, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, принадлежат прогрессии, поскольку $a^{rk}-1 = (a^r-1)(a^{r(k-1)}+a^{r(k-2)}+\ldots+1)$ делится на a^r-1, т. е. делится на d; следовательно, и $a^{rk+1}-a = Md$ делится на d и $a^{rk+1} = a+Md$ есть $(M+1)$-й член прогрессии. Ясно, что числа $a, a^{r+1}, a^{2r+1}, a^{3r+1}, \ldots$ разлагаются на одинаковые простые множители (в разных степенях), что и завершает доказательство утверждения задачи.

347. Пусть a — какое-нибудь из чисел ряда $2, 3, \ldots, p-2$. Рассмотрим числа

$$a, 2a, \ldots, (p-1)a.$$

Никакие два из этих чисел не могут давать одинаковых остатков при делении на p; следовательно, эти числа дают при делении на p остатки $1, 2, \ldots, p-1$ и притом каждый из этих остатков получается только один раз (ср. с решением задачи 340). В частности, найдется такое целое число b из ряда $1, 2, \ldots, p-1$, что ba при делении на p дает остаток 1. При этом $b \neq 1$ и $b \neq p-1$, ибо $2 \leqslant a \leqslant p-2$; следовательно, при $b=1$ число $ba=a$ при делении на p дает остаток $a \neq 1$, а при $b=p-1$ число $ba = (p-1)a = pa - a$ при делении на p дает остаток $p-a \neq 1$. Кроме того, $b \neq a$, так как если бы a^2 при делении на p давало остаток 1, то $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ делилось бы на p, что возможно только при $a=1$ и $a=p-1$. Следовательно, $2 \leqslant b \leqslant p-2$ и $b \neq a$, т. е. все числа $2, 3, \ldots, p-2$ распадаются на пары чисел, произведение которых при делении на p дает остаток 1.

Произведение $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2)$, содержащее $\frac{p-3}{2}$ таких пар чисел, тоже дает при делении на p остаток 1. Число $p-1$ при делении на p дает остаток -1. Следовательно, $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) \cdot (p-1) = [2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2)] \cdot (p-1)$ при делении на p дает остаток -1, т. е. $(p-1)! = kp - 1$; $(p-1)! + 1 = kp$. Таким образом, $(p-1)!+1$ делится на p.

Если p — непростое, то оно имеет простой делитель $q < p$. Тогда $(p-1)!$ делится на q; поэтому $(p-1)!+1$ не делится на q и, значит, не может делиться также и на p.

348. а) Если $p=2$, то $p = 1^2 + 0^2 + 1$. Пусть теперь простое число p нечетно; покажем, что можно найти два числа x и y, *оба меньших чем* $\frac{p}{2}$, удовлетворяющих условию задачи.

Рассмотрим $\frac{p+1}{2}$ чисел $0, 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Квадраты любых двух из этих чисел будут давать при делении на p различные остатки; действительно, если было бы

$$x_1^2 = k_1 p + r \text{ и } x_2^2 = k_2 p + r,$$

то имело бы место равенство

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (k_1 - k_2) p,$$

т. е. $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ делилось бы на p, что невозможно, так как $x_1 < \frac{p}{2}$, $x_2 < \frac{p}{2}$ и $x_1 + x_2 < p$, $|x_1 - x_2| < p$ (напоминаем, что p — простое). Итак, $\frac{p+1}{2}$ чисел

$$0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

при делении на p дают $\frac{p+1}{2}$ различных остатков. Отсюда вытекает, что и следующие $\frac{p+1}{2}$ (отрицательных!) чисел: -1, -1^2-1, $-2^2-1, \ldots, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1$ также при делении на p дают $\frac{p+1}{2}$ различных остатков (если бы $-x_1^2 - 1$ и $-x_2^2 - 1$ давали одинаковые остатки, то и x_1^2 и x_2^2 давали бы одинаковые остатки)[1]. Но так как при делении на p могут встречаться лишь p различных остатков (а именно, 0, 1, 2, ..., $p-1$), то ясно, что из $p+1$ чисел $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2, -1, -1^2-1, -2^2-1, \ldots, -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-1$ по крайней мере два дают при делении на p одинаковые остатки. В силу доказанного выше из такой пары чисел одно обязательно должно быть вида x^2, а второе — вида $-y^2-1$. Но если $x^2 = kp+r$ и $-y^2-1 = lp+r$, то

$$x^2+y^2 = (k-l)p-1 = mp-1,$$

т. е. $x^2+y^2+1 = mp$ делится на p.

Примечание. В условии задачи можно требовать даже, чтобы оба искомых числа x и y не превосходили $\frac{p}{2}$, т. е. чтобы сумма x^2+y^2+1 была меньше p^2, и, значит, частное m от деления суммы x^2+y^2+1 на p было меньше p.

б) Пусть $p = 4n+1$ — простое число. В силу теоремы Вильсона (задача 347) число

$$(p-1)!+1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (4n)+1$$

делится на p. Заменим теперь в последнем выражении все множители большие $\frac{p-1}{2} = 2n$, через разности числа p и чисел меньших $\frac{p-1}{2}$:

$$(p-1)!+1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n(p-2n)(p-2n+1)\cdot\ldots\times$$
$$\times(p-1)+1 = (1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n)[Ap+(-1)^{2n}2n\times$$
$$\times(2n-1)\cdot\ldots\cdot 1]+1 = A_1p+(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n)^2+1.$$

Так как это число делится на p, то и сумма $((2n)!)^2+1$ делится на p. Итак, условию задачи удовлетворяет число $x = (2n)! = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$.

Примечание. Заметим, что если число x дает при делении на p остаток x_1, то из того, что $x^2+1 = (kp+x_1)^2+1 = (k^2p+2kx_1)p+x+1$ делится на p, следует, что и x_1^2+1 делится на p. Поэтому в условии задачи можно всегда считать, что число x меньше p, x^2+1 меньше p^2 и частное m от деления x^2+1 на p меньше p.

---

[1]) Частное k и остаток r от деления целого числа a на число p определяются формулой $a = kp+r$, где $0 \leqslant r < p$ (если a отрицательно, то и частное k отрицательно).

349. Существование бесконечного числа простых чисел следует из результата задачи 234 (из этой задачи вытекает даже, что простые числа встречаются в ряду всех целых чисел достаточно «часто», например, «чаще», чем квадраты; см. примечание к этой задаче). Из результата задачи 90 также можно усмотреть, что простых чисел существует бесконечно много: если бы всего существовало только n простых чисел, то не могло бы быть больше чем n взаимно простых друг с другом чисел. Но наиболее простым доказательством теоремы о бесконечности числа простых чисел является следующее доказательство, принадлежавшее Евклиду.

Предположим, что имеется всего n простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, ..., p_n. Образуем число $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Число N больше всех простых чисел 2, 3, 5, ..., p_n и поэтому должно быть составным. Но так как $N-1$ делится на 2, 3, 5, 7, ..., p_n, то N взаимно просто со *всеми* простыми числами. Полученное противоречие и доказывает теорему.

350. а) Доказательство этой теоремы очень близко к доказательству Евклида бесконечности числа простых чисел. Предположим, что среди чисел вида $4k-1$ имеется только конечное число простых чисел, а именно 3, 7, 11, 19, 23, ..., p_n. Составим число $N = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot p_n) - 1$. Оно больше всех принадлежащих прогрессии простых чисел и, следовательно, должно быть составным. Разложим число N на простые множители. Среди них не может быть чисел вида $4k-1$, так как число $N+1 = 4(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \ldots p_n)$ делится на в с е простые числа вида $4k-1$, а следовательно, N взаимно просто со всеми этими числами. Так как N нечетно, то оно должно представлять собой произведение нескольких простых чисел вида $4k+1$. Но это невозможно, так как произведение двух чисел вида $4k+1$ имеет тот же вид:

$$(4k_1+1)(4k_2+1) = 16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2 + 1 = 4(4k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 4k_3 + 1,$$

а следовательно, и произведение нескольких чисел вида $4k+1$ имеет тот же вид, в то время как число N имеет вид $4k-1$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Аналогично доказывается, что существует бесконечно много простых чисел, принадлежащих прогрессии 5, 11, 17, 23, ... (простых чисел вида $6k-1$).

б) Доказательство настоящей теоремы несколько сложнее доказательств теорем задачи а), хотя построено на той же идее.

Предположим, что в ряду чисел 11, 21, 31, 41, 51, 61, ... имеется только конечное число простых: 11, 31, 41, 61, ..., p_n. Составим число $N = (11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61 \ldots p_n)^5 - 1$. Оно взаимно просто со всеми простыми числами 11, 31, 41, ..., p_n, так как число $N+1$ делится на все эти числа. Обозначим произведение $11 \cdot 31 \cdot 41 \ldots p_n$ через a, тогда $N = a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$.

Рассмотрим, какие простые делители может иметь второй множитель $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ последнего произведения. Очевидно, что $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ не делится на 2 (сумма пяти нечетных чисел нечетна). Далее, $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ делится на 5, поскольку a оканчивается на 1 (как произведение ряда чисел, каждое из которых оканчивается на 1), a^2, a^3 и a^4 все оканчиваются на 1 и, следовательно, сумма $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ оканчивается на 5. Пусть теперь p

есть простой делитель числа $a^4+a^3+a^2+a+1$, отличный от 5. В таком случае $a-1$ не может делиться на p, так как иначе a имело бы вид $kp+1$, следовательно, a^2, a^3 и a^4 (равные соответственно $(kp+1)^2$, $(kp+1)^3$ и $(kp+1)^4$) имели бы такой же вид и число

$$a^4+a^3+a^2+a+1=(kp+1)^4+(kp+1)^3+(kp+1)^2+(kp+1)+1$$

давало бы при делении на p остаток 5. Отсюда следует, что $p-1$ должно делиться на 5. Действительно, предположим, например, что $p-1$ дает при делении на 5 остаток 4: $p-1=5k+4$. Отметим, что в силу теоремы Ферма (задача 240) $a^{p-1}-1$ делится на p. Но в этом случае

$$a^{p-1}-1=a^{5k+4}-1=a^4(a^{5k}-1)+(a^4-1),$$

а так как $a^{5k}-1=(a^5)^k-1^k$ делится на a^5-1, а значит и на p, то и a^4-1 делится на p. Но $a^5-1=a(a^4-1)+(a-1)$; следовательно, если a^5-1 и a^4-1 делятся на p, то и $a-1$ должно было бы делиться на p, что, как мы уже показали выше, невозможно. Аналогично показывается, что число $p-1$ не может давать при делении на 5 остатки 1, 2 или 3.

Итак, $p-1$ делится на 5 и четно ($p-1$ четно, ибо p нечетно); следовательно, $p-1$ делится на 10 и, значит, p имеет вид $10k+1$, т. е. принадлежит нашей прогрессии. Итак, нами установлено, что простыми делителями числа $a^4+a^3+a^2+a+1$ могут быть только число 5 и простые числа вида $10k+1$.

Но число $a^4+a^3+a^2+a+1$, очевидно, больше 5 и не делится на $5^2=25$. Действительно, число a оканчивается на 1 и, следовательно, имеет вид $5k+1$. Далее, по формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned}a^4+a^3+a^2+a+1&=(5k+1)^4+(5k+1)^3+(5k+1)^2+\\&+5k+1+1=625k^4+4\cdot125k^3+6\cdot25k^2+4\cdot5k+\\&+1+125k^3+3\cdot25k^2+3\cdot5k+1+25k^2+2\cdot5k+1+\\&+5k+1+1=625k^4+5\cdot125k^3+10\cdot25k^2+10\cdot5k+5=\\&=5\cdot[5(25k^4+25k^3+10k^2+2k)+1].\end{aligned}$$

Отсюда следует, что это число, а значит, и число $N=a^5-1$ должно иметь хотя бы один простой делитель вида $10k+1$. Но, по нашему предположению, N взаимно просто со всеми простыми числами вида $10k+1$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Примечание. Отметим, что проведенное доказательство почти без всяких изменений позволяет доказать, что во всякой арифметической прогрессии, составленной из чисел вида $2pk+1$, где p — какое-то нечетное простое число, имеется бесконечно много простых чисел.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Самый высокий из самых низких.

2. Составьте сумму всех сделанных каждым из людей рукопожатий.

3. Пусть A — произвольное лицо; оно имеет либо трех знакомых, либо существуют трое лиц, с которыми A незнаком.

4. а) Не может. б) Постройте пример удовлетворяющего условиям задачи «распределения знакомств».

5. Докажите, что если A и B незнакомы, то они имеют двух общих знакомых.

6. Рассмотрите ученого, имеющего среди присутствующих *наибольшее* число знакомых.

7. Последовательно исключайте из числа делегатов пары говорящих на одном языке.

8. Пусть A — произвольный участник конференции; найдется такой язык, на котором он может говорить не менее чем с 6 другими участниками.

9. $n = \dfrac{k(k+1)}{2} + 1$, где k — целое.

10. 5000 дней (в городе существуют две такие партии, что два жителя дружат в том и только в том случае, когда они принадлежат к одной партии).

11. Если странствия рыцаря длятся достаточно долго, то найдется такой участок AB пути (где A и B — замки), по которому (в направлении от A к B) рыцарь проедет не менее трех раз.

12. Пусть A и B — два рядом сидящих врага; докажите, что Мерлин может пересадить часть рыцарей так, чтобы пара сидящих рядом врагов заменилась парой A, A' сидящих рядом друзей, а ни одна пара соседей-друзей не заменилась парой врагов.

13. а) При первом взвешивании поместите на каждую чашку по 27 монет. б) Число k определяется неравенствами $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$.

14. Сначала положите на чашку весов по одному кубику; затем, положив на одну чашку оба эти кубика, на вторую кладите поочередно по паре из оставшихся кубиков.

15. При первом взвешивании поместите на каждую чашку весов по четыре монеты.

16. а) Одно звено. б) 7 звеньев.

17. Пусть S — какая-то станция метро; рассмотрите самую далекую от нее станцию T.

18—19. Воспользуйтесь методом математической индукции.

20. Воспользуйтесь методом доказательства от противного: предположите, что утверждение задачи неверно, и, пользуясь этим, постройте бесконечную цепочку городов Швамбрании (при кон-

струировании этой цепочки удобно воспользоваться методом математической индукции).

21. Нельзя.

22. Королю достаточно пройти в один из углов доски и далее идти по диагонали доски.

23. Измените порядок следования полей так, чтобы с каждого поля можно было перейти на соседнее.

24. Докажите (скажем, методом математической индукции), что если в некотором коллективе студентов каждый из трех языков знает ровно n человек (где $n \geqslant 2$), то можно составить такую группу студентов, в которой каждый язык знают ровно 2 человека.

25. а) $2\frac{2}{3}$. б) 20.

26. 6 дней; 36 комплектов медалей.

27. 15 621.

28. Два рубля.

29. а) Закон чередования дней в году по нашему календарю таков: через каждые четыре года один год, номер которого делится на 4, является високосным; исключение составляют годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400. Отсюда легко усмотреть, что 400 лет содержат целое число недель; следовательно, остается проверить, начинается ли в течение каких-либо 400 лет новый год чаще с субботы или с воскресенья. Ответ: с воскресенья. б) На пятницу.

30. Все числа, оканчивающиеся на 0, и двузначные числа: 11, 23, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99; 12, 24, 36, 48; 13, 26, 39; 14, 28; 15; 16; 17; 18; 19.

31. а) $625\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ раз}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ б) Попытайтесь решить задачу: найти целое число, начинающееся с известной цифры a и при зачеркивании этой цифры уменьшающееся в 35 раз.

32. а) Докажите предварительно, что число уменьшается в 9 раз при зачеркивании цифры 0, стоящей на втором месте. б) 10 125 2025, 30 375, 405, 50 625, 6075, 70 875 (к каждому из этих чисел можно еще приписать в конце произвольное число нулей).

33. а) Числа, у которых все цифры, кроме первых двух, нули. б) Рассмотрите отдельно случаи, когда первая цифра искомого числа есть 1, 2, 3, ..., 9. Всего имеется 104 различных числа, удовлетворяющих условию задачи, к каждому из которых можно в конце приписать произвольное число нулей.

34. а) Наименьшее возможное число 142 857. б) Цифрами 1 или 2. Наименьшее число, начинающееся цифрой 2, есть 285 714.

35. 153 846.

36. Используйте то, что числа, которые делятся на 5, должны оканчиваться цифрами 0 или 5; числа, которые делятся на 6 или на 8, оканчиваются четной цифрой.

37. Попытайтесь решить задачу: найти число, увеличивающееся вдвое от перенесения начальной цифры в конец.

38. Решается аналогично предыдущей задаче.

39. Наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи, 7 241 379 310 344 827 586 206 896 551.

40. а) Число, меньшее своего обращенного в 5, 6, 8 или 7 раз, должно начинаться с цифры 1; число, меньшее своего обращенного в 2 и 3 раза, может начинаться с цифр 1, 2, 3, 4, соответственно

1, 2, 3. б) Числа, в 4 раза меньшие своего обращенного,— это числа

$$0,\quad 2\,178,\quad 21\,978,\quad 219\,978,\quad 2\,199\,978,\ \ldots, \qquad (*)$$

и числа, десятичная запись которых $P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1$, где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — какие-то числа ряда (*).

41. а) 142 857. б) Попытайтесь найти восьмизначное число, увеличивающееся в 6 раз при перестановке четырех последних цифр на первые четыре места с сохранением их порядка.

42. 142 857.

43. 111, 222, 333, ..., 999, 407, 518, 629, 370, 481, 592.

44—45. Рассмотрите процесс сложения «столбиком» рассматриваемых чисел.

46. Разложите на множители многочлены, выписанные в условии задачи; рассмотрите, какие остатки может давать число n при делении на 3 (соответственно на 5, на 7, и т. д.).

47. а) Воспользуйтесь тем, что разность одинаковых четных степеней делится на сумму оснований. б) См. указание к задаче 46.

48. а) $56\,786\,730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61$. Далее воспользуйтесь предложениями задач 46 а) — д) и аналогичными предложениями, вытекающими из теоремы Ферма (см. задачу 340). б) Разложите заданное выражение на множители и сравните число множителей с числом множителей числа 33.
в) Воспользуйтесь тем, что $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$.

49. При четных n.

50. Не существует.

51. Воспользуйтесь тем, что всякое целое число, не делящееся на 5, можно представить в виде $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$. Ответ: 0 или 1.

52. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.

53. 625 и 376.

54. Найдите две последние цифры числа N^{20}, три последние цифры числа N^{200}. Ответ: 7; 3.

55. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Группируя отдельные члены суммы $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$, докажите, что эта сумма делится на $\dfrac{n}{2}$ и на $(n+1)$, или на n и на $\dfrac{n+1}{2}$.

56. Разность суммы цифр числа, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, должна делиться на 11.

57. Число делится на 7.

58. Всегда можно найти число, начинающееся с цифр 1, 0 и делящееся на K. Переставляя подходящим образом цифры этого числа и вычитая одно из другого два делящихся на K числа, можно доказать, что 9 делится на K.

59. Искомое число состоит из 300 единиц.

60. Рассмотрите последние цифры чисел $N = 2^k$ (где $k = 1, 2, 3, \ldots$), а также остатки от деления чисел N на 3.

61. $26\,460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Докажите в отдельности, что заданное выражение делится на $5 \cdot 7^2$ и что оно делится на $2^2 \cdot 3^3$.

62. Воспользуйтесь тождеством

$$11^{10} - 1^{10} =$$
$$= (11-1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1).$$

63. Запишите данное число в виде

$$(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})-(4^{5555}-{}^{2222}).$$

64. Воспользуйтесь методом математической индукции.

65. Воспользуйтесь тем, что $10^6-1=999\,999$ делится на 7 и что любая степень десяти дает при делении на 6 остаток 4. Ответ: 5.

66. а) 9; 2. б) 88; 67. в) Найдите, какими двумя цифрами оканчиваются числа $7^{(14^{14})}$ и $2^{(14^{14})}$. Ответ: 36.

67. а) Оба числа оканчиваются цифрами 89. б) Докажите, что разность рассматриваемых чисел делится на $1\,000\,000=2^6\cdot5^6$.

68. а) 7; 07. б) 3; 43.

69. Рассмотрите числа

$$Z_1=9,\ Z_2=9^{Z_1},\ Z_3=9^{Z_2},\ \ldots,\ Z_{1001}=9^{Z_{1000}}=N$$

и определите последовательно одну последнюю цифру числа Z_1, две последние цифры числа Z_2, три последние цифры числа Z_3, четыре последние цифры числа Z_4, пять последних цифр числа Z_5, пять последних цифр чисел Z_6, Z_7, ..., $Z_{1001}=N$. Ответ: 45 289.

70. Составьте таблицы остатков от деления на 13 чисел 5^n и n^5. Наименьшее n, удовлетворяющее условию задачи,— это $n=12$.

71. При всех a, кратных 4, последние цифры рассматриваемого числа — это 30.

72. Искомые 1000 цифр будут $p\underbrace{PP\ldots P}_{23\text{ раза}}$, где

$$P=0204081632653061224489795918367346938775\,51$$

— период чистой периодической дроби, в которую обращается $\frac{1}{49}$, а p — группа последних 34 цифр числа P. Для доказательства воспользуйтесь тем, что

$$N=\frac{50^{1000}-1}{50-1}=\frac{50^{1000}-1}{49}.$$

73. Рассмотрите разность $M-3N$.

74. 24.

75. а) Сравните степени, в которых входит какое-нибудь простое число p в произведение $a!$ и в произведение $(t+1)(t+2)\ldots\ldots(t+a)$. б), в) Воспользуйтесь результатом задачи а). г) Докажите сначала существование такого числа k, что kd, где d — разность прогрессии, дает при делении на $n!$ остаток 1.

76. Не делится.

77. а) $(n-1)!$ не делится на n, если n простое число или $n=4$. б) $(n-1)!$ не делится на n^2, если n есть простое число, удвоенное простое число, или если $n=8$, $n=9$.

78. Докажите, что все такие числа меньше $7^2=49$. Ответ: 24, 12, 8, 6, 4 и 2.

79. а) Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел делится на 5, но не делится на 25.

б) Определите остаток, который дает сумма четных степеней трех последовательных целых чисел при делении на 3.

в) Определите остаток, который дает сумма одинаковых четных степеней девяти последовательных целых чисел при делении на 9.

80. а). Найдите остатки деления чисел A и B на 9. б) 192, 384, 576, или 273, 546, 819, или 327, 654, 981 или 219, 438, 657.

81. Четырьмя нулями.

82. Воспользуйтесь теоремой Пифагора.

83. Рассмотрите остаток от деления $b^2 - 4ac$ на 8.

84. Докажите, что при сложении дробей и возможном сокращении суммы получится дробь, знаменатель которой делится на 3 и на 2.

85. Для доказательства того, что числа M и N не являются целыми, надо показать, что после сложения мы получим дробь, знаменатель которой делится на более высокую степень 2, чем числитель.

Доказывая, что число K не является целым, надо в предшествующих рассуждениях заменить степень двойки степенью тройки.

86. а) Воспользуйтесь тем, что дробь p/q сократима или несократима одновременно с дробью q/p. б) На 13.

87. Пусть $N = a \cdot 10^{1952} + A$ — одно из читаемых указанным в условии задачи образом чисел (где a — первая цифра N); докажите, что если N делится на 27, то и число $N_1 = 10A + a$ делится на 27.

88. Докажите, что если в записи числа $a = 5^{1000}$ есть нули, то можно указать делящееся на a число, первый нуль в записи которого (если он имеется) расположен дальше от конца числа, чем у a.

89. Докажите сначала тождество

$$(1 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{4k}) \cdot 101 = (1 + 10^2 + \ldots + 10^{2k})(10^{2k+2} + 1).$$

90. Покажите, что $(2^{2^n} + 1) - 2$ делится на все предшествующие числа заданной последовательности; отсюда будет следовать, что $2^{2^n} + 1$ не может иметь с предыдущим числом последовательности общий делитель, отличный от 2.

91. Рассмотрите, какие остатки могут давать числа $2^n - 1$ и $2^n + 1$ при делении на 3.

92. а) Рассмотрите, какие остатки могут давать числа p, $8p - 1$ и $8p + 1$ при делении на 3. б) Рассмотрите, какие остатки могут давать числа p, $8p^2 + 1$ и $8p^2 - 1$ при делении на 3.

93. Рассмотрите, какие остатки может давать простое число при делении на 6.

94. См. указание к предыдущей задаче.

95. а) Докажите, что разность прогрессии должна делиться на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Ответ: 199, 409, 619, ..., 2089. б) Докажите, что если первый член прогрессии отличен от 11, то разность должна делиться на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$; если первый член равен 11, то разность должна делиться на 210. [При решении задач а) и б) удобно пользоваться таблицами простых чисел.]

96. а) Таким будет нечетное число, не делящееся на 3.

б) Достаточно найти число, не имеющее с остальными 15 из рассматриваемых 16 чисел общих множителей 2, 3, 5, 7, 11 и 13.

97. Произведение равно $\underbrace{22\ldots2}_{665\text{ раз}}1\underbrace{77\ldots7}_{665\text{раз}}8$.

98. Частное равно $\underbrace{777\ 000\ 777\ 000\ \ldots\ 777\ 000}_{\text{группа 777000 повторяется 166 раз}}77$, остаток 700.

99. $222\ 222\ 674\ 025 = 471\ 405^2$.

100. Не существуют.

101. 523 152 и 523 656.

102. 1946.

103. а) Преобразуйте выписанное число и сравните его с выражением для суммы членов арифметической прогрессии с разностью 1, первым членом 10^{n-1} и последним членом 10^n-1. б) 1 769 580.

104. Рассмотрите сначала все целые числа от 0 до 99 999 999, приписав к тем из них, которые имеют меньше восьми цифр, нули слева так, чтобы эти числа стали восьмизначными.

105. 7.

106. Нет.

107. Единиц будет на одну больше, чем двоек.

108. Не может.

109. Это число делится на 11 111.

110. 6 210 001 000.

111. Так как заданное число $A = 10^9 - 1$, то для любого числа $X = \overline{x_1x_2\ldots x_k}$ имеем $AX = \overline{x_1x_2\ldots x_k000000000} - \overline{x_1x_2\ldots x_k} = M - N$; рассмотрите процесс вычитания «столбиком» N из M.

112. Условию задачи удовлетворяют все такие $N \geqslant A$, что $N = 10^m - 1$.

113. Воспользуйтесь методом математической индукции (по числу n); при $m \geqslant n$ утверждение задачи неверно.

114. Уже на одном из первых четырех мест каждой строки встретится четное число.

115. Докажите, что сумма всех чисел каждой строки таблицы (начиная со 2-й) делится на 1958.

116. 40.

117. Если начало 1-го сеанса $12 + x$, а продолжительность сеанса y, то x и y удовлетворяют системе линейных неравенств.

118. Возможны значения $T = 20, 15, 12, 7\frac{1}{2}$ и $5\frac{5}{11}$ мин.

119. 100.

120. Искомое число должно начинаться с наибольшего возможного количества девяток, соотвественно нулей.

121. а) 147, 258, 369; б) 941, 852, 763.

122—123. Воспользуйтесь формулой для суммы членов арифметической прогрессии.

124. Представьте выражение $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ в виде квадрата многочлена.

125. Докажите, что среди рассматриваемых чисел не может быть больше четырех попарно различных.

126. Разбейте 9 гирь последовательно возрастающих весов на три группы, две из которых имеют одинаковый вес, а третья легче их.

127. Докажите, что веса всех гирь четны или все они нечетны.

128. Достаточно рассмотреть случай, когда все рассматриваемые числа положительны, а их произведение равно 1.

129. К такому набору мы наверняка придем через 2^k шагов.

130. Докажите, что в процессе описанного преобразования систем чисел эти числа постепенно выравниваются.

131. $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

132. а) Докажите, прежде всего, что каковы бы ни были первоначальные числа, мы вскере получим четверку чётных чисел. б) Для рациональных чисел утверждение задачи а) сохраняет силу, а для иррациональных — нет (здесь можно подобрать числа так, чтобы все четверки были пропорциональны исходной).

133. б) Постройте возрастающую последовательность, начиная с первого из выписанных 101 числа. Если в этой последовательности будет меньше 11 чисел, то вычеркните эти числа и постройте новую возрастающую последовательность, начинающуюся с первого оставшегося числа; если и в этой последовательности будет меньше 11 чисел, то вычеркните и ее и постройте новую возрастающую последовательность, и т. д. Если все построенные последовательности содержат меньше 11 чисел, то у нас будет не меньше 11 последовательностей; используя это обстоятельство, можно построить убывающую последовательность из 11 чисел.

134. Рассмотрите наибольшие нечетные делители этих чисел.

135. а) Рассмотрите наименьшие по абсолютной величине остатки, которые дают числа при делении на 100.

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрите остатки от деления на 100 чисел $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots$

в) Если сумма нескольких чисел <200 и делится на 100, то она равна 100.

г) Докажите последовательно, что *из любых* 3 *целых чисел можно отобрать* 2, *сумма которых делится на* 2; *из любых* 9 *целых чисел можно отобрать* 5, *сумма которых делится на* 5; *из любых* 199 *целых чисел можно отобрать* 100, *сумма которых делится на* 100 (в доказательстве 3-го факта используются первые два).

136. Воспользуйтесь методом доказательства от противного.

137. Рассмотрите число переходов (при движении по кругу в одном направлении) от крестика к нулику и от нулика к крестику.

138. Рассмотрите сумму всех множителей этого произведения.

139. Половина слагаемых рассматриваемой суммы должна равняться $+1$, а вторая половина — равняться -1.

140. Отнесите к 1-й группе все числа, запись которых содержит четное число единиц.

141. Выпишите 5 чисел одно под другим; тогда в каждом столбике число пар одинаковых цифр лежит в пределах от 400 до 600.

142. Докажите, что за несколько «шагов» можно изменить любой знак, сохраняя все остальные.

143. Используйте принцип Дирихле (см. стр. 10).

144. Разложите число $\frac{1}{N}$ в (периодическую) десятичную дробь.

145. Пусть d — разность прогрессии и $\alpha = \{d\}$ (см. стр. 37) при нецелом d и $\alpha = 1$ при целом d; достаточно расположить отрезки так, чтобы отрезок длины α нельзя было «набрать» из (расположенных «далеко» от точки, отвечающей начальному члену прогрессии) промежутков между рассматриваемыми отрезками (и их частей).

146. Докажите, что в интервале $(0, A)$ числовой оси (где $A \leqslant m + n$) содержится ровно $A - 1$ из наших дробей.

147. Обозначьте через k_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ число тех из наших чисел, которые заключаются между $\frac{1000}{i}$ и $\frac{1000}{i+1}$, и подсчитайте число меньших 1000 чисел, кратных хотя бы одному из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

148. Длина k периода $\frac{p}{q}$ может быть определена как наименьшая степень k, для которой $10^k - 1$ делится на q. Если $k = 2l$, то отсюда следует, что $10^l + 1$ делится на q, т. е. $\frac{10^l + 1}{q}$ есть целое число. Из последнего можно вывести, что в периоде

$\overline{a_1a_2\ldots a_la_{l+1}a_{l+2}\ldots a_k}$ дроби $\dfrac{p}{q}$

$$a_1 + a_{l+1} = a_2 + a_{l+2} = \ldots = a_l + a_2 = 9.$$

149. Воспользуйтесь тем, что число цифр в периодах дробей $\dfrac{a_n}{p^n}$ и $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ равно наименьшим положительным числам k и l таким, что $10^k - 1$ делится на p^n, соответственно $10^l - 1$ делится на p^{n+1}.

150. а) 7744. б) 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

151. Если a — число, образованное первыми двумя цифрами искомого числа, а b — число, образованное двумя последними цифрами, то $99a = (a+b)^2 - (a+b) = (a+b)(a+b-1)$. Ответ: 9801, 3025, 2025.

152. а) 4624, 6084, 6400, 8464. б) Таких чисел вовсе нет.

153. а) 145. б) Только число 1.

154. а) 1, 81. б) 1, 8, 17, 18, 26, 27.

155. а) x не может быть больше 4. Ответ: $x = 1$, $y = \pm 1$; $x = 3$, $y = \pm 3$. б) $x = 1$, $y = \pm 1$, z — любое четное; $x = 3$, $y = \pm 3$, $z = 2$; $x = 1$, $y = 1$, z — любое нечетное; x — любое положительно, $y = 11 + 2! + \ldots + x!$, $z = 1$.

156. Рассмотрите, на какую степень двойки могут делиться искомые четыре числа. Ответ: при n нечетном разложение невозможно, при n четном существует единственное разложение:

$$2^n = \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{2}-1}\right)^2.$$

157. См. указание к задаче 156. В задаче б) аналогично задаче а) единственный ответ: $x = y = z = v = 0$.

158. а) Можно показать, что если x, y и z удовлетворяют выписанному равенству, и, например, $z > \dfrac{kxy}{2}$, то эти числа можно уменьшить, с тем чтобы они продолжали удовлетворять тому же равенству. Если же $x \leqslant \dfrac{kyz}{2}$, $y \leqslant \dfrac{kxz}{2}$, $z \leqslant \dfrac{kxy}{2}$ и $x \leqslant y \leqslant z$, то должно быть $2 \leqslant kx \leqslant 3$. Ответ: $k = 1$ и $k = 3$. б) Каждую такую тройку целых чисел можно получить при помощи последовательных подстановок вида $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = kxy - z$ из одной из троек 1, 1, 1 и 3, 3, 3. Всего в пределах первой тысячи 23 тройки целых чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

159. Докажите, что x, y, z — четные. Ответ: $x = y = z = 0$.

160. $(x, y) = (0, -1), (-1, -1); (0, 0), (-1, 0), (5, 2), (-6, 2)$.

161. $x = 3$, $y = 1$.

162. $x = n^2$, $y = 1$, $z = n$ или $x = 0$, $y = m$, $z = 0$.

163. Предположите, что утверждение задачи неверно, и рассмотрите наибольшее простое число, для которого имеется решения.

164. Последовательно рассмотрите случаи, когда все четыре числа различны; два числа равны, остальные различны; две пары чисел попарно равны, и т. д. Ответы: 96, 96, 57, 40; 11, 11, 6, 6; $k(3k \pm 2)$, $k(3k \pm 2)$, $k(3k \pm 2)$ 1 (k — произвольное целое число, такое, что $k(3k \pm 2)$ положительно); 1, 1, 1, 1.

165. 2, 2 и 0, 0.

166. $1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}.$

167. а) Положите $x = x_1 + n$, $y = y_1 + n$. б) Ср. с указанием к задаче а). в) $x = m(m+n)t$, $y = n(m+n)t$, $z = mnt$, где m, n, t — произвольные целые числа.

168. а) Пусть $y > x$; покажите, что в этом случае y делится на x. Ответ: $x = 2$, $y = 4$. б) $x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p$, $y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$, где p — произвольное целое число, отличное от 0 и -1.

169. 7 или 14.

170. Из соотношения количества очков, набранных девятиклассниками, и числа сыгранных ими партий можно получить, что все девятиклассники выиграли все сыгранные ими партии. Отсюда следует, что в турнире участвовал единственный девятиклассник.

171. Обозначьте $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$, где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр. В таком случае задача сведется к решению в целых числах уравнения $xyz = 4(x + y + z)$, или $x = \frac{4y + 4z}{yz - 4}$. Условие $x \geqslant y$ можно рассматривать как квадратное неравенство относительно y (с коэффициентами, зависящими от z); отсюда можно найти границы, в которых должны заключаться z и y (всего задача имеет 5 решений).

172. $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

173. Докажите, что каждое число встретится на диагонали нечетное число раз. При n четном утверждение задачи неверно.

174. На $n^2 - n$.

175. Рассмотрите ту из таблиц, получаемых описанным образом, у которой сумма всех чисел таблицы м а к с и м а л ь н а.

176. 1.

177. Воспользуйтесь тем, что в i-й строке, $(9-i)$-й строке, i-м столбце и $(9-i)$-м столбце выписаны одни и те же числа.

178. Воспользуйтесь тем, что $a_{ij} + a_{kl} = a_{kj} + a_{il}$ для любых i, j, k, l.

179. Воспользуйтесь тем, что при всех i и j имеем $a_{ii} = 0$, $a_{ji} = -a_{ij}$.

180. Воспользуйтесь методом математической индукции.

181. а) Рассмотрите, как меняются знаки, стоящие в 8 клетках, примыкающих к краям доски, но не угловых. б) Сведите задачу к задаче а).

182. а) Не всегда (докажите, что не любое распределение знаков можно получить описанным образом из доски, на всех клетках которой стоят знаки «+»). б) Не всегда (ср. с указанием к задаче а)).

183. а) Сможет. б) Можно последовательно обратить в 0 все числа 1-й, затем 2-й, и т. д. строк.

184. Запишите число a в двоичной системе счисления.

185. Воспользуйтесь методом математической индукции.

186. Пусть $u_{n+1}u_{n+2} + \ldots + u_{n+8} = s_n$ (где u_k — k-е число Фибоначчи); докажите, что $u_{n+9} < s_n < u_{n+10}$.

187. Рассмотрите последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на 5.

188. Последние четыре цифры разности вполне определяются последними четырьмя цифрами уменьшаемого и вычитаемого. Докажите, что существуют n и k такие, что последние четыре цифры $(n+k)$-го и $(n+k+1)$-го чисел Фибоначчи соответственно равны последним цифрам k-го и $(k+1)$-го чисел; в таком случае последние четыре цифры $(n+k-1)$-го числа будут равны последним четырем цифрам $(k-1)$-го числа Фибоначчи, и т. д. Так можно найти число Фибоначчи, последние четыре цифры которого совпадают с последними четырьмя цифрами первого числа, равного нулю.

189. Воспользуйтесь тем, что $a_{n-1}^2+2<a_n^2<a_{n-1}^2+3$.

190. Первое решение. Дополните последовательность числом a_{n+1}. Второе решение. Воспользуйтесь методом математической индукции.

191. 2952 (докажите, что наибольшее число чисел в удовлетворяющей условиям задачи последовательности, начинающейся с наибольшего числа $a_1=n$, равно $\left[\frac{3n+1}{2}\right]$).

192. Воспользуйтесь методом доказательства от противного; рассмотрите, какими могут быть цифры α_n, α_{n+1}, ..., при приписывании которых ранее имеющееся число все время остается простым.

193. а) не встретятся; б) встретятся.

194. Число 81 впервые встретится на 111 111 111-м месте; 4 раза подряд 27 встретится раньше, чем впервые встретится число 36.

195. 1972 раза (воспользуйтесь тем, что если числа a и b взаимно просты, то пара a, b единственный раз встретится в нашем ряду I_0, I_1, ... наборов, а если a и b не взаимно просты — не встретятся ни разу).

196. Пусть α_4, α_3, α_2, α_1 — 4 последние цифры последовательности; выясните, сколько раз встречается в нашей последовательности группа цифр $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$.

197. Пусть N_k — произведение k первых простых чисел; докажите (методом математической индукции), что наше утверждение верно для чисел N_k при любом k.

198. Докажите, что любое натуральное число n можно единственным образом представить в виде $n=px+qy$, где x и y — целые и $0\leqslant x<q$.

199. Представьте фигурирующее в условии задачи число в виде $\frac{X(X+1)}{2}+x$, где $X\geqslant 0$, и $0\leqslant x\leqslant X$.

200. Рассмотрите все точки с целочисленными координатами (x, y), расположенные внутри квадрата, ограниченного осями координат и прямыми $x=100$ и $y=100$.

201. Представьте x в виде $x=[x]+\alpha$, где $\alpha=\{x\}$.

202. Воспользуйтесь результатом задачи 201 3).

203. Рассмотрите все точки с целочисленными координатами x, y, где $0<x<q$, $0<y<p$ и $\frac{y}{x}<\frac{p}{q}$.

204. Воспользуйтесь методом математической индукции. (Можно также решить задачу, исходя из геометрических соображений; для этого надо рассмотреть все точки с целыми координатами, расположенные в первом координатном углу под гиперболой $xy=n$.)

205—207. В решении задачи 205 следует использовать то, что

$$[(2+\sqrt{2})^n]=(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n-1.$$

Аналогично решаются и задачи 206а), б), 207.

208. Из p последовательных чисел n, $n-1$, $n-2$, ..., $n-p+1$ одно (и только одно) делится на p; если это число равно N, то

$\left[\frac{n}{p}\right]=\frac{N}{p}$. Таким образом, разность $C_n^p-\left[\frac{n}{p}\right]$ можно записать так:

$$\frac{n(n-1)\dots(N+1)N(N-1)\dots(n-p+1)}{p!}-\frac{N}{p}.$$

209. Если $\alpha>0$, то $\frac{N-1}{N}\leqslant\alpha\leqslant\frac{N}{N-1}$.

210. Докажите, что $\left(\frac{N}{2^k}\right)$ равно числу не превосходящих N целых чисел, делящихся на 2^{k-1}, но не делящихся на 2^k.

211. 31.

212. а) Сравните данное произведение со следующим: $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\dots\frac{98}{99}$ или возведите доказываемое неравенство в квадрат.

б) Докажите, пользуясь методом математической индукции, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\dots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

213. Второе.

214. а) Первое из чисел меньше. б) Первое из чисел больше (воспользуйтесь методом математической индукции).

215. Докажите, что если $10^{k-1}\leqslant 1974^n<10^k$, то невозможно неравенство $1974^n+2^n\geqslant 10^k$.

216. ± 11.

217. Воспользуйтесь неравенством задачи 212а).

218. 99^n+100^n больше, чем 101^n при $n\leqslant 48$, и меньше, чем 101^n при $n>48$.

219. 300!

220. Докажите предварительно, что для любого целого положительного $k\leqslant n$

$$1+\frac{k}{n}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\leqslant 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

221—222. Воспользуйтесь результатом задачи 220.

223. Воспользуйтесь методом математической индукции.

224. *Используйте формулу бинома Ньютона.*

225. Воспользуйтесь методом математической индукции.

226. Воспользуйтесь неравенством

$$(k+1)x^k(x-1)>x^{k+1}-1>(k+1)(x-1),$$

из которого можно получить, что для каждого целого положительного p

$$(p+1)^{k+1}-p^{k+1}>(k+1)p^k>p^{k+1}-(p-1)^{k+1}.$$

227. Эти неравенства можно получить, заменив члены сумм бо́льшими (соответственно меньшими) числами, может быть, предварительно сгруппировав подходящим образом эти члены (т. е. преобразовав суммы в новые, состоящие из меньшего числа членов).

228. Докажите предварительно, что $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. Ответы: а) 1998. б.) 1800.

229. Докажите предварительно, что

$$\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right]<\frac{1}{\sqrt[3]{n}}<\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n+1)^2}\right].$$

Ответ: 14 996.

230. а) 0,105. б) Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{10!}+\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}+\ldots+\frac{1}{1000!}<\frac{1}{9}\left\{\frac{9}{10!}+\frac{10}{11!}+\frac{11}{12!}+\ldots+\frac{999}{1000!}\right\}.$$

Ответ: 0,00000029.

231. Воспользуйтесь результатом задачи 227.

232. Найдите предварительно число незачеркнутых слагаемых между $\frac{1}{10^k}$ и $\frac{1}{10^{k+1}}$.

233. а) Решается аналогично задаче 231. б) Воспользуйтесь, тем, что $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}$.

234. Докажите, что для всякого целого k и целого $p\geqslant 2$

$$\lg\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots+\frac{1}{p^k}\right)<\frac{2\lg 3}{p}.$$

Воспользовавшись этим, выведите, что

$$\lg\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 2\lg 3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_l}\right),$$

где p_l — наибольшее простое число среди чисел от 1 до n.

235. Воспользуйтесь тождеством $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

236. Воспользуйтесь тем, что $a^{10}+a^5+1=\frac{(a^5)^3-1}{a^5-1}$, а $a^{15}-1=(a^3)^5-1$.

237. Докажите, что разность $(x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{1111}+1)-(x^9+x^8+\ldots+x+1)$ делится на $x^9+x^8+\ldots+x+1$.

238. а) $a^3+b^3+c^3-3abc$ делится на $a+b+c$. б) $x_1=-a-b$, где $a,\ b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$.

239. Избавьтесь от радикалов и решите полученное уравнение относительно a.

240. Воспользуйтесь тем, что если $x^2+2ax+\frac{1}{16}=y$, то $x=-a+\sqrt{a^2+y-\frac{1}{16}}$; рассмотрите графики функций $y=x^2+2ax+\frac{1}{16}$ и $y_1=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$.

241. Докажите, что должно быть $3x = x^2$.

242. а) Докажите, что должно быть $\frac{1}{1+x} = x$.

243. Корни уравнения — все числа, заключенные между 5 и 10.

244. Корни уравнения: число -2 и любое число не меньшее 2.

245. $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n$.

246. $x = \sqrt[3]{4}$.

247. При $a = \pm 1$ система имеет три решения; при $a = \pm\sqrt{2}$ система имеет два решения.

248. а) При $a = -1$ система не имеет решений, при $a = 1$ система имеет бесконечно много решений. б) При $a = \pm 1$ система имеет бесконечно много решений. в) При $a = 1$ система имеет бесконечно много решений, при $a = -2$ — не имеет ни одного решения.

249. Для того чтобы система имела решения, необходимо, чтобы три из четырех чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ были равны между собой. Если

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha,\ \alpha_4 = \beta,\ \text{то}\ x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\alpha^2}{2},\quad x_4 = \alpha\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right).$$

250. Единственное вещественное решение $x = 1,\ y = 1,\ z = 0$.

251. $x=1,\ y=0$ и $x=0,\ y=1$.

252. $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$, x произвольно; $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$ произвольны, $x=2$; $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, x_1 и x_2 произвольны, $x_3=xx_2-x_1$, $x_4=-x(x_1+x_2)$, $x_5=xx_1-x_2$.

253. Все числа равны 1, или три из них равны -1, а последнее равно 3.

254. При $a > b > c > d$ имеем $x = t = \frac{1}{a-d}$, $y = z = 0$.

255. Заметьте, что в зависимости от знака $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ квадратный двучлен $a\xi^2 + (b-1)\xi + c$ либо сохраняет знак при всех ξ, либо обращается в 0 при единственном значении ξ, либо имеет два разных корня $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$.

256. 0, если n четно и $a_1a_3\ldots a_{n-1} \neq a_2a_4\ldots a_n$; бесконечно много, если n четно и $a_1a_3\ldots a_{n-1} = a_2a_4\ldots a_n$; 2, если n нечетно.

257. а) Число действительных корней уравнения равно числу точек пересечения прямой $y = \frac{1}{100}x$ и синусоиды $y = \sin x$. б) Число корней равно числу точек пересечения синусоиды $y = \sin x$ и логарифмической кривой $y = \log x$.

258. Все числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{100}$ равны между собой.

259. Рассмотрите коэффициенты уравнения $P(x) = (x-a)\times\times(x-b)(x+c)(x+d) = 0$.

260. Рассмотрите число, обратное фигурирующей в условии задачи дроби; избавьтесь от радикалов в знаменателе полученной дроби.

261. Если a, b и $\frac{1}{ab}$ — данные числа, то условие задачи утверждает, что $a + b + \frac{1}{ab} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$.

262. Докажите (методом математической индукции), что для любых (натуральных) n и k из равенства 1 суммы n положительных чисел вытекает, что сумма всевозможных произведений по k (где $1 < k \leqslant n$) из наших чисел меньше 1.

263. $\frac{1}{2}$.

264. Все числа a_i (где $i = 1, 2, \ldots, 1973$) равны между собой (рассмотрите отдельно случаи $a_1 > 1$ и $a_1 < 1$).

265. Воспользуйтесь методом математической индукции.

266. Не может (для второго многочлена ответ положителен).

267. Воспользуйтесь методом математической индукции.

268. Если $99\,999 + 111\,111\sqrt{3} = (A + B\sqrt{3})^2$, то $99\,999 - 111\,111\sqrt{3} = (A - B\sqrt{3})^2$.

269. Докажите, что если $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, то $\sqrt[3]{2}$ есть рациональное число.

270. Пусть $A = x^m$; тогда $x + \frac{1}{x} = n$.

271. Не существуют.

272. Нельзя.

273. При $x = \frac{6k+5}{3-k^2}$, где k — рационально.

274. Оцените разность $y_1 - x_1$ близких корней уравнений

$$x^2 + px + q = 0 \text{ и } y^2 + py + q_1 = 0, \text{ где } |q_1 - q| \approx 0{,}01.$$

275. Обозначим через $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ дробные части наших чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; округлите числа $a_1, a_2, \ldots a_k$ *по недостатку,* а числа $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ — *по избытку;* подберите k.

276. 0; 0,5; 0,501; 0,502; ...; 0,999; 1.

277. Рассмотрите дробные части чисел $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, 1000\alpha$; воспользуйтесь принципом Дирихле (стр. 10).

278. а) Докажите, что если $\alpha < 1 - (0{,}1)^{100}$, то и $\sqrt{\alpha} < 1 - (0{,}1)^{100}$.

б) Воспользуйтесь тем, что рассматриваемое число x равно $\frac{1}{3}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{100}}$. Ответ: с точностью до 300 цифр после запятой:

$$x = 0{,}\underbrace{3333\ldots333}_{100\text{ троек}}\underbrace{166\,666\ldots6666}_{100\text{ шестерок}}\underbrace{250000\ldots000}_{97\text{ нулей}}.$$

279. Второе из двух выражений больше первого.

280. $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

281. а) a_1, a_2, a_4, a_3. б) Докажите, что если a_{i_α} и a_{i_β} — какие-то два из заданных чисел ($\alpha < \beta$) и $a_{i_{\alpha-1}}, a_{i_{\beta+1}}$ — числа, стоящие в искомом расположении перед a_{i_α} и после a_{i_β}, то

$$\left(a_{i_\alpha} - a_{i_\beta}\right)\left(a_{i_{\alpha-1}} - a_{i_{\beta+1}}\right) > 0.$$

282. а) Рассмотрите ломаную $A_0A_1A_2 \ldots A_n$, такую, что проекции отрезков A_0A_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ на ось Ox равны соответственно a_1, a_2, ..., a_n, а на ось Oy — b_1, b_2, ..., b_n. Равенство имеет место, если $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. б) Воспользуйтесь неравенством задачи а).

283. При n четном задача может быть решена геометрически аналогично решению задачи 282а); случай нечетного n может быть сведен к случаю четного n. Равенство имеет место при n четном, если $a_1 = 1 - a_2 = a_3 = 1 - a_4 = \ldots = a_{n-1} - a_n$, а при n нечетном — только если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \frac{1}{2}$.

284. Возведите обе части неравенства в квадрат.

285. $\cos \sin x$ больше, чем $\sin \cos x$ при любом x.

286. а) Если $\log_2 \pi = a$, $\log_5 \pi = b$, то $\pi^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 10$. б) Если $\log_2 \pi = a$, $\log_\pi 2 = b$, то $b = \frac{1}{a}$.

287. а) Воспользуйтесь тем, что для каждого угла x первой четверти $\sin x < x$. б) Воспользуйтесь тем, что для каждого угла x первой четверти $\operatorname{tg} x > x$.

288. Воспользуйтесь геометрическим определением тангенсов как длин отрезков в тригонометрическом круге или как удвоенных площадей некоторых треугольников.

289. $\arcsin \cos \arcsin x + \arccos \sin \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

290. Замените в сумме $\cos 32x + a_{31} \cos 31x + \ldots + a_1 \cos x$ угол x на $x + \pi$ и сложите полученное выражение с первоначальным.

291. Исходя из формулы $2 \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$, вычислите

$$2 \sin \left(a_1 + \frac{a_1 a_2}{2} + \ldots + \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{2^{n-1}} \right) \cdot 45^\circ$$

последовательно при $n = 1, 2, \ldots$

292. 1.

293. Воспользуйтесь тем, что данные многочлены имеют те же самые коэффициенты при x^{20}, что и $(1 + x^2 + x^3)^{1000}$, соответственно $(1 - x^2 - x^3)^{1000}$.

294. Воспользуйтесь формулой $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

295. а) $C_{1001}^{50} = \frac{1001!}{50! \cdot 951!}$. б) $1000 \cdot C_{1001}^{51} - C_{1001}^{52} = \frac{51\,050 \cdot 1001!}{52! \cdot 950!}$.

296. Обозначим данное выражение через Π_k; в таком случае $\Pi_k = (\Pi_{k-1} - 2)^2$. О т в е т: $(4^{2k-1} - 4^{k-1}) : 3$.

297. а) 6. б) $6x$.

298. $-x + 3$.

299. Воспользуйтесь тем, что многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ есть делитель двучлена $x^{12} - 1$. О т в е т: -1.

300. $P(x) = cx(x - 1)(x - 2) \ldots (x - 26)$, где c — постоянное.

301. а) Рассмотрите числа $P(10^N)$, где N достаточно велико. б) Воспользуйтесь результатом задачи а).

302. Положите в равенстве $x^{200}y^{200}+1=f(x)g(y)$ сначала $y=0$, а затем $x=0$.

303. Воспользуйтесь тем, что квадратный трехчлен $p(x)-x$ сохраняет знак при всех x.

304. Воспользуйтесь неравенствами $|p(1)|\leqslant 1$, $|p(0)|\leqslant 1$ и $|p(-1)|\leqslant 1$.

305. Рассмотрите два числа $p(x_1)$ и $p(x_2)$, где $p(x)$ — многочлен, стоящий в левой части уравнения (3).

306. $Q^2+q^2-pP(Q+q)+qP^2+Qp^2-2Qq$.

307. $a=1$ и $a=-2$.

308. а) $a=8$ и $a=12$. б) $b=1$, $c=2$, $a=3$; $b=-1$, $c=-2$, $a=-3$; $b=2$, $c=-1$, $a=1$ и $b=1$, $c=-2$, $a=-1$.

309. а) Никогда. б) Только если $n=2$, $a_2=a_1+2$ и $n=4$; $a_2=a_1-1$, $a_3=a_1+1$, $a_4=a_1+2$.

310. Воспользуйтесь тем, что если

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x),$$

то $p(x)$ и $q(x)$, так же как и $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$, ни при каком x не обращаются в нуль и поэтому не могут менять знака. В остальном решение аналогично решению задачи 309а).

311. Используйте то, что $14-7=7$ нельзя разложить в произведение нескольких целых множителей, из который четыре являются различными.

312. Воспользуйтесь тем, что если многочлен разлагается на множители с целыми коэффициентами, то при тех x, при которых многочлен равен ± 1, сомножители его тоже равны ± 1, а также тем, что многочлен третьей степени не может принимать одно и то же значение более трех раз.

313. Воспользуйтесь тем, что если p и q — два целых числа, то $P(p)-P(q)$ делится на $p-q$.

314. Докажите, что если $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$, то $k-pl=\pm 1$ и $k-ql=\pm 1$.

315. а) Приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)\ (b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)=$$
$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n+m}x^{n+m}$$

и, воспользовавшись полученной формулой, покажите, что если бы рассматриваемый многочлен разлагался на два множителя, то все коэффициенты одного из сомножителей должны были бы быть четными (что невозможно, так как в исходном многочлене старший коэффициент равен 1).

б) Положите в рассматриваемом многочлене $x=y+1$ и затем аналогично решению задачи а) покажите, что если бы полученный многочлен разлагался на два множителя, то все коэффициенты одного из сомножителей делились бы на простое число 251.

316. Воспользуйтесь той же формулой, что и при решении задачи 315а) (см. указание к этой задаче).

317. Докажите, что $P\left(\frac{p}{q}\right)$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, не может быть целым числом.

318. Пусть $P(N)=M$; докажите, что $P(N+kM)-P(N)$ при всяком k делится на M.

319. Представьте многочлен $P(x)$, принимающий при целых x целые значения, в виде суммы $P(x) = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + \ldots$ $\ldots + b_nP_n(x)$ с неопределенными коэффициентами $b_0, b_1, \ldots, b_n$, где (при целом $x \geqslant k$) $P_k(x) = C_x^k$, и определите эти коэффициенты, подставляя в последнее равенство последовательно $x =$ $= 0, 1, 2, 3, \ldots, n$.

320. а) См. указание к предыдущей задаче. б) Сделайте в многочлене замену переменных: $y = x + k$. в) Рассмотрите многочлен $Q(x) = P(x^2)$.

321. Воспользуйтесь формулой Муавра.

322. Воспользуйтесь результатом задачи 321б).

323. Если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то $x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

324. Воспользуйтесь формулой Муавра.

325. Воспользуйтесь результатом предыдущей задачи. Ответ:
$\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots + \cos^2 n\alpha = \frac{n-1}{2} + \frac{\sin(n+1)\alpha\cos n\alpha}{2\sin\alpha}$.

326. Воспользуйтесь формулами Муавра и бинома Ньютона.

327. Воспользуйтесь формулой

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

и результатами задачи 324.

328. Рассмотрите корни уравнения $x^{2n+1} - 1 = 0$.

329. Воспользуйтесь формулами задачи 321б).

330. Воспользуйтесь результатом задачи 329б).

Ответ: а) $\frac{n(2n-1)}{3}$. б) $\frac{2n(n+1)}{3}$.

331. Воспользуйтесь результатом задачи 329а).

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$ и $\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$. б) $\frac{1}{2^n}$ и $\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

332. Воспользуйтесь тем, что если α есть угол первой четверти, то $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$.

333. а), б). Воспользуйтесь формулой задачи 324. в) Воспользуйтесь результатом задачи б).

334. а) Воспользуйтесь предложением задачи 333а). б) Воспользуйтесь формулой задачи 324.

335. а) Воспользуйтесь предложением задачи 333а). б) См. указание к задаче 334б). в) Воспользуйтесь результатом задачи 331а).

336. Воспользовавшись формулой Муавра, представьте $\sin^{50}\alpha$ в виде суммы косинусов углов, кратных α, взятых с некоторыми коэффициентами. Ответ: $5000\, C_{50}^{25}R^{50} = (5000 \cdot 50!\, R^{50}) : (25!)^2$.

337. Наибольшее значение: $|z| = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 4})$; наименьшее $|z| = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + 4} - a)$.

338. Докажите, что если наибольшая из разностей аргументов наших чисел меньше 120°, то их можно умножить на число единичного модуля так, чтобы вещественная часть суммы полученных произведений была положительна. Заменить в условии задачи величину 120° большей нельзя.

339. Воспользуйтесь тем, что если изображающая z точка A комплексной плоскости лежит вне отвечающего числам $c_1, c_2, \ldots, c_n$ многоугольника $\boldsymbol{M} = C_1C_2\ldots C_n$, то она лежит «по одну сторону» от $\boldsymbol{M}$ в том смысле, что все векторы AM, где $M \in \boldsymbol{M}$, направлены в одну сторону от некоторой проходящей через A прямой l.

340. Воспользуйтесь тем, что если a не делится на p, то числа $a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$ дают при делении на p различные остатки.

341. Воспользуйтесь тем, что если $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — все целые числа меньшие N и взаимно простые с N, то числа $k_1a, k_2a, \ldots, k_ra$ дают при делении на N разные остатки.

342. Воспользуйтесь методом математической индукции.

343. Воспользуйтесь теоремой Эйлера (задача 341).

344. Докажите, пользуясь методом математической индукции, что, каково бы ни было целое число N, всегда найдется такая степень числа 2, N последних цифр которой все будут единицами и двойками; при доказательстве воспользуйтесь теоремой Эйлера (задача 341) и предложением задачи 342.

345. Ясно, что пара чисел n и n^2 является «хорошей»; сравните разложения на множители чисел $n-1$ и n^2-1.

346. Пусть a и d взаимно просты; с помощью теоремы Эйлера (задача 341) докажите, что прогрессия содержит бесконечно много натуральных степеней числа a.

347. См. указание к задаче 340.

348. а) Докажите, что для каждого нечетного простого числа p существуют два таких целых положительных числа x, y (где $x, y < \frac{p}{2}$), что x^2 и y^2-1 дают при делении на p одинаковые остатки. б) Воспользуйтесь теоремой Вильсона (задача 347).

349. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — n простых чисел. Найдите число, которое не делится ни на одно из этих чисел и больше каждого из них.

350. а) Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — n простых чисел вида $4k-1$ (или $6k-1$). Найдите число вида $4N-1$ (или $6N-1$), которое не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и больше каждого из них. б) Идея решения близка к использованной в решении задачи а).

ЛИТЕРАТУРА

А. Сборники «олимпиадских» задач

На русском языке имеется много книг, из которых можно черпать дополнительные задачи повышенной трудности (задачи «олимпиадного» типа). Из их числа, в первую очередь, хочется указать следующие:

1. А. А. Леман (сост.), Сборник задач московских математических олимпиад, М., «Просвещение», 1965.
2. Н. Б. Васильев, А. А. Егоров, Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков, М., Учпедгиз, 1963.
3. Е. А. Морозова, И. С. Петраков, Международные математические олимпиады, М., «Просвещение», 1971.
4. И. Л. Бабинская, Задачи математических олимпиад, М., «Наука», 1975.

Книги серии «Библиотвка математического кружка»

5. Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский, Математические беседы, М.— Л., Гостехиздат, 1952.
6. А. М. Яглом, И. М. Яглом, Неэлементарные задачи в элементарном изложении, М., Гостехиздат, 1954.
7. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
8. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, М., «Наука», 1967.
9. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики; геометрия (стереометрия), М., Гостехиздат, 1954.
10. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум, М., «Наука», 1970.
11. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии, М., «Наука», 1974.

Книги серии «Библиотечка физико-математической школы»

12. Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, Математические задачи, М., «Наука», 1971.
13. Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, Математические соревнования (арифметика и алгебра), М., «Наука», 1970.
14. Н. Б. Васильев, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. П. Савин, Математические соревнования (геометрия), М., «Наука», 1974.

15. С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушнеренко, Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы), М., «Наука», 1965 (см. также А. А. Кириллов, Пределы, М., «Наука», 1973),

а также другие книги той же серии, хоть и не имеющие характера задачников, но содержащие много удачных задач и упражнений:

16. Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Прямые и кривые, М., «Наука», 1970.
17. М. И. Башмаков, Уравнения и неравенства, М., «Наука», 1971.
18. И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат, М., «Наука», 1973.
19. И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль, Функции и графики (основные приемы), М., «Наука», 1973.

Наконец, следует еще назвать книги:

20. Г. Штейнгауз, Сто задач, М., «Наука», 1976.
21. В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, М., «Наука», 1972.
22. Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, М., Физматгиз, 1959.

Журналы и непериодические сборники

23. Журнал «Квант».
24. Журнал «Математика в школе».
25. Сборники «Математическое просвещение» (новая серия; 1957—1961).

Здесь имеются в виду раздел «Задачник „Кванта"» (и примыкающие к этому разделу заметки и статьи, также содержащие, как правило, много задач); раздел задач сборников «Математическое просвещение»; регулярно помещаемые в журнале «Математика в школе», отчеты о московских, всесоюзных и международных олимпиадах, содержащие перечень всех предложенных задач, и тщательно составленный обзор их решений.

Б. Общая литература о том, как решать задачи

26. Д. Пойа, Математическое открытие, М., «Наука», 1976.
27. Д. Пойа, Математика и правдоподобные рассуждения, М., «Наука», 1975.
28. Д. Пойа, Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1959.

В книгах [26]—[28] обсуждается сам процесс решения задачи и даются прямые рекомендации решающим; особый интерес представляют первые две из них, в которых общие положения автора иллюстрируются многочисленными примерами и задачами для самостоятельного решения.

В. Литература к отдельным циклам задач

1. Вводные задачи

«Логические» задачи типа многих, собранных в этом цикле задач, широко представлены в книгах о «математических развлечениях», рассчитанных на учащихся средних классов школы:

29. Б. А. Кордемский, Математическая смекалка, М., «Наука», 1965.
30. А. П. Домoряд, Математические игры и развлечения, М., Физматгиз, 1961.

31. М. Гарднер, Математические чудеса и тайны, М., «Наука», 1964.
32. В. Литцман, Веселое и занимательное о числах и фигурах, М., Физматгиз, 1963.
33. Еленьский, По следам Пифагора, М., Детгиз, 1961.

См. также рассчитанные на несколько более опытного читателя книги серии переводных сочинений на ту же тему, выпускаемые издательством «Мир»:

34. М. Гарднер, Математические головоломки и развлечения, М., «Мир», 1971.
35. М. Гарднер, Математические досуги, М., «Мир», 1972.
36. М. Гарднер, Математические новеллы, М., «Мир», 1974.
37. Л. Кэррол, История с узелками, М., «Мир», 1973.
38. Г. Штейнгауз, Мысли и размышления, М., «Мир», 1974.
39. Г. Э. Дьюдени, 520 головоломок, М., «Мир», 1975.
40. С. Голомб, Полимино, М., «Мир», 1975.
41. Д. Бизам, Я. Герцег, Игры и логика, М., «Мир», 1975.

Дополнительная литература к циклу 1

42. И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом, О математической индукции, М., «Наука», 1967 (см. также И. С. Соминский, Метод математической индукции, М., «Наука», 1975; Л. И. Головина, И. М. Яглом, Индукция в геометрии, М., Физматгиз, 1961).
43. О. Оре, Графы и их приложения, М., «Мир», 1965.
44. А. М. Яглом, И. М. Яглом, Вероятность и информация, М., «Наука», 1973.

3. Задачи на делимость чисел

45. В. Г. Болтянский, Г. Г. Левитас, Делимость чисел и простые числа, сборник «Дополнительные главы по курсу математики в 7—8 кл. для факультативных занятий» (сост. К. П. Сикорский), М., «Просвещение», 1974, стр. 5—69.
46. Н. Н. Воробьев, Признаки делимости, М., «Наука», 1974.
47. С. В. Фомин, Системы счисления, М., «Наука», 1975.

4. Разные задачи по арифметике

Из числа сборников арифметических задач, в которых можно найти дополнительные задачи, в первую очередь, хочется упомянуть (весьма, впрочем, непростую) книгу

48. В. Серпинский, 100 простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики, М., Учпедгиз, 1961

(ср. [52]—[53] и [70]—[71]), а также гораздо более доступные для начинающих сборники:

49. А. И. Островский, 75 задач по элементарной математике — простых, но..., М., «Просвещение», 1966.
50. А. И. Островский, Б. А. Кордемский, Геометрия помогает арифметике, М., Физматгиз, 1960.

5. Решение уравнений в целых числах

51. А. О. Гельфонд, Решение уравнений в целых числах, М.— Л., Гостехиздат, 1952.
52. В. Серпинский, О решении уравнений в целых числах, М., Физматгиз, 1961.

53. В. Серпинский, Пифагоровы треугольники, М., Учпедгиз, 1959.
54. А. Я. Хинчин, Великая теорема Ферма, М.—Л., ОНТИ, 1934.

6. Матрицы, последовательности, функции

55. А. Кофман, Р. Фор, Займемся исследованием операций, М., «Мир», 1966.
56. Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон, Введение в конечную математику, гл. V—VII, М., «Мир», 1964.
57. Н. Н. Воробьев, Числа Фибоначчи, М., «Наука», 1969.
58. А. И. Маркушевич, Возвратные последовательности, М., «Наука», 1975.

8—10. Дополнительная литература по алгебре

59. Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Алгебра, М., «Наука», 1966.
60. И. С. Соминский, Элементарная алгебра, М., Физматгиз, 1963.
61. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, Лекции и задачи по элементарной математике, М., «Наука», 1974.
62. А. И. Маркушевич, Деление с остатком в арифметике и в алгебре, М.—Л., Изд. Акад. пед. наук РСФСР, 1949.
63. Р. О. Кузьмин, Д. К. Фаддеев, Алгебра и арифметика комплексных чисел, Л., Учпедгиз, 1939.

11. Несколько задач из теории чисел

64. И. В. Арнольд, Теория чисел, М., Учпедгиз, 1939.
65. А. А. Бухштаб, Теория чисел, М., «Просвещение», 1966.
66. И. М. Виноградов, Основы теории чисел, М., «Наука», 1972.
67. Г. Дэвенпорт, Высшая арифметика, М., «Наука», 1965.
68. А. Я. Хинчин, Элементы теории чисел, Энциклопедия элементарной математики, кн. 1 (математика), М.—Л., Гостехиздат, 1951, стр. 251—353.
69. Л. Г. Шнирельман, Простые числа, М.—Л., Гостехиздат, 1940.
70. В. Серпинский, 250 задач по элементарной теории чисел, М., «Просвещение», 1968.
71. В. Серпинский, Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, М.—Л., Физматгиз, 1963.
72. А. Я. Хинчин, Три жемчужины теории чисел, М.—Л., Гостехиздат, 1948.